



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O CONCEITO DE INFINITO: UMA ABORDAGEM A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TATIANA DE SOUZA LIMA SANTOS

Salvador - Bahia

ABRIL DE 2015

O CONCEITO DE INFINITO: UMA ABORDAGEM A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TATIANA DE SOUZA LIMA SANTOS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos.

Salvador - Bahia

Abril de 2015

Santos, Tatiana de Souza Lima.

O conceito de infinito: uma abordagem a partir da
resolução de problemas./ Tatiana de Souza Lima
Santos.- Porto Seguro , 2015.

Dissertação: Universidade Federal da Bahia (UFBA), 2015.
Orientador: Dr. Evandro Carlos F. dos Santos

1. História da Matemática. 2. Infinito. 3. Conjuntos
Infinitos.

O CONCEITO DE INFINITO: UMA ABORDAGEM A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TATIANA DE SOUZA LIMA SANTOS

Dissertação de Mestrado apresentada
à Comissão Acadêmica Institucional do
PROFMAT-UFBA como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática,
aprovada em 10 de abril de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Evandro Carlos Ferreira dos Santos (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Ives Lima de Jesus
IFBA

Prof. Dra. Rita de Cassia de Jesus Silva
UFBA

*Dedico àquele que é a luz da minha vida, meu filho,
Luis Fernando.*

Agradecimentos

Agradeço a meu marido, Márcio, pelo apoio e compreensão, pelos sábados de ausência, a meu filho, Luís Fernando, que nasceu durante o mestrado, me acompanhando nessa jornada e, sem saber, me deu força para ultrapassar as dificuldades. Agradeço a minha mãe, Teresinha, meu pai, Dilson, e minha irmã, Dulciana, alicerces da minha vida, que deram força e apoio incondicional. E, em especial, cuidaram também de meu bebê nas horas das aulas e estudo. No âmbito acadêmico, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior), pela bolsa concedida por 24 meses, sem a qual não teria sido possível o deslocamento semanal entre Porto Seguro, cidade onde moro, e Salvador. Agradeço à Universidade Federal da Bahia (UFBA) por me acolher, não só como aluna no período do mestrado, mas também durante a minha graduação, por me dar todas as ferramentas necessárias para a conclusão das disciplinas e o desenvolvimento profissional. Ao meu orientador, Prof. Dr. Evandro Santos, pela paciência, pelas sugestões e por ter acreditado na realização desta pesquisa. Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante o mestrado, muitos que já conhecia e admirava desde a graduação. E enfim, agradeço aos grandes amigos e colegas que me “adotaram” durante o tempo das aulas me ajudando sempre que necessário.

*“O Infinito é distante, sobretudo perto do fim.”
(Alphonse Allais).*

Resumo

Este trabalho pretende apresentar ao leitor uma sequência de problemas que envolvem o conceito de infinito na Matemática com o objetivo de promover o conhecimento de maneira geral e, no âmbito escolar, auxiliar professores no processo de ensino-aprendizagem como também despertar o interesse do estudante do ensino básico pelo tema. Cada problema é seguido de um comentário e/ou resolução. Além disso, mostra um breve histórico da construção do conceito de Infinito desde a Antiguidade até os tempos atuais, enfatizando os eventos mais relevantes e os nomes que se destacaram nesta busca. Apresenta algumas definições, teoremas e demonstrações da teoria dos conjuntos que ajudam na compreensão e resolução dos problemas apresentados e mostra a importância do conceito de Infinito em outras ciências.

palavras chave: História da Matemática; Infinito; Conjuntos Infinitos;

Abstract

This work aims to introduce the reader to a series of problems involving the concept of infinity in Mathematics, intending to promote knowledge in general; and in primary, elementary and high schools, by assisting teachers in the teaching-learning process and also by arousing interest in the subject on students. Each problem is followed by a review and/or resolution. It also shows a brief history of the construction of the infinity concept, from Antiquity to the present times, with special attention to events and names that stood out in this search. This paper also presents some definitions, theorems and proofs from Theory of Set which help in understanding and solving the mentioned problems and show the importance of the concept of Infinity in others Sciences.

Keywords: History of Mathematics; Infinity; Infinite sets;

Sumário

Introdução	1
1 A Evolução do Conceito de Infinito	4
1.1 Aprofundando um pouco mais a teoria cantoriana	10
1.2 Infinito atual e potencial	14
2 Mas afinal, o que é Infinito?	16
3 Sequência de problemas e situações problema envolvendo o conceito de infinito	20
3.1 ATIVIDADE 1: O arqueiro e o alvo	20
3.2 ATIVIDADE 2: Hotel de Hilbert	22
3.3 ATIVIDADE 3: A lâmpada de Thompson	23
3.4 ATIVIDADE 4: Trombeta de Gabriel	23
3.5 ATIVIDADE 5: Subconjuntos dos números naturais	25
3.6 ATIVIDADE 6: Números primos	25
3.7 ATIVIDADE 7: Infinitos gangsters	26
3.8 ATIVIDADE 8: Poeira de Cantor	27
3.9 ATIVIDADE 9: Triângulo de Sierpinski	31
3.10 ATIVIDADE 10: Áreas dos quadrados	32
3.11 ATIVIDADE 11: Sequência de Grandi	33
3.12 ATIVIDADE 12: Quique de bola	34
3.13 ATIVIDADE 13: Linha Poligonal	34
3.14 ATIVIDADE 14: Cara ou coroa	36
3.15 ATIVIDADE 15: Sequência de Fibonacci	37
3.16 ATIVIDADE 16: A Curva de Koch	38
3.17 ATIVIDADE 17: Jogos de dardos	41
4 Considerações Finais	42
5 Referências	43

Introdução

Essa dissertação foi elaborada com o objetivo de promover o estudo da Matemática, especificamente do Infinito na Matemática. É fruto da observação dos conteúdos curriculares no ensino básico que inevitavelmente tratam desde conceito tão abstrato. Seus textos e capítulos foram organizados na tentativa de suprir as necessidades de estudantes, professores e interessados no tema sem restrições quanto a sua aplicabilidade, podendo ser utilizada tanto como referência para alguma disciplina, como para estudo da Matemática independente. O texto traz um novo olhar, um método contextualizado de abordar conteúdos matemáticos e sua utilização em sala de aula não deve restringir-se ao conceito aqui abordado, podendo ser ampliado a todo estudo da Matemática.

O conteúdo relaciona basicamente o conceito de infinito e o método de resolução de problemas inspirado no livro “Círculos Matemáticos: a Experiência Russa ¹”. Tal temática foi escolhida, primeiro pela crença na necessidade do rompimento do paradigma que aloja a Matemática em um lugar intangível. E segundo, por ser o infinito um conceito que, apesar de fundamental para a ciência e muito falado, é pouco compreendido.

O infinito sempre foi um tema que desafiou a mente humana. Ao longo da história da humanidade vem causando grande interesse científico ao mesmo tempo em que faz parte do imaginário social. Podemos supor que a busca da infinitude surge concomitantemente à tomada de consciência da finitude, afinal um é a negação do outro. A discussão sobre o infinito está presente em várias áreas do conhecimento tais como Filosofia, Teologia, Astronomia, Física, Química, etc. Questões como: se o universo é infinitamente grande ou existência de partículas atômicas consideradas infinitamente pequenas, físicos, químicos e cientistas de maneira geral não podem fugir. Até na arte encontramos referência ao infinito com a perspectiva.

Na Matemática, o conceito formal, estrutura e comportamento do infinito foram

¹Este livro foi produto de circunstâncias culturais singulares na antiga união soviética que fomentaram a criação dos chamados Círculos Matemáticos, grupos formados por alunos, professores e matemáticos. (FOMIM, 2012)

construídos ao longo da história e ainda assim causa certo desconforto devido à sua natureza intuitivamente inalcançável. No meio científico, o debate é intenso e dá origem a novas teorias tornando o campo com rica produção. Já, fora da academia, o tema ainda é visto com certa desconfiança. Esse tipo de pensamento parte de pressupostos carregados de ideias errôneas ou incompletas do senso comum. Tais pressupostos podem gerar dificuldades e resistências à aprendizagem da matemática.

O conceito de Infinito Matemático, apesar de distante da realidade cotidiana está muito presente nas práticas escolares. Ao afirmar, por exemplo, que numa reta há infinitos pontos, que por um ponto passam infinitas retas ou ainda que entre o número zero e o número um existe uma infinidade de números, a pessoa não se dá conta de que está tratando de um conceito rico e que merece um melhor tratamento e um olhar diferenciado sobre o desenvolvimento do pensamento matemático em torno do tema. Após uma discussão histórica e de conceituação do tema, esta dissertação tem o intuito de, com inspiração na Experiência Russa, apresentar uma proposta de problemas desafiadores que abordem direta ou indiretamente o conceito de infinito. A Experiência Russa traz uma abordagem singular no que diz respeito à disposição de problemas de forma gradual. As sequências são compostas por problemas de vários níveis de interesse e demandam habilidades distintas de maneira que qualquer pessoa consiga resolver os primeiros exemplos tornando possível o avanço gradativo da complexidade, possibilitando a solução de problemas extremamente desafiadores. Nesse caso, problemas e situações-problema que envolvam a ideia de infinito são dispostos de maneira desafiadora e em seguida são apresentadas as soluções e comentários.

A experiência russa é mais que um método de ensino/aprendizagem da matemática é uma abordagem, uma nova forma de encarar a ciência em si e seu estudo. Surgiu na antiga União Soviética, através da criação de grupos intitulados Círculos Matemáticos e compostos por estudantes, professores e matemáticos os quais eram baseados na ideia de um estudo da matemática de forma recreativa e que pode gerar entusiasmo como o de praticar algum esporte sem ser, necessariamente, competitivo. (FOMIM, 2012)

Diante do que foi exposto acima o texto foi organizado da seguinte forma:

CAPÍTULO I – A EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE INFINITO

Apresenta um breve histórico focando alguns momentos em que o infinito foi, de alguma forma, pensado pelos grandes nomes da matemática. São utilizadas as seguintes referências, BOYER (2001), MORRIS (1997), OLIVEIRA (2013), SAMPAIO (2008), SERRA (2002), STWART (2014) entre outros.

Traçando um perfil histórico podemos encontrar ideias relacionadas ao conceito de infinito desde a Grécia antiga, passando pela Idade Média, Renascimento, até os dias atuais; salientando-se que só no século XIX é que George Cantor mostrou, em relação ao tamanho dos conjuntos, que há infinitos iguais e diferentes. As suas teorias para a teoria de conjuntos revolucionaram então a Matemática.

CAPÍTULO II - MAS AFINAL, O QUE É INFINITO?

Este capítulo apresenta um resumo da teoria dos conjuntos com ênfase em conjuntos infinitos extraídos de ELON (2004) e traz os conceitos de conjuntos cardinalidade, conjunto finito e infinito, imprescindível para o entendimento do tema.

CAPÍTULO III - SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS E SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO O CONCEITO DE INFINITO.

Por tratar-se de atividades recreativas e desafiadoras, tão importante como resolver é compreender a solução. Por isso um capítulo dedicado a esse tema trazendo curiosidades e métodos diversos de resolução. As questões podem ser encontrada em LIMA (2006), FOMIM (2012) entre outros.

Capítulo 1

A Evolução do Conceito de Infinito

Este capítulo apresenta um breve histórico da construção do conceito de infinito, que se confunde com a própria história do desenvolvimento do pensamento humano, percorrendo varias áreas do conhecimento científico sendo o infinito matemático o foco principal desse texto.

