Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO NÍVEL MÉDIO E SUA IMPORTÂNCIA PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DO ALUNO

Rodrigo Oliveira Santos

Salvador - Bahia
Março de 2015

O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO NÍVEL MÉDIO E SUA IMPORTÂNCIA PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DO ALUNO

Rodrigo Oliveira Santos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta.

Salvador - Bahia
Março de 2015

O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO NÍVEL MÉDIO E SUA IMPORTÂNCIA PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA DO ALUNO

Rodrigo Oliveira Santos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26 de março de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes
UFBA

Prof. Dra. Carla Percontini da Paixão
UEFS

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de ter ingressado no PROFMAT e por ter me dado força para continuar nos momentos em que pensei em desistir.

Agradeço também a minha família, meus amigos, colegas e todos os meus professores, tanto da escola, bem como os da faculdade, da pós-graduação e, finalmente, do mestrado.

Não posso deixar de agradecer aos meus colegas de trabalho, principalmente Rita Fragoso e Maria Antônia, que sempre me apoiaram e estiveram ao meu lado, dando um suporte nos momentos em que tinha que me dividir entre estudo e trabalho.

Agradeço ao meu orientador, professor doutor Enaldo Vergasta, que me ajudou a concluir de maneira honrosa esse trabalho, mesmo com todos os seus compromissos e afazeres pessoais, dedicando um pouco do seu tempo e sua atenção ao meu trabalho.

Para finalizar, agradeço a mulher que meu coração escolheu para ficar ao meu lado. Aline, minha amiga, companheira, namorada, noiva e esposa, que sempre esteve ao meu lado, que aguentou o mau humor causado pelo cansaço dos estudos, que me apoiou e me deu força para concluir esse trabalho e que, com certeza, está tão ou mais feliz do que eu pela finalização de mais esse ciclo em minha vida.

Enfim, agradeço a todos que passaram e que ainda estão em minha vida, pois de alguma forma todos contribuíram para o que eu sou hoje.

Resumo

Este trabalho é destinado a professores do nível médio e tem por objetivo demonstrar a importância do ensino da Matemática Financeira nos anos finais do ensino básico.

A Matemática Financeira tem um papel importante dentro da formação dos estudantes como cidadãos. O estudante precisa sair do ensino básico dominando os conteúdos dessa área da Matemática principalmente por serem conteúdos ligados ao dia a dia das pessoas.

Além disso, o presente trabalho procura mostrar a possibilidade de se trabalhar os conteúdos da Matemática Financeira com outros conteúdos matemáticos, tais como função afim, função exponencial, progressão aritmética e progressão geométrica.

São analisados também alguns livros utilizados no ensino médio e que abordam assuntos da Matemática Financeira e, para finalizar, são feitas algumas propostas de atividades que visam contribuir para uma melhora no fazer do professor e, por consequência, uma melhora na compreensão por parte dos alunos.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Ensino Médio, Livro Didático, Educação Financeira.

Abstract

This essay aimed to show the importance of teaching Financial Mathematics by high school teaches.

Financial Mathematics has a role in training students as citizens. By the end of high school, students must dominate the issues of this subject, meainly because they are used daily by people.

In addition, this essay claims to show the possibility of join the Financial Math with the basic school content, such as affine function, exponential function, arithmetic progression and geometric progression.

Math high school books are also analyzed to check their compatibility with Financial Math subjects. Finally, some activities are proposed to improve the teaching. Therefore, the students comprehension will be much better.

Keywords: Financial Mathematics, High School, Textbook, Financial Education.

Sumário

INTRODUÇÃO

A escola no mundo atual tem um papel cada vez mais importante no desenvolvimento da sociedade. O professor precisa se adequar às novas necessidades e anseios dos seus alunos. No ensino atual não há mais espaço para assuntos desconectados e aulas meramente expositivas. Uma das áreas do conhecimento que teve muitas mudanças foi a Matemática. A Matemática atual exige que o aluno pense, trace estratégias de resolução e argumente logicamente.

Porém, para que o aluno alcance o que é desejado, é preciso que o professor esteja caminhando lado a lado com as mudanças. A qualificação profissional se faz indispensável no mundo atual. Não há como querer alunos motivados quando as aulas não os estimulam, não os provoca, não os desafia. E esse é um dos papéis do professor. Fazer com que o aluno queira aprender aquilo que ele está ensinando.

Os alunos, principalmente os do ensino médio, estão cada vez mais interessados em conteúdos que tenham aplicação na sua vida. Alguns desses alunos demonstram uma desmotivação quando a Matemática é trabalhada de forma burocrática, com questões que não contribuem para o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio.

> "Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais" (BRASIL,2000, P. 40)

Seguindo essa linha, é de fundamental importância que o professor de Matemática repense a maneira de abordar determinados conteúdos, dentre eles os assuntos relacionados à Matemática Financeira. Desde o 5^o ano do ensino fundamental, quando o aluno começa a ter contato com porcentagem, o professor já pode, aos poucos, começar a falar de Matemática Financeira, sem a necessidade de formalizar alguns conceitos.

Trabalhar de maneira diferente essa parte da Matemática não significa apenas mudar o estilo da aula. É preciso, principalmente, mudar a forma como se aborda o tema. Cada vez mais cedo os alunos estão tendo contato com o dinheiro e bens de consumo, seja através de mesadas ou até mesmo fruto do próprio trabalho. É de total importância que a Matemática Financeira sirva como suporte para uma educação financeira do aluno e o ajude a manter uma relação saudável com o dinheiro.

> “Mais amplamente integrado à vida comunitária, o estudante da escola de nível médio já tem condições de compreender e desenvolver consciência mais plena de suas responsabilidades e direitos, juntamente com o aprendizado disciplina”. (BRASIL,2000,p.6)

Com o crescimento econômico que o Brasil vivenciou nos últimos anos tornou-se cada vez mais importante que as pessoas compreendam alguns conceitos da Matemática Financeira, a fim de evitar desequilíbrios nas suas finanças. A todo instante a população é bombardeada com propagandas anunciando descontos, empréstimos, financiamentos, consórcios e muito mais. É preciso estar atento, não se deixar levar por impulsos e raciocinar antes de adquirir um bem, fazer um investimento ou um empréstimo.

Porém esse raciocínio financeiro não é desenvolvido da noite para o dia. Ele é fruto de um estudo de conceitos fundamentais da Matemática Financeira durante a vida escolar, associado a exercícios que simulem situações que o estudante pode vir a se deparar ao longo da sua vida. Paralelo a isso, deve-se trabalhar com o aluno alguns princípios da educação financeira, tais como o consumo consciente, o planejamento financeiro e a análise das vantagens e desvantagens de determinados investimentos.

Esse trabalho tem como objetivo principal evidenciar a necessidade de um ensino mais consistente no que diz respeito à Matemática Financeira, com problemas voltados à realidade do aluno e a situações que eles podem vir a se deparar durante a sua vida. Será exposta também a possibilidade de o docente estabelecer conexões entre conteúdos de outras áreas da Matemática com os conteúdos da Matemática Financeira, tais como função afim, função exponencial, progressão aritmética e progressão geométrica.

Aliado a isso deve ser feito um trabalho paralelo para educar financeiramente o aluno, tendo como suporte a Lei de Diretrizes e Bases e os Parâmetros Curriculares Nacionais. Uma dos objetivos do ensino da Matemática Financeira no ensino básico é dar uma base sólida aos alunos para que eles sintam-se capazes de lidar com suas finanças e bens.

Será discutida também a maneira como alguns livros didáticos abordam alguns conteúdos como juros simples, compostos e sistemas de amortizações e como o uso de recursos tecnológicos pode auxiliar no estudo desses conteúdos.

Além disso, ao fim do trabalho, algumas questões serão sugeridas para serem trabalhadas em sala de aula; questões essas que demonstram como é possível trabalhar os conteúdos da Matemática Financeira relacionando-os com conteúdos de outras áreas da Matemática, e também como esses conteúdos podem ser explorados em situações mais próximas do cotidiano dos alunos.

