UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ESTELA APARECIDA FERNANDES

GEOMETRIA, MODELAGEM E CÓDIGO DE BARRAS NA CONSTRUÇÃO DE LUMINÁRIAS.

SÃO CARLOS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ESTELA APARECIDA FERNANDES

GEOMETRIA, MODELAGEM E CÓDIGO DE BARRAS NA CONSTRUÇÃO DE LUMINÁRIAS.

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

	Fernandes, Estela Aparecida.
F363gm	Geometria, modelagem e código de barras na construção de luminárias / Estela Aparecida Fernandes. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
	84 f.
	Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.
	1. Matemática - estudo e ensino. 2. Sequência didática. 3. Luminárias. 4. Prismas. 5. Polígonos. I. Título.
	CDD: 510.7 (20ª)

ESTELA APARECIDA FERNANDES

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO – CONSTRUINDO LUMINÁRIAS

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

21 de março de 2013

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares
Universidade Federal de São Carlos

EXAMINADORES:

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
Universidade Estadual Paulista, UNESP/Rio Claro

Prof. Dr. Ivo Machado da Costa
Universidade Federal de São Carlos, UFSCar/São Carlos

Dedico este trabalho a duas pessoas muito especiais, minha mãe Zulmira, por estar ao meu lado todos os dias de minha vida. E meu esposo Wendel, pelo apoio incondicional numa etapa tão importante para mim.

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.”

(Albert Einstein)

AGRADECIMENTOS

Esta conquista só foi possível porque Deus me presenteou com a presença de pessoas muito especiais.

Agradeço a minha mãe e a meu esposo que, com paciência e dedicação, estiveram comigo nos momentos mais decisivos.

Aos amigos da Escola Justina pela torcida e apoio.

Aos professores e alunos do PROFMAT –UFSCar que, com amizade e respeito, me incentivaram até o fim.

A meus alunos, que com empenho e entusiasmo, possibilitaram o desenvolvimento e a conclusão do projeto.

Ao meu pai, irmãos e irmã por acreditarem em meu sucesso.

A todos, muito obrigada.

TRAJETÓRIA DOCENTE

Sou Estela Aparecida Fernandes, uma cidadã ourinhense, filha, irmã, esposa e professora.

Minha trajetória educacional teve início no ano de 1980 quando ingressei na 1ª série do extinto primário na E.E.Profª Adelaide Pedroso Racanello. Escola de muita qualidade onde fui apresentada a professores que fariam diferença em minha vida. Cresci valorizando o estudo e, durante os oito anos que ali permaneci, me destaquei pelas notas excelentes que tirava. Ao concluir os oito anos destinados ao Ensino Fundamental na escola Racanello, fui matriculada para cursar o Ensino Médio também numa escola pública estadual. Na época, a E.E.Domingos Carmelingo Caló tinha a fama de ter o corpo docente mais eficiente da cidade, e eu tive o privilégio de conhecê-lo. Os dois primeiros anos, estudei no período da manhã e consegui manter um desempenho semelhante ao Ensino Fundamental. Porém, com 17 anos, ingressei no mercado de trabalho e tive que concluir o Ensino Médio no período noturno.

Após concluir o Ensino Médio, comecei um curso de Administração de Empresas em uma faculdade particular de Ourinhos. Um curso bem aquém do esperado se comparado ao valor da mensalidade. Consegui permanecer por apenas 6 meses e durante o semestre seguinte, estudei em casa, revi conteúdos, pratiquei escrita, e em 1992 ingressei no curso de Ciências Biológicas da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Jacarezinho-PR. Uma instituição pública que oferecia cursos de razoável qualidade e próximo a Ourinhos.

Conclui o curso de Ciências em 1994 e logo em seguida comecei a lecionar aulas de Matemática no Ensino Fundamental no período noturno. Percebi, que para cumprir meu papel com certa qualidade, precisava de mais conhecimento, então segui fazendo um curso de habilitação em Matemática que a FAFIJA oferecia. Com a habilitação poderia lecionar Matemática no Ensino Médio.

Em 1998 prestei o concurso para professores do Estado de São Paulo e ingressei como professora efetiva no ano 2000 na E.E. Profª Justina de Oliveira Gonçalves, escola na qual permaneço até hoje. Durante todos esses anos, adquiri experiência através da prática em sala de aula e de muitos cursos de aperfeiçoamento oferecidos pela Secretaria Estadual de Educação além dos cursos oferecidos pela instituição privada onde fui professora por 10 anos (Colégio Pólis-Ourinhos).

Como sou professora responsável pela OBMEP (Olimpíadas de Matemática da Escola Pública) em minha escola, recebi a informação de um curso de mestrado profissional oferecido pelo MEC que me chamou a atenção, me encheu de entusiasmo e expectativas. Havia duas opções de instituições para eu tentar uma vaga. UEL a 180 Km de distância de Ourinhos ou UFSCAR a 300km de distância. Sem nenhuma dúvida e muito menos arrependimento minha opção foi UFSCAR, ingressando no curso em 2011.

Começava assim a saga PROFMAT-UFSCAR. Foram muitos quilômetros de estrada, muitas e muitas horas de estudo com dedicação diária, além de momentos de sobrecarga emocional, mas muita confiança em relação ao objetivo proposto: “concluir o curso com sucesso em 2013”.

Quero deixar registrado que a principal motivação para seguir num curso de mestrado profissional nos moldes do Profmat é a busca incansável de fazer a diferença no processo ensino-aprendizagem. Vislumbro, mesmo utopicamente, a melhoria na qualidade da educação pública o que me faz entender que devo persistir em minha qualificação profissional, pois conseguir motivar os alunos atualmente é algo que exige um esforço sobre-humano.

RESUMO

O trabalho apresentado tem como objetivo permitir ao aluno inferir sobre os diferentes conceitos Matemáticos através da construção de luminária. Para isso, ocorrerá o desenvolvimento de uma sequência didática, metodologia de ensino que consiste em apresentar o projeto aos alunos que são submetidos a uma produção inicial ou avaliação inicial – produção de textos, conversas, problemas – a partir da qual são realizadas atividades diferenciadas, trabalhadas em módulos sobre os assuntos propostos. Em seguida, é avaliado o desempenho obtido através da produção final. Esta metodologia foi aplicada em duas turmas de 2os anos do Ensino Médio de uma Escola Pública. A primeira etapa iniciou-se com uma apresentação da sequência seguida da produção inicial, que permitiu ao aluno expor seus conhecimentos acerca da Matemática envolvida na produção final (luminária). A proposta privilegia vários tópicos da Matemática básica possibilitando, através de metodologias diferenciadas, a retomada constante dos conteúdos abordados permitindo, assim, avanços no processo ensino-aprendizagem. As retomadas são observadas nos tópicos da Geometria Plana, o que embasa o estudo da Geometria Espacial. A prática da Modelagem Matemática é utilizada para resgatar o conceito de Função com significado real para os alunos. A novidade ficou por conta da descoberta da Matemática do Código de Barras. E por fim, o fechamento do trabalho deu-se com a apresentação da produção final realizada pelos alunos.

Palavras-chave: Sequência-Didática, Luminárias, prisma, polígono regular.

ABSTRACT

The presented work aims to allow students to infer about the different concepts by building Mathematicians luminaire. For this, occur following the development of a didactic, teaching methodology that consists in presenting the project to the students who undergo an initial production or initial assessment - production of texts, conversations, problems - from which different activities are performed, worked in modules on the topics. It is then rated the performance obtained through the production end. This methodology was applied to two classes of 2nd year of high school in a public school. The first step began with a presentation of the sequence followed by initial production, which allowed students to exhibit their knowledge of mathematics involved in the production end (luminaire). The proposal focuses on various topics from basic mathematics possible, through different methodologies, the resumption of constant content addressed thus enabling advances in the teaching-learning process. The topics taken up are observed in the plane geometry, which underlies the study of Space Geometry. The practice of mathematical modeling is used to rescue the concept of function with real meaning to students. The news was on account of the discovery of mathematics Barcode. And finally, the closing of the work took place with the presentation of the final production performed by students.

Keywords: Sequence-Curriculum, Lamps, light, regular polygon.

Sumário

INTRODUÇÃO

A dissertação aqui apresentada segue os moldes metodológicos da *sequência didática* cujo *produto final* é a confecção de *luminárias* em formato de prismas.

O primeiro capítulo traz os apontamentos acerca do conceito de *Sequência Didática* descrevendo sua estrutura de aplicação. Apresenta e discorre sobre os passos 1 e 2 que tratam, respectivamente, da Apresentação e Produção Inicial.

No capítulo 2, referente ao módulo 1, consta o passo a passo do uso dos instrumentos euclidianos (régua e compasso) e um roteiro para desenvolver as atividades em ambientes informatizados com o auxílio do software Geogebra.

Trabalhando com Prismas é o título do capítulo 3. Nele, inicia-se o estudo da Geometria Espacial e, com a confecção dos moldes das luminárias através da planificação, os alunos são instigados a conceituarem prisma e a deduzirem fórmulas que facilitam o tratamento do assunto.

O capítulo 4 é destinado à *Modelagem Matemática* como prática em sala de aula e promove a estruturação, com o uso de função afim, de fórmulas e gráficos que descrevem custo, venda e lucro na produção de luminária.

O produto final dessa Sequência Didática é real e pode ser vendido, por isso, deve apresentar um código que o identifique. Assim, com o tema *Descobrindo a Matemática dos Códigos de Barras*, iniciamos o capítulo 5 que responde basicamente a dois questionamentos: como a leitora distingue o sentido de leitura do código? E, como o computador consegue identificar erros na digitação do código de barras?

No capítulo 6, encontram-se a apresentação das luminárias e as considerações finais.

Esse trabalho conta também com uma seção denominada *Apêndice*, que contempla os roteiros para construções geométricas do capítulo 2 (*Apêndice A*), cálculos pertencentes aos módulos 1 e 2 da Sequência Didática, presentes nos capítulos 2 e 3 (*Apêndice B*) e trechos do relatório final de cada grupo com o título *Com a palavra, o aluno* (*Apêndice C*).

As atividades são envolventes e incentivam, em todos os momentos, a participação do aluno.

Vamos descobrir Matemática na Construção de luminárias?

CAPÍTULO 1: METODOLOGIA APLICADA

Neste capítulo são feitos apontamentos referentes ao conceito de sequência didática, estrutura e característica dos passos. Consta também um relato da apresentação da proposta aos alunos, que através de uma situação comunicativa desencadeada pela análise de um modelo de luminária, responderam a perguntas referentes aos conteúdos matemáticos envolvidos em sua construção.

1.1. **Sequência Didática**

A educação básica em Matemática é o instrumento que comtempla a competência para o pensamento quantitativo nas sociedades contemporâneas. É, portanto, de suma importância como estratégia para a formação de cidadãos conscientes, qualificados e competitivos. Existe, no entanto, um abismo entre o ensino de Matemática ideal e o real. Logo, se faz necessário concentrar esforços em ações objetivas que mudem, urgentemente, o cenário do ensino Matemático brasileiro.

Em 2011, teve início a aplicação de uma política de oferecimento de bolsas de mestrado profissional em Matemática em nível nacional, com a finalidade de garantir ao professor de Ensino Fundamental II e Ensino Médio, mais domínio do conhecimento Matemático e permitir o aprimoramento de metodologias de ensino inovadoras e estimulantes que resultem em propostas de práticas pedagógicas diferenciadas com aplicação em sala de aula.

Uma dessas propostas foi aplicada aos alunos do 2os anos A e B – Ensino Médio do período matutino da Escola Estadual Profª Justina de Oliveira Gonçalves na cidade de Ourinhos no Estado de São Paulo, escola de periferia que atende basicamente três bairros com poder aquisitivo que varia de muito baixo a médio. O desempenho da escola no IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) é insatisfatório uma vez que este índice engloba desempenho dos alunos em avaliações externas e evasão escolar. Um agravante no quesito desempenho é a constante movimentação de alunos do ensino médio entre os períodos da manhã e noturno. Esses remanejamentos estão vinculados ao ingresso de muitos alunos no mercado de trabalho. O desânimo em executar as duas tarefas, trabalhar e estudar, faz o índice de evasão escolar aumentar.

O trabalho que será apresentado nos capítulos seguintes é resultado da aplicação metodológica pautada nos princípios da sequência didática, cuja estrutura pode ser representada pelo seguinte esquema:

Primeiro passo – Apresentação do projeto: Momento em que o professor apresenta aos alunos o tema e os estudos que irão realizar.

Segundo passo - Produção inicial: Trata-se de uma avaliação prévia. Os alunos expõem o que sabem e pensam sobre o assunto por meio de produção de texto, conversas, etc. Através da produção inicial o professor conhece as dificuldades dos alunos e obtém meios de estabelecer quais atividades deverão ser empregadas na sequência didática.

Terceiro passo - Os módulos: Atividades planejadas (exercícios e pesquisas), diversificadas e adaptadas às particularidades da turma com a finalidade de desenvolver a capacidade do aluno, visando superação das dificuldades encontradas na produção inicial.

Quarto passo – Produção final: Avaliação do que conseguiram aprender no decorrer da sequência didática.

A referida sequência didática terá a construção de luminárias em formato de prisma reto como produto final, com objetivo de permitir que o estudante identifique conceitos matemáticos não reconhecidos na produção inicial, pesquise, resgate conceitos já estudados, realize conjecturas, aproprie-se de novos conteúdos, tire conclusões, descobrindo, assim, habilidades e competências relevantes para que ele se torne protagonista na construção do conhecimento.

Todo o esquema de prática foi pensado de modo a considerar a Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o ensino de Matemática.

1.2. **Apresentação:** Projeto e Situação Comunicativa

Considerado o momento mais importante de toda sequência, a apresentação da proposta propõe um contrato didático entre a professora e a turma. É nesse momento que o professor realiza uma avaliação prévia em relação ao nível de aprendizagem de seus alunos. Portanto, deve ser feita com entusiasmo, carisma e perspicácia, descrevendo minuciosamente os objetivos e lançando mão de provocações constantes para despertar nos alunos curiosidade e interesse, pois não se deve esquecer que eles são o motivo principal de qualquer trabalho docente, pois turma envolvida, sucesso quase garantido.

Assim, um modelo de luminária foi levado à sala para apresentação e, a partir de uma conversa informal investigativa, foram feitas as chamadas perguntas motivadoras, delimitando, num primeiro momento através das respostas e demonstração de interesse, quais alunos se envolveriam mais com a prática manual, quais se destacariam nos cálculos e quais possuíam perfis de líderes. Uma estratégia bastante eficiente para conquistar a confiança, despertar a curiosidade e motivar os alunos.

