UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Tiago Henrique Pereira da Silva

Funções trigonométricas elementares e tecnologia: algumas aplicações no currículo da rede pública estadual de São Paulo

São José do Rio Preto
2015

Tiago Henrique Pereira da Silva

Funções trigonométricas elementares e tecnologia: algumas aplicações no currículo da rede pública estadual de São Paulo

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador:
Prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez

São José do Rio Preto
2015

Silva, Tiago Henrique Pereira da.
Funções trigonométricas elementares e tecnologia : algumas aplicações no currículo da rede pública estadual de São Paulo / Tiago Henrique Pereira da Silva. -- São José do Rio Preto, 2015
74 f. : il.

Orientador: Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Trigonometria - Estudo e ensino. 3. Funções trigonométricas - Ensino auxiliado por computador. 4. Tecnologia educacional. 5. Educação e Estado - São Paulo (Estado) I. Apaza Rodriguez, Jaime Edmundo. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 514(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Tiago Henrique Pereira da Silva

Funções trigonométricas elementares e tecnologia: algumas aplicações no currículo da rede pública estadual de São Paulo

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão examinadora

Prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
UNESP – Campus de Ilha Solteira
Orientador

Prof. Dr. José Marcos Lopes
UNESP – Campus de Ilha Solteira

Profa. Drª. Eugenia Brunilda Opazo Uribe
UFMS – Campus de Três Lagoas

São José do Rio Preto
13 de fevereiro de 2015

Dedico a todos que acreditam nas tecnologias a favor da aprendizagem matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que ajudaram durante este percurso no mestrado. E em especial...

À minha mãe Sidineide, por ter me ensinado os bons valores e sempre ter me apoiado nos meus estudos;

Ao meu pai Horaci, que passou a compreender a minha necessidade de estudar para buscar uma condição de vida melhor;

Ao meu orientador professor Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez, pela paciência e compreensão nesta orientação;

Ao meu amigo João Francisco (Sisko), por ser meu espelho de determinação;

Aos meus amigos e colegas de trabalho Sérgio, Gilberto e Suzana, por suas contribuições significativas na minha formação básica e por serem meus espelhos profissionais;

Aos amigos e aos professores do PROFMAT da UNESP de Ilha Solteira, que contribuíram muito na minha formação;

À minha ex-diretora Regina Marta, pelo apoio;

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

A necessidade de implementar um programa de ensino para a educação básica que buscasse melhorar a aprendizagem dos estudantes da rede pública estadual levou o governo do Estado de São Paulo a criar o Programa “São Paulo Faz Escola”, norteado pelos princípios da escola que aprende, o currículo como espaço de cultura, 22 as competências como eixo de aprendizagem, prioridade da competência de leitura e escrita, a articulação das competências para aprender e a contextualização no mundo do trabalho. Em Matemática, salienta-se a necessidade de uma abordagem contextualizada, atuando em parceira com os recursos tecnológicos sempre que possível e priorizando os aspectos práticos dos conteúdos. Pretende-se mostrar a importância da articulação entre teoria e prática através do estudo da parte teórica das funções trigonométricas elementares (seno, cosseno e tangente) presente nos seus gráficos, aproveitando melhor o tempo disponível em sala de aula com a utilização do aplicativo GeoGebra.

Palavras-chave: educação básica; Programa “São Paulo Faz Escola”; currículo; funções trigonométricas; recursos tecnológicos.

ABSTRACT

The need to implement an educational program for basic education that seek to improve student learning in public schools led the government of the State of São Paulo to create the Program "São Paulo Faz Escola", guided by the principles of school learning, the curriculum as a space of culture, skills as a focus for learning, skills of reading and writing priority, the articulation of skills to learn and contextualization in the workplace. In Mathematics, highlight the need for a contextual approach, working in partnership with the technological resources whenever possible and prioritizing the practical aspects of content. It is intended to show the importance of the relationship between theory and practice through the study of theoretical part of elementary trigonometric functions (sine, cosine and tangent) present in their graphics, better use the available time in the classroom using the GeoGebra application.

Keywords: *basic education; Program “São Paulo Faz Escola”; curriculum; trigonometric functions; technological resources.*

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os conteúdos contemplados no ensino de trigonometria são essenciais para ampliar os conhecimentos do aluno na resolução de problemas e aplicá-los em diferentes contextos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio reconhecem a necessidade do estudo abrangente da trigonometria, com prioridade aos conceitos relacionados às funções trigonométricas elementares, às propriedades presentes nos seus gráficos e à contextualização com situações que envolvem periodicidade e a medição de distâncias inacessíveis.

> "Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos" (BRASIL, 2000, p. 44).

Este trabalho tem como objetivo propor aos docentes da educação básica uma abordagem das funções trigonométricas elementares conforme as diretrizes descritas nos PCNs e no currículo do Estado de São Paulo, utilizando o aplicativo GeoGebra como ferramenta de apoio durante o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula.

O capítulo 2 descreverá um breve histórico sobre a implantação de um currículo único para a rede pública estadual paulista e o software GeoGebra.

No capítulo 3, serão descritas as principais propriedades presentes nas funções seno, cosseno e tangente com o uso desta ferramenta virtual.

No capítulo 4, será feita uma análise da situação de aprendizagem "Gráficos de funções trigonométricas envolvendo senos e cossenos", presente no caderno do aluno de Matemática no 1º semestre da 2ª série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2014d). Será descrito uma abordagem na qual o autor realizou o desenvolvimento desta situação de aprendizagem com turmas de 2ª série do Ensino Médio em uma escola pública da rede estadual paulista nos anos de 2010 e 2013, utilizando o GeoGebra e os resultados alcançados.

2 PROGRAMA “SÃO PAULO FAZ ESCOLA”, MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Nos últimos anos, o Governo do Estado de São Paulo tem criado ações na perspectiva de obter avanços na qualidade do ensino oferecido pelas escolas públicas estaduais, dentre as quais se encontra o Programa “São Paulo Faz Escola”, instituído na rede de ensino no ano de 2008.

> “Este documento básico apresenta os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. O documento aborda algumas das principais características da sociedade do conhecimento e das pressões que a contemporaneidade exerce sobre os jovens cidadãos, propondo princípios orientadores para a prática educativa, a fim de que as escolas possam se tornar aptas a preparar seus alunos para esse novo tempo. Priorizando a competência da leitura e da escrita, esta proposta define a escola como espaço de cultura e de articulação de competências e conteúdos disciplinares” (SÃO PAULO (Estado), 2014a).

A Proposta Curricular tem como prioridade a **qualidade** da educação, partindo do princípio que “*em um mundo no qual o conhecimento é usado de forma intensiva, o diferencial será marcado pela qualidade da educação recebida*” (SÃO PAULO (Estado), 2014a).

Tal documento adota como eixos norteadores: a escola que aprende, o currículo como espaço de cultura, as competências como eixo de aprendizagem, a prioridade da competência de leitura e escrita, a articulação das competências para aprender e a contextualização no mundo do trabalho.

A escola que também aprende tem como meta promover o trabalho colaborativo, levando em consideração que nos tempos atuais a tecnologia influencia avanços e mudanças repentinas nas formas de aprendizagem (SÃO PAULO (Estado), 2014a).

Considerar o currículo como espaço de cultura implica em buscar a interação entre conhecimento e cotidiano, em que todas as atividades extraclasse propostas possuem a finalidade pedagógica de contribuir para aprendizagens relevantes que contextualizam as práticas culturais com as áreas do conhecimento (linguagens e códigos, ciências da natureza, matemática e humanidades) (SÃO PAULO (Estado), 2014a).

A aprendizagem centrada em competências promove a democratização escolar, cabendo à escola ser igualmente acessível a todos. Os conteúdos são desenvolvidos com ênfase nos itens essenciais para que todos aprendam ao final do processo, partindo da heterogeneidade presente em sala de aula, garantindo a todos uma base comum na perspectiva de construir resultados unitários (SÃO PAULO (Estado), 2014a).

Esta proposta prioriza o direito do aluno em aprender, levando em conta a transição da cultura do ensino para a cultura da aprendizagem e considera também que a tríade “professores, gestores e alunos” são responsáveis em conjunto pelo sucesso da aprendizagem. O domínio das linguagens é fundamental para a autonomia, proporcionando condições para a construção de significados. A responsabilidade pela disseminação e avaliação das competências leitora e escritora compete a todos os professores, que devem promover oportunidades para que os alunos compreendam as linguagens presentes nas culturas e suas diferentes formas de comunicação (SÃO PAULO (Estado), 2014a).

O currículo segue as cinco competências formuladas no referencial teórico do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), articulando com a leitura e a escrita.

A articulação com o mercado de trabalho é realizada através de contextualizações nas disciplinas, em que o conteúdo é direcionado para os aspectos práticos necessários às diferentes profissões, no intuito de reduzir as desigualdades sociais (SÃO PAULO (Estado), 2014a).

2.1 A CONTEXTUALIZAÇÃO NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Na área de Matemática e suas tecnologias, o currículo do Estado de São Paulo para o Ensino Médio é norteado por três pares complementares de competências, conhecidos por eixos e também presentes nas matrizes do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O eixo “expressão / compreensão” contempla a utilização de diferentes linguagens para interpretar a leitura de um texto, a análise de tabelas e gráficos, os fenômenos históricos. O eixo “argumentação / decisão” a compreende a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações. O eixo “contextualização / abstração” contempla a criação de significados na realidade com os conteúdos estudados e a capacidade de imaginar o que não é concreto. No estudo das funções trigonométricas, reconhecemos facilmente as ações descritas pelos três eixos (SÃO PAULO (Estado), 2014a).

A proposta recomenda a interação da Matemática com as demais áreas do conhecimento e a utilização dos recursos tecnológicos, na perspectiva de promover a contextualização com os assuntos em estudo, favorecendo a construção do senso crítico do aluno.

> “Neste Currículo, a Matemática é apresentada como um sistema primário de expressão, assim como a língua materna, com a qual interage continuamente. Ela também deve articular-se permanentemente com todas as formas de expressão, especialmente com as que são associadas às tecnologias informáticas, colaborando para uma tomada de consciência da ampliação de horizontes que essas novas ferramentas propiciam” (SÃO PAULO (Estado), 2014a, p. 35).

> “É importante mencionar ainda que, em tais procedimentos, a expectativa é a de que se possa abrir o maior espaço possível para uma incorporação crítica das tecnologias disponíveis, particularmente as tecnologias da informação e da comunicação” (SÃO PAULO (Estado), 2014a, p. 40).

2.2 O SOFTWARE GEOGEBRA

GeoGebra (Hohenwarter, 2014) é um software matemático destinado ao estudo de geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas.

O aplicativo é um sistema de geometria dinâmica que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas como com funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica. A sua característica marcante é uma expressão em álgebra corresponder a um objeto concreto na geometria e vice-versa, havendo a possibilidade de visualização simultânea de ambas. O software também trabalha com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos, permitindo ao usuário obter derivadas e integrais de funções, além de oferecer comandos, como raízes e extremos.

GeoGebra é um **software livre**, disponível com a permissão para qualquer um usá-lo, copiá-lo, e distribuí-lo, seja na sua forma original ou com modificações. Ele é desenvolvido na plataforma *Java*, havendo a possibilidade de utilização em diversos sistemas operacionais. Também existe a versão web, podendo ser acessada de qualquer navegador que tenha o *plugin* da plataforma *Java* instalado.

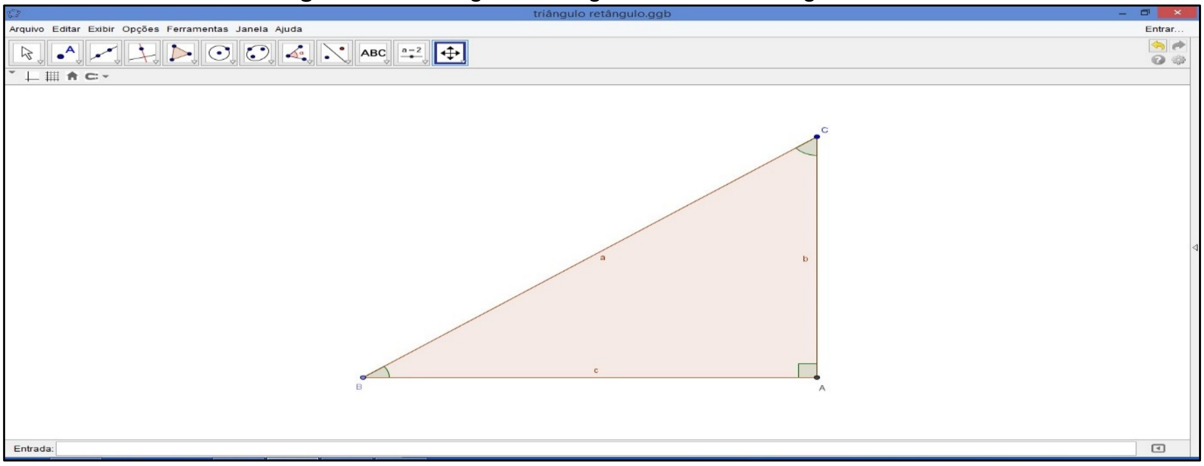
Conforme descrito em sua página oficial na web, o aplicativo é reconhecido internacionalmente com premiações (GEOGEBRA, 2015), descritas a seguir:

- MERLOT Classics Award 2013: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA);
- NTLC Award 2010: National Technology Leadership Award (Washington D.C., USA);
- Tech Award 2009: Laureat in the Education Category (San Jose, California, USA);
- BETT Award 2009: Finalist in London for British Educational Technology Award;
- SourceForge.net Community Choice Awards 2008: Finalist, Best Project for Educators;
- AECT Distinguished Development Award 2008: Association for Educational Communications and Technology (Orlando, USA);
- Learnie Award 2006: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria);
- eTwinning Award 2006: 1st prize for "Crop Circles Challenge" with GeoGebra (Linz, Austria);
- Trophées du Libre 2005: International Free Software Award, category Education (Soisson, France);
- Comenius 2004: German Educational Media Award (Berlin, Germany);
- Learnie Award 2005: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria);
- digita 2004: German Educational Software Award (Cologne, Germany);
- Learnie Award 2003: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria);
- EASA 2002: European Academic Software Award (Ronneby, Sweden).

2.3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM TRIGONOMETRIA

O objeto inicial de estudo em trigonometria é o triângulo retângulo. Dado um triângulo retângulo ABC, conforme a figura 1, podemos definir as relações trigonométricas elementares:

Figura 1 – Triângulo retângulo ABC, com ângulo reto Â



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

O **seno** de um ângulo agudo $\hat{B}$, representado por $\operatorname{sen}\hat{B}$, é a razão entre as medidas do cateto oposto a $\hat{B}$ pela hipotenusa. A partir da figura 1, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}$$

O **cosseno** de um ângulo agudo $\hat{B}$, representado por $\cos\hat{B}$, é a razão entre as medidas do cateto adjacente a $\hat{B}$ pela hipotenusa. Com base na figura 1, temos:

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$

A **tangente** de um ângulo agudo $\hat{B}$, representada por $\operatorname{tg}\hat{B}$, é a razão entre as medidas do cateto oposto a $\hat{B}$ pelo cateto adjacente a $\hat{B}$. Pela figura 1, temos:

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c}$$

De modo análogo, a partir do ângulo $\hat{C}$ na figura 1, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{b}$$

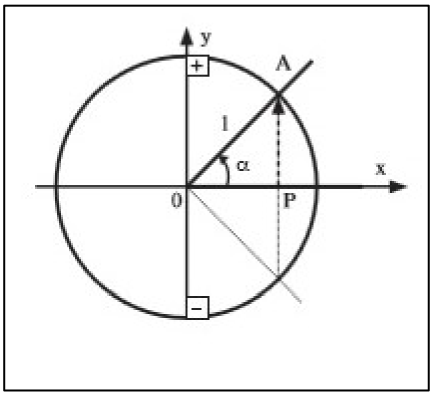
Com as razões descritas acima, nota-se que a razão tangente equivale ao quociente da razão seno pela razão cosseno. De fato:

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\cos\hat{C}} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b}$$

Para estender o estudo das razões trigonométricas (em particular seno e cosseno) para ângulos quaisquer, e assim estudar as funções trigonométricas, como funções reais, é construída uma circunferência de raio unitário, conforme descrito no volume 2 do Caderno do Professor da 1ª série do Ensino Médio e na figura 2:

Figura 2 – Circunferência trigonométrica



Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014f, p.71.

"Escolhendo-se o raio igual a 1 e representando os ângulos no sentido anti-horário, a partir da horizontal, a medida da semicorda vertical (PA) é o seno do ângulo α (α é a metade do ângulo central correspondente à corda inteira" (SÃO PAULO, 2014f, p. 71). De fato:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{PA}}{1} = \mathrm{PA}$$

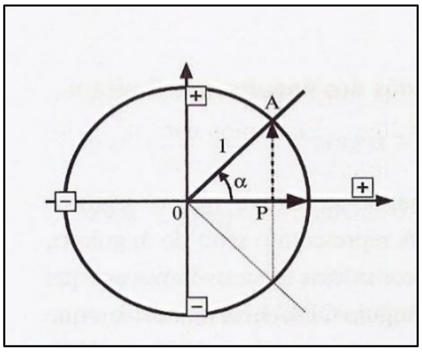
De modo análogo, a medida do segmento OP é o cosseno do ângulo α:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OP}}{1} = \mathrm{OP}$$

Para estender o conceito de seno e cosseno para os demais quadrantes, deve-se convencionar que, na circunferência acima, o eixo das abscissas (Ox) corresponde ao eixo dos cossenos e o eixo das ordenadas (Oy) corresponde ao eixo dos senos. Dessa forma, o ponto A possui coordenadas (cos α, sen α).

No 1º quadrante, temos 0 < cos α < 1 e 0 < sen α < 1, conforme a figura 3:

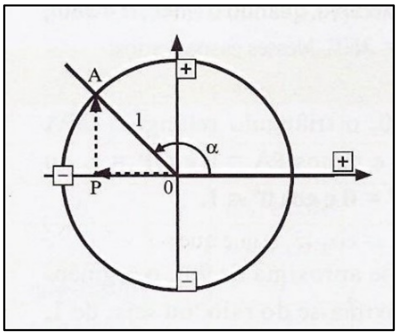
Figura 3 – Seno e cosseno no 1º quadrante



Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014f, p.73.

No 2º quadrante, temos –1 < cos α < 0 e 0 < sen α < 1, conforme a figura 4:

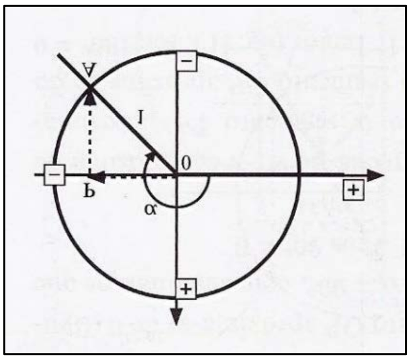
Figura 4 – Seno e cosseno no 2º quadrante



Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014f, p.73.

No 3º quadrante, temos –1 < cos α < 0 e –1 < sen α < 0, conforme a figura 5:

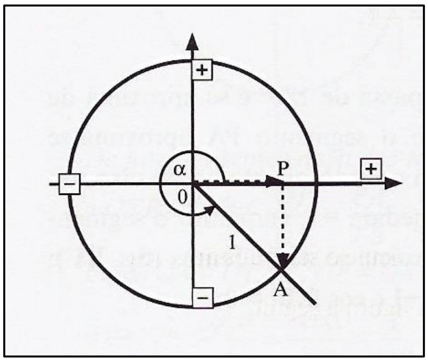
Figura 5 – Seno e cosseno no 3º quadrante



Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014f, p.74.

No 4º quadrante, temos 0 < cos α < 1 e –1 < sen α < 0, conforme a figura 6:

Figura 6 – Seno e cosseno no 4º quadrante



Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014f, p.74.

A definição da razão tangente na circunferência é realizada no intuito de mostrar que ela não existe para arcos de 90 e 270 graus, com foco na divisão do seno pelo cosseno, dado que o cosseno destes arcos é igual a zero.

Finalizado o estudo das razões trigonométricas elementares na circunferência, é possível calcular essas relações para ângulos não definidos no intervalo de 0 até 360 graus e os ângulos equivalentes na circunferência.

Posteriormente define-se a equivalência entre graus e radianos, na qual 1 radiano equivale ao arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o referido arco. Pelo fato do comprimento da circunferência ser igual ao produto de 2π pela medida do seu respectivo raio, o comprimento da circunferência unitária é $2\pi\ \mathrm{rad}$. Dessa forma, podemos concluir que $2\pi\ \mathrm{rad} = 360°$, o que permite trabalhar com uma grandeza contínua (o radiano) e, posteriormente, estender o estudo das relações trigonométricas para as funções trigonométricas.

Para melhor familiarização com o assunto, é necessária a compreensão do conceito de continuidade de funções reais.

Dada uma função f, o seu domínio corresponde a todos os pontos de um intervalo I. Se para cada ponto $a \in I$ tivermos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, então f é contínua em todo o seu domínio.

Sabemos que o gráfico de uma função real é uma curva desenhada no plano cartesiano. Se tal curva não apresenta "saltos" ou "interrupções" no seu traçado, dizemos que a função que determina tal curva é contínua em todo ponto do seu domínio ou no intervalo onde tal função estiver definida. Na educação básica pode não ser conveniente definir com um rigor matemático de certos conceitos, levando em consideração que o estudante ainda não possui os requisitos necessários para adotar certa linguagem. A recomendação é buscar uma linguagem mais acessível, não fugindo da conceituação matemática correta.

Uma leitura recomendada ao docente para ampliar seus conhecimentos sobre Trigonometria é o volume 3 da coleção "Fundamentos de Matemática Elementar" (IEZZI, 2004).

3. FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE NO GEOGEBRA

Com o auxílio do aplicativo GeoGebra, será mostrado alguns comportamentos das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

3.1 Função seno e propriedades

Definição: Dado um número real x, denomina-se função seno a relação $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa x a sen (x), ou seja, $f(x) = \text{sen}\,(x)$.