Para entendermos como se deu a evolução do conceito de infinito, podemos nos transportar no tempo e imaginar o homem primitivo na observação da natureza e de seus ciclos como, por exemplo, a sucessão dos dias e das noites, a observação dos astros e suas órbitas, o clima com seu comportamento periódico. Este homem se perguntaria: esses comportamentos são eternos? Algum dia teve um começo e algum dia terá um fim? Outra questão fundamental que fez e faz o homem pensar sobre o infinito de um ponto de vista amplo é a consciência da morte e a busca de uma explicação para o sentido da vida. Não podendo driblar a certeza da finitude da vida de cada indivíduo na Terra, a humanidade precisa acreditar em algo que seja eterno como um espírito, uma energia que não tenha fim. Tem início assim, com questões filosóficas, as primeiras investidas dos pensadores na obtenção de ideias sobre o infinito. Mas, vamos fixar neste estudo, o conhecimento acumulado a respeito do conceito de infinito na Matemática, que substancialmente trata de números, conjuntos e padrões.

O infinito intriga o ser humano desde que o homem aprendeu a pensar. Se observarmos o princípio da contagem e ordenação, a sequência 1, 2, 3, 4, 5, ... , já traz em si um dilema, pois é uma sequência que nunca termina e não se pode imaginar um número que seja maior que todos os outros.

Na Grécia, por volta do século V a.C., os filósofos procuravam encontrar princípios fundamentais que explicassem a verdade através da Matemática. Também pela primeira

vez, aparecem filósofos que abordam a Matemática pelo conhecimento e não apenas pela sua utilidade.

Na Grécia antiga, o ser humano toma consciência que o mundo é um problema que terá de ser resolvido em termos conceituais de uma forma racional e ponderada e não em termos mítico-afetivos. Por volta do século VII A.C., a cultura grega começa a debruçar-se sobre questões relacionadas com o lugar do Homem no Universo. Pois bem, nesta procura da verdade, da razão, da ordem sobre o caos, nasce o logos, o raciocínio lógico. (DIEGUEZ, 1994)

De fato os Gregos são, na matemática, os primeiros a tomar consciência do infinito e também os primeiros a negá-lo. Ao tentar exprimir por um número a medida da diagonal de um quadrado de lado 1, observa-se que o cálculo da raiz quadrada de 2 resulta num número com infinitas casas decimais, e que diferentemente dos números do tipo 0,666666... ou 0,181818... não pode ser escrito como uma razão entre dois números inteiros, ou seja, irracional. Deve-se aos Pitagóricos a descoberta destes números.

Existem muitos outros exemplos de segmentos de reta e curvas que desafiaram o pensamento matemático grego. Tais segmentos eram chamados de incomensuráveis. Entre eles está o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1. Hoje chamamos este número de PI.

Nesse período surgem também famosos paradoxos sobre a natureza do infinito. O sábio Zenão (495-430 a.C.) enunciou argumentos para tentar provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e de divisibilidade, criando quatro paradoxos relativos ao movimento e ao tempo que mais tarde foram estudados por Aristóteles (384-322 a.C.) que os intitulou por Aquiles, Seta, Dicotomia e Estádio.

No primeiro paradoxo, traz uma fantástica corrida entre Aquiles, herói da Grécia, e uma lenta tartaruga. Ele provou que ao dar uma vantagem à tartaruga Aquiles, nunca poderia alcançá-la. Por exemplo, se o herói fosse duas vezes mais rápido e desse uma vantagem de um quarteirão, assim, quando Aquiles percorre o mesmo quarteirão a tartaruga teria percorrido mais meio quarteirão. No segundo instante, Aquiles teria andado esse meio quarteirão e a tartaruga teria avançado mais um quarto do mesmo quarteirão. Ou seja, como a tartaruga é duas vezes mais lenta, sempre avançará metade da distância que o herói percorre em cada instante. Assim sendo, a vantagem vai reduzindo gradualmente, mas, sempre haverá uma mínima diferença entre os competidores.

Esse pensamento de Zenão tornou-se um paradoxo e alvo de discussões por séculos, já que, numa disputa real Aquiles certamente venceria a tartaruga. O que mais intrigou os pensadores é que essa corrida simboliza uma soma infinita. Suas parcelas são as distâncias percorridas por Aquiles a cada instante, começando com um quarteirão, depois meio quarteirão e assim por diante. A conta fica assim: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 \dots$. Embora pareça impossível fazer tal soma, pois ela nunca termina e sempre se pode acrescentar mais uma parcela ao seu final, os gregos já sabiam que seu resultado era simplesmente 2. Ou seja, Aquiles ultrapassaria a tartaruga exatamente ao fim do segundo quarteirão. Não se pode afirmar que seu resultado ajuda a compreender o infinito, mas Zenão abriu o caminho para outros pensadores gregos.

Posteriormente temos Eudoxo de Cnido (400-350 a.C.) a quem é creditado o método de exaustão que consiste de maneira simplificada em colocar figuras dentro de figuras. Por exemplo, um triângulo, depois dois triângulos menores, depois três ainda menores e assim por diante, todos dentro de um círculo. Dessa maneira, é possível usar áreas de figuras conhecidas como os triângulos para calcular uma área desconhecida.

Arquimedes de Siracusa (290-212 a.C.) foi o primeiro a usar o método de exaustão com rigor, 250 anos antes da era cristã e conseguiu, assim, montar uma soma infinita: $1 + 1/4 + 1/16 + \dots$. E, com ela, Arquimedes calculou área limitada por uma das mais importantes curvas geométricas, a parábola.

O método da exaustão é um processo fundamental no Cálculo, mas, é necessário salientar que na época de Arquimedes, não se consideravam somas infinitas, mas apesar de os gregos não assumirem de fato o infinito, este foi um dos métodos que mais contribuiu para o desenvolvimento de conceitos como o de limite. Na Idade Média, conhecida como a era das trevas, houve uma estagnação da produção científica de maneira geral na Europa, no entanto o infinito aparece nas ideias de Santo Agostinho (354-430) e São Tomás de Aquino (1225-1274), o infinito é entendido como um atributo de Deus. A ideia de infinito volta a ter um caráter mítico e religioso. Neste improvável cenário, surge uma figura chamada Leonardo de Pisa (1175-1250), mais conhecido como Fibonacci; talvez inspirado por um problema enunciado do papiro de Rhind, ele apresenta em seu livro, dentre outras coisas, um problema sobre reprodução de coelhos que origina uma sequência de números construída da seguinte maneira: os dois primeiros termos são iguais a 1. A partir do terceiro, cada termo é a soma dos dois anteriores, ou seja, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33, 54, ...). Apesar de seu problema envolver o cálculo do número de coelhos resultante após um ano, um número finito de interações, esta sequência posteriormente estudada, gerou resultados

interessantes do ponto de vista do infinito.

O século XVII foi considerando um grande momento para a Matemática, pois nesse período que a geometria analítica e o cálculo são desenvolvidos. Destacando-se grandes nomes como: Simon Stevin (1546-1620) e Johann Kepler (1571-1630) que consideram somas infinitas.

O filósofo Galileu Galilei (1584-1642) estabeleceu correspondências entre conjuntos infinitos. Comparou a quantidade de números inteiros e de quadrados perfeitos e concluiu que um não é maior nem menor que o outro.

Em 1655, John Wallis (1616-1703) trabalhou com séries infinitas. Paralelamente a Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Leibniz (1646-1716) encontrou também um novo cálculo, entre 1673 e 1676. A abordagem de Newton era essencialmente cinemática, enquanto a de Leibniz era geométrica.

Somente no Renascimento começou-se a acrescentar questões a esse pensamento e, por volta de 1700, Newton e Leibniz inventaram o cálculo infinitesimal e assim, surgiram fórmulas para o cálculo das mais variadas áreas e volumes, assim como o comprimento de curvas. O Cálculo Infinitesimal é a principal ferramenta Matemática que trata o infinito. O *método da exaustão* foi um grande catalisador dos métodos infinitesimais desenvolvidos no Renascimento para resolver problemas de áreas, de volumes, do movimento e da mecânica celeste.

O alemão Friedrich Gauss (1777-1855), chamado o príncipe dos matemáticos, expressou as dúvidas dessa época, sugeriu a retirada da ideia de infinito da Matemática. Em contraposição, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), criou o conceito de limite, um método de dar sentido a uma sequência infinita. Segundo Cauchy, não era correto dizer que $1 + 1/2 + 1/4 + \dots$ era igual a 2, mas sim que essa soma tende a 2, sem nunca chegar a ele.

No século XVIII, chegamos à época de Leonhard Euler (1707-1783), em 1748, escreveu *Introductio in Analysin Infinitorum* e o primeiro volume desta obra trata essencialmente de processos infinitos.

No século XIX, surge uma nova geração de matemáticos e agora a Matemática é tida não apenas como uma ciência importante para a Mecânica e para a Astronomia, mas

como uma ciência autônoma. Há uma separação dos matemáticos puros e dos aplicados.

Em destaque, o matemático Georg Cantor (1845-1918) com uma ideia simples e genial. Ele “contou” os elementos dos conjuntos infinitos e os comparou. Fazendo isso deu sentido a uma questão bem antiga do *Infinito Potencial* e *Infinito Atual* e criou os números transfinitos. Aos conjuntos com a mesma cardinalidade dos números naturais ele nomeou de *Álefe-zero* e percebeu, também, que a cardinalidade do conjunto dos números reais era maior que a dos números naturais.

Com essa ideia em mente, Cantor emparelhou os números inteiros com os números menores que 1 e constatou: depois de esgotar a lista dos inteiros, ainda havia menores que 1 a emparelhar. Concluiu que o número desses últimos — apenas entre 0 e 1 — era maior que o infinito número dos inteiros. Nem havia nome para tal quantidade, e coube a Cantor batizá-la. Chamou de *álefe-zero* ao conjunto de todos os inteiros — o “menor” dos infinitos. Vinha depois o *álefe-um*, e por aí adiante, numa inimaginável hierarquia de infinitos. O mundo ficou pasmo, mas, como quase sempre acontece, grande parte do problema era simples falta de costume com uma ideia nova. (DIEGUEZ, 1994)

O raciocínio de Cantor estendeu-se à Geometria quando ele compara reta e plano e, apesar de intuitivamente pensar que a reta teria uma menor quantidade de pontos, ele prova que ambos possuem a mesma quantidade. Ou seja, é possível estabelecer uma relação bijetiva entre esses dois conjuntos. Com isso, Cantor ampliou os horizontes da Matemática. Um grande exemplo disso é a importância que sua abordagem teve para a base da *Teoria dos Fractais*¹ considerada hoje um notável avanço no conceito de dimensão.

Sob esse viés, surge uma nova maneira de conceber a ideia de número, ao traduzir a ideia matemática mais elementar que é a comparação entre dois conjuntos. O número agora é visto como uma relação entre conjuntos.

Richard Dedekind (1831-1916) fez os primeiros estudos sistemáticos sobre conjuntos infinitos. Ele eliminou os buracos existentes na reta, criando os números reais. Estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais. Logo, Dedekind estabeleceu uma bijeção entre dois conjuntos infinitos.

Destacam-se também Augustin Cauchy (1789-1857), que tentou dar resposta, através do Cálculo, a uma série de paradoxos que assombravam a Matemática desde o tempo de

¹Fractais são formas geométricas cujo o padrão se replica gerando figuras complexas que preservam, em cada uma de suas partes, as características do todo. (STEWART, 2014)

Zenão, Karl Weierstrass (1815-1897) e Bernhard Bolzano (1781-1845), que se preocupam com os métodos do cálculo infinitesimal e conduziram uma formalização rigorosa com base na noção de limite. Este conceito permitiu um novo tratamento matemático do infinito.