Exemplos de perguntas usadas como argumento motivador:

1. Quem é capaz de identificar qual é o polígono da base dessa luminária?
2. É possível estimar a quantidade do material gasto para construir a luminária?
3. Quanto será que foi gasto com todo o material utilizado?
4. Por quanto deveria ser vendida para obter lucro?
5. Posso representar o custo, a venda e o lucro através de funções? Como poderia fazer isso? Alguma ideia?
6. O que vocês têm a dizer sobre Código de Barras?
7. O que significa cada número?
8. E quanto a espessura das barras, será que tem importância?

A questão 1 possibilitou o resgate do conceito de polígono. As questões 2, 3, 4 e 5 propiciaram o levantamento das dificuldades dos alunos em relação ao conceito de função. Através das questões 6, 7 e 8 verificou-se a ausência de conhecimento no que diz respeito ao código de barras. Foi solicitada uma pesquisa individual do tema.

Proposta aceita e alunos devidamente motivados o momento foi destinado a formar os grupos, designar lideranças, estipular prazos e metas e definir o modelo de luminária de cada grupo. Foi idealizado um roteiro específico para atender as particularidades das turmas.

Os formatos das bases dos prismas foram limitados em uma quantidade de cinco modelos regulares (triangular, quadrada, pentagonal, hexagonal e octogonal). Com isso ficou determinado a quantidade de grupos, bem como, através de sorteio, o modelo de luminária que caberia a cada grupo que continha cinco ou seis elementos. Estes foram escolhidos pela professora com intuito de promover relações interpessoais diferentes. Por sugestão dos componentes do grupo foi designado um aluno líder que se responsabilizou pela organização e distribuição das tarefas entre os membros. Foi de sua responsabilidade criar um recurso de anotações que informasse o desempenho de cada elemento, seu interesse e contribuição para a execução do trabalho, bem como especificar os motivos de possíveis ausências nas aulas. Ao final, essas anotações foram convertidas em um relatório que privilegia a opinião do grupo sobre os resultados alcançados, além de críticas e sugestões.

CAPÍTULO 2: RÉGUA, COMPASSO E GEOGEBRA.

Com um tempo de dedicação de quatro aulas, foi possível trabalhar conceitos da Geometria Plana nos polígonos regulares inscritos numa circunferência ao utilizar instrumentos de Desenho Geométrico como régua e compasso, além de, com o auxílio de recursos computacionais como o software Geogebra, conjecturar e deduzir fórmulas.

A importância da utilização de instrumentos como régua e compasso na resolução de problemas perfaz as linhas de desenvolvimento Matemático. A história da Matemática destaca que muitos problemas de construção foram resolvidos através da utilização de tais instrumentos. Alguns desses problemas se tornaram famosos: Duplicação do Cubo, Trissecção do Ângulo e Quadratura do Círculo que puderam ser resolvidos, de maneira aproximada, com régua e compasso.

> Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado.
>
> (EVES, 2011, p.134).

Aceitando essas duas orientações como regras, tem-se um fascinante jogo que encantou Euclides (por volta de 300 a.C.) e por isso esses instrumentos, assim utilizados, tornaram-se conhecidos como instrumentos euclidianos.

O poder desse encantamento existe ainda hoje e, por esse motivo, dedicar um bom tempo das aulas incentivando o manuseio dos instrumentos na construção dos polígonos inscritos é de uma eficiência ímpar.

Neste contexto, as perspectivas recaem sobre as ações que permitem o “fazer matemático”, experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim, demonstrar. Com esse propósito o uso de recursos tecnológicos impõe, desde que bem preparadas, um ritmo mais dinâmico às aulas.

2.1. Passo a Passo

Cada grupo definiu o formato da base de sua luminária.

O desenvolvimento do trabalho aconteceu após fixar as medidas que seriam usadas na construção das luminárias, assim, ficou estabelecido a medida de 7 cm para o raio da circunferência circuncêntrica aos polígonos e, 20 cm para a altura das luminárias.

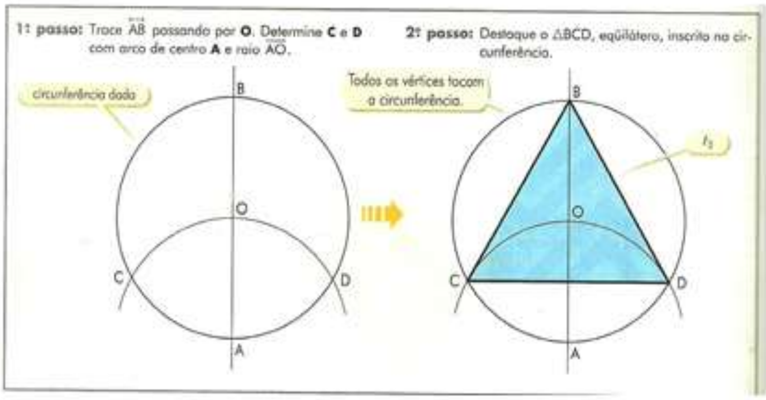
Cada aluno, no seu respectivo grupo, recebeu um roteiro de construção com régua e compasso dos polígonos inscritos visando incentivar a leitura e interpretação. O modelo do roteiro para a construção do triângulo equilátero inscrito numa circunferência segue abaixo, ver Figura 1, e os demais roteiros estão disponíveis no Apêndice A.

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA.

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Construiremos um triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio r = 7cm.



a) Qual a medida do ângulo central COD?
b) Determine, usando trigonometria no triângulo retângulo, as medidas do lado e do apótema do triângulo BCD.

Figura 1: Roteiro

Ao responder as duas questões propostas nos roteiros, os alunos estão recuperando conceitos estudados anteriormente, tais como:

1) Ângulo Central, calculado pela relação 360º/n, onde n é o número de lados do polígono inscrito.

2) Trigonometria no Triângulo Retângulo que, com a decomposição do polígono em triângulo isósceles e com o traçado do apótema (segmento que une o centro do círculo ao ponto médio do lado do polígono), é possível determinar

triângulos retângulos e utilizar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente para calcular as medidas do lado e do apótema que serão utilizadas para obtenção do valor da área do polígono.

Assim, segue com exemplo, os cálculos para o triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio r = 7 cm.

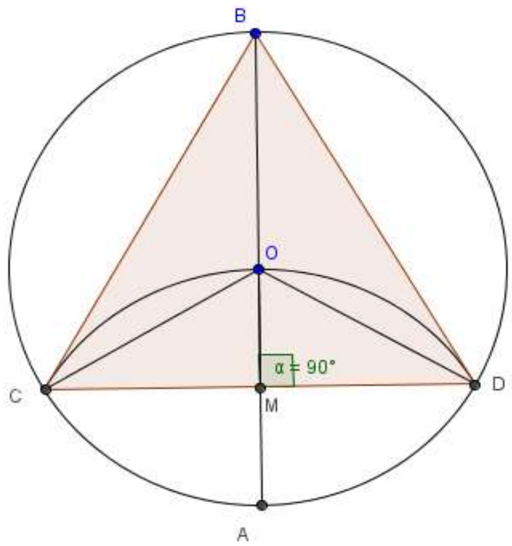


Figura 2: Triângulo equilátero inscrito.

Considerando o triângulo isósceles COD, de ângulo central 120º, temos: CD = lado e OC = raio = 7 cm. Chamando de M o ponto médio do lado CD, segue-se OM = apótema.

Aplicando as razões trigonométricas no triângulo retângulo OMD, encontramos:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{l/2}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow l = 7\sqrt{3}\,\text{cm}$$

e

$$\cos 60° = \frac{a}{7} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 3{,}5\ cm$$

Conseguimos um número irracional para a medida do lado do triângulo. Como conseguir na prática utilizar essa medida?

A partir desse problema, seguiu uma discussão importante sobre a necessidade de racionalização do número $7\sqrt{3}$ bem como seguir com os cálculos utilizando um valor conveniente de aproximação com uma casa decimal. Privilegiou-se o uso de calculadoras simples como material pedagógico.

Seguiu-se de modo análogo os cálculos das medidas dos lados e dos apótemas nos demais polígonos. Os mesmos encontram-se detalhados no Apêndice B.

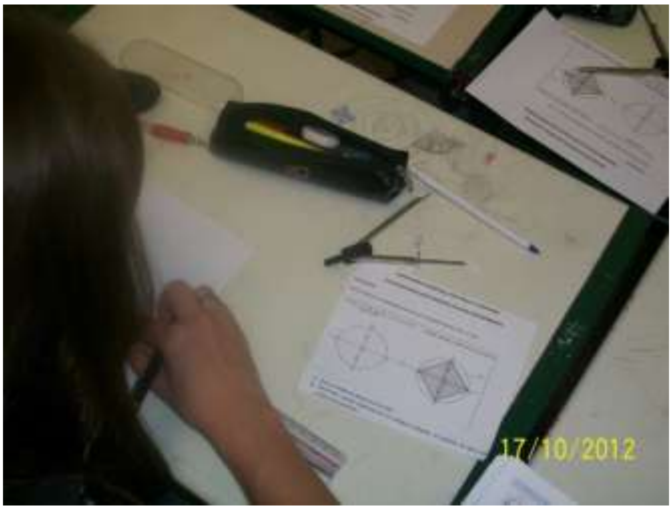


Foto 1: Alunos trabalhando- turma 2ºA

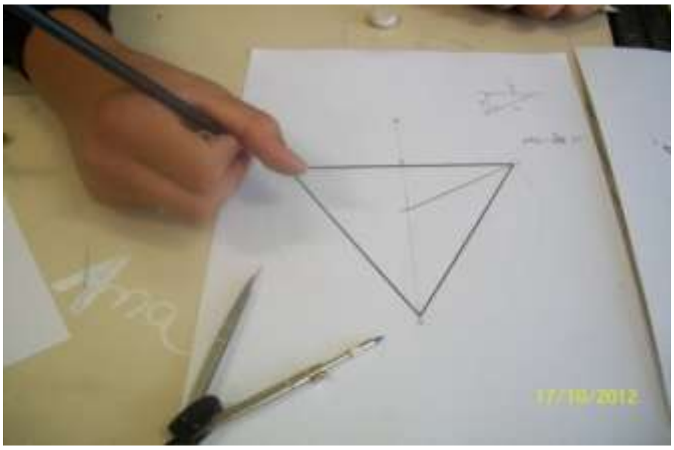


Foto 2: Aluno realizando construção geométrica

Após a conclusão do trabalho com os instrumentos euclidianos, teve início às aulas com o GEOGEBRA. A maioria dos alunos já conhecia algumas ferramentas do software, pois ao estudarem as funções trigonométricas, no início do ano, algumas atividades foram realizadas com o auxílio do software.

No intuito de evitar conversas paralelas e desatenção, além do limite suportável, as atividades também foram desenvolvidas seguindo as instruções de um roteiro. Todos os grupos realizaram a construção dos cinco polígonos inscritos para que pudessem perceber padrões. Foi utilizado o *data show* disponível na unidade escolar, que agilizou o esclarecimento das dúvidas geradas pela dificuldade de interpretação, principalmente no momento de responder as questões propostas.

ROTEIRO – GEOGEBRA

OBJETIVO: EXPERIMENTAR, VISUALIZAR PROCESSOS, GENERALIZAR E CONJECTURAR SOBRE COMO CALCULAR ÁREAS DE POLÍGONOS INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA ATRAVÉS DA DECOMPOSIÇÃO EM TRIÂNGULOS ISÓSCELES.

1) Opção "Polígono Regular" siga as instruções dadas pelo ícone e construa o polígono regular com 3 lados.
2) Selecione "mediatriz" e clique sobre dois lados do triângulo. Determine O, ponto de interseção das mediatrizes com a opção "Interseção de Dois Objetos". Renomeie o ponto de interseção para O.
3) Clique sobre uma mediatriz e selecione "exibir objeto", a mediatriz irá sumir. Repita o processo com a outra mediatriz.
4) Com a opção "Círculo dado o centro e um de seus pontos", obtenha a circunferência circunscrita ao polígono.
5) Selecione "Distância, Comprimento ou Perímetro" meça o raio da circunferência. Em seguida, com a opção "Mover" clique sobre um dos vértices do polígono e arraste até que o raio seja 7 cm. Mexa na janela "mover janela de visualização" e altere a escala de construção, deixando a figura pequena.
6) Com a opção "segmento" destaque o triângulo isósceles BOC de base BC.
7) Selecione "Mediatriz" clique sobre o segmento BC. Em seguida, selecione "Ponto de interseção de dois objetos", clique sobre DE e sobre a mediatriz, obtendo o ponto médio do lado BC.
8) Clique sobre a mediatriz com o botão esquerdo do mouse e peça "Exibir Objeto". A mediatriz sumirá.
9) Opção "Segmento", destaque OM, apótema do triângulo ABC inscrito e altura do triângulo isósceles BOC.
10) Ligue os pontos BO e CO utilizando "segmento".

Responda as questões:

1) Em quantos triângulos isósceles pode ser dividido o polígono inscrito na circunferência de raio 7 cm?
2) Como você pode obter a área do triângulo isósceles construido?
3) Use a opção "Distância, Comprimento ou Perímetro" e estabeleça uma relação entre a medida do apótema do polígono e a medida do raio da circunferência. O que você observou?
4) Como você poderá, através da área do triângulo isósceles, obter a área do polígono regular inscrito na circunferência?

OBSERVAÇÃO: Repita todo o processo para polígono de n lados (n = 4, 5, 6, 8).

Figura 3: Roteiro Geogebra apresentado aos alunos.

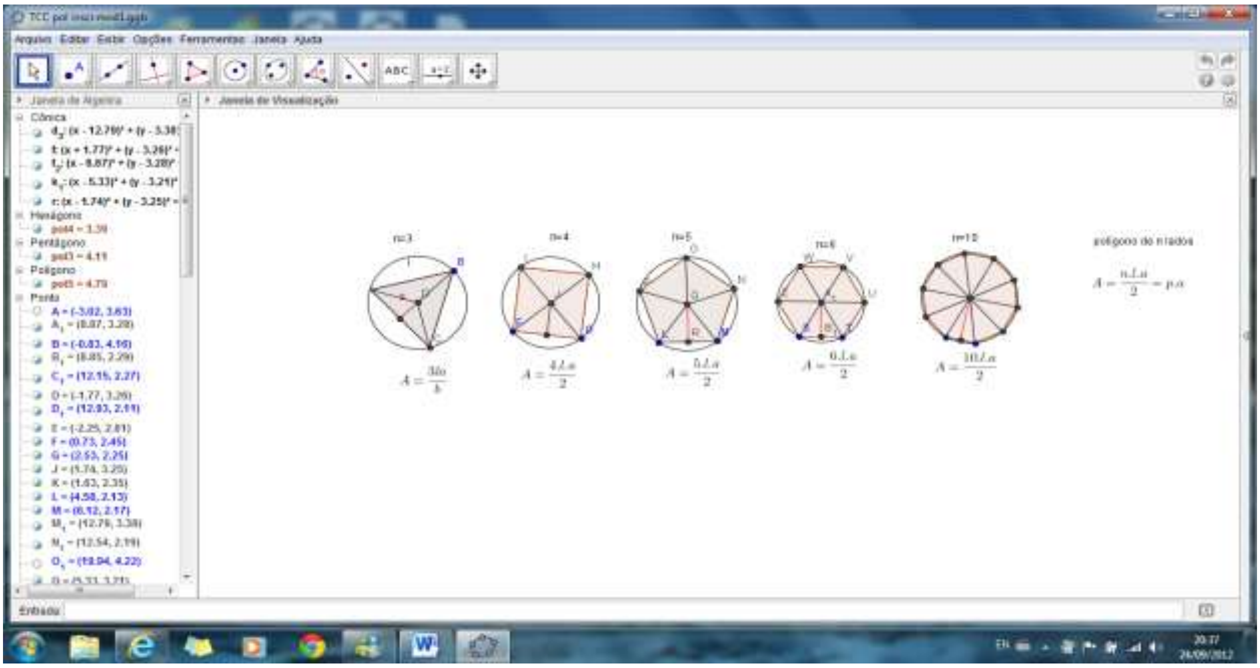


Figura 4: Tela do Geogebra

Os alunos concluíram que, quanto maior o valor de **n** (número de lados do polígono), mais a medida do apótema se aproximava da medida do raio da circunferência. Conseguiram uma generalização para calcular a área de um polígono de n lados a partir da decomposição do polígono em triângulos isósceles.