Domínio: $\mathbb{R}$

Período: 2π, visto que $f(x) = f(x + 2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Imagem: [-1;1]

Amplitude: como $f(x) = \text{sen}\,(x)$ é uma função circular e sua imagem situa-se em um intervalo fechado, pode-se definir a amplitude da mesma pela relação:

$$\frac{f(x)_{max} - f(x)_{min}}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Estudo do sinal:

De um modo geral, $f(x) = \text{sen}\,(x)$ é positiva no 1º e no 2º quadrante da circunferência trigonométrica, negativa no 3º e no 4º quadrante e nula quando $x = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$.

$$f(x) = \text{sen}\,(x) \begin{cases} > 0, \text{se } 0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ = 0, \text{se } x = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ < 0, \text{se } \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

A função seno é contínua em todo o seu domínio.

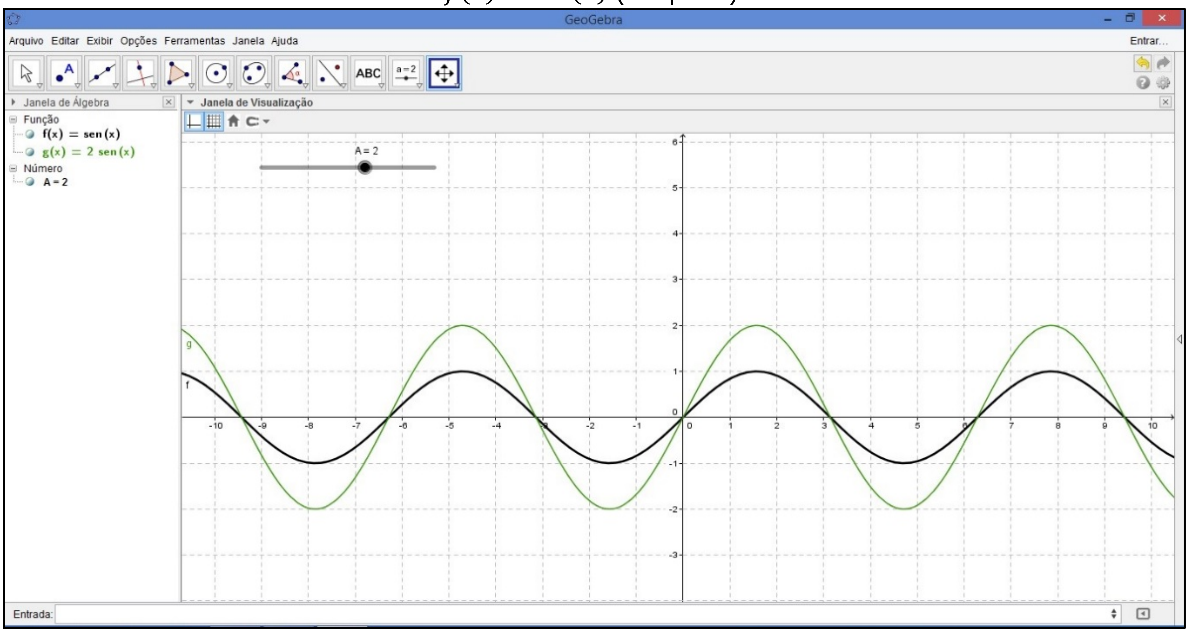
Variações da função seno: Sejam *A*, *B*, *C*, *D* e x números reais, há infinitas variações da função seno, representada por $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D$. A função $f(x) = \text{sen}\,(x)$ é um caso particular na qual $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$ e $D = 0$. No presente trabalho, será estudado o comportamento das senóides a partir das variações dos parâmetros *A*, *B*, *C* e *D* no aplicativo GeoGebra.

3.1.1 Função $f(x) = A \cdot \operatorname{sen}(Bx + C) + D$: variações no parâmetro A (amplitude)

Considere a função $f(x) = A \cdot \operatorname{sen}(x)$, com $A \in \mathbb{R}$ e $A \neq 0$. Através do GeoGebra, serão representadas algumas senóides com valores distintos no parâmetro A.

- **Caso 1:** $\boldsymbol{f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(x)}$

Figura 7 – Representação gráfica das funções $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(x)$ (em verde) e $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ (em preto).



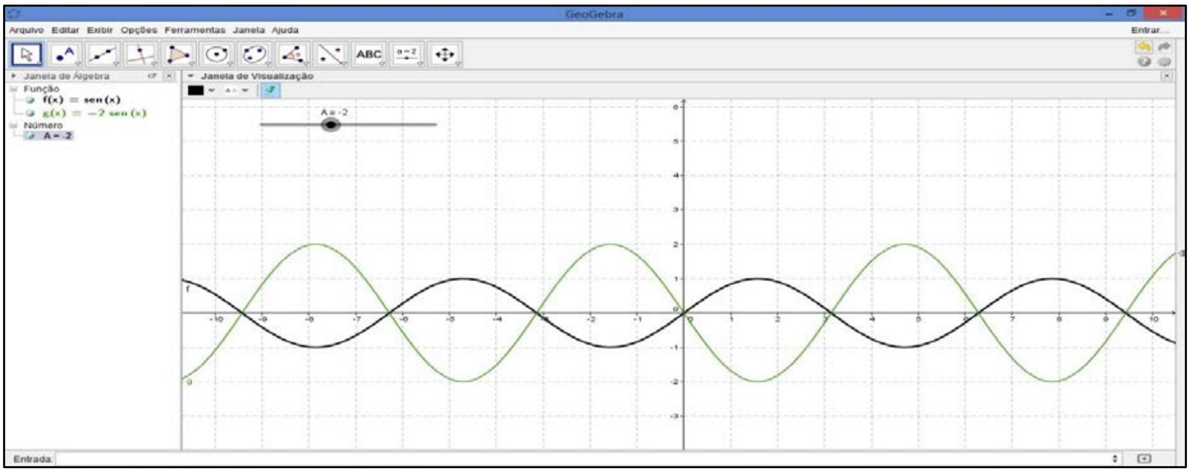
Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Na figura 7, observa-se que houve uma mudança nos extremos globais em relação a $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, representada em preto. No caso, o máximo global e o mínimo global passam a ser, respectivamente $y = 2$ e $y = -2$. Consequentemente, a amplitude será igual a 2.

Devemos indicar que os termos máximo e mínimo acima mencionados são números reais. Para f(x), um valor f(x°) é máximo se f(x°) ≥ f(x), para todo x no domínio de f. Neste caso x° é o ponto de máximo. Analogamente, um valor f(x’) é mínimo se f(x’) ≤ f(x), para todo x. Neste caso x’ é o ponto de mínimo.

- **Caso 2:** $\boldsymbol{f(x) = -2 \cdot \mathrm{sen}(x)}$

Figura 8 – Representação gráfica das funções $f(x) = -2 \cdot \mathrm{sen}(x)$ (em verde) e $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ (em preto).

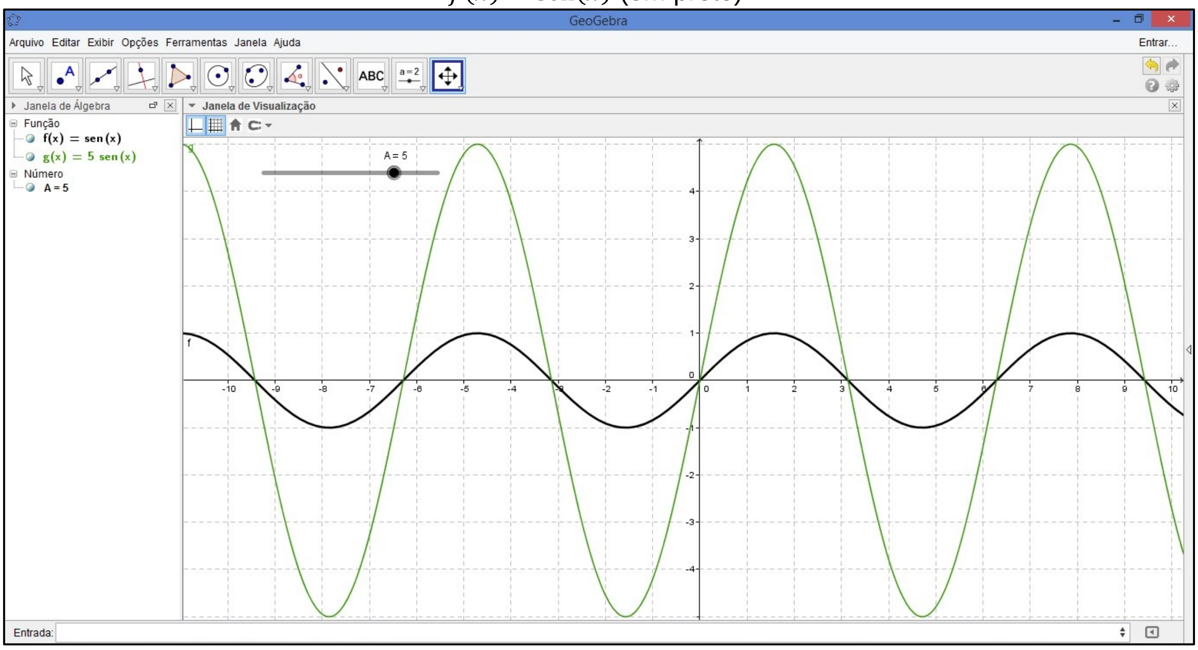


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, o máximo global e o mínimo global passam a ser, respectivamente, $y = 2$ e $y = -2$. Dessa forma, a amplitude será igual a 2.

- **Caso 3:** $\boldsymbol{f(x) = 5 \cdot \mathrm{sen}(x)}$

Figura 9 – Representação gráfica das funções $f(x) = 5 \cdot \mathrm{sen}(x)$ (em verde) e $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ (em preto).

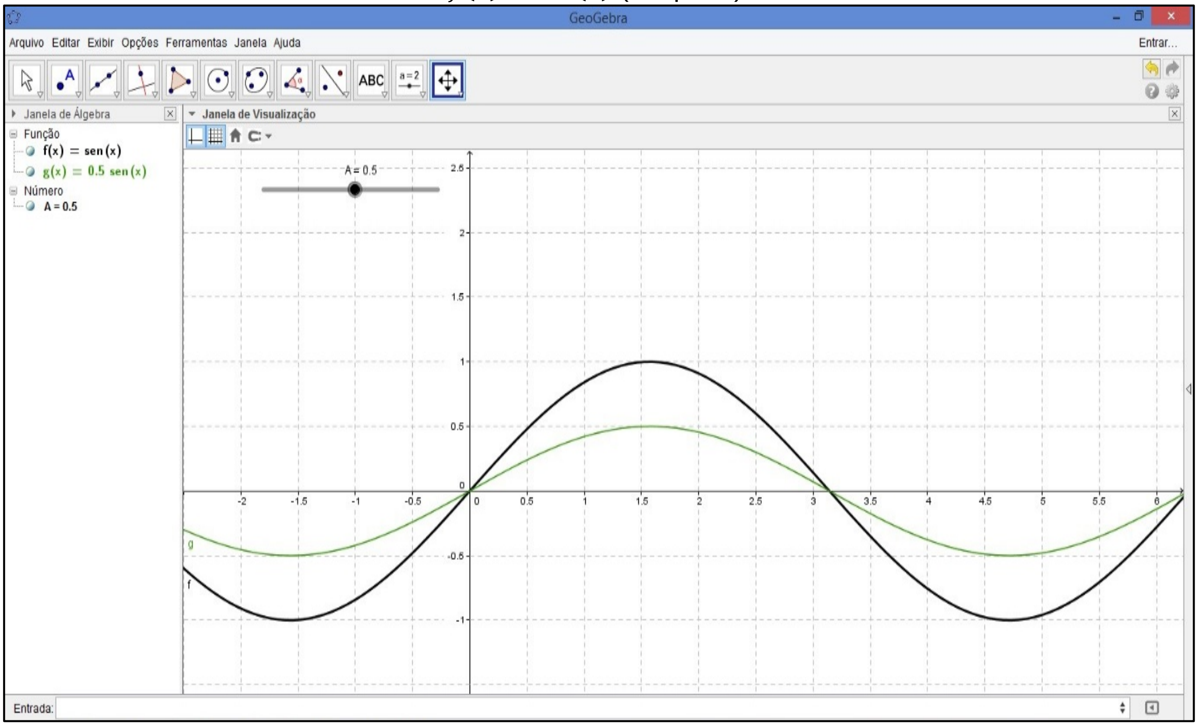


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, o máximo global e o mínimo global passam a ser, respectivamente, $y = 5$ e $y = -5$. Dessa forma, a amplitude será igual a 5.

- **Caso 4: $f(x) = 0,5 \cdot \text{sen}(x)$**

Figura 10 – Representação gráfica das funções $f(x) = 0{,}5 \cdot \text{sen}(x)$ (em verde) e $f(x) = \text{sen}(x)$ (em preto).



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, o máximo global e o mínimo global passam a ser, respectivamente, $y = 0{,}5$ e $y = -0{,}5$. Sendo assim, a amplitude será igual a 0,5.

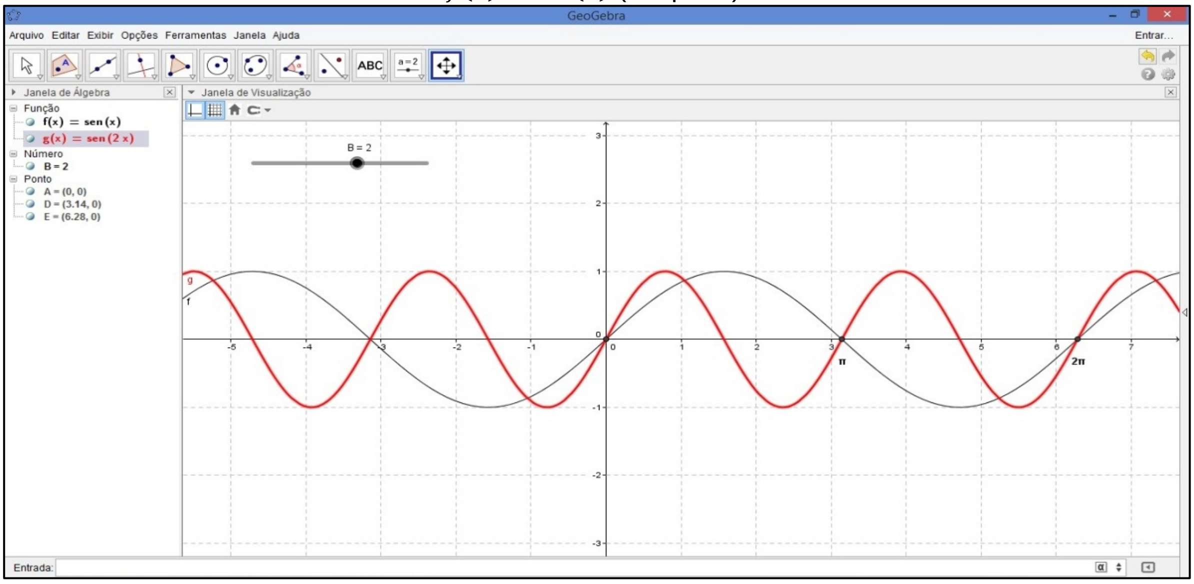
Os testes variando o valor da constante *A* mostram intuitivamente que este coeficiente está relacionado direto com a amplitude da função trigonométrica. Portanto, o valor do coeficiente *A* indica qual a amplitude da função dada.

3.1.2 Função $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D$: variações no parâmetro B (período)

Seja a função $f(x) = \text{sen}(Bx)$, com $B \in \mathbb{R}$ e $B \neq 0$. Através do GeoGebra, serão representadas algumas senóides com valores distintos no parâmetro *B*.

- **Caso 1:** $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{sen}(2x)}$

Figura 11 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{sen}(2x)$ (em vermelho) e $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ (em preto).

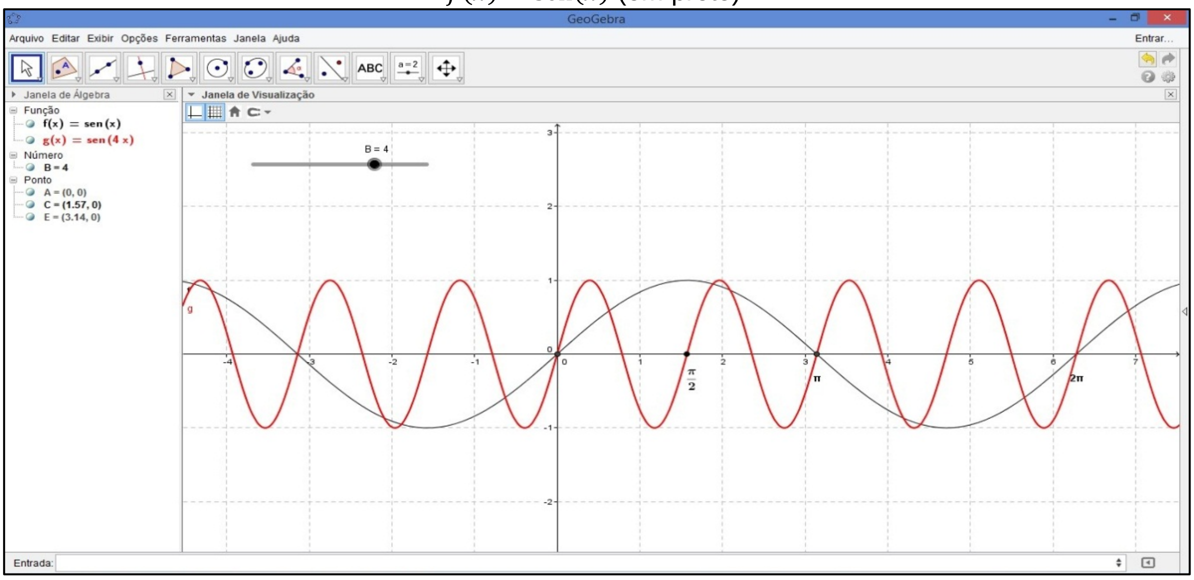


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Observa-se que, na figura 11, ocorre uma variação no período da função em vermelho, passando a ser π.

- **Caso 2:** $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{sen}(4x)}$

Figura 12 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{sen}(4x)$ (em vermelho) e $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ (em preto).

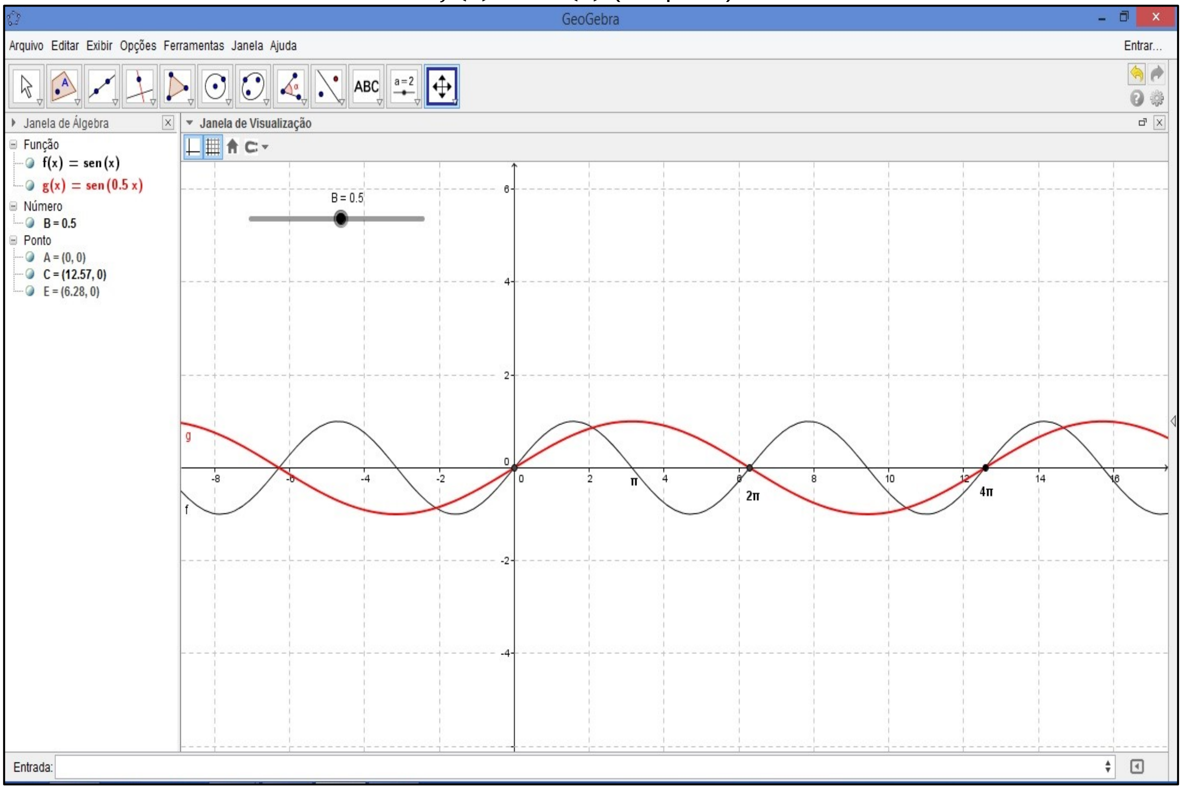


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Observa-se que, na figura 12, ocorre uma variação no período da função em vermelho, passando a ser $\frac{\pi}{2}$.

➢ **Caso 3:** $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$

Figura 13 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ (em vermelho) e $f(x) = \text{sen}(x)$ (em preto).



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Observa-se que, na figura 13, ocorre uma variação no período da função em vermelho, passando a ser 4π.

