



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Raimundo José Pinto Cutrim

Curvas Planas Parametrizadas: um ensaio para o Ensino Médio

São Luís-MA

2015



Raimundo José Pinto Cutrim

Curvas Planas Parametrizadas: um ensaio para o Ensino Médio

Dissertação apresentada ao PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. **José Cloves Verde Saraiva**

São Luís-MA

2015

Elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal do Maranhão

Cutrim, Raimundo José Pinto.

Curvas Planas Parametrizadas: um ensaio para o Ensino Médio / Raimundo José Pinto Cutrim. – São Luís, 2015.

82f.

Orientador: José Cloves Verde Saraiva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

1. Ponto móvel
2. Curvas Planas
3. Parâmetro
4. Parametrização
5. Cíclóide
6. Área sob curva
7. Comprimento de curvas

CDU: 514.7

Raimundo José Pinto Cutrim

Curvas Planas Parametrizadas: um ensaio para o Ensino Médio

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

São Luís, 31 de Março de 2015.

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Cloves V. Saraiva (UFMA)
Orientador

Prof. Dr. José Antônio Pires F. Marão
(UFMA)

Profa. Dra. Sandra Imaculada M. Neto
(UEMA)

*Aos meus pais Antônio Cu-
trim e Maria Paula, à mi-
nha esposa Noeme e aos
meus irmãos.*

AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar, por ter me proporcionado a capacidade de ter concluído este trabalho.

À minha mãe, Maria Paula Pinto Cutrim e ao meu pai Antônio José Vieira Cutrim, pelo companheirismo de todas as horas .

À Noeme Costa Cutrim, minha companheira de todas as horas e que eu amo muito.

Aos meus irmãos, pela motivação de sempre.

A todos os colegas do PROFMAT 2013, em especial Márcio Antônio, Patrício Torres, Evaldo Albuquerque, Gilfraine, Marcos, Segundo, Edinaldo e Antônio, companheiros em todas as etapas do programa.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e ao IMPA pelo desenvolvimento e condução do PROFMAT

À CAPES, pelo auxílio financeiro das bolsas.

À Universidade Federal do Maranhão - UFMA, por aderir ao programa nacional.

Aos professores do PROFMAT, em especial aos professores José Cloves Verde Saraiva por ter me orientado e me ensinado de forma brilhante, José Antônio Marão pelos auxílios de sempre e ao Kênio pela disponibilidade em tirar-me algumas dúvidas.

Aos meus colegas da graduação (Ivaldo Nunes, Adecarlos Carvalho e Flank Bezerra) e hoje professores renomados da UFMA e UFPB, pelo constante apoio.

*“A vida é combate,
Que os fracos abate,
Que os fortes, os bravos
Só pode exaltar”.*

Gonçalves Dias

RESUMO

Através da trajetória de um ponto móvel é possível descrever o traço de uma curva plana, bastando considerarmos as coordenadas x e y como funções de um parâmetro t . Nesse contexto, apresentaremos os princípios de parametrização de várias curvas planas, inseridos dentro da abordagem do Ensino Médio, sendo necessário para isso, um resgate de vários conteúdos já estudados pela maioria dos alunos desta modalidade de Ensino. Inicialmente faremos um estudo de conteúdos que serão indispensáveis para o desenvolvimento deste trabalho, tais como: Função, Geometria Analítica, Trigonometria e uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral. Em seguida, trataremos da noção intuitiva e da definição formal de curva plana parametrizada, para na sequência explorarmos sobre a parametrização de várias curvas planas, utilizando como ferramenta de auxílio o software *Geogebra*. Além disso, com o conhecimento das curvas planas parametrizadas e do Cálculo Diferencial e Integral, iremos estabelecer o comprimento e área de curvas paramétricas. Por fim, daremos um destaque para a cicloide, onde mostraremos as suas curiosidades e sua importância no cotidiano.

Palavras-chave: Ponto móvel; Curvas planas; Parâmetro; Parametrização; Cicloide; Área sob curva; Comprimento de curvas.

ABSTRACT

Through the trajectory of a moving point is possible to describe the trace of a plane curve, just consider the coordinates x and y as functions of a parameter t . In this context, we present the principles of parameterization of several flat curves, inserted into the high school approach, it is necessary to do so, a rescue various content already studied by most students of this school mode. Initially we will study a content that will be indispensable for the development of this work, such as: Function, Analytic Geometry, Trigonometry and an introduction to Differential and Integral Calculus. Then treat the intuitive notion and the formal definition of parameterized plane curve, to explore the sequence on the parameterization of several flat curves, using as a tool the software *Geogebra*. In addition, with the knowledge of parameterized plane curves and the Differential and Integral Calculus, we will establish the length and area of ??parametric curves. Finally, we will give a highlight for the cycloid, where show their curiosities and their importance in everyday life.

Key-words: Mobile point; Plane curves; Parameter; Parameterization; Cycloid; Area under the curve; Length curves.

Lista de Figuras

1	Exemplo de função f de X em Y	p. 16
2	Coordenadas x e y do ponto P	p. 18
3	Quadrantes do sistema OXY	p. 19
4	Distância entre os pontos do plano π	p. 19
5	Reta r	p. 20
6	Circunferência C de centro A e raio r	p. 21
7	Superfície cônica seccionada por um plano em várias posições.	p. 22
8	Esboço da elipse.	p. 23
9	Elipse de eixo focal paralelo ao eixo OX	p. 23
10	Elipse de eixo focal paralelo ao eixo OY	p. 24
11	Esboço da hipérbole.	p. 24
12	Esboço da parábola.	p. 25
13	Triângulo retângulo ABC	p. 27
14	Gráfico da função seno.	p. 27
15	Gráfico da função cosseno.	p. 28
16	Gráfico da função tangente.	p. 28
17	Limite de uma função.	p. 30
18	Função contínua.	p. 32
19	$f'(x_0) = tg\alpha$	p. 33
20	Divisão de uma região em retângulos.	p. 35
21	Região S	p. 36
22	Cissóide de Diócles.	p. 39
23	Espiral de Arquimedes.	p. 39

24	René Descartes.	p. 40
25	Pierre de Fermat.	p. 40
26	Curva no plano.	p. 42
27	Curvatura do arco AB da curva C	p. 44
28	Vetor tangente - Reta tangente.	p. 46
29	Reta r passando pelos pontos A , P e B distintos.	p. 48
30	Circunferência λ centrada na origem.	p. 50
31	Circunferência de centro $(x_o, y_o) \neq (0, 0)$	p. 51
32	Elipse.	p. 52
33	Elipse de centro na origem.	p. 52
34	Hipérbole centrada na origem.	p. 54
35	Parábola de vértice (x_o, y_o) e foco F	p. 56
36	Construção da curva de Agnesi.	p. 57
37	Curva de Agnesi.	p. 58
38	Construção da cissóide de Diócles.	p. 59
39	Cissóide de Diócles.	p. 60
40	Ciclóide.	p. 61
41	Ponto P descrevendo uma ciclóide.	p. 63
42	Ponto P descrevendo uma hipociclóide.	p. 63
43	Hipociclóide qualquer.	p. 66
44	Astróide.	p. 66
45	Ponto P descrevendo uma epicyclóide.	p. 67
46	Traço de uma epicyclóide.	p. 68
47	Traço de outra epicyclóide.	p. 68
48	Cardióide.	p. 69
49	Elipse construída.	p. 70
50	Parábola construída.	p. 71
51	Curva de Agnesi construída.	p. 71

52	Ciclóide construída.	p. 72
53	Curva aproximada por segmentos de reta.	p. 74
54	Ciclóide invertida.	p. 81
55	Rampa.	p. 81
56	Ilustração prática.	p. 81
57	Exemplo prático.	p. 81
58	Pista cicloidal.	p. 81
59	Tobogã.	p. 81

SUMÁRIO

1	Introdução	p. 14
2	Conceitos preliminares	p. 16
2.1	Função	p. 16
2.2	Geometria Analítica	p. 18
2.2.1	Sistema de coordenadas cartesianas	p. 18
2.2.2	Distância entre pontos no plano cartesiano	p. 19
2.2.3	Reta	p. 20
2.2.4	Circunferência	p. 20
2.2.5	Cônicas	p. 21
2.3	Trigonometria	p. 26
2.3.1	Trigonometria no triângulo retângulo	p. 26
2.3.2	Funções trigonométricas	p. 27
2.3.3	Relações trigonométricas	p. 28
2.4	Cálculo Diferencial e Integral	p. 29
2.4.1	Limites	p. 29
2.4.2	Continuidade	p. 32
2.4.3	Derivadas	p. 32
2.4.4	Integral	p. 35
3	O que é uma curva?	p. 39
3.1	Um pouco de história	p. 39
3.2	Curva	p. 42
3.3	Curvatura	p. 43
3.4	Curvas suaves	p. 44

3.5	Orientação de uma curva	p. 45
3.6	Vetor tangente - Reta tangente	p. 46
4	Curvas Planas Parametrizadas	p. 48
4.1	Parametrização de uma reta	p. 48
4.2	Parametrização de uma circunferência	p. 50
4.3	Parametrização de uma elipse	p. 52
4.4	Parametrização de uma hipérbole	p. 54
4.5	Parametrização de uma parábola	p. 55
4.6	Parametrização da curva de Agnesi	p. 56
4.7	Parametrização da cissóide de Diócles	p. 58
4.8	Parametrização da cicloide	p. 61
4.9	Parametrização da hipocicloide	p. 63
4.10	Parametrização da epicloide	p. 67
4.11	Usando o Geogebra para modelar as curvas planas parametrizadas . . .	p. 69
4.12	Área e comprimento de arco de curvas paramétricas	p. 72
5	Considerações finais	p. 77
	Apêndice A - A história da curva de menor tempo	p. 78
	Apêndice B - A cicloide no cotidiano	p. 81
	Referências	p. 82

1 *Introdução*

Quando colocamos o bico do lápis ou da caneta sobre uma folha de papel, obtemos um ponto. Este não possui definição, temos somente o conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação. Assim como o ponto, temos a reta e o plano, os quais também só possuímos a noção intuitiva. Acerca destes três entes (ponto, reta e plano) existem postulados (afirmações aceitas sem demonstrações). Um desses postulados é o da existência: *Num plano há infinitos pontos*. Ao enunciarmos uma proposição P sobre propriedades que determinados conjuntos de pontos no plano devem satisfazer, estamos definindo um *lugar geométrico*. Assim, um lugar geométrico nada mais é do que o conjunto de todos os pontos que tornam a sentença P verdadeira. Por exemplo, a mediatriz de um segmento é definida como o conjunto dos pontos equidistantes das extremidades de um segmento dado. Podemos também, usando essa propriedade geométrica, obter a equação algébrica que caracteriza os pontos que pertencem à mediatriz do segmento definido.

De um modo geral, uma curva no plano é o lugar geométrico ou gráfico de uma equação envolvendo duas variáveis x e y . Temos, então, dois problemas:

- Dada uma equação, determinar o lugar geométrico correspondente.
- Dado um lugar geométrico, definido por uma condição, determinar a equação correspondente.

Até aqui usamos um critério estático para definir uma curva como um certo conjunto de pontos. É possível, entretanto, adotar um ponto de vista dinâmico e pensar em qualquer curva do plano (ou do espaço) como a trajetória de um ponto móvel, bastando para isso, considerarmos as coordenadas x e y como funções da forma $x = f(t)$ e $y = g(t)$ chamadas funções paramétricas e observar que, quando o parâmetro t varia, o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ também varia e traça uma curva C . A mediatriz citada no exemplo acima, pode ser caracterizada como a trajetória de um ponto que se move mantendo-se equidistante das extremidades de um dado segmento.

A experiência de mais de dez anos como professor de matemática do Ensino Médio e as dificuldades encontradas pelos alunos para interpretar uma curva de maneira dinâmica e não somente estática fez com que pensasse neste trabalho. No trabalho, dissertamos sobre a teoria das curvas planas parametrizadas. A escolha deste tema, visa

contribuir para que os alunos, em especial do Ensino Médio, tenham uma nova visão sobre a parametrização das curvas planas, uma vez que hoje em dia, grande parte dos estudantes da terceira série do Ensino Médio, ao estudarem as equações paramétricas da reta (por exemplo) não as interpretam de forma dinâmica. Resolvemos discorrer sobre as curvas planas com as quais os alunos da Educação Básica têm maior afinidade, entre as quais podemos citar: reta, circunferência, elipse, hipérbole e parábola. Além disso, citamos algumas outras curvas (curva de Agnesi, cissóide de Diócles, hipociclóide, epiciclóide e a ciclóide) que são de pouca afinidade dos estudantes, visando com que os mesmos despertem interesse por tal conteúdo. No caso da ciclóide, damos um destaque nos apêndices desta dissertação, pois a mesma apresenta propriedades que podem ser aplicadas a situações reais, como por exemplo o menor tempo percorrido por um objeto.

O texto foi dividido em três capítulos mais dois apêndices, a saber: No primeiro capítulo fazemos uma abordagem de vários conteúdos indispensáveis para o desenvolvimento deste trabalho, conteúdos estes que podemos citar: Função, Geometria Analítica (coordenadas no plano, distância entre pontos no plano, reta, circunferência e cônicas), Trigonometria (trigonometria no triângulo retângulo, funções trigonométricas e relações trigonométricas) e o Cálculo Diferencial e Integral (limite, continuidade, derivada e integral).

Já no segundo capítulo fazemos uma introdução ao estudo das curvas, sendo necessário para a compreensão do exposto neste trabalho. Apresentamos um pouco da história de como as curvas planas começaram a ser estudadas, a noção intuitiva de curva, além da definição formal da mesma. Também expressamos a noção de curvatura, curvas suaves, orientação de uma curva e vetor tangente.

Por fim, no terceiro capítulo fazemos um estudo da parametrização de várias curvas planas, citando em algumas delas, a construção das mesmas e a sua representação no Geogebra. Além disso, de posse desses conhecimentos, tratamos do cálculo do comprimento e da área de curvas paramétricas.

Nos apêndices deste trabalho enfatizamos a ciclóide. Apresentamos a história da curva de menor tempo, assim como a sua importância no cotidiano.

2 Conceitos preliminares

Neste capítulo faremos uma breve revisão dos conteúdos: Função, Geometria Analítica e Trigonometria. Sendo que os mesmos servem de base para o desenvolvimento deste trabalho. Além desses conteúdos citados, também iremos fazer uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, onde o mesmo será importantíssimo para o cálculo de área e comprimento de curvas paramétricas. Utilizaremos como referência [5], [10], [11], [12] e [13].

2.1 Função

Sejam dados conjuntos não vazios X e Y . Informalmente, uma função f de X em Y é uma *regra* que associa a cada $x \in X$ um único $y \in Y$. O conjunto X é chamado de *domínio* e o Y é chamado de *contradomínio*. Por vezes podemos visualizar uma função $f : X \rightarrow Y$ de uma maneira mais concreta por meio de diagramas, como o da Figura 1, onde cada seta indica que elemento $y \in Y$ está associado a cada $x \in X$.

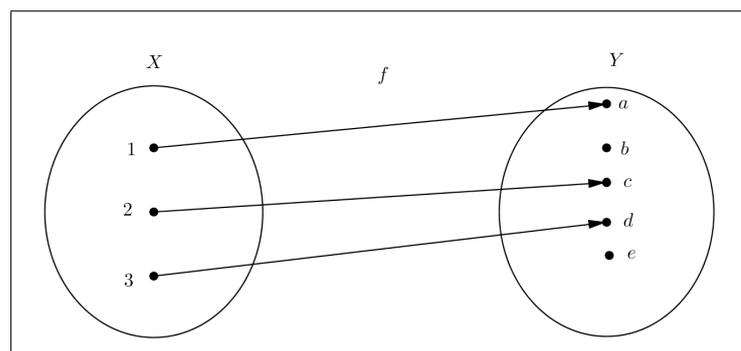


Figura 1: Exemplo de função f de X em Y .

Escrevemos $f : X \rightarrow Y$ para denotar que f é uma função de X em Y . Nesse caso, o elemento $y \in Y$ associado a $x \in X$ por f é denotado por $y = f(x)$, sendo denominado a *imagem* de $x \in X$ pela função f . No exemplo da Figura 1, temos $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ e $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = d$. Assim, a é a imagem de 1 por f , c é a imagem de 2 por f e d é a imagem de 3 por f .