A fórmula da área do polígono é

$$\boldsymbol{A = \frac{n.l.a}{2}},$$

como $\boldsymbol{\frac{n.l}{2}}$ é o semiperímetro, p, do polígono, temos,

A= p.a.

O cálculo da área do triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio 7 cm é

$$A = p \times a = \frac{12{,}10 \times 3}{2} \times 3{,}5 = 63{,}525\ cm^2.$$

Dos cálculos da página 27 temos medida do apótema, a= 3,5 cm, e a medida do lado, *l* =12,10 cm.

Para os demais polígonos, os cálculos seguem de forma análoga e estão disponíveis no Apêndice B.

2.2. Conclusão

Com base nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), temos que exploração de situações, em que sejam utilizadas construções geométricas com régua e compasso, permite ao aluno investigar conceitos geométricos e também compreender, descrever e representar o mundo em que vive.

Seguindo nesta linha, pode-se afirmar que o objetivo foi alcançado com sucesso. Os alunos permaneceram motivados até o final e foi constatado diminuição no número de ausências em comparação aos dias “normais”. Houve a possibilidade de recuperação da aprendizagem em relação ao conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, porém, alguns alunos apresentaram dificuldades no manuseio dos instrumentos de Desenho Geométrico, pouca ou nenhuma familiaridade com o Geogebra, e conhecimento abaixo do básico em Geometria Plana e Trigonometria.

Pode-se dizer, no entanto, que tiveram grande interesse pelas atividades propostas e, com certeza, adquiriram algum conhecimento em maior ou menor grau.

CAPÍTULO 3: TRABALHANDO COM PRISMAS.

Para qualquer lado que olhamos observamos diferentes formatos espaciais. De uma simples embalagem na prateleira do supermercado, ao lugar onde vivemos, lá estão eles.

A Geometria Espacial Métrica é o foco da aprendizagem no 4º bimestre da 2ª série do Ensino Médio, segundo a Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Com o propósito de respeitá-la, este módulo é todo dedicado ao tema Prismas. Com a duração de duas aulas, toda atividade proposta tem como objetivos conceituar prisma a partir de sua planificação, e induzir o aluno a deduzir fórmulas importantes em relação ao sólido, tais como: *área da base*, *área lateral*, *área total e volume*.

Sabemos, que entre as dificuldades que os alunos apresentam no estudo da Geometria Espacial, estão a representação e a interpretação de figuras tridimensionais desenhadas no plano, por isso a confecção dos moldes das luminárias deixa de ser apenas uma aula divertida com cartolina, régua, compasso e tesoura para assumir uma postura de metodologia de ensino.

Pretendemos, nessa seção, consolidar o conhecimento de alguns fatos fundamentais em relação ao prisma elaborando um raciocínio que seja aplicado e ampliado à medida que os alunos avançarem no estudo dos outros sólidos.

3.1 - Passo a passo

Devidamente equipados com cartolina, tesoura, instrumentos euclidianos e a construção geométrica realizada no capítulo 2 (módulo 1), os grupos iniciaram a confecção dos moldes de suas respectivas luminárias. Com o auxílio de modelos de prismas de papel, que a escola possui, foi esclarecido o conceito de planificação, ou seja, tem-se uma planificação quando todas as faces laterais e as duas bases do prisma estão num mesmo plano e devidamente conectadas de maneira que, ao serem unidas, resultem no sólido desejado.

Foto 2: Alunos confeccionando molde da Luminária

Com os moldes prontos, teve início os trabalhos referentes aos conceitos fundamentais: *Vértice, Face e Aresta,* através de aula dialogada. Os moldes foram explorados para que os elementos citados pudessem ser identificados.

Partiu-se então para os conceitos *de Área da Base, Área Lateral e Área Total,* cujas abordagens foram facilitadas pelas planificações. Concluíram rapidamente que o polígono da base era o polígono inscrito na circunferência de raio 7 cm, ao qual já estavam familiarizados e, perceberam também, que a área lateral era composta de um certo número de retângulos definido pelo número de lados do polígono da base e que a soma das duas áreas resultava a área total. Já se tornou possível descobrir quantos moldes (planificações) se consegue com uma cartolina utilizando apenas cálculos.

Exemplo

Cálculo da quantidade de papel gasta na confecção do molde de uma luminária de base hexagonal regular sem tampa.

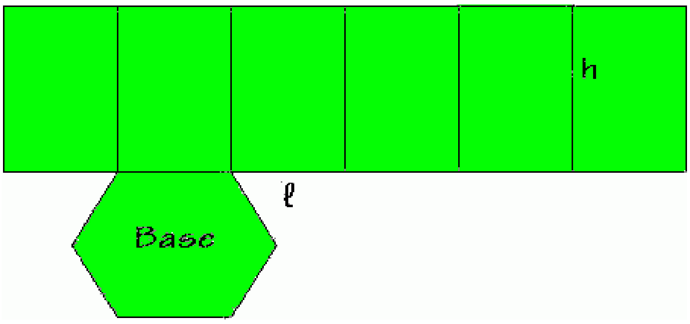


Figura 5: Planificação hexágono regular

O hexágono da base pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros. Logo, a fórmula $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{l^2}\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{4}}$, usada para o cálculo da área do triângulo equilátero, foi demonstrada e, em seguida, utilizada no cálculo da área do hexágono regular. Assim,

$$\boldsymbol{\text{área da base}} = \boldsymbol{6} \times \frac{\boldsymbol{l^2}\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{4}} = \boldsymbol{3} \times \frac{\boldsymbol{l^2}\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{2}}$$

$$\text{á}\boldsymbol{rea\ lateral} = \boldsymbol{6} \times (\text{á}\boldsymbol{rea\ do\ ret}\text{â}\boldsymbol{ngulo})$$

$$\text{á}\boldsymbol{rea\ total} = (\text{á}\boldsymbol{rea\ da\ base}) + (\text{á}\boldsymbol{rea\ lateral}).$$

Características gerais de prisma foram elencadas através da observação dos moldes:

- As bases dos prismas são polígonos (regulares ou não) de mesma forma e tamanho e suas faces laterais são paralelogramos;
- O nome do prisma é dado pela forma de sua base, podendo ser triangular, quadrangular, hexagonal, etc;
- Se a aresta lateral for perpendicular às bases, o prisma é reto, caso contrário, oblíquo;
- O paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos;
- Se todas as faces do paralelepípedo são retângulos, ele é chamado de paralelepípedo retângulo;
- Um prisma reto cuja base é um polígono regular chama-se prisma regular;
- Se o prisma tiver todas as faces quadradas, ele é um cubo, também chamado de hexaedro regular (do grego hexa – seis e hedros – apoiar-se, faces)

Feito isso, passamos a tratar do problema de contar o número de faces (F), o número de vértices (V) e o número de arestas (A), chegando enfim à Relação de Euler: **V – A + F = 2.**

Ainda faltava desvendar como se faz para calcular o volume do prisma. Nesse ponto, o Princípio de Cavalieri foi assumido como um axioma:

> *“São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume”.*
>
> (A Matemática do Ensino Médio – vol. 2, p.255)

Assim, $volume\ do\ prisma = (área\ da\ base) \times\ (altura)$

Cada grupo tinha a responsabilidade de aplicar as conclusões utilizando as medidas reais da luminária. Para ilustrar, segue a conclusão de um dos grupos responsável pela luminária de base hexagonal.

A saber:

$$\boldsymbol{medida\ da\ aresta\ da\ base = 7cm\ e\ altura\ da\ luminária = 20\ cm.}$$

$$\boldsymbol{Área\ lateral = 6 \times 7 \times 20 = 840cm^2}$$

$$\boldsymbol{Área\ da\ base = \frac{6 \times 7^2 \times \sqrt{3}}{4} \sim 127,15cm^2}$$

$$\boldsymbol{Área\ total = 840 + 127,15 = 967,15\ cm^2}$$

$$\boldsymbol{Volume = 127,15\ .\ 20 = 2543,10\ cm^3}$$

3.2. Conclusão

A escolha de atividade diferenciada envolvendo a retomada dos conceitos área de polígonos e volume de prismas deve-se à importância desses temas para a vida cotidiana e a constatação de que o ensino de Geometria tem sido negligenciado nos vários níveis de escolarização, apesar de sua importância para a formação do conhecimento matemático.

Segundo Pavanello e Andrade, 2002, professores que não valorizam, ou não priorizam o ensino de Geometria, na maioria das vezes, não tiveram uma boa formação acadêmica nessa área ou tiveram dificuldades, principalmente por falta dos conhecimentos que deveriam ser dados no ensino básico. Trata-se de um ciclo que precisa ser quebrado.

Em relação à atividades desenvolvida, os alunos conseguiram inferir sobre a importância do primeiro módulo (capítulo 2) para que fosse possível o desenvolvimento do segundo (capítulo 3). Foram criadas condições necessárias para que, ao interpretarem adequadamente as planificações dos prismas, os alunos concluíssem corretamente sobre as várias fórmulas existentes e, principalmente, entendessem o significado, bem como a importância de cada uma delas em atividades reais do cotidiano.

Nesse sentido, foram instigados a perceberem as aplicações das fórmulas para conseguirem obter valores referentes ao gasto com material, ou seja, quantas luminárias o grupo conseguiria produzir com um papel cartão? E se a luminária fosse colocada à venda, qual seria o preço? Tema do terceiro módulo tratado no capítulo 4.

Alguns momentos, porém, certos assuntos foram tratados de maneira muito superficial, como no caso da relação de Euler e do Princípio de Cavalieri, talvez pelo tempo curto decorrente do final de ano.

Contudo, o módulo foi bem trabalhado e também alcançou resultados satisfatórios.

CAPÍTULO 4: QUANTO CUSTA?

Quanto custa produzir uma luminária? Essa foi uma das perguntas motivadoras feita na apresentação da sequência didática aos alunos.

A ideia surgiu do fato do produto final ser uma luminária e, que para produzi-la, temos gastos com cartolina, papel cartão e material elétrico o que possibilitou dar um significado real ao conceito de função. Vale ressaltar que função é o assunto mais explorado e talvez o mais importante de todo o Ensino Médio. Durante a 1ª série do EM, todo currículo é voltado para o estudo de funções: afim, quadrática, exponencial e logarítmica, seguindo, na 2ª série, com funções trigonométricas. Logo, mais de 1/3 de todo o segmento é destinado às funções. No entanto, o entendimento dos conceitos por parte dos alunos não é satisfatório, muitos passam pelas funções e não têm condições nenhuma de resolver problemas ou inferir sobre as soluções obtidas. Além disso, o processo de ensino é, quase sempre, maçante, repleto de fórmulas e distantes da realidade.

As turmas envolvidas no projeto, apresentaram índice de entendimento inferior à série que frequentam, por isso utilizando duas aulas, espera-se, através de uma metodologia diferenciada, resgatar o conceito de função vislumbrando avanços significativos na aprendizagem, possibilitando que o aluno, por meio de uma situação real, investigue possíveis soluções e articule hipóteses. Ao encarar a sala de aula como indústria, surgiu necessidade de controlar gastos, evitar desperdícios e almejar lucros ao inserir, supostamente, o produto no mercado para ser vendido e, assumindo nesse contexto, a Modelagem Matemática como prática metodológica diferenciada, desenvolveu-se o módulo 3 da sequência didática.

4.1. O que é Modelagem Matemática?

> No Brasil, modelagem está ligada à noção de trabalho de projeto. Trata-se em dividir os alunos em grupos, os quais devem eleger temas de interesse para serem investigados por meio da Matemática, contando com o acompanhamento do professor.
>
> (BASSANEZI,1994).

Porém há limitações da transferência conceitual para fundamentar a modelagem na Educação Matemática. A principal dificuldade diz respeito diretamente ao que se pretende no contexto escolar, em que os propósitos, a dinâmica do trabalho e a natureza das discussões matemáticas são diferentes dos modeladores profissionais. Como consequência, existem algumas incoerências entre teoria e prática de modelagem em sala de aula. Assim, é interessante apresentar modelagem como uma prática de ensino que motiva, facilita a aprendizagem, prepara os alunos para utilizar a Matemática em diferentes áreas e desenvolve habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio cultural da Matemática.

4.2. Por que fazer modelagem?

É consensual entre os professores a ideia de que não existe um único e melhor caminho para o ensino de qualquer disciplina, em particular da Matemática. Portanto, conhecer diversas formas de trabalhar em sala de aula, em que os problemas surgem de maneira contextualizada, é fundamental para que o professor construa sua própria prática.

Nesse intuito a modelagem surge como mais um recurso metodológico, que fica associada à problematização e investigação, oferecendo espaço para o aluno atuar na atividade, criando perguntas, organizando e manipulando as informações, e principalmente, refletindo sobre elas.

4.3. Como fazer modelagem?

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem compreende diversas etapas fundamentais. Em primeiro lugar, deve-se escolher o tema que poderá ser escolhido pelo aluno ou escolhido pelo professor. O tema pode ser desenvolvido em grupos e sua duração é variável, ou seja, depende do interesse dos alunos.

Depois, vem a escolha dados gerais e quantitativos que auxiliarão a formulação de hipóteses, o que permitirá sistematizar os conceitos para resolver os problemas de forma analítica e, se possível, de forma gráfica.

E, para finalizar, confrontar os resultados obtidos com os dados coletados, se for um dos objetivos do projeto.

Com a modelagem matemática, o professor assume o papel de mediador no processo ensino-aprendizagem, o que lhe permite optar entre desenvolver os conteúdos matemáticos simultaneamente com o processo de modelagem ou desenvolver inicialmente o processo e, posteriormente o conteúdo.

