Universidade Estadual De Santa Cruz

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

LOGARITMOS: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES

Por

Eduardo Miranda Angelin

Mestrado Profissionalizante Em Matemática – Ilhéus – Ba

Orientador: Prof. Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho

Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes
obtido através da SBM.

Ilheus – Ba

2015

A583 Angelin, Eduardo Miranda.
Logaritmos: História, Teoria e Aplicações / Eduardo Miranda Angelin . – Ilhéus, BA: UESC, 2013.
xi, 70 f.: il.

Orientador: Cícero Alfredo da Silva Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui bibliografia e apêndice.

1. Logaritmos. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Prática de ensino. 4. Aprendizagem. I. Título.

CDD 512.922

Eduardo Miranda Angelin

LOGARITMOS: HISTÓRIA, TEORIA E APLICAÇÕES

Ilhéus – Ba
2015

Eduardo Miranda Angelin

LOGARITMOS: HISTORIA, TEORIA E APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Departamento De Ciências Exatas E Tecnologia da Universidade Estadual De Santa Cruz, para a obtenção do título de Mestre Em Matemática, através do PROFMAT-Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 27 de março de 2015

Mirela Vanina de Mello

Prof. Dra. Mirela Vanina De Mello

Josaphat Ricardo Ribeiro Gouveia Júnior

Prof. Dr. Josaphat Ricardo Ricardo Gouveia Junior

Cícero Alfredo da Silva Filho

Prof. Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho

Orientador

Ilhéus-Ba

2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pela oportunidade de cursar o mestrado, sua presença em minha vida foi a energia necessária para me manter no curso, diante de muitas dificuldades que passei.

Agradeço aos meus pais, Silaciel e Maria Raimunda, por sempre acreditarem em mim e pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis que atravessei no curso.

Agradeço aos amigos que sempre estiveram do meu lado, nos momentos tristes e alegres da minha vida, em especial Josaí Oliveira Lima.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro. Finalmente, agradeço a todos os professores da equipe do PROFMAT/UESC, em especial meu orientador, Prof. Dr. Cicero Alfredo da Silva Filho, pelas orientações, dedicação, paciência e excelentes sugestões para minha dissetação e nosso coordenador Prof. Dr. Vinícius A. T. Arakawa pelo apoio, empenho e importantes orientações.

Resumo

O objetivo deste trabalho é fortalecer as práticas pedagógicas no ensino dos logaritmos na Educação Básica, por isso apresentamos os seus conceitos de uma forma diferente, porém mais interessante e acessível para aprendizagem dos alunos, considerando que os discentes do Ensino Médio muitos deles apresentam grandes dificuldades na compreenção dos logaritmos, das suas propriedades e na resolução dos exercícios propostos. Acreditamos que a prática pedagógica se torna mais eficiente, quando o professor prioriza no seu plano de aula os conceitos relacionados a história e aplicações dos logaritmos. Escolhemos a apresentação da teoria dos logaritmos segundo Lima (2013), em que a abordagem dos conceitos é feita de forma geométrica, utilizando a área aproximada abaixo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$, levando em conta que os livros didáticos adotados pelas instituições de ensino básico não usam a abordagem geométrica para definir os logaritmos naturais e nem tão pouco os logaritmos de uma base qualquer.

Os logaritmos são uma das poucas funções que transforma a multiplicação em uma soma e o fato deles determinarem aumento ou diminuição de uma grandeza a uma taxa constante ao valor da grandeza num instante considerado, apresenta-se como ferramenta matemática aplicável em várias áreas do conhecimento, sendo que estas aplicações podem ser incluídas no ambiente da sala de aula, constituindo-se uma interessante alternativa para potencializar o processo de Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

The objective of this work is strengthen of the pedagogical praticals on the teaching of th logarithms in the Basic Education, so we introduce its concepts of a different form, but more interesting, and ascessible for learning of the students, we are considering that this students of High School, many of them show big difficulties in the understanding of the logarithms, its propriety and in the resolution of the proposed exercises, we believe that this pedagogic pratical become more efficient, when the teacher prioritizes in your lesson plans of the concepts those are matching to the history and aplications of the logarithms. We chose the indroduction of logarithms theories second Lima (2013), in his approaching of the hyperbole $y = \frac{1}{x}$, it is taking on account that the textboks adopter by the instituitions of basic learning do not use a geometric approaching the natural logarihms nor the logarihms of any base.