De um ponto de vista matematicamente mais rigoroso, uma função é um caso particular de uma relação entre dois conjuntos, de acordo com [13], temos a seguinte

Definição 2.1. Dados conjuntos não vazios X e Y , uma **relação** de X em Y é um subconjunto R do produto cartesiano $X \times Y$, isto é, R é um conjunto de pares ordenados do tipo (x, y) , com $x \in X$ e $y \in Y$. Se R é uma relação de X em X , diremos apenas que R é uma relação em X .

Exemplo 2.2. Se $X = \{1, 2, 3\}$ e $\{2, 3, 4, 5\}$, o conjunto

$$R = \{(x, y) \in X \times Y; x \geq y\}$$

é a relação de X em Y dada por $R = \{(2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$.

Se R é uma relação de X em Y , então $R \subset X \times Y$ por definição. Reciprocamente, escolhido um par ordenado $(x, y) \in X \times Y$, pode ocorrer que $(x, y) \in R$ ou $(x, y) \notin R$. No primeiro caso, escrevemos $x R y$; no segundo, $x \not R y$. Em símbolos,

$$x R y \Leftrightarrow (x, y) \in R.$$

Dentre todos os tipos de relação que podemos considerar entre dois conjuntos não vazios, o principal é aquele dado pela seguinte

Definição 2.3. Dados conjuntos não vazios X e Y , uma relação f de X em Y é uma **função** se a seguinte condição for satisfeita:

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y; x f y.$$

Como antes, escrevemos $f : X \rightarrow Y$ para denotar que f é uma função de X em Y e $f(x) = y$ para denotar que o par $(x, y) \in X \times Y$ é relacionado por f . É imediato verificar que a definição formal acima coincide com a definição informal dada no início desta seção.

Exemplo 2.4. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Isto quer dizer que a função associa a cada $x \in \mathbb{R}$ seu quadrado x^2 . Veja que os requisitos definidores de uma função estão satisfeitos, uma vez que a cada $x \in \mathbb{R}$ temos associado um único outro real $f(x)$, seja qual, x^2 . Assim é que, ainda em relação a esse exemplo, temos $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, $f(5) = 5^2 = 25$, etc.

O *gráfico* de uma função $f : X \rightarrow Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in X$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}.$$

2.2 Geometria Analítica

Na geometria analítica plana, vamos revisar as coordenadas no plano, reta, circunferência e as cônicas.

2.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas

O sistema de coordenadas cartesianas, mais conhecido como sistema de eixos ortogonais num plano π é um par de eixos, eixo OX e eixo OY , com unidade de medida de igual comprimento, que se intersectam perpendicularmente na origem comum O . Por convenção, o eixo OX é denominado **eixo horizontal** e o eixo OY , **eixo vertical**.

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado a um ponto P são as coordenadas cartesianas do ponto P : x é a **abscissa** de P e y é a **ordenada** de P .

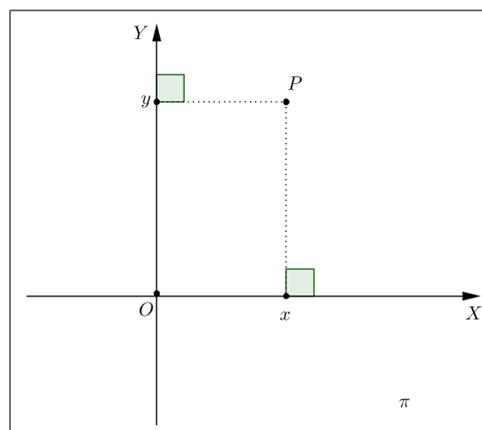


Figura 2: Coordenadas x e y do ponto P .

Notação: Se $P \in \pi$ corresponde a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $P = (x, y)$.

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas **quadrantes** e enumeradas como na Figura 3. Observe que os pontos do eixo OX têm

coordenadas $(x, 0)$, os pontos do eixo OY têm coordenadas $(0, y)$ e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

$$1^\circ \text{ Quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y > 0\}$$

$$2^\circ \text{ Quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y > 0\}$$

$$3^\circ \text{ Quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 \text{ e } y < 0\}$$

$$4^\circ \text{ Quadrante} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ e } y < 0\}$$

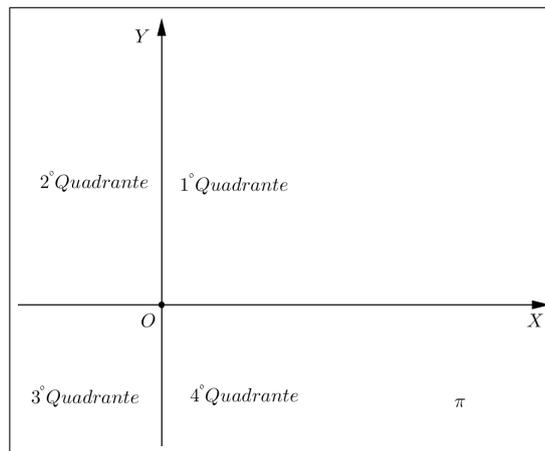


Figura 3: Quadrantes do sistema OXY .

2.2.2 Distância entre pontos no plano cartesiano

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano π dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY

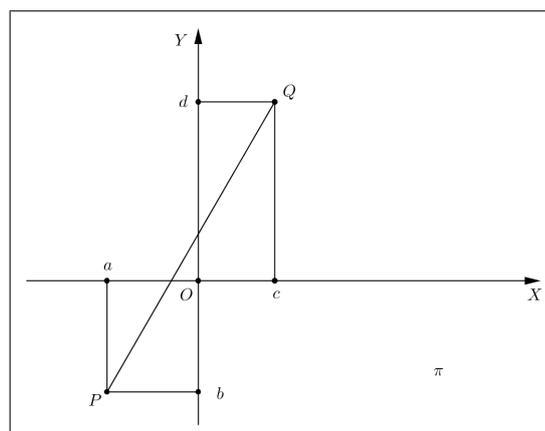


Figura 4: Distância entre os pontos do plano π .

A distância de $P = (a, b)$ a $Q = (c, d)$, que designamos por $d(P, Q)$ ou $|PQ|$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes, ou seja:

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Exemplo 2.5. Calcule a distância do ponto $A = (1, 2)$ ao ponto $B = (-2, -2)$.

Solução. Temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

2.2.3 Reta

Uma linha reta ou, simplesmente, uma reta é uma linha que, à semelhança de outros elementos geométricos como, por exemplo, o ponto, não tem uma definição matemática rigorosa. Em termos simples poderá dizer-se que se trata de uma linha sem curvatura ou sinuosidade, sem espessura e de comprimento infinito. Tendo comprimento infinito, uma reta é formada por infinitos pontos.

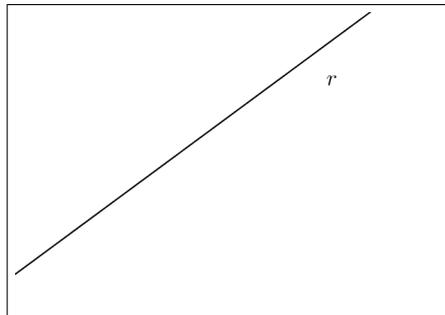


Figura 5: Reta r .

A **equação cartesiana** de uma reta r é

$$r : ax + by = c,$$

onde a, b e c são números reais, com a e b não nulos simultaneamente, e x e y são as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ genérico de r .

2.2.4 Circunferência

A circunferência ou círculo C de centro no ponto $A \in \pi$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A , ou seja:

$$C = \{P \in \pi / d(P, A) = r\}.$$

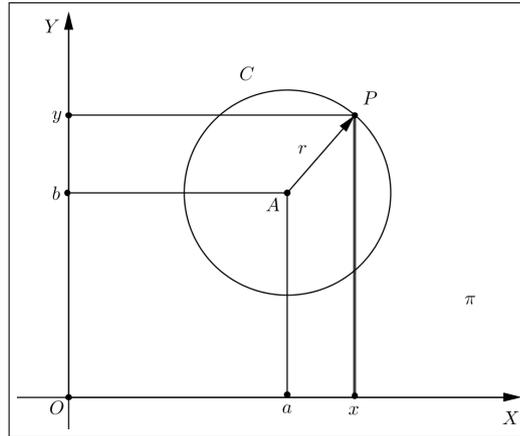


Figura 6: Circunferência C de centro A e raio r .

Se $A = (a, b)$ são as coordenadas do centro num sistema de eixos ortogonais OXY do plano π , segue que

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in C \\
 \Leftrightarrow d(P, A) = r \\
 \Leftrightarrow [d(P, A)]^2 = r^2 \\
 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.
 \end{aligned}$$

Assim, associamos ao círculo C a equação:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

que relaciona a abcissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Por meio desta equação, as propriedades geométricas do círculo podem ser deduzidas geometricamente.

2.2.5 Cônicas

Foi Apolônio de Perga, cerca de 200 a.C., quem iniciou o estudo das curvas obtidas quando se secciona uma superfície cônica por um plano α . Dependendo da posição desse plano α , diferentes seções podem ser formadas.

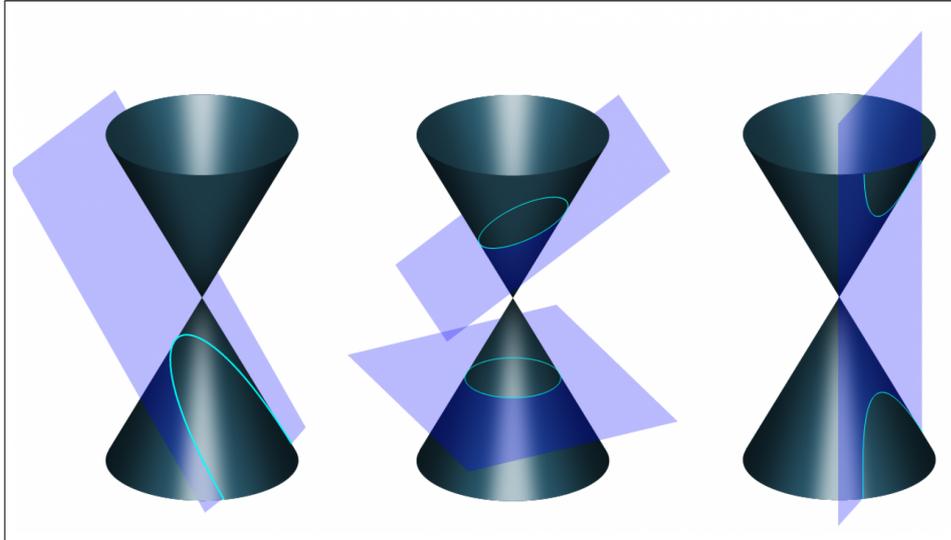


Figura 7: Superfície cônica seccionada por um plano em várias posições.

Se o plano α é perpendicular ao eixo da superfície cônica, a seção obtida é uma circunferência. Em particular, se α passa pelo vértice do cone, a seção obtida é um ponto.

Se o plano α é oblíquo ao eixo da superfície de revolução, mas corta apenas uma das folhas da cônica, a seção obtida é uma **elipse**.

Se o plano é paralelo a uma geratriz da superfície cônica, a seção obtida é uma **parábola**.

Se o plano é oblíquo ao eixo da superfície de revolução e corta as duas folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **hipérbole**.

Faremos agora um breve estudo da elipse, da hipérbole e da parábola, denominadas **seções cônicas**.

(1) **Elipse**

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano e seja $2c$ a distância entre eles. Uma elipse ε é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é uma constante $2a$ ($2a > 2c$), ou seja,

$$\varepsilon = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

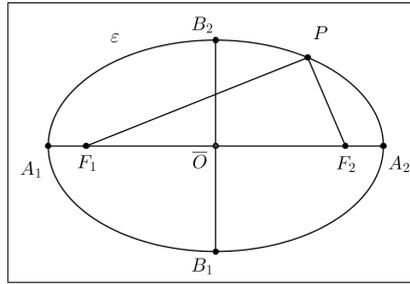


Figura 8: Esboço da elipse.

Os elementos principais da elipse são:

focos: F_1 e F_2 ,

centro: \bar{O} ,

eixo maior: A_1A_2 ,

eixo menor: B_1B_2 ,

distância focal: $2c$, em que $c = |\bar{O}F_1| = |\bar{O}F_2|$,

medida do eixo maior: $2a$, em que $a = |\bar{O}A_1| = |\bar{O}A_2|$,

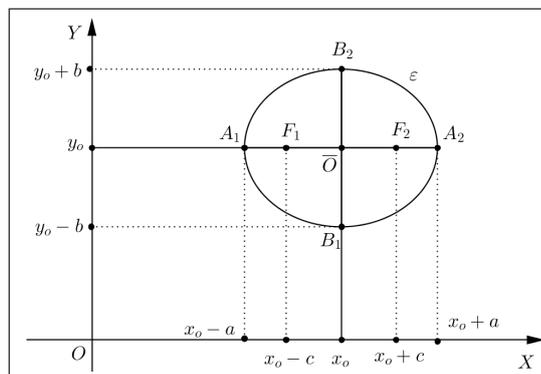
medida do eixo menor: $2b$, em que $b = |\bar{O}B_1| = |\bar{O}B_2|$,

excentricidade: $e = \frac{c}{a}$,

relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$.

As equações da elipse são dadas por:

a) Elipse com centro no ponto $\bar{O} = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ou coincidente ao eixo OX .

Figura 9: Elipse de eixo focal paralelo ao eixo OX .

$$\varepsilon : \frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1.$$

b) Elipse com centro no ponto $\bar{O} = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ou coincidente ao eixo OY .

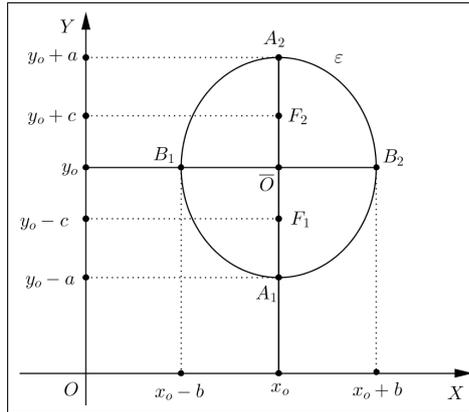


Figura 10: Elipse de eixo focal paralelo ao eixo OY .

$$\varepsilon : \frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$

(2) Hipérbole

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano e seja $2c$ a distância entre eles. Uma hipérbole H é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é uma constante $2a$ ($0 < 2a < 2c$), ou seja,

$$H = \{P; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

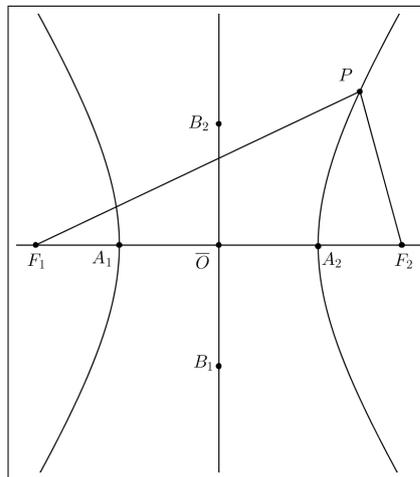


Figura 11: Esboço da hipérbole.

Os elementos principais da hipérbole são:

focos: F_1 e F_2 ,

centro: \bar{O} ,

eixo real: A_1A_2 ,

eixo imaginário: B_1B_2 ,

distância focal: $2c$, em que $c = |\bar{O}F_1| = |\bar{O}F_2|$,

medida do eixo real: $2a$, em que $a = |\overline{OA}_1| = |\overline{OA}_2|$,
 medida do eixo imaginário: $2b$, em que $b = |\overline{OB}_1| = |\overline{OB}_2|$,
 excentricidade: $e = \frac{c}{a}$,
 relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$.

As equações da hipérbole são dadas por:

a) Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ou coincidente ao eixo OX .

$$H : \frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1.$$

b) Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ou coincidente ao eixo OY .

$$H : \frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1.$$

(3) Parábola

Dados um ponto F e uma reta d pertencente a um plano, com $F \notin d$, seja p a distância entre o ponto F e a reta d . Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de F e de d , ou seja,

$$P = \{K \mid d(K, F) = d(K, d)\}.$$

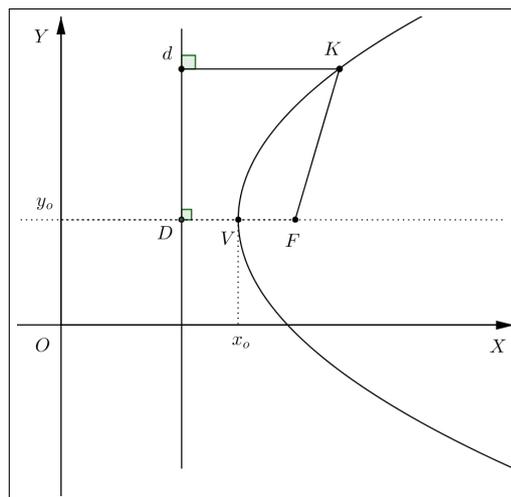


Figura 12: Esboço da parábola.