É interessante ressaltar que há algumas séries em que essa prática se adapta muito bem para se abordar determinados assuntos de forma contextualizada, enquanto outras não oferecem tal possibilidade.

4.3.1. Argumentos favoráveis e desfavoráveis.

Em relação ao ensino.

Favoráveis:	
	Possibilita o estudo temático.
	Propicia a interação com as outras Ciências o que favorece um processo formativo mais abrangente.
Desfavoráveis:	
	Dificuldade de cumprir programas estabelecidos no plano de ensino.
	Tempo que o professor deve dispor para desenvolver os conteúdos programados não favorece o ensino por meio do processo de modelagem.

Em relação ao aluno:

Favoráveis	
	Motivação para o aprendizado, pois os alunos entram em contato com problemas que surgem naturalmente de sua realidade o que confere significado para o ensino da Matemática.
	Estimulo à pesquisa e desenvolvimento da capacidade de levantar hipóteses, selecionar dados e adequá-los à suas necessidades.
Desfavoráveis	
	O excesso de questões a serem observadas pode dificultar a

	interpretação e assimilação dos temas abordados.
	Falta de experiência em formular questões frente a uma situação.

Em relação ao professor:

Favoráveis	
	Evolução intelectual e possibilidade da troca de experiências com os alunos e o meio social.
	O professor como orientador/pesquisador.
Desfavoráveis	
	Falta de experiência em relação à metodologia e disponibilidade de tempo para estudo sobre os temas que garantam a transdisciplinaridade e também para a preparação das aulas.

> O que é importante acentuar é que os conceitos aparecem da necessidade e não são impostos sem nenhum sentido de ser. Talvez essa seja a principal característica da dinâmica deste trabalho.
>
> (CALDEIRA, 1992)

4.4. Passo a passo

A perspectiva de obter sentenças matemáticas, que se aproximassem dos valores de custo e venda reais de sua luminária foi sendo discutida e preparada ao longo dos módulos anteriores. Assim, o líder de cada grupo registrava o valor de tudo que estavam utilizando para confecção do molde (cartolina) e, também, o material elétrico e o papel cartão que seriam utilizados posteriormente.

Surgiu, então, a necessidade de realizarem uma pesquisa de preço. Um grupo inovou e preferiu comprar uma lâmpada de led, que, não possui fiação, tomando cuidado para não elevar o custo final do produto. Cada grupo adquiriu o material necessário para que, no momento de construção, tudo estivesse pronto.

Ficou estabelecido também que a parte decorativa, bem como os pés da luminária deveriam ser de material reutilizado.

Dúvidas muito pertinentes começaram a surgir: nossa mão-de-obra é de graça? E o gasto com energia elétrica, como vamos calcular? Posso cobrar hora extra de trabalho? O que são custo fixo e custo variável?

Para responder todas as dúvidas, criaram-se critérios plausíveis com a realidade e em acordo com os objetivos propostos, ou seja, não seria possível, naquele momento, saber sobre o consumo de energia do mesmo modo que o custo da mão de obra seria sanado com outro tipo de moeda, nota final do bimestre. Ficou esclarecido que a modelagem ali aplicada seria bem mais simples do que a modelagem profissional e que o objetivo era apenas resgatar o conceito de função, em particular, da função afim e que não havia interesse e nem tempo de expandir a discussão.

O que deveria então fazer parte do custo fixo? Os materiais; cola, tesoura, lápis e os instrumentos de desenho geométrico não tiveram custo nenhum e apenas uma cartolina foi comprada para confecção do molde, seu valor seria o custo fixo, pois com um molde poderiam construir quantas luminárias quisessem. Portanto, $custo\ fixo = preço\ da\ cartolina$.

O custo variável seria composto pelos materiais utilizados na produção, ou seja, para se produzir **uma luminária** seriam necessários: uma folha de papel cartão, onde se encaixam apenas dois moldes planificados, mais o material elétrico (fio, interruptor, tomada e lâmpada). O custo total foi imediatamente percebido como soma dos outros dois, porém os alunos tiveram muita dificuldade de transferir a ideia para o caso de um número maior de luminárias, o que comprova que o entendimento anterior do conceito de função ficou aquém do desejado. Após muitas tentativas e erros, todos os grupos conseguiram estabelecer uma relação para o custo total que pode ser generalizada da seguinte maneira:

Sendo x o número de luminárias produzidas, consideramos:

C(x) o custo total;

CF o custo fixo;

CV(x) o custo variável.

Assim, $C(x) = CF + CV(x)$

Como ilustração, segue-se a função custo de um dos grupos (valores em reais).

CF = 0,40

CV(x) = (0,375 + 7,00).(x)

C(x) = 0,40 + 7,375x (função afim)

Outro fator motivador envolve a questão do lucro que gostariam de obter se o produto fosse vendido. Surgiu uma rápida abordagem, entre os membros dos grupos, envolvendo o valor percentual que colocariam sobre o custo, decidindo assim o preço de venda. Alguns trabalharam com uma margem de lucro que superou 150%. É o caso do exemplo acima que gastou R$ 7,775 e sugeriu R$ 20,00 como preço de venda, ou seja, aproximadamente 157% de lucro.

Relacionaram corretamente que L(x) = V(x) – C(x) onde L = lucro, V = preço de venda e C = preço de custo.

Todos os grupos deveriam apresentar a resolução gráfica, utilizando o mesmo plano cartesiano, das três funções descritas. Seguindo orientação, fizeram a construção em papel quadriculado.

Com essa atividade retomaram, através da problematização real, os conceitos de função afim e linear recordando que a segunda representa grandezas diretamente proporcionais e, no gráfico, é representada por uma reta que passa pela origem do sistema coordenado Oxy.

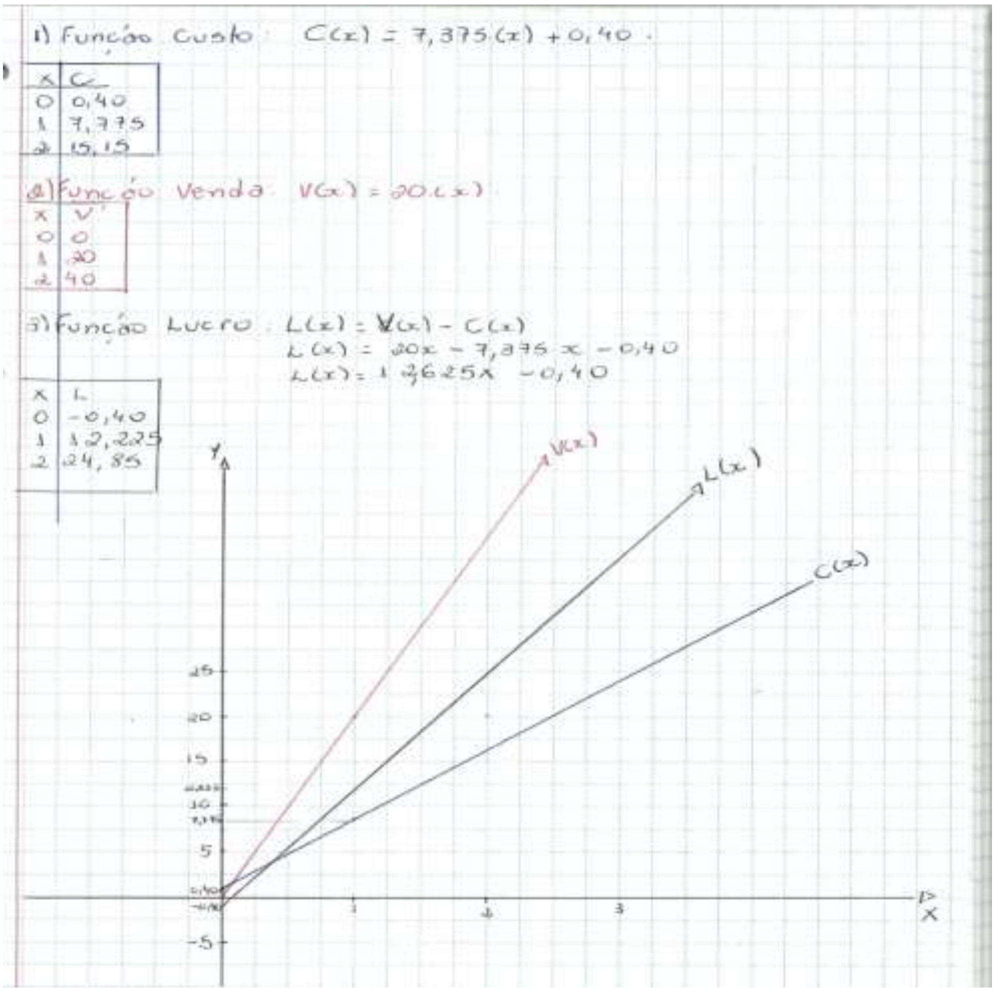


Figura 6: Gráficos das funções custo, venda e lucro.

4.5. Conclusão

A possibilidade de articular a modelagem Matemática como prática de ensino foi sugerida naturalmente no momento em que os grupos assumiram uma postura interessante de "fábrica". Logo, o produto final deveria ser concebido para comercialização, ou seja, com preço de venda devidamente calculado, minimizando desperdício e realizando cotação de preços na hora de adquirir a matéria prima, reduziriam o custo na linha de produção. Assim feito, a maior dificuldade em termos de estratégia pedagógica está relacionada ao tempo disponível que não permitiu avanços mais significativos no que tange o estudo de funções.

Em relação aos alunos, o déficit na aprendizagem apresentado por muitos dificultou o reconhecimento das funções envolvidas na atividade, mas conseguiram um aumento na capacidade de expressão, após representarem matematicamente uma situação concreta.

CAPÍTULO 5: DESCOBRINDO A MATEMÁTICA DOS CÓDIGOS DE BARRAS.

A proposta inicial da sequência didática cujo produto final é a construção de luminárias em formato de prisma reto privilegia a abordagem de vários temas relevantes em Matemática.

Para que os alunos permanecessem interessados até o final, era preciso despertar a curiosidade mantendo ligação com a proposta inicial.

Seguindo esse intuito, o tema código de barras se encaixou perfeitamente, pois as luminárias seriam um produto comercializável, ou seja, deveria ter um código de identificação devidamente idealizado pelos grupos. Para efetivar essa ideia, foram utilizadas duas aulas que permitiram ao aluno conhecer a Matemática dos códigos de barras, criar o código de barras para a luminária e interpretar o algoritmo utilizado para determinar o dígito verificador.

5.1. Controle dos códigos de identificação:

Códigos fazem parte da vida cotidiana. Temos um Registro de Identidade (RG) numerado, e, para pagarmos impostos sobre a renda, temos um número de Cadastro de Pessoa Física (CPF). Moramos em um endereço com Código de Endereçamento Postal (CEP), nosso carro tem um número de chassis e carrega uma chapa com números e letras que dizem onde ele está cadastrado. Votamos com um Título de Eleitor identificado, os países e as cidades têm códigos de discagem de telefones. No supermercado, na farmácia, nas bancas de revistas, nas livrarias, os produtos são acompanhados de etiquetas com seu código, as agências bancárias têm um número código e a conta corrente também. O computador que usamos pode ser identificado na internet pelo seu número de Protocolo de Internet (Internet Protocol – IP) etc.

A finalidade desses números e códigos é viabilizar o registro, o acompanhamento e às vezes toda a execução de uma operação humana.

Nesse sentido, há códigos que concentram grande quantidade de dados e informações. E há bons exemplos de como eles podem agilizar nosso cotidiano. Esse é o caso dos bilhetes codificados eletrônicos que estão sendo adotados em sistemas de transportes públicos das grandes cidades. E é também o caso dos códigos de barra óticos, que é o nosso tema de trabalho.

Segundo o dicionário, um código é: “Vocabulário ou sistema de sinais convencionais ou secretos, utilizados em correspondências ou comunicações”.

Em relação aos códigos de identificação, existem os códigos numéricos e alfanuméricos. Os códigos numéricos são mais eficientes para armazenar e transmitir dados, os números transpõem a barreira dos idiomas, pois são usados internacionalmente. Esses códigos podem e devem ser controlados, para tornar possível detectar erros de codificação. Para “avisar” que há erro de codificação, foi criado um grupo de algarismos, chamados “**algarismos de teste**”, “**dígitos controladores**”, “**dígito de verificação**” que são justapostos ao código de identificação, geralmente no final.

Alguns exemplos de códigos que detectam erros:

- Códigos de barras;
- Número de cheques;
- Número do RG;
- Número do CPF;
- Número do ISBN – códigos de livros e publicações em geral;
- Número de séries de cédulas;
- Número de bilhetes de passagem aérea.

Dentre os exemplos citados, trabalharemos os códigos de barras. O progresso tecnológico tornou bastante frequente o uso desse tipo de código, pois possibilitou o barateamento e o acesso a aparelhos de leitura óptica e computadores. Ele não é mais do que um número escrito de forma a permitir uma leitura rápida pelo computador, ele é formado por listras brancas e pretas alternadas, de espessura variável classificadas em finas, médias, grossas ou muito grossas. Utiliza-se o símbolo 0 para indicar a listra branca fina, o símbolo 00 para uma listra branca média, 000 para listra branca grossa e 0000 para muito grossa. Da mesma forma, vamos representar por 1, 11, 111, 1111, uma listra preta fina, média, grossa ou muito grossa, respectivamente. Note, na figura 7, que abaixo das listras aparece o mesmo número escrito em algarismos humano-legíveis.

Figura 7: modelo de código de barras

Será explicado como é feita a tradução dos números em termos de barras e como a leitora distingue entre esquerda e direita, ou seja, algumas vezes ao passar um produto pela leitora ótica, esta não consegue realizar a leitura e o que vemos é uma pessoa no caixa passar o produto no sentido contrário e, quais as principais ideias Matemáticas usadas para detectar possíveis erros de digitação, quando a pessoa do caixa o faz manualmente após falha da leitora?

5.2. Um pouco de história.

Em 1642, Blaise Pascal construiu a primeira máquina de calcular de que se tem notícia. Ela funcionava com engrenagens mecânicas e era capaz de realizar apenas somas. Em 1694, Wilhelm Leibniz aprimorou o invento de Pascal e criou uma máquina capaz de realizar também multiplicações. Os dados eram transmitidos à maquina através de cartões perfurados que são antepassados diretos dos códigos de barra, mas foi em 1801 que Joseph-Marie Jacquard construiu um tear que era comandado por cartões perfurados (cifrar informações em folhas de papel perfurado foi uma ideia de B.Bouchn) e foi, talvez, a primeira máquina programável. Várias décadas depois, as folhas de papel perfurado foram substituídas por fitas de papel perfurado onde os dados eram alimentados de forma contínua.