The logarihmsare one of few functions that change the multiplication in an addition and fact that they determine increase or decrease of a bigness at a costant rate of the value of the quantity, it is a considerad instant, it presents itself like mathmatical tool applicable in sereval areas of knowlegde, wherein these applications can be included in the enviroment of classroom, where it is constituied an interesting for leveraging of the process of teaching and learning.

Índice

INTRODUÇÃO

Um pouco de história

No início do século $XVII$, a navegação e a astronomia se desenvolvia de uma forma bem acentuada e seu avanço dependia de longos cálculos aritméticos com números extremamente grandes. Era necessário um método que simplificasse as operações tais como multiplicação, divisão, potenciação e extração da raiz quadrada.

Segundo Eves (ver [3]), "o século $XVII$ é particularmente importante na história da matemática. Perto do início do século, Napier revelou sua invenção dos logaritmos, Harriot e Oughhtred contribuíram para a notação e a codificação da álgebra, Galileu fundou a ciência da dinâmica e Kepler anunciou suas leis do movimento planetário. Mais tarde, Desargues e Pascal inauguraram um novo campo da geometria pura, Descartes lançou a geometria analítica moderna, Fermat estabeleceu os fundamentos da teoria dos números moderna e Huygens deu contribuições de montar a teoria das probabilidades e a outros campos. E então, perto do final do século, na esteira preparada por vários matemáticos do próprio século, Newton e Leibnis contribuíram memoravelmente com a criação de cálculo".

O século $XVII$ foi marcado pelas grandes descobertas científicas, naquela época para a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra, os cálculos numéricos eram muito importantes, como também nos dias atuais, por isso muitos estudos e pesquisas foram feitas afim de tornar os cálculos cada vez mais rápidos e precisos. Uma das grandes invenções que veio atender de forma espetacular essas crescentes demandas, foi a criação dos logaritmos.

Napier $(1550 - 1617)$, um nobre escocês, teólogo matemático e inventor, viveu maior parte da sua vida na grande propriedade de sua família, o castelo de Merchiston, perto de Edimburgo, Escócia, envolveu-se fortemente em questões religiosas e políticas. Em 1593 publicou um livro que afirmava que o papa era o anticristo. Napier escreveu também sobre várias máquinas de guerra, contribuindo assim para questões militares da época.

Durante vinte anos Napier estudou métodos de simplificação de cálculos, pois essa era sua maior prioridade, antes de sua publicação de suas obras dedicadas aos Logaritmos. A pesquisa de Napier era baseada em sequências de potências, em que as diferenças dos índices correspondiam a produtos e quocientes das próprias sequências. Sabemos que os logaritmos como instrumentos de cálculo reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração.

De acordo com Boyer (ver [2]), foi apresentado a Napier o método da prostaférese pelo médico Dr. John Craig, esse método era basicamente fómulas que transformavam o produto de funções numa soma ou diferença, que era muito utilizado na astronomia e dessa forma John Napier foi encorajado a publicar seu livro em 1614, intitulado "Uma Descrição da Maravilhosa regra dos Logaritmos".

Segundo Miguel (ver [4]), "sua capa aparece a explicitação do contexto de uso dos Logaritmos e de seu uso em uma ou outra trigonometria, bem como em todo cálculo matemático, com uma explicação mais ampla, mais fácil e mais livre de complicações". Assim, justificando o proposito de Napier, simplificar os cálculos necessários na astronomia e navegação, que eram as preocupações presentes, naquele momento histórico, em que nações como Espanha, Portugal e Inglaterra começaram a colonização das Américas.