Ao longo do tempo, vários matemáticos tentaram encontrar critérios de comparação entre conjuntos infinitos e, no século XIX, estava mais ou menos aceito que a existência de uma bijeção entre dois conjuntos permitia estabelecer a igualdade da quantidade dos seus elementos. Dado um conjunto infinito de referência e um outro conjunto infinito, podemos estabelecer uma correspondência bijetiva entre esses conjuntos? Em caso afirmativo, os conjuntos têm o mesmo tamanho, caso contrário podemos concluir que existem infinitos de tamanhos diferentes. Cantor mostrou, em relação ao tamanho dos conjuntos, que há infinitos *iguais* e *diferentes*. Tal como Dedekind, ele tinha reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, mas viu que os conjuntos infinitos não eram todos iguais.

Ficou então provado que os subconjuntos infinitos que têm o mesmo cardinal que o conjunto dos números racionais é enumerável, que o conjunto dos números reais não é enumerável e que o conjunto dos pontos de um quadrado é equivalente ao conjunto dos pontos do seu lado.

O início do século XX ficou marcado pelo segundo Congresso Internacional de Matemática, que ocorreu em Paris (1900). David Hilbert (1862-1943) apresentou numa conferência uma lista de vinte e três problemas matemáticos que precisavam de resposta. O primeiro referia-se à estrutura de continuidade dos números reais e, mais explicitamente, à *Hipótese do contínuo*. Ele questionou se haveria algum cardinal entre o contínuo (reais) e o numerável (inteiros) e se o contínuo poderia ser considerado bem ordenado.

Os trabalhos de Kurt Gödel (1906-1978), em 1936, e de Paul Cohen (1934-2007), em 1963, mostraram que esta formulação não pode ser demonstrada nem refutada tendo em conta apenas os axiomas habituais da teoria de conjuntos.

Acrescenta-se apenas que Cantor não reconhecia a existência dos infinitamente pequenos e foi preciso esperar pela *Análise não Standard*², formulada por Abraham Robinson (1918-1974), em 1961, para os infinitesimais serem reconhecidos como entidades bem definidas e, assim, justificar os cálculos que os físicos faziam com eles.

²Análise não Standard é uma método matemático rigoroso que define os números reais infinitamente grandes ou infinitamente pequenos (SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL, 2006)

A Análise Matemática constitui por si mesma uma sinfonia do infinito. (...) Mas a Análise, por si só, não nos dá ainda a visão mais aprofundada da natureza do infinito. Para obtê-la servimo-nos de uma disciplina que se aproxima da especulação filosófica geral e que estava destinada a dar nova luz a todos os complexos problemas que se referem ao infinito. Esta disciplina é a teoria dos conjuntos que foi criada por Georg Cantor. (...) Esta me parece a mais maravilhosa florescência do espírito matemático e, sem dúvida, uma das mais altas realizações da atividade racional humana pura. (Hilbert, 1926, p. 239-240 APUD SAMPAIO, 2008).

1.1 Aprofundando um pouco mais a teoria cantoriana

Se imaginarmos uma reta e distribuíssemos nos pontos desta reta todos os números racionais de forma ordenada será que estes preencheriam todos os espaços, ou seja, será que existe uma correspondência biunívoca entre todos os pontos da linha e todos os números racionais?

Na época de Pitágoras já se sabia que este sistema estava incompleto: há pontos da reta que não estão preenchidos por pontos associados a números racionais. Para verificar isto basta marcar sobre a reta a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos meçam uma unidade. Este valor, a raiz quadrada de 2, não tem equivalente numérico no sistema racional de números.

Para responder a este e outros problemas relacionados a conjuntos infinitos, Cantor teve uma ideia simples: “contou” os números inteiros, “contou” os números racionais, e todos os números reais. É óbvio que não podemos contar todos os números, afinal há um número infinito de cada tipo, mas Cantor não estava interessado em saber exatamente quantos números existem, mas sim descobrir se dava para estabelecer uma relação entre dois ou mais destes conjuntos.

Tomando o conjunto dos números inteiros, emparelhou os seus elementos com os do conjunto dos números pares, e descobriu que há tantos inteiros quantos os números inteiros pares. Isto pode ser facilmente visto na tabela 1.1.

inteiros	inteiros pares
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
⋮	⋮
n	2n

Tabela 1.1

Para cada número inteiro há um número par correspondente: o seu dobro. Assim, Cantor chegou à notável conclusão de que, quando consideramos quantidades infinitas, o todo nem sempre é maior do que cada uma das suas partes. Qualquer conjunto infinito que seja subconjunto de números inteiros tem exatamente a mesma cardinalidade que o conjunto de todos os números inteiros.

inteiros	quadrados	inteiros negativos	cubos	divisíveis por 100	múltiplos de 2000
1	1	-1	1	100	2000
2	4	-2	8	200	4000
3	9	-3	27	300	6000
4	16	-4	64	400	8000
5	25	-5	125	500	10000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$n \times n$	-n	$n \times n \times n$	$100 \times n$	$2000 \times n$

Tabela 1.2

Cantor descobriu algo que parece agora bastante óbvio: não existe nenhum conjunto infinito que tenha menor cardinalidade do que o conjunto dos números inteiros. Para representar o número de elementos existentes neste conjunto, Cantor adotou o termo *álef-zero*, que se representa por \aleph_0 . Álef é a primeira letra do alfabeto hebraico. Para distinguir este novo número dos números finitos, ele designou-o como transfinito.

O questionamento que vem em seguida é: será que existem outros números transfinitos, ou seja, será que existem conjuntos infinitos cuja cardinalidade seja maior do que

a do conjunto dos números inteiros? Intuitivamente podemos pensar no conjunto dos números racionais, que além dos inteiros possuem as frações, mas, não foi o que Cantor observou. Ele emparelhou os elementos dos dois conjuntos e descobriu que tinham a mesma cardinalidade. A próxima etapa seria testar os números reais. Cantor já sabia que existiam duas categorias de números irracionais: os algébricos e os transcendentos. Um número algébrico é aquele que pode ser raiz de uma equação algébrica; uma vez que existem infinitas equações algébricas, existe também um número infinito de suas raízes, racionais e irracionais. No entanto, há números que nunca podem ser raízes de uma equação algébrica; por exemplo, é impossível formular uma equação que tenha π como raiz, porque este número só surge através do uso de processos infinitos de análise, nunca através de processos algébricos finitos. As equações não algébricas como, por exemplo, exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas não têm, por regra, raízes que sejam números algébricos. Os números não algébricos denominam-se transcendentos, e os seus representantes mais conhecidos são π e e .

Para comparar a cardinalidade do conjunto dos números inteiros com a dos números reais, Cantor fez a distinção entre os números algébricos e o mais abrangente conjunto dos reais, que comporta também os transcendentos. Primeiro tentou emparelhar os inteiros com os algébricos. Através de um método de ordenação das equações algébricas com base nos expoentes dos seus coeficientes, Cantor conseguiu mostrar que as suas raízes, isto é, os números algébricos, podiam ser emparelhados com os números inteiros. Portanto, o conjunto dos números algébricos tem a mesma cardinalidade dos inteiros. Todos os conjuntos até esse momento pareciam ter a mesma cardinalidade, mas Cantor surpreendeu a todos quando tentou comparar o conjunto dos números reais com o dos inteiros e descobriu que era “maior”. A cardinalidade superior do conjunto dos reais deve-se aos números transcendentos que contém. Quando foram descobertos, pensava-se que estes números eram raros, mas Cantor provou exatamente o contrário: não só eles são comuns, como existem em muito maior quantidade do que qualquer outra espécie de números. A demonstração de que o conjunto dos números reais é “maior” do que o dos números inteiros é a seguinte: primeiro Cantor admitiu que existisse uma correspondência perfeita entre todos os inteiros e todos os números reais de 0 a 1. Para fazer esta correspondência, é preciso listar todos os números reais. Cantor assumiu que esta listagem podia ser feita, escrevendo todos esses números sob a forma de dízimas infinitas, como por exemplo:

0,0976547678...

0,5436890007...

0,2712312765...

0,4981212769...

0,9416665438...

Depois, através de um processo de diagonalização, mostrou que esta lista não contém todos os números reais, isto é, por mais exaustiva que seja a nossa lista, há sempre números reais em falta. Por exemplo, um número real diferente de todos os listados pode ser formado do seguinte modo: escolhendo para primeiro dígito um qualquer diferente do primeiro dígito do primeiro número listado, para segundo dígito um qualquer diferente do segundo dígito do segundo número listado, para terceiro um que seja diferente do terceiro dígito do terceiro número listado, e assim sucessivamente. O número resultante terá de ser diferente de todos os que estão na lista porque difere de cada um deles em pelo menos um dígito - o que significa que ele próprio não está na lista. Assim sendo, a suposição de que todos os números reais podiam ser listados e portanto emparelhados com os inteiros está errada, porque conduz a uma contradição.

Desta forma Cantor provou que o conjunto dos números reais é “maior” do que o conjunto dos números inteiros. Mas, o processo de diagonalização pode ser usado para provar que é sempre possível encontrar conjuntos maiores e maiores - que não existe o conjunto infinito maior de todos. Assim, os números transfinitos (ou ordens de infinito), tal como os números finitos usuais, são infinitos. Cantor chamou a este segundo número transfinito - aquele que representa a cardinalidade dos números reais de C .

Em resumo, Cantor propôs que o infinito dos naturais é o menor infinito possível, \aleph_0 (álefe zero). O próximo infinito é denominado \aleph_1 (álefe um) e assim por diante. Além disso, o infinito dos números reais (o contínuo) foi denominado C ou 2^{\aleph_0} .

A justificativa para a notação 2^{\aleph_0} do número transfinito que representa a cardinalidade dos números reais é a seguinte: pode-se demonstrar que o conjunto dos números reais tem o mesmo tamanho do conjunto das partes de \aleph_0 . Por outro lado, a simples análise combinatória mostra que, no caso finito, o conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos. Por isso a analogia.

A escala que resulta do teorema fundamental de Cantor é denotada : \aleph_0 , 2^{\aleph_0} , $2^{2^{\aleph_0}}$ etc. mas, a questão é saber se não há nada entre \aleph_0 e 2^{\aleph_0} , ou seja, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$? A afirmação

$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ é chamada de *Hipótese do Contínuo*.

Demonstrou-se que essas afirmações são independentes dos axiomas classicamente aceitos para a teoria dos conjuntos e somente com esses axiomas não será possível determinar a verdade ou falsidade da Hipótese do Contínuo.