Capítulo 1

A Matemática Financeira nas escolas

1.1 O Ensino da Matemática Financeira

Pode-se dizer que o ensino da Matemática Financeira nos níveis fundamental e médio tem como um dos objetivos preparar o aluno para as operações financeiras que irão surgir ao longo de sua vida. Através da Matemática Financeira, o aluno irá adquirir técnicas e conhecimentos que lhe permitirão o uso mais consciente dos seus recursos financeiros, tornando-se apto a administrar com propriedade as suas finanças, sendo capaz de analisar riscos e vantagens antes de tomar decisões em situações que envolvam a sua vida financeira.

> "Educação financeira sempre foi importante aos consumidores, para auxiliá-los a orçar e gerir a sua renda, a poupar e investir, e a evitar que se tornem vítimas de fraudes. No entanto, sua crescente relevância nos últimos anos vem ocorrendo em decorrência do desenvolvimento dos mercados financeiros, e das mudanças demográficas, econômicas e políticas." (SAVOIA,2007,P.2)

O ensino da Matemática Financeira não pode se restringir apenas a uma das séries do ensino médio, dada a importância desse tópico para a vida adulta de um cidadão. Ainda quando criança, as pessoas têm desejos, vontade de possuir determinados brinquedos, aparelhos eletrônicos, entre outros. Sendo assim é necessário que, ainda na infância, seja trabalhada a relação consumo x consumismo, mostrando para a criança que qualquer compra deve ser devidamente planejada e não ser feita de maneira impulsiva. É preciso que as escolas percebam que, por se tratar de uma parte da Matemática com grande aplicabilidade, a Matemática Financeira pode, e deve, ser trabalhada de forma gradual de acordo com a idade e capacidade cognitiva do aluno.

Nas escolas públicas do estado da Bahia, de acordo com os Conteúdos Pedagógicos – Ensino Médio e as Orientações Curriculares 6^o ao 9^o ano – Ensino Fundamental, documentos do governo disponíveis no site da Secretaria de Educação (escolas.educacao.ba.gov.br), pode-se perceber uma tentativa de adequação a essa demanda da sociedade atual. Ao se fazer uma análise dos dois documentos citados acima percebe-se uma preocupação com que o aluno tenha contato com tópicos referentes a Matemática Financeira desde o 6^o ano do ensino fundamental até a 3^a série do ensino médio, exceto na 2^a série do ensino médio.

Já na rede privada de ensino do estado da Bahia, tem-se que parte das escolas apenas trabalham a Matemática Financeira na 1^a ou na 2^a série do ensino médio. Do 5^o ao 9^o ano do ensino fundamental, conceitos básicos para a compreensão da Matemática Financeira são trabalhados, como razão, proporção, regra de três simples e composta e porcentagem.

Por ser um tema muito mais voltado para o futuro do aluno do que para as provas de ingresso nas faculdades, algumas escolas privadas negligenciam o ensino da Matemática Financeira, reservando pouco espaço na sua grade curricular para os temas voltados a essa área da Matemática.

Se muitos alunos se perguntam durante as aulas de Matemática em que o professor está ensinando assuntos como polinômios ou trigonometria, por exemplo, onde eles irão usar aquele conteúdo que está sendo ensinado, o mesmo não pode ser dito em relação ao ensino da Matemática Financeira. Vivemos em um país capitalista, onde o crescimento da renda per capita trouxe consigo um maior poder de consumo e, consequentemente, um aumento no número de pessoas endividadas. A falta de conhecimento na área faz com que muitas pessoas não se planejem devidamente e acabem caindo na tentação que é a grande oferta de crédito do mercado atual.

A vantagem de se trabalhar os tópicos relacionados à Matemática Financeira é a grande aplicabilidade dos conteúdos, justamente por estes serem atuais e fáceis de serem trabalhados devido ao grande número de exercícios contextualizados que despertam o interesse e estimulam o raciocínio. A partir do momento que o aluno visualiza a utilidade de um determinado conteúdo, ele se sente motivado a compreender, pois na cabeça dele, aquele aprendizado não é para responder a uma avaliação, e sim para a sua vida, o seu futuro.

1.2 Matemática Financeira e Educação Financeira

Dentro do contexto atual, não basta apenas trabalhar com o aluno os conteúdos da Matemática Financeira. É necessário que o aluno saia da escola sabendo gastar, economizar e aplicar os seus recursos financeiros. De nada vão lhe valer os conteúdos soltos.

Nesse sentido, a educação financeira tornou-se uma grande preocupação em diversos países. É indiscutível a relação direta entre o crescimento da economia do país e a maneira que a sua população lida com o dinheiro.

Precisa-se trabalhar com os alunos a relação consumo x consumismo, a importância do planejamento financeiro, seja no dia a dia da própria casa, para efetuar operações de longo prazo, como financiamento imobiliário ou o financiamento de um veículo ou para decidir qual a melhor forma de aplicar o seu dinheiro.

A escola não pode se esquivar dessa sua função e os professores, como educadores que são, devem preparar os seus alunos para a vida adulta, e educar financeiramente faz parte dessa preparação para essa fase da vida.

> "Por fim, não há como negar que a educação financeira é fundamental na sociedade brasileira contemporânea, visto que influencia diretamente as decisões econômicas dos indivíduos e das famílias. Desse modo, torna-se extremamente necessário ampliar a visão sobre o assunto e discutir os paradigmas que surgem da inserção da educação financeira no contexto político." (SAVOIA,2007,P.2)

Capítulo 2

A Matemática Financeira no Ensino Médio

Como já foi dito anteriormente, apesar da Matemática Financeira ser trabalhada formalmente no ensino médio, muitos conteúdos relacionados a essa área são trabalhados desde o 5^o ano do ensino fundamental, quando o aluno começa a aprender frações, números decimais e porcentagem. No decorrer dos outros anos, os alunos aprofundam o estudo sobre porcentagem e trabalham outros tópicos importantes, tais como razão e proporção, além de todo o trabalho algébrico que é desenvolvido no 8^o ano e que é de total importância para o estudo das funções, das progressões e, consequentemente, para o estudo da Matemática Financeira.

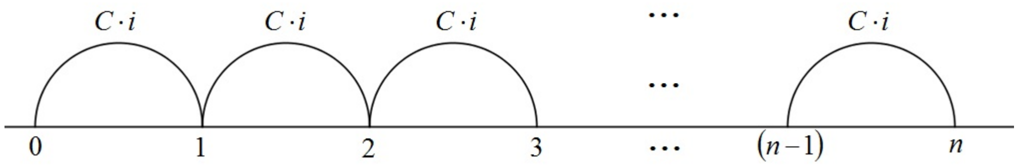
No ensino fundamental é onde o aluno aprenderá conteúdos fundamentais para o bom entendimento da Matemática que é trabalhada no ensino médio. Não há como imaginar um aluno saindo do ensino fundamental sem conteúdos como razão, proporção e porcentagem. Do 5^o ao 9^o ano do ensino fundamental, os professores devem trabalhar questões que façam os alunos irem além da simples aplicação das regras que envolvem esses conteúdos. É de extrema importância que as situações problema levem o aluno a pensar, traçar estratégias de resolução para, a partir daí, resolver as questões.

A seguir serão tratados conteúdos específicos da Matemática Financeira e como eles podem ser trabalhados em sala de aula, a fim de que o professor consiga atingir resultados mais satisfatórios ao ensinar esses conteúdos para os seus alunos.

2.1 Juros Simples e Juros Compostos

Define-se como juros o rendimento que se obtém quando se empresta dinheiro por um período determinado. Em contrapartida, para quem adquire um empréstimo ou faz uma compra a crédito, o juro é o nome dado ao acréscimo que deverá ser pago pela utilização do dinheiro ou pelo parcelamento do valor do bem adquirido.

O regime de capitalização simples ou de juros simples é o tipo de capitalização onde os juros gerados em cada período são sempre os mesmos e são dados pelo produto do capital pela taxa, conforme mostra o esquema abaixo.



Assim, os juros simples da aplicação será igual à soma de n parcelas iguais a , ou seja,

$$J = \underbrace{C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + ... + C \cdot i}_{\text{n parcelas}}$$

logo

$$J = C \cdot i \cdot n \tag{2.1}$$

Já no regime de capitalização composta, ou de juros compostos, o cálculo é diferente. Nesse regime os juros do 1^o período correspondem ao produto da taxa pelo capital. Para calcular os juros do 2^o período deve-se, primeiramente, acrescentar ao capital os juros obtidos no 1^o, obtendo um novo valor. Os juros do 2^o período serão o resultado do produto da taxa pelo valor obtido anteriormente. Os juros dos próximos períodos são calculados seguindo esse mesmo padrão, o produto da taxa pela soma do capital com os juros dos períodos anteriores.