No final do século XVI, segundo Boyer (ver [2]), foi um período onde muito estudos, sobre trigonometria estavam sendo realizados em todas as partes da Europa. E já eram conhecidas um grupo de fórmulas que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença (regras de prostaférese). As fórmulas são:

$$(I) \quad 2cosA \cdot cosB = cos(A+B) + cos(A-B)$$

$$(II) \quad 2cosA \cdot senB = sen(A+B) - sen(A-B)$$

$$(III) \quad 2senA \cdot cosB = sen(A+B) + sen(A-B)$$

$$(IV) \quad 2senA \cdot senB = cos(A-B) - cos(A+B)$$

Os antecessores de Napier não conhecendo ainda os logaritmos, usavam um método para o cálculo do produto. Esse método foi obtido, considerando as transformações trigonométricas. Vamos mostrar como eles procederam para encontrar uma fórmula que transforma o produto em uma soma. Consideremos as seguintes transformações trigonométricas:

$$(1) sen(x+y) = senx \cdot cosy + seny \cdot cosx$$

$$(2) sen(x-y) = senx \cdot cosy - seny \cdot cosx$$

Somando (1) e (2) membro a membro, tem-se

$$sen(x+y) + sen(x-y) = 2(senx \cdot cosy)$$

então,

$$senx \cdot cosy = \frac{1}{2} \cdot (sen(x+y) + sen(x-y)).$$

Como exemplo vamos efetuar a multiplicação 0,17365 x 0,99027, usando a fórmula:

$$senx \cdot cosy = \tfrac{1}{2} \cdot (sen(x+y) + sen(x-y)).$$

Fazendo uma consulta na tabela trigonométrica, temos que

$$sen10^o = 0,17365$$

$$cos8^o = 0,99027$$

assim,

$$sen10^o \cdot cos8^o = \frac{1}{2} \cdot (sen(18^o) + sen(2^o))$$

pelas tábuas, segue que

$$sen18^o = 0,30902$$

$$sen2^o = 0,03490$$

tem-se,

$$sen10^o \cdot cos8^o = \frac{1}{2} \cdot (sen(18^o) + sen(2^o)) = \frac{1}{2} \cdot 0,34392.$$

Portanto, 0,17365 x 0,99027 = 0,17196.

Muitas são as desvantagens desse método trigonométrico, algumas delas é a dificuldade em aplicá-lo para produto de mais de três fatores, a impossibilidade para o cálculo de potências e raízes.

John Napier tinha um complexo conhecimento da correspondência entre as progressões aritméticas e geométricas o que serviu de base para o desenvolvimento de sua maior invenção: a tábua de logaritmos. Vamos mostrar um exemplo bem simples afim de ilustrar a forma que era usada a tabela de Napier, considere duas progressões :

Aritmética:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Geométrica:	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	...

para calcular o produto de 16 por 128, basta somar os valores correspondentes $4+7 = 11$ e portanto $16 \cdot 128 = 2048$. Foi tomado na progressão aritmética termos $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11..)$ como expoente de potências de base 2, os termos correspondentes na progressão geométrica representam a quantidade resultante indicada. Portanto, $2^4 = 16$, $2^7 = 128$ e $2^{11} = 2048$, para calcular $2^4 \cdot 2^7$, é suficiente somar os expoentes, obtendo $2^{4+7} = 2^{11}$, que é o produto procurado.

Neste método foi usado uma das propriedades de potenciação, em que para multiplicar duas potências basta conservar a base e somar os expoentes, isto é, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Para construir a tabela de logaritmos, Napier considerou a progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...,$$

e usou a progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, ..., m, ...n, ...,$$

assim o produto $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$, de dois termos da primeira progressão está associado a soma $m+n$ dos termos correspondentes da segunda progressão. Napier escolheu b, bem próximo de 1, afim de manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos para facilitar a interpolação no preenchimento das colunas entre termos correspondentes. Tomou $b = 1 - \frac{1}{10^7} = 0,9999999$. Chamou de $NLog$ o logaritmo de b segundo Napier.

Para construir a sua tábua de logaritmos, Napier precisava definir

$$NLog0,9999999 = 1$$

$$NLog(0,9999999)^2 = 2$$

$$NLog(0,9999999)^3 = 3$$

e assim sucessivamente.