1.2 Infinito atual e potencial

Esta distinção é muito importante e bem antiga: o infinito potencial consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos; o infinito atual não é um processo, é ele próprio um número. A distinção entre potencial e atual foi aplicada por Cantor aos números irracionais, e por fim, a todos os números finitos. Segundo ele, qualquer número finito pode ser visto como um processo infinito, com uma espécie de evolução, ou como uma constante fixa, que representa o processo completo. A primeira, mas não a segunda, é tradicionalmente utilizada quando se trabalha com o infinito; a segunda, mas não a primeira, é tradicionalmente utilizada quando se trabalha com os números racionais; e uma combinação de ambas quando se trabalha com os números irracionais. Cantor unificou as visões, mostrando que todos os números, finitos e transfinitos, podem ser vistos de ambas as formas. O infinito é um limite que nunca se atinge, de um número infinito de números. Isto é, os números 1, 2, 3, 4, 5, ... podem continuar indefinidamente, mas nunca atingirão o último, no infinito. Visto desta maneira, cada número da sequência é apenas um passo de um processo infinito. No entanto, o limite nunca atingido pode ser visto como um número em si mesmo, um número transfinito. Este número transfinito é infinitamente atualizado, é o limite para o qual se tende mas que nunca se atinge, é aquilo que Cantor considera a “quantidade, fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas.” Da mesma forma, os números irracionais podem ser vistos como o limite de uma sequência infinita de números. Uma sequência de números que tem o infinito como limite é fácil de visualizar, é a sequência dos inteiros, 1, 2, 3, 4, 5, ..., ou pode ser qualquer sequência gerada a partir desta, como por exemplo 1, 2, 4, 8, 16, ..., em que cada número da sequência é o dobro do antecessor. Como vimos anteriormente, todas estas sequências têm o mesmo “tamanho”, álefe zero, o primeiro número da sequência dos números transfinitos.

Para representar as sequências infinitas que têm números irracionais como limites, por exemplo, o número irracional $\sqrt{2}$ pode escrever-se na forma de dízima infinita não periódica, 1,414214... e como uma soma de infinitos números racionais : 1.4, 1.41, 1.414,

1.4142, 1.41421, 1.414214, ... Cada número desta sequência é apenas um passo do processo infinito de geração do número irracional $\sqrt{2}$. Assim, $\sqrt{2}$ é o limite de um processo infinito e, tal como o limite da sucessão dos inteiros pode ser visto como um número, o número transfinito, \aleph_0 , também o limite da sequência racional 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414214, ... pode ser visto como um número, o número irracional $\sqrt{2}$. Este número irracional fica assim definido, pela primeira vez na história, apenas em termos de números racionais.

Nenhum destes dois pontos de vista se aplica apenas aos números irracionais ou transfinitos. Eles aplicam-se também aos números racionais. Como a visão de um número racional como uma quantidade fixa é suficientemente bem conhecida, pode ser omitida; um número racional visto como limite de um processo infinito é que é menos conhecido e merece ser considerado.

Todos os números racionais podem ser escritos na forma de dízima infinita. Por exemplo, 4 pode ser escrito como 4.0000..., com os zeros a continuar indefinidamente; a fração $1/3$ é 0,3333..., e $1/7$ é 0,1428571428571... Qualquer dízima infinita pode, naturalmente, ser reescrita como uma sequência infinita; e uma sequência infinita deste tipo chegará, depois de um número infinito de passos, ao seu limite. Assim, os números racionais podem também ser vistos como o limite de um processo infinito.

Vistos desta perspectiva, eles parecem não diferir dos irracionais - no entanto a diferença existe. Sempre que um número racional é escrito sob a forma de dízima a sua sequência de dígitos repete-se, sendo por esse motivo designados por dízimas infinitas periódicas. No primeiro exemplo que se viu, 0 repetia-se infinitamente, no segundo era 3, e no terceiro era a sequência 142857.

As dízimas periódicas são características de todos os racionais e nunca ocorrem nos irracionais.

Capítulo 2

Mas afinal, o que é Infinito?

Este capítulo traz o resumo do conhecimento matemático acerca dos conjuntos finitos e infinitos sob dois tipos de abordagem: a Análise Matemática e a Teoria dos Conjuntos. Grande parte do texto foi extraída do capítulo II do livro Curso de Análise do professor Elon Lages Lima. Aqui serão apresentados os teoremas e corolários referentes ao tema e algumas de suas demonstrações.

No ensino médio costuma-se tratar de conjuntos numéricos de forma sucinta, deixando de lado alguns conceitos importantes assim como teoremas e demonstrações. Essa uma prática recorrente no ensino por vários motivos: a dificuldade de abstração dos alunos nesta fase, a falta de conhecimento prévio em decorrência e ensino infantil e fundamental deficiente, falta de interesse e preparo do educador, entre outros. Comumente apresenta-se o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e reais, nesta ordem, ampliando as definições e apresentando a relação de pertinência e a relação de inclusão. Trabalha-se também com as operações de união, interseção e diferença de conjuntos usando por vezes a representação através do diagrama de Venn e, para intervalos reais, as retas. Percebe-se que a noção de infinito permeia todo o conteúdo e que mereceria um tratamento no mínimo mais cuidadoso. Como já foi abordado, deve-se a Cantor a ideia que há diversos tipos de infinito e o estudo aprofundado desses tipos. A noção de conjuntos enumeráveis está intimamente ligada ao conjunto dos números naturais logo é necessária a exploração dos axiomas de Peano, dos quais toda a teoria dos números naturais é deduzida.

São dados, como objetos não definidos, um conjunto N , cujos elementos são chamados números naturais, e uma função $s : N \rightarrow N$, para cada $n \in N$, o número $s(n)$, valor que a função s assume em n , é chamado de sucessor de n . A função s satisfaz os seguintes axiomas:

$P_1 : s : N \rightarrow N$ é injetiva. Em outros termos: $m, n \in N$, se $s(m) = s(n)$ então $m = n$.

$P_2 : N \rightarrow s(N)$ possui apenas um elemento. Ou seja, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro.

P_3 : (Princípio da indução) Se $X \subset N$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se que $s(n) \in X$, então $X = N$.

O princípio da indução também pode ser enunciado:

Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 gozar da propriedade e se, do fato de um número natural n gozar da propriedade P puder-se concluir que $n+1$ goza da propriedade P , então todos os números naturais gozam dessa propriedade.

Ainda citando o Elon, define-se conjunto finito da seguinte maneira:

Seja In o conjuntos $\{1, \dots, n\}$ dos números naturais desde 1 até n . Mais precisamente, dado $n \in N$ temos

$$In = \{p \in N; 1 < p < n\}.$$

Um conjunto X chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in N$, uma bijeção:

$$\varphi : In \rightarrow X.$$

No primeiro caso, diremos que X tem zero elementos. No segundo, diremos que $n \in N$ é o número de elementos de X , ou seja, que X possui n elementos. Intuitivamente $\varphi : In \rightarrow X$ significa uma contagem dos elementos de X .

Um conjunto é dito enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $F : N \rightarrow X$. No segundo caso, X é chamado infinito enumerável.

Alguns teoremas e corolários de conjuntos infinitos enumeráveis:

Teorema 1: *Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.*

Corolário 1.1: *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção*

$f : X \longrightarrow Y$, de X sobre uma parte própria $Y \subset X$.

Teorema 2: *Todo subconjunto $X \subset N$ é enumerável.*

Corolário 2.1: *Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Ou, se $f : X \longrightarrow Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.*

Teorema 3: *Seja X um conjunto enumerável. Se $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva, então, Y é enumerável.*

Teorema 4: *Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Corolário 4.1 : *Um conjunto Q dos números racionais é enumerável.*

Demonstração: Se indicarmos por Z^* o conjunto dos números inteiros diferentes de zero, veremos que Z^* é enumerável. Logo é também enumerável o produto cartesiano $Z \times Z^*$. a função $f : Z \times Z^* \longrightarrow Q$, definida por $f(m, n) = m/n$, é sobrejetiva. Segue-se do teorema 3 que Q é enumerável.

Corolário 4.2: *Uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Conjuntos não enumeráveis.

O principal conjunto não enumerável que conhecemos é o conjunto dos números reais denotado por R .

Corolário 4.3: *Todo intervalo não degenerado de números reais é não-enumerável.*

Corolário 4.4 : *O conjunto de números irracionais $R - Q$ não é enumerável.*

Teorema (Cantor): *Sejam X um conjunto arbitrário e Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função $\varphi : X \longrightarrow F(X, Y)$ é sobrejetiva.*

Corolário 5.1: *Se $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$,conjuntos infinitos enumeráveis, o produto cartesiano $\prod_1^n X_n$ não é enumerável.*

Números ordinais e cardinais

Podemos também falar de infinito na matemática partir da seguinte abordagem:

Definição: dizemos que $x+$ é o sucessor de x se ele for a união de x com um conjunto unitário de x , ou seja, $x+ = x \cup \{x\}$. O sucessor indica o próximo número. O sucessor de um número x será $x+1$.

Axioma 1 (DA INFINIDADE): Há um conjunto que contém o zero que contém o sucessor de cada um de seus elementos.

Axioma 2: Cada conjunto A está associado a um número cardinal, denotado por $\text{card } A$ e para cada número cardinal a , existe um conjunto A com $\text{card } A = a$.

Axioma 3: $\text{card } A = 0$ se e somente se A é vazio.

Axioma 4: Se A é um conjunto finito não vazio, isto é, A possui uma bijeção com algum N_k para algum $k \in \mathbb{N}$, então $\text{card } A = k$.

Axioma 5: Para quaisquer dois conjuntos A e B , $\text{card } A = \text{card } B$ se e só se existe uma função bijetora A e B .

Definição 2: Sejam A e B dois conjuntos então dizemos que $\text{card } A \leq \text{card } B$ quando existe um injeção $f : A \rightarrow B$ e também denotamos $\text{card } A < \text{card } B$ se não houver sobrejeção.

Teorema : $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}$.

Demonstração: como o próprio conjunto dos naturais é subconjunto dos reais então a função identidade é injetora, ou seja, $f(n) = n$, para $n \in \mathbb{N}$. Temos $f(n) \neq f(m)$ o que implica em $n \neq m$. E como já provamos que não existe bijeção entre os conjuntos porque um é enumerável e outro é não enumerável, temos $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}$. Com isso fica então provado que todos os conjuntos enumeráveis são “menores” que os conjuntos não enumeráveis.

Capítulo 3

Sequência de problemas e situações problema envolvendo o conceito de infinito

3.1 ATIVIDADE 1: O arqueiro e o alvo

Um arqueiro, ao tentar acertar o alvo, percebe que está muito longe dele e divide sua distância ao meio. Ainda não contente, a divide de novo e de novo, aproximando-se cada vez mais do alvo. Quantas divisões serão necessárias para que a flecha e o alvo se encontrem?

Bem, podemos dizer que o arqueiro e o alvo nunca irão se encontrar pois o processo de divisões sucessivas por dois é infinito e por menor que seja a distância que resta para alcançar o alvo sempre é possível dividi-la novamente. Por outro lado, o limite que tende a infinito da função que representa soma das distâncias percorridas $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ tende a 1.

Os conteúdos que podem ser abordados através deste problema envolvem estudo das frações, que pode ser trabalhados nas séries iniciais do ensino fundamental, momento no qual os alunos podem comparar e ordenar frações; e pode ser explorada também a soma dos termos de uma progressão geométrica que comumente são trabalhadas no primeiro ano do ensino médio.

Em sala de aula as propostas didáticas são, nos dois casos, a apresentação do problema, encenação do problema pelos alunos e apresentação dos paradoxos de Zenão, respeitando, é claro, o nível cognitivo de cada grupo. Cabe também uma discussão de infinito atual e potencial.

Os pitagóricos pensavam em espaço constituído de pontos e o tempo de instantes, mas a doutrina pitagórica não era a única na época. Neste contexto que Zenão (ou Zeno) criou quatro paradoxos sobre tempo e movimento que provavelmente causaram grande discussão e chegaram ao nosso conhecimento através de Aristóteles e outros filósofos. O primeiro paradoxo, a dicotomia, que é similar a atividade enunciada, diz que, para um objeto percorrer uma dada distância antes deve percorrer a metade dessa distância e antes disso um quarto da distância, antes disso um oitavo da distância e assim sucessivamente. Como existe uma infinidade de subdivisões e um móvel deveria percorrer esta coleção infinita, o movimento seria impossível. O segundo paradoxo, Aquiles, já foi enunciado neste texto. Para Boyer (2001), “a Dicotomia e o Aquiles argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo”. Zenão mostrou que se os conceitos de contínuo e infinita divisão forem aplicados ao movimento de um corpo, então este torna-se impossível. O terceiro paradoxo, a flecha, argumentava que um objeto em vôo sempre ocupa o espaço correspondente a si mesmo, no entanto aquilo que ocupa um espaço igual a si mesmo nunca esta em movimento. A conclusão absurda é que a flecha em vôo sempre esta parada e logo o movimento não existe.