Os elementos principais da parábola são:

foco: F ,

reta diretriz: d ,

parâmetro: $2p$,

vértice: V ,

eixo simetria: reta VF ,

relação notável: $d(V, F) = p$, pois $d(V, F) = d(V, D)$.

As equações da parábola são dadas por:

a) Parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ou coincidente ao eixo OX .

Caso I. O foco F está **à direita** da reta diretriz.

$$P : (y - y_o)^2 = 4px.$$

Caso II. O foco F está **à esquerda** da reta diretriz.

$$P : (y - y_o)^2 = -4px.$$

b) Parábola com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ou coincidente ao eixo OY .

Caso I. O foco F está **à direita** da reta diretriz.

$$P : (x - x_o)^2 = 4py.$$

Caso II. O foco F está **à esquerda** da reta diretriz.

$$P : (x - x_o)^2 = -4py.$$

2.3 Trigonometria

Vamos rever agora alguns conceitos fundamentais da trigonometria. Os conceitos aqui abordados serão importantes no desenvolvimento da teoria abordada e também fazem parte do referencial teórico.

2.3.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Dado um triângulo retângulo ABC , de hipotenusa a e catetos b e c . Definimos o *seno*, o *co seno* e a *tangente* de cada um dos ângulos agudos.

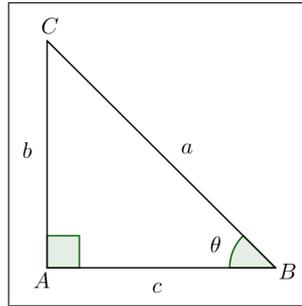


Figura 13: Triângulo retângulo ABC .

• O seno de um ângulo agudo é dado pela razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a}.$$

• O cosseno de um ângulo agudo é dado pela razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\text{cos } \theta = \frac{c}{a}.$$

• A tangente de um ângulo agudo é dado pela razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

$$\text{tg } \theta = \frac{b}{c}.$$

2.3.2 Funções trigonométricas

Função seno: Chama-se de função seno, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x , o real $f(x) = \text{sen } x$. São notáveis as seguintes propriedades da função seno:

- 1^a) sua imagem é $Im = [-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- 2^a) é periódica e seu período é 2π ;
- 3^a) seu gráfico é a senóide.

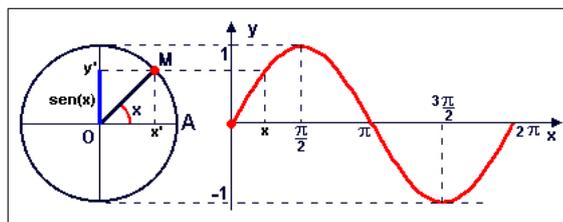


Figura 14: Gráfico da função seno.

Função cosseno: Chama-se de função cosseno, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x , o real $f(x) = \cos x$. São notáveis as seguintes propriedades da função cosseno:

- 1ª) sua imagem é $Im = [-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- 2ª) é periódica e seu período é 2π ;
- 3ª) seu gráfico é a cossenóide.

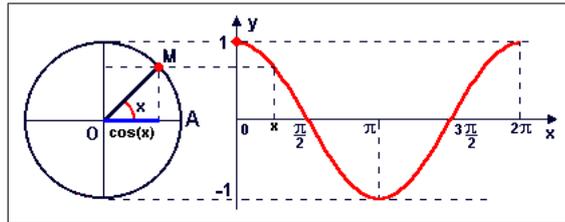


Figura 15: Gráfico da função cosseno.

Para $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), sabemos que $\cos x \neq 0$ e, então, existe o quociente $\frac{\sen x}{\cos x}$, denominado tangente de x e representado por tgx .

Função tangente: Chama-se função tangente, a função $f : \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada x o real $tgx = \frac{\sen x}{\cos x}$, isto é, $f(x) = tgx$. Destacam-se as seguintes propriedades da função tangente:

- 1ª) sua imagem é \mathbb{R} , isto é, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $tgx = y$;
- 2ª) é periódica e seu período é π ;
- 3ª) seu gráfico é a tangentóide.

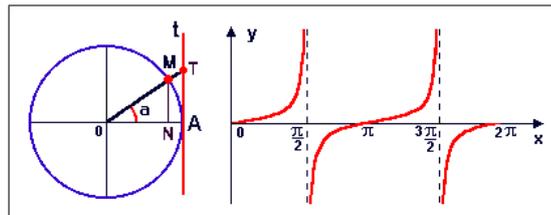


Figura 16: Gráfico da função tangente.

2.3.3 Relações trigonométricas

Destacamos aqui as relações trigonométricas fundamentais, demonstradas em [5].

- 1ª) Para todo x real, vale a relação:

$$\sen^2 x + \cos^2 x = 1.$$

- 2ª) Para todo x real e $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), são válidas as relações:

$$\cot g x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

$$1 + \cot g^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

3^a) Para todo x real e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), são válidas as relações:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

$$\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sec}^2 x.$$

4^a) Para todo x e y reais, são válidas as relações:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y,$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

2.4 Cálculo Diferencial e Integral

O final do século *XVII* viu o surgimento de uma conquista matemática formidável: o Cálculo Diferencial. Descoberto independentemente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, tornou-se a base para o desenvolvimento de várias áreas da Matemática, além de possuir aplicação em praticamente todas as áreas do conhecimento científico.

O estudo desta seção envolve as noções de limite, continuidade, derivada e integral.

2.4.1 Limites

I. Definição de limite de uma função

Consideremos o gráfico da Figura 17.

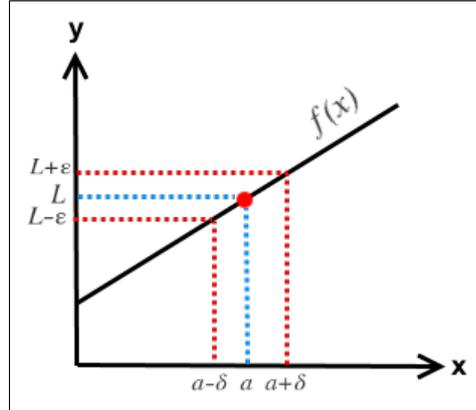


Figura 17: Limite de uma função.

Definição 2.6. Sejam f uma função e a um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f . Dizemos que f tem *limite* L , em a , se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tal número L , que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

II. Propriedades dos limites

A seguir, apresentamos algumas propriedades que nos permitem mais facilmente determinar o limite de uma função. As demonstrações dessas propriedades podem ser encontradas em [10], [12] e [13].

Teorema 2.7. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot L$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;
- (v) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$;
- (vi) $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$, ($M \neq 0$).

Exemplo 2.8. Calcule os limites a seguir:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} 15 = 15$.
- b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 5x + 6) = 1 + 5 + 6 = 12$.
- c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 4}{x^2 + 3} = \frac{-2 - 4}{4 + 3} = -\frac{6}{7}$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

III. Limites Laterais

Quando consideramos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, estamos interessados no comportamento da função nos valores próximos de a , isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo a mas diferente de a e, portanto, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que a .

Entretanto, o comportamento em algumas funções, quando x está próximo de a , mas assume valores menores que a , é diferente do comportamento da mesma função, quando x está próximo de a , mas assume valores maiores que a . Desta forma, podemos escrever.

Definição 2.9. O **limite lateral à direita** de uma função f definida em um intervalo aberto (a, b) , quando x se aproxima de a pela direita, será L e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Definição 2.10. O **limite lateral à esquerda** de uma função f definida em um intervalo aberto (b, a) , quando x se aproxima de a pela esquerda, será L e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $-\delta < x - a < 0$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Um resultado importante que decorre das definições anteriores acima pode ser visto a seguir:

Teorema 2.11. *Sejam f uma função, a um número real e suponhamos que existam p e q tais que (p, a) e (a, q) estejam contidos no domínio de f . Então, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, existem os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e ambos forem iguais, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.*

Observação 2.12. Para demonstração do Teorema 2.11, consultar [10] e [12].

Exemplo 2.13. Se considerarmos $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x > 1 \\ 2, & x = 1 \\ 4x + 1, & x < 1 \end{cases}$, temos que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$,

pois

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5.$$

2.4.2 Continuidade

Definição 2.14. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Dizemos que f é contínua em p , se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

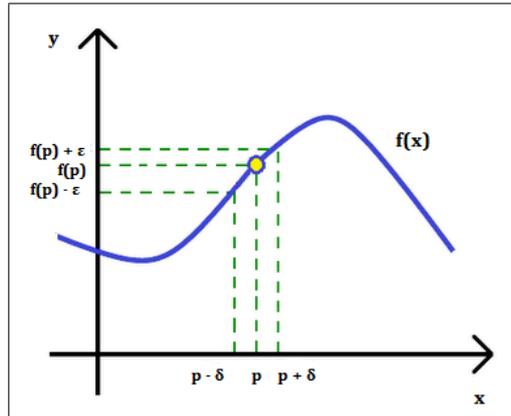


Figura 18: Função contínua.

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto p de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta “salto” em p .

Decorre da Definição 2.14 e do conceito de existência de um limite que, uma função f é contínua em um ponto p se, e somente se, são verificadas, simultaneamente as seguintes condições:

- 1ª) existe o valor de $f(p)$;
- 2ª) existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$;
- 3ª) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

Exemplo 2.15. Verifique se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x < 2 \\ 7 - 2x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, é contínua em $x = 2$.

Solução. Devemos verificar se $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

a) $f(2) = 7 - 2 \cdot 2 = 3$,

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (7 - 2x) = 3$,

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3$,

então $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 = f(2)$. Logo f é contínua em $x = 2$.

2.4.3 Derivadas

I. Derivada no ponto x_0

Definição 2.16. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I . Chama-se *derivada* de f no ponto x_0 o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

se este existir e for finito.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente representada com uma das seguintes notações:

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0}$$

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada *acréscimo* ou *incremento* da variável x relativamente ao ponto x_0 . A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada *acréscimo* ou *incremento* da função f relativamente ao ponto x_0 . O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ recebe o nome de *razão incremental* de f relativamente ao ponto x_0 .

Frisemos que a derivada de f no ponto x_0 pode ser representada das seguintes formas:

$$\begin{aligned} (i) \quad f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \\ (ii) \quad f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}; \\ (iii) \quad f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Quando existe $f'(x_0)$ dizemos que f é *derivável* no ponto x_0 . Dizemos também que f é *derivável* no intervalo aberto I quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

II. Interpretação geométrica

A derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

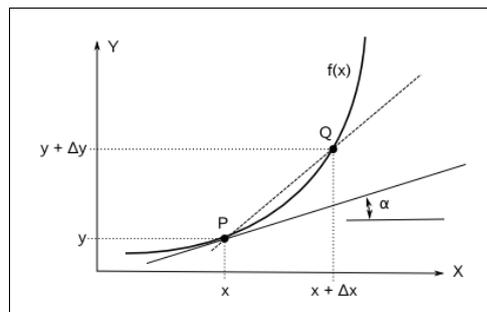


Figura 19: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

III. Derivada das funções elementares

Usando a definição, podemos mostrar a derivada de inúmeras funções elementares. A seguir, apresentamos um resumo das derivadas de várias destas funções:

- 1) Derivada da função constante: Se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$.
- 2) Derivada da função potência: Se $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
- 3) Derivada da função seno: Se $f(x) = \text{sen}x$, então $f'(x) = \text{cos}x$.
- 4) Derivada da função cosseno: Se $f(x) = \text{cos}x$, então $f'(x) = -\text{sen}x$.
- 5) Derivada da função exponencial: Se $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.
- 6) Derivada da função logarítmica: Se $f(x) = \log_a x$, então $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

IV. Regras de Derivação

Teorema 2.17. *Sejam f e g funções reais de uma variável real, definidas e deriváveis num mesmo conjunto. Desta forma, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

$$P1. [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

$$P2. [k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x).$$

$$P3. [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

$$P4. \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad [g(x) \neq 0].$$

Observação 2.18. Para demonstração do Teorema 2.17, consultar [10], [12] e [13].

V. Regra da cadeia

Teorema 2.19. *Seja $f : A \rightarrow B$ uma função dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g : B \rightarrow C$ uma função dada pela lei $z = g(y)$. Existe a função composta $F : A \rightarrow C$ dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$. Supondo que f seja derivável no ponto x e g seja derivável no ponto y tal que $y = f(x)$, resulta que F também é derivável em x e sua derivada é*

$$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x).$$

Em resumo:

$$F(x) = g(f(x)) \Rightarrow F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Observação 2.20. Para demonstração do Teorema 2.19, consultar [10] e [13].

Exemplo 2.21. Derive:

1. $f(x) = 5x - 3 \Rightarrow f'(x) = 5$;
2. $f(x) = 4x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2x$;
3. $f(x) = \frac{\text{sen}x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1)\text{cos}x - \text{sen}x}{(x+1)^2}$;
4. $f(x) = \text{cos}3x \Rightarrow f'(x) = \text{cos}'3x \cdot (3x)' = -3\text{sen}3x$;

5. $f(x) = (3x^2 + 1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(3x^2 + 1)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2 + 1)^2$;
 6. $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 9) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 9} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 9}$.

Observação 2.22. Se uma função f for derivável e sua derivada definir uma função contínua, dizemos que f é de classe C^1 . Se f for uma função duas vezes derivável e a sua derivada de segunda ordem define uma função contínua, dizemos que f é de classe C^2 . Podemos dizer que f é de classe C^∞ , quando esta for uma função de classe C^n , seja qual for $n \in \mathbb{N}$.

2.4.4 Integral

Definição 2.23. Seja f um função contínua no intervalo $[a, b]$. Suponha que este intervalo seja dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ e seja x_i um número pertencente ao i -ésimo intervalo, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Neste caso, a *integral definida* de f em $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x,$$

se este limite existir.

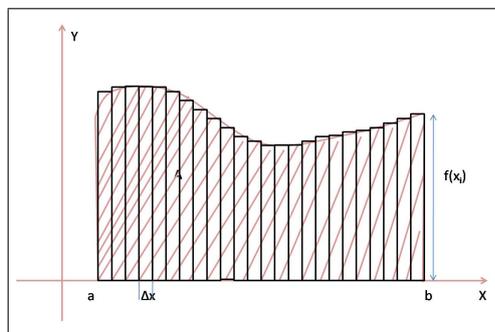


Figura 20: Divisão de uma região em retângulos.

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, então diremos que f é *integrável* em $[a, b]$.

A integral definida de uma função f pode ser entendida como sendo o limite da soma das áreas dos retângulos de altura $f(x_i)$ e base Δx , quando a base tende a zero. Note que, o produto $\Delta x f(x_i)$ é a área do i -ésimo retângulo. A soma de todas estas áreas, fornece a área total abaixo da curva. Sendo assim, nada mais natural do que definir a área de uma região S por

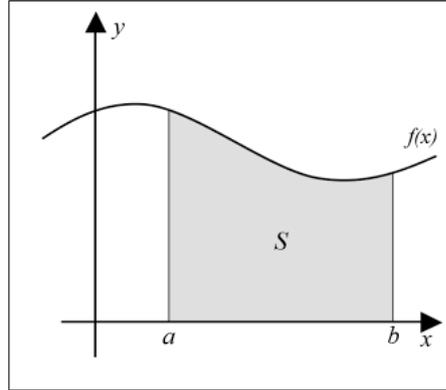


Figura 21: Região S .

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Definição 2.24. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. A *primitiva* de f ou *integral indefinida* de f é uma função F , tal que

$$F'(x) = f(x).$$

Sendo F uma primitiva de f em $[a, b]$, então para toda constante k , $F(x) + k$ é, também, primitiva de f . Por outro lado, se duas funções têm derivadas iguais num intervalo, elas diferem neste intervalo, por uma constante. Segue que as primitivas de f em $[a, b]$ são as funções da forma $F(x) + k$, com k constante.