Então, para simplificar os cálculos usou $b = 0,9999999 = 1 - \frac{1}{10^7}$ e procedeu da seguinte forma:

$$b^2 = b \cdot b = b(1 - \frac{1}{10^7}) = b - \frac{b}{10000000}$$
$$b^3 = b^2 \cdot b = b^2(1 - \frac{1}{10^7}) = b^2 - \frac{b^2}{10000000}$$

$$b^4 = b^3 \cdot b = b^3(1 - \frac{1}{10^7}) = b^3 - \frac{b^3}{10000000}$$

e assim por diante.

Como $b = 0,9999999$, tem-se $\frac{b}{10000000} = 0,00000009999999$ e daí,

$$b^2 = b - \frac{b}{10000000} = 0,9999999 - 0,00000009999999 = 0,99999980000001$$

$b^3 = b^2 - \frac{b^2}{10000000} = 0,99999980000001 - 0,000000099999980000001 =$
$= 0,999999700000029999999 \approx 0,99999970000003$

$b^4 = b^3 - \frac{b^3}{10000000} = 0,99999970000003 - 0,99999970000003 =$
$= 0,99999960000059999997 \approx 0,99999970000006.$

Napier calculou as potências de a^2 até a^{50} e fez as sucessivas aproximações, definindo então

$$N \log 0,9999999 = 1$$

$$N \log 0,99999980000001 = N \log(0,9999999)^2 = 2.$$

Ele conseguiu obter valores a partir destes de maneira análoga com um bom grau de aproximação, construindo assim a primeira tabela de logaritmos. Segundo Eves (ver [3]), Napier publicou sua abordagem dos logaritmos em 1614 num texto intitulado *Mirifici Logaritbmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). Henry Briggs $(1561 - 1631)$, professor de geometria do Gresham College de Londres, viajou até Edimburgo para homenagear o grande criador dos logaritmos e durante essa visita, Briggs sugeriu que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, facilitando dessa forma a utilidade das tábuas, nascendo assim os logaritmos *briggsianos ou comuns* ou logaritmos decimais.

Napier adotou a palavra *logaritmo* que significa "número de razão", enquanto Briggs usou a palavra *mantissa*, que é um termo latino cujo significado é "adição". A tábua dos logaritmos de Nepier foi adotada por toda Europa. De acordo com Eves (ver [3]), "na astronomia em particular, já estava passando da hora para essa descoberta; pois como afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astronômos".

Jost Biirgi $(1552 - 1632)$, suíço, fabricante de instrumentos para astronomia, matemático e inventor, concebeu e construiu uma tábua de logaritmos independentemente de Napier. Devido ao bom relacionamento de Napier com os professores unversitários, a influência no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior do que a de Biirgi e dessa forma as tábuas de Napier foram publicadas seis anos antes do que a de Biirgi. As tabelas logarítmicas de Biirgi foram publicadas em 1620, há relatos que seus trabalhos acerca dos logaritmos já estavam em andamento desde 1558, na sua pesquisa ele estabeleceu uma conexão entre as progressões e os logaritmos e assim como Napier, foi inspirado no método de Prostatérese na simplificação de cálculos.

De acordo com Eves (ver [3]), "em 1971 a Nicarágua lançou uma série de selos postais para homenagear as "dez fórmulas matemáticas mais importantes do mundo". Cada selo estampa uma fórmula particular acompanhada de uma ilustração e traz também um comentário breve em espanhol sobre a importância da fórmula. Um dos selos é dedicado aos logaritmos de Napier".

As tábuas logarítmicas foram elaboradas na intenção de reduzir os grandes cálculos exaustivos, a sua estrutura consiste em uma tabela com duas colunas, onde cada número na coluna da esquerda correspondia ao seu logaritmo na coluna da direita. Elas certamente contribuíram muito para o desenvolvimento da humanidade.

Segundo Lima (ver [1]), para multiplicar dois números bastava somar seus logaritmos e encontrar o valor correspondente. O mesmo ocorreria na divisão com dois números, bastava subtraír seus logaritmos correspondentes. E para elevar um número a uma potência qualquer bastava multiplicar o logaritmo do número pelo expoente enquanto para calcular a raiz n-ésima de um número, era suficiente dividir o logaritmo pelo índice da raiz.