O estádio, quarto paradoxo, pode ser descrito assim: sejam A_1, A_2, A_3, A_4 corpos de igual tamanho, em repouso. Sejam B_1, B_2, B_3, B_4 , corpos do mesmo tamanho que A , que se movem para a direita de modo que cada B passa por um A num instante, menor intervalo de tempo. Sejam C_1, C_2, C_3, C_4 também do mesmo tamanho que A e B , que movem-se para esquerda em relação a A , de modo que C passa por A num instante de tempo.

Então, passado um único instante as posições serão:

		A_1	A_2	A_3	A_4		
			B_1	B_2	B_3	B_4	
C_1	C_2	C_3	C_4				

Figura 1.1

Percebe-se que C_1 terá passado por dois de B , logo o instante não pode ser o intervalo mínimo.

O paradoxo da flecha reflete a impossibilidade de movimento se o espaço e o tempo

forem compostos de partes indivisíveis. Zenão mostra que o movimento da flecha é uma ilusão, pois ela está sempre parada. No Estádio, ele mostra que o intervalo de tempo que se considera não pode ser mínimo. Segundo Boyer (2001), “a Flecha e o Estádio, de outro lado, argumentam que também é impossível, sob a hipótese contrária — de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis”.

3.2 ATIVIDADE 2: Hotel de Hilbert

Considere um hotel, com infinitos quartos, todos ocupados. O que fazer se chegar mais um hóspede? Há uma maneira de acomodá-lo? E se chegar um ônibus com um número infinito de passageiros desejando se hospedar neste mesmo hotel? E por fim, se chegarem infinitos ônibus cada um com infinitos passageiros?



Figura 2.1: Hotel de Hilbert

Considere que no Hotel de Hilbert, os quartos são numerados pelos números naturais $N = 0, 1, 2, 3, \dots$. Então, chegando um novo cliente e o recepcionista responde: “sem problemas, pode ir ao quarto 0. Pedirei ao hóspede do quarto 0 que vá para o quarto 1; o do quarto 1 para o quarto 2, e assim por diante”. É claro que a recepção dispõe de um aparelho que comunica todos os hóspedes simultaneamente e solicita que o cliente do quarto n passe para o quarto $n + 1$.

Pouco tempo depois, chega um ônibus, com uma quantidade infinita de novos clientes querendo passar a noite no Hotel. O recepcionista responde: “sem problemas” e usa seu comunicador para pedir que o hóspede de cada quarto n vá para o quarto $2n$. Informa ao motorista do ônibus que o passageiro número i pode ir para o quarto $2i + 1$ (que está de fato vago, pois todos os quarto ímpares foram liberados).

Por fim, se chegar uma infinidade de ônibus, cada um trazendo a bordo infinitos passageiros, o recepcionista responde novamente: “sem problemas, eu os acomodo aqui”. Então, usa seu comunicador e solicita ao hóspede do quarto i que vá para o quarto $2i + 1$

(o que libera todos os quartos de número par), e dá a seguinte instrução ao grupo de ônibus: o passageiro i do veículo j deve ocupar o quarto:

$$2^{i+j}(2j + 1)$$

Tudo fica bem e, em hipótese nenhuma, dois viajantes serão acomodados num mesmo quarto.

As propriedades de “coleções de coisas” infinitas são bem diferentes das “coleções de coisas” finitas. Num hotel real (com número de quartos maior que 1), o número de quartos com numeração ímpar é claramente menor que o número total de quartos. Já no “Grand Hotel de Hilbert”, com seus infinitos quartos, a quantidade de quartos com numeração ímpar é a mesma quantidade total de quartos. Matematicamente falando, a cardinalidade do subconjunto dos quartos com numeração ímpar é a mesma cardinalidade do conjunto de todos os quartos. De fato, conjuntos infinitos são caracterizados como conjuntos que possuem um subconjunto próprio da mesma cardinalidade. Para conjuntos contáveis, esta cardinalidade é denominada \aleph_0 (álefe zero).

3.3 ATIVIDADE 3: A lâmpada de Thompson

Uma lâmpada é acesa por um minuto e se apaga e depois de meio minuto ela se acende, decorrido um quarto de minuto ela se apaga novamente e, depois de um oitavo de minuto, ela se acende, após um dezesseis avos de minuto ela se apaga, e assim sucessivamente. Quando se passarem dois minutos, a lâmpada estará acesa ou apagada?

Podemos imaginar que uma lâmpada normal não suportaria piscar tão rápido, em intervalos de tempo cada vez menores, e terminaria queimando! Mas digamos que esta lâmpada suporte este acende e apaga, podemos imaginar que ao se aproximar de dois minutos (que é a soma de todos os intervalos tempo $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$) a lâmpada estaria piscando tão rápido que teríamos a impressão que a luz está sempre acesa.

Exatamente dois minutos após o início do movimento, não é possível dizer se a lâmpada estará acesa ou apagada.

3.4 ATIVIDADE 4: Trombeta de Gabriel

A Trombeta de Gabriel, ou a Trombeta do Anjo Gabriel, ou ainda a Trombeta de Torricelli é uma superfície na forma de um funil (ou de trombeta). Ela começa larga e vai

afinando rapidamente, mas nunca fica fechada – ou seja, segue até o infinito. A superfície da trombeta é infinita, mas o volume que ela envolve não é infinito. Se quisermos pintar a superfície interna da trombeta, então precisamos de uma quantidade infinita de tinta?



Figura 4.1: Trombeta de Gabriel

Podemos imaginar pegar uma quantidade finita de tinta, correspondendo ao volume da trombeta, e jogar esta tinta na trombeta, deixando escorrer. Será toda a área coberta? A resposta é não! Esta ideia equivocada pode surgir na discussão em sala de aula, mas com o professor pode fazer uma analogia simples e esclarecer melhor a questão.

Usando um tablete cilíndrico de massinha de modelar podemos esticar mais e mais, ou seja, aumentar sua superfície e seu volume inicial se mantêm constante. Então a ideia de uma superfície infinita determinar um volume finito não é tão difícil de imaginar.

A Trombeta de Gabriel é uma superfície de revolução que se obtém girando a curva $y = \frac{1}{x}$, com $x \in [1, \infty)$, em torno do eixo das abscissas. Usando ferramentas do Cálculo temos que o volume da superfície é dado por:

$$V = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx.$$

Portanto área infinita.

Evangelista Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileu, foi o primeiro a pensar neste problema, que ele achou tão extraordinário que a princípio imaginou que tivesse feito alguma coisa errada. Outros filósofos e matemáticos ficaram tão horrorizados com os paradoxos que surgiam com o infinito, que chegaram a propor o banimento da ideia.

3.5 ATIVIDADE 5: Subconjuntos dos números naturais

Qual conjunto é “maior” (tem mais elementos): o dos números naturais, o conjunto dos números pares ou o conjunto dos quadrados perfeitos?

Como já vimos no capítulo I, é possível estabelecer uma correspondência bijetiva entre estes conjuntos, mesmo sendo os pares e os quadrados subconjuntos dos números naturais. Logo eles têm a mesma cardinalidade. Para fortalecer este conceito segue o *Corolário 1.1*:

Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$, de X sobre uma parte própria $Y \subset X$.

3.6 ATIVIDADE 6: Números primos

Qual o maior número primo?

O Teorema de Euclides afirma que a sequência de números primos é infinita. Prova: Sejam $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ a sequência dos números primos. Digamos que essa sequência seja finita e termine em p_n . Seja $p = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$. Sabemos que todo número maior do que 1 ou é primo ou é composto, o número p definido acima não é divisível por nenhum dos p_i conhecidos, pois tal divisão teria resto 1. Logo, temos um número p maior do que todos os primos conhecidos e esse número p ou é primo ou é composto. Se p for primo descobrimos um número que não estava na sequência dada e portanto a sequência dos primos não é finita. Se p for composto ele então é produto de primos, e como vimos esses fatores primos não podem ser nenhum dos números da sequência original e novamente achamos primos que não estavam na sequência original provando a infinidade dos primos.

cqd

Como exemplo imagine que todos os primos conhecidos fossem 2, 3 e 5. $p = 2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$. O número 31 não é divisível nem por 2, nem por 3 e nem por 5 pois tal divisão teria resto 1. Logo 31 ou é primo ou composto. E facilmente verificamos que 31 é primo.

Sejam agora todos os primos conhecidos 2, 3, 5, 7, 11, 13. $p = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031$. Usando o método das divisões sucessivas chegamos a $30031 = 59 \times 509$, portanto, achamos dois primos (59 e 509) que não estavam na sequência original. Em Janeiro de 2013, foi divulgado o maior número primo já calculado. Tem 17.425.170 dígitos que, se fosse escrito por extenso, ocuparia 3,4 mil páginas impressas com 5 mil caracteres cada. É o número $2^{57885161} - 1$. Foi descoberto por Curtis Cooper, da Universidade Central do Missouri em Warrensburg, Estados Unidos, como parte do "Great Internet Mersenne Prime Search" (GIMPS), um projeto internacional de computação compartilhada desenhado para encontrar números primos de Mersenne ¹.

Uma possibilidade de trabalho em sala de aula com o conjunto de números primos é a exploração da demonstração. Por outro, aliando o conhecimento ao lado lúdico, o professor pode uma competição na turma para encontrar o maior número primo.

3.7 ATIVIDADE 7: Infinitos gangsters

- a) *Uma "gang" tem infinitos bandidos, e cada um desses meliantes tem um único inimigo no interior da "gang", que ele quer matar. Prove que é possível reunir uma quantidade infinita de bandidos desta "gang" sem que haja risco de que um bandido mate o outro durante a reunião.*
- b) *Se cada bandido tiver um número finito, mas indefinido, de inimigos (um bandido pode ter 2 inimigos, um outro somente 1, um terceiro pode ter 20 e assim por diante), será possível promover uma reunião com infinitos "gangsters" sem o risco de derramamento de sangue?*

Seja $G = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$ um subconjunto enumerável infinito do conjunto dos bandidos da "gang". Provaremos que é possível escolher $X \subset G$ sem que haja derramamento de sangue em X . Inicialmente vamos definir para cada $i \in N$ os seguintes conjuntos:

$$H_i = \{B_j \in G; j \neq i; B_j \text{ quer matar } B_i\}$$

ou seja, H_i é o conjunto de todos os marginais em G que querem matar B_i .

Dividiremos o problema em dois casos:

¹Número de Mersenne é todo número natural da forma $M_n = 2^n - 1$, onde n é um número natural. Há mersennes não-primos e primos.