A notação $\int f(x)dx$ será usada para representar a família das primitivas de f :

$$\int f(x)dx = F(x) + k.$$

Teorema 2.25. (Teorema Fundamental do Cálculo) Se f for integrável em $[a, b]$ e F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Observação 2.26. Para demonstração do Teorema 2.25, consultar [10] e [13].

Apresentemos agora as propriedades da integral.

Teorema 2.27. Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então:

a) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

b) kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

c) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

d) Se $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ então,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

e) Se f é integrável em $[a, b]$, então a função $|f|$ também é integrável em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Observação 2.28. Para demonstração do Teorema 2.27, consultar [10].

Vamos resolver agora alguns exemplos.

Exemplo 2.29. Resolva:

1. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + k.$
2. $\int \left(x^5 + \frac{1}{x^3} + 4 \right) dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^{-2}}{2} + 4x + k = \frac{x^6}{6} - \frac{1}{2x^2} + 4x + k.$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k \quad (x > 0).$
4. $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + k \quad (x \neq 0).$
5. $\int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} + \frac{12}{2} - 2 = 8.$

Seja R a região sob o gráfico da função contínua e positiva f , de classe C^1 , definida em $[a, b]$. Temos as seguintes definições:

Definição 2.30. O volume do sólido obtido da revolução de R em torno do eixo OX é dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Definição 2.31. Se $a > 0$, o volume do sólido de revolução obtido pela revolução de R em torno do eixo OY é dado por:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Definição 2.32. O comprimento do gráfico de f é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

3 O que é uma curva?

Neste capítulo vamos estudar a história das curvas planas, a noção intuitiva de curva e a definição formal de curva, curvatura, curvas suaves, orientação de uma curva e vetor tangente. Utilizaremos como referência [1], [2], [3], [8], [14], [15], [16].

3.1 Um pouco de história

Durante os séculos II e III a.C, os matemáticos já estudavam as retas, os círculos e as cônicas. No entanto, nesse mesmo período, a grande busca de solucionar os três célebres problemas gregos (A Duplicação do Cubo, A Trisseção de um Ângulo e a Quadratura do Círculo) foi o ponto de partida para o estudo de outras curvas planas, ou seja, através das tentativas de solucionar esses problemas, os matemáticos não se recusavam a utilizar outros métodos de construção ou a empregar outras curvas, uma vez que as construções com régua e compasso não permitiam resolver todos os problemas tratados pelos matemáticos gregos. Dentre as curvas utilizadas para resolver os célebres problemas gregos, podemos citar a **cissóide** de Diócles (180 a.C), utilizada para resolver o problema da duplicação do cubo e a **espiral** de Arquimedes (230 a.C), utilizada para resolver os problemas da trisseção do ângulo e a quadratura do círculo.

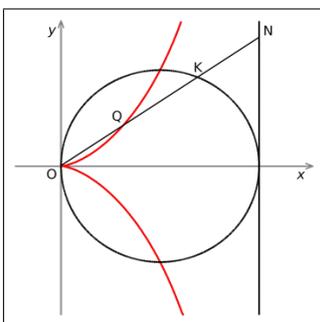


Figura 22: Cissóide de Diócles.

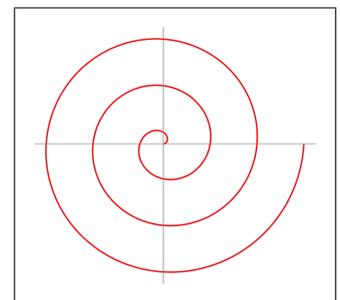


Figura 23: Espiral de Arquimedes.

As transformações ocorridas na Matemática durante o século XVII, em particular na geometria, com a intervenção de métodos algébricos do francês Viète (1540-1603) e infinitesimais, faz com que essa época seja marcada por uma concepção geral das cur-

vas, concepção essa que não se limitava ao estudo das curvas particulares, ampliando o universo dos objetos geométricos pela introdução de curvas que descrevem movimentos ou são expressas por equações algébricas. Em diversos problemas, tratava-se de procurar um objeto desconhecido que podia ser uma curva, em um sentido bem mais geral do que se considerava anteriormente.

Os nomes de René Descartes (1596-1650) e de Pierre de Fermat (1601-1665) estão no centro das mudanças, que culminaram com a invenção do que chamamos hoje de “Geometria Analítica”.

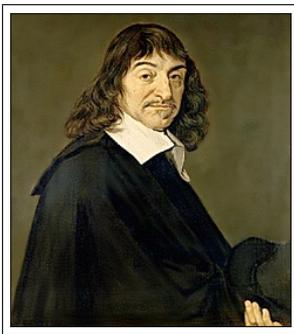


Figura 24: René Descartes.

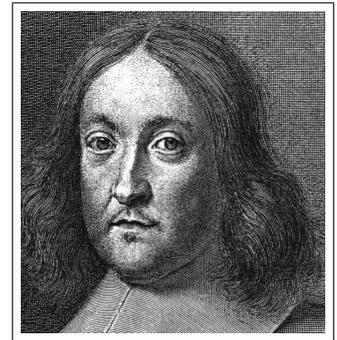


Figura 25: Pierre de Fermat.

Descartes postula um método para a invenção de verdades na ciência, publicado em seu *Discours de la méthode*, que contém como apêndice *La géométrie* (A geometria). Por isso, passou a ser interessante associar o empreendimento de Descartes ao espírito da primeira metade do século XVII. Segundo [16], o terceiro apêndice do *Discurso do Método*, *La géométrie*, com 106 páginas, é a sua única obra matemática. Ela revolucionou toda concepção matemática da época. Descartes ao responder o problema das 4 retas de Apolônio, chegou a uma expressão algébrica conhecida, tipicamente de uma cônica, e assim a álgebra (as equações) e a geometria juntaram-se num contexto novo chamado de Geometria Analítica. Nas próprias palavras dele, a Geometria Analítica; “*era apenas um método que permite representar valores numéricos que podem assumir as variáveis de uma equação como pontos de um lugar geométrico (um gráfico) onde as equações algébricas tomam formas geométricas e reciprocamente as figuras geométricas ficam determinadas pelas equações*”.

Ao mesmo tempo que René Descartes estabeleceu as bases da Geometria Analítica, o jurista matemático amador Pierre de Fermat também se ocupou deste tema. Fermat foi profundamente influenciado pelas traduções das obras gregas, em particular a de Apolônio. E assim, ele estava suficientemente familiarizado com o fato de que, dada uma curva, há sempre uma relação entre duas quantidades indeterminadas (“sintoma” da curva). O objetivo inicial de Fermat era exprimir, na linguagem algébrica proposta por Viète, os

problemas geométricos tratados por Apolônio. Seu principal interesse era, portanto, realizar um estudo geral dos lugares geométricos. Sua primeira obra, denominada *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos), foi escrita provavelmente em 1636 e é contemporânea de *La géométrie* de Descartes. No entanto, ao que parece, estes autores não se influenciaram mutuamente. Apesar de ambos introduzirem coordenadas para tratar de problemas geométricos, os objetivos de Descartes e Fermat eram distintos.

A geometria analítica como conhecemos atualmente consiste em duas associações recíprocas:

- (i) dado um lugar geométrico, encontrar a equação que seus pontos satisfazem;
- (ii) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem.

Segundo [15], Descartes estudou o primeiro problema, mas Fermat foi o pioneiro em atacar o segundo. Logo no princípio de sua *Introdução*, enuncia: “*Sempre que, em uma equação final, duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva*”.

Nos trabalhos do fim do século XVII, o conceito de curva recobre três concepções: a curva como expressão algébrica, eventualmente infinita; a curva como trajetória de um ponto em movimento; e, a curva como polígono com um número infinito de lados. As três exercem um papel central no desenvolvimento dos métodos infinitesimais e Leibniz (1646-1716) foi um dos protagonistas desta mudança. Após ler o *La géométrie* de Descartes, em 1673, ele achou o método de tangentes do matemático francês restritivo. Além de ser complicado, este procedimento não se aplica a uma grande quantidade de curvas. Uma das principais contribuições de Leibniz será ajudar a estender o domínio das curvas para além das algébricas, consideradas por Descartes como as curvas de que a geometria deve se ocupar.

De acordo com [15], os métodos analíticos de Descartes e Fermat motivaram o estudo das propriedades aritméticas de séries infinitas na Inglaterra, sobretudo por John Wallis (1616-1703) e James Gregory (1638-1675). Estes pesquisadores conseguiram resolver um grande número de problemas - como o de encontrar a tangente a uma curva, calcular quadraturas ou retificar curvas - e tiveram grande influência sobre Newton (1643-1727) e Leibniz. A grande diferença introduzida por estes está no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos. Antes de Newton e Leibniz, problemas envolvendo o estudo de curvas, como os que buscavam a determinação de tangentes e áreas, eram tratados de forma independente. Os métodos empregados por diferentes estudiosos possuíam semelhanças entre si, mas estas não eram ressaltadas. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre o modo de resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas sem reconhecer a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas.

O principal objeto de estudo, no século XVII, foi o desenvolvimento de métodos para resolver problemas sobre curvas geométricas, muitas vezes de origem física, como o de encontrar a tangente, calcular a área sob uma curva e achar comprimentos de curvas ou velocidades de pontos se movendo sobre uma curva. Ou seja, problemas de natureza geométrica ou cinemática tratados com ferramentas do cálculo. Tratava-se, portanto, de entrar em um novo domínio, o da relação entre quantidades, o que contribuirá, mais tarde, para o surgimento da ideia de função como relação entre quantidades. O que nos permite concluir que as descobertas de Fermat e Descartes se completaram e abriram as portas para o “mundo novo” do Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz, numa outra longa história.

3.2 Curva

A mais pura intuição nos permite conceber uma curva ou linha como sendo o lugar das posições sucessivas de um ponto que se desloca no plano ou no espaço. Daí é fácil ver que as curvas podem ser planas ou espaciais, neste último, também chamadas de reversas.

A curva é plana quando tem todos os seus pontos situados num mesmo plano.

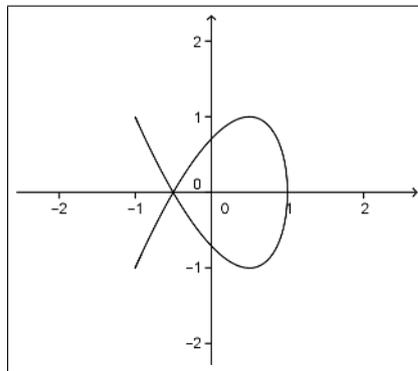


Figura 26: Curva no plano.

A noção de curva é bastante familiar. Se pedirmos para que se dê um exemplo de uma curva em \mathbb{R}^2 , certamente todos terão em mente alguns subconjuntos de \mathbb{R}^2 , como por exemplo, uma circunferência, uma elipse ou uma reta. Ou seja, um primeiro ponto a considerar, seria, de acordo com a Geometria Analítica, considerar uma curva em \mathbb{R}^2 como um conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem equações do tipo $f(x, y) = 0$, dada uma função real de duas variáveis f . Neste caso, o conjunto $f(x, y) = 0$ é chamado de uma curva algébrica.

No entanto, no que concerne este trabalho, em vez de considerarmos curvas definidas por equações algébricas, vamos retornar à ideia intuitiva que uma curva deve

descrever a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. Se considerarmos que um ponto $\alpha(t)$ representa a posição de uma partícula em movimento contínuo, quando o tempo t varia em um intervalo $[a, b]$, o conjunto que iremos considerar é:

$$C = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2; t \in [a, b]\}.$$

A vantagem dessa abordagem é que ela poderá ser facilmente formalizada e conterá várias informações sobre como o ponto $\alpha(t)$ percorre o conjunto C e o sentido que o ponto “anda” sobre C .

Cabe-nos agora introduzir uma definição formal de curva plana, de acordo com [1]:

Definição 3.1. Uma curva no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in \mathbb{R}$.

O conjunto imagem C da aplicação α , dado por

$$C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)); t \in I\}$$

é chamado de **traço** de α . Devemos observar que, de acordo com a definição acima, estamos analisando todo o movimento da partícula e não somente o conjunto C . Nesse caso, α é dita uma parametrização de C e denominamos t o parâmetro da curva α .

Se a curva α está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são chamados de ponto inicial de α e ponto final de α , respectivamente.

Se α está definida num intervalo $I = [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizemos que α é uma curva fechada. Uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *periódica* se existe um número real $l > 0$, tal que

$$\alpha(t + l) = \alpha(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O menor valor l_0 para o qual a equação acima se verifica é chamado de *período* de α .

3.3 Curvatura

A curvatura de uma curva plana em um ponto da curva é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de ser uma reta numa vizinhança daquele ponto. É a taxa de variação naquele ponto da direção tangente à curva em relação ao comprimento de arco.

Seja AB um arco de uma curva C e considere as retas r e r' tangentes a C nos pontos A e B , respectivamente. Admitindo que um ponto percorre o arco AB , indo de A para B , é claro que esse ponto ao se deslocar sofreu, na sua direção, um desvio que é medido pelo ângulo $\Delta\theta$, em radianos, entre as retas r e r' . A razão entre o ângulo $\Delta\theta$ e o comprimento do arco ΔS , em centímetros, é a curvatura (K_{AB}) do arco AB da curva C , ou seja,

$$K_{AB} = \frac{\Delta\theta}{\Delta S},$$

onde no limite quando ΔS tende para zero temos a curvatura no ponto A .

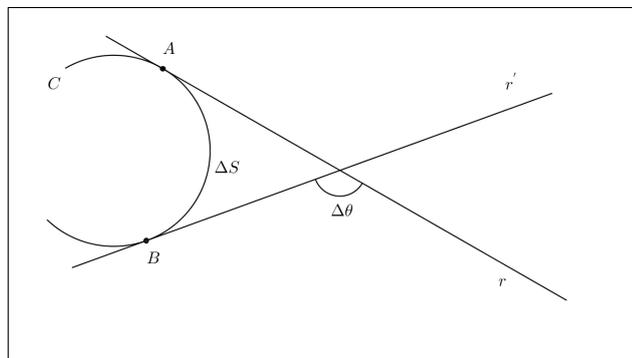


Figura 27: Curvatura do arco AB da curva C .

A reta tem curvatura igual a zero em todos os seus pontos. Num círculo, a curvatura é constante e não nula.

Numa elipse a curvatura é máxima nos vértices do eixo focal e mínima nos outros dois vértices.

O inverso da curvatura denomina-se raio de curvatura, denotado por ρ e cuja expressão é:

$$\rho = \frac{1}{K_{AB}}, \quad K_{AB} \neq 0.$$

3.4 Curvas suaves

Se escrevemos α como

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

então α é uma aplicação suave, se e somente se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ , isto é, x e y possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto de I .

Definição 3.2. Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação suave

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$. Quando não houver prejuízo do entendimento, iremos nos referir a tais curvas simplesmente como curvas parametrizadas ou curvas suaves.

Geometricamente, uma curva suave é caracterizada pela ausência de pontos angulosos. Em cada um de seus pontos, a curva tem uma tangente única, que varia continuamente quando se move sobre a curva.

Exemplo 3.3. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (a, b)$$

é uma curva parametrizada cujo traço se reduz ao ponto (a, b) .

Exemplo 3.4. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|),$$

não é uma curva parametrizada suave. De fato, a função y , definida por $y(t) = |t|$, não é diferenciável em $t = 0$. Porém, a restrição de α , a qualquer intervalo que não contém o ponto $t = 0$, é uma curva parametrizada.

3.5 Orientação de uma curva

Se um ponto material desloca-se sobre uma curva suave α , temos dois possíveis sentidos de percurso. A escolha de um deles como sentido positivo, define uma orientação na curva α .

Suponhamos que a curva α é representada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $t \in [a, b]$.

Convencionamos chamar de **sentido positivo** sobre α , o sentido no qual a curva é traçada quando o parâmetro t cresce de a até b . O sentido oposto é chamado **sentido negativo** sobre α .

De acordo com nossa convenção, sempre que uma curva suave α é representada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $t \in [a, b]$, α é uma curva orientada e o seu sentido positivo de percurso é o sentido dos valores crescentes do parâmetro t .