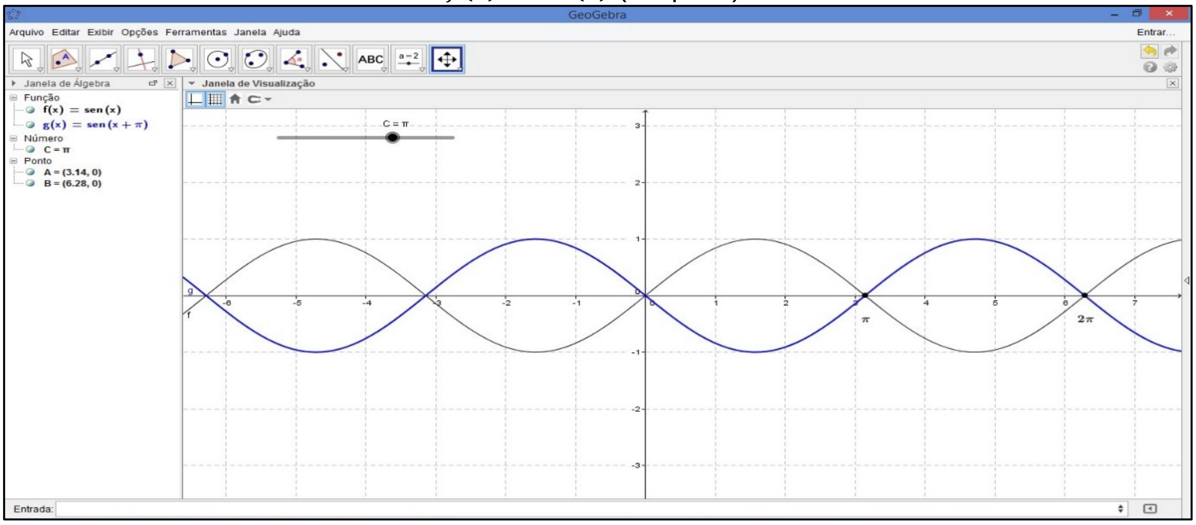
Os testes mostram de forma intuitiva que o período da função $\boldsymbol{f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D}$ é igual a $\frac{2\pi}{B}$.

3.1.3 Função $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D$: variações no parâmetro C (deslocamentos horizontais)

Considere a função $f(x) = \text{sen}(x + C)$, com $C \in \mathbb{R}$. Serão representadas a seguir algumas senóides com valores distintos no parâmetro C.

- **Caso 1:** $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}(x+\pi)}$

Figura 14 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{sen}(x+\pi)$ (em azul) e $f(x) = \text{sen}(x)$ (em preto).

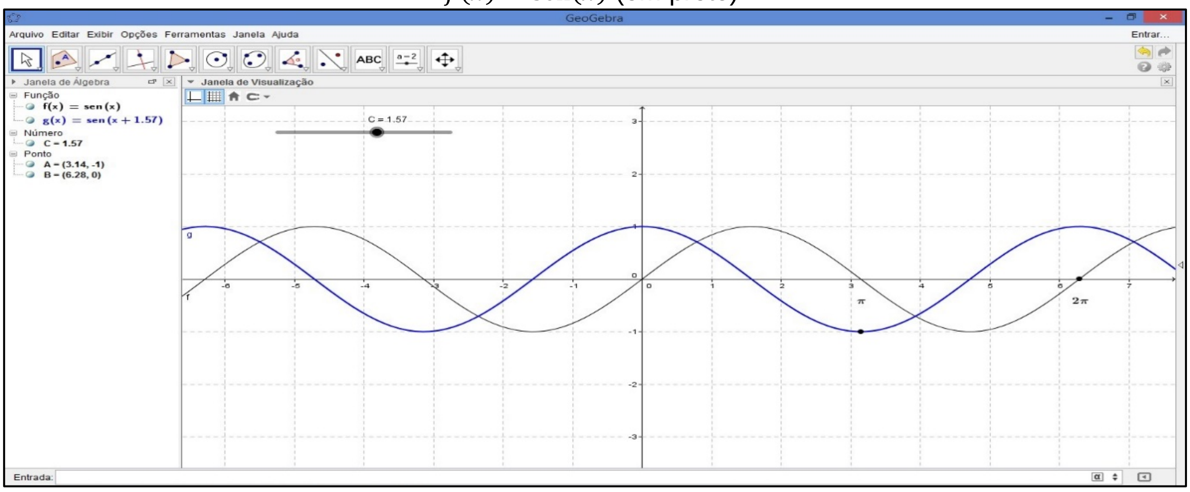


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ de π unidades para a esquerda, mantendo o período e a amplitude. Por $f(x) = \text{sen}(x)$ ser uma função periódica, note no gráfico que $f(x) = \text{sen}(x+\pi) = -\text{sen}(x) = \text{sen}(-x)$, implicando no fato de $\text{sen}(x)$ ser também uma *função ímpar*.

- **Caso 2:** $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

Figura 15 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (em azul) e $f(x) = \text{sen}(x)$ (em preto).

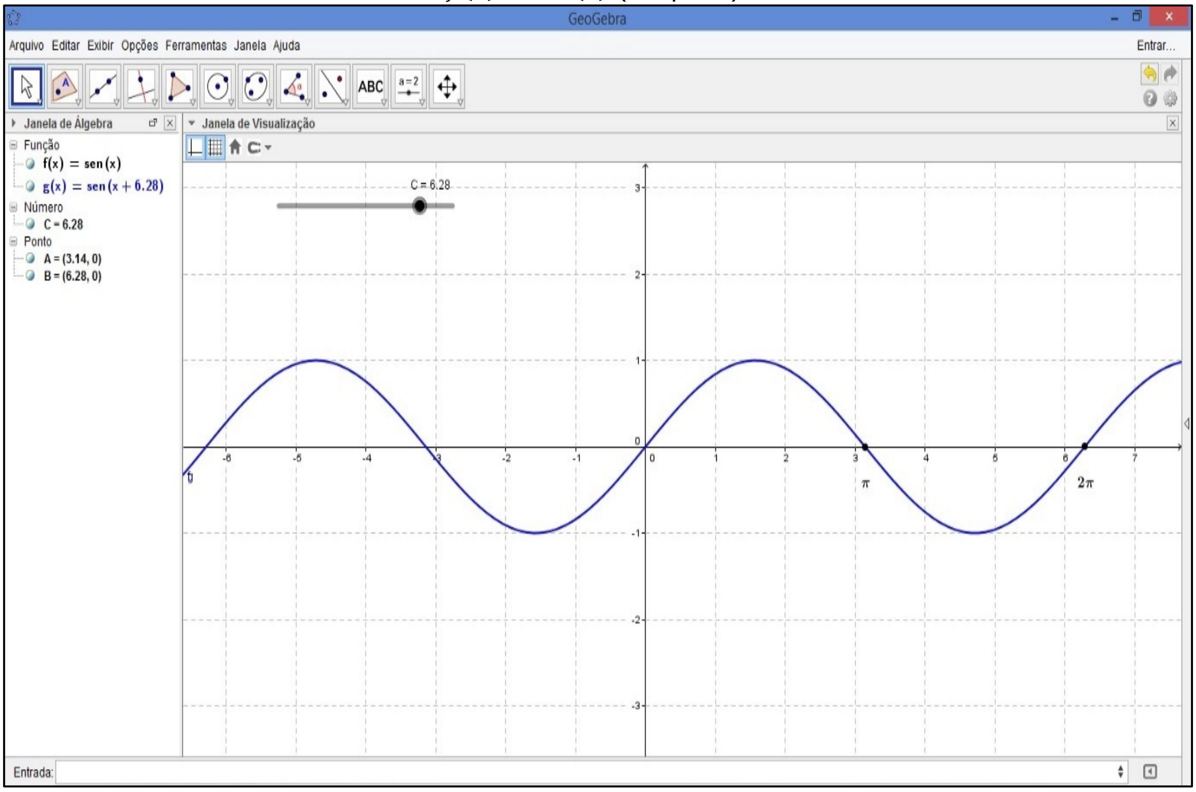


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, mantendo o período e a amplitude. Observe nos gráficos que $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

- **Caso 3: $f(x) = \textbf{sen}(x + 2\pi)$**

Figura 16 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$ (em azul) e $f(x) = \text{sen}(x)$ (em preto).

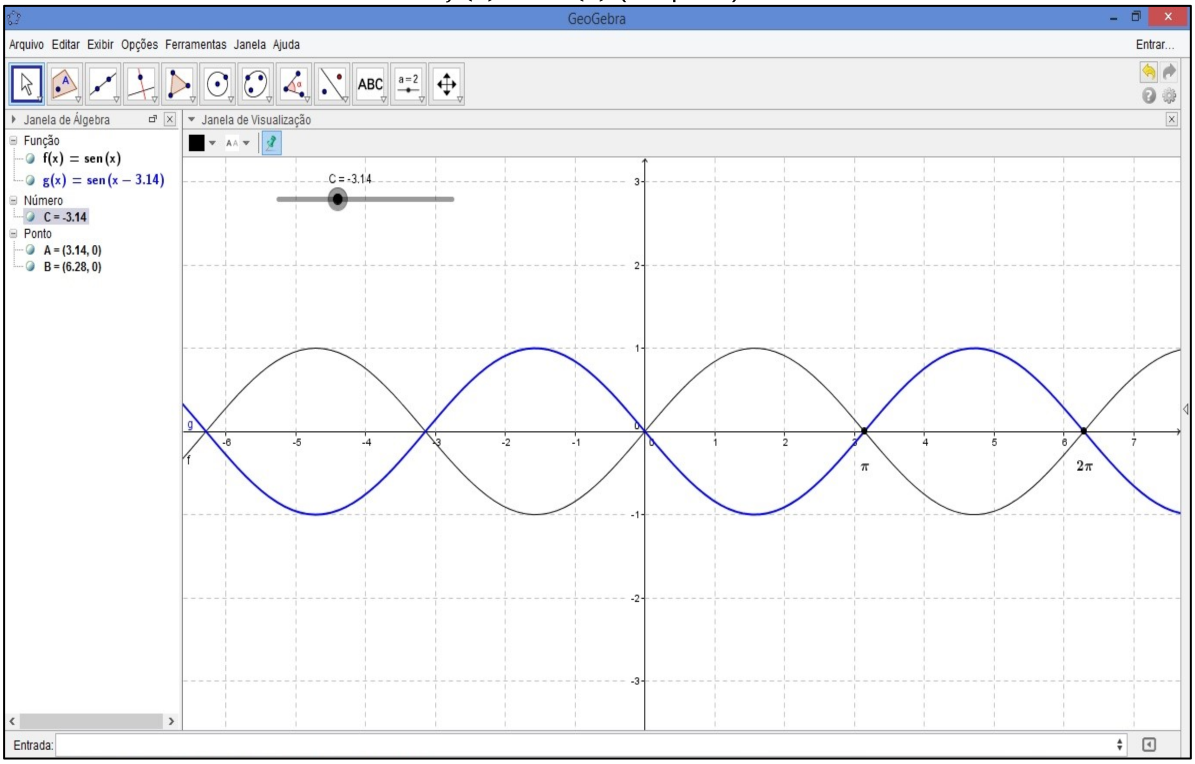


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ de 2π unidades para a esquerda, coincidindo com o gráfico de $\text{sen}(x)$.

- **Caso 4: $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{sen}(x - \pi)}$**

Figura 17 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{sen}(x - \pi)$ (em azul) e $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ (em preto).



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ de π unidades para a direita, mantendo o período e a amplitude. Por $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ ser uma função periódica, note no gráfico que $f(x) = \mathrm{sen}(x - \pi) = \mathrm{sen}(x + \pi) = -\,\mathrm{sen}(x)$.

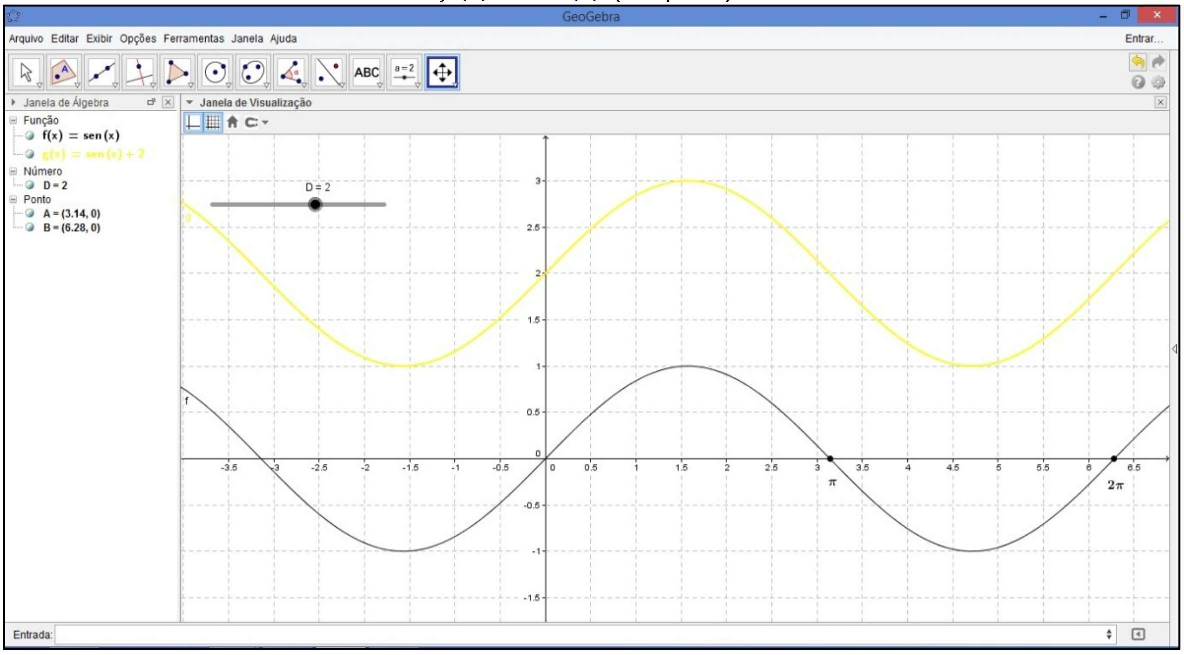
A partir das construções realizadas, conclui-se que o parâmetro C interfere no deslocamento horizontal nos gráficos das funções em C unidades, para a esquerda se $C > 0$ ou para a direita caso $C < 0$.

3.1.4 Função $f(x) = A \cdot \mathrm{sen}(Bx + C) + D$: variações no parâmetro *D* (deslocamentos verticais)

Seja a função $f(x) = \mathrm{sen}(x) + D$, com $D \in \mathbb{R}$. Serão representadas a seguir algumas senóides com valores distintos no parâmetro D.

- **Caso 1: $f(x) = \mathbf{sen}(x) + 2$**

Figura 18 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{sen}(x) + 2$ (em amarelo) e $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ (em preto).

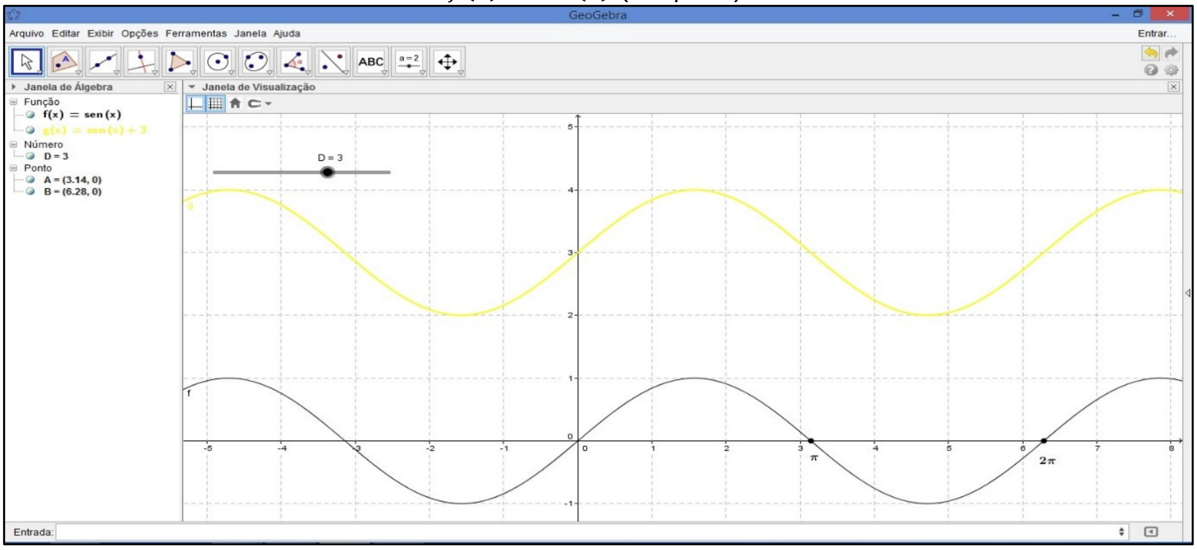


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ de 2 unidades para cima, sem alterar o período e a amplitude. Desta forma, a imagem de $f(x) = \mathrm{sen}(x) + 2$ é o intervalo $[1; 3]$.

- **Caso 2:** $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}(x) + 3}$

Figura 19 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{sen}(x) + 3$ (em amarelo) e $f(x) = \text{sen}(x)$ (em preto).

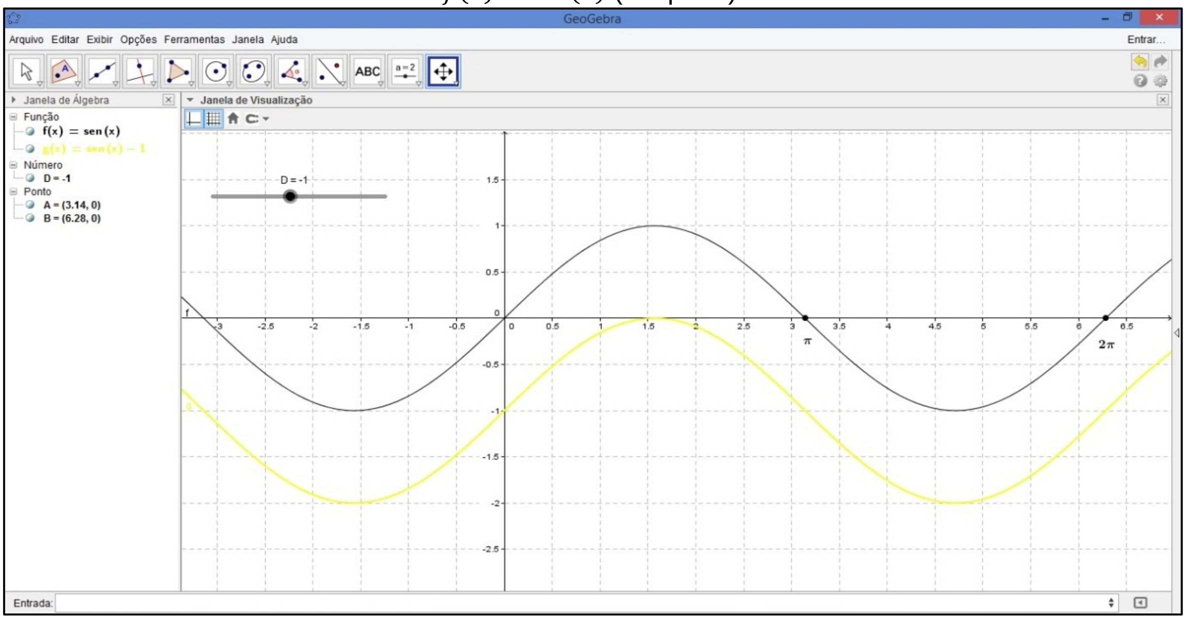


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ de 3 unidades para cima, sem alterar o período e a amplitude. Desta forma, a imagem de $f(x) = \text{sen}(x) + 3$ é o intervalo $[2; 4]$.

- **Caso 3:** $\boldsymbol{f(x) = \text{sen}(x) - 1}$

Figura 20 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{sen}(x) - 1$ (em amarelo) e $f(x) = \text{sen}(x)$ (em preto).



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

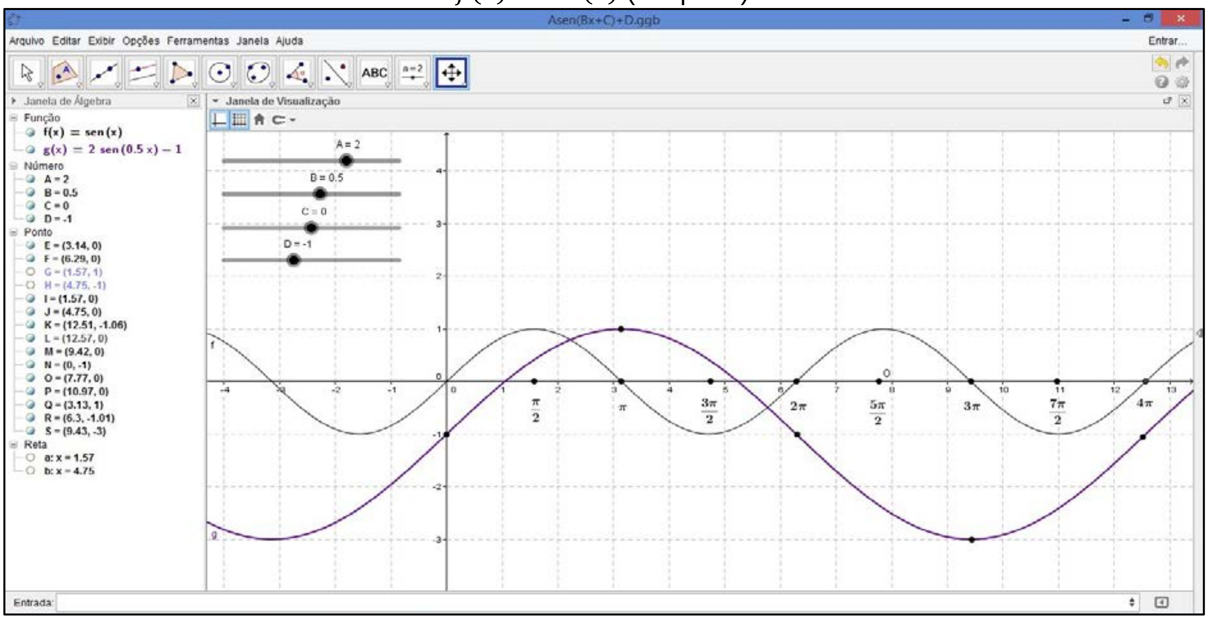
Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ de 1 unidade para baixo, sem alterar o período e a amplitude. Desta forma, a imagem de $f(x) = \text{sen}(x) - 1$ é o intervalo $[-2; 0]$.