- 1º Caso: Existe i tal que H_i é infinito. Neste caso podemos fazer $X = H_i$, e não há risco de mortes em H pois todos nesse grupo odeiam apenas o bandido B_i .
- Não existe H_i infinito. Nesse caso, escolha B_i para pertencer a X . Exclua de os seguintes bandidos: B_1 , o inimigo de B_1 e o conjunto H_1 . O conjunto que resta de G a partir dessas exclusões, que chamaremos de G_1 , é infinito. Agora é só repetir o processo com G_1 no lugar de G .

b) A resposta é não. Mostraremos um exemplo de uma "gang" onde não é possível promover uma reunião com infinitos bandidos sem derramamento de sangue. Nossa "gang" será o conjunto: $G = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$. Para cada $i \in \mathbb{N}, i > 1$, suponha que o bandido B_i queira matar $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{i-1}$ (B_1 é bonzinho e não quer matar ninguém).

É fácil ver que nessa situação cada bandido tem um número finito de inimigos, e que em qualquer reunião com dois bandidos um deles vai querer assassinar o outro.

3.8 ATIVIDADE 8: Poeira de Cantor

Começando com um segmento de tamanho 1, dividimo-lo em três partes iguais e retiramos o interior da parte central, obtendo dois segmentos de comprimento $1/3$. Repetimos agora essa operação em cada um desses segmentos e assim por diante. Sendo S_n a soma dos comprimentos dos intervalos que restaram depois de n dessas operações, determine o seu valor.

Começamos com o segmento que representa o intervalo fechado $[0,1]$. Dividimos este segmento em três partes e jogamos fora o pedaço do meio, ficando com os outros dois terços extremos. Repetimos depois o mesmo procedimento com cada um dos segmentos restantes, sempre jogando fora o terço médio de cada divisão. Os quatro segmentos restantes sofrerão o mesmo processo de divisão e retirada do terço médio, dando origem a oito segmentos cada vez menores. Este processo deve ser repetido eternamente ("ad infinitum"), sempre dividindo cada segmento restante por três e dispensando o terço médio de cada divisão. O que sobra no limite é o *Conjunto Ternário de Cantor*. Se examinarmos quais os pontos que restam após o processo infinito de construção do conjunto, observamos que os pontos extremos dos diversos segmentos, obtidos em qualquer etapa da construção do Conjunto de Cantor, estarão sempre presentes até o fim. Os pontos $\{0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9 \text{ etc}\}$ pertencem, todos eles, ao conjunto final. Se numerarmos cada etapa da construção do conjunto por $j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, observamos que são criados (para

sempre), no conjunto, 2 pontos na j -ésima etapa. Isso, ao contrário do que poderíamos pensar no início, faz com que o Conjunto de Cantor tenha infinitos de pontos. A figura abaixo que descreve várias etapas da construção.

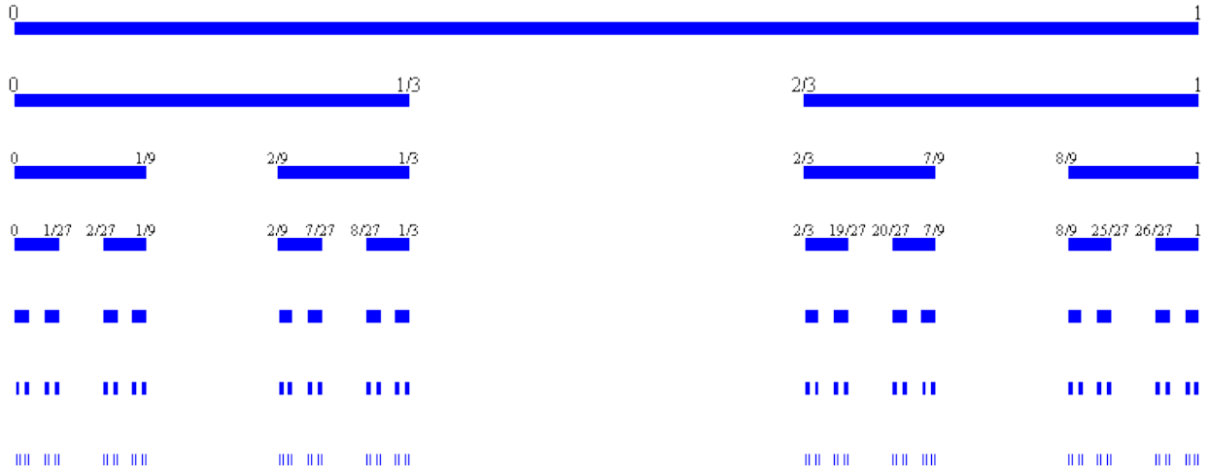


Figura 8.1: Poeira de Cantor

$$I_0 = [0, 1]$$

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

...

É possível mostrar que o "tamanho" do Conjunto da Cantor, ou seja, seu número de pontos matemáticos ou sua cardinalidade é a mesma do segmento $[0,1]$ (e, portanto, de toda a reta), apesar do tanto que se tira do segmento durante a construção do conjunto. Para isso, vamos começar observando que todo número, em qualquer base, tem uma (na verdade, pelo menos uma) escrita infinita. Por exemplo: o número 1 pode ser escrito, na base dez, como 1,0000... ou 0,9999... que são duas maneiras de escrever a mesma quantidade igual a 1, o número 37,8694657 pode ser escrito, na base dez, como 37,86946570000... ou como 37,869465699999... . As dízimas periódicas só tem uma escrita infinita possível, por exemplo $1/3 = 0,333...$ Já os racionais tem apenas uma única escrita numérica possível, infinita, é claro. Por exemplo, na base dez temos, $\pi = 3,141592...$, $e = 2,7182818284590.....$ $\sqrt{2} = 1.414213562373...$ etc. Com isso em mente, vamos rotular os segmentos usados na construção do conjunto de Cantor. Começando pelo primeiro nível da construção, o intervalo $[0,1]$ propriamente dito que será chamado de "0". Nos níveis subsequentes, chamaremos, sempre, aos intervalos de ordem ímpar de "0" e, aos de ordem par, de "1". Desta maneira estaremos associando a cada sub-intervalo utilizado na construção do conjunto de Cantor, um número real entre zero e um, escrito na base 2 (já

que só utilizamos os algarismos 0 e 1 para escrevê-lo).

Se pensarmos agora no conjunto de Cantor pronto, já completamente construído, isto é, o limite ao infinito do processo de divisão ternária, previamente elaborado, podemos observar que primeiro: cada extremo de cada segmento construído em qualquer nível permanece fixo por toda a construção, pertencendo, portanto, ao conjunto (final) de Cantor.

Lá estarão, por exemplo, o 0 , o $1/3$, o $2/3$, o 1 , o $2/9$, o $7/27$, etc. Na verdade, o conjunto de Cantor é composto de todos esses extremos remanescentes no processo infinito de sua construção e, portanto, tem pelo menos um número infinito de elementos; mas isso ainda não é tudo o que queremos.

Segundo: a associação feita acima entre cada segmento da construção do conjunto de Cantor e seu rótulo (0 ou 1) cria uma infinidade de sequências infinitas do tipo: 0, (ou 0 ou 1) (ou 0 ou 1)..... onde o dígito 0 ou 1 dependerá da escolha entre esquerda ou direita, feita na passagem dos níveis durante a construção do conjunto. Essas sequências apontam, precisamente, para os pontos remanescentes do processo de divisão ternária, isto é, para os elementos do próprio conjunto de Cantor.

Terceiro: Finalmente observamos que as sequências infinitas criadas são de fato as escritas infinitas na base dois dos números reais entre zero um. Esta correspondência é biunívoca, pois qualquer sequência do tipo 0, (ou 0 ou 1), (ou 0 ou 1) representa (isto é, escreve na base dois) um único real e , por outro lado, qualquer número real entre zero e um é representado, isto é , tem sua escrita infinita na base dois dada por uma seqüência do tipo 0, (ou 0 ou 1) (ou 0 ou 1).

Usando muita criatividade, Deledecq em SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL (1997), apresenta conto que explica e contextualiza muito bem este problema. Ele se passa num planeta chamado Tri no qual, numa escola bem singular, os encarregados da limpeza descobrem o conjunto de Cantor.

“Nas escolas de Gullicantor, uma província de Tri, a educação era severa: o pior trabalho reservado às crianças consistia em limpar as barras de cobre utilizadas na decoração. As regras de limpeza eram estritas: devia-se limpar, em primeiro lugar, o terço central de cada barra, depois o terço central de cada terço restante e assim por diante. Indefinidamente.

Os matemáticos de Tri haviam demonstrado que que a limpeza de cada barra, assim, levaria um tempo infinito, desde que a duração da limpeza de cada barra não dependesse de nada além de seu comprimento.

Os jovens gullicantorianos, porém, perguntavam-se: Como saber se toda a barra, que tem comprimento 1, ficará limpa ao final desse processo? Os matemáticos do império explicavam aos meninos que, após limpar o terço central, eles limpavam um terço dos dois terços restantes, e assim por diante. O comprimento que eles limpavam, portanto, era dado por:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{27} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots\right).$$

Mas as parcelas entre parêntese, prosseguiram os matemáticos, formam uma progressão geométrica de razão $2/3$. Sabemos que a soma $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots$ vale sempre $1/(1-a)$. Aqui, “a” é igual a $2/3$ e a soma assim vale $1/(1 - 2/3)$, que é igual 3. Como a soma está multiplicada por $1/3$, obtém-se 1. Ao fim do processo, portanto, a barra será limpa por inteiro, pois o comprimento do trecho limpo é igual ao comprimento total da barra. Mas será mesmo?

Como os habitantes de Tri só tem três dedos, escrevem todos os números em base três, os inteiros, por exemplo, ficam 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, \dots também os números fracionários, expressos em base 3, são formados pelos algarismos 0, 1 e 2.

Utilizando os números fracionários (menores que 1) como coordenadas dos pontos da barra, percebe-se que somente serão limpos aqueles pontos que apresentam algum algarismo 1 em sua expansão. Os números que só contem 0 e 2 indicam os pontos que nunca serão limpos, como 0,2020202, 0,100200200 e muitos outros. O conjunto destes pontos, chamado de poeira de Cantor, permanecerá sujo. Mas quantos pontos desse tipo existem?

Para escrever as coordenadas dos pontos não limpos, necessita-se somente de algarismos 0 e 2, lembra uma matemática. Imaginemos agora, continua ela, que, como os habitantes do planeta Bis, nós só temos dois dedos e só sabemos calcular em base 2. Com dois algarismos, poderíamos expressar todos os números e, em particular, escrever coordenadas para todos os pontos da barra. Quando escrevemos um número fracionário menor que 1, com apenas dois algarismos, podemos com ele indicar diferentes pontos da barra, dependendo da maneira como interpretamos a escrita: 1 - se escolhermos escrita em base 2, obtemos todos os pontos da barra. 2 - se escolhermos a escrita em base 3, obtemos todos os pontos não limpos. O conjunto dos pontos não limpos, portanto, está em bijeção com o conjunto de todos os pontos da barra. Parece que não limpou nada! Tanto trabalho, exclamam em coro as crianças, e não sabemos nem mesmo se limpamos a barra inteira ou se está inteiramente suja...”

3.9 ATIVIDADE 9: Triângulo de Sierpinski

Considerando as figuras abaixo, qual a quantidade de triângulos pretos após repetirmos o processo n vezes?