Seguindo esse procedimento, temos que:

Montante após 1 período:

$$M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i) \tag{2.2}$$

Montante após 2 períodos:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1 \cdot (1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2 \tag{2.3}$$

Montante após 3 períodos:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3 \tag{2.4}$$

Repetindo-se esse processo n vezes, chegamos em

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = M_{n-1}(1+i) = C(1+i)^{n-1}(1+i) = C(1+i)^n \tag{2.5}$$

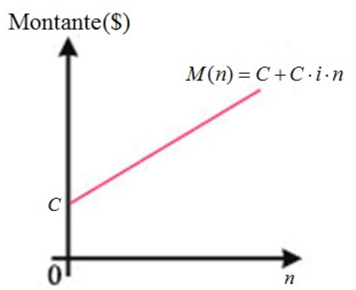
Dessa forma, pode-se dizer que a fórmula que permite calcular o montante de uma aplicação no regime de juros compostos é

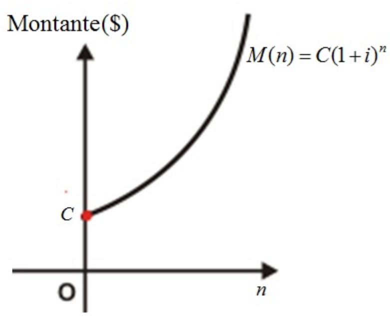
$$M = C(1+i)^n \tag{2.6}$$

sendo n um número racional não negativo.

É importante que o aluno compreenda bem as diferenças entre os regimes de capitalização para evitar possíveis surpresas durante a vida. O professor durante o trabalho com juros simples e compostos tem uma grande oportunidade de relacioná-los com conteúdos anteriormente trabalhados, tais como as progressões aritméticas e geométricas e as funções afim e exponencial.

Após mostrar as fórmulas citadas acima para os seus alunos, o professor poderá esclarecer o motivo dos juros simples estarem associados à função afim e os juros compostos estão associados à função exponencial. Neste momento a utilização dos gráficos dessas duas funções facilitará a compreensão dos alunos.





No caso dos juros simples, o montante está relacionado com o período através de uma função afim cujo coeficiente angular é $C \cdot i$ e o coeficiente linear é C.

No gráfico da direita tem-se uma função cuja variável independente é o expoente da potência de base $1+i$. Nesse caso a função é do tipo exponencial. Nas duas situações o domínio das funções é o conjunto dos números reais não negativos.

Além de relacionar com os conteúdos anteriores, ao ensinar juros simples e compostos o professor deve mostrar aos seus alunos em quais situações eles são aplicados, evidenciando que os juros simples são utilizados em situações de curto prazo, principalmente quando o período é menor do que 1, pois nesses casos o regime de capitalização simples rende mais que o regime de capitalização composta. Um exemplo disso são os juros cobrados para atrasos no pagamento de boletos bancários de mensalidades escolares, condomínios, entre outros. Normalmente, nesses casos, a taxa é dada ao mês, mas os juros são calculados por dia de atraso. Em situações assim, a utilização da capitalização simples é mais vantajosa para o credor.

Já os juros compostos são os mais utilizados no dia a dia, pois a maior parte das operações são para períodos superiores a 1, e nesses casos o regime de capitalização composta tem um rendimento maior, pois o crescimento nesse regime é exponencial, enquanto na capitalização simples é um crescimento linear (figura 1). Dívida de cartão de crédito é exemplo de situação onde os juros cobrados pelo atraso no pagamento são compostos. Além do crescimento exponencial da dívida, que a faz crescer cada vez mais com o passar do tempo, as taxas cobradas no Brasil pelo atraso de pagamento nesse exemplo estão entre as mais altas do mundo.

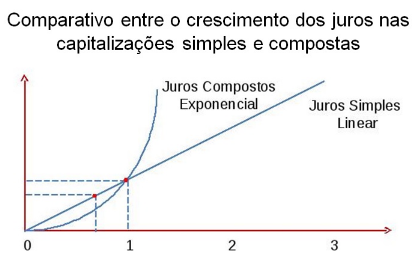


FIGURA 1

Observando o gráfico, o aluno poderá perceber que, para n=1, o juro obtido na capitalização simples será o mesmo que na capitalização composta. Isso pode ser facilmente demonstrado algebricamente:

Capitalização simples: para $n = 1$, temos $M = C + C \cdot i \cdot 1 \Rightarrow M = C + C \cdot i$

Capitalização composta: para $n = 1$, temos $M = C \cdot (1 + i)^1 \Rightarrow M = C + C \cdot i$

2.2 Séries de Capitais

Ao trabalhar os juros compostos, o docente pode aproveitar e abordar situações que explorem as séries de capitais e valor atual de um conjunto de capitais.

Imagine uma situação onde uma pessoa tenha uma dívida de R$ 15000,00, que vence daqui a um mês. Suponhamos ainda que ela consiga aplicar seu dinheiro a juros compostos, a taxa de 2% a.m. Quanto essa pessoa deverá aplicar hoje àquela taxa para ter dinheiro suficiente para pagar a dívida?

Para resolver essa questão, deve-se encontrar o capital que, aplicado por um mês a juros compostos de 2% a.m., gera um montante de R$ 15000,00. Assim, indicando esse capital por C, devemos ter:

$$C \cdot (1,02) = 15000 \tag{2.7}$$

E, portanto:

$$C = \frac{15000}{1,02} = 14705,88 \tag{2.8}$$

O valor encontrado é chamado de valor atual.

A situação acima pode ser ampliada para uma situação envolvendo dois ou mais valores.

Suponha que uma pessoa tenha dívidas de R$ 2000,00, R$ 3500,00 e R$ 5000,00, que vencem dentro de 2, 5 e 6 meses, respectivamente. Quanto essa pessoa deverá aplicar hoje, a juros compostos de 1% a.m. para poder pagar os compromissos?

Nesse caso, o valor que deve ser aplicado hoje para que a pessoa possa quitar as dívidas nos prazos estabelecidos corresponde ao valor atual dos valores à taxa de 1% a.m. Para encontrar esse valor considere:

$V_1 \Rightarrow$ Valor atual referente à dívida de R$ 2000,00;

$V_2 \Rightarrow$ Valor atual referente à dívida de R$ 3500,00;

$V_3 \Rightarrow$ Valor atual referente à dívida de R$ 5000,00;

Sendo assim, temos que:

$$V_1 \cdot (1,01)^2 = 2000 \Rightarrow V_1 = \frac{2000}{1,01^2} \tag{2.9}$$

$$V_2 \cdot (1,01)^5 = 3500 \Rightarrow V_2 = \frac{3500}{1,01^5} \tag{2.10}$$

$$V_3 \cdot (1,01)^6 = 5000 \Rightarrow V_3 = \frac{5000}{1,01^6} \tag{2.11}$$

O valor total que essa pessoa precisará aplicar será dado pela soma dos valores atuais referentes às três dívidas. Dessa forma,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow V = \frac{2000}{1,01^2} + \frac{3500}{1,01^5} + \frac{5000}{1,01^6} \tag{2.12}$$

De modo geral, dado um conjunto de valores monetários Y_1 na data 1, Y_2 na data 2, Y_3 na data 3 e assim por diante até o valor Y_n na data n, chama-se de valor atual desse conjunto, a uma taxa i, ao valor indicado por V, que,aplicado a taxa i, gera as rendas $Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n$, isto é,

$$PV = \frac{Y_1}{(1+i)^1} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + ... + \frac{Y_n}{(1+i)^n} \tag{2.13}$$

Se a série de capitais é formada por um conjunto de pagamentos (ou recebimentos) de mesmo valor, que se encontram dispostos em períodos de tempo constantes, diz-se que a série é uniforme.