Com esse novo método de calcular, simplificando grandes operações matemáticas, que demoravam horas e até mesmo dias para ser solucionadas, o tempo de resolução foi reduzido para pequenos intervalos de tempo. E dessa forma a astronomia e a navegação atingiu seu maior apogeu naquela época. Em particular as navegações, considerando as grandes descobertas de novas Terras, a título de exemplo o descobrimento das Américas, seu desbravamento e sua colonização, foi potencializada no século $XVII$, graças a grande invenção de Napier.

A invenção dos logaritmos geralmente é atribuída ao matemático John Napier, mas em 1667 outro matemático escocês, James Gregory, mostrou como calcular logaritmos achando as áreas de paralelogramos inscritos entre hipérboles e suas assíntotas. Com essa nova definição através de área, foi definido o número e .

O uso do símbolo e teve origem com Euler em 1748, que usou a relação:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}),$$

para calcular o número e até 23^a casa decimal. Devido a esses resultados e, é muitas vezes chamado de número de Euler.

Euler foi o primeiro matemático a inferir que e é um número irracional. Logo depois de Liouville ter provado a existência de números transcendentes, Charles Hermite provou que e é um número transcendente. Devido a sua grande importância no estudos dos logaritmos, os logaritmos naturais têm uma notação especial, que veremos mais adiante neste trabalho.

Estrutura do Trabalho

Neste trabalho introduzimos e apresentamos a teoria dos logaritmos de acordo com a referência [1], visto que a abordagem da referida referência, dada aos logaritmos, não é explorado no Ensino Médio.

No **Capítulo 1**, abordamos as principais propriedades dos logaritmos.

No **Capítulo 2**, definimos os logaritmos naturais através da área limitada por uma faixa de hipérbole.

No **Capítulo 3**, introduzimos a mudança de base de logaritmos, a função exponencial e os logaritmos decimais.

No **Capítulo 4**, tratamos as aplicações dos logaritmos decimais e naturais, em alguns fenômenos da natureza, econômicos, físicos, químicos, como Desintegração radioativa, método do carbono 14, Terremotos, Potencial de Hidrogenônico, Lei de Resfriamento de Newton, Juros Contínuos, Perdas Contínuos e Pressão Atmosférica.

No **Capítulo 5**, damos uma sugestão para uma Feira de Matemática no Ensino Médio.

No **Apêndice**, mostramos duas tabelas, uma dos logaritmos decimais e outra dos naturais.

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

---

1 Funções logarítmicas

Neste capítulo vamos definir a função logarítmica e suas propriedades de acordo com a referência [1].

Definição 1.1. *Uma função real $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é chamada de função logarítmica se satisfazer as seguintes propriedades:*

(A) *L é uma função crescente, isto é, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $x < y$, então $L(x) < L(y)$;*

(B) *$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se que $L(xy) = L(x) + L(y)$.*

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, chamaremos o número $L(x)$ de logaritmo de x. Se considerarmos outras funções logarítmicas além de L, diremos que $L(x)$ é o logaritmo de x segundo L.

Observação 1.1. *Neste trabalho deve ficar claro, sobre os conjuntos numéricos que:*

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, *é o conjunto dos números naturais;*

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$, *é o conjunto dos números inteiros;*

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, *é o conjunto dos números racionais;*

$\mathbb{Q}^c$, *é o conjunto dos números irracionais;*

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$, *é o conjunto dos números reais;*

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, *é o conjunto dos números reais positivos.*

A seguir demonstraremos algumas propriedades das funções logarítmicas.

Propriedade1.1 A função logarítmica L: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é injetiva.

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x \neq y$, então devemos ter $x < y$ ou $y < x$, logo deve ocorrer $L(x) < L(y)$ ou $L(y) < L(x)$. Portanto, $L(x) \neq L(y)$.

$\square$

Propriedade 1.2 Dada a função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, então $L(1) = 0$.

Demonstração. De fato, $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$, então $L(1) = L(1) + L(1)$. Logo, $L(1) = 0$.

$\square$

Propriedade 1.3. Quaisquer que sejam x, y, no domínio da função L, com $0 < x < 1$ e $y > 1$, tem-se que $L(x) < 0$ e $L(y) > 0$.