A partir das construções realizadas, pode-se concluir que o parâmetro D, juntamente com o parâmetro A, são responsáveis pela caracterização da imagem da função $f(x) = A \cdot \text{ sen}(Bx + C) + D$.

Pedagogicamente, recomenda-se que seja feita a construção dos gráficos alterando um parâmetro de cada vez no primeiro momento, para garantir melhores possibilidades de observação das características presentes a partir das mudanças. É proposto posteriormente a alteração simultânea dos 4 parâmetros, de modo que o estudante fixe os conceitos de imagem, período e amplitude.

Segue um exemplo com a função $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

Figura 21 – Representação gráfica das funções $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ (em roxo) e $f(x) = \text{sen}(x)$ (em preto).



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, temos:

$$A = 2$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$C = 0$$

$$D = -1$$

Sendo assim, as suas informações notáveis são:

- **Período:** $\frac{2\pi}{B} = 4\pi$
- **Amplitude:** $A = 2$
- **Imagem:** $[-3; 1]$

3.2 Função cosseno e propriedades

Definição: Dado um número real x, denomina-se função cosseno a relação $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa x a cos (x), ou seja, $f(x) = \cos(x)$.

Domínio: $\mathbb{R}$

Período: 2π, visto que $f(x) = f(x + 2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Imagem: [-1;1]

Amplitude: como $f(x) = \cos(x)$ é uma função circular e sua imagem situa-se em um intervalo fechado, pode-se definir a amplitude da mesma pela relação:

$$\frac{f(x)_{max} - f(x)_{min}}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Estudo do sinal:

De um modo geral, $f(x) = \cos(x)$ é positiva no 1º e no 4º quadrante da circunferência trigonométrica, negativa no 2º e no 3º quadrante e nula quando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$.

$$f(x) = \cos(x) \begin{cases} > 0, \text{se} -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ = 0, \text{se } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}) \\ < 0, \text{se } \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Note que a função cosseno é contínua em todo o seu domínio.

Variações da função cosseno: Sejam *A*, *B*, *C*, *D* e x números reais. Há infinitas variações da função cosseno, representada por $f(x) = A \cdot \cos(Bx + C) + D$. A função $f(x) = \cos(x)$ é um caso particular na qual $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$ e $D = 0$.

O comportamento das cossenóides a partir das variações dos parâmetros *A*, *B*, *C* e *D* é idêntico aos das senóides, podendo o docente trabalhar simultaneamente a construção dos gráficos das funções seno e cosseno, além de explorar com a turma as suas particularidades e familiaridades.

3.3 Função tangente e propriedades

Definição: Dado um número real x, denomina-se função tangente a relação $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa x a $\mathrm{tg}\,(x)$, ou seja, $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$.

Domínio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

Período: π, visto que $f(x) = f(x + \pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Imagem: $\mathbb{R}$

Amplitude: Não se define amplitude para a função tangente, visto que sua imagem corresponde a todo o conjunto $\mathbb{R}$.

Estudo do sinal:

De um modo geral, $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$ é positiva no 1º e no 3º quadrante da circunferência trigonométrica, negativa no 2º e no 4º quadrante e nula quando $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

$$f(x) = \mathrm{tg}\,(x) \begin{cases} > 0, \text{se } 0 + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ ou } \ \pi + 2k\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ = 0, \text{se } x = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ < 0, \text{se } \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ ou \ \ \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

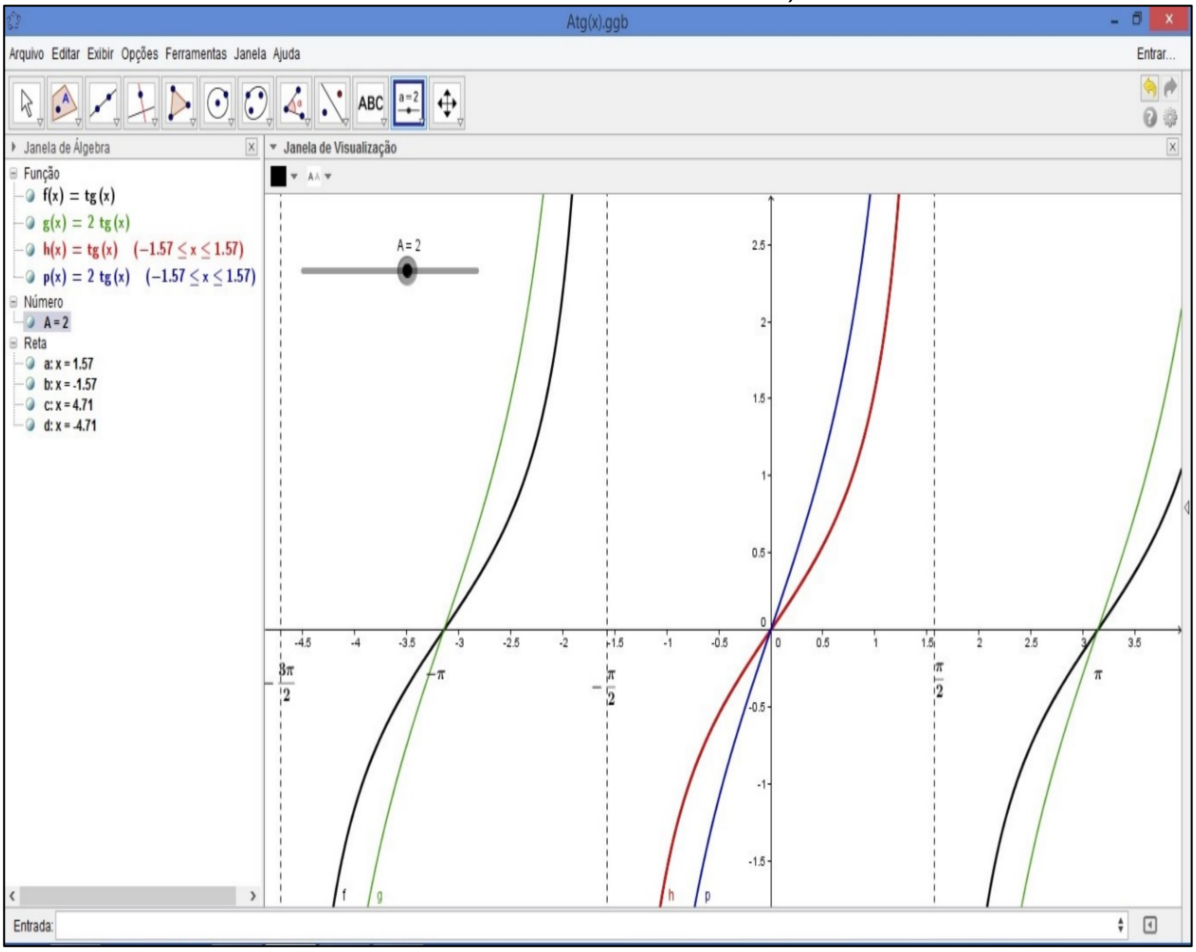
Variações da função tangente: Sejam *A*, *B*, *C*, *D* e x números reais. Há infinitas variações da função tangente, representada por $f(x) = A \cdot \mathrm{tg}(Bx + C) + D$. A função $f(x) = \mathrm{tg}\,(x)$ é um caso particular na qual $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$ e $D = 0$. A seguir, será estudado o comportamento das tangentóides a partir das variações dos parâmetros *A*, *B*, *C* e *D* no aplicativo GeoGebra.

3.3.1 Função $f(x) = A \cdot \operatorname{tg}(Bx + C) + D$: variações no parâmetro A (limites, crescimento e decrescimento)

Considere a função $f(x) = A \cdot \operatorname{tg}(x)$, com $A \in \mathbb{R}$ e $A \neq 0$. Serão representadas a seguir algumas tangentóides com valores distintos no parâmetro A.

- **Caso 1: $f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg}(x)$**

Figura 22 – Representação gráfica das funções $f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg}(x)$ (em azul no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em verde nos demais intervalos do domínio) e $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ (em vermelho no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em preto nos demais intervalos do domínio).

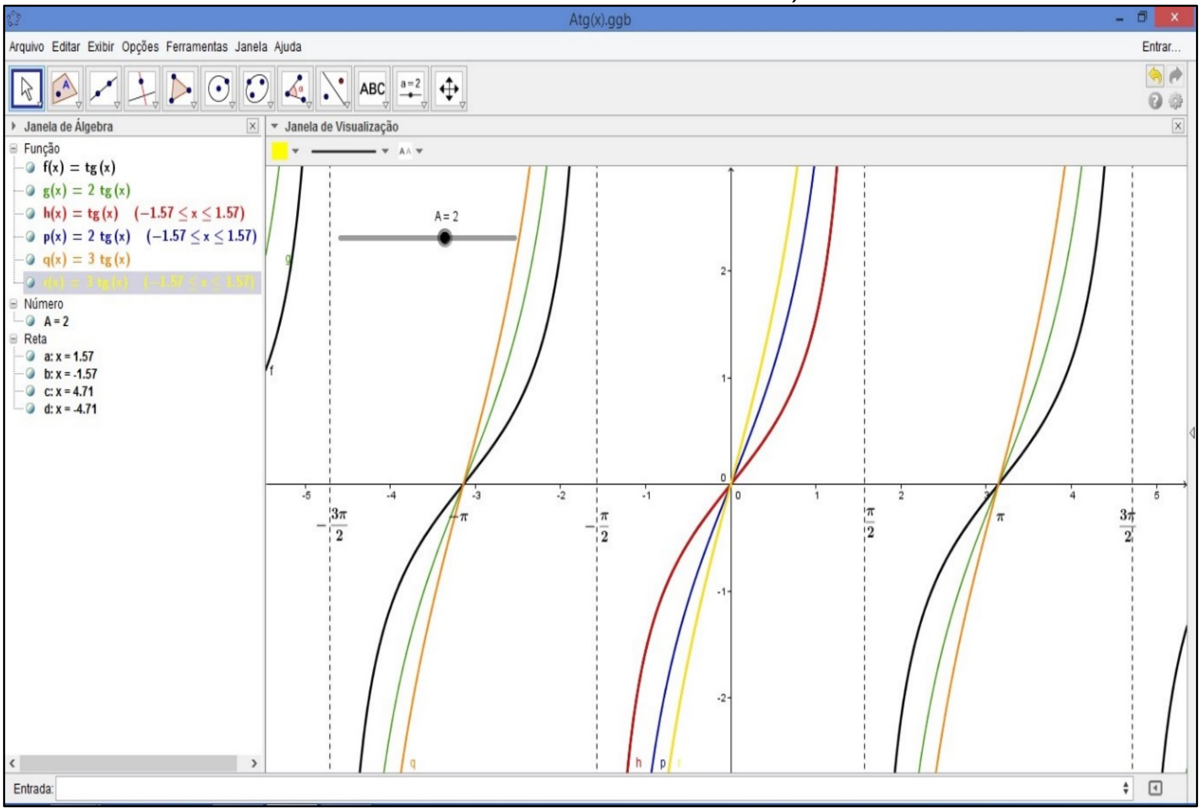


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Ao comparar os gráficos das duas funções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, verifica-se que $f(x) = 2 \cdot \mathrm{tg}(x)$ tende a $+\infty$ (apresenta um crescimento positivo) mais rapidamente que $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ ao se aproximar pela esquerda da assíntota (reta na qual a curva se aproxima sem chegar à intersectá-la) $x = \frac{\pi}{2}$. Analogamente, $f(x) = 2 \cdot \mathrm{tg}(x)$ tende a $-\infty$ (apresenta um crescimento negativo) mais rapidamente que $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ ao se aproximar pela direita da assíntota $x = -\frac{\pi}{2}$.

- **Caso 2: $\boldsymbol{f(x) = 3 \cdot \mathrm{tg}(x)}$**

Figura 23 – Representação gráfica das funções $f(x) = 3 \cdot \mathrm{tg}(x)$ (em amarelo no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em laranja nos demais intervalos do domínio), $f(x) = 2 \cdot \mathrm{tg}(x)$ (em azul no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em verde nos demais intervalos do domínio) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em vermelho no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em preto nos demais intervalos do domínio).

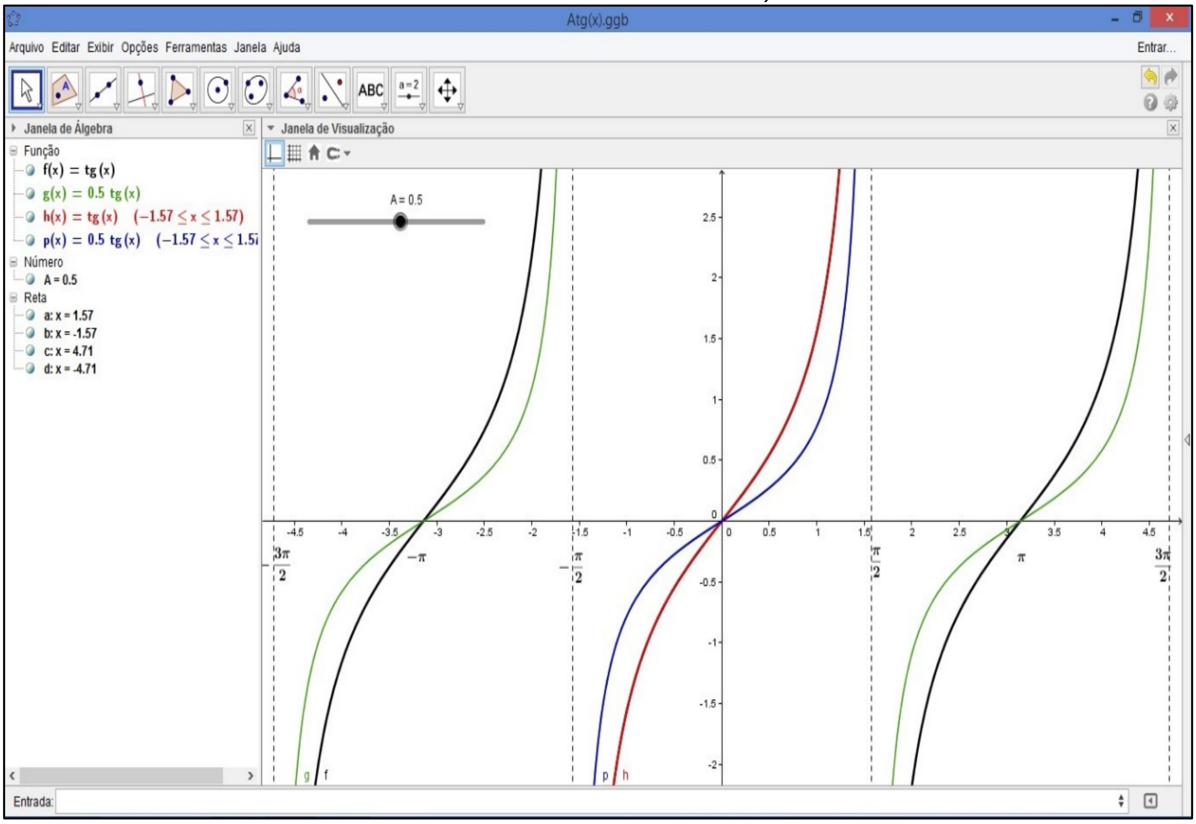


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Pelas construções realizadas, verifica-se na figura 23 que $f(x) = 3 \cdot \mathrm{tg}(x)$ tende a $+\infty$ mais rapidamente que as outras duas funções ao se aproximar pela esquerda da assíntota $x = \frac{\pi}{2}$. Da mesma forma, $f(x) = 3 \cdot \mathrm{tg}(x)$ tende a $-\infty$ mais rapidamente que as outras duas funções ao se aproximar pela direita da assíntota $x = -\frac{\pi}{2}$.

- **Caso 3:** $\boldsymbol{f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}}$

Figura 24 – Representação gráfica das funções $f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$ (em azul no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em verde nos demais intervalos do domínio) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em vermelho no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em preto nos demais intervalos do domínio).

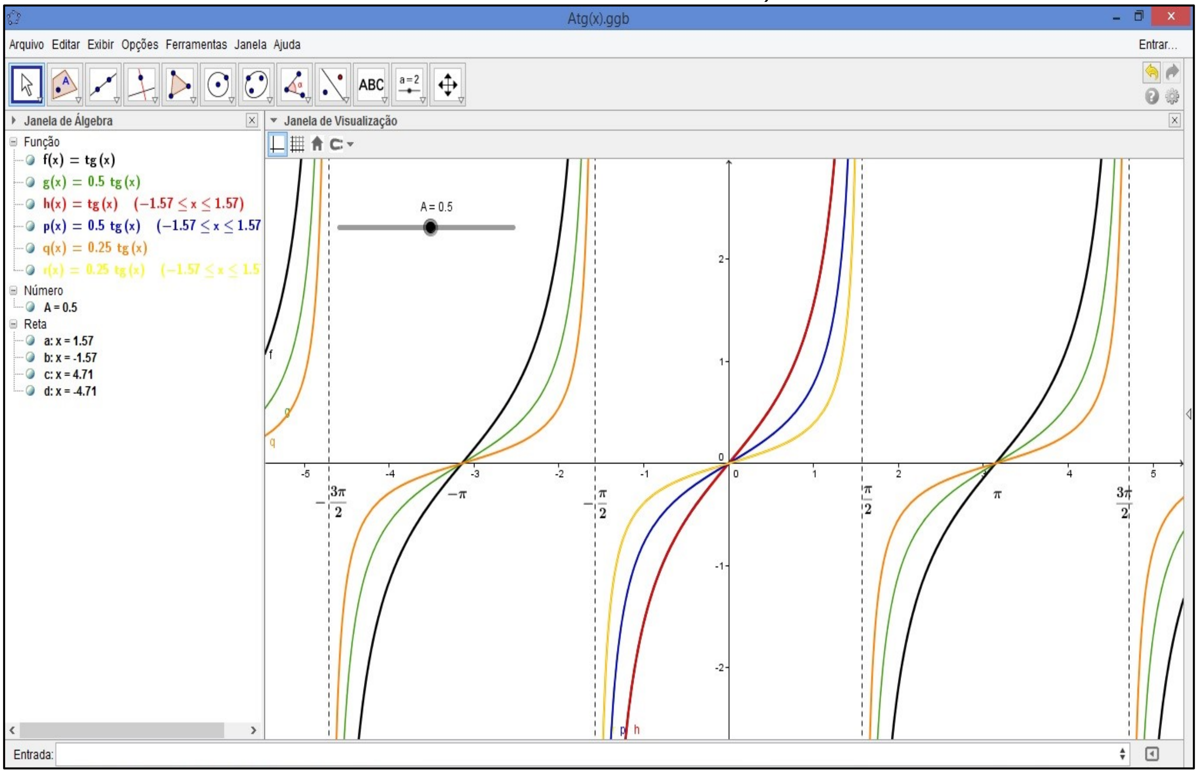


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

Ao comparar os gráficos das duas funções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, verifica-se que $f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$ tende a $+\infty$ mais lentamente que $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ ao se aproximar pela esquerda da assíntota $x = \frac{\pi}{2}$. Analogamente, $f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$ tende a $-\infty$ mais lentamente que $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ ao se aproximar pela direita da assíntota $x = -\frac{\pi}{2}$.

- **Caso 4: $\boldsymbol{f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{4}}$**

Figura 25 – Representação gráfica das funções $f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{4}$ (em amarelo no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em laranja nos demais intervalos do domínio), $f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$ (em azul no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em verde nos demais intervalos do domínio) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em vermelho no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em preto nos demais intervalos do domínio).

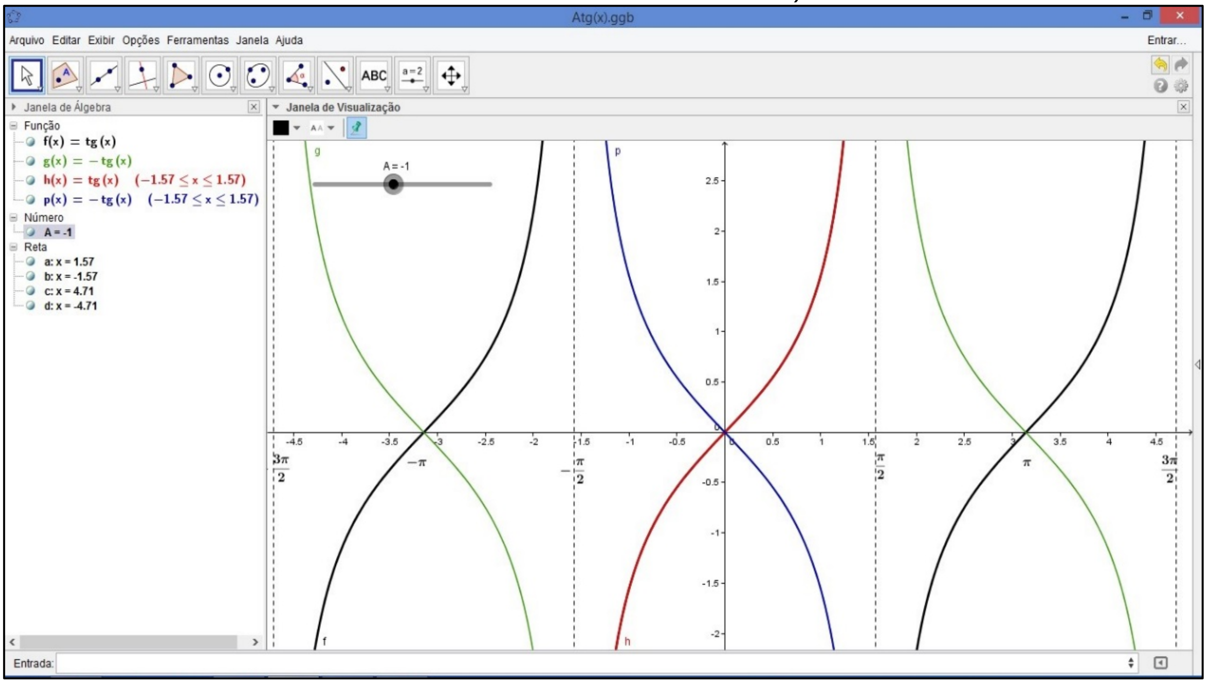


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

Pelas construções realizadas, verifica-se que $f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{4}$ tende a $+\infty$ mais lentamente que as outras duas funções ao se aproximar pela esquerda da assíntota $x = \frac{\pi}{2}$. Da mesma forma, $f(x) = \frac{\mathrm{tg}(x)}{4}$ tende a $-\infty$ mais lentamente que as outras duas funções ao se aproximar pela direita da assíntota $x = -\frac{\pi}{2}$.