2.3 Sequência Uniforme de Termos Postecipados

Uma série uniforme de pagamentos ou recebimentos postecipados é uma série em que o primeiro pagamento ou recebimento ocorre na data 1. Denotemos os pagamentos (ou recebimentos) por PMT e o valor presente como PV. Para o cálculo do valor presente de uma série postecipada, temos que:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + ... + \frac{PMT}{(1+i)^n} \tag{2.14}$$

O segundo membro dessa expressão é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita cuja razão é igual $\frac{1}{(1+i)}$ e o primeiro termo igual a $\frac{PMT}{(1+i)}$. Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG finita, temos que

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^{n}-1}}{\frac{1}{(1+i)} - 1} \tag{2.15}$$

Arrumando o segundo termo da equação, encontramos que

$$PV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \tag{2.16}$$

Há também situações em que se pode usar o mesmo método para obter o valor acumulado de um conjunto de capitais que compõem uma série. Nesse caso, o objetivo é encontrar o valor futuro para pagamentos ou depósitos de mesmo valor em um prazo n. Indicando o valor futuro por FV, temos que

$$FV = PMT(1+i)^{n-1} + PMT(1+i)^{n-2} + ... + PMT(1+i)^1 \tag{2.17}$$

O segundo membro dessa igualdade é a soma dos termos de uma PG finita cuja razão é igual a $\frac{1}{1+i}$ e o primeiro termo é $PMT(1+i)^{n-1}$. Aplicando mais uma vez a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG finita, obtemos que

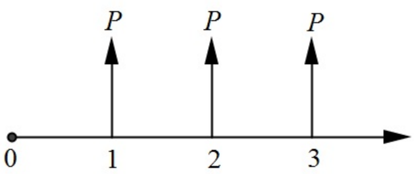
$$FV = PMT \cdot (1+i)^n \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1} \tag{2.18}$$

Desenvolvendo o segundo termo, reduzimos essa igualdade para

$$FV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.19}$$

Exemplo 1. Um eletrodoméstico é vendido à vista por R$ 1200,00. Qual deve ser o valor da prestação na venda em três prestações mensais iguais sem entrada, se o custo financeiro do lojista é de 4%a.m?

Chamando de P o valor de cada prestação, os pagamentos podem ser representados pela figura abaixo:



Temos que $PV = 1200$ e $i = 0,04$. Aplicando a fórmula de valor presente, temos que

$$1200 = P \cdot \frac{(1+0,04)^3 - 1}{(1+0,04)^3 \cdot 0,04} \tag{2.20}$$

e encontra-se então que $P = 432,42$.

Exemplo 2. Um produto no valor de R$ 100,00 foi comprado em duas prestações de R$ 60,00 e R$ 55,00, para pagamento após 1 mês e após 2 meses da compra, respectivamente. Qual a taxa de juros mensal aplicada nesse parcelamento?

Nessa situação, temos que:

$$100 = \frac{60}{(1+i)} + \frac{55}{(1+i)^2} \tag{2.21}$$

Considerando $(1+i) = x$ ficamos com a equação $100x^2 - 60x - 55 = 0$. Resolvendo essa equação, encontra-se $x_1 = 1,1$ e $x_2 = -0,5$. Como $(1+i) = x$, e $i > 0$,então a raiz que convém é 1,1.

Sendo assim, temos que $1,1 = 1 + i \Rightarrow i = 0,1 = 10\%$ ao mês.

Exemplo 3. Um empréstimo de R$ 1000,00 foi adquirido para ser pago em três prestações de R$500,00, R$ 450,00 e R$ 400,00 em 30,60 e 90 dias, respectivamente. Qual a taxa de juros mensal aplicada nesse parcelamento?

Esse exemplo é semelhante ao exemplo anterior, porém recairá em uma equação do 3^o grau. De acordo com os dados, tem-se que:

$$1000 = \frac{500}{(1+i)} + \frac{450}{(1+i)^2} + \frac{400}{(1+i)^3} \tag{2.22}$$

Substituindo $(1+i)$ por x, ficamos com $1000x^3 - 500x^2 - 450x - 400 = 0$.

A resolução dessa equação depende da utilização de recursos tecnológicos, já que não há uma fórmula para resolver uma equação do 3^o grau como há para resolver uma equação do 2^o grau. Utilizando uma calculadora científica, encontra-se apenas uma raiz real, aproximadamente igual a 1,17. Sendo $(1+i) = x \Rightarrow i = 0,17 = 17\%$.

Exemplo 4. Uma pessoa deposita R$ 600,00 mensalmente em uma aplicação com taxa de juros compostos igual a 1,5% a.m. Qual o valor obtido por essa pessoa imediatamente após efetuar o 30^o depósito? Nesse caso, devemos encontrar o valor futuro, sendo $PMT = 600,00$ e $i = 0,015$. Aplicando a fórmula para valor futuro, temos que

$$FV = 600 \cdot \frac{(1+0,015)^{30} - 1}{0,015} \tag{2.23}$$

e encontra-se que $FV = 22523,21$.

Exemplo 5. Senhor Lucas poupa todo mês R$ 300,00 e aplica esse valor num fundo que rende juros compostos. Sabendo que, após o segundo depósito, o saldo no fundo será de R$ 606,00, qual a taxa de juros mensal desse fundo? Para resolver essa situação deve-se utilizar a fórmula de valor futuro. Analisando a situação, tem-se que:

$$606 = 300 \cdot \frac{(1+i)^2 - 1}{i} \Rightarrow 606 = 300 \cdot \frac{1 + 2i + i^2 - 1}{i} \Rightarrow \tag{2.24}$$

$$606 = 300 \cdot \frac{2i + i^2}{i} \Rightarrow 606 = 300 \cdot (2+i) \Rightarrow \tag{2.25}$$

$$606 = 600 + 300i \Rightarrow i = \frac{6}{300} = 0,02 = 2\% a.m. \tag{2.26}$$

Exemplo 6. Imagine que no exemplo anterior o Senhor Lucas aplique R$ 100,00 mensalmente em um outro fundo que também rende juros compostos. Nesse caso, qual será a taxa de juros mensal desse fundo sabendo que após o 4o depósito o senhor Lucas obteve R$ 464,10? Utilizando a mesma fórmula citada na resolução anterior, temos que:

$$464,1 = 100 \cdot \frac{(1+i)^4 - 1}{i} \Rightarrow 464,1 = 100 \cdot \frac{1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 - 1}{i} \Rightarrow \tag{2.27}$$

$$464,1 = 100 \cdot \frac{4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4}{i} \Rightarrow 464,1 = 100 \cdot (4 + 6i + 4i^2 + i^3) \Rightarrow \tag{2.28}$$

$$4,641 = 4 + 6i + 4i^2 + i^3 \Rightarrow i^3 + 4i^2 + 6i - 0,641 = 0 \tag{2.29}$$

Diferentemente do exemplo 5, a resolução dessa questão recaiu em uma equação do 3^o grau. Logo, para resolver essa equação, deve-se fazer uso de algum recurso tecnológico, como no exemplo 3. Nesse caso, a raiz real encontrada é igual a 0,1 . Com isso, temos que a taxa procurada é igual a 10%.

2.4 Sistemas de Amortização

A amortização é um processo de quitação de uma dívida através de pagamentos periódicos de prestações, realizados segundo um planejamento. Cada prestação corresponde à soma do reembolso do capital com o pagamento dos juros sobre o saldo devedor do período anterior. Os sistemas de amortização mais utilizados no Brasil são o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês de Amortização (também conhecido como Tabela Price).

Cada sistema de amortização tem as suas vantagens e desvantagens e cabe ao professor mostrar para os alunos essas vantagens e desvantagens para que eles possam estar devidamente preparados nas situações que exijam tais conhecimentos.

2.4.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Nesse sistema, como o nome já diz, as amortizações são constantes. O valor da amortização é o resultado da divisão do valor emprestado pelo número de prestações do pagamento. Em relação aos juros, o valor diminui com o tempo, tendo em vista que ele é calculado em cima do saldo devedor, que diminui à medida que as parcelas são pagas. Com isso, as prestações decrescem com o passar do tempo.