Demonstração. Sabemos que L é crescente, então para todo x, y pertencente ao conjunto $\mathbb{R}^+$, com $0 < x < 1 < y$, teremos $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é, $L(x) < 0 < L(y)$. Portanto, $L(x) < 0$ e $L(y) > 0$. $\square$

Propriedade 1.4. Qualquer que seja $x > 0$, então $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$.

Demonstração. Dado $x > 0$, tem-se $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$, logo $L(x(\frac{1}{x})) = L(1)$. Daí, $L(x) + L(\frac{1}{x}) = 0$. Portanto, $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$.

$\square$

Propriedade 1.5. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se $L(\frac{x}{y}) = L(x) - L(y)$.

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, então $\frac{x}{y}$ = x $(\frac{1}{y})$, assim $L(\frac{x}{y}) = L(x(\frac{1}{y})) = L(x) + L(\frac{1}{y})$, logo $L(\frac{x}{y}) = L(x) - L(y)$.

$\square$

Propriedade 1.6. Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^+$ e para todo $r = \dfrac{p}{q}$, $r \in \mathbb{Q}$, então $L(x^r) = rL(x)$.

Demonstração. Pela **propriedade (B) da Definção 1.1**, temos que $L(xy) = L(x) + L(y)$, então $L((xy)z) = L(xy) + L(z) = L(x) + L(y) + L(z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Considerando $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$, vamos provar por indução que, $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$L(x_1 x_2 x_3 ... x_n) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) + ... + L(x_n). \quad (1.6)$$

Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, a igualdade (1.6) seja verdadeira, então somando $L(x_{n+1})$, em ambos os membros da referida igualdade, com $x_{n+1} > 0$, teremos

$$L(x_1x_2x_3...x_n) + L(x_{n+1}) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) + ... + L(x_n) + L(x_{n+1}).$$

Assim,

$$L(x_1x_2x_3...x_nx_{n+1}) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) + ... + L(x_n) + L(x_{n+1}),$$

portanto, $L(x_1x_2x_3...x_n) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) + ... + L(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, fazendo $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = x$, $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se

$$L(x \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x) = L(x) + L(x) + L(x) + ... + L(x) = nL(x).$$

Isto, é $L(x^n) = nL(x)$, ou seja para $r = n$, $n \in \mathbb{N}$, é verdadeira a igualdade $L(x^r) = rL(x)$.

Para $r = 0$, vale a igualdade $L(x^r) = rL(x)$. Com efeito, $L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$. Considerando os inteiros negativos, também é verdadeira a igualdade $L(x^r) = rL(x)$. De fato fazendo $r = -n$, com $n \in \mathbb{N}$, temos que $x^n \cdot x^{-n} = 1$, então $L(x^n \cdot x^{-n}) = L(1)$, segue que $L(x^n) + L(x^{-n}) = 0$. Isto é, $L(x^{-n}) = -nL(x)$.

Finalmente, seja $r = \dfrac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ temos

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p.$$

Então $L((x^r)^q) = L(x^p)$, isto é, $qL(x^r) = L(x^p) = pL(x)$. Ou seja $L(x^r) = \dfrac{p}{q} \cdot L(x) = r \cdot L(x)$.

Portanto, podemos concluir que $L(x^r) = rL(x)$, para todo r racional.

□

Propriedade 1.7. A função logarítmica L: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Demonstração. Para provar que a função L é ilimitada superiormente, devemos mostrar que dado um número real δ, existe um número $x \in \mathbb{R}^+$, tal que, $L(x) > \delta$. Consideremos um número $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que $n > \dfrac{\delta}{L(2)}$. Então, $nL(2) > \delta$, pois L(2) > 0, daí $L(2^n) > \delta$. Basta tomar $x = 2^n$, assim $L(x) > \delta$, ou seja L: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente .

Agora vamos mostrar que função logarítmica L: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada inferiormente, isto é, $\forall a \in \mathbb{R}$, existe um número $x \in \mathbb{R}^+$, tal que $L(x) < a$. Assim, dado um número real a, vimos acima, que podemos achar $y \in \mathbb{R}^+$, de modo que $L(y) > -a$. Como $L(\frac{1}{y}) = -L(y)$ e tomando $x = \frac{1}{y}$, segue que $L(x) = L(\frac{1}{y}) = -L(y) < a$. Portanto L: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitada inferiormente .