Definição 3.5. Dada uma curva orientada α , representada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $t \in [a, b]$, a curva $\bar{\alpha}$ é definida como sendo a curva α com orientação oposta. A curva $\bar{\alpha}$ é dada por

$$\bar{\alpha} = (x(a + b - t), y(a + b - t)), t \in [a, b].$$

3.6 Vetor tangente - Reta tangente

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor tangente ou vetor velocidade de α em $t_0 \in I$ é dado por

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

A velocidade escalar de α em $t_0 \in I$ é dada pelo módulo do vetor velocidade $\alpha'(t_0)$, isto é,

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2}.$$

Quando $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, tal vetor aponta na direção tangente à curva α em t_0 .

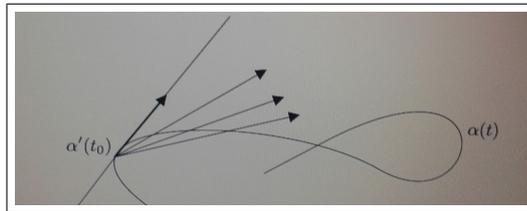


Figura 28: Vetor tangente - Reta tangente.

O vetor $\alpha'(t_0)$ aponta na direção da reta tangente à curva α no ponto $\alpha(t_0)$ e esta reta é a reta limite das retas secantes à curva α passando por $\alpha'(t_0)$ e por $\alpha'(t)$, quando fazemos t tender para t_0 .

Definição 3.6. Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t_0 \in I$, se $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, ou equivalentemente, se $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$. A curva α é regular em I , se α for regular para todo $t \in I$. Se $\|\alpha'(t_0)\| = 0$, dizemos que α é singular em t_0 e $\alpha(t_0)$ é chamada uma singularidade de α .

Exemplo 3.7. Determinar as equações cartesianas das retas tangentes à curva parametrizada $\alpha(t) = (t^3 - 2t, 2t^2 - 2)$, no ponto $(0, 2)$.

Solução. A equação da reta tangente à curva parametrizada $\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = 2t^2 - 2 \end{cases}$, no ponto $(0, 2)$ é dada por

$$y - 2 = m(x - 0),$$

onde $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

Fazendo $x = 0$ e $y = 2$ no sistema acima, encontramos $t = \pm\sqrt{2}$. Além disso, pelo fato de $m = \frac{dy}{dx}$, segue que $m = \frac{4t}{3t^2-2}$. Para $t = \sqrt{2}$, temos $m = \sqrt{2}$ e para $t = -\sqrt{2}$, segue que $m = -\sqrt{2}$. Dessa forma, as equações das retas serão:

I. $y - 2 = m(x - 0) \Rightarrow y - 2 = \sqrt{2}(x - 0) \Rightarrow r_1 : y = \sqrt{2}x + 2$

II. $y - 2 = m(x - 0) \Rightarrow y - 2 = -\sqrt{2}(x - 0) \Rightarrow r_2 : y = -\sqrt{2}x + 2.$

4 Curvas Planas Parametrizadas

Veremos como obter as equações paramétricas de algumas curvas planas, dentre elas as cônicas, usando, por exemplo, relações trigonométricas básicas e observando as condições que um ponto deve satisfazer para pertencer à curva. Para tais procedimentos, utilizaremos [1], [7], [8], [9] e [11] como referência.

4.1 Parametrização de uma reta

Seja r a reta que passa pelos pontos A e B e seja P um ponto da reta r diferente de A e B . Considere P interior ao segmento AB . No caso de P exterior a demonstração é idêntica.

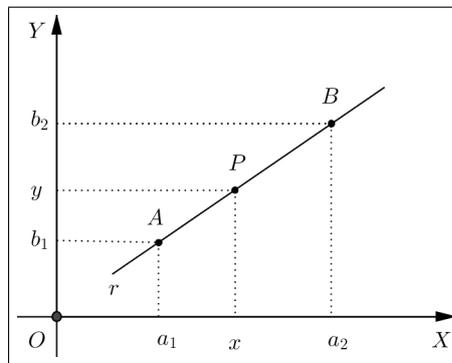


Figura 29: Reta r passando pelos pontos A , P e B distintos.

Sabemos da Geometria, que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{|AP|}{|AB|} = t$.

Fazendo $A = (a_1, b_1)$, $P = (x, y)$ e $B = (a_2, b_2)$, segue pelo teorema de Tales

que:

$$\text{I) } \frac{|AP|}{y - b_1} = \frac{|AB|}{b_2 - b_1} \Leftrightarrow \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_1}.$$

$$\text{Assim, } t = \frac{y - b_1}{b_2 - b_1} \Leftrightarrow y = b_1 + (b_2 - b_1)t.$$

$$\text{II) } \frac{|AP|}{x - a_1} = \frac{|AB|}{a_2 - a_1} \Leftrightarrow \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}.$$

$$\text{Assim, } t = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \Leftrightarrow x = a_1 + (a_2 - a_1)t.$$

Segue então, por (I) e (II) que as equações paramétricas da reta serão:

$$r : \begin{cases} x = a_1 + (a_2 - a_1)t \\ y = b_1 + (b_2 - b_1)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.1. Considere os pontos $A = (3, -4)$ e $B = (9, 8)$. Obtenha a equação paramétrica da reta r que passa pelos pontos A e B .

Solução. Se $A = (3, -4)$ e $B = (9, 8)$ as equações paramétricas de r , serão:

$$r : \begin{cases} x = 3 + (9 - 3)t \\ y = -4 + (8 - (-4))t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$r : \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = -4 + 12t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.2. Determine as equações paramétricas da reta $r : -x + 2y = 4$.

Solução. Para determinarmos as equações paramétricas de r precisamos conhecer dois pontos da reta. Fazendo então $x = 0$ na equação cartesiana de r , temos: $x = 0 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$. Fazendo agora $x = -2$, temos: $x = -2 \Rightarrow 2 + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$. Portanto, os pontos $A = (0, 2)$ e $B = (-2, 1)$ pertencem a r . Assim, as equações paramétricas de r são:

$$r : \begin{cases} x = -2t \\ y = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3. Considere $P = (a_0, b_0) \neq Q = (a_1, b_1)$ pontos de \mathbb{R}^2 . A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (a_0 + t(a_1 - a_0), b_0 + t(b_1 - b_0)),$$

é uma curva parametrizada cujo traço é a reta que passa por P e Q .

Seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação definida por

$$\beta(t) = (a_0 + t^3(a_1 - a_0), b_0 + t^3(b_1 - b_0)).$$

A aplicação β também é uma curva parametrizada cujo traço é a reta que passa por P e Q . Observemos que α e β possuem o mesmo traço. A diferença entre essas curvas está na velocidade que seu traço é percorrido.

4.2 Parametrização de uma circunferência

Vamos encontrar primeiramente as equações paramétricas da circunferência com centro na origem e posteriormente as equações paramétricas com centro fora da origem.

A equação da circunferência de raio $r > 0$ e centro na origem é dada por $\lambda : x^2 + y^2 = r^2$

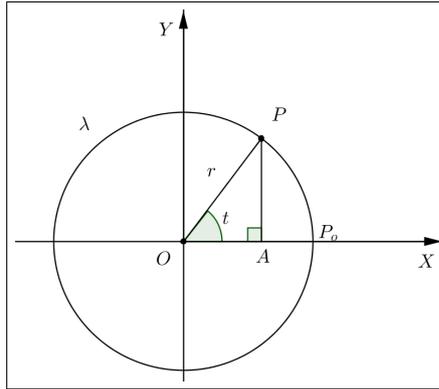


Figura 30: Circunferência λ centrada na origem.

Considerando t a medida em radianos do ângulo $\widehat{P_0OP}$ (tomada no sentido positivo), onde O é a origem do sistema cartesiano, $P_0 = (r, 0) \in \lambda$ e $P = (x, y) \in \lambda$. Sendo $A = (x, 0)$ a projeção ortogonal de P sobre o eixo OX , resulta que $\triangle OPA$ é retângulo. Daí segue que:

$$\cos t = \frac{|OA|}{|OP|} \Rightarrow \cos t = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos t$$

$$\sin t = \frac{|AP|}{|OP|} \Rightarrow \sin t = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin t,$$

ou seja, as equações paramétricas da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio r , são dadas por:

$$\lambda : \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo t percorrer os valores no intervalo $[0, 2\pi)$, obtemos todos os pontos da circunferência. No caso de $t \in \mathbb{R}$ temos um número infinito de voltas sobre a circunferência.

Observação 4.4. $P = (r \cos t, r \sin t)$ percorre a circunferência no sentido anti-horário.

Quando a circunferência não está centrada na origem, sua equação é $\lambda : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$, onde $(x_o, y_o) \neq (0, 0)$ é o centro e $r > 0$ é o raio da mesma.

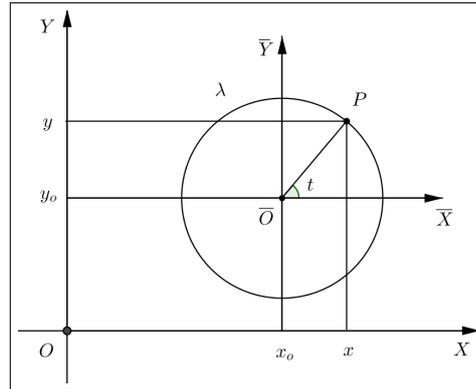


Figura 31: Circunferência de centro $(x_o, y_o) \neq (0, 0)$.

Seendo $P = (x, y) \in \lambda$ e fazendo uma translação do sistema OXY , obtemos um novo sistema \overline{OXY} , onde $\overline{O} = (x_o, y_o)$ é o centro da circunferência. E além disso, temos:

$$\begin{cases} x = x_o + \bar{x} \\ y = y_o + \bar{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = x - x_o \\ \bar{y} = y - y_o \end{cases}.$$

No sistema \overline{OXY} as equações cartesianas e paramétricas são, respectivamente:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2, \quad \begin{cases} \bar{x} = r \cos t \\ \bar{y} = r \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Daí, temos que:

$$\begin{cases} \bar{x} = r \cos t \\ \bar{y} = r \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_o = r \cos t \\ y - y_o = r \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_o + r \cos t \\ y = y_o + r \sin t \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = x_o + r \cos t \\ y = y_o + r \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da circunferência de centro (x_o, y_o) e raio r .

Exemplo 4.5. Obter as equações paramétricas da circunferência $\lambda : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

Solução. Para encontrarmos o centro e o raio da circunferência dada, devemos completar os quadrados da equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

Temos, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

As equações paramétricas da circunferência, serão:

$$\lambda : \begin{cases} x = 3 + 3 \cos t \\ y = 2 + 3 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Exemplo 4.6. Parametrizar a circunferência λ de centro na origem e raio r , no sentido horário.

Solução. Queremos a curva $\bar{\lambda}$, onde

$$\lambda : \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Pela Definição 3.5, temos

$$\bar{\lambda} : \begin{cases} x = r \cos(2\pi - t) \\ y = r \sin(2\pi - t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ou seja,

$$\bar{\lambda} : \begin{cases} x = r \cos t \\ y = -r \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4.3 Parametrização de uma elipse

Seja $\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ uma elipse de centro na origem do sistema OXY .

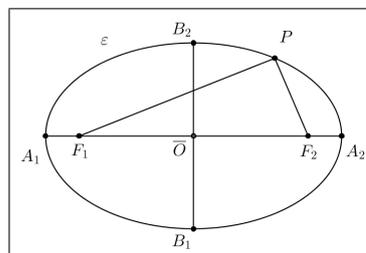


Figura 32: Elipse.

Consideremos $P = (x, y) \in \varepsilon$. Traçamos um arco de circunferência de raio a , e outro de raio b , ambos centrados na origem.

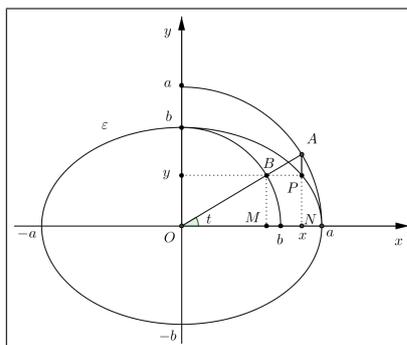


Figura 33: Elipse de centro na origem.

Marcamos, respectivamente, sobre esses arcos os pontos A de abscissa x e B de ordenada y , de tal forma que esses pontos (A e B) e a origem estejam numa mesma reta. O parâmetro t representa o ângulo que esta reta faz com o eixo positivo dos x .

Assim, do triângulo retângulo ONA , obtemos $x = acost$, e do triângulo retângulo OMB , $y = bsent$. Daí,

$$\varepsilon : \begin{cases} x = acost \\ y = bsent \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Observação 4.7. No caso em que $\varepsilon : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, verifica-se de maneira idêntica que

$$\varepsilon : \begin{cases} x = bcost \\ y = asent \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se a elipse estiver centrada em (x_o, y_o) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, através de uma translação do sistema OXY encontramos

$$\varepsilon : \begin{cases} x = x_o + acost \\ y = y_o + bsent \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \varepsilon : \begin{cases} x = x_o + bcost \\ y = y_o + asent \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.8. Escrever as equações paramétricas da elipse $\varepsilon : 9x^2 + 4y^2 = 36$.

Solução. Podemos reescrever $9x^2 + 4y^2 = 36$, como $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Desta forma as equações paramétricas da elipse, serão:

$$\varepsilon : \begin{cases} x = 2cost \\ y = 3sent \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.9. Parametrize a elipse $\varepsilon : x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = -1$

Solução. Completando os quadrados,

$$x^2 - 2x + 4y^2 - 16y = -1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1,$$

vemos que a elipse tem centro no ponto $(1, 2)$, reta focal $y = 2$ paralela ao eixo OX , $a = 4$ e $b = 2$. Então, uma parametrização possível para ε , será:

$$\varepsilon : \begin{cases} x = 1 + 4cost \\ y = 2 + 2sent \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.4 Parametrização de uma hipérbole

Considere as funções $\operatorname{senht} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{cosht} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, dadas respectivamente por $\operatorname{senht} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ e $\operatorname{cosht} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, denominadas seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

Observe que os pontos $(\operatorname{cosht}, \operatorname{senht})$ e $(-\operatorname{cosht}, \operatorname{senht})$ pertencem à hipérbole equilátera (hipérbole em que a medida do eixo real é igual à medida do eixo imaginário) $H : x^2 - y^2 = 1$. Daí verificamos que,

$$\begin{cases} x = \operatorname{cosht} \\ y = \operatorname{senht} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas do ramo H^+ de H e,

$$\begin{cases} x = -\operatorname{cosht} \\ y = \operatorname{senht} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas do ramo H^- de H .

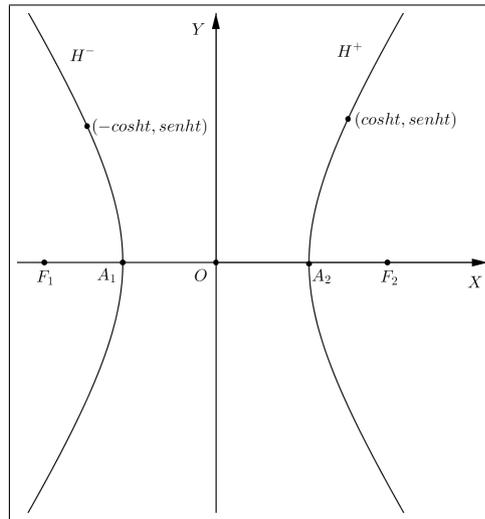


Figura 34: Hipérbole centrada na origem.

Seja agora a hipérbole $H : \frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_o, y_o) e reta focal paralela ao eixo OX . Obtemos que,

$$\begin{cases} x = x_o \pm a \operatorname{cosht} \\ y = y_o + b \operatorname{senht} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da hipérbole.

De modo análogo verifica-se que,

$$\begin{cases} x = x_o + b \operatorname{senht} \\ y = y_o \pm a \operatorname{cosht} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da hipérbole $H : \frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_o, y_o) e reta focal paralela ao eixo OY .

Exemplo 4.10. Parametrize a hipérbole $H : -x^2 + 9y^2 - 2x + 18y - 1 = 0$.

Solução. Completando os quadrados, obtemos:

$$9(y^2 + 2y) - (x^2 + 2x) = 1 \Leftrightarrow (y + 1)^2 - \frac{(x + 1)^2}{9} = 1.$$

Logo, H é uma hipébole de centro $(-1, -1)$, reta focal $x = -1$ paralela ao eixo OY , $a = 1$ e $b = 3$.

Portanto,

$$H : \begin{cases} x = -1 + 3 \operatorname{senht} \\ y = -1 \pm \operatorname{cosht} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização possível de H .