No SAC, a pessoa que adquiriu o financiamento tem uma maior tranquilidade em relação ao futuro, já que a longo prazo o valor das prestações diminuirá, tendo um impacto menor no orçamento familiar daquela pessoa. A desvantagem desse sistema é que os valores iniciais são maiores. O SAC é bastante utilizado nos financiamentos imobiliários. Observe o exemplo a seguir:

Um empréstimo de R$ 120.000,00 a ser pago em 12 meses a uma taxa de juros de 1% ao mês pelo SAC. Para obter o valor da amortização, devemos dividir 120000 por 12, encontrando como resultado 10000. Então o valor da amortização é R$ 10.000,00 e temos a tabela a seguir.

Nº Prestação	Juros	Amortização	Prestação	Saldo Devedor
0				120.000
1	1.200	10.000	11.200	110.000
2	1.100	10.000	11.100	100.000
3	1.000	10.000	11.000	90.000
4	900	10.000	10.900	80.000
5	800	10.000	10.800	70.000
6	700	10.000	10.700	60.000
7	600	10.000	10.600	50.000
8	500	10.000	10.500	40.000
9	400	10.000	10.400	30.000
10	300	10.000	10.300	20.000
11	200	10.000	10.200	10.000
12	100	10.000	10.100	0

Note que o juro é sempre 1% do saldo devedor do mês anterior e a prestação é a soma da amortização e o juro. Sendo assim, o juro é decrescente e o mesmo acontece com as prestações.

2.4.2 Sistema de Amortização Francês (Tabela Price)

No sistema Price, como é mais conhecido, as prestações são fixas. Os juros são decrescentes, pois são calculados em cima do saldo devedor, e as amortizações são crescentes, para que dessa forma compense o decréscimo dos juros e mantenha o valor das prestações inalterado. Para quem adquire esse financiamento a vantagem é que as prestações iniciais são menores que as do SAC, mas, comparando ainda com o SAC, o saldo devedor diminui mais lentamente. No caso da tabela Price, vamos utilizar a fórmula citada para o valor presente de uma série de capitais

$$PV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \tag{2.30}$$

A partir dessa igualdade, podemos concluir que

$$PMT = PV \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \tag{2.31}$$

Tomemos como exemplo um empréstimo de R$ 1000,00 com taxa de juros de 3% ao mês, a ser pago em 4 parcelas mensais. Então o valor da prestação é dado por

$$PMT = 1000 \cdot \frac{(1+0,03)^4 \cdot 0,03}{(1+0,03)^4 - 1} \cong 269,03 \tag{2.32}$$

O valor da primeira prestação inclui a parcela de R$30,00, resultado da aplicação da taxa de juros sobre o saldo devedor do mês anterior. Logo o valor da primeira amortização é R$239,03 (=269,03-30,00) e o saldo devedor passa a ser R$ 760,97 (=1000,00-239,03). Nos meses seguintes, como o saldo devedor diminui a cada mês, o valor dos juros é decrescente, logo a amortização é crescente, uma vez que a prestação é constante.

Mês	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0				1.000,00
1	239,03	30,00	269,03	760,97
2	246,20	22,83	269,03	514,78
3	253,58	15,45	269,03	261,19
4	261,19	7,84	269,03	0,00

Tomando como base as características citadas sobre os dois principais sistemas de amortização utilizados no Brasil, pode-se observar na tabela abaixo um comparativo rápido entre eles.

Tabela 1 – Comparativo entre os principais sistemas de amortização

Comparativo	SAC	PRICE
Prestações = Amortização + Juros	Decrescentes	Fixas
Amortizações	Constantes	Crescentes
Juros	Decrescentes	Decrescentes
Percentual da renda familiar que pode ser comprometida	25%	25%
Prazo máximo de financiamento	35 anos	20 anos
Vantagem	Saldo devedor diminui mais rapidamente em relação ao PRICE	Prestação inicial menor em relação à gerada pelo SAC
Desvantagem	Prestação inicial maior	Saldo devedor diminui mais lentamente em relação ao SAC

Fonte: cehab.org

Capítulo 3

Análise de Livros Didáticos

Antes da análise de livros didáticos, cabe uma análise das recomendações sobre a maneira que esses livros devem abordar o ensino da Matemática Financeira. Segundo o Guia de Livros Didáticos (PNLD 2012) do Ministério da Educação:

> "Na matemática financeira, os conteúdos mais abordados são porcentagem, acréscimo e desconto, juros simples e compostos. Observamos, na abordagem desses tópicos, muita ênfase ao emprego direto de fórmulas, o que não é desejável."

Além disso, o Guia destaca que a Matemática Financeira deve ser trabalhada com problemas adequados e atuais, visando preparar o aluno para a cidadania.

Também deve-se observar nos livros didáticos se há ou não o estímulo ao uso das tecnologias. Alguns conteúdos matemáticos, como por exemplo juros compostos, muitas vezes têm problemas com um número excessivo e cansativo de cálculos. O uso da calculadora não só facilitará o desenvolvimento da resolução do problema, como ajudará a diminuir o desestímulo que muitos alunos vivenciam em situações com inúmeros cálculos.

A seguir serão analisados alguns livros de Matemática para o ensino médio utilizados em escolas do Brasil e que abordam a Matemática Financeira. A maneira como os livros abordam os conteúdos bem como os exercícios serão os alvos principais da análise.

3.1 Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 11 - Autores: Gelson Iezzi, Samuel Hazzan, David Degenszajn

A coleção Fundamentos de Matemática Elementar é uma das coleções mais conhecidas e utilizadas em todo o Brasil. Ao todo a coleção possui 11 volumes, sendo o último deles destinado ao ensino da Matemática Comercial, da Matemática Financeira e da Estatística Descritiva. O primeiro capítulo começa com uma revisão sobre razão, proporção, grandezas diretamente e inversamente proporcionais e porcentagem. Após trabalhar a parte teórica de cada um desses assuntos, o livro traz uma série de exercícios. Os primeiros exercícios de cada uma das sequências são diretos, visando a fixação dos conceitos, enquanto os exercícios seguintes buscam situações mais contextualizas, mais próximas do dia a dia do aluno.

Após essa breve revisão de conceitos básicos o capítulo continua com três tópicos: variação percentual, inflação e deflação.

Em relação a esses três itens é importante destacar a abordagem da inflação e da deflação. Muitos alunos ouvem e leem esses termos nas muitas notícias a que eles têm acesso e alguns desses alunos não têm nem ideia do que se trata. Ao abordar esses assuntos, os autores demonstram estar em sintonia com as novas demandas do ensino da Matemática.

Ao retratar esses temas, o autor procurou usar uma linguagem mais simples, que facilitasse o entendimento por parte dos alunos. Além disso, o autor dá um destaque importante à existência de índices diferentes que são utilizados para o cálculo da inflação.

No segundo capítulo, o livro entra nos assuntos principais da Matemática Financeira, trabalhando bem a parte teórica e com exemplos bem explicados. O capítulo traz um grande número de exercícios e com variado grau de dificuldade. Além disso, o livro, em sua maioria, utiliza situações que fazem sentido para o aluno, situações que as pessoas podem vivenciar no dia a dia.

Além de situações básicas envolvendo juros simples e juros compostos, o autor retrata também o conceito de valor atual e de sequência uniforme de pagamentos, relacionando este último com progressão geométrica.

Porém, o livro não trabalhou com os sistemas de amortização. Em nenhuma parte do capítulo há explicação sobre o que são e quais são os sistemas de amortização mais utilizados. Apesar desse tópico não fazer parte do currículo básico, alguns autores já defendem a inclusão desses assuntos nos livros didáticos tendo em vista a relevância destes para a vida dos alunos.

3.2 Matemática, Interação e Tecnologia – Volume 2 - Autores: Rodrigo Dias Balestri, Eduardo da Rosa Neto

O livro inicia o capítulo que trata sobre Matemática Financeira com alguns comentários, ressaltando a importância dos conteúdos da Matemática Financeira no cotidiano de muitas pessoas. Essa introdução demonstra a preocupação dos autores em atrair a atenção dos alunos para essa área da Matemática e estimula os alunos a seguirem adiante no capítulo.

Primeiramente, o capítulo apresenta uma breve revisão sobre porcentagem, trazendo uma sequência de atividades resolvidas para, em seguida, trazer uma sequência de atividades para os alunos resolverem individualmente ou em grupo. Os exercícios são bastante contextualizados, abordando temas do alcance do aluno. Ao longo de todo o capítulo, o livro utiliza essa estratégia de apresentar exercícios resolvidos para depois trazer os exercícios que deverão ser resolvidos pelos alunos.