□

Observação 1.2. *A **função logarítmica** L, não está definida para $x = 0$. Pois caso contrário seria*

$$L(0) = L(y \cdot 0) = L(y) + L(0).$$

*Donde, $L(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$, isto é, a função L seria identicamente nula, contrariando a **propriedade (A) da Definição 1.1**.*

1.1 A correspondência biunívoca e a mudança de base

O teorema a seguir mostra que podemos obter uma função logarítmica a partir de uma constante positiva qualquer e uma função logarítmica dada, ou seja, a menos de uma constante, todas funções logarítmicas são iguais.

Teorema 1.1. *Dadas as funções logarítmicas L, M:$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$, tal que $M(x) = cL(x)$, para todo $x > 0$.*

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que se $L(a) = M(a)$ para algum $a > 1$, então $L(x) = M(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$. Temos $L(a^r) = M(a^r)$, para todo r racional. De fato,

$$L(a^r) = rL(a) = rM(a) = M(a^r).$$

Suponhamos por absurdo que, para algum $b > 0$, ocorra $L(b) \neq M(b)$ e seja $L(b) < M(b)$. Consideremos um número natural n suficientemente grande tal que

$$n[M(b) - L(b)] > L(a).$$

Assim,

$$M(b) - L(b) > \frac{L(a)}{n} = L(a^{\frac{1}{n}}).$$

Escolhendo $c = L(a^{\frac{1}{n}})$ e considerando que os números $c, 2c, 3c, ...$, dividem $\mathbb{R}^+$ em intervalos justapostos de mesmo comprimento c (veja a Figura 1.0.), temos que $M(b) - L(b) > c$. Então deve existir algum m natural, tal que $L(b) < mc < M(b)$. Como $mc = mL(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{m}{n}})$, logo $L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) < M(b)$. Assim, $L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b)$. Sendo L crescente, tem-se $b < a^{\frac{m}{n}}$. Do mesmo modo, como M é crescente, temos que $a^{\frac{m}{n}} < b$, resultando uma contradição. Portanto não existe b, tal que $L(b) \neq M(b)$. Então $L(x) = M(x)$, qualquer que seja $x > 0$.

Mostraremos o caso geral. Sejam L e M funções logarítmicas arbitrárias. Temos $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$, visto que $2 > 1$ e ainda $L(1) = M(1) = 0$. Tomando $c = \frac{M(2)}{L(2)}$, consideremos a função logarítmica $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que, $N(x) = cL(x)$. Então $N(2) = \frac{M(2)}{L(2)} \cdot L(2) = M(2)$, segue do que se provou acima que $N(x) = M(x)$, para todo $x > 0$. Portanto, como $N(x) = cL(x)$, tem-se $M(x) = cL(x), \forall x \in \mathbb{R}^+$.

□

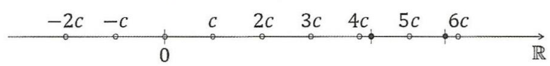

Figura 1.0.

Lema 1.1. *Seja L:* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números reais* $u < v$*, existe* $x > 0$ *tal que,* $u < L(x) < v$*.*

Demonstração. Seja n um número natural tal que $n > \frac{L(2)}{v-u}$. Daí

$$v - u > \frac{L(2)}{n}.$$

Tomando $c = \frac{L(2)}{n}$, então $v - u > c$. Os multíplos inteiros da forma mc, $m \in \mathbb{Z}$, decompõem a reta real em intervalos justapostos, cujo comprimento c é menor do que o comprimento $v - u$ do intervalo $I = (u, v)$ (observe a Figura 1.0.), então

$$mc = m \cdot \frac{L(2)}{n} = \frac{1}{n} \cdot L(2^m) = L(2^{\frac{m}{n}}).$$

Logo, pelo menos um desses multíplos mc, pertencem a $I = (u, v)$, isto é, basta fazer $x = 2^{\frac{m}{n}}$ e teremos $u < L(x) < v$.