Em 1822, Charles P. Babbage, um professor de Matemática de Cambridge, inventou um instrumento de cálculo mais sofisticado que denominou *Máquina Diferencial.* Nessa época, ele observou que "as operações repetitivas poderiam ser desenvolvidas com mais agilidade e confiabilidade pelas máquinas que pelos homens". Ele foi o primeiro a perceber que a máquina de computar deveria ter um dispositivo de entrada, uma memória e uma saída. Sua máquina seria alimentada por duas séries de cartões perfurados: uma com os dados e outra com as operações a serem executadas. Por causa disso, ele é considerado o pai do computador digital. Babbage conseguiu convencer o governo britânico a financiar seu projeto mas, apesar dos esforços de anos e de vários investimentos, a máquina jamais chegou a ser construída. Ela seria movida a vapor e teria o tamanho de uma locomotiva.

Outro personagem importante foi Hermann Hollerith que em 1879 obteve doutorado em estatística pela Universidade de Columbia e, logo em seguida, foi empregado pelo Bureau de Censos dos EUA para fazer trabalhar no censo de 1880 cujos dados foram completamente tabulados após 10 anos de trabalho. Durante esse período, Hollerith empregou seu tempo projetando uma máquina que pudesse tabular dados automaticamente e, utilizando novamente a ideia dos cartões perfurados de Jacquard, escrevendo dados em oito colunas que utilizavam o sistema de numeração binária. Esses cartões eram lidos por uma máquina que utilizava sensores elétricos. Quando ocorreu um novo senso, em 1890, a invenção de Hollerith pode tabular todos os dados em apenas seis semanas. O sucesso de sua criação fez Hollerith fundar uma companhia dedicada ao desenvolvimento de máquinas semelhantes, a Tabulating Machine Company (atual IBM-International Business Machine).

Os computadores eletrônicos tiveram seu desenvolvimento acentuado a partir da segunda guerra mundial quando foi percebido seu potencial estratégico.

Em 1944, Tommy Flowers desenhou, na Inglaterra, o computador Colossus, totalmente eletrônico, concebido para decodificar mensagens interceptadas aos alemães. O computador mais famoso deste período foi o ENIAC (Eletronic Numerical Integrator and Computer) desenhado originalmente para calcular tabelas de fogo de artilharia para o Laboratório de Pesquisas Balísticas, durante a guerra, mas sua construção só foi completada três meses após o fim da guerra. O aparelho pesava 27 toneladas, usava 17.468 válvulas e precisou, para sua construção, de mais de cinco milhões de soldas feitas a mão. Ocupava um galpão e consumia 150 Kw de energia elétrica. Ele foi desativado em 2 de outubro de 1955.

Os progressos da tecnologia permitiram diminuir gradativamente o tamanho e o preço dos computadores, além de permitir o uso de feixes de luz e scanners para transmitir dados direta e rapidamente às máquinas, criando assim condições para a utilização da codificação.

Em 1952, Joseph Woodland e Bernard Silver tiveram patenteado um código de barras num padrão de circunferência concêntricas de espessura variável.

Em torno de 1970, uma firma de assessoria, a Mckinsey & Co., junto com a Uniform Grocery Product Code Council definiu um formato numérico para identificar produtos e pediu a diversas companhias que elaborassem um código adequado. A proposta vencedora foi apresentada pela IBM e o código foi criado por George J. Laurer, que foi formalmente aceito em 1973 quando passou a ser conhecido como código UPC (Universal Product Code) e foi adotado nos Estados Unidos e Canadá. Ele consistia numa sequência de 12 dígitos, posteriormente, para permitir maior difusão do sistema, o código passou a ter uma sequência de 13 dígitos, o EAN -13 (European Article Numbering System).

5.3. Código de Barras

O principal objetivo de um código EAN-13 (European Article Number) é identificar, com segurança e numericamente, um objeto, um artigo, de acordo com o país de origem, a empresa que o produz, o tipo de produto (objeto, artigo).

A "anatomia" de um EAN-13 pode ser descrita, no caso de um produto qualquer e no caso de um livro, segundo o esquema:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13

- No qual, **X1X2X3**: Representam o país, são três dígitos dados pela EAN;
- **X4X5X6X7**: Código da empresa filiada à EAN, são 4, 5 ou 6 dígitos;
- **X8X9X10X11X12**: Código do artigo dentro da empresa, são 3, 4 ou 5 dígitos elaborados pela empresa para identificar o item;
- **X13**: Algarismo de controle, obtido de um cálculo dado por um algoritmo(regra).

Algarismo de controle no sistema EAN-13

Os doze primeiros dígitos da sequência são determinados naturalmente por um método padrão a cargo de uma autoridade classificadora em cada país.

Para se obter o algarismo de controle, emprega-se um **algoritmo** que é uma sequência de instruções que podem ser executadas mecanicamente, por uma pessoa ou uma máquina (computador).

5.4.. Algoritmo do EAN-13

- Da esquerda para a direita, escreva 1 abaixo dos algarismos de posição ímpar e 3 abaixo dos algarismos de posição par.
- Multiplique cada algarismo do código por um desses dígitos, conforme a sua posição.
- Some todos os produtos obtidos. Chame essa soma de S.
- Subtraia S do primeiro múltiplo de 10, superior a S.
- O resultado dessa subtração é o algarismo de controle do código.

Tomando como exemplo o código de barras da figura 1 acima temos os 12 primeiros números 789 361 405 716 e, através do algoritmo, chega-se ao valor do dígito de verificação:

7x1+8x3+9x1+3x3+6x1+1x3+4x1+0x3+5x1+7x3+1x1+6x3 = 107

Ou seja, S = 107. O primeiro múltiplo de 10 superior a 107 é 110 assim, 110 – S = 110 – 107 = 3.

O dígito de verificação foi criado para tentar detectar erros que costumam acontecer ao digitar manualmente o código de barras. Mais comumente, ocorre digitar um número da sequência errado conhecido por erro único com 79% de frequência ou, digitar corretamente todos os dígitos, mas trocar a ordem de dois valores consecutivos, conhecido por transposição adjacente com 10.2% de frequência.

Como a leitora distingue a direita da esquerda?

(O texto abaixo foi distribuído a todos os grupos).

A resposta é bastante simples. Os dígitos são codificados de uma maneira diferente quando estão do lado direito ou esquerdo do código de barras. Um dígito do lado esquerdo pode ser codificado com um número par ou ímpar de dígitos iguais a 1 dependendo do dígito inicial de acordo com a seguinte tabela:

	Lado esquerdo ímpar	Lado esquerdo par	Lado direito
0	0001101	0100111	1110010
1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100
3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100
5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000
7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000
9	0010011	0010111	1110100

Tabela 1: Tabela de codificação binária

Para cada dígito inicial, escolhe-se uma alternância diferente de pares e ímpares de acordo com o seguinte critério:

Dígito inicial	1º	2º	3º	4º	5º	6º
0	ímpar	ímpar	ímpar	ímpar	ímpar	ímpar
1	ímpar	ímpar	par	ímpar	par	par
2	ímpar	ímpar	par	par	ímpar	par
3	ímpar	ímpar	par	par	par	ímpar
4	ímpar	par	Ímpar	ímpar	par	par
5	ímpar	par	par	ímpar	ímpar	par
6	ímpar	par	par	par	ímpar	ímpar
7	ímpar	par	ímpar	par	ímpar	par
8	ímpar	par	ímpar	par	par	ímpar
9	ímpar	par	par	ímpar	par	ímpar

Tabela 2: Critério de alternância entre pares e ímpares

Exemplo

Uma barra de cereais produzida no Brasil é identificada pelo código **7**/895000/266241. Temos que o dígito que estará implícito na codificação dos demais é o 7 pois, é com ele que inicia-se a sequência. Portanto, pela tabela acima, temos a seguinte ordem de codificação do **lado esquerdo**: ímpar, par, ímpar, par, ímpar, par.

Consultando a tabela de codificação do EAN-13 obtemos:

8 → 0110111 9 → 0010111 5 → 0111001

0 → 0001101 0 → 0001101 0 → 0001101

Para os dígitos do **lado direito**, não há preocupação com a paridade obtém-se diretamente da tabela a seguinte codificação:

2 → 1101100 6 → 1010000 6 → 1010000

2 → 1101100 4 → 1011100 1 → 1100110

Assim, o código de barras correspondente é:

Figura 8

5.5. Passo a Passo

Em primeiro lugar, a ideia de trabalhar com códigos de barras foi inserida na apresentação da sequência didática. Como já mencionado, nesse dia ficou acertado que os alunos deveriam providenciar uma pesquisa sobre o assunto e, principalmente, conseguir uma forma de gerar o código de barras. Com isso, mantiveram-se empenhados em descobrir, através da internet, uma forma de resolverem o desafio.

Todos os grupos fizeram a pesquisa, mas nem todos conseguiram baixar o arquivo gerador de códigos e, nesse quesito, um aluno destacou-se baixando o arquivo e apresentando a todos os demais alunos.

Pesquisa pronta e arquivo devidamente baixado e testado chegou o momento de entender a Matemática dos códigos de barras. Assim, foram apresentados alguns slides explicativos que continham: conceito, motivo pelo qual foram criados, como são construídos e como determinar o dígito que detecta erros.

Algumas informações extras foram trabalhadas com as turmas sendo, as referentes ao CPF, a que despertou maior interesse. Para a apresentação dos slides, foi solicitado que os alunos portassem o número do documento para que realizassem uma atividade utilizando o algoritmo *EAN-11,* cujo objetivo era possibilitar uma interpretação adequada do algoritmo para o cálculo dos dígitos verificadores.

5.6. Algarismo de controle no sistema EAN-11 (CPF)

Algoritmo do EAN-11

- Da esquerda para a direita, multiplique cada um dos nove primeiros dígitos do código, respectivamente por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Some os resultados desses produtos e chame essa soma de S1.
- Divida S1 por 11.
- O resto dessa divisão é o primeiro dígito de controle.
- Considere agora o número formado pelos nove primeiros algarismos do código e o primeiro dígito de controle determinado.
- Da esquerda para a direita, multiplique cada um desses 10 dígitos, respectivamente por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Some esse resultados e chame essa soma de S2.
- Divida S2 por 11.
- O resto da divisão é o segundo dígito de controle.
- O resto 10 é considerado zero(0).

Um EAN-11 contém as seguintes informações:

- X1X2X3X4X5X6X7X8: número –base;
- X9: Unidade da federação onde a pessoa fez seu registro;
- X10X11: Algarismos de controle, obtidos do cálculo dado pelo algoritmo (regra) anterior.

Atividade;

- O CPF **136.985.516.04** apresenta os algarismos de controle errados. Utilize a regra para obter os algarismos corretos.

Resposta comentada.

Seguindo as regras temos 1x1+3x2+6x3+9x4+8x5+5x6+5x7+1x8+6x9 = 228.

Assim, S1 = 228.

Dividindo S1por 11 tem-se 20 e resto **8**.

O primeiro dígito de verificação é **8**.

Calculando o segundo dígito

1x0+3x1+6x2+9x3+8x4+5x5+5x6+1x7+6x8+8x9 = 256

Assim, S2 = 256

Dividindo S2 por 11 tem-se 23 e reto **3**.

O segundo dígito de verificação é **3.**

Portanto, o número do CPF é **136985516 83.**

Foi dito durante a atividade que esse CPF foi emitido no estado de Minas Gerais pois, seu X9 era 6. Mas como a senhora sabe? Perguntaram os mais curiosos. Com essa deixa, a tabela seguinte foi apresentada.

Códigos EAN-11 para as unidades da federação

BRASIL

0	Rio Grande do Sul
1	Distrito Federal, Goiás, Mato Grosso do Sul e Tocantins
2	Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondôniae Roraima.
3	Ceará, Maranhão e Piauí
4	Alagoas, Paraíba, Pernambuco e Rio Grande do Norte.
5	Bahia e Sergipe
6	Minas Gerais
7	Espírito Santo e Rio de Janeiro
8	São Paulo
9	Paraná e Santa Catarina

Os alunos descobriram que **789** é o código do Brasil e que, em todos os produtos brasileiros, os códigos de barras iniciam-se com esses três dígitos que são fornecidos pela EAN, com sede na Alemanha. Assim, concluíram que o código de barras de todas as luminárias teria a sequência 789 em comum.

E em outros países, quais seriam os dígitos representativos?

Prevendo tal pergunta, foi produzido um slide onde alguns códigos foram apresentados despertando grande interesse nas turmas, que passaram a conhecer e entender um pouco sobre o assunto.

Código EAN-13 de alguns países

Código	País	Código	País
00 a 13	USA e Canadá	690 a 693	China
30 a 37	França	729	Israel
400 a 440	Alemanha	743	Nicarágua
45 a 49	Japão	744	Costa Rica
480	Filipinas	750	México
485	Armênia	770	Colômbia
528	Líbano	773	Uruguai
539	Irlanda	779	Argentina
560	Portugal	780	Chile
57	Dinamarca	789	Brasil
619	Tunísia	80 a 83	Itália
628	Arábia Saudita	84	Espanha
977	Periódicos (ISSN)	978 a 979	Livros (ISBN)

Uma tabela completa, com os números de identificação de cada país, pode ser encontrada na página da internet *http://www.barcodeisland.com/ean13.phtml*

Em seguida, cada grupo criou um EAN-13 para seu produto. Sabendo que os três primeiros eram 789, restou inventar os nove seguintes e calcular, utilizando o algoritmo, o 13º dígito. A iniciativa mais popular entre as equipes foi utilizar, para o 4º dígito, o número relacionado ao lado do polígono da base assim, a sequência seria iniciada por 7893, 7894, 7895,7896 e 7898 para designar as luminárias de base triangular, quadrada, pentagonal, hexagonal e octogonal respectivamente. Os oito dígitos restantes foram preenchidos aleatoriamente ou com os números referentes ao dia do aniversário dos integrantes do grupo. Por exemplo, um produto final teve seu código composto pelos dígitos 7898196814166. A luminária em questão tem base octogonal, pois o 4º dígito é 8. Além disso, 19, 6, 8, 14 e 16 são os dias dos aniversários dos 5 alunos da 2ª série A, que formam o grupo. O código foi gerado por um programa específico graças ao esforço e empenho de um aluno em particular que se responsabilizou pela confecção dos códigos dos grupos das duas turmas. A escola forneceu etiquetas adesivas para que os códigos de barras fossem impressos. O resultado muito próximo ao real gerou uma satisfação imediata em todos os participantes.

Figura 9; Etiqueta com Código de Barras impresso.