- **Caso 5: $f(x) = -\,\mathrm{tg}(x)$**

Figura 26 – Representação gráfica das funções $f(x) = -\,\mathrm{tg}(x)$ (em azul no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em verde nos demais intervalos do domínio) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em vermelho no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ e em preto nos demais intervalos do domínio).



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste exemplo, observa-se que $f(x) = -\,\mathrm{tg}(x)$ é simétrica a $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ em relação aos eixos coordenados.

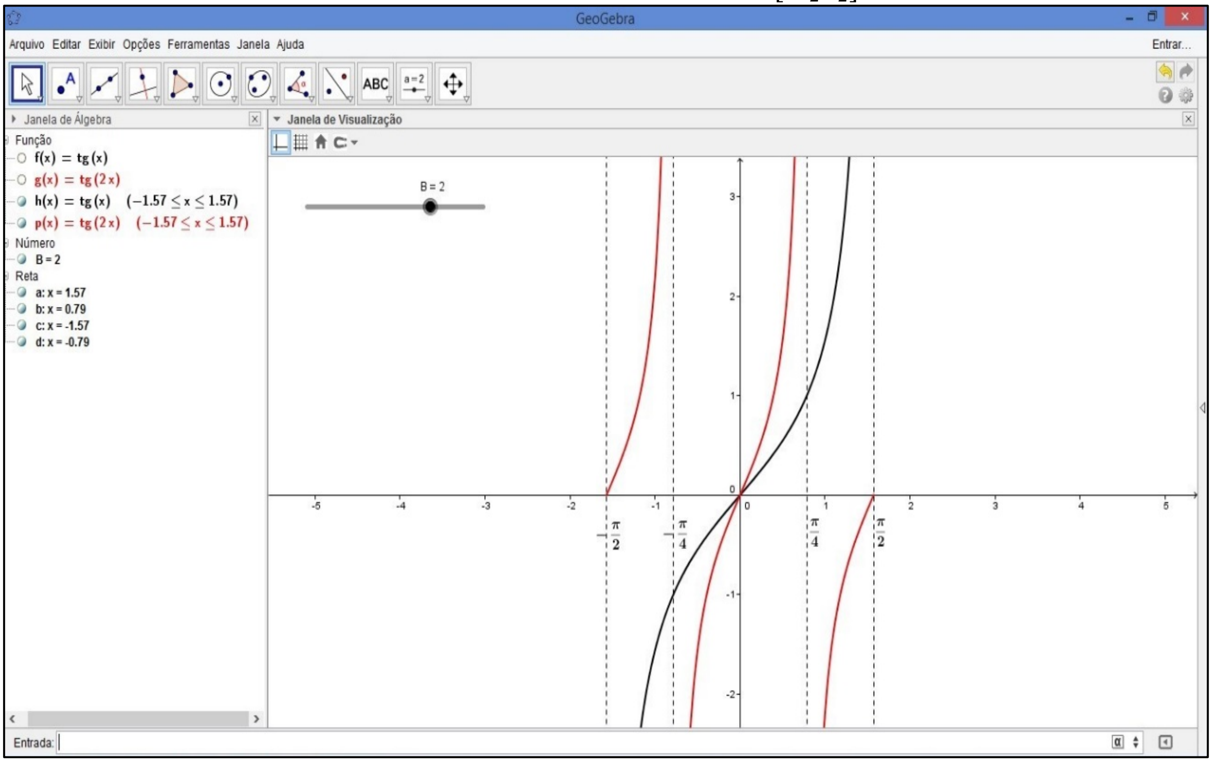
A partir das construções realizadas, conclui-se intuitivamente que o parâmetro A influencia na taxa de variação de crescimento e decrescimento da função $f(x) = A \cdot \mathrm{tg}(Bx + C) + D$, permanecendo constante o período da função. Para $|A| > 1$, quanto maior for $|A|$, mais rápido será a variação da função. Analogamente, para $0 < |A| < 1$, quanto menor for $|A|$, mais lento será a variação da função. Para $A > 0$, a função é crescente nos intervalos em que é definida. Para $A < 0$, a função é decrescente nos intervalos em que é definida.

3.3.2 Função $f(x) = A \cdot \mathrm{tg}(Bx + C) + D$: variações no parâmetro B (mudança de domínio e período)

Seja a função $f(x) = \mathrm{tg}(Bx)$, com $B \in \mathbb{R}$ e $B \neq 0$. Serão representadas a seguir algumas tangentóides com valores distintos no parâmetro B.

- **Caso 1: $f(x) = \mathrm{tg}(2x)$**

Figura 27 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{tg}(2x)$ (em vermelho) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em preto), ambas limitadas no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

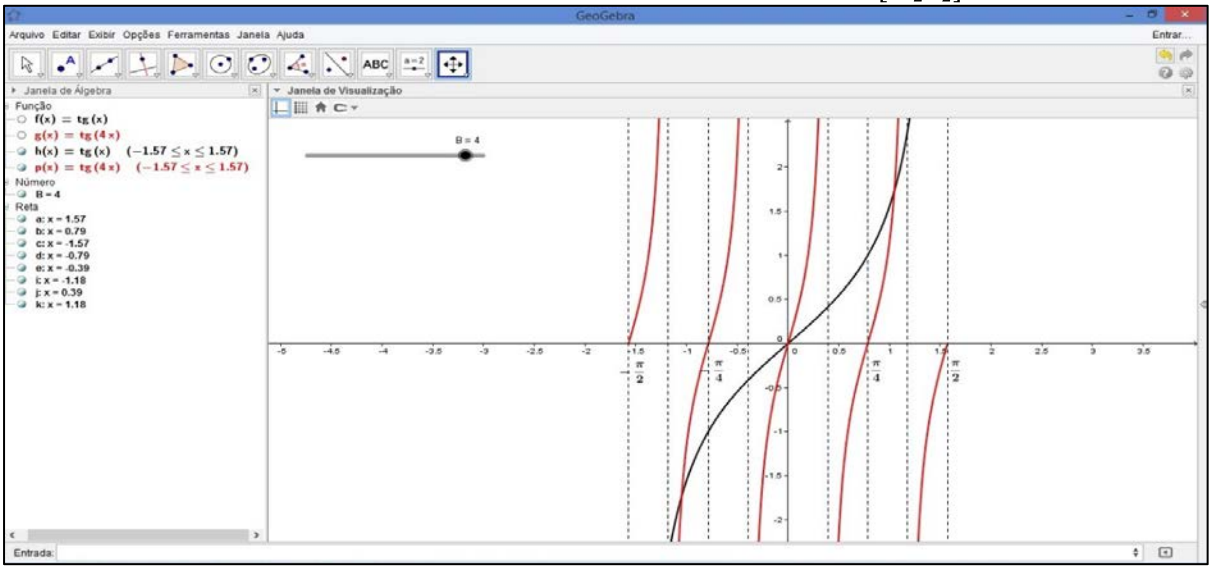


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

Neste caso, o período de $f(x) = \mathrm{tg}(2x)$ é $\frac{\pi}{2}$ e seu domínio é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$.

- **Caso 2: $f(x) = \mathbf{tg}(4x)$**

Figura 28 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{tg}(4x)$ (em vermelho) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em preto), ambas limitadas no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

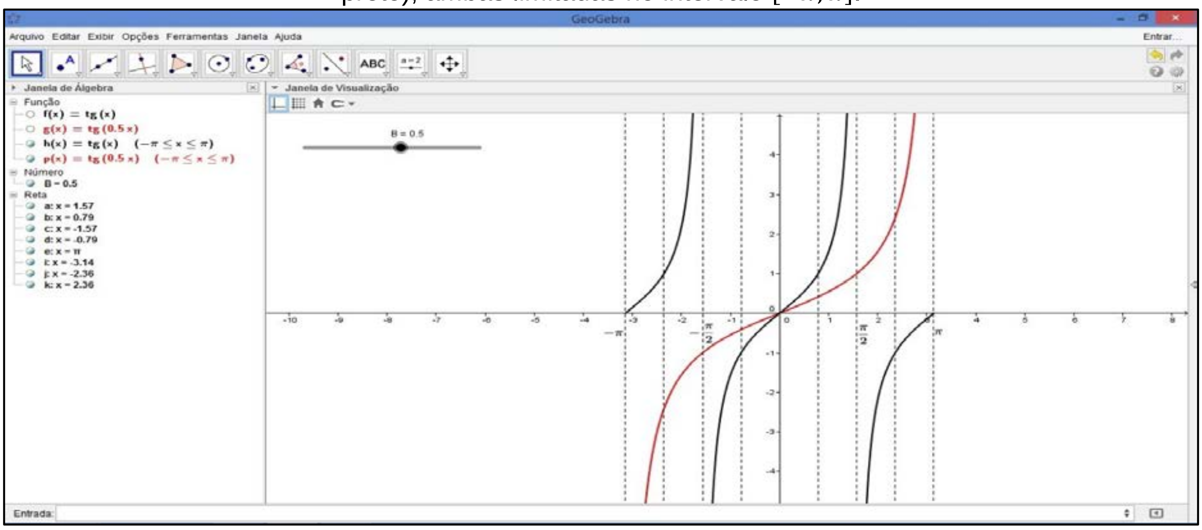


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

Neste caso, o período de $f(x) = \mathrm{tg}(4x)$ é $\frac{\pi}{4}$ e seu domínio é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$.

- **Caso 3: $f(x) = \mathbf{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$**

Figura 29 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ (em vermelho) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em preto), ambas limitadas no intervalo $[-\pi; \pi]$.



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

Neste caso, o período de $f(x) = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ é 2π e seu domínio é $\mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$.

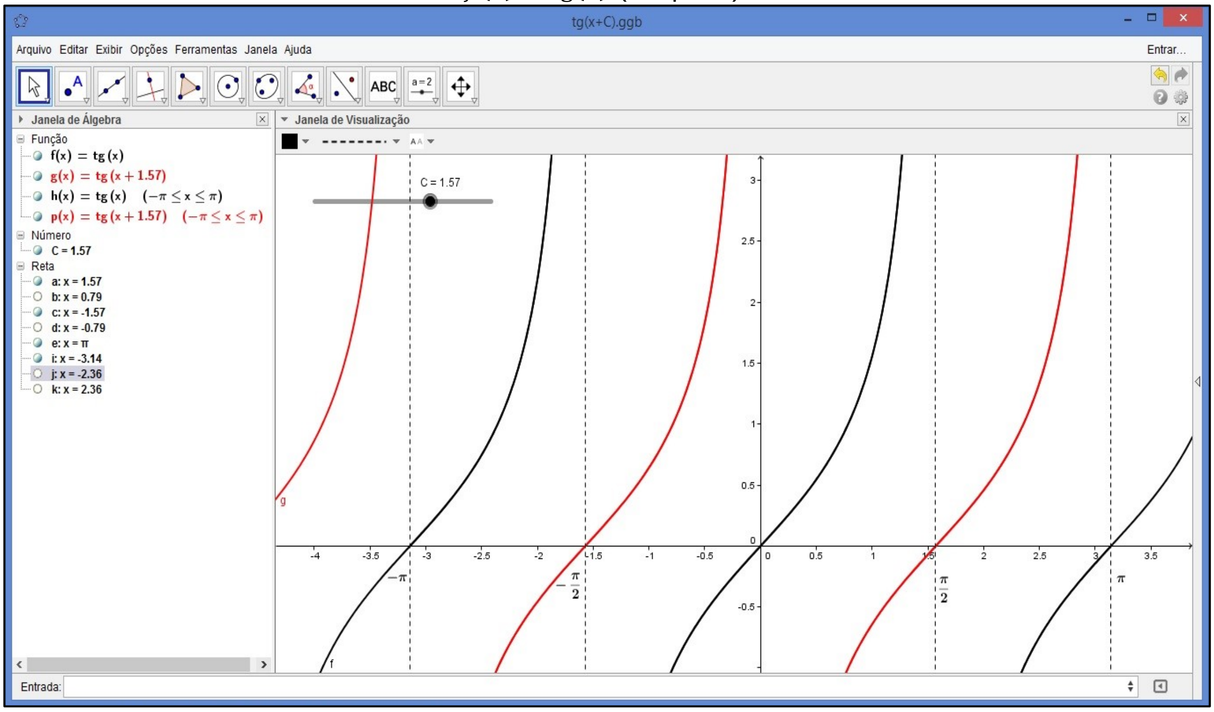
Pelas construções, é possível concluir intuitivamente que o parâmetro B influencia no período da função $f(x) = A \cdot \text{tg}(Bx + C) + D$, sendo igual a $\frac{\pi}{B}$. Quanto ao domínio, não se pode afirmar um padrão antes de estudar as variações no parâmetro C.

3.3.3 Função $f(x) = A \cdot \text{tg}(Bx + C) + D$: variações no parâmetro C (mudança de domínio e deslocamentos horizontais)

Considere a função $f(x) = \text{tg}(x + C)$, com $C \in \mathbb{R}$. Serão representadas a seguir algumas tangentóides com valores distintos no parâmetro C.

- **Caso 1: $f(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$**

Figura 30 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (em vermelho) e $f(x) = \text{tg}(x)$ (em preto).

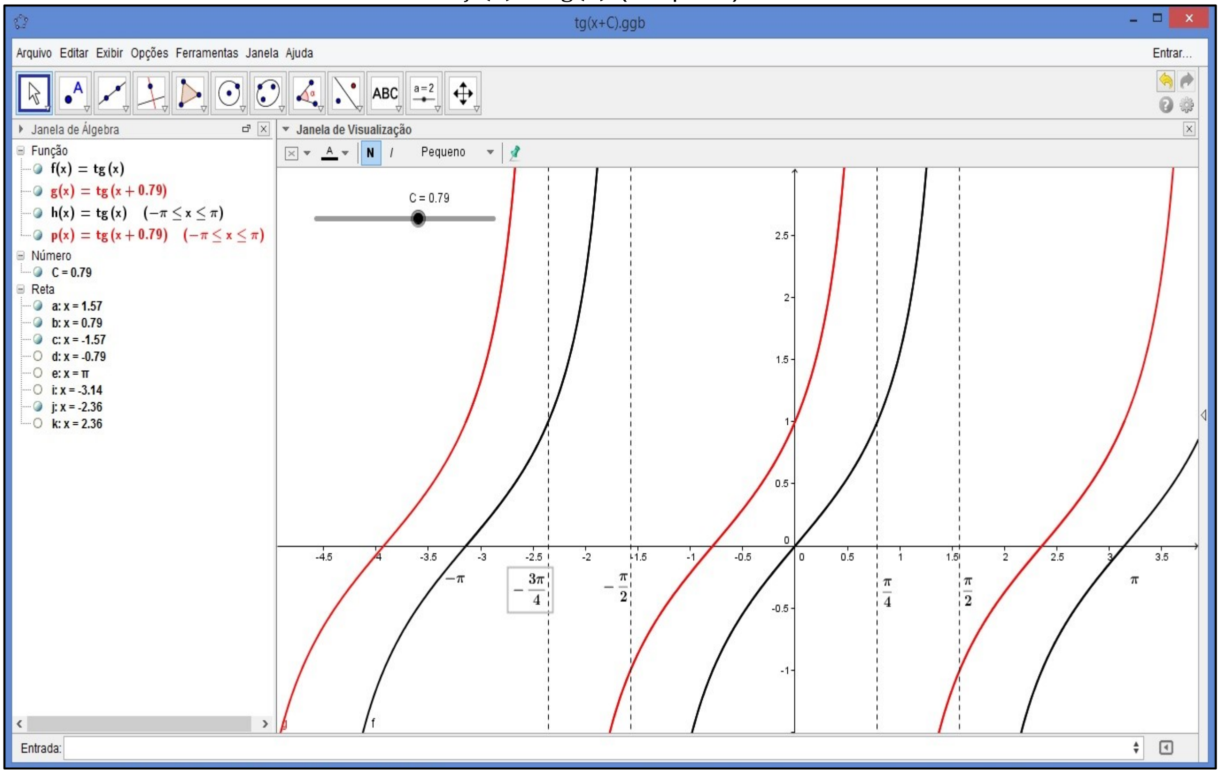


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. O domínio de $f(x) = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ é o conjunto $\mathbb{R} - \{\pi + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$.

- **Caso 2:** $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Figura 31 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (em vermelho) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em preto).

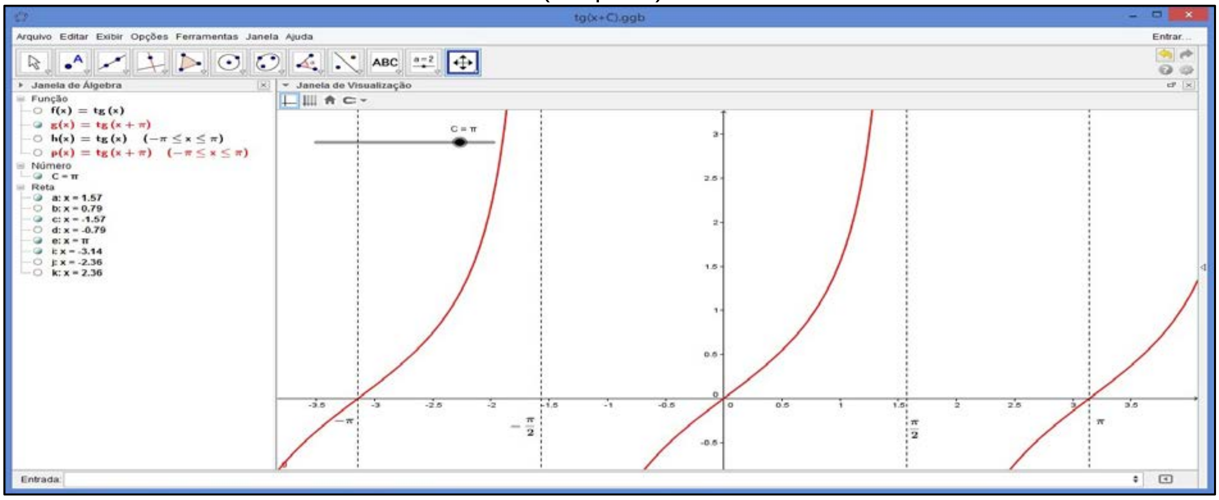


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ de $\frac{\pi}{4}$ unidades para a esquerda. O domínio de $f(x) = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ é o conjunto $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$.

- **Caso 3:** $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{tg}(x+\pi)}$

Figura 32 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{tg}(x+\pi)$ (em vermelho) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em preto).

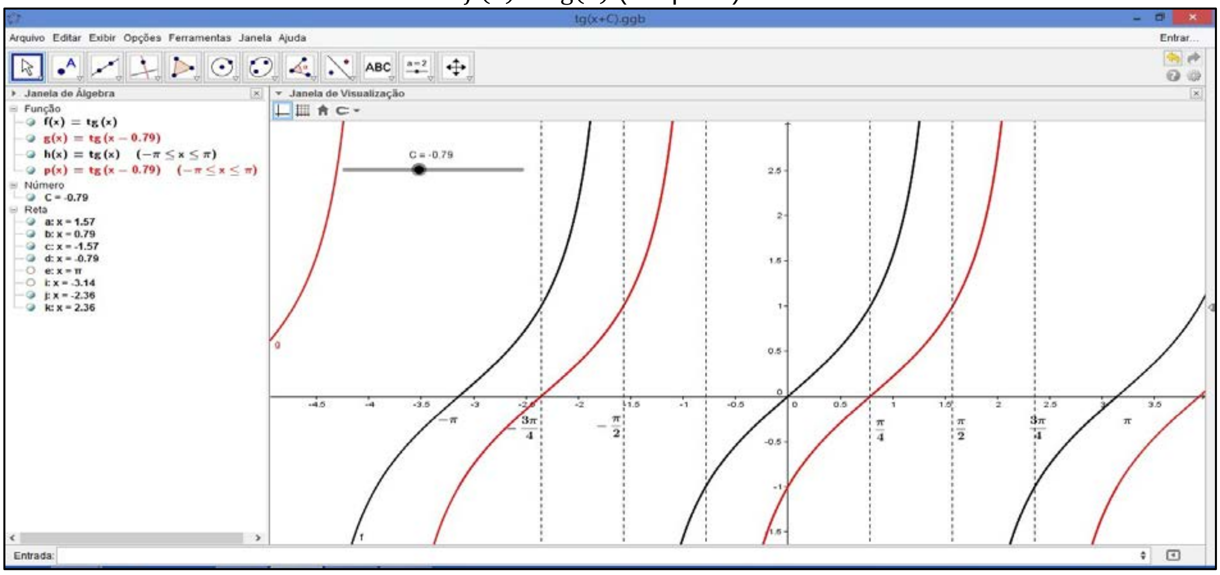


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ de π unidades para a esquerda. Observe no gráfico que $f(x) = \mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x)$, o que mostra a periodicidade da função tangente.

- **Caso 4:** $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

Figura 33 – Representação gráfica das funções $f(x) = \mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (em vermelho) e $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (em preto).



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \text{tg}(x)$ de $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita. O domínio de $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ é o conjunto $\mathbb{R} - \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$.

Através das construções, pode-se concluir que as variações realizadas no parâmetro C interferem no deslocamento horizontal nos gráficos das funções em C unidades, para a esquerda se $C > 0$ ou para a direita caso $C < 0$.