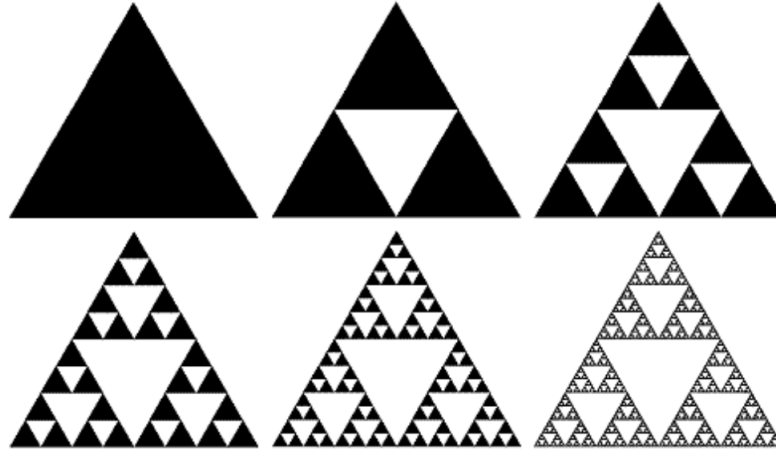


Figura 9.1: Triângulo de Sierpinski

Tomemos um triângulo equilátero de lado l e área A . Vamos determinar os pontos médios de cada lado e unir esses pontos, obtendo assim, um novo triângulo equilátero de lado $\frac{l}{2}$. Assim dividimos o triângulo inicial em quatro triângulos congruentes, sendo cada um deles $\frac{1}{4}$ do triângulo inicial.

Retira-se o triângulo central e repetem-se, em cada um dos triângulos restantes, as mesmas construções, obtendo-se os pontos médios e unindo tais pontos de modo a formar novos triângulos equiláteros, depois retirando os triângulos centrais. Assim, na segunda iteração teremos 9 triângulos, de lado $\frac{l}{4}$. Este processo se repete indefinidamente, sendo que, a cada nova iteração, teremos uma figura com triângulos cada vez menores.

Nível	0	1	2	3	...	N
Nº de triângulos	1	3	9	27	...	3^N
Área de cada triângulo	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{16}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{64}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{256}$...	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^{N+1}}$
Área total	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l^23\sqrt{3}}{16}$	$\frac{l^29\sqrt{3}}{64}$	$\frac{l^227\sqrt{3}}{256}$...	$\frac{l^23^N\sqrt{3}}{4^{N+1}}$

Tabela 9.1: Áreas dos Triângulos

Os conteúdos abordados são relacionados à Geometria Plana e Sequências Numéricas. Cabe aqui, como proposta didática, o estudo da geometria fractal aliado interdisciplinarmente a Artes.

3.10 ATIVIDADE 10: Áreas dos quadrados

Considere a sequência de figuras, na qual a área do primeiro quadrado é S . Qual é a soma de todas as áreas sombreadas da sequência?

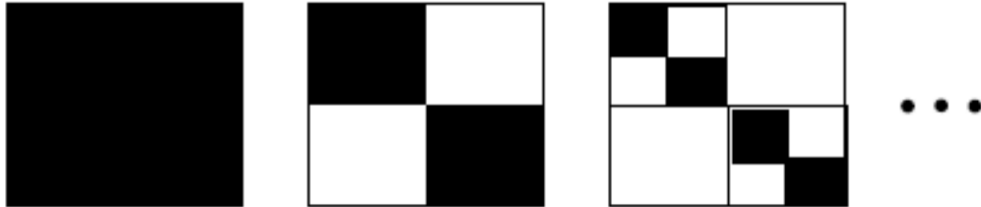


Figura 10.1: Quadrados

Esta questão é análoga à anterior.

Basta fazer $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$.

Percebemos que se trata de uma soma dos termos de uma PG infinita. A fórmula da soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica a_n de razão $q \neq 1$ é

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Prova:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Multiplicando ambos os membros por q , temos:

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1q^n$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \rightarrow \infty$. Como nesse caso $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \frac{1 - 0}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \frac{1}{1 - q}$$

cqd

3.11 ATIVIDADE 11: Sequência de Grandi

Calcule a soma $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Bem, se adicionarmos parênteses à série desta maneira:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

o resultado será igual a **zero**.

Por outro lado, ao adicionarmos os parênteses de uma maneira um pouquinho diferente e somarmos os seus conteúdos

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$$

então a resposta será igual a **1**.

Porém, existe ainda uma terceira resposta, que é a mais surpreendente: digamos que o resultado do cálculo da série infinita seja um número representado pela letra “**S**”. Assim, se fizermos a conta $1 - S$ ficaria desta forma:

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

Contudo, se eliminarmos os parênteses, o sinal de subtração faz com que todos os sinais sejam invertidos, então a conta passa a ser:

$$1 - S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

que é exatamente igual à série infinita de Grandi, ou seja, igual a S novamente. No entanto, reescrevendo o cálculo, temos que:

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

que é o mesmo que $2S = 1$.

Ou seja, o resultado da soma e da subtração infinita do número 1, de acordo com esta terceira solução é igual a $1/2$.

3.12 ATIVIDADE 12: Quique de bola

Larga-se uma bola de uma altura de 5m. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas $4/9$ da altura anterior de 5m. Determine:

a) *a distância total percorrida pela bola*

A bola percorre descendo 5 m, depois sobe $\frac{4}{9} \times 5 \text{ m} = \frac{20}{9} \text{ m}$ e desce esta mesma distância; sobe e desce $\frac{4}{9} \times \frac{20}{9} \text{ m} = \frac{80}{81} \text{ m}$ e assim, sucessivamente.

Construindo a sequência, temos: $\frac{20}{9}, \frac{80}{81}, \frac{320}{729}, \dots$. Observamos que é uma progressão geométrica de razão $\frac{4}{9}$ e que o n -ésimo termo é:

$$a_n = \frac{20}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

A soma dos termos desta PG é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \frac{1}{1 - q} = \frac{20}{9} \times \frac{1}{5/9} = 4 \text{ m.}$$

Logo, a distância total percorrida pela bola é $5 \text{ m} + 2 \times 4 \text{ m} = 13 \text{ m}$

3.13 ATIVIDADE 13: Linha Poligonal

Na figura 13.1 temos uma linha poligonal, de lados ora perpendiculares a AB, ora perpendiculares a AC. Sendo a e b, respectivamente, os dois primeiros lados da poligonal, pede-se determinar:

a) *O comprimento da mesma*

b) *O comprimento do n-ésimo lado da poligonal*

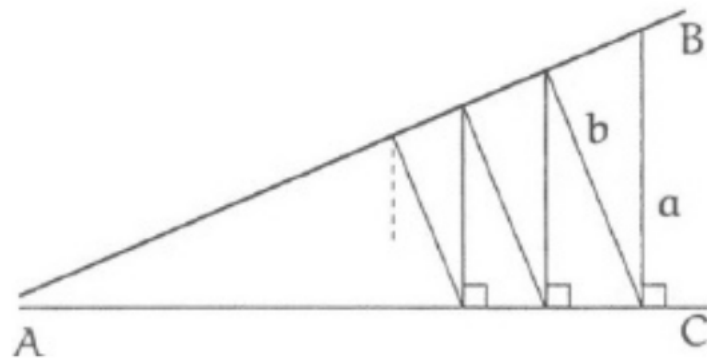


Figura 13.1

Explorando a figura temos:

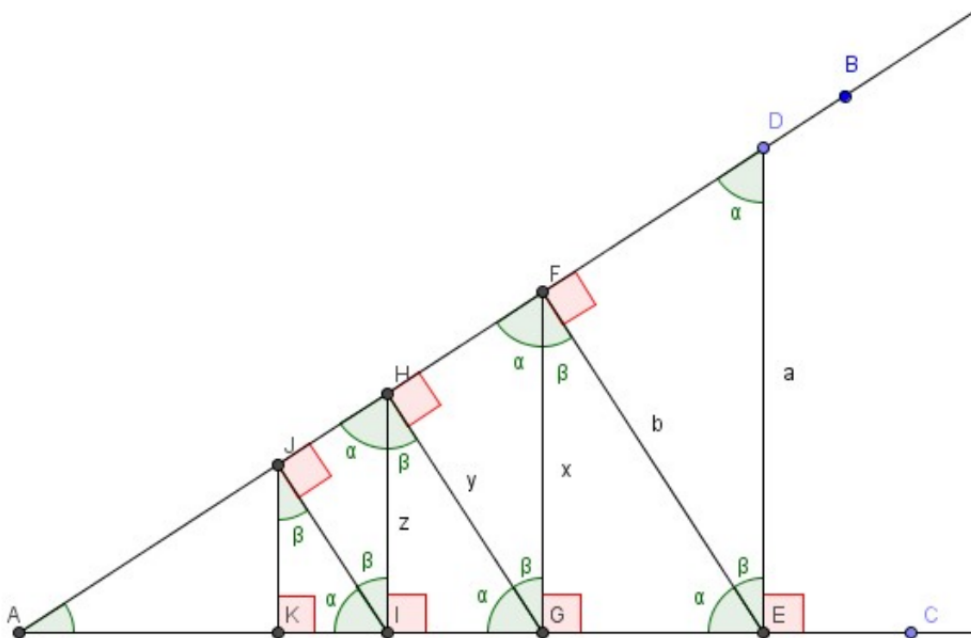


Figura 13.2

Assim, temos que todos os triângulos são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, e, conseqüentemente, os lados correspondentes de dois pares quaisquer de triângulos estão em proporção.

$$b = a \times \frac{b}{a}$$

Aplicando proporção em DEF e EFG para encontrar x:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{x} \implies x = \frac{b^2}{a} = b \times \frac{b}{a}$$

Aplicando proporção em EFG e GHI para encontrar y:

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} \implies \frac{b}{\frac{b^2}{a}} = \frac{b^2}{\frac{a}{y}} \implies y = \frac{b^3}{a^2} = \frac{b^2}{a} \times \frac{b}{a} = x \times \frac{b}{a}$$

Aplicando proporção em GHI e HIJ para encontrar z:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} \implies \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{b^3}{a^2}} = \frac{\frac{b^3}{a^2}}{z} \implies z = \frac{b^4}{a^3} = \frac{b^3}{a^2} \times \frac{b}{a} = y \times \frac{b}{a}$$

Temos, então, que os lados da linha poligonal estão em PG de termo inicial igual a a e razão igual $\frac{b}{a}$.

- a) Como temos uma PG cujo módulo da razão é menor do que um, afinal $\frac{b}{a} < 1$, então, temos que a soma dos infinitos termos dessa PG é igual a:

$$S_{\infty} = a_1 \frac{1}{1 - q} = \frac{a}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a}{\frac{a-b}{a}} = \frac{a^2}{a-b}$$

,

sendo este o comprimento da linha poligonal.

- b) $a_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, tendendo a **zero**.

3.14 ATIVIDADE 14: Cara ou coroa

Imagine que um cassino esteja oferecendo um novo jogo. O jogo começa com um real no banco de apostas. A pessoa joga uma moeda. Se sair cara, o que tem no banco de apostas é dobrado, se sair coroa, o jogo termina e o jogador ganha o que tiver no banco de apostas.

Quanto você pagaria para entrar neste jogo? Ou quanto seria justo para o cassino cobrar? Se você souber um pouco de matemática já deve ter ouvido falar em “esperança matemática”, ou seja, em um jogo envolvendo probabilidade do ganho esperado. E qual o ganho esperado neste jogo?

A maioria provavelmente apostaria R\$ 5,00, talvez um pouco mais, mas o que a matemática diz é: “aposte o que você tiver, a esperança de ganho é infinito”. O jogador tem probabilidade de 50% de ganhar R\$ 1,00, 25% de probabilidade de ganhar R\$ 2,00, 12,5% de ganhar R\$ 4,00, e assim por diante. O valor esperado é a soma da probabilidade multiplicada pelo valor do prêmio, assim:

$$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Esta é uma soma de infinitas frações $\frac{1}{2}$, e o resultado é infinito. Ou seja, matematicamente falando, a esperança matemática de ganho é infinita. Mas, paradoxalmente, muita pouca gente está disposta a pagar alguma coisa a mais que R\$ 20,00 para jogar este jogo.