Após a primeira sequência de exercícios, o livro trabalha com a ideia de descontos e acréscimos sucessivos. Antes de tratar esses assuntos formalmente, os autores trabalham com situações problemas para ilustrar do que se trata os assuntos. Em seguida são apresentadas fórmulas para descontos e acréscimos sucessivos.

Ao iniciar o estudo dos juros simples e compostos, os autores formalizam alguns conceitos que serão importantes para o entendimento do assunto. Na parte de juros simples, talvez por não se tratar de um assunto dos mais complexos, o livro peca na quantidade de exemplos. Apenas um exemplo é mostrado antes de apresentar a fórmula utilizada para o cálculo dos juros na capitalização simples. Um ponto positivo é que o livro, após apresentar o conteúdo, apresenta a relação do assunto com a função afim e com a progressão aritmética.

Na parte de juros compostos, o livro também introduz o conteúdo com um exemplo. O fato dos autores terem trabalhado a ideia de acréscimos sucessivos facilita bastante o trabalho com juros compostos, já que os autores retratam os juros compostos como um caso particular de acréscimos sucessivos em que as taxas são todas iguais. Ao utilizar essa estratégia a apresentação da fórmula usada na capitalização composta se tornou de fácil entendimento. Assim como nos juros simples, os autores também relacionam os juros compostos com assuntos anteriormente trabalhados. Nesse caso os assuntos relacionados são função exponencial e progressão geométrica.

Antes de iniciar o assunto seguinte o livro faz duas considerações importantes. Uma delas é o uso da calculadora científica para auxiliar nos cálculos. Outra é a relação dos juros simples e compostos com as funções afim e exponencial, detalhando o que já havia sido comentando anteriormente.

Para finalizar o capítulo, o livro trata de dois sistemas de amortização, o SAC e o PRICE. O livro explica o funcionamento de cada um desses sistemas e mostra como se calcula a prestação de um determinado financiamento nesses dois sistemas. Visando um melhor entendimento, o livro traz uma tabela em cada um dos sistemas para ilustrar o que estava sendo explicado.

As últimas páginas do capítulo são dedicadas à exercícios extras, que servem como uma revisão de tudo que foi dito ao longo do capítulo.

Um aspecto positivo merece destaque. Durante todo o capítulo os autores utilizam textos sobre assuntos relacionados à Matemática Financeira, tais como a bolsa de valores, o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) e a poupança.

Pode-se dizer que o livro atende as recomendações do PNLD 2012 e dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio.

3.3 Aprender e Aplicar Matemática – Volume 1 - Autor: Antonio dos Santos Machado

O volume 1 da coleção Aprender e Aplicar Matemática é o único da coleção que traz tópicos relacionados à Matemática Financeira. O capítulo 7 é o capítulo reservado para o ensino de juros simples e compostos e a relação entre esses conteúdos e as progressões.

O fato de relacionar juros com as progressões é um ponto positivo. O ponto negativo é que não há nenhuma outra parte do livro dedicada à Matemática Financeira, o que obviamente é muito pouco para as novas demandas do ensino médio.

O capítulo inicia com um exemplo sobre juros simples relacionando-o com progressões aritméticas e adota uma postura de admitir que o aluno já possui um conhecimento prévio sobre juros simples adquirido no ensino fundamental. Após o exemplo, o autor formaliza o conceito de juros e diferencia juros simples de juros compostos.

Na sequência, é apresentada a fórmula para o cálculo de juros simples e o conceito de montante. Ao final dessa primeira parte teórica, o livro traz alguns exercícios de aplicação, os quais não exigem grandes raciocínios por parte dos alunos, apenas aplicações da fórmula vista anteriormente.

Para iniciar a parte de juros compostos, o livro repete o feito com a parte de juros simples. Cita um exemplo, relacionando os juros compostos com progressões geométricas para, após o exemplo, explicar o que são os juros compostos e como calcular.

A parte teórica de juros simples e compostos se mostrou bastante superficial, não demonstrando a devida importância dos assuntos. Em relação aos exercícios, após explicar a teoria o livro apresenta alguns exercícios resolvidos e depois exercícios de aplicação para os alunos. Apesar de ter um grande número de exercícios, as atividades propostas não são satisfatórias, tendo em vista que são questões repetitivas e de aplicação imediata de fórmulas, sem exigir muito do aluno.

Concluída a análise do capítulo fica evidente que o autor não contempla a nova realidade do ensino da matemática financeira. Trabalhar apenas a parte de juros simples e compostos é insuficiente. Os alunos de hoje em dia precisam e querem saber e aprender mais, a fim de se prepararem para o mercado de trabalho e para conseguirem ter uma vida financeira saudável.

Capítulo 4

O Ensino da Matemática Financeira

Como já falado anteriormente, o ensino da Matemática Financeira no ensino médio é uma oportunidade excelente para o professor relacionar conteúdos e mostrar para os alunos como alguns tópicos da Matemática, que aparentemente não têm relação, podem ser trabalhados simultaneamente em uma única questão, dando assim mais sentido ao estudo desses conteúdos. Além disso, a Matemática Financeira permite que o docente aborde situações do dia a dia das pessoas.

Ao falar do regime de capitalização simples o professor poderá abordar situações onde o conhecimento sobre progressão aritmética e sobre as funções afins auxiliem o aluno na resolução das questões. O mesmo pode-se dizer em relação ao regime de capitalização composta, onde os conhecimentos sobre progressão geométrica e função exponencial podem ser bastante úteis durante a resolução de exercícios.

Além de procurar relacionar os conteúdos acima citados, durante as aulas sobre Matemática Financeira, o professor não só pode, como deve, estimular o uso dos recursos tecnológicos. Ao ensinar juros simples e compostos o professor deve ter em mente que nesse momento o desenvolvimento dos cálculos não é o mais importante. Nesse sentido o uso da calculadora se faz necessário.

A utilização dos recursos tecnológicos não deve ficar restrito ao uso da calculadora. Utilizar aplicativos computacionais como o EXCEL pode ser bastante útil. Construir tabelas e gráficos através desses recursos facilita a compreensão dos conteúdos, possibilitando ao aluno perceber as diferenças entre os sistemas de capitalização e os sistemas de amortização.

4.1 Situações problema para o ensino da Matemática Financeira

Algumas situações da vida real são ótimas oportunidades para o professor explorar alguns tópicos da Matemática Financeira dentro da sala de aula. Trazer panfletos, contas, planilhas de financiamento, por exemplo, ajudam a enriquecer a aula e servem para o aluno perceber a importância dos conteúdos estudados no seu dia a dia.

As atividades propostas a seguir são exemplos de situações que podem ser trabalhadas em sala de aula pelo professor a fim de facilitar a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos, além, é claro, de dar mais sentido aos assuntos estudados, tendo em vista que os exercícios abordam situações do cotidiano das pessoas, mostrando ao aluno a aplicabilidade dos conteúdos vistos durante as aulas. Algumas das atividades propostas estão acompanhadas das suas devidas resoluções.

É interessante também que o docente aproveite essas e outras atividades similares para introduzir o uso dos recursos tecnológicos que são tão presentes na vida das pessoas. Calculadoras, computadores e tablets podem ser bastante úteis durante a resolução desse tipo de problemas, além de servirem para tornar a aula mais atrativa para os alunos que, a cada dia que passa, estão mais tecnológicos.

O público-alvo dessas atividades são os alunos do ensino médio, e é necessário que esses alunos possuam os pré-requisitos básicos que se espera que um aluno do ensino médio possua. Infelizmente, apesar de algo difícil de aceitar, muitos alunos chegam às séries finais do ensino básico sem terem aprendido conteúdos essenciais do ensino fundamental. Por isso é de extrema importância que o docente conheça bem os seus alunos, para evitar que essas atividades que visam motivar o aluno acabem tendo o efeito contrário, e o aluno que não tenha a base matemática necessária para a resolução dessas questões se sinta incapaz e acabe se desinteressando pelo estudo da Matemática.

Um tipo de problema interessante para o professor trabalhar com seus alunos é o que envolve pagamentos de boletos bancários, como boletos de condomínio, mensalidade de faculdade, entre outros.