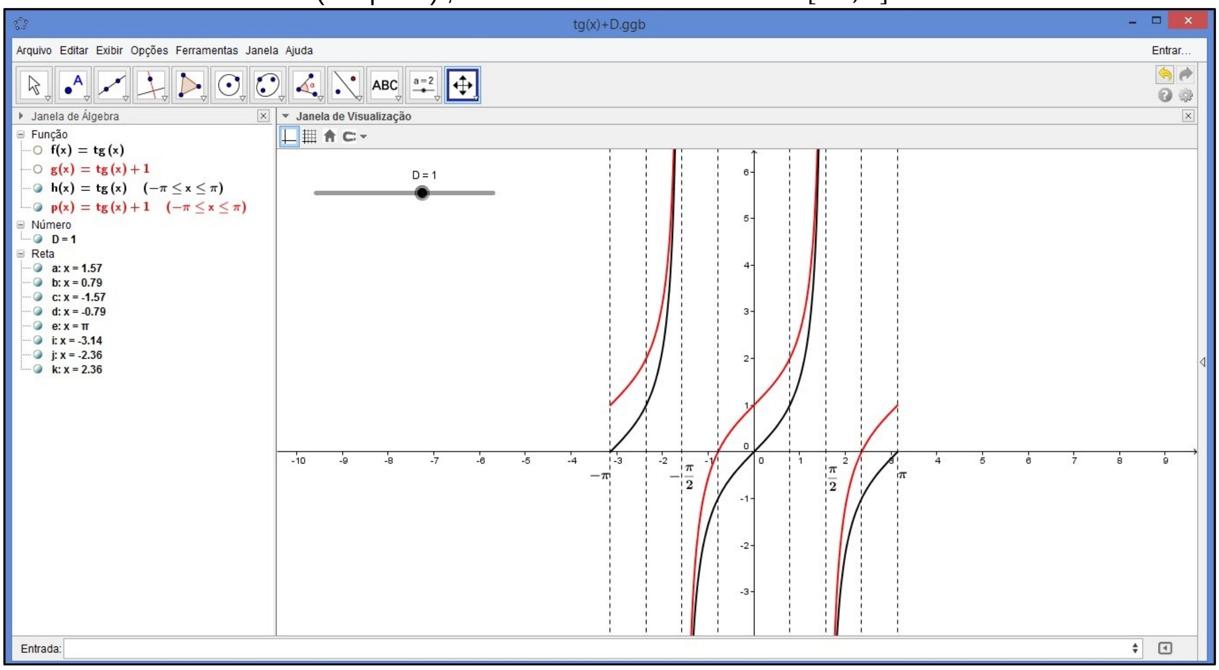
Também é possível observar que o domínio compreende o conjunto $\mathbb{R} - \left\{\left(\frac{\pi}{2B} - 2C\right) + \frac{k\pi}{B}\right\}$.

3.3.4 Função $f(x) = A \cdot\ \text{tg}(Bx + C) + D$: variações no parâmetro D (deslocamentos verticais)

Considere agora a função $f(x) =\ \text{tg}(x) + D$, com $D \in \mathbb{R}$. Serão representadas no aplicativo GeoGebra algumas tangentóides com valores distintos no parâmetro D.

- **Caso 1: $f(x) =\ \text{tg}(x) + 1$**

Figura 34 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{tg}(x) + 1$ (em vermelho) e $f(x) = \text{tg}(x)$ (em preto) , ambas limitadas no intervalo $[-\pi; \pi]$.

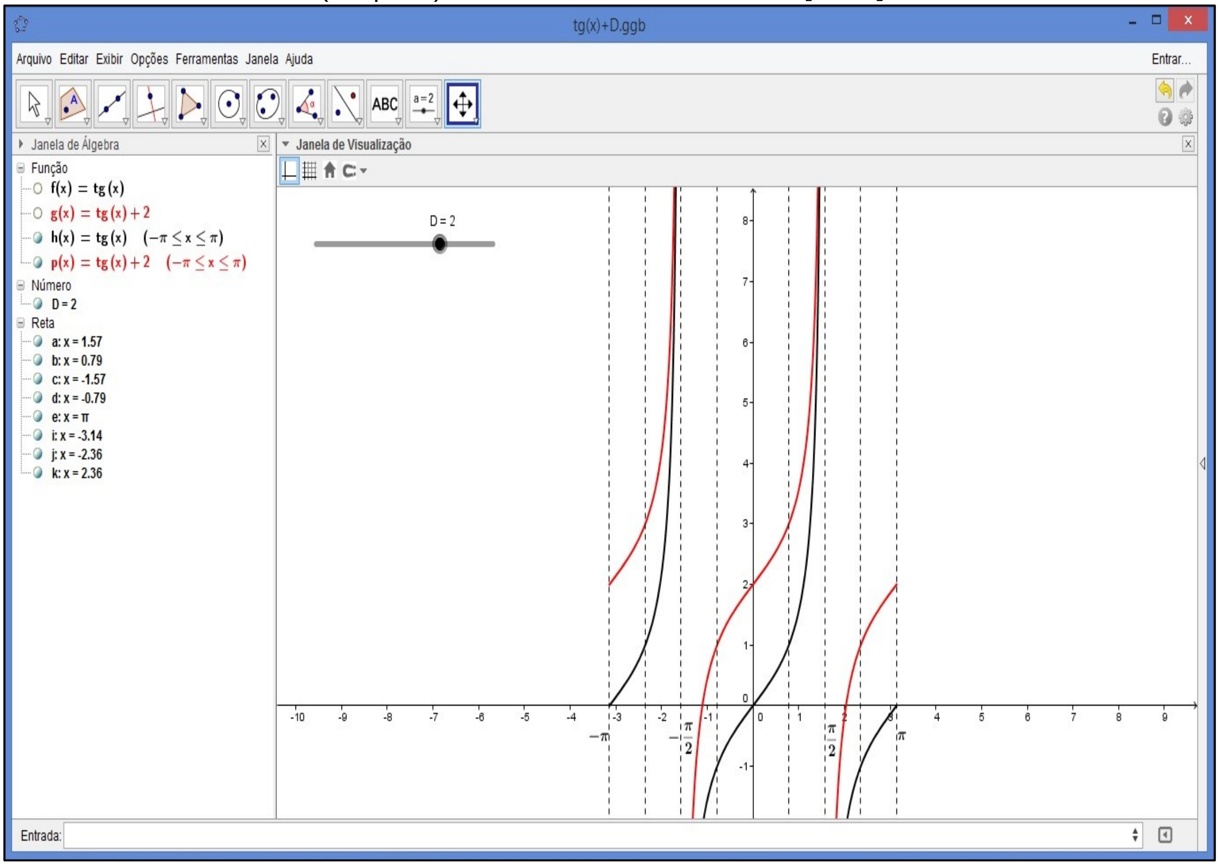


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \text{tg}(x)$ de 1 unidade para cima, sem alterar o período e o conjunto imagem.

- **Caso 2:** $\boldsymbol{f(x) = \text{tg}(x) + 2}$

Figura 35 – Representação gráfica das funções $f(x) = \text{tg}(x) + 2$ (em vermelho) e $f(x) = \text{tg}(x)$ (em preto), ambas limitadas no intervalo $[-\pi; \pi]$.

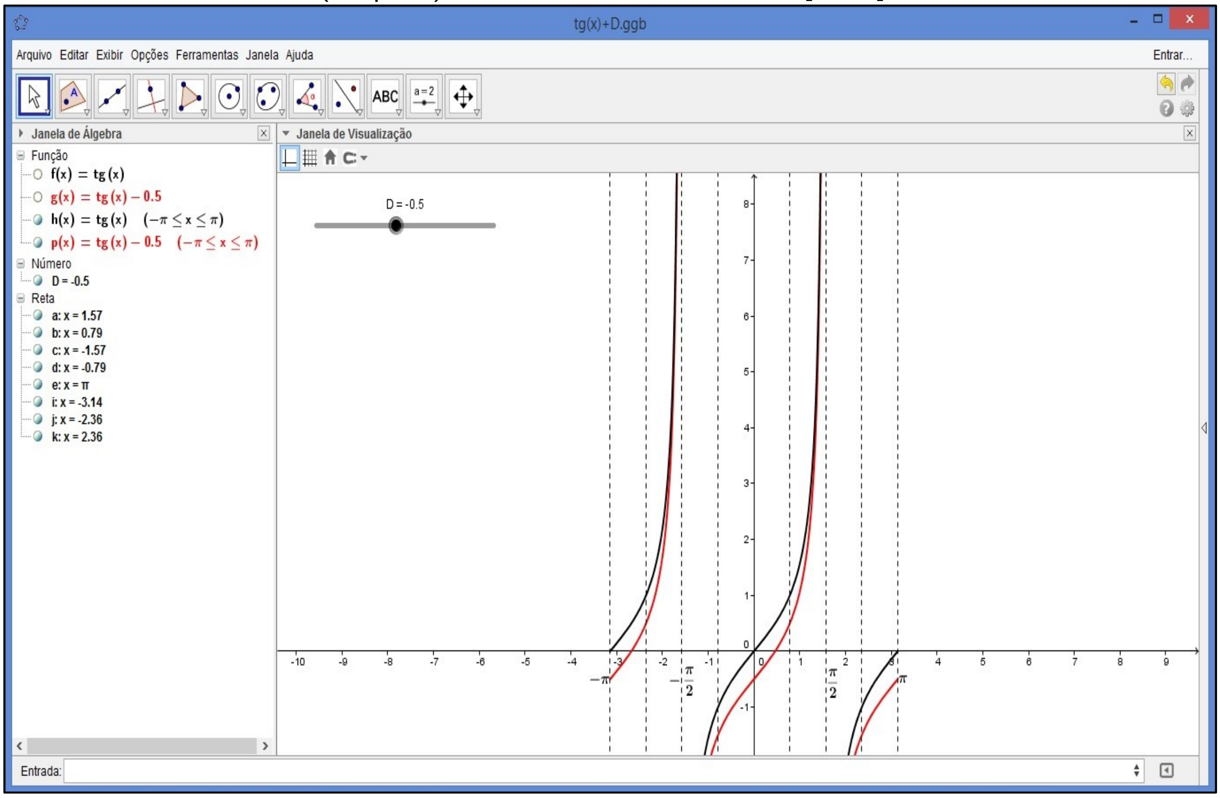


Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \text{tg}(x)$ de 1 unidade para cima, sem alterar o período e o conjunto imagem.

- **Caso 3:** $\boldsymbol{f(x) = \operatorname{tg}(x) - \frac{1}{2}}$

Figura 36 – Representação gráfica das funções $f(x) = \operatorname{tg}(x) - \frac{1}{2}$ (em vermelho) e $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ (em preto), ambas limitadas no intervalo $[-\pi; \pi]$.



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software "GeoGebra 4.4.36.0".

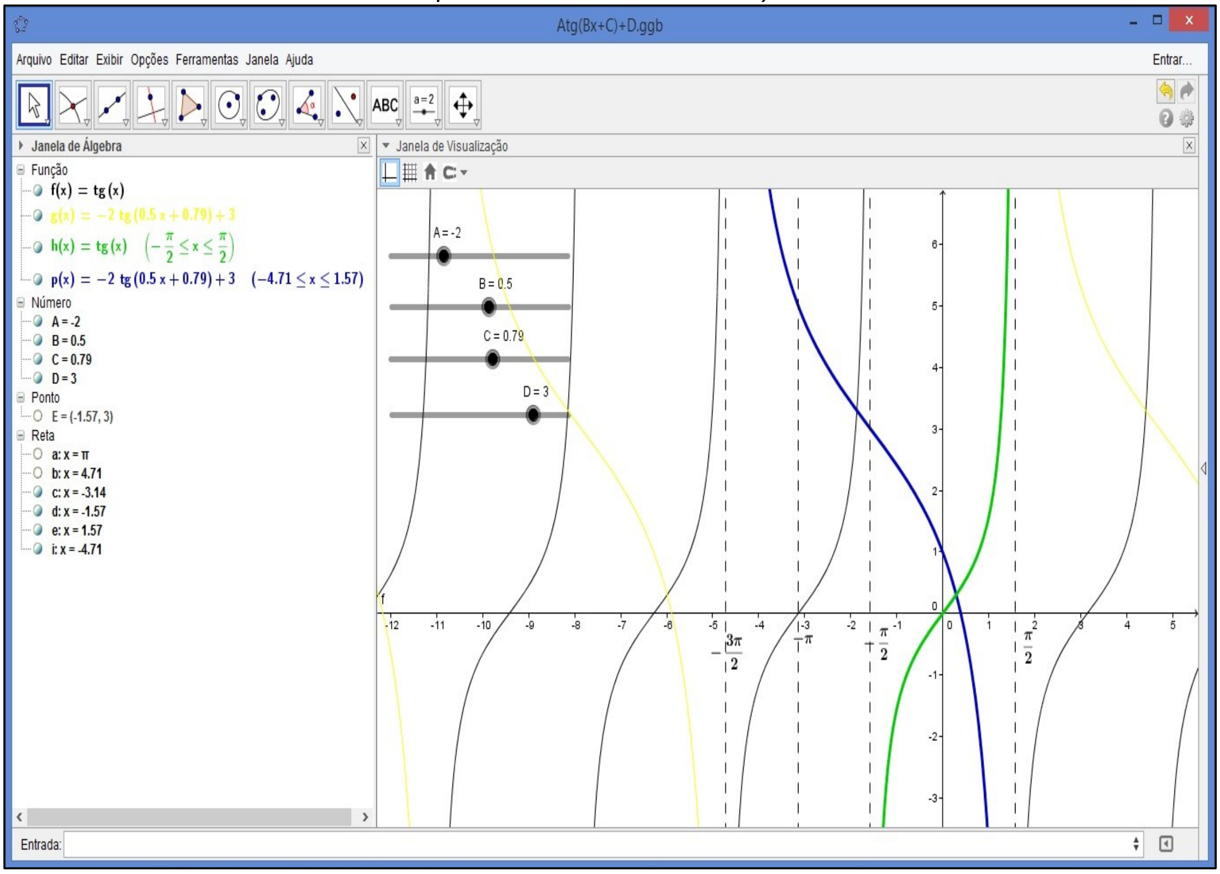
Neste caso, houve um deslocamento em relação ao gráfico de $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ de $\frac{1}{2}$ unidade para baixo, sem alterar o período e o conjunto imagem.

A partir das construções realizadas pode-se concluir que o parâmetro D não interfere no período, domínio e conjunto imagem da função $f(x) = A \cdot \operatorname{tg}(Bx + C) + D$, uma vez que sua imagem é o conjunto $\mathbb{R}$.

Da mesma forma que foi realizado o estudo das variações das funções seno e cosseno, recomenda-se que também seja feita a construção dos gráficos das funções tangente alterando um parâmetro de cada vez no primeiro momento, para garantir melhores possibilidades de observação das características presentes a partir das mudanças. Para fechamento, é proposto a alteração simultânea dos 4 parâmetros, de modo que o estudante fixe os conceitos de domínio e período das funções tangente.

Segue um exemplo com a função $f(x) = -2 \cdot \text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 3$.

Figura 37 – Representação gráfica das funções $f(x) = -2 \cdot \text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 3$ (em azul no intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e em amarelo nos demais intervalos) e $f(x) = \text{tg}(x)$ (em verde no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ e em preto nos demais intervalos).



Fonte: Elaboração do próprio autor, utilizando o software “GeoGebra 4.4.36.0”.

Neste caso, temos:

$$A = -2$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{\pi}{4}$$

$$D = 3$$

Sendo assim, as suas informações notáveis são:

- $\boldsymbol{A = -2}$ $(<\boldsymbol{0})$**:** função decrescente
- **Período:** $\frac{\pi}{B} = 2\pi$
- **Domínio:** $\mathbb{R} - \left\{\left(\frac{\pi}{2B} - 2C\right) + \frac{k\pi}{B}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

4 APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA PAULISTA

O Governo do Estado de São Paulo instituiu, em 2008, o Programa “São Paulo Faz Escola”, uma proposta para universalizar o currículo mínimo previsto para a educação básica da rede pública estadual. Nessa proposta enfatiza-se o uso de ferramentas tecnológicas como auxílio no processo ensino-aprendizagem (SÃO PAULO (Estado), 2014a). O uso da tecnologia possibilita enriquecer várias das atividades propostas, proporcionando ao aluno um conhecimento mais sólido e, de um certo modo, mais tangível.

Várias são as situações de aprendizagem nas quais o uso de aplicativos computacionais são grandes aliados para a construção do conhecimento. Particularizando para a disciplina de Matemática, as sequências didáticas sobre funções são as que mais possibilitam o uso do aplicativo GeoGebra.

4.1 Funções trigonométricas e currículo

O currículo do Estado de São Paulo aborda o conteúdo de trigonometria em três séries (no 9º ano do Ensino Fundamental, na 1ª e na 2ª série do Ensino Médio), de forma gradativa.

Durante o 9º ano é desenvolvida a trigonometria no triângulo retângulo (após o fechamento do estudo sobre relações métricas no triângulo retângulo) com o estudo das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente (SÃO PAULO (Estado), 2014b, 2014e).

Na 1ª série do Ensino Médio, explora-se as razões trigonométricas secante, cossecante e cotangente, estendendo para as identidades trigonométricas e inicia-se o estudo da trigonometria na circunferência. Nesta etapa, são introduzidos os conceitos de seno e cosseno de um ângulo α no primeiro quadrante, tendo como referência uma circunferência de raio unitário com centro no sistema de coordenadas. Após a conclusão a respeito que o seno e o cosseno de um ângulo α, medidos a partir do eixo das abscissas em sentido anti-horário correspondem, respectiva mente, à ordenada e à abscissa do ponto da circunferência que corresponde ao ângulo α, estende-se o conceito para os demais quadrantes, restringindo-se a uma volta (360 graus). Por último, é trabalhado a lei dos senos e a lei dos cossenos (SÃO PAULO (Estado), 2014c, 2014f).

O encerramento de trigonometria é feito durante a 2ª série do Ensino Médio, momento em que estuda-se noções sobre periodicidade, ciclo trigonométrico, relação entre graus e radianos, funções trigonométricas (restringindo às funções seno e cosseno) e equações trigonométricas em contextos práticos (SÃO PAULO (Estado), 2014d, 2014g).

Recorrer ao GeoGebra como ferramenta de apoio é essencial para a exploração das características presentes nas funções trigonométricas. O próprio currículo recomenda o uso de um software auxiliar para a construção de gráficos, na perspectiva de dinamizar as aulas, favorecendo a aprendizagem dos alunos.

4.2 Comentários sobre a situação de aprendizagem “Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos”

Realizada durante o 1º semestre da 2ª série do Ensino Médio, esta situação de aprendizagem promove uma maior assimilação das características das funções trigonométricas seno e cosseno, levando em conta que ocorre gradativamente a construção dos conceitos de variação no período, na amplitude e na imagem.

Conforme SÃO PAULO (Estado) (2014g), dentre os objetos de aprendizagem relacionados à situação de aprendizagem, pode-se destacar:

- Gráficos de funções do tipo $y = D + A \cdot \mathrm{sen}\,(Bx)$ ou $y = D + A \cdot \cos\,(Bx)$;
- Período e amplitude de uma função trigonométrica;
- Gráficos de funções seno ou cosseno em dependência com o tempo.

Ainda de acordo com SÃO PAULO (Estado) (2014g), os objetivos a serem alcançados com o conteúdo proposto são:

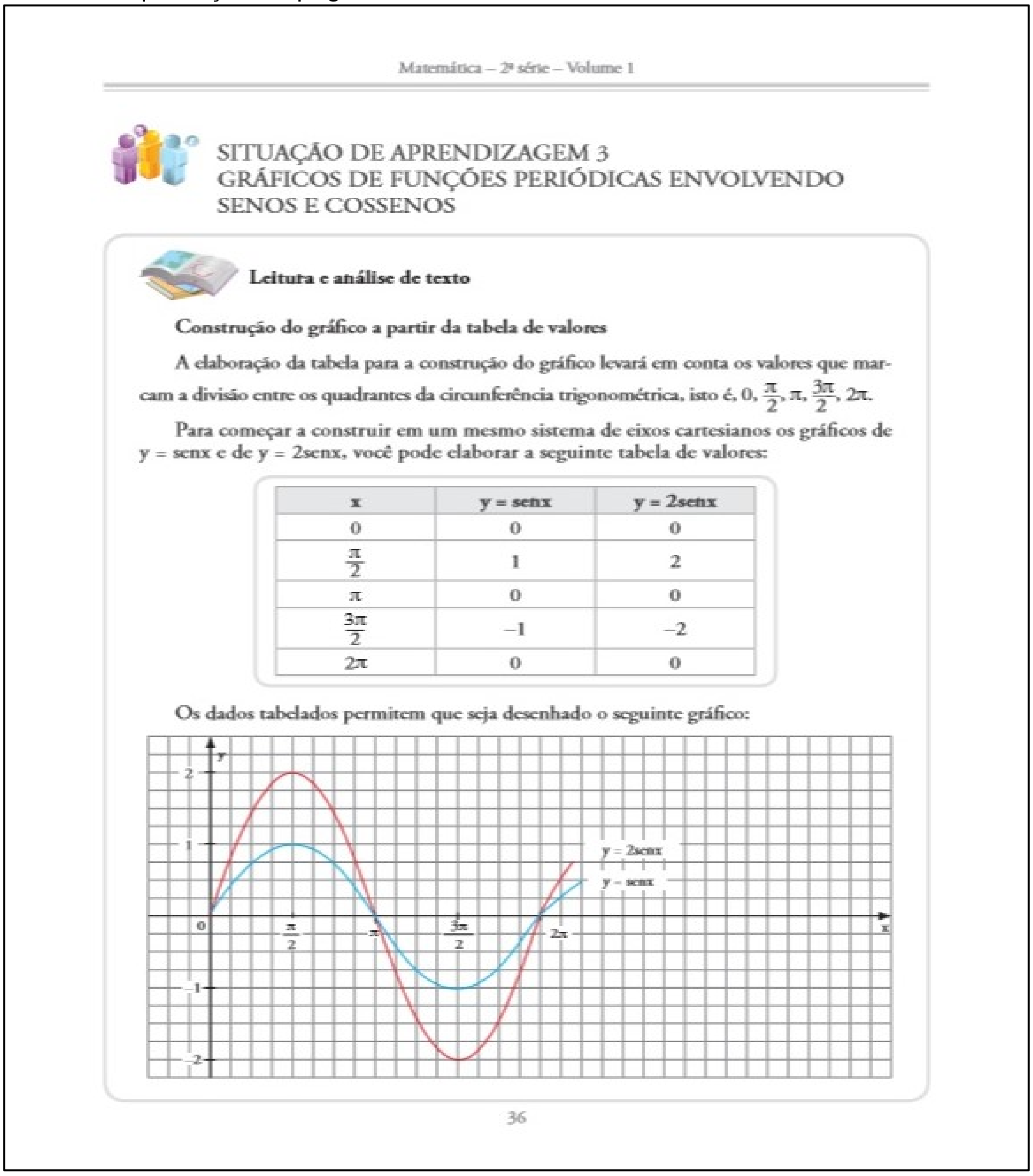
- Compreender o fato de que os fenômenos periódicos podem ser modelados por intermédio de uma função trigonométrica;
- Reconhecer as propriedades de funções do tipo $y = D + A \cdot \mathrm{sen}\,(Bx)$ e $y = D + A \cdot \cos\,(Bx)$, comparando-as com as funções elementares $y = \mathrm{sen}\,(x)$ e $y = \cos\,(x)$;

- Completar uma tabela com valores de arcos e de funções;

- Construir o gráfico de uma função trigonométrica dada a equação que a representa.