Obviamente, estamos falando de um cassino hipotético, capaz de colocar quanto dinheiro for necessário no banco de apostas. Na prática, haverá um limite para o prêmio máximo, e também para o número máximo de jogadas (ninguém vai ficar lançando uma moeda infinitas vezes). Talvez o paradoxo surja daí: ninguém espera ou consegue entender um cassino capaz de cobrir um prêmio infinito ou uma série infinita de caras em uma série infinita de lances de moeda.

3.15 ATIVIDADE 15: Sequência de Fibonacci

Imagine-se que temos um recém-nascido par de coelhos, macho e fêmea, que podem acasalar no final do primeiro mês, procriando, a partir do fim do segundo mês, um novo par, macho e fêmea, por mês. Cada um destes novos pares procriará também um par por mês, a partir do segundo mês. Se nenhum coelho morrer, quantos pares de coelhos teremos no final de um ano? Qual o termo geral desta sequência?

Começamos com um par, no primeiro dia do primeiro mês.

No primeiro dia do segundo mês, mantém-se esse par, porque ainda não procriou.

No início do terceiro mês, há dois pares.

No início do quarto mês, o primeiro par volta a procriar, ficando três pares.

No quinto mês, o primeiro e o segundo par procriam, ficando cinco pares.

No início do sexto mês, os três primeiros pares procriam, ficando oito.

No sétimo mês, procriam cinco pares, ficando treze.

No oitavo mês, procriam oito pares, ficando vinte e um.

No nono mês, procriam treze pares, ficando trinta e quatro.

No início do décimo mês, procriaram vinte e um pares, ficando cinquenta e cinco.

No início do décimo primeiro mês, ficam 89 pares, porque procriaram trinta e quatro.

No início do décimo segundo mês, ficam 144, porque procriaram 89.

Cada termo desta sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$ pode ser obtido pela fórmula de recorrência:

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n > 2$$

Para além das sequências elementares, como a dos números naturais, dos inteiros etc. É possível gerar incontáveis sequências numéricas. Algumas sequências, por diversos motivos, tornaram-se famosas como, por exemplo, a sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci, aplicada aos lados de quadrados, gera um conjunto de retângulos e espirais: Tendo a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... como medida dos lados dos quadrados, vamos encostando um novo quadrado a dois lados dos dois quadrados anteriores, ficando assim cada novo quadrado com um lado que é igual à soma dos lados dos dois anteriores, obedecendo à regra da formação da sequência de Fibonacci. Esta sequência permite depois, se inscrevermos um quarto de círculo em cada quadrado, desenhar a espiral que se encontra espalhada pela Natureza, seja em formas minerais, vegetais ou animais.

Uma característica da sequência de Fibonacci é que as aproximações para o irracional φ calculam-se quando dividimos um número da sequência pelo número anterior, sendo que este quociente vai estabilizando à medida que avançamos na sequência, ou seja, o φ é o limite da razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{5}{3} = 1,666, \quad \frac{8}{5} = 1,6, \quad \frac{13}{8} = 1,625, \quad \frac{21}{13} = 1,61538, \quad \dots$$

O exato valor de φ pode ser representado por $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Tem o valor aproximado de 1,618034, e chama-se *número dourado*, *secção dourada* ou *número de ouro*.

Como proposta, pode-se construir sequências inspiradas na sequência de Fibonacci. Se considerarmos a 1 e a 2 quaisquer números e mantivermos a fórmula ou se, ao invés disso, considerarmos uma terna inicial a_1 , a_2 e a_3 e, a partir daí, o próximo termo ser a soma dos três termos anteriores, as possibilidades são infinitas.

3.16 ATIVIDADE 16: A Curva de Koch

A curva de Koch é obtida em estágios pelo seguinte processo:

- i) *No estágio 0, ela é um triângulo de lado 1.*
- ii) *O estágio $n+1$ é obtido a partir do estágio n , dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo*

então a parte central. Sendo P_n e A_n respectivamente o perímetro e a área do n -ésimo estágio da curva de Koch, determine:

a) P_n

b) A_n

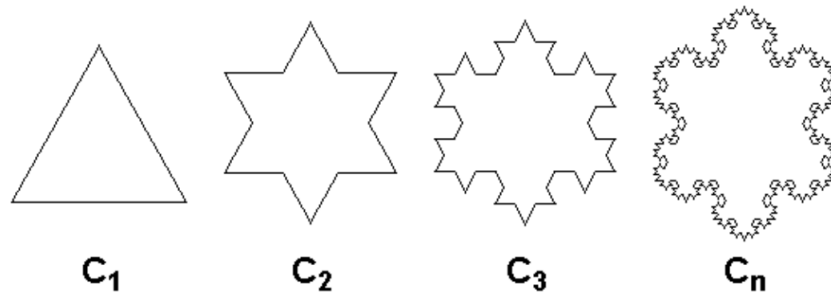


Figura 16.1: Curva de Koch

Para ser mais preciso, o floco de neve é constituído por três curvas de Koch, cada uma das quais corresponde a um dos lados do triângulo equilátero de partida. Esta curva tem algumas propriedades notáveis. Apesar desta curva ter comprimento infinito, ela delimita uma área finita. Especificamente, se a área do triângulo inicial é igual a 1 u.a., área do floco de neve 1,6 u.a.

a) Vamos calcular o perímetro do floco, observemos a tabela 17.1:

Estágio	Nº de lados do floco de neve	Comprimento de cada lado do floco de neve
0	$3 = 3 \times 4^0$	$1 = 3^0$
1	$12 = 3 \times 4^1$	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$
2	$48 = 3 \times 4^2$	$\frac{1}{9} = 3^{-2}$
3	$192 = 3 \times 4^3$	$\frac{1}{27} = 3^{-3}$
4	$768 = 3 \times 4^4$	$\frac{1}{81} = 3^{-4}$
\vdots	\vdots	\vdots
n	3×4^n	3^{-n}

Tabela 16.1: Medidas do floco de neve de Koch

Logo, o perímetro P_n do floco de neve de Koch é dado por:

$$P_n = 3 \times 4^n \times 3^{-n} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Que tende a infinito quando n tende a infinito.

- b) A área do polígono em cada passo obtém-se adicionando à área do polígono do passo anterior à área do triângulo equilátero cujo lado é $\frac{1}{3}$ do anterior, multiplicada tantas vezes quantas o número de lados do polígono anterior.

A_n	1
A_1	$1 + \frac{1}{9} \times 3 = 1 + \frac{1}{3}$
A_2	$1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \times 4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}$
\vdots	\vdots
A_{n+1}	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$

Tabela 16.2

Pela semelhança de figuras planas sabe-se que se o lado de um polígono sofre uma redução de razão $\frac{1}{3}$, a área sofre uma redução $\frac{1}{9}$.

Então $A_{n+1} = 1 + S_n$. Fazendo

$$S_n = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \left(\frac{4}{9}\right)}$$

e calculando o limite de S_n quando n tende para infinito, tem-se $S_n = \frac{3}{5}$.

A área do floco de neve é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{3}{5} = 1,6$$

Este problema pode ser trabalhado em sala de aula em Geometria Plana, em Sequências Numéricas, entre outros conteúdos curriculares. Além disso, pode ser trabalhado interdisciplinarmente com Artes. As propostas didáticas seriam: a construção das várias etapas da curva de Koch para exposição no ambiente escolar e o cálculo dos perímetros e respectivas áreas.

3.17 ATIVIDADE 17: Jogos de dardos

Suponha que você tem um alvo, um dardo, e 100% de certeza que irá acertar o alvo em alguma parte. Agora pense na ponta do dardo, o ponto matemático exato da sua extremidade, e pense em um ponto matemático no alvo. A pergunta é, qual a probabilidade que aquele ponto tem de ser atingido pelo dardo?

Podemos começar supondo que há uma chance maior que zero daquele ponto ser atingido pelo dardo. Só que aí começam os problemas. Se há uma chance maior que zero de um ponto ser atingido, então há uma chance maior que zero para todos os outros pontos, de que eles serão atingidos pelo dardo. Mas existem infinitos pontos no nosso alvo.

Se você somar as probabilidades de todos os pontos, vai chegar à conclusão de que o alvo todo tem uma probabilidade infinita de ser atingido, o que não faz sentido, já que esta probabilidade não pode ser maior que 100%.

E o que acontece se imaginarmos que a probabilidade de um ponto ser atingido é zero? Se a probabilidade de acertar aquele ponto particular é zero, então ela é zero para todos os outros pontos, e se somarmos as probabilidades de todos os pontos para ter a probabilidade de acertar o alvo, ela é zero. Mas, temos certeza de que o alvo será atingido, como pode ser zero, então?

Considerações Finais

Este trabalho traz uma proposta de problemas e situações problemas que abordam o conceito de infinito. Sejam eles problemas clássicos inspirados nos paradoxos da antiguidade ou problemas desafiadores como os apresentados em Olimpíadas de Matemática, por exemplo, falam da teoria dos conjuntos, cardinalidade, continuidade, bijeção, limite entre outras noções.

É uma proposta que traz um novo olhar sobre o estudo da Matemática com o foco no desafio intelectual que se pode verificar nos enunciados criativos e pelo próprio caráter abstrato no trato de tudo relacionado ao Infinito.

Filósofos, matemáticos, físicos, teólogos, artistas, todos estes se debruçaram alguma vez sobre o assunto. Por séculos este tema tão controverso suscitou dúvidas e questões. Não se trata de uma simples questão ideológica, necessita de imaginação e reflexão, ir além do evidente. Dos paradoxos de Zenão à teoria dos conjuntos infinitos de Georg Cantor, da descoberta dos irracionais e dos incomensuráveis pelos pitagóricos ao desenvolvimento do Cálculo; da distinção entre infinito potencial e infinito atual, pensada por Aristóteles e que só ressurge no século XIX, todas estas descobertas surgem de um espírito de investigação, da (infinita) imaginação humana.

Referências

AMADEI, F. L.O Infinito: um obstáculo no estudo da Matemática. Dissertação (Mestrado em Suzano ano 2 no 2 out. 2010. Revista Interfaces issn: 2176-522757 Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2005.

BOYER, C B. Introdução à História da Matemática, 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

DEVLIN, Keith J.O gene da matemática/Keith Devlin; Tradução de Sergio Morais Rego.- 5a Ed. Rio de Janeiro: Record, 2005.

DIEGUEZ, Flávio. Georg Cantor e o álefe-zero: O homem que colocou o infinito no bolso. fonte : SUPERINTERESSANTE, março de 1994.

FOMIM, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. Círculos Matemáticos: a Experiência Russa. 1 ed. Rio de Janeiro: Impa,2012.

LIMA, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio Vol. 1, 2 e 3. Coleção do professor de Matemática, Rio de janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise; V.1. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional

de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

MORRIS, R.B. Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997.

OLIVEIRA, José Jackson. Sequência de Fibonacci: possibilidades de aplicações de aplicações no ensino básico. Dissertação de mestrado. Salvador, 2013.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito, uma história a contar. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Viseu. Revista Millenium, no 34, abril de 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10400.19/372>

SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL. As diferentes faces do Infinito. São Paulo, nº 15 Edição Especial. Editora Duetto Editorial, 2006.

SERRA, Isabel. Transmutações do infinito. Colóquio Internacional III, Lisboa, 2002.

STEWART, Ian. Em busca do infinito: uma historia da matemática dos primeiros números à teoria do caos. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.