Observação 4.11. Se considerarmos a hipérbole $H : \frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_o, y_o) e reta focal paralela ao eixo OX . Podemos mostrar facilmente que

$$H^+ : \begin{cases} x = x_o + a \operatorname{sect} \\ y = y_o + b \operatorname{tgt} \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$H^- : \begin{cases} x = x_o - a \operatorname{sect} \\ y = y_o + b \operatorname{tgt} \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

são parametrizações dos ramos H^+ e H^- de H que intersectam o semieixo OX positivo e o semieixo OX negativo, respectivamente.

4.5 Parametrização de uma parábola

Considere a parábola $P : (y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)$, de vértice $V = (x_o, y_o)$, reta focal paralela ao eixo OX e concavidade voltada para a direita.

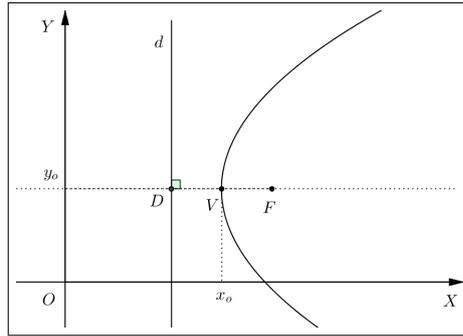


Figura 35: Parábola de vértice (x_0, y_0) e foco F .

Fazendo $y - y_0 = t \in \mathbb{R}$, resulta $y = y_0 + t$ e $x = \frac{t^2}{4p} + x_0$. Assim resulta que as equações paramétricas de P são dadas por:

$$P : \begin{cases} x = \frac{1}{4p}t^2 + x_0, \\ y = t + y_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.12. Parametrize a parábola $P : y^2 - 2x + 4y = 0$.

Solução. Completando o quadrado:

$$y^2 - 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2 = 2(x + 2),$$

segue que P é uma parábola de vértice $V = (-2, -2)$ e reta focal $y = -2$ paralela ao eixo OX . Fazendo $y + 2 = t \in \mathbb{R}$, temos que

$$P : \begin{cases} x = \frac{t^2}{2} - 2; \\ y = t - 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas da parábola P .

4.6 Parametrização da curva de Agnesi

Seja C um círculo de raio r tangente a duas retas paralelas s_1 e s_2 . Sejam O e A os pontos de tangência de C com s_1 e s_2 , respectivamente. Do ponto O traçamos uma semirreta em direção à reta s_2 . Sejam R e Q os pontos de interseção desta semirreta com C e s_2 , respectivamente. Tracemos o segmento QD perpendicular a s_1 , com $D \in s_1$, e a reta s paralela a s_1 que passa por R , ver Figura 36.

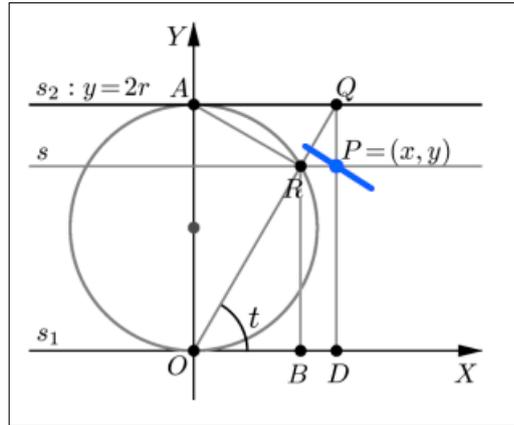


Figura 36: Construção da curva de Agnesi.

Seja P o ponto de interseção da reta s com o segmento QD . Os pontos P assim obtidos, traçando todas as semirretas de origem O que intersectam C , descrevem a curva de Agnesi. Observe que o ângulo que estas semirretas fazem com o semieixo OX positivo varia no intervalo $(0, \pi)$.

Para obtermos as equações paramétricas da curva de Agnesi, vamos admitir que O seja a origem do sistema de coordenadas, s_1 seja o eixo OX e $s_2 : y = 2r$.

O nosso problema consiste em determinar as coordenadas dos pontos $P = (x, y)$ da curva em função de apenas um parâmetro.

Denotando por t a medida do ângulo \widehat{DOQ} , obtemos:

$$x = |OD| = |OQ||\cos t| \quad ; \quad y = |RB| = |OR|\sin t, \quad (1)$$

onde B é a projeção de R sobre o eixo OX .

Como o triângulo ORA (inscrito no semicírculo C) é retângulo em R , a medida do ângulo \widehat{OAR} é t e portanto, $|OR| = 2r \sin t$. E, sendo o triângulo ODQ retângulo em D e $|QD| = 2r$, temos $|OQ| = \frac{2r}{\sin t}$. Substituindo estas relações em (1), obtemos:

$$x = \frac{2r \cos t}{\sin t} = 2r \cot t \quad ; \quad y = 2r \sin^2 t.$$

Ou seja, as equações paramétricas da curva de Agnesi são:

$$\begin{cases} x = 2r \cot t \\ y = 2r \sin^2 t \end{cases}, \quad t \in (0, \pi),$$

e seu traço é mostrado na Figura 37.

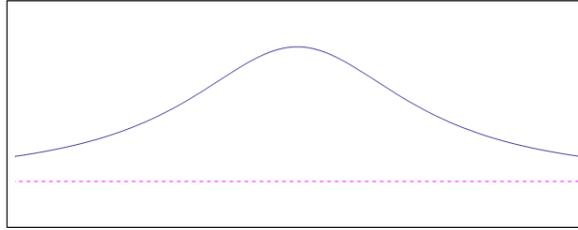


Figura 37: Curva de Agnesi.

Observação 4.13. Através das equações paramétricas da curva de Agnesi, tiramos que:

$$\begin{cases} x^2 + 4r^2 &= 4r^2(1 + \cot^2 t) \\ y &= 2r \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \quad t \in (0, \pi).$$

Daí, segue que $y = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}$ é a equação cartesiana da curva de Agnesi.

Observação 4.14. A curva de Agnesi foi estudada por Maria Gaetana Agnesi (1718 – 1799) em 1748. Em diversas línguas, a curva de Agnesi é chamada “Bruxa de Agnesi”, devido a um erro de tradução. John Colson, professor de matemática em Cambridge, que havia aprendido italiano apenas para traduzir a obra de Agnesi para o inglês, ao invés de ler *la versiera di Agnesi*, que significa curva de Agnesi, leu *l'avversiera di Agnesi*, onde *l'avversiera* significa bruxa. Desde então, em muitas línguas a curva recebeu esse nome.

4.7 Parametrização da cissóide de Diócles

Seja OA o diâmetro sobre o eixo OX de um círculo γ , AE um segmento tangente ao círculo em A e D o ponto em que OE intersecta o círculo. Se P está sobre o segmento OE e $|OP| = |DE|$, o lugar geométrico descrito por tais pontos P é a Cissóide de Diócles, ver Figura 38.

Para obtermos as equações paramétricas da Cissóide de Diócles, vamos admitir que O seja a origem do sistema de coordenadas e M a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo OX . O nosso problema consiste em determinar as coordenadas dos pontos $P = (x, y)$ da curva em função de apenas um parâmetro.

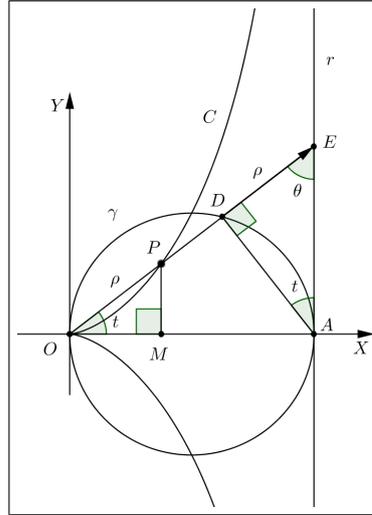


Figura 38: Construção da cissóide de Diócles.

Denotando por t a medida do ângulo \widehat{AOD} , onde $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Resulta do triângulo retângulo ODA que:

$$\operatorname{sent} = \frac{|AD|}{|OA|} \Leftrightarrow |AD| = |OA|\operatorname{sent}.$$

Sendo assim, retiramos dos triângulos retângulos ADE e OMP que,

$$|DE| = |OA|\operatorname{sent}.tgt \quad e \quad |OP| = \frac{|OM|}{\operatorname{cost}}.$$

Pelo fato de $|OP| = |DE|$, temos que:

$$\frac{|OM|}{\operatorname{cost}} = |OA|\operatorname{sent}.tgt \Leftrightarrow |OM| = |OA|\operatorname{sen}^2t \Leftrightarrow x = |OA|\operatorname{sen}^2t.$$

No triângulo OMP tiramos também $tgt = \frac{|MP|}{|OM|}$, ou seja,

$$tgt = \frac{|MP|}{|OA|\operatorname{sen}^2t} \Leftrightarrow |MP| = |OA|\operatorname{sen}^2t.tgt \Leftrightarrow y = |OA|\operatorname{sen}^2t.tgt.$$

Fazendo $|OA| = 2r$, onde r é o raio do círculo γ , segue que as equações paramétricas da Cissóide de Diócles são dadas por:

$$\begin{cases} x = 2r\operatorname{sen}^2t \\ y = 2r\operatorname{sen}^2t.tgt \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observação 4.15. Através das equações paramétricas da cissóide, tiramos que:

$$\begin{cases} 2r - x &= 2r - 2r \operatorname{sen}^2 t \\ y^2 &= (2r)^2 \operatorname{sen}^4 t \operatorname{tg}^2 t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Daí, segue que $y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$ é a equação cartesiana da cissóide de Diócles.

Exemplo 4.16. Dado um cubo de volume V_1 , construir um cubo de volume V_2 , de tal forma que $V_2 = 2.V_1$.

Solução. A cissóide de Diócles permitiu resolver este problema, incluído entre os três famosos problemas da antiguidade (Quadratura da Circunferência, Trissecção de um Ângulo e a Duplicação do Cubo).

Vejam como isto é possível. Seja M a interseção da cissóide com a circunferência de raio $r > 0$. Observe que a perpendicular baixada de M sobre o diâmetro OA passa pelo centro C da circunferência (ver Figura 39).

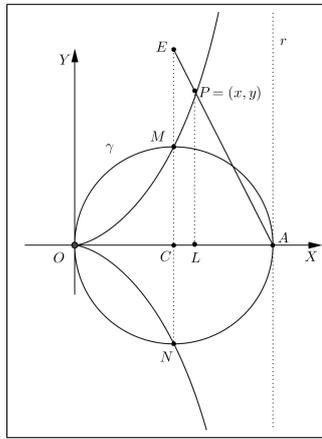


Figura 39: Cissóide de Diócles.

Marquemos o comprimento $|CE| = 2r$ e liguemos E ao ponto A . Este segmento intersecta a cissóide em $P = (x, y)$. Baixemos PL perpendicular a OA . Os triângulos semelhantes PLA e ECA , nos dirão:

$$\frac{|LA|}{|LP|} = \frac{|CA|}{|CE|} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

ou,

$$\frac{2r - x}{y} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2r - x = \frac{y}{2}.$$

Mas, sendo P um ponto da cissóide, temos:

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}.$$

Substituindo $2r - x$ por seu valor, vem:

$$y^2 = \frac{x^3}{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow y^3 = 2x^3.$$

Tomando $l_1 = kx$ (sendo k um fator de proporcionalidade), para a aresta do cubo de volume V_1 , $l_2 = ky$ será o comprimento da aresta do cubo de volume duplo, ou seja, V_2 . Com efeito, temos:

$$V_1 = l_1^3 = k^3 x^3,$$

$$V_2 = l_2^3 = k^3 y^3.$$

Logo,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{k^3 y^3}{k^3 x^3} = \frac{y^3}{x^3} = \frac{2x^3}{x^3} = 2,$$

donde:

$$V_2 = 2V_1.$$

4.8 Parametrização da ciclóide

A ciclóide pode ser descrita pelo movimento do ponto $P = (0, 0)$ de um círculo de raio $r > 0$, centrado em $(0, r)$, quando o círculo gira sem deslizar sobre o eixo dos x (ver Figura 40).

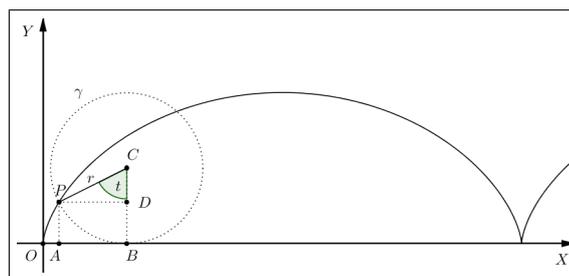


Figura 40: Ciclóide.

Quando o círculo gira um ângulo t , seu centro se move um comprimento $|OB|$. Na Figura 40, temos $|OB|$ igual ao comprimento do arco BP , ou seja $|OB| = r.t$, $|CB| = r$, $|CD| = r \cos t$ e $|DP| = r \sin t$.

Portanto, as coordenadas de P são

$$\begin{aligned}x &= |OB| - |DP| = r.t - r \sin t = r(t - \sin t) \\y &= |CB| - |CD| = r - r \cos t = r(1 - \cos t),\end{aligned}$$

ou seja, as equações paramétricas da cicloide são dadas por:

$$\begin{cases}x = r(t - \sin t) \\y = r(1 - \cos t)\end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quando t varia de 0 a 2π , obtemos o primeiro arco da cicloide.

Exemplo 4.17. Escrever as equações paramétricas da curva descrita pelo movimento de uma cabeça de prego num pneu de um carro que se move em linha reta, se o raio do pneu é 25cm.

Solução. Supondo que a cabeça do prego se encontre localizada no pneu em um ponto P , sua trajetória é uma cicloide.

As equações paramétricas serão:

$$\begin{cases}x = 25(t - \sin t) \\y = 25(1 - \cos t)\end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nas equações paramétricas da cicloide é possível eliminar t para se obter a equação cartesiana da mesma. De fato, da segunda equação, tem-se

$$\cos t = 1 - \frac{y}{r},$$

ou seja,

$$t = \arccos \left(1 - \frac{y}{r} \right).$$

Logo,

$$\sin t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} = \pm \frac{\sqrt{(2r - y)y}}{r}.$$

Portanto,

$$x = r \cdot \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) \pm \sqrt{(2r - y)y},$$

que é a equação cartesiana da cicloide.

Essa equação é de pouca utilidade, uma vez que é muito mais fácil visualizar a curva pela descrição do movimento de P e estudar esse movimento pelas suas equações paramétricas, que são, por assim dizer, as equações naturais da cicloide.

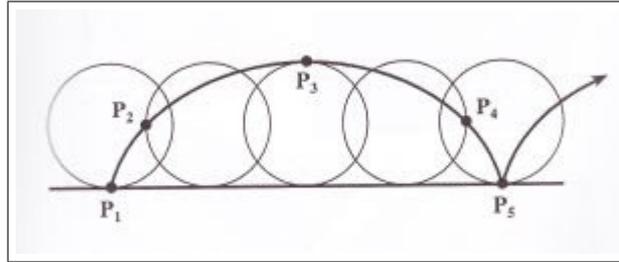


Figura 41: Ponto P descrevendo uma cicloide.

4.9 Parametrização da hipocicloide

Consideremos dois círculos Γ e C de raios R e r , respectivamente, tais que: $r < R$; Γ e C se tocam apenas em um ponto P ; os pontos de C , diferentes de P , estão no interior de Γ . Denominamos *hipocicloide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P , quando C rola sobre Γ , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por Γ .

Para obtermos as equações paramétricas da hipocicloide, vamos admitir Γ com centro na origem, C iniciando o movimento com centro no ponto $(R - r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

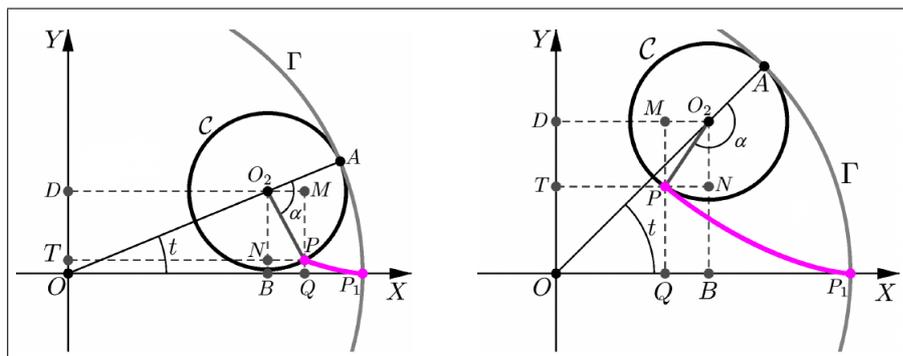


Figura 42: Ponto P descrevendo uma hipocicloide.