A técnica da construção manual de gráficos mostra-se limitada, sendo conveniente para iniciar a abordagem do conteúdo. Nesta etapa, será feita a construção dos gráficos das funções $f(x) = A \cdot \text{sen}(x)$ e $f(x) = A \cdot \cos(x)$, na perspectiva de que seja reconhecida a variação da amplitude dessas funções a partir da alteração do parâmetro A, conforme sequência descrita nas figuras 38, 39 e 40.

Figura 38 – Reprodução da página 36 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1



Matemática – 2ª série – Volume 1

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3
GRÁFICOS DE FUNÇÕES PERIÓDICAS ENVOLVENDO SENOS E COSSENOS

Leitura e análise de texto

Construção do gráfico a partir da tabela de valores

A elaboração da tabela para a construção do gráfico levará em conta os valores que marcam a divisão entre os quadrantes da circunferência trigonométrica, isto é, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

Para começar a construir em um mesmo sistema de eixos cartesianos os gráficos de y = senx e de y = 2senx, você pode elaborar a seguinte tabela de valores:

x	y = senx	y = 2senx
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	–1	–2
2π	0	0

Os dados tabelados permitem que seja desenhado o seguinte gráfico:

36

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Figura 39 – Reprodução da página 37 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

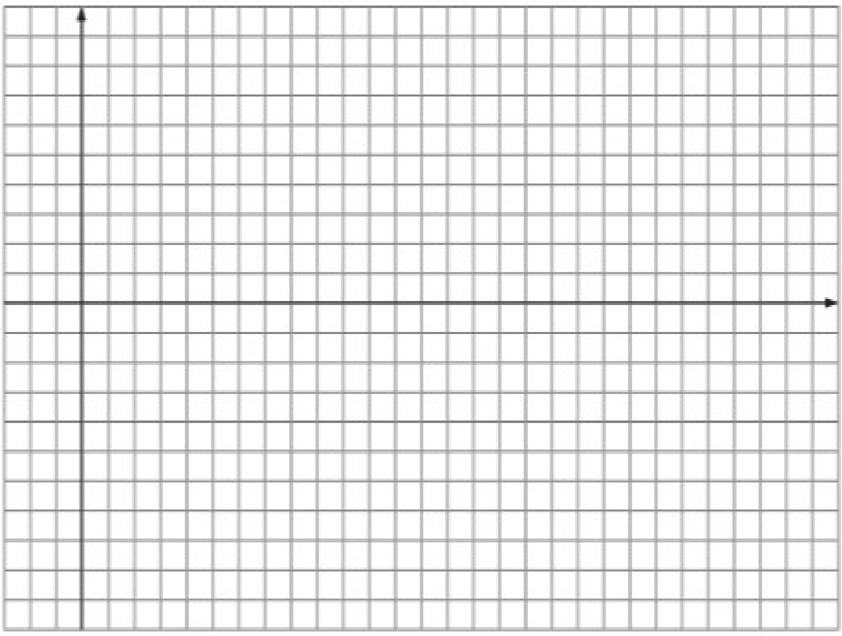
VOCÊ APRENDEU?

1. Complete as tabelas e construa os gráficos, utilizando o papel quadriculado e um sistema de eixos cartesianos para cada tabela.

Tabela 1		
x	y = senx	y = 1,5senx
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

Tabela 2		
x	y = cosx	y = 3cosx
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

Tabela 1

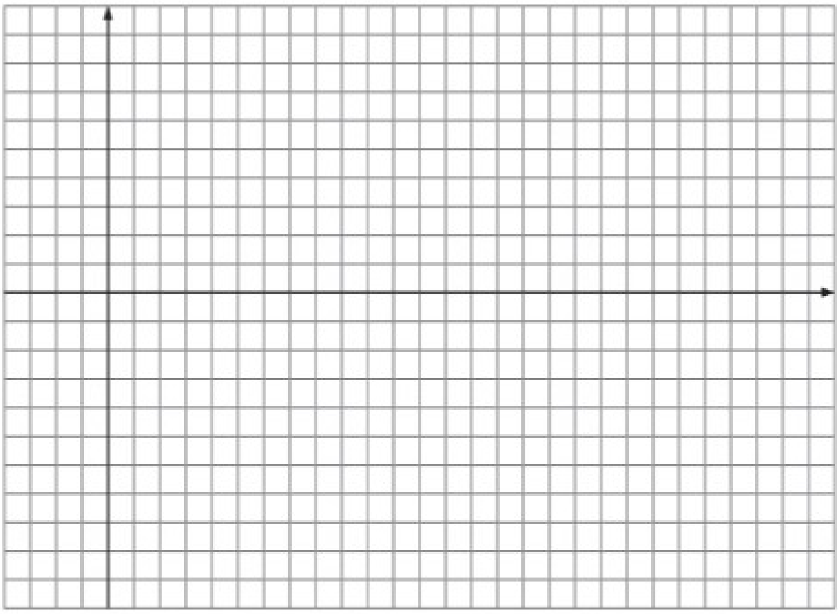


Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Figura 40 – Reprodução da página 38 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

Matemática – 2ª série – Volume 1

Tabela 2



2. Observando os gráficos construídos até agora nesta Situação de Aprendizagem, responda: qual é a diferença entre o gráfico da função y = senx e o gráfico da função y = Asenx, onde A é um número diferente de zero?

3. Observando os gráficos construídos na atividade 1, responda: qual é a diferença entre o gráfico da função y = cosx e o gráfico da função y = Acosx, onde A é um número diferente de zero?

38

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

O material propõe a construção dos gráficos de $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx)$ e $f(x) = A \cdot \cos(Bx)$ a partir de tabelas com referência aos valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π (valores que dividem os quadrantes da circunferência), na perspectiva de que seja reconhecida a variação no período dessas funções a partir da alteração do parâmetro B, conforme sequência descrita nas figuras 41 e 42.

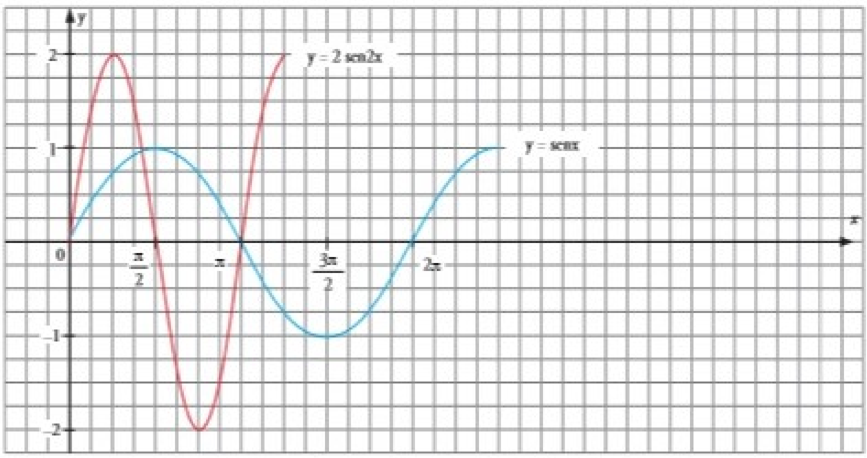
Figura 41 – Reprodução da página 39 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

Matemática – 2ª série – Volume 1

4. Observe a tabela a seguir. Nela estão registrados valores de pares ordenados das funções y = sen2x e y = 2sen2x.

2x	x	y = sen2x	y = 2sen2x
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	2
π	$\frac{\pi}{2}$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	–1	–2
2π	π	0	0

a) Perceba que a primeira coluna da tabela, à esquerda, contém os valores divisórios dos quadrantes, que são adotados para facilitar a construção. Para demonstrar melhor a importância do fator 2, introduzido na sentença algébrica, desenhamos os gráficos de y = senx e de y = 2sen2x em um único sistema de eixos cartesianos, conforme representado a seguir:



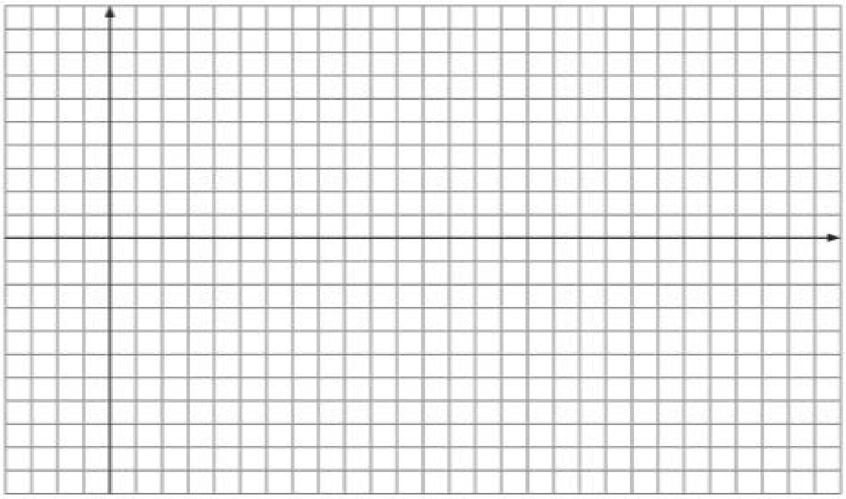
39

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Figura 42 – Reprodução da página 40 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

b) Complete a tabela e desenhe em um mesmo sistema de eixos cartesianos, no papel quadriculado, os gráficos de $y = \cos x$ e de $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, no intervalo $[0, 4\pi]$.

$\frac{x}{2}$	x	$y = \cos x$	$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			



5. Escreva uma diferença entre os gráficos das funções $y = \cos x$ e $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Neste ponto, nota-se a necessidade de um maior aprofundamento na exploração de outros valores atribuídos a variável x, para que o aluno tenha melhores condições de interpretar o comportamento das novas funções. Logo, passa a ser imprescindível a utilização de um aplicativo computacional na construção de gráficos junto à construção manual, para auxiliar com maior precisão a identificação das propriedades, através dos recursos de ampliação e redução, visualização das funções em intervalos relativamente grandes ou relativamente pequenos, inserção de pontos e retas auxiliares, dentre outros disponíveis em que seja conveniente o uso.

As figuras 43, 44 e 45 descrevem uma sequência didática na qual é abordada a interferência do parâmetro D no comportamento dos gráficos de $f(x) = A \cdot \operatorname{sen}(Bx) + D$ e $f(x) = A \cdot \cos(Bx) + D$ a partir de tabelas com referência aos valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π. O nível de dificuldade aumenta aos poucos, de modo que os exercícios 6, 7 e 8 abordam a construção dos gráficos e reconhecimento da variação da imagem das funções a partir da alteração do parâmetro D. O exercício 9 da página 43 (figura 45) exige que o aluno identifique a função trigonométrica a partir do seu respectivo gráfico com os conhecimentos adquiridos até o presente momento da situação de aprendizagem.

Figura 43 – Reprodução da página 41 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

Matemática – 2ª série – Volume 1

6. Observe a tabela a seguir, que contém valores de pares ordenados das funções **y = sen4x**, **y = 2sen4x** e **y = 1 + 2sen4x**. Perceba que foram atribuídos para 4x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, que são os valores que dividem os quadrantes da circunferência.

a) Complete a tabela:

4x	x	y = sen4x	y = 2sen4x	y = 1 + 2sen4x
0	0			
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$			
π	$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$			
2π	$\frac{\pi}{2}$			

b) Desenhe os gráficos de y = senx e de y = 1 + 2sen4x em um único sistema de eixos coordenados.

41

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

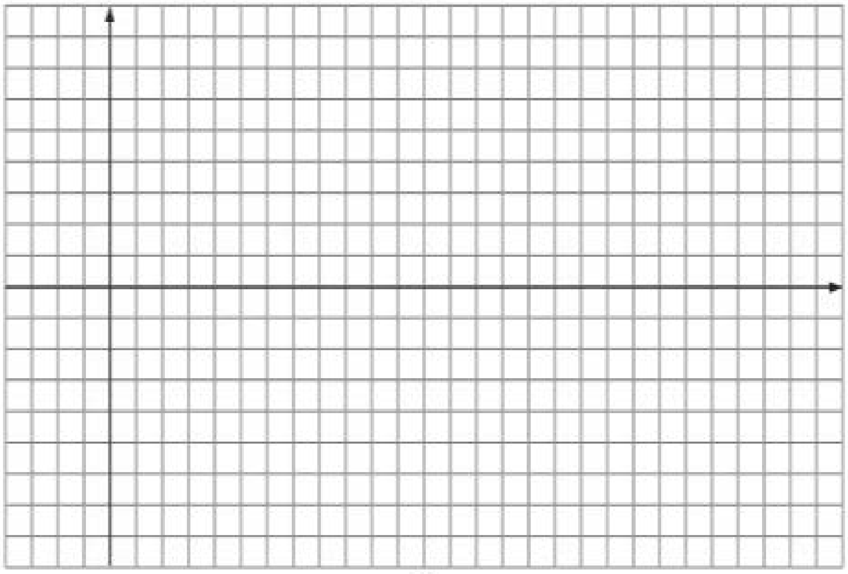
Figura 44 – Reprodução da página 42 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

Repare que, em relação ao gráfico de $y = \text{sen}x$, o gráfico de $y = 1 + 2\text{sen}4x$ foi deslocado verticalmente, 1 unidade para cima, e teve seu período diminuído 4 vezes e sua amplitude dobrada, efeitos esses causados, respectivamente, pelas constantes 1, 4 e 2. A partir dessa observação, complete a tabela a seguir:

Comparação entre os dois gráficos		
Função	$y = \text{sen}x$	$y = 1 + 2\text{sen}4x$
Período		
Imagem		
Amplitude		

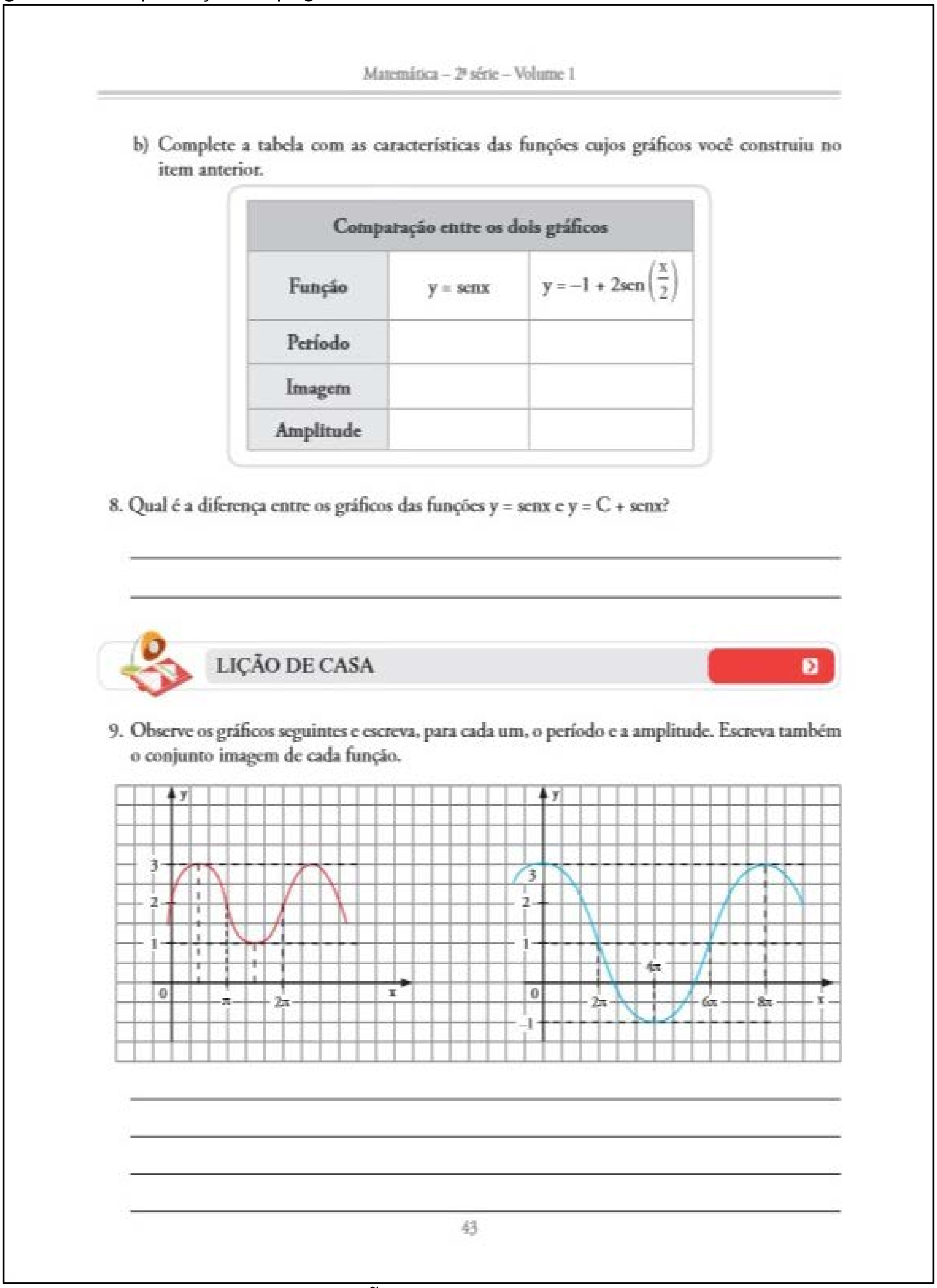
7\. a) Complete a tabela a seguir e desenhe os gráficos das funções $y = -1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ e de $y = \text{sen}x$ em um mesmo sistema de eixos cartesianos.

$\frac{x}{2}$	x	$2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$	$y = -1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			



Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Figura 45 – Reprodução da página 43 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1



Matemática – 2ª série – Volume 1

b) Complete a tabela com as características das funções cujos gráficos você construiu no item anterior.

Comparação entre os dois gráficos		
Função	$y = \text{sen}x$	$y = -1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
Período		
Imagem		
Amplitude		

8. Qual é a diferença entre os gráficos das funções $y = \text{sen}x$ e $y = C + \text{sen}x$?

LIÇÃO DE CASA

9. Observe os gráficos seguintes e escreva, para cada um, o período e a amplitude. Escreva também o conjunto imagem de cada função.

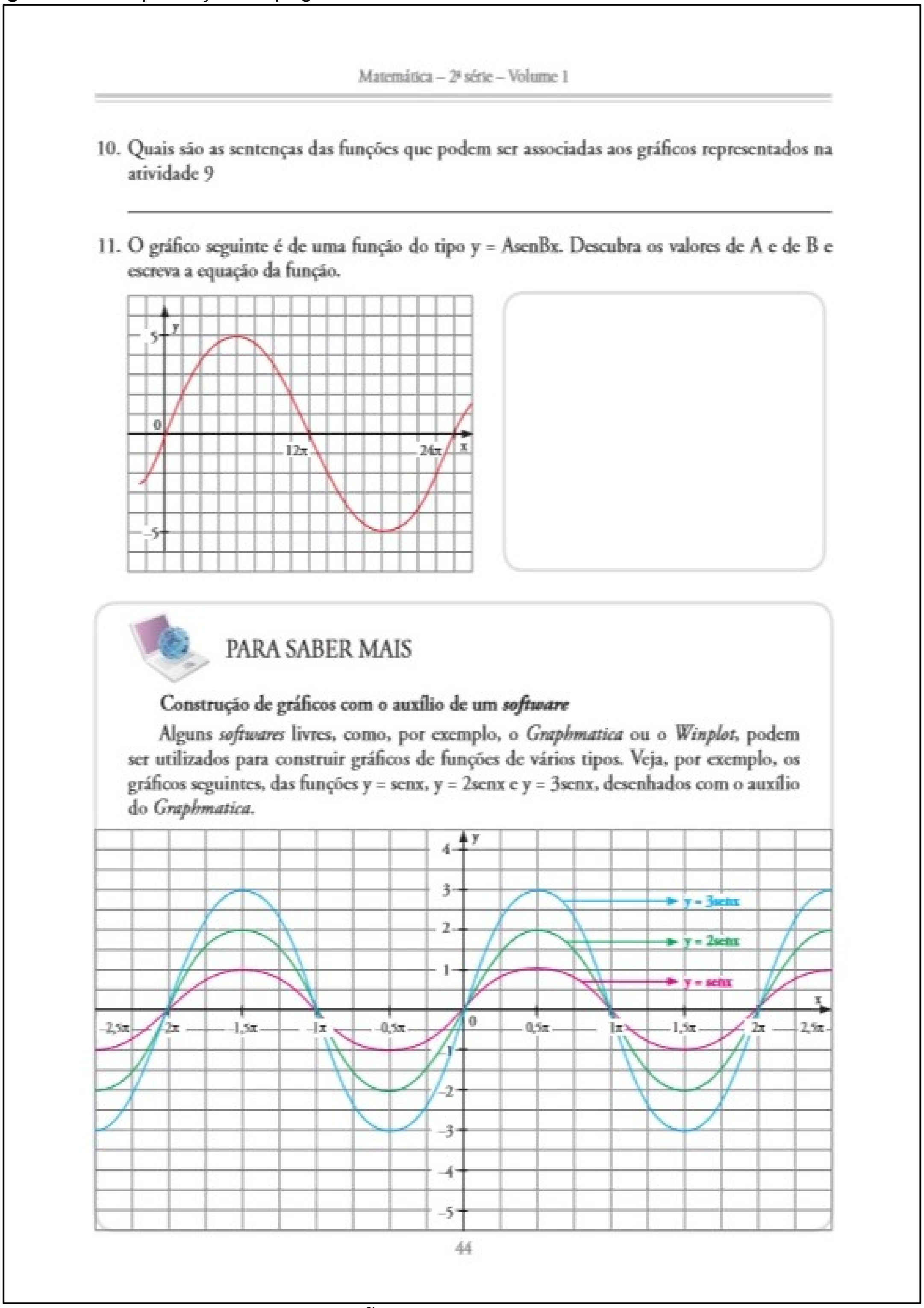
43

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

O material não contempla o comportamento das funções $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D$ e $f(x) = A \cdot \cos(Bx + C) + D$ com a variação no parâmetro C, descrito no capítulo anterior deste trabalho.