5.7. Conclusão

Foi o módulo que gerou mais dúvidas sobre os resultados. Quando proposto, não havia certeza de que os alunos conseguiriam produzir a etiqueta ou se apenas a teoria seria trabalhada. Por isso, os resultados superaram as expectativas e, mesmo não sendo possível adquirir um leitor ótico para testar os códigos de maneira efetiva com todos os grupos, foi verificado que eles funcionaram adequadamente, pois, dois alunos, funcionários de um supermercado local, convenceram o gerente e os colegas de trabalho a testarem o código para eles. Foram enfáticos ao engrandecerem o trabalho de escola e assim o gerente registrou, temporariamente, o código da luminária no sistema, Outra colega, passando por cliente da loja, efetuou a compra do produto que estava devidamente exposto em uma prateleira. Ao passar pelo caixa, para pagar suas compras, o código de barras foi identificado pelo computador.

Para finalizar, fizeram um vídeo com a encenação e, na sala de aula, narraram toda a artimanha para a turma, que se mostrou muito feliz com a atitude dos colegas.

A apresentação de *slides,* feita com o auxílio do *data show,* gerou muita expectativa e grande envolvimento, pois como haviam realizado pesquisa sobre o tema, aproveitaram a aula diferente para sanar dúvidas. A parte que trouxe atividades em relação aos dígitos do CPF foi muito interessante pela motivação e, ao mesmo tempo, frustrante pelo fato de que muitos alunos não conseguiram realizar corretamente a interpretação do texto da regra e tão pouco as operações básicas envolvidas no cálculo. Novamente o desenvolvimento de mais um módulo oportunizou a recuperação da aprendizagem em conteúdos tão fundamentais da Matemática, e propiciou ao aluno o contato com um assunto diferente e atual com o intuito único de incentivá-lo a buscar e apreciar o ensino da Matemática.

Um dos resultados obtidos com a aplicação do capítulo 5, Figuras 10 e 11: Luminária etiquetada.

Figura 10: Luminária etiquetada

Figura 11: Luminária etiquetada

Também foi sugerida a leitura do texto a seguir como atividade complementar.

Curiosidade
Carrinhos Inteligentes

Um carrinho de supermercado "inteligente" *está destinado a se transformar na última arma da luta contra a obesidade. Especialistass em tecnologia criaram um carrinho que alertará o cliente do supermercado assim que for colocado nele algum produto rico em gordura, açúcar ou sal. O carrinho possui uma tela interativa na qual os códigos de barras desses produtos, uma vez "escaneados", ativarão uma luz vermelha de aviso, informa o jornal britânico "The Times". No futuro, a tela poderá também informar ao cliente os componentes nutritivos do produto, o país de origem e a possibilidade de reciclagem da embalagem utilizada. Esse novo conceito de carrinho de supermercado será apresentado oficialmente na conferência anual do Instituto de Distribuição de Alimentos.*

Quando o cliente introduzir seu "cartão fidelidade"no supermercado onde faz normalmente suas compras, o carrinho "saberá" imediatamente se ele é solteiro, casado ou quantas vezes faz compras por semana.

Além disso, ao guardar informação sobre visitas anteriores, saberá levar o cliente às prateleiras que estão mais de acordo com suas preferências e necessidades, além de mostrar as ofertas disponíveis.

Uma pesquisa do setor de supermercados mostrou que 70% dos consumidores não se importam de os estabelecimentos possuírem tantas informações pessoais sobre suas compras, e afirmaram que estes dados podem orientá-los no momento de escolher produtos mais saudáveis.

Revista do Professor Atualidade, ed.nº2, governo de São Paulo.

CAPÍTULO 6: LUMINÁRIAS E CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Este capítulo é destinado à apresentação das luminárias e às considerações finais.

6.1. Apresentação das luminárias.

Esta é a etapa final, ou seja, é o momento de apresentação do "Produto Final" o que foi possível de acontecer no tempo de uma aula. No total, dez luminárias foram trazidas para a sala de aula, ficando, para essa aula, apenas os retoques finais.

Todo o trabalho efetivo de construção aconteceu paralelamente às aulas, assim, após a elaboração do molde e compra dos materiais, os alunos organizavam-se conforme a disponibilidade de cada um para adiantarem o serviço. Cada grupo teve a liberdade de escolha em relação à decoração e os apoios (pés) da luminária. Todos os modelos tiveram apenas três pés com base no postulado "***Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém".*** O material utilizado também foi de escolha do grupo. Surgiu luminária com suportes de tampa de garrafa pet, madeiras cilíndricas obtidas cortando cabos de vassoura, caixas de fósforo e até pés de madeira com formato de números.

Alguns espelhos recortados em formatos triangular e retangular foram doados por uma vidraçaria do bairro e serviram de adereço para algumas luminárias e também tinham a função de refletirem a luz quando a luminária estava acesa. As etiquetas com os códigos de barras estavam todas prontas, e então foram coladas nos produtos.

Houve alunos que aproveitaram a aula para confeccionarem as etiquetas com os preços, ajustarem alguns detalhes referentes à estética ou a parte elétrica, além de conferirem o relatório que fizeram com o auxílio da professora de Língua Portuguesa.

A escola estava toda mobilizada com um projeto grande da área de Linguagens e Códigos (Café com Narrativa) e no dia da apresentação desse projeto, foi idealizado um ambiente para a exposição das luminárias. O espaço foi visitado por alunos das outras séries, professores, funcionários e representantes da Diretoria de Ensino de Ourinhos e tiveram a grata surpresa de receberem esclarecimentos diretamente dos construtores.

foto 3: Luminárias em exposição

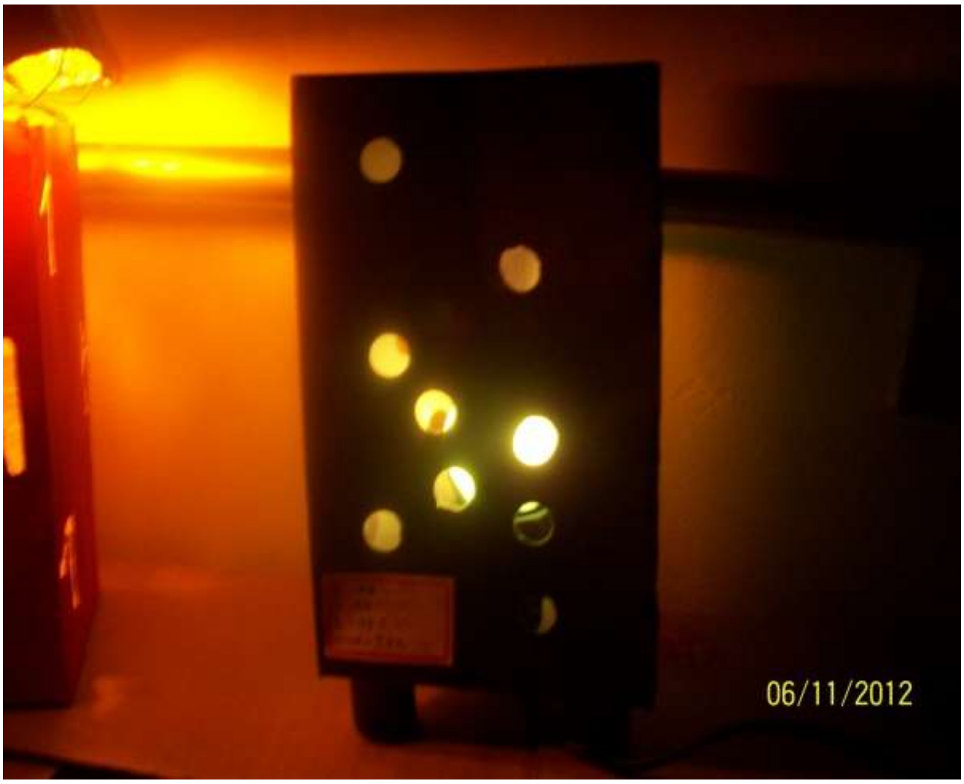


foto 4: Luminária de base triangular

foto 5:Luminária de base hexagonal

6.2. Considerações Finais

A ânsia por inovações em práticas pedagógicas configura-se, nos dias atuais, um dos maiores desafios enfrentados por professores em sala de aula.

A proposta apresentada é uma forma de enfrentamento dessa realidade. Ela reúne vários conteúdos matemáticos na confecção de um único produto propiciando assim a construção do conhecimento de forma mais abrangente e não estratificada como se, entre diferentes conceitos, não houvesse ligação. A evidência desse fato foi percebida claramente ao comparar as falas dos alunos em dois momentos distintos: na apresentação inicial, no qual não conseguiram identificar mais do que dois conceitos necessários para construir a luminária, nem se quer pensaram em preço de custo e muito menos sobre o código de barras. E na produção final, onde a apresentação foi muito mais interessante, pois foram capazes de realizar explicações sobre o processo de construção da luminária, apresentando os conteúdos Matemáticos, ali presentes, de forma estruturada e conecta, justificando, para um público não envolvido no projeto, a importância de cada etapa.

O estudo das Geometrias Plana e Espacial propiciou a compreensão e a representação organizada do mundo em que vivemos. A confecção, passo a passo do molde da luminária, contribuiu para resgatar e construir o conhecimento, uma vez que a experimentação contemplou a manipulação de instrumentos próprios e a exploração de recursos computacionais que incentivaram a investigação e o entendimento de conceitos Matemáticos fundamentais.

A atividade de Modelagem Matemática consolidou a importância do estudo de Funções priorizando a Função Afim. Na tentativa de descrever matematicamente os gastos com a construção do objeto, bem como determinar seu valor de venda para se obter lucro, privilegiou-se a organização e interpretação de procedimento na análise de um problema real.

O estudo do Código de Barras aproximou o aluno da linguagem da máquina através da simplicidade dos cálculos utilizados na obtenção dos dígitos verificadores e para decifrar o comportamento dos códigos quando submetidos à leitora óptica.

Todo o trabalho foi direcionado ao desenvolvimento do raciocínio cognitivo através de atividades que incentivaram a observação, a experimentação, a argumentação, a construção e a dedução, itens essenciais na busca do conhecimento.

Bibliografia

[1] LOPES, Elizabeth Teixeira; KANEGAE, Cecília Fugiko. **Desenho Geométrico:** conceitos e técnicas. Volume 4. São Paulo: Scipione, 1999. 88p. (Coleção Desenho Geométrico,12).

[2] EVES, Howard. Duplicação, trissecção e quadratura. In: **Introdução à história da matemática.** 5.ed. Campinas, SP: Ed. Unicamp, 2011. p. 129-159.

[3] LIMA, Elon L, et al; Volumes e áreas. In: **A matemática do ensino médio**, vol. 2. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. p. 251-270.

[4] DRUCK, S. Sobre o Ensino da Matemática no Brasil – sessão Ciência e Matemática nas Escolas e Educação Tecnológica. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO, Brasília, 27 de maio de 2010.

[5] GRAVINA, M.A.; SANTAROSA, L.M. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: IV CONGRESSO RIBIE, 1998. Disponível em: *<lsm.dei.uc.pt/**ribie**/docfiles/txt200342413933117.PDF>.* Acesso em: 15/01/2013.

[6] MACHADO JR, A. G. **MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO-APRENDIZAGEM: AÇÃO E RESULTADOS.** 2005. 142p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Núcleo de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Belém, 2005.

[7] SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Fundação para o Desenvolvimento da Educação (FDE). **Atualidades, revista do professor.** Código de barras, números congruentes e algoritmos. São Paulo, 2010. p. 70-75.

[8] WIKIPÉDIA. **Sequência didática.** Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Sequência_didática, acessado em 4/01/2013.

[9] GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J.R. **Matemática completa.** 2.ed. São Paulo: FTD, 2005. Vol.2. 384 p. (Coleção Matemática Completa, 3)

[10] MILIES, C.P. **A matemática dos códigos de barras.** Disponível em: < www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/**polcino**.pdf>. Acesso em: jan.2013.

[11] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília, ***1998***. 116 p.

[12] BASSANEZI, R.C. Modeling as a Teaching- Learning Strategy. For the Learnig of Mathematics, ano 14, 2, p. 31, 1994.

[13] CALDEIRA, A.D. **UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA EM ETNOMATEMÁTICA NA ZONA RURAL DA FAZENDA ANGÉLICA EM RIO CLARO**. 1992. Rio Claro: UNESP, 1992. Dissertação (Mestrado), igce, Universidade Estadual Paulista.

[14] EVES, H. **INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.** 5.ed. Campinas, SP: Ed. Unicamp, 2011. p. 134.

Apêndice A

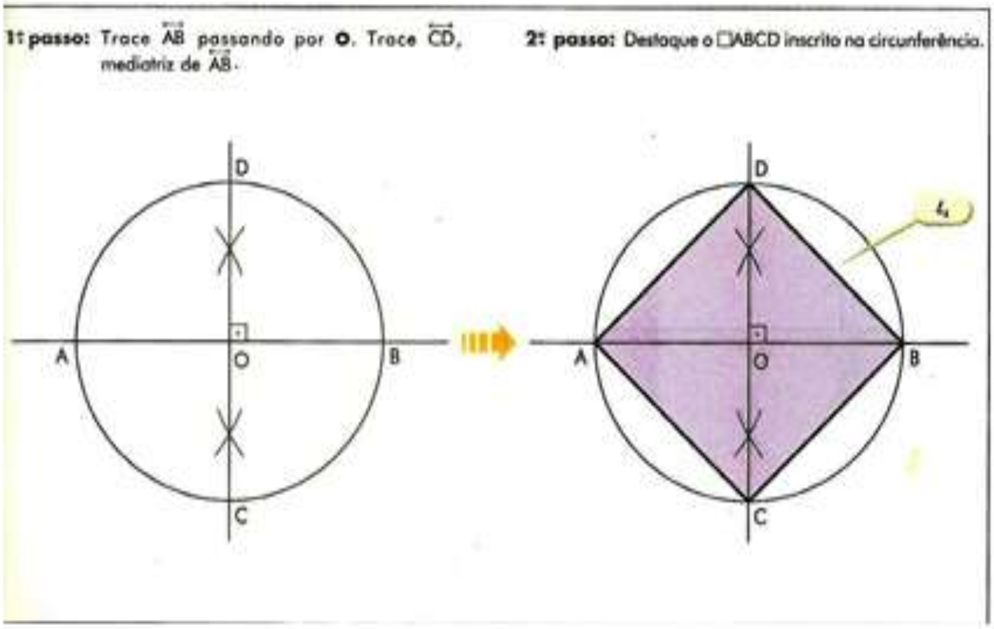
Roteiros: Instrumentos Euclidianos

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO.

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA.

QUADRADO

Construiremos um quadrado inscrito na circunferência de raio r = 7cm.