Acompanhe, na Figura 42, a designação dos seguintes elementos: A é o ponto de C que toca Γ ; O_2 é o centro de C ; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY ; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY ; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B , respectivamente.

Com essas notações, considerando o caso em que B está entre O e Q , mostrado na Figura 42, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| + |BQ| = |OB| + |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \quad (*)$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio $R-r$, e sendo t a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para OO_2 , no sentido anti-horário, obtemos:

$$|OB| = (R-r)\text{cost} \quad e \quad |OD| = (R-r)\text{sent}.$$

Denotando α a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido horário, temos:

$$\widehat{OO_2P} = \pi - \alpha \quad e \quad \widehat{OO_2P} - \widehat{NO_2P} = \frac{\pi}{2} - t.$$

Logo,

$$\widehat{NO_2P} = (t - \alpha) + \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, no triângulo retângulo PNO_2 , temos:

$$|O_2M| = r\text{sen}(\widehat{NO_2P}) = r\text{sen}\left((t - \alpha) + \frac{\pi}{2}\right) = r\text{cos}(t - \alpha) = r\text{cos}(\alpha - t),$$

$$|O_2N| = r\text{cos}(\widehat{NO_2P}) = r\text{cos}\left((t - \alpha) + \frac{\pi}{2}\right) = -r\text{sen}(t - \alpha) = r\text{sen}(\alpha - t).$$

Observe ainda que o comprimento do arco de A até P , ao longo de C , é igual ao comprimento do arco de P_1 até A sobre o círculo Γ . Como a medida do primeiro arco é $r\alpha$ e a medida do segundo é Rt , então $r\alpha = Rt$, isto é, $\alpha = \frac{Rt}{r}$.

Substituindo essas identidades nas relações (*) e usando o fato de que $\alpha = \frac{Rt}{r}$, obtemos as seguintes equações paramétricas da hipociclóide:

$$\begin{cases} x &= (R-r)\text{cost} + r\text{cos}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)t\right) \\ y &= (R-r)\text{sent} - r\text{sen}\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)t\right) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Os cúspides ocorrem nos pontos onde o ponto de tangência dos dois círculos é o ponto P . Portanto, ocorrem quando

$$t = 2\pi n \frac{r}{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Um caso particular muito usado é o da **hipociclóide de quatro cúspides** ou **astróide**, que é obtida fazendo $r = \frac{R}{4}$.

Substituindo o valor de $r = \frac{R}{4}$ nas equações paramétricas da hipociclóide, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{4}(3\cos t + \cos 3t) \\ y &= \frac{R}{4}(3\sin t - \sin 3t). \end{aligned}$$

Utilizando as relações trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos 3t &= 4\cos^3 t - 3\cos t \\ \sin 3t &= 3\sin t - 4\sin^3 t, \end{aligned}$$

vem,

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases}$$

que são as equações paramétricas da astróide.

Eliminando o parâmetro t das equações paramétricas da astróide, obtemos a equação cartesiana desta hipociclóide, que é dada por

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Nas Figuras 43 e 44, mostramos algumas hipociclóides.

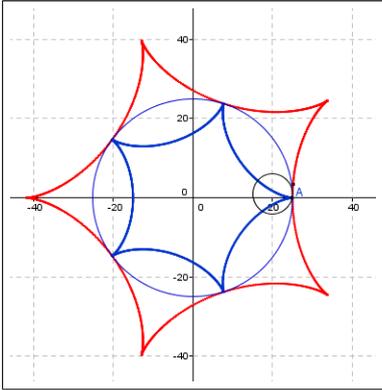


Figura 43: Hipociclóide qualquer.

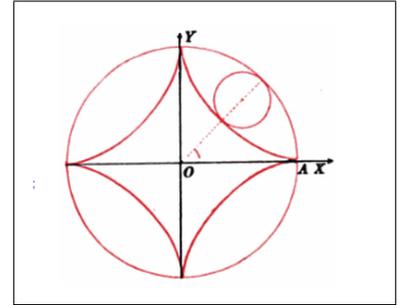


Figura 44: Astróide.

Exemplo 4.18. Dada $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$, encontrar as equações paramétricas desta hipociclóide. Encontrar o vetor velocidade e a velocidade escalar no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$.

Solução. As equações paramétricas serão:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$$

O vetor velocidade é dado por

$$\alpha'(t) = \left(-6\sqrt{2}\cos^2 t \sin t, 6\sqrt{2}\sin^2 t \cos t\right).$$

A velocidade escalar é

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{72\cos^4 t \sin^2 t + 72\sin^4 t \cos^2 t} \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{72\sin^2 t \cos^2 t} \\ \|\alpha'(t)\| &= 6\sqrt{2}|\sin t \cos t|. \end{aligned}$$

No ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$, temos que $t = \frac{\pi}{3}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(\frac{-3\sqrt{6}}{4}, \frac{9\sqrt{2}}{4}\right), \\ \|\alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right)\| &= \frac{3\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

4.10 Parametrização da epiciclóide

Consideremos dois círculos Γ e C de raios R e r , respectivamente, tais que: $r < R$; Γ e C se tocam apenas em um ponto P ; os pontos de C , diferentes de P , estão no exterior de Γ . Denominamos *epiciclóide* o lugar geométrico descrito pelo ponto P , quando C rola sobre Γ , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por Γ .

Para obtermos as equações paramétricas da hipociclóide, vamos admitir Γ com centro na origem, C iniciando o movimento com centro no ponto $(R + r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

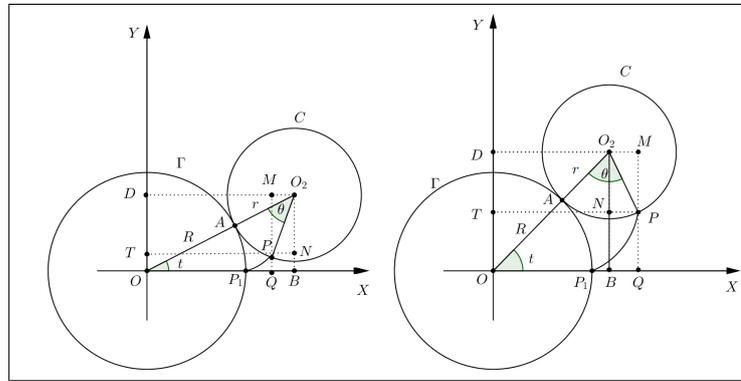


Figura 45: Ponto P descrevendo uma epiciclóide.

Acompanhe, na Figura 45, a designação dos seguintes elementos: $P = (x, y)$ o ponto da epiciclóide que, estando inicialmente na posição P_1 , descreve o arco P_1P quando C rola um ângulo de medida t sobre Γ ; A é o ponto de contato entre os círculos; O_2 é o centro de C ; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY ; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY ; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B , respectivamente, e θ o ângulo $\widehat{AO_2P}$ descrito pelo ponto P com respeito à semirreta radial OO_2 .

Com essas notações, considerando o caso em que Q está entre O e B , mostrado na Figura 45, temos:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M|, \\ y &= |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \end{aligned} \quad (**)$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio $R+r$, e sendo t a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para OO_2 , no sentido anti-horário, obtemos:

$$|OB| = (R + r)\cos t \quad e \quad |OD| = (R + r)\sin t.$$

Sendo θ a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido anti-horário, temos:

$$\widehat{NO_2P} = \widehat{OO_2B} - \widehat{AO_2P} = \left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \theta = \frac{\pi}{2} - (t + \theta).$$

Portanto, no triângulo retângulo PNO_2 , temos:

$$|O_2M| = r \operatorname{sen}(\widehat{NO_2P}) = r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right) = r \cos(t + \theta),$$

$$|O_2N| = r \cos(\widehat{NO_2P}) = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right) = r \operatorname{sen}(t + \theta).$$

Substituindo essas identidades nas relações (**) e usando o fato de que $\theta = \frac{Rt}{r}$, obtemos as seguintes equações paramétricas da epiciclóide:

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos t - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)t\right) \\ y = (R+r)\sin t - r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)t\right) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que, quando C percorre um arco de Γ de comprimento igual a $2\pi r$, o ponto P volta a tocar Γ .

Portanto, se $\frac{R}{r} = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então o ponto P toca Γ n vezes e a n ésima vez coincide com sua posição inicial.

Para verificar isto, basta observar que o comprimento de Γ contém n vezes o comprimento de C , pois $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$.

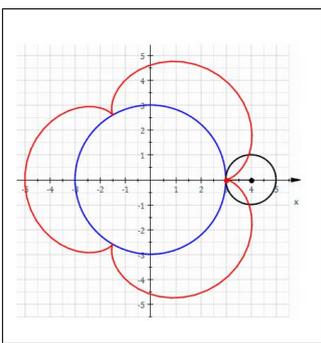


Figura 46: Traço de uma epiciclóide.

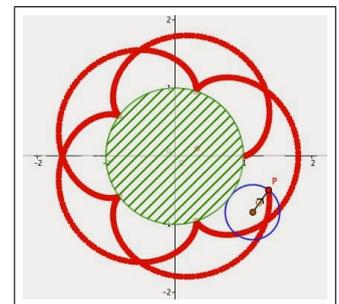


Figura 47: Traço de outra epiciclóide.

Um caso particular muito usado é o da **cardióide**, que é obtida fazendo $r = R$ e, portanto, $t = \theta$.

$$\begin{cases} x = 2rcost - rcos2t \\ y = 2rsent - rsen2t \end{cases}$$

são as equações paramétricas da cardióide.

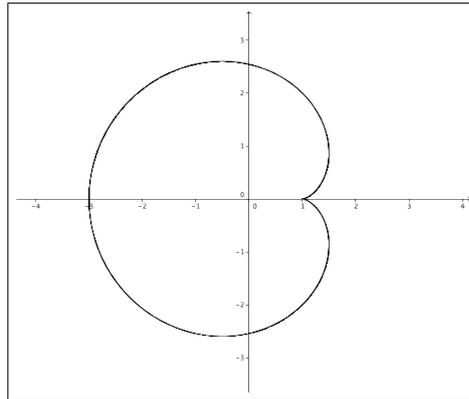


Figura 48: Cardióide.

4.11 Usando o Geogebra para modelar as curvas planas parametrizadas

O *Geogebra* constitui um recurso didático importante, e além do mais é um software gratuito que pode ser baixado em www.geogebra.org. Pretende-se apresentar nesta seção, algumas construções de curvas planas parametrizadas, fazendo-se uso deste software. Para as pessoas que se interessarem pelas construções de outras curvas, além das citadas abaixo, entrar em contato pelo endereço eletrônico raimundocutrim10@gmail.com.

Segundo [6], como consequência da utilização do Geogebra ficaram algumas animações geométricas, que permitem visualizar e aprender de forma rápida, alguns dos conteúdos abordados tornando-os acessíveis a todos. É claro que estas animações, por si só, não explicam o porquê dos resultados mas fornecem evidências que poderão despertar curiosidade e fornecer motivação para explorações matemáticas.

Em comunicação particular [18], o professor Kênio Silva nos auxiliou com um tutorial para elaborar algumas curvas planas. A seguir descreveremos o tutorial brevemente.

1. Construção da elipse:

- num plano, trace a reta que passa por dois pontos A e B ;

- trace dois círculos concêntricos de centro A ;
- escolha um ponto C no círculo exterior;
- trace o segmento AC e determine sua interseção D com o círculo interior;
- determine o ponto P de interseção da perpendicular à reta l que passa por C com a paralela à reta l que passa por D , onde l é a reta que contém o segmento AB ;
- movendo o ponto D ao longo do círculo interior e habilitando o rastro no ponto P , obtemos todos os pontos P da elipse ε de centro A e reta focal l , cujos semieixos têm comprimentos iguais aos raios dos círculos dados.

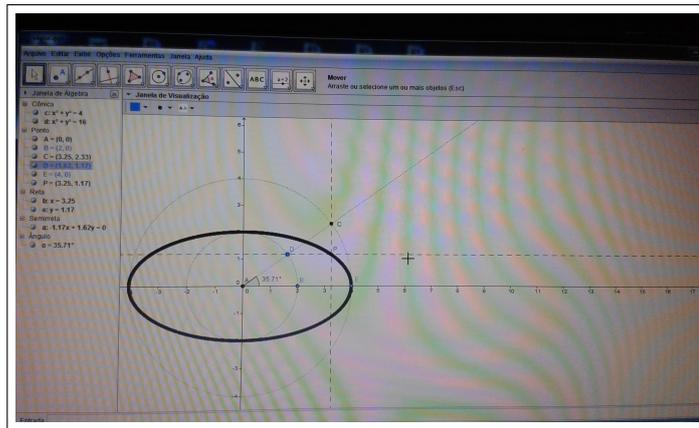


Figura 49: Elipse construída.

2. Construção da parábola:

- num plano, trace a reta r que passa pelos pontos A e B (diretriz da parábola);
- escolha um ponto F , para ser o foco da parábola, fora da reta r ;
- escolha um ponto D na reta r ;
- trace a reta mediatriz l do segmento FD ;
- trace a reta m perpendicular á diretriz r que passa pelo ponto D ;
- determine a interseção P da mediatriz l com a reta m ;
- movendo o ponto D ao longo da reta r e habilitando o rastro no ponto P , obtemos todos os pontos P da parábola de foco F e diretriz r .

3. Construção da curva de Agnesi:

- num plano, trace uma circunferência C de centro O na origem do plano cartesiano ortogonal (por exemplo) e raio $r = 4$ (por exemplo);
- trace uma reta r tangente à circunferência no ponto $A = (0, 4)$. Observe que essa reta será paralela ao eixo OX ;
- trace uma semirreta t que passe pelo ponto O e por um ponto B qualquer da circunferência;
- marque o ponto C , resultado da interseção de r com t ;
- pelo ponto C trace uma reta u paralela ao eixo OY ;
- pelo ponto B trace uma reta s paralela ao eixo OX ;

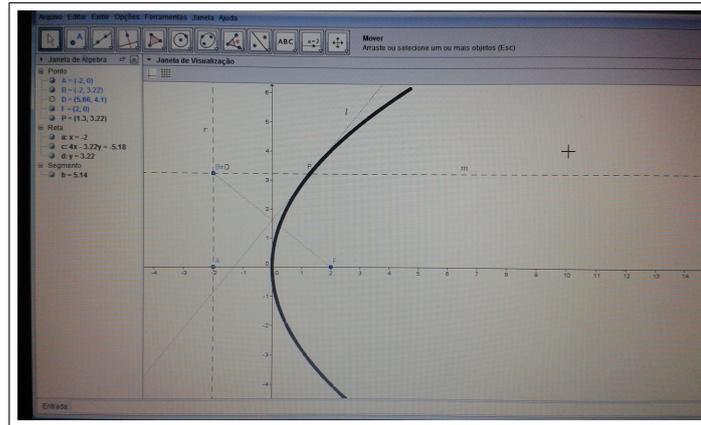


Figura 50: Parábola construída.

- marque o ponto P de interseção de u com s ;
- movendo o ponto B ao longo da circunferência e habilitando o rastro no ponto P , obtemos todos os pontos P da curva de Agnesi.

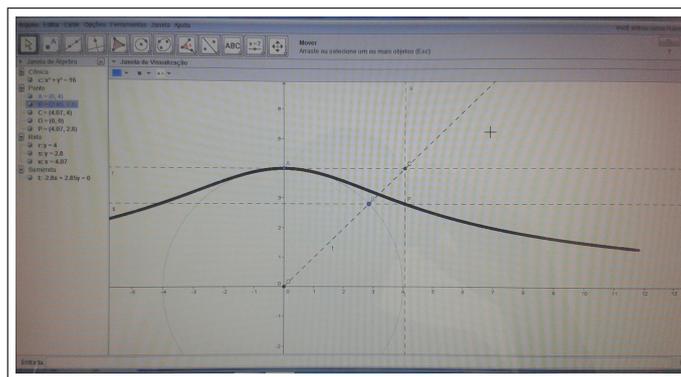


Figura 51: Curva de Agnesi construída.