A recomendação da utilização de software (no caso, são sugeridos o Graphmatica ou o Winplot) vem somente após o término das atividades com construção manual de gráficos, como é visto na figura 46.

Figura 46 – Reprodução da página 44 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1


Matemática – 2ª série – Volume 1

10. Quais são as sentenças das funções que podem ser associadas aos gráficos representados na atividade 9

11. O gráfico seguinte é de uma função do tipo y = AsenBx. Descubra os valores de A e de B e escreva a equação da função.

PARA SABER MAIS

Construção de gráficos com o auxílio de um *software*

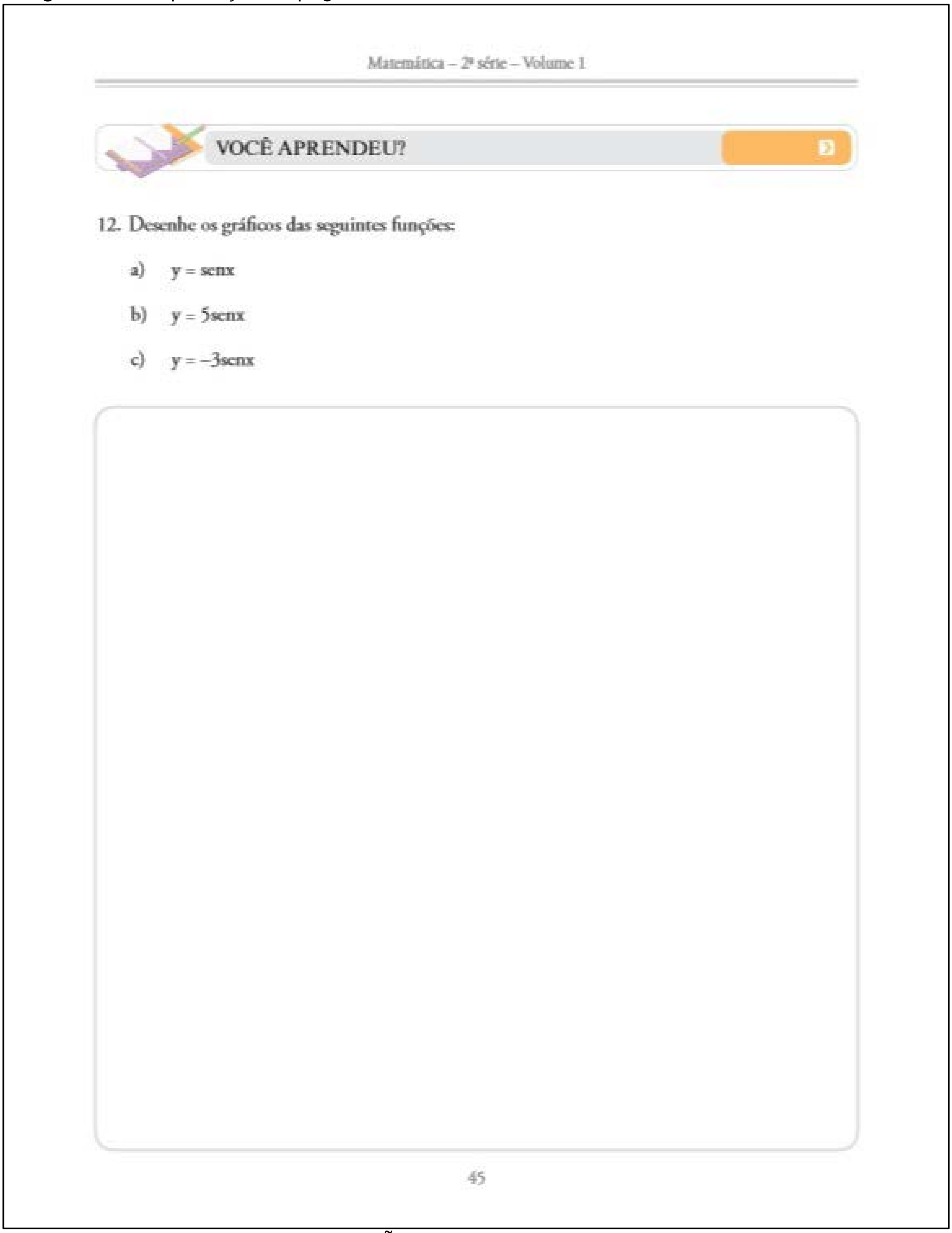
Alguns *softwares* livres, como, por exemplo, o *Graphmatica* ou o *Winplot*, podem ser utilizados para construir gráficos de funções de vários tipos. Veja, por exemplo, os gráficos seguintes, das funções y = senx, y = 2senx e y = 3senx, desenhados com o auxílio do *Graphmatica*.

44

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Deste ponto até a página 48 são contemplados exercícios de fixação de conteúdo, conforme é visto nas figuras 47, 48, 49 e 50:

Figura 47 – Reprodução da página 45 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1



Matemática – 2ª série – Volume 1

VOCÊ APRENDEU?

12. Desenhe os gráficos das seguintes funções:

a) $y = \text{sen}x$

b) $y = 5\text{sen}x$

c) $y = -3\text{sen}x$

45

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Figura 48 – Reprodução da página 46 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

13. Observando os gráficos construídos, responda: qual é a alteração produzida no gráfico de y = senx quando multiplicamos toda a função por um valor constante $A \neq 0$?

____

14. Observando todos os gráficos desenhados e responda:

a) Qual é o domínio de uma função do tipo y = Asenx?

____

b) Qual é a imagem de uma função do tipo y = Asenx?

____

c) Qual é o período de uma função do tipo y = Asenx?

____

15. Desenhe em um único sistema de eixos os gráficos:

a) y = senx

b) y = sen2x

c) y = sen4x

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Figura 49 – Reprodução da página 47 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

16. Você deve ter percebido uma diferença entre as formas "senoidais" dos três gráficos que você desenhou na atividade anterior. Explique essa diferença.

____

____

____

17. Desenhe em um único sistema de eixos os gráficos das seguintes funções:

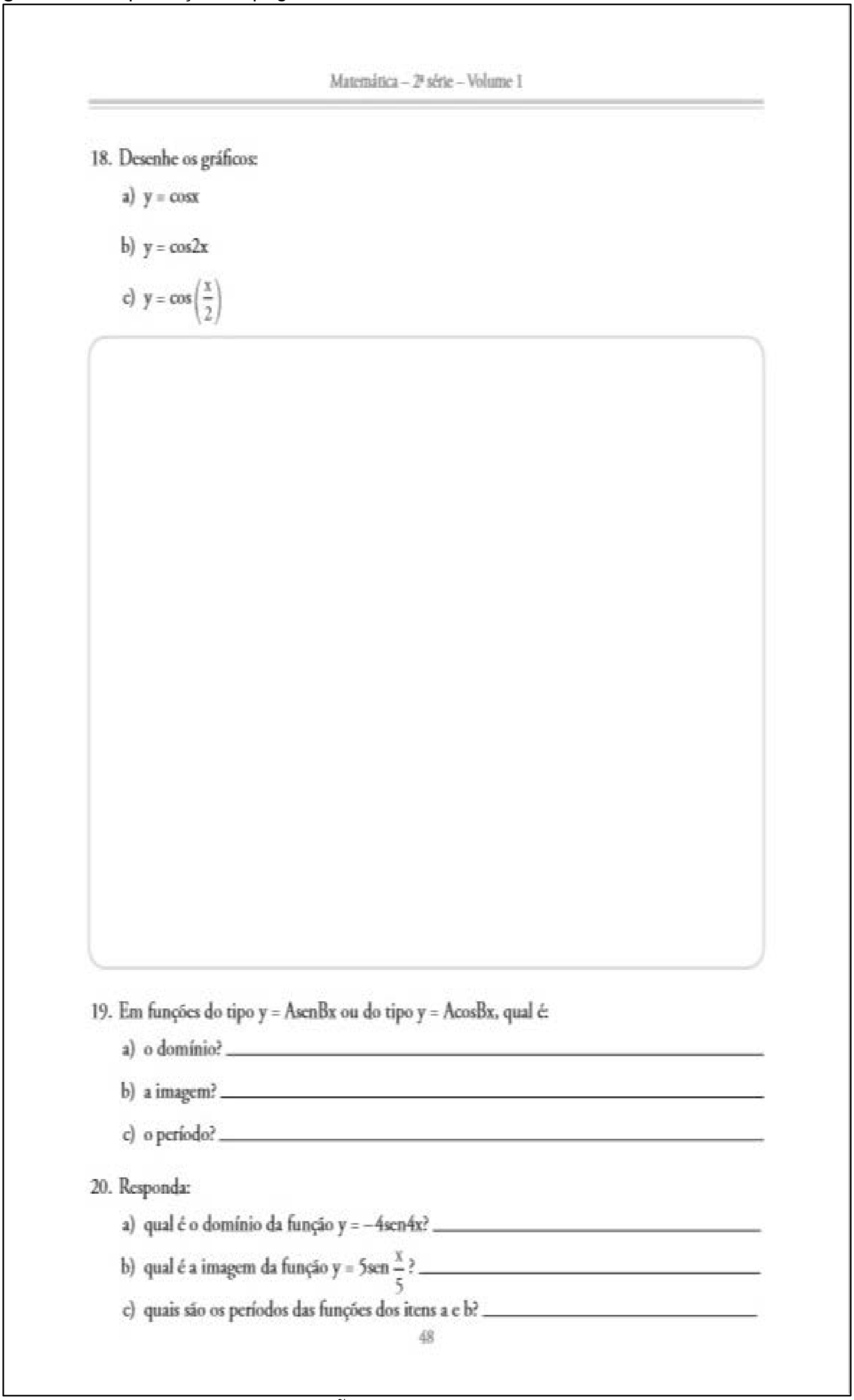
a) $y = \text{sen}x$

b) $y = \text{sen}\frac{x}{2}$

c) $y = \text{sen}\frac{x}{4}$

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Figura 50 – Reprodução da página 48 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1



18. Desenhe os gráficos:

a) $y = \cos x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

19. Em funções do tipo $y = A\text{sen}Bx$ ou do tipo $y = A\cos Bx$, qual é:

a) o domínio? __________

b) a imagem? __________

c) o período? __________

20. Responda:

a) qual é o domínio da função $y = -4\text{sen}4x$? __________

b) qual é a imagem da função $y = 5\text{sen}\frac{x}{5}$? __________

c) quais são os períodos das funções dos itens a e b? __________

Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

A proposta orienta que o docente avalie a conveniência de um aprofundamento do assunto e implemente-o conforme a realidade da turma, assim como a utilização de softwares para auxiliar no desenvolvimento da situação de aprendizagem:

> "Não estamos apresentando aqui uma sequência de trabalho para a discussão do 3º tipo de gráfico, $y = C + A \cdot \operatorname{sen}(Bx)$ e $y = C + A \cdot \cos(Bx)$, e muito menos para gráficos gerados por deslocamentos horizontais, do tipo $y = \operatorname{sen}(x + D)$. Propomos que o professor avalie a pertinência de incluir ou não gráficos desses tipos em algumas rotinas de trabalho com a ajuda de software" (SÃO PAULO (Estado), 2014g).

Ao finalizar as construções dos gráficos, são realizadas perguntas no intuito de que o aluno identifique as principais mudanças causadas pelas alterações nos parâmetros das funções.

A contextualização da situação de aprendizagem, descrita na figura 51, é feita com um caso de movimento periódico de corpo em função do tempo, na qual é solicitado a construção do seu gráfico a partir das informações sobre a amplitude, período e o eixo que a projeção é feita, conforme a figura 52.

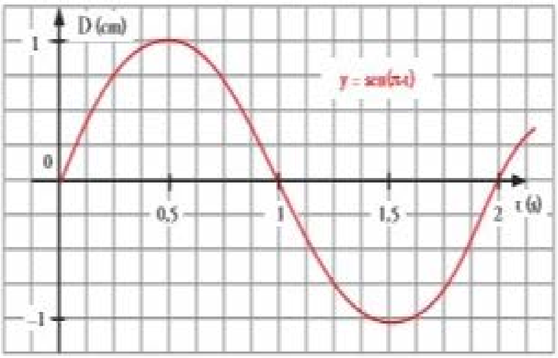
Figura 51 – Reprodução da página 49 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

Leitura e análise de texto

Gráficos trigonométricos em função do tempo

Fenômenos periódicos se repetem a cada intervalo determinado de tempo, mantendo suas características básicas. Se queremos analisar os fenômenos periódicos, não podemos deixar de considerar as funções nas quais uma grandeza varia periodicamente em função do tempo.

Veja, por exemplo, o gráfico representativo de um fenômeno que se repete de 2 em 2 segundos, isto é, um fenômeno com período 2 segundos.



A equação da função que relaciona a grandeza D ao tempo é: $D = \text{sen}(\pi \cdot t)$, para o qual teremos as seguintes condições:

- Domínio: $\mathbb{R}_+^*$
- Imagem: $[-1, +1]$
- Período: $\frac{2\pi}{\pi} = 2s$

21. Escreva o domínio, a imagem e o período das seguintes funções:

a) $y = 2\text{sen}\,(2\pi x)$ ____________________

b) $y = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ____________________

c) $y = 1 + 3\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ ____________________

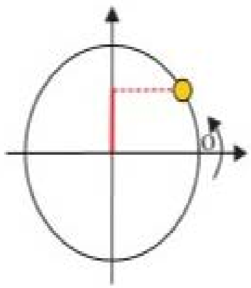
Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

Figura 52 – Reprodução da página 50 – caderno do aluno – Matemática – 2ª série – volume 1

VOCÊ APRENDEU?

A partir dessa ideia de movimento periódico representado em função do tempo, resolva a seguinte atividade:

22. Um pequeno corpo gira em torno de uma circunferência de raio 4 cm, no sentido indicado, completando uma volta a cada 2 segundos. Considerando que o corpo parte do ponto **O** assinalado na figura, determine a equação matemática que permite calcular a medida da projeção do ponto sobre o eixo vertical e, em seguida, desenhe o gráfico cartesiano representativo da equação obtida.



Fonte: SÃO PAULO (Estado), 2014d.

A sequência didática proposta nesta situação de aprendizagem é rica na parte teórica, contemplando conteúdos que visam despertar a atitude investigadora no aluno e que o mesmo torne-se protagonista da sua aprendizagem.

A abordagem realizada carece do estudo da função tangente. Um possível motivo identificado é a sua maior dificuldade para a construção manual dos gráficos, o que levaria um tempo não conveniente para exploração em sala de aula.

Para maiores possibilidades de sucesso no desenvolvimento desta situação de aprendizagem, é fundamental a disponibilidade de recursos multimídia para o docente introduzir o assunto em sala, orientar previamente os alunos quanto aos comandos básicos do aplicativo a ser utilizado na construção dos gráficos e a utilização do laboratório de informática da escola.

4.3 Desenvolvimento em sala de aula e resultados

Desenvolvi a situação de aprendizagem descrita na seção anterior em sala de aula em duas ocasiões, nos anos de 2010 e 2013. Em 2010, foi meu primeiro contato em sala de aula como professor de uma turma e na época ainda era aluno cursando o 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática pela UNESP de Ilha Solteira. Em 2013, era meu 4º ano como professor na educação básica e cursava o 2º ano do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, curso ao qual estou escrevendo esta presente dissertação.

Na primeira experiência, utilizei os recursos multimídia somente para exposição do conteúdo. Optei pelo GeoGebra devido ao meu uso frequente, por ser um aplicativo livre e por oferecer uma variedade satisfatória de recursos. Nas primeiras aulas, observei que era difícil responder com clareza às dúvidas dos alunos somente utilizando a lousa, visto que o espaço é limitado. Observei então a necessidade de recursos complementares que oferecessem melhores oportunidades de aprendizagem e dinamizar mais as aulas. A partir daí, dei início à construção dos gráficos no aplicativo computacional e ampliava a imagem através do projetor multimídia, com o intuito de dinamizar as aulas. Os alunos melhoraram significativamente o seu desempenho, pois tornou-se possível explorar com mais detalhes exemplos similares aos propostos na situação de aprendizagem.

No ano de 2013, a Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores “Paulo Renato Costa Souza” ofereceu o curso de formação continuada “**M@tmídias**

2 – Objetos de aprendizagem multimídia para o ensino de Matemática” (SÃO PAULO (Estado), 2015) aos docentes que atuavam no Ensino Médio com a disciplina de Matemática. Como produto final, foi solicitado relatório de uma atividade de vivência em sala de aula a qual contemplasse um dos conteúdos descritos nas situações de aprendizagem presentes na 2ª série do Ensino Médio. Optei em aprofundar o trabalho realizado em 2010 com a turma daquele ano, desenvolvendo a situação de aprendizagem “Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos” com a turma em sala de aula com os recursos multimídia para orientá-los quanto à construção manual dos gráficos no papel quadriculado. Aproveitei a oportunidade para trabalhar exercícios complementares, além de acrescentar o estudo da função tangente e dos deslocamentos horizontais. Posteriormente, dei continuidade ao conteúdo em sala de informática, com o objetivo de fixar a compreensão das principais características presentes nas funções trigonométricas elementares. Dentre os resultados alcançados, notou-se melhor aproveitamento e um maior envolvimento dos alunos durante as aulas no laboratório, visto que nesta etapa eles foram responsáveis pela construção do conhecimento e atuei orientando as dúvidas. Além disso, o uso do GeoGebra despertou a curiosidade da turma em explorar alguns dos recursos disponíveis, dentre os mais utilizados foram a associação da representação algébrica e gráfica através da cor e possibilidade de alterações nela, facilidade em desfazer o gráfico caso tenha errado algo (o que se exige muito mais manualmente).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das funções trigonométricas elementares com o auxílio do GeoGebra trouxe uma alternativa diferente para as metodologias de ensino de Matemática já adotadas. O software permite ao estudante visualizar com clareza as definições e propriedades presentes nos gráficos das funções.

O presente trabalho pretende contribuir para que o professor da educação básica medie a construção da autonomia do estudante no processo de aprendizagem, de forma a propiciar condições diversificadas de prosseguir nos estudos conforme suas habilidades e limitações. Nesta perspectiva, o discente é o protagonista da sua aprendizagem e o docente atua como um mediador, direcionando novos saberes e despertando novas descobertas ao estudante.

Na aprendizagem autônoma, os erros são contribuições preciosas para agregar novos conhecimentos. Através de descobertas, os educandos identificam seus erros, sendo conduzidos de forma prazerosa aos acertos e ao desenvolvimento de novas aprendizagens. Esta perspectiva de aprendizagem proporciona a libertação do ato de aprender, independente de modalidade de ensino, conduzindo à formação de indivíduos autônomos, críticos e criativos, atendendo as diretrizes da Lei de Diretrizes e Bases (BRASIL, 1996). Em outras palavras, um cidadão que não pense de forma fragmentada, mas de forma sistêmica. Só assim serão sujeitos de sua própria aprendizagem.

Enfim, o ensino informatizado colabora para o avanço do ensino, chamando o estudante a se tornar crítico, questionando vantagens e desvantagens da ferramenta informatizada (software) e interagindo com todas as áreas de estudo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <http://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?jornal=1&pagina=1&data=23/12/1996>. Acesso em: 5 mar. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. [Brasília, 20--?] Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 13 out. 2014.

GEOGEBRA. **About**. Disponível em: <http://www.geogebra.org/about>. Acesso em 09 jan. 2015.

HOWENWARTER, M. **Manual on-line do GeoGebra**. Traduzido por DE OLIVEIRA, A.S., FREITAS, A.P.A., NETO, H. B., DE LIMA, L. Disponível em: <http://static.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf >. Acesso em 29 set. 2014.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**, 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 3.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores. **Regulamento do Curso de Formação Continuada M@tmídias 2. Objetos de aprendizagem multimídia para o ensino de Matemática.** São Paulo, 2013. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/110/regulamento_matmidias2_1ed_2012_vers%C3%A3oFINAL.pdf>. Acesso em: 6 jan. 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** matemática e suas tecnologias. São Paulo, 2014a.

_______. **Caderno do Aluno. Matemática:** ensino fundamental: 8ª série / 9º ano: 2º semestre. São Paulo, 2014b.

______. **Caderno do Aluno. Matemática:** ensino médio: 1ª série: 2º semestre. São Paulo: SEE, 2014c.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Caderno do Aluno. Matemática:** ensino médio. 2ª série: 1º semestre: São Paulo, 2014d.

_______. **Caderno do Professor. Matemática:** ensino fundamental: 8ª série / 9º ano: 2º semestre. São Paulo, 2014e.

_______. **Caderno do Professor. Matemática:** ensino médio: 1ª série: 2º semestre. São Paulo, 2014f.

_______. **Caderno do Professor. Matemática:** ensino médio: 2ª série: 1º semestre. São Paulo, 2014g.