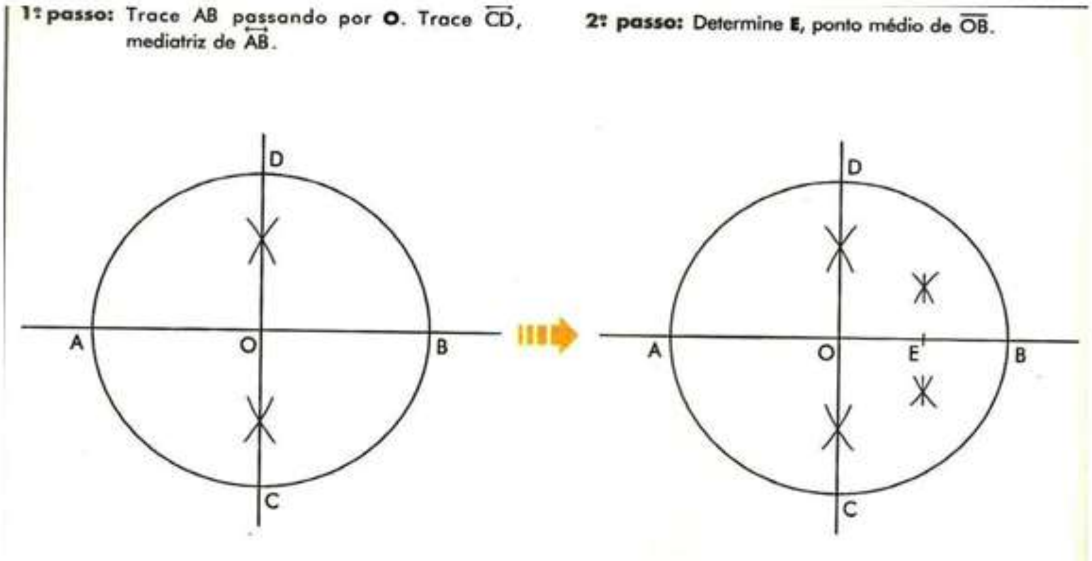
a) Qual a medida do ângulo central AOC?
b) Determine, usando trigonometria no triângulo retângulo, as medidas do lado e do apótema do quadrado.

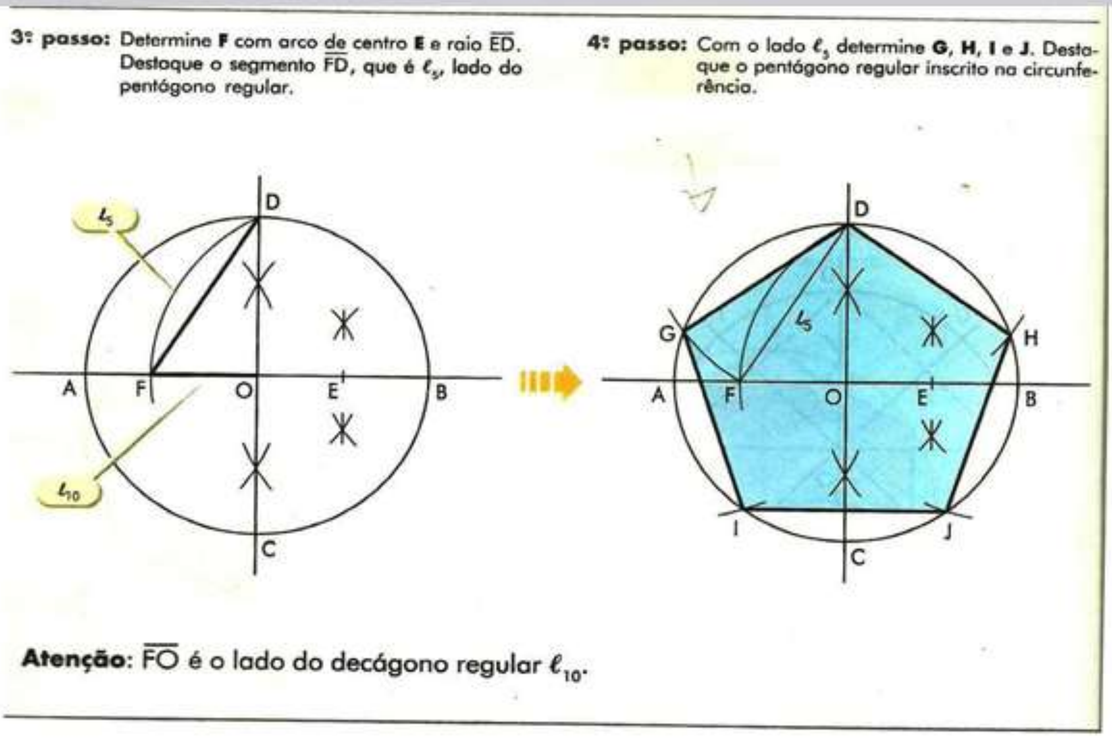
CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO.

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA.

PENTÁGONO REGULAR

Construiremos um pentágono regular inscrito na circunferência de raio r = 7cm.





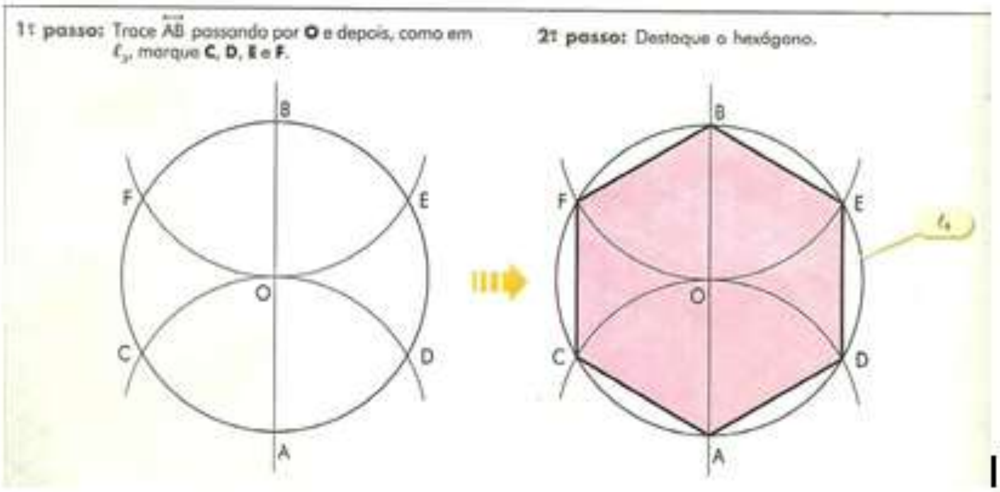
a) Qual a medida do ângulo central IOC?
b) Determine, usando trigonometria no triângulo retângulo, as medidas do lado e do apótema do pentágono.

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO.

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA.

HEXÁGONO REGULAR

Construiremos um hexágono regular inscrito na circunferência de raio r = 7cm.



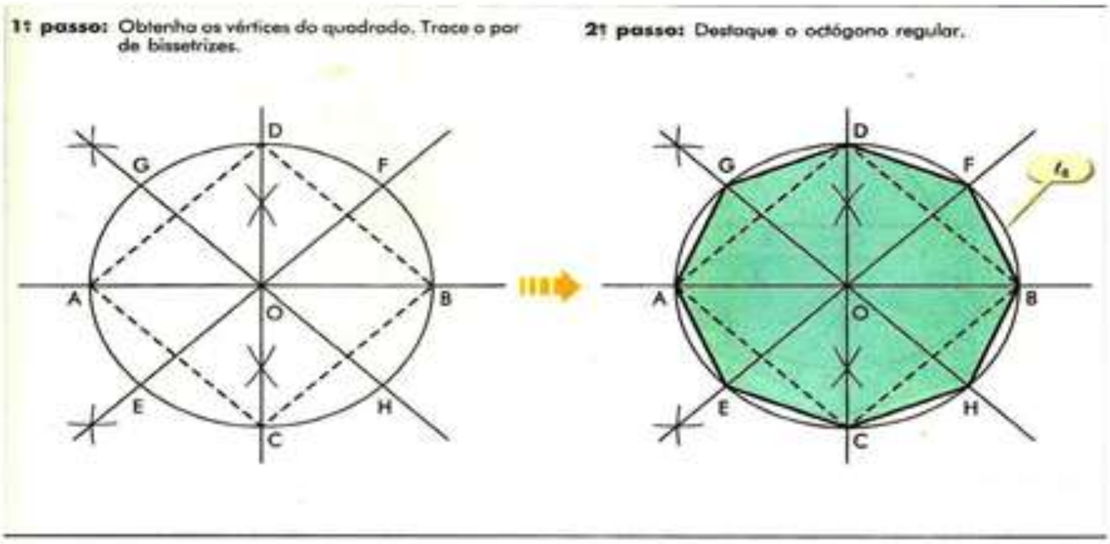
a) Qual a medida do ângulo central COA?
b) Determine, usando trigonometria no triângulo retângulo, as medidas do lado e do apótema do hexágono ADEBFC.

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO.

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA.

OCTÓGONO REGULAR

Construiremos um octógono regular inscrito na circunferência de raio r = 7cm.



a) Qual a medida do ângulo central EOC?
b) Determine, usando trigonometria no triângulo retângulo, as medidas do lado e apótema do octógono.

Apêndice B: Cálculos

A seção traz os cálculos das medidas do lado e do apótema dos polígonos inscritos na circunferência de raio fixo que são referentes à Geometria Plana do capítulo 2 bem como os cálculos da área lateral, área total e volume dos prismas retos estudados no capítulo 3.

1. **Prisma de base triangular regular = luminária de base triangular regular**

Do módulo 1, onde os cálculos estão detalhados, temos:

Medida do lado da base = $7\sqrt{3}\,cm \sim 12{,}1\,cm$

Medida do apótema da base = 3,5 cm

Área da base = 63,525 cm²

Calculando:

Área lateral (A*l*)

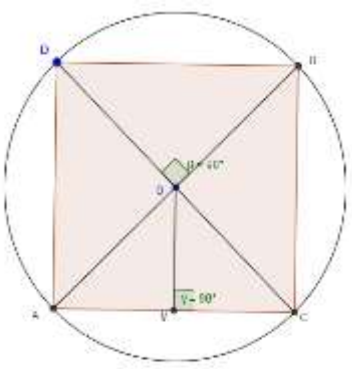
A*l* = $3 \times 12{,}1 \times 20 = 726\,cm^2$

Área total (At)

At = B + A*l* = 63,525 + 726 = 789.525 cm³.

2. **Prisma de base quadrada = luminária de base quadrada.**

Quadrado inscrito na circunferência de raio 7 cm



Considere o ΔMOC retângulo em M.

Ângulo MÔC = 45º.

MC = $\frac{AC}{2}$, pois M é ponto médio de AC.

Então:

$sin45° = \frac{MC}{OC} \quad \leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{AC}{2}}{7} \leftrightarrow AC = 7\sqrt{2}$ cm $\sim 10\,cm$

(medida do lado do quadrado inscrito)

Apótema da base:

$$cos45° = \frac{OM}{OC} \leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OM}{7} \leftrightarrow OM = \frac{7\sqrt{2}}{2} \sim 5\,cm$$

Área da base: $\boldsymbol{A = p.a}$, onde p é o semiperímetro e a é a medida do apótema.

A = 20x5 = 100 cm²

Área lateral do prisma:

A*l* = 4x10x20 = 800 cm²

Área Total

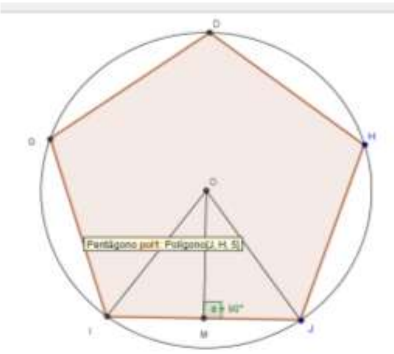
At = 100 + 800 = 900 cm²

Volume:

V = 100x20 = 2000 cm³

3. **Prisma de base pentagonal regular = luminária de base pentagonal regular.**

Pentágono inscrito na circunferência de raio 7 cm.



Considere o ΔOMJ retângulo em M.

Ângulo MÔJ = 36º.

MJ = $\frac{IJ}{2}$ pois M é ponto médio de IJ.

Então:

$$\sin 36° = \frac{MJ}{OJ} \leftrightarrow 0{,}587 = \frac{\frac{IJ}{2}}{7} \leftrightarrow IJ = 8{,}20\ cm$$

(medida do lado do pentágono inscrito).

Apótema da base:

$$\cos 36° = \frac{OM}{OJ} \leftrightarrow 0{,}80 = \frac{OM}{7} \leftrightarrow OM = 5{,}6\ cm.$$

Área da base:

A = 20,5x 5,6 = 114,80 cm²

Área lateral do prisma:

A*l* = 5x8,2x20 = 820 cm²

Área total:

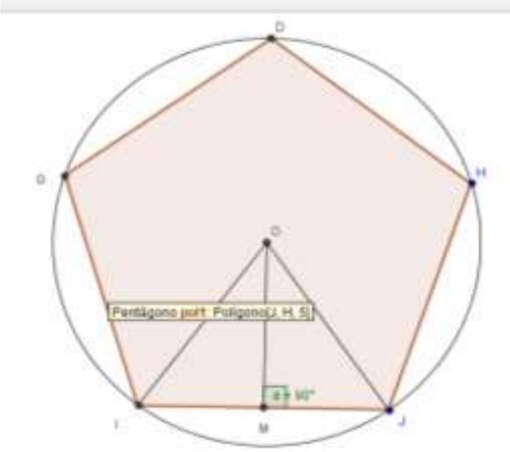
At = 114,8 + 820 = 934,80 cm²

Volume:

V = 114,8x 20 = 2296 cm³

4. **Prisma de base hexagonal regular = luminária de base hexagonal regular.**

Hexágono regular inscrito na circunferência de raio 7 cm.



Considere o ΔMOJ, retângulo em M.

Ângulo MÔJ = 30º.

MJ = $\frac{IJ}{2}$ pois M é ponto médio de IJ.

Então:

$sin30° = \frac{\frac{IJ}{2}}{OJ} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{IJ}{2}}{7} \Leftrightarrow IJ = 7\ cm$ **(medida do lado do hexágono regular inscrito).**

Apótema da base:

$$cos30° = \frac{OM}{7} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OM}{7} \Leftrightarrow OM = \frac{7\sqrt{3}}{2} \sim 6\ cm$$

Área da base:

A = 21x6 = 126 cm²

Área lateral:

A*l* = 6x(6x20) =720 cm²

Área total:

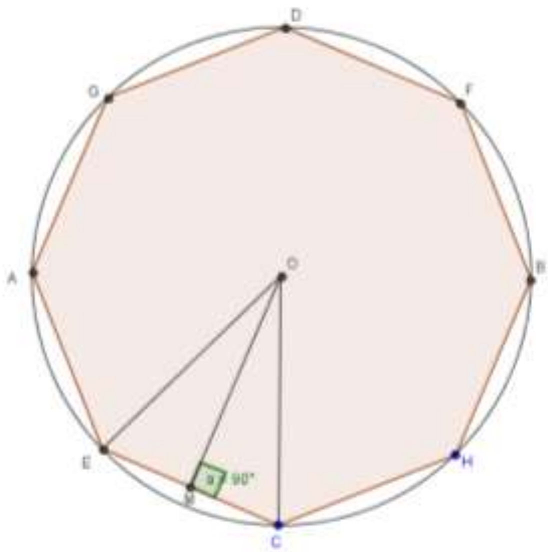
At = 126 + 720 = 846 cm²

Volume:

V = 126x20 = 2520 cm³

5. **Prisma de base octogonal regular = luminária de base octogonal regular.**

Octógono regular inscrito.