4. Construção da cicloide:

- crie um controle deslizante para um número a em um intervalo $[0, 4\pi]$ (por exemplo) com incremento 0,01 e animação crescente;
- crie um ponto $A = (a, 1)$;
- trace uma circunferência de centro $A = (a, 1)$ e raio $r = 1$;
- marque um ponto B na circunferência;
- crie um ângulo com amplitude fixa a e lado BA , no sentido horário;
- habilite o rastro no ponto B ;
- mova a circunferência, utilizando o controle deslizante que foi criado.

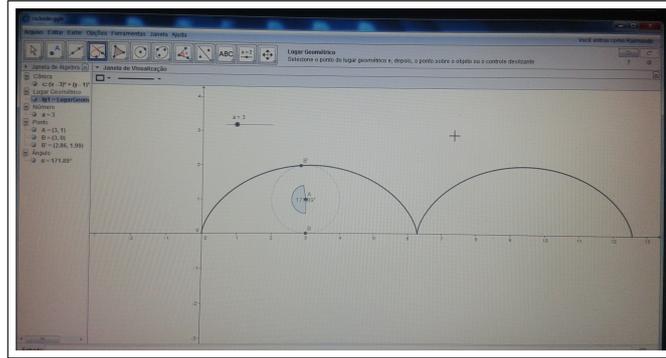


Figura 52: Ciclóide construída.

Observação 4.19. Podemos simplesmente digitar as equações paramétricas no Geogebra, para gerarmos o traço da curva. Por exemplo, para gerarmos o traço da cissóide de Diócles, procedemos da seguinte forma: criamos um controle deslizante para um número r , digitamos na entrada do geogebra `curva[2 * r * (sen(t)) ^ 2, 2 * r * (sen(t)) ^ 2 * tg(t), t, -pi/2, pi/2]` e por fim clicamos a tecla `enter` no teclado.

4.12 Área e comprimento de arco de curvas paramétricas

Considere uma curva dada por equações paramétricas contínuas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \textcircled{*}$$

tais que para $t_1 \neq t_2$ temos $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, pois não queremos repetir trechos da curva.

Proposição 4.20. A área sob uma curva de equações paramétricas dadas em $\textcircled{*}$, é: $A = \int_a^b y(t) \cdot x'(t) dt$.

Demonstração. Sabemos que a área sob uma curva $y = f(x)$, com $x \in I$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx, f(x) > 0.$$

Usando as equações paramétricas acima, definidas como uma mudança na integral definida, temos que:

$$\begin{aligned} (1) \quad x = x(t) &\Rightarrow dx = x'(t) dt \\ (2) \quad y = f(x) &\Rightarrow f(x(t)) = y(t). \end{aligned}$$

Logo, a área sob uma curva é dada por

$$A = \int_a^b y(t).x'(t)dt.$$

□

Exemplo 4.21. Mostrar que a área de uma elipse de eixo maior $2a$ e eixo menor $2b$ é igual a πab .

Solução. Podemos representar as equações paramétricas de uma elipse de centro (x_o, y_o) por:

$$\begin{cases} x = x_o + acost \\ y = y_o - bsent \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Daí resulta que a área da elipse, será:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b y(t).x'(t)dt \\ A &= \int_0^{2\pi} (y_o - bsent).(-asent)dt \\ A &= \int_0^{2\pi} (-ay_o sent)dt + \int_0^{2\pi} absen^2 t dt \\ A &= - \int_0^{2\pi} (ay_o sent)dt + ab \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ A &= -[ay_o cost]_0^{2\pi} + ab \left[\frac{t}{2} - \frac{sen 2t}{4} \right]_0^{2\pi} \\ A &= ab \frac{2\pi}{2} \\ A &= \pi ab. \end{aligned}$$

Exemplo 4.22. A área sob um arco de ciclóide é três vezes a área do círculo gerador.

Solução. Consideremos o arco traçado, desde a origem, quando a circunferência perfaz uma revolução completa. Uma vez que y é uma função de x , ver Figura 40, a área pode ser escrita da seguinte forma

$$A = \int_0^{2\pi} y dx.$$

Lembrando que $x = r(t - sent)$ e $y = r(1 - cost)$ são as equações paramétricas da ciclóide, e que $dx = (r - rcost)dt$, então

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)(r - r\cos t) dt \\
A &= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)r(1 - \cos t) dt \\
A &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt \\
A &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\
A &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\
A &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt \\
A &= r^2 \left[t \Big|_0^{2\pi} - 2\sin t \Big|_0^{2\pi} + \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{2\pi} \right] \\
A &= 3\pi r^2.
\end{aligned}$$

Foi o sábio italiano Galileu Galilei (1564 – 1642), que estabeleceu, mesmo sem demonstração, que a área entre um ciclo completo e a reta base, mede exatamente três vezes a área do círculo gerador. Problema esse que foi resolvido por seu discípulo Evangelista Torricelli (1608 – 1647) e, independentemente, pelo francês Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675).

Proposição 4.23. *O comprimento de um arco de equações paramétricas dadas em \ast , é*

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Demonstração.

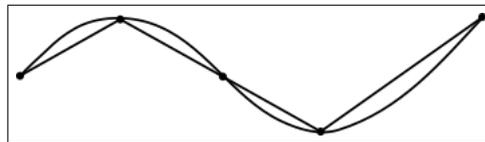


Figura 53: Curva aproximada por segmentos de reta.

Já sabemos que o comprimento do gráfico de uma função contínua e positiva f , de classe C^1 , definida em $[a, b]$ é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Seja agora

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$$

as equações paramétricas do gráfico de f . Temos:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Assim,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)} \right]^2} x'(t) dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

□

Exemplo 4.24. O comprimento de um arco da cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo gerador.

Solução. Para o cálculo do comprimento de um arco de cicloide, as equações da cicloide

$$x(t) = r(t - \operatorname{sent}), \quad y(t) = r(1 - \operatorname{cost})$$

comportam-se como suas equações paramétricas, no parâmetro t , em que $0 \leq t \leq 2\pi$.

Logo, o comprimento de arco é dado por:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(1 - \operatorname{cost}))^2 + (r\operatorname{sent})^2} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2(1 - \operatorname{cost})} dt.$$

Usando a identidade $\operatorname{sen} \frac{t}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cost}}{2}}$, tem-se $1 - \operatorname{cost} = 2\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}$. Assim,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2 2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2r \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt$$

$$L = \left[-4r \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$L = 4.2r$$

$$L = 8r.$$

Exemplo 4.25. O comprimento de uma circunferência de raio $r > 0$ é $2\pi r$.

Solução. Já sabemos que podemos representar as equações paramétricas de uma circunferência de centro (x_o, y_o) e raio $r > 0$ por:

$$\begin{cases} x = x_o + r \cos t \\ y = y_o + r \operatorname{sen} t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Daí resulta que o comprimento da circunferência, será:

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 t + r^2 \cos^2 t} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} r dt$$

$$L = r \int_0^{2\pi} dt$$

$$L = r [t]_0^{2\pi}$$

$$L = 2\pi r.$$

5 *Considerações finais*

Estudar uma curva é compreender o modo (ou modos) como pode ser gerada, e ficar a conhecer as suas principais propriedades, as suas equações em coordenadas cartesianas, paramétricas ou polares, as suas relações com outras curvas, as suas eventuais aplicações, os mecanismos que as podem traçar e a sua história. Esse estudo deve incluir modos práticos de traçar a curva, como por exemplo um programa de computador (Geogebra ou outro qualquer que esteja relacionado com o conteúdo).

Através do exposto neste trabalho, verificamos a utilidade do estudo da parametrização das curvas planas, que além de abranger os conhecimentos fundamentais do Ensino Médio tais como Geometria Analítica (reta, circunferência e cônicas), Função, Trigonometria e Geometria Euclidiana Plana, permite também um contato com o Cálculo Diferencial e Integral. É uma proposta inovadora, pois faz com que o estudante tenha uma nova visão sobre as equações paramétricas de uma curva plana, deixando de lado a ideia de que as equações paramétricas só servem para determinar a equação cartesiana da curva e além disso pode fazer uso de ferramentas de uso prático, como o software Geogebra, onde através deste programa os alunos poderão construir uma determinada curva, observando a trajetória do ponto e a descrição da curva em estudo. Além do mais, com o conhecimento das curvas parametrizadas, criamos mais uma ferramenta de auxílio na resolução de problemas, uma vez que, em muitos casos as equações algébricas das curvas, se apresentam de maneira não muito útil para a resolução dos mesmos, como foi visto no caso da cicloide. Dentre as várias curvas planas, considera-se relevante o trabalho com a cicloide, já que nos proporciona mostrar aplicações direta da matemática no cotidiano (ver apêndices). Sendo assim, espero que esta pesquisa possa render bastante para todos os estudantes do Ensino Médio e para aqueles que pretendem dar continuidade ao estudo das curvas planas.

APÊNDICE A – A história da curva de menor tempo

A cicloide foi percebida pela primeira vez pelo francês, Charles Bovelles (1479 – 1566), que num trabalho de geometria publicado em Paris, em 1501, se refere a essa curva ligando-a com o problema da quadratura do círculo. Os primeiros estudos rigorosos que se tem conhecimento são devidos a Giles Person de Roberval (1602 – 1675) que a chamou de trochóide (roda em grego) e a Evangelista Toricelli (1608 – 1647), um discípulo de Galileu Galilei (1564 – 1642). O próprio Galileu Galilei também estudou a curva tendo inclusive a chamado de cicloide e referiu-se a sua forma graciosa, apontando-a como sugestão para o perfil dos arcos de construções em arquitetura e Blaise Pascal (1623 – 1662) que a chamou de roulette, afirmando sobre ela na *Acta Eruditorum* (Revista dos *eruditos*, publicada entre 1682 e 1782, mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz), segundo [6]:

“A cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos”.

Na época, havia a necessidade de novas curvas, para testar a eficiência de novos métodos. Surgem assim as *curvas cicloidais*, que são aquelas geradas por um ponto de um círculo que roda sem resvalar sobre uma circunferência, chamada cicloide quando o círculo gerador roda sobre uma circunferência de raio infinito, isto é uma reta, epicicloide, quando o círculo gerador roda sobre uma circunferência de raio finito, exterior a ela e hipocicloide, quando o círculo gerador roda sobre uma circunferência de raio finito, interior a ela.

As curvas cicloidais, então, logo se tornaram popular entre os matemáticos, sendo imensamente estudada por célebres matemáticos como: Mersenne, Christopher Wren, Pascal, Huygens, os irmãos Bernoulli, Newton, Leibniz, dentre outros além dos acima citados.

Os estudos sobre a cicloide geraram polêmicas entre os matemáticos do século *XVII* desde Mersenne (1588 – 1648) à família Bernoulli. Em 1634, Mersenne propôs a Roberval que estudasse a curva, o qual em 1634 pode provar que a área sob um arco da

curva é exatamente três vezes a área do círculo gerador, em 1638 descobriu como traçar a tangente à curva em qualquer ponto, problema que fora resolvido ao mesmo tempo também por Fermat e Descartes. Já em 1643, Torricelli enviou a Mersenne a quadratura da cicloide, e em 1644 publicou uma obra intitulada *De parabolis* que incluía tanto a quadratura da cicloide, quanto a construção da tangente. Ressalta-se o fato de Torricelli não mencionar que Roberval havia chegado nesse resultado antes dele, e por isso em 1646 Roberval escreveu uma carta acusando Torricelli de plágio, dele e de Fermat. É relevante mencionar que isso fora um dos acontecimentos polêmicos gerados por essa curva. Ou seja, as propriedades dessa curva apresentam tantas belezas e controvérsias matemáticas que a cicloide passou a ser chamada de a “*Helena da Geometria*” ou “*Pomo da Discórdia*”, intitulada dessa maneira pela desarmonia gerada entre os matemáticos da época.

Após o alvoroço que a cicloide trouxe à sociedade matemática no decorrer dos séculos XV e XVII, Johann Bernoulli, professor de matemática em Gröningen e membro da célebre revista *Acta Eruditorum*, propôs como desafio que matemáticos determinassem qual seria a curva de descida mais rápida. Johann lançou esse problema como desafio aos matemáticos na *Acta Eruditorum* da seguinte maneira: suponha que dois pregos sejam martelados ao acaso em uma parede (não na mesma vertical), e que o prego superior seja conectado ao inferior por um arame flexível na forma de uma curva lisa. Qual a forma do arame no qual uma partícula deslizará (sem atrito) sob influência da gravidade, para passar do prego superior ao inferior no menor tempo possível?

Johann por sua vez noticiava possuir uma solução e provocava os matemáticos da época para que em seis meses (depois prorrogados por mais quatro meses), fizessem o mesmo, este receberia as glórias de sua proclamação. Fato curioso é que na sua solução, Johann usou uma analogia com a refração da luz, demonstrando grande engenhosidade ao relacionar temas que aparentemente eram bem distintos.

No decorrer do prazo foram apresentadas cinco soluções na *Acta Eruditorum*, de 1697, a do próprio Johann Bernoulli, a do seu irmão mais velho Jacob Bernoulli, a de Leibniz, a de L'Hôpital e uma em anonimato, que posteriormente foi revelada ser de Newton.

Todos esses matemáticos, por meios diferentes, chegaram à mesma resposta. A curva de menor tempo ou *Braquistócrona* (do grego brakhisto, isto é: mais ligeiro, chronos, isto é: tempo), deveria ser uma cicloide.

O desafio proposto por Bernoulli tratava-se de encontrar qual deveria ser a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória. Esse problema da Braquistócrona foi marcante porque apontou uma linha de pesquisa, importantíssima, chamada de cálculo das variações e que trata do estudo de

funcionais ou de funções que dependem de outras funções ou curvas.

Para um estudo mais detalhado e rigoroso sobre a Braquistócrona, consultar [2],[3],[6] e [14].

APÊNDICE B – A cicloide no cotidiano

Através do problema da curva de menor tempo ou Braquistócrona, proposto por Johann Bernoulli e resolvido por ele e por outros matemáticos, chegando-se a conclusão que essa curva é a cicloide, como já foi comentado, pode-se observar que a Braquistócrona está presente em diversas partes no nosso cotidiano, tais como: pistas de skate, montanhas-russas, pistas de bicicross e tobogãs.

Colocamos abaixo algumas imagens da cicloide, ilustrando a importância dessa curva no nosso dia-a-dia.



Figura 54: Cicloide invertida.

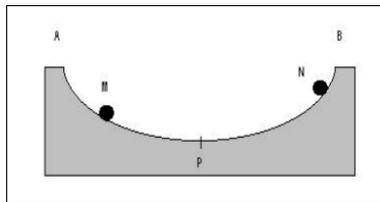


Figura 55: Rampa.



Figura 56: Ilustração prática.



Figura 57: Exemplo prático.



Figura 58: Pista cicloidal.



Figura 59: Tobogã.

Referências

- [1] ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [2] BOS, H. J. M. **O Cálculo no Século XVIII: técnicas e aplicações**. Brasília: UNB, 1985.
- [3] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.
- [4] CARDIM, Breno da Silveira. **Curvas Planas: uma visão para o Ensino Médio**. 2014. 70f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), João Pessoa.
- [5] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria e Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.
- [6] CASTRO, Leonardo Miranda de. **O Cálculo Variacional e as Curvas Ciclóidais**. 2014. 68f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Brasília.
- [7] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [8] GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo C: Funções Vetoriais, Integrais Curvilíneas, Integrais de Superfície**. 3. ed. Florianópolis: MAKRON Books, 1999.
- [9] GONÇALVES, Zózimo Menna. **Curso de Geometria Analítica: Com Tratamento Vetorial**. Rio de Janeiro: CIENTÍFICA, 1969.
- [10] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. v.1. 2. ed. São Paulo: LTC, 1987.
- [11] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica**. v.7. 5. ed. São Paulo: ATUAL, 1993.
- [12] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar: limites, derivadas, noções de integral**. v.8. 5 ed. São Paulo: ATUAL, 1993.
- [13] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Introdução à Análise**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [14] ROQUE, Tatiana **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

- [15] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [16] SARAIVA, José Cloves Verde. **No Mundo Novo das Curvas Planas: Uma Experiência Elementar**. São Luís: KOSMOS, 2004.
- [17] SARAIVA, José Cloves Verde. **La Géométrie de René Descartes**. São Luís: KOSMOS, 2007.
- [18] SILVA, Kênio Alexsom de Almeida. Comunicação particular, Fev 2015.