A utilização de problemas como esse durante as aulas sobre juros é de extrema importância por ajudar a dar um significado maior ao assunto que está sendo estudado, tendo em vista que essa situação fará parte do cotidiano de muitos dos alunos. Também é uma oportunidade de mostrar ao aluno uma situação onde é utilizada a ideia de juros simples, devido ao fato de, apesar da taxa normalmente ser mensal, a cobrança de juros é por dia de atraso, o que torna a cobrança de juros simples mais lucrativa para o credor do que a cobrança de juros compostos.

É interessante que em questões desse tipo o professor permita que seus alunos utilizem a calculadora para facilitar os cálculos, tendo em vista que o foco da questão não são os cálculos e sim o raciocínio a ser aplicado na resolução do problema e os conceitos matemáticos utilizados. O docente deve destacar para os alunos a importância de evitar atrasos nos pagamentos de contas, pois os juros que são pagos podem representar um impacto grande nas finanças de uma pessoa. Nessa atividade o professor também tem a oportunidade de esclarecer para o aluno o que são os juros de mora. Pagar as contas em dia evita que se pague juros, principalmente por que em algumas situações a taxa de juros é extremamente alta, fazendo com que a pessoa pague muito a mais do que deveria pagar.

Exemplo 1. A seguir é possível observar um boleto bancário. Considerando o vencimento dia 05/02/2015 e que o pagamento desse boleto apenas foi efetuado no dia 25/02/2015, qual o valor dos juros pagos por essa pessoa? (Desconsidere a correção pelo IGPM)


Local de Pagamento
QUALQUER BANCO ATE O VENCIMENTO
Vencimento
05/02/15
Cedente
CONDOMINIO EDIFICIO LOREN RESIDENCIAL
Agência / Código Cedente
2976-9/7059-9
Data do Documento 19/01/15
Nº do Documento 002 0215
Espécie Doc.
Aceite
Data Processamento
Nosso Número
10747730000002901
Uso do Banco
Carteira 18-019
Espécie
Quantidade
Valor X
(=) Valor do Documento
R$ 330,00
Instruções:
JUROS MORA 1,0% MENSAL
APÓS VENCTº CORRIGIR P/ IGPM
MULTA 0,33% DIA ATÉ 10%
COND: R$ 330,00
27
35
19
(–) Desconto
(–) Outras deduções (abatimento)
(+) Mora / Multa (Juros)
(+) Outros Acréscimos
(=) Valor cobrado

Resolução: Nesse caso temos dois cálculos a serem realizados. Primeiramente o cálculo dos juros mora. No caso dos juros mora é importante observar que a taxa é mensal, mas o período é de 20 dias, ou seja, $\frac{2}{3}$ de um mês. Com isso, temos que $J = 330 \cdot 0,01 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow J = 2,2$. Feito isso, o próximo passo é calcular a multa por atraso. A taxa é de 0,33% ao dia, e o pagamento somente foi efetuado 20 dias após o vencimento. Nesse caso, a multa paga será $M = 330 \cdot 0,0033 \cdot 20 \Rightarrow M = 21,78$

O valor final pago por essa pessoa devido ao atraso no pagamento será o correspondente a $330 + 2 + 21,78$, ou seja, R$353,98.

Explorar situações que retratem o empréstimo bancário é algo indispensável quando se fala em Matemática Financeira. Além da utilização dos conteúdos estudados, o uso dessas situações ajudará o aluno a perceber o quanto as propostas de empréstimos bancários devem ser analisadas cuidadosamente. Se quiser, o professor poderá abordar situações onde uma pessoa tenha uma dívida com determinada taxa de juros e que tomar um empréstimo a juros menores para quitar a primeira dívida se torna uma alternativa interessante. Nesse caso o docente poderá pedir que o aluno analise qual será a economia dessa pessoa ao trocar uma dívida por outra com uma taxa de juros menor.

Exemplo 2. O panfleto abaixo representa uma propaganda de uma empresa de empréstimos bancários.

a) Qual o valor total a ser pago por um cliente que tomar um empréstimo de R$ 1000,00?

b) O valor que representa os juros pagos pelo cliente representa que percentual do valor emprestado?

c) Considerando que uma pessoa aplique R$ 1000,00 na poupança durante o mesmo período que levaria para quitar o empréstimo, qual seria o valor obtido? (Considere a poupança com um rendimento médio de 0,6% ao mês)

Resolução: a) O valor a ser pago por um cliente que tomar um empréstimo de R$ 1000,00 pode ser encontrado multiplicando-se o número de prestações pelo valor de cada prestação, ou seja, $60 \cdot 29,90 = 1794$

b) Para encontrar o percentual desejado, primeiramente tem-se que o valor total pago representa $\frac{1794}{1000}$ do valor emprestado, ou seja, $\frac{179,4}{100} = 179,4\%$.Dessa forma, o percentual referente aos juros pagos é o resultado de 179,4% - 100% = 79,4%.

c) O prazo para o pagamento do empréstimo é de 60 meses. Então, para encontrar o valor obtido em uma aplicação na poupança durante 60 meses, a uma taxa de 0,6% ao mês, basta encontrar o resultado de $M = 1000 \cdot (1 + 0,006)^{60} \Rightarrow M \cong 1431,79$.Note que esse valor é bem abaixo do valor que o cliente pagaria pelo empréstimo de R$ 1000,00.

Um dos conteúdos matemáticos bastante utilizado durante a resolução de problemas de Matemática Financeira é o logaritmo. Há muitas situações de juros compostos onde o uso dos logaritmos se torna fundamental para a resolução das questões.

É interessante o docente estimular o uso da calculadora científica durante a resolução de questões de juros compostos envolvendo logaritmos, tendo em vista que o uso desse recurso permitirá que o foco durante a resolução da questão seja no uso correto das fórmulas e propriedades e não no mero desenvolvimento de cálculos.

Ao permitir o uso da calculadora, o professor deverá alertar aos alunos sobre as possíveis aproximações. Algumas calculadoras, como a HP 12C, ao encontrar um período como 3,5 (em meses, por exemplo), automaticamente aproxima esse valor para 4 meses. Em outras calculadoras científicas, o valor encontrado como 3,5 meses representa 3 meses e 15 dias. Cabe ao docente tratar dessas possibilidades com os alunos.

Caso sinta a necessidade, o professor poderá abrir uma discussão com os alunos e variar os valores utilizados nas questões. Dessa forma os alunos poderão perceber que se bem planejado, as aplicações financeiras podem ser bastante atrativas e representar uma alternativa à poupança.

Exemplo 3. Paulo possui R$400,00 em um investimento que rende 3% ao mês, a juros compostos. Qual o tempo que esse valor deverá ficar investido para que Paulo obtenha um montante de R$900,00?

Resolução: Para resolver essa situação, inicialmente deve-se utilizar a fórmula de juros compostos. Utilizando os dados da questão, tem-se que $900 = 400(1 + 0,03)^n \Rightarrow 1,03^n = \frac{9}{4}$. Para resolver essa equação é preciso utilizar logaritmos. Logo, $n = \frac{\log \frac{9}{4}}{\log 1,03}$. Utilizando uma calculadora científica, tem-se que $n \cong 27,4$ meses, ou seja, 27 meses e 12 dias.

Existem também situações que são ótimas oportunidades para o professor relacionar o estudo dos juros compostos com as progressões geométricas. Assim como nas situações envolvendo logaritmos, é interessante também que os alunos façam uso de uma calculadora para efetuar os cálculos necessários, tendo em vista que as questões de Matemática Financeira que utilizam conhecimentos das progressões geométricas têm cálculos extensos, e o importante nesses exercícios são as ideias que estão sendo trabalhadas e não os cálculos envolvendo números racionais.

Além disso, situações como as dos exemplos a seguir induzem o aluno a um raciocínio mais elaborado, fugindo um pouco da mera aplicação de fórmulas. Trabalhar situações com séries de pagamentos e de valor atual é importante para que os alunos percebam que muitas vezes é mais vantajoso efetuar o pagamento à vista e em outras há vantagem em pagar a prazo. Nessas situações o aluno também poderá perceber como simples aplicações mensais em determinados investimentos podem render um grande valor a longo prazo.