Considere o ΔOMC, retângulo em M.

Ângulo MÔC = 22º30’

MC = $\frac{EC}{2}$ pois M é ponto médio de EC.

Então:

$sin 22°30' = \frac{\frac{EC}{2}}{OC} \Leftrightarrow 0{,}38 = \frac{\frac{EC}{2}}{7} \Leftrightarrow EC = 5{,}3\ cm$ **(medida do lado do octógono inscrito)**

.

Apótema da base:

$cos 22°30' = \frac{OM}{7} \Leftrightarrow 0{,}92 = \frac{OM}{7} \Leftrightarrow OM = 6{,}4\ cm$

Área da base:

A = 21,2x6,4 = 135,68 cm²

Área lateral:

A*l* = 8x5,3x20 = 848 cm²

Área total:

At = 135,68 + 848 = 983,68 cm²

Volume:

V = 135,68x20 = 2713,6 cm³

Apêndice C: Com a palavra, o aluno.

Esta seção tem como objetivo permitir ao leitor vislumbrar todo o desenvolvimento da sequência didática não mais guiado pelo profissional que a idealizou e intermediou sua aplicação, mas sim sob a perspectiva de quem sofreu a ação.

O relatório final é a “nota” dada por eles para eles e para a professora, bem como uma análise crítica do projeto elencando os pontos positivos e negativos. Vários líderes apresentaram um relatório bem descritivo, expondo inclusive as tarefas realizadas juntamente com as datas em que ocorreram. Também foram taxativos em apontar as falhas nos relacionamentos que ocasionaram em conflitos temporários. As conclusões refletem um índice alto de satisfação em relação ao projeto desenvolvido relatam que foram capazes de superarem os obstáculos impostos nos relacionamentos e na parte pedagógica.

Seguem os trechos, reescritos com fidelidade (inclusive erros de ortografia e concordância), dos relatórios finais apresentados pelos grupos. Os nomes dos alunos não serão mencionados e serão identificados apenas com as iniciais.

2ª série A

Grupo 1: Luminária de base triangular regular

Componentes: B, F, G, H, J, N

“...No primeiro dia do projeto os alunos foram separados em grupos, logo após ocorreu o sorteio das planificações a serem feitas. No dia seguinte recebemos instruções e todos do grupo construíram em folha de sulfite um triângulo circunscrito na circunferência, e calculamos a apótema e as áreas (cuja as fórmulas, foram desenvolvidas na sala de informática). No terceiro e quarto dia ocorreu falta de atenção dos alunos G e H, e as alunas J e N estiveram ausentes na aula. No quarto dia a professora deu continuidade nas atividades do Geogebra que foi feita pelos alunos B e F.

...No dia 23/10/12 o quinto dia Projeto Luminária foi feito o molde da luminária e os alunos H e G mudaram o comportamento, e ajudaram nos desenhos. Assim a aula foi mais produtiva. No dia seguinte continuamos desenvolvendo o gráfico sobre o custo, venda e lucro além de ganharmos espelhos com a finalidade de refletir a luz da luminária construída, nesse mesmo dia fizemos algumas contas.

...No decorrer dos dias do Projeto a professora Estela nos ajudou várias vezes, mas nossa luminária era um pouco mais fácil por conta de ter apenas três lados. Essa luminária tem como foco principal as contas envolvidas.

Enfim no final de tudo aprendemos que temos que trabalhar em grupo e nada de individualismo por conta dos alunos, e que não é só fazer uma luminária isso envolve todo um processo de contas, cálculos e muita matemática".

Grupo 2: Luminária de base quadrada

Componentes: A, D, F, M, Mi

"... Houve desatenção dos alunos A e M, mas foi tudo bem.

Foi feito também gráficos e calculo sobre custo, lucro e custo fixo.

Neste período houve um episódio lamentável em que alunos não foram corretos e estragaram trabalho alheio M e A estavam envolvidos, mas se arrependeram e fizeram uma luminária linda.

Bom, no final deu tudo certo e o projeto foi desenvolvido com êxito".

Grupo 3: Luminária de base pentagonal regular

Componentes: A, B, D, G, R

"-Formação do grupo

Inicialmente o grupo foi receptivo com a proposta de contruir uma luminária com orientação dada pela professora de matemática. Reunimos todo o material necessário após uma extensa pesquisa sobre a funcionalidade do projeto e mantivemos entusiasmados até o surgimento de problemas relacionados à falta de planejamento da equipe...

-Distribuição das atividades

...Mas o grupo decidiu após uma breve discussão distribuir as atividades para cada integrante e ajuda-los quando for preciso com a proposta de diminuir o tempo de execução das tarefas...

-Dificuldade da etapa

Mesmo com a ajuda do professor e dos próprios integrantes não obtemos sucesso ao concluir o pentágono, houve vários erros em seu formato e nas medidas causando desistência entre os alunos do grupo que clamavam pelo docente esclarecer aonde eles erraram e o que deve ser concertado...

-Orientação do professor

...Porém a equipe estava exigindo muito do professor e que deveríamos nos conscientizar e ter paciência, pois logo nossas duvidas seriam sanadas...

-Discussão e divergência de opinião

Infelizmente não conseguimos resolver o contraste de ideias que foram surgindo rapidamente, o que causou varias discussões desagradáveis e conflitos desnecessários entre os participantes do projeto matemático...

-Desempenho do professor

Avaliamos seriamente o professor de como foi sua postura em sala de aula, o conhecimento na área profissional e a iniciativa de orientar e motivar seus alunos. Ao todo instante sempre se mostrou interessada nos resultados dos grupos e nunca se demonstrou desmotivada com os conflitos que surgiam no decorrer do projeto luminária.

...A opinião generalizada do grupo concordou que foi um prazer participar no projeto de matemática e que a docente Estela Fernandes soares é uma excelente profissional, estamos gratificados".

Grupo 4: Luminária de base hexagonal regular.

Componentes: A, G, H, L, P

"...reuniram-se no intuito de simular uma fábrica para investigar a teoria em prática.

...Nisso, aprendemos a manipular softwers, régua, compasso, cálculos, construções grafais de funções para calcular vendas, lucros e custos; argumentar raciocínios, seguir roteiros, aplicar fórmulas e lidar com diversidade de opiniões e erros.

Simulando que estávamos em uma fábrica, pusemos em módulos todos os passos da construção do sólido geométrico. Construimos manualmente o polígono regular inscrito que serviu de base para calcular a área deste e qualquer polígono regular que possa ser decomposto em triângulos isóscele ou até equiláteros. Esta observação foi entendida no softwer **Geogébra** quando fizemos as conjectura observando o que ocorria com o **apótema** em relação com o **número de lados dos polígonos** inscritos na circunferência. Em suma, compreendemos um pouco da geometria plana.

...Para finalizar, a produção obteve como matéria prima, elementos para dar a funcionalidade: fiação, lâmpada, soquete (custo variável de R$ 7,00); tampas de garrafa, espelhos, botões, etc, foram utilizados para a mão de obra. Foi um trabalho que o grupo considerou sustentável e reciclável, pois realmente utilizamos os recursos disponíveis!

Nosso produto foi registrado no sistema de códigos de barras em sala de aula-onde aprendemos as noções de codificação em relação à nação e a indústria onde o artigo é produzido, etc, e a possível detecção de erros no dígito verificador- a professora ensinou-nos os cálculos, teorias e história dos códigos de barras em aulas com slides.

...Como dito anteriormente, simulamos uma fábrica, porém, seguindo setores da economia, o produto feito na indústria segue ao comércio para prestar o serviço, vendendo e lucrando. Assim, R.D e L.N.(integrantes de grupos distintos), juntaram-se para filmar a simulação de nossa luminária sendo vendida em um supermercado, como um produto qualquer no comércio varejista! Nessa ação, o intuito foi propagar o reconhecimento do projeto fora da escola, onde no supermercado, clientes, funcionários e encarregados elogiaram a professora e a dupla.

Em virtude de tudo mencionado, realmente sentimos grande satisfação em relação a Matemática. Fomos além do que imaginávamos, além da teoria...construimos um certo “marketing pessoal” à matemática – que muitos julgam pejorativamente. Vimos o sorriso da professora, e principalmente de cada integrante e grupo. Houve faltas, erros complexos, irresponsabilidades, mas o melhor...aprendemos a lidar com tudo isso. Como dito, todos os integrantes foram empreendedores e cooperativos, consigo, com os outros e demais equipes”!

Grupo 5: Luminária de base octagonal regular.

Componentes: A.M., I, L, N, R.Q.

“...Cada integrante do grupo responsabilizou-se por uma tarefa específica, mas nem todos colaboraram de forma satisfatória, o L. não se disponibilizou a ajudar em nada a não ser que fosse delegada a ele uma função; já o integrante R.Q mostrou-se faltoso no início, mas no decorrer do trabalho evoluiu de forma surpreendente. O N. mostrou-se interessado de forma gradativa tendo dado a colaboração imprescindível nesse trabalho. A i. trouxe a feminilidade no Design da Luminária, sua participação foi uma das mais ativas nesse trabalho. O A.M. foi o mais importante, direcionando e se esforçando para ajudar-nos, mostrando-se muito interessado do início ao fim do projeto Luminária.

O projeto nos trouxe maior percepção da Matemática aplicada a Geometria, nos deu maior “bagagem” de conhecimento, o trabalho em grupo a convivência fez com que aprendêssemos a respeitar o tempo de cada um.

A professora Estela, foi a incentivadora maior dentro da sala de aula, agiu com rapidez controlando as etapas minuciosamente, auxiliando os grupos em cada etapa”.

2ª série B

Grupo 1: Luminária de base triangular regular.

Componentes: A.C, E, J.C., Ka, K, W

“O projeto luminária de matemática foi elaborado para que possamos ver que existe matemática até em pequenas coisas.

...O grupo todo colaborou para a montagem da luminária, juntamos o dinheiro e compramos os papéis e os equipamentos elétricos, fizemos desenhos em volta da luminária, o mais difícil foi colocar os equipamentos elétricos mas no final de tudo deu certo.

E no final fizemos os gráficos, as funções de venda, do custo e lucro, fazendo com que o grupo acompanhasse e entendesse como é feito.

E aprendemos também através desse projeto, como fazer códigos de barra e como funciona”.

Grupo 2: Luminária de base quadrada.

Componentes: D, N, R, T, W.L

"...Foi discutido as ideias de cada integrante para a construção do melhor jeito possível.

A função do líder e de cada integrante era por em prática todo seu pensamento e trabalhar para desenvolver a luminária de 4 lados. Foi interessante pois ponhamos preço, o código de barras e as personalizações.

Os integrantes do grupo se comunicaram bem e todos participaram, isso ajudou para que ficasse muito mais bem feito".

Grupo 3: Luminária de base pentagonal regular.

Componentes: A.L., D, L, M.R., V.

"...Mas como tínhamos que terminar cálculos, ou seja, a parte que envolve tudo da luminária, pois só construir seria fácil mas também através desse projeto observamos toda a matemática envolta em cada objeto que temos, que vemos ou tocamos. O D se propôs a terminar de montar em sua casa, segundo o depoimento dele, foi colada a base e foi colado o papel camurça, mas com só isso a luminária não ficaria firme, ele colocou espelhos por fora para deixar mais sofisticada e também para dar sustentação, colocou espelhos por dentro e fez furos para a passagem da luz.

...Nós começamos a calcular a função custo, a função venda e a função lucro, já com as funções prontas deduzimos o nosso código de barras.

...Observação: fizemos essa luminária com papel pois é algo mais sustentável do que a madeira ou plástico, algo que fosse mais barato também, foi um projeto legal e que teve empenho da maioria dos alunos".

Grupo 4: Luminária de base hexagonal regular.

Componentes: Ad, A, D, G, H, W.

"...Cada um tem um dever dentro do grupo, foi definido por mim, líder do grupo. A é a coordenadora que mantém a ordem e as responsabilidades; Ad, encarregada das pesquisas e da personalização. D, montagem da parte elétrica; H, encarregado de fazer o molde e a estrutura da luminária; G, não teve função nenhuma, participou raramente das reuniões porém não fez nada.

...foi muito bom este trabalho, aprendemos muitas coisas novas, uma "obra de arte", aprendemos como lucrar ou ter prejuízo com a construção de algo.

Peço desculpas professora Estela pela minha falha, mas aqui está o relatório, tirando as discussões com a A e a L, o trabalho foi ótimo".

Grupo 5: Luminária de base octagonal regular.

Componentes: L, J.A, J.D., J, M, Le.

“No presente relatório estará sendo apresentado toda a elaboração de uma luminária que durante o decorrer dos meses de outubro e novembro foi nosso principal projeto de Matemática.

Fomos orientados pela professora Estela que leciona aulas de matemática na escola Justina de Oliveira Gonçalves (local este onde ocorreu a elaboração do projeto) que ministrou aulas não somente em sala de aula mas também na sala de informática, procurando sempre gerar pleno esclarecimentos até o fim de nossa construção.

O projeto luminária foi apresentado para nós como TCC do mestrado da professora Estela, em seguida fomos convidados a também gerar a “nossa” luminária.

No início do projeto fomos orientados na escolha de um líder para o grupo, grupo este que deveria conter de cinco a seis componentes cada qual com sua devida tarefa.

...Após a elaboração do molde fomos orientados a comprar todo o material necessário para a construção. Após a compra destes fomos levados a sala de informática para entendermos o que estava sendo feito de uma forma mais tecnológica, com o auxílio do geogebra deixamos de lado o fato de cada grupo possuir o seu polígono e elaboramos todas as figuras propostas por nossa professora.

Entramos então na fase literalmente “construir’, levamos para casa todo o material e montamos a luminária, porém todos os cálculos foram feitos com o auxílio da professora durante as aulas.

Cada grupo teria o direit o de escolher a estética de sua luminária, em nosso caso escolhemos caveiras para decorar.

Após a montagem, entramos mais uma vez na área dos cálculos, mas agora não para definir tamanho ou qualquer outro requisito, mas sim para podermos encontrar a função lucro, venda e custo.

Aprendemos também a importância dos códigos de barra e a calcular o dígito de verificação que é calculado com simples contas de multiplicação e adição. Assim demos nome a luminária e elaboramos nosso próprio código de barras.

Para terminar, as luminárias de todos os grupos ficaram expostas e foram fotografadas, todas com seu preço de custo, venda e código de barras”.