Exemplo 4. Um conjunto de sofás é vendido a prazo em 5 prestações mensais de R$400,00 cada uma, sendo a primeira um mês após a compra. Se o pagamento for à vista, o preço cobrado é de R$1750,00. Qual a melhor alternativa de pagamento de um comprador que consegue aplicar seu dinheiro a juros compostos, à taxa de 2% a.m.?

Resolução: Para saber qual a melhor alternativa, o ideal é comparar o valor atual das duas situações, sendo a alternativa mais vantajosa àquela que tiver o menor valor atual. Para o pagamento à vista, o valor atual é R$1750,00. No pagamento a prazo, devemos trazer cada prestação para o momento atual, ou seja:

$$PV = \frac{400}{(1+0,02)} + \frac{400}{(1+0,02)^2} + \frac{400}{(1+0,02)^3} + \frac{400}{(1+0,02)^4} + \frac{400}{(1+0,02)^5} \tag{4.1}$$

Pode-se também utilizar a fórmula para encontrar o valor atual de uma série de pagamentos, que é $PV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n \cdot i}$. Substituindo as informações do problema, temos que

$$PV = 400 \cdot \frac{(1+0,02)^5 - 1}{(1+0,02)^5 \cdot 0,02} \tag{4.2}$$

Em ambos os cálculos encontra-se um valor aproximado de R$1885,38. Como o valor atual para pagamento à vista é menor do que o valor atual do pagamento a prazo,a melhor alternativa é o pagamento à vista.

Exemplo 5. Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro. O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R$ 1500,00, sem entrada. Qual o valor do empréstimo, sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% a.m.?

Exemplo 6. Uma loja vende uma televisão por R$ 1800,00 à vista ou financia esse valor em 5 prestações mensais iguais e sem entrada. Qual o valor de cada prestação sabendo que a taxa de juros compostos cobrada é de 2,5% a.m.?

Exemplo 7. Para ampliar as instalações de sua loja, senhor Rodrigo estima que precisará de R$ 80000,00 daqui a 18 meses. Quanto senhor Rodrigo deverá depositar mensalmente, num total de 18 parcelas, à taxa de juros compostos de 1,5% a.m., para que no instante do último depósito consiga um montante de R$ 80000,00?

Resolução: Nessa situação, tem-se que R$80000,00 é o valor futuro, o montante obtido após 18 depósitos mensais, com uma taxa de juros compostos de 1,5% ao mês. Sendo assim, aplicando a fórmula de valor futuro $FV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n-1}{i}$ e de acordo com os dados da questão, tem-se que:

$$80000 = PMT \cdot \frac{(1+0,015)^{18}-1}{0,015} \tag{4.3}$$

Resolvendo essa equação com o auxílio de uma calculadora científica, obtém-se que o valor de cada depósito deve ser R$3904,46.

Ao longo do trabalho com Matemática Financeira, o docente deve aproveitar, sempre que possível, para explorar situações que sirvam para o aluno comparar a cobrança de juros simples com a cobrança de juros compostos. Nesse momento o docente também deve aproveitar para trabalhar novamente a relação dos juros simples com a função afim e dos juros compostos com a função exponencial.

Em questões como a do próximo exemplo, o aluno, ao construir os gráficos, perceberá que na primeira situação (juros simples), traçando a curva que passe pelos pontos assinalados no plano cartesiano, ele terá o gráfico de uma função afim, enquanto que no segundo gráfico (juros compostos), traçando a curva que passa pelos pontos assinalados, ele obterá o gráfico de uma função exponencial.

Com esse tipo de exercício o professor deve aproveitar para fazer com que o aluno perceba através dos gráficos como a cobrança de juros compostos em dívidas pode ser extremamente prejudicial ao devedor, que verá o seu saldo devedor crescer muito mais rapidamente do que na cobrança de juros simples. Além disso, o professor pode chamar a atenção do aluno para o fato de que no primeiro período o saldo devedor é o mesmo para os dois sistemas de capitalização.

Exemplo 8. Renato precisou de R$ 2000,00 para uma emergência. Conseguiu metade do dinheiro com um amigo, que lhe emprestou o dinheiro a uma taxa de juros simples de 5% ao mês. Para conseguir a outra metade ele adquiriu um empréstimo em uma financeira, que lhe emprestou o dinheiro a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês. Sabendo que Renato pretende quitar ambas as dívidas após 6 meses, faça o que se pede:

a) Monte uma tabela com o saldo devedor de Renato mês a mês e construa um gráfico para cada uma das situações.

b) Calcule qual será o valor total que Renato terá que pagar para quitar a sua dívida após esses 6 meses.

c) Se Renato optasse por quitar a dívida após 12 meses ao invés de 6 meses, o saldo devedor dele ao fim dos 12 meses seria o dobro do seu saldo devedor ao final dos 6 primeiros meses?

Capítulo 5

Considerações finais

A importância da Matemática Financeira para a vida do cidadão é inegável. Os conteúdos ligados a esse ramo da Matemática têm grande aplicabilidade no cotidiano das pessoas. Desde a pessoa que utiliza os conceitos da Matemática Financeira apenas para cuidar e organizar as suas finanças pessoais, até as pessoas que utilizam conceitos mais avançados, que fazem grandes aplicações financeiras ou que façam uso da Matemática Financeira na administração de suas empresas.

Quando o aluno percebe que tudo o que ele está vendo em sala de aula tem uma aplicação na vida real, ele se motiva e se sente interessado em aprender mais daquilo que lhe vai ser útil no futuro. Com o crescimento econômico do país, é obrigação da escola preparar o aluno para que ele saiba gerir com inteligência os recursos financeiros que terá a sua disposição, independente de ser um aluno da escola pública ou da rede privada. Cada um, dentro da sua realidade financeira, precisará administrar bem as suas finanças para poder atingir seus objetivos materiais. A Matemática Financeira é a base para uma boa educação financeira das pessoas.

O docente tem que estar atento às necessidades dos seus alunos, abordando, sempre que possível, situações ligadas à economia do país, do estado e da cidade do aluno. Dessa maneira o professor dará mais sentido ao estudo dos conteúdos da Matemática Financeira e, com isso, oferecer mais uma motivação para que os alunos estudem esses conteúdos.

As atividades propostas nesse trabalho são apenas mais uma alternativa para o docente que deseja investir no ensino da Matemática Financeira. Sair dos exemplos padronizados que muitos livros didáticos trazem e partir para situações diversificadas e que façam sentido para o aluno pode apresentar resultados muito mais eficazes em relação à aprendizagem.

O que se nota, infelizmente, é que alguns docentes preferem seguir fielmente o livro didático, não pela qualidade do livro, mas sim pelo medo de ir além. Um possível motivo para esse medo de ir além, de utilizar situações diversas e que sejam mais bem elaboradas é o despreparo de alguns professores. Despreparo esse que, em determinadas situações, não é culpa do docente, e sim dos cursos de licenciatura em Matemática de algumas instituições, que não atribuem o devido valor ao ensino da Matemática Financeira.

Diante de tudo o que foi exposto, é importante que as escolas repensem o espaço dado à Matemática Financeira dentro da estrutura curricular. É evidente que, sem os conteúdos dessa área da Matemática, não há como a escola educar financeiramente os seus alunos. Matemática Financeira e Educação Financeira precisam caminhas juntas.

Referências Bibliográficas

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias** – Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Guia de Livros Didáticos – PNLD**. Brasília – 2012

SAVOIA, José Roberto; SAITO, André Taue; SANTANA, Flávia de Angelis. **Paradigmas da educação financeira no Brasil**. Revista de Administração Pública, Vol. 41, no 6 - 2007

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB**. Lei no 9394/96.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. **Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 11**. São Paulo: Atual Editora – 2008.

BALESTRI, Rodrigo Dias; NETO, Eduardo da Rosa. **Matemática, Interação e Tecnologia – Volume 2**. São Paulo: LeYa – 2009.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Aprender e Aplicar Matemática – Volume 1**. São Paulo: Atual Editora – 2011.

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; Zani, Sheila. **Progressões e Matemática Financeira – Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM – 1993

SANTOS, Epaminondas Alves dos. **Matemática Financeira – Uma abordagem contextual**. Trabalho desenvolvido junto ao Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná.

NOVAES, Rosa Cordelia Novellino de. **Uma abordagem visual para o ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.