□

Qualquer função logarítmica é sobrejetiva, como trata o próximo o teorema. Na sua demonstração, vamos considerar que todo número real α, admite uma representação decimal

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n... = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n} + ...$$

onde a parte inteira $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ e os algarismos decimais α_n, com $n \geq 1$, pertencem ao intervalo $[0, 9]$. Para todo $n \geq 0$, podemos escrever,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$

Então $\alpha_n < \alpha$ e $\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Dado um número real x, com $x < \alpha$, deve existir $n \in \mathbb{N}$, tal que, $x < \alpha_n$. De fato, $x < \alpha$ significa $\alpha - x > 0$. Tomando n tão grande que

$$\frac{1}{10^n} < \alpha - x.$$

Tem-se

$$\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n} < \alpha - x,$$

logo $\alpha - \alpha_n < \alpha - x$.

Teorema 1.2. *Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real b, existe um (único) número real positivo α tal que $L(\alpha) = b$.*

Demonstração. Dado $b \in \mathbb{R}$, vamos determinar um número $\alpha \in \mathbb{R}^+$, tal que, $L(\alpha) = b$. Para achar α, usaremos uma versão moderna de um processo milenar para resolução numérica de equações que os chineses antigos chamavam o "método do elemento celestial ". Através desse método podemos encontrar, um a um, os inteiros

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

que compõem a representação decimal do número real

$$a_0, a_1a_2...a_n...$$

Assim, mostraremos que de fato $L(\alpha) = b$.

Para determinar a parte inteira α_0, usaremos o fato de L ser uma função crescente ilimitada, então deve existir números inteiros k tais que $L(k) > b$. Consideremos $a_0 + 1$ como sendo o menor inteiro tal que $L(a_0 + 1) > b$. Logo

$$L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1).$$

Devemos considerar os números a_0, $a_0 + \frac{1}{10}$, $a_0 + \frac{2}{10}$, ..., $a_0 + \frac{9}{10}$, $a_0 + 1$. Como

$$L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1),$$

devem existir dois números consecutivos α_1, $\alpha_1 + \frac{1}{10}$ nesta sequência, de modo que,

$$L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + \frac{1}{10}),$$

isto é, deve existir $a_1 \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq a_1 < 9$, tal que, sendo

$$\alpha_1 = a_0 + \frac{a_1}{10},$$

tem-se

$$L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + \frac{1}{10}).$$

Analogamente consideremos os números a_1, $a_1 + \frac{1}{10^2}$, $a_1 + \frac{2}{10^2}$, ... , $a_1 + \frac{9}{10^2}$, $a_1 + \frac{1}{10}$, temos que deve existir a_2, com $0 \leq a_2 \leq 9$, de modo que, pondo

$$\alpha_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2},$$

então

$$L(\alpha_2) \leq b < L(\alpha_2 + \frac{1}{10^2}).$$

Prosseguindo de forma análoga, encontramos a representação decimal de um número real

$$a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ... = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

tal que, pondo

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n},$$

tem-se:

$$L(\alpha_n) \leq b < L(\alpha_n + \frac{1}{10^n}).$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Agora mostraremos que $L(\alpha) = b$. Consideremos que $L(\alpha) < b$, assim pelo **Lema 1.1**, existe $x > 0$, tal que

$$L(\alpha) < L(x) < b.$$

O fato de L ser crescente, tem-se $\alpha < x$. Assim, tomando n suficientemente grande, de modo que,

$$x - \alpha > \frac{1}{10^n},$$

ou seja,

$$\alpha + \frac{1}{10^n} < x,$$

como $\alpha_n < \alpha$, então

$$\alpha_n + \frac{1}{10^n} < \alpha + \frac{1}{10^n} < x.$$

Sendo L crescente, de $x > \alpha_n + \frac{1}{10^n}$, logo

$$L(x) > L(\alpha_n + \frac{1}{10^n}) > b.$$

Absurdo, pois x foi escolhido de modo que $L(x) < b$.

Analogamente, não pode ocorrer $L(\alpha) > b$. De fato, usando **Lema 1.1** novamente, consideremos $x > 0$ tal que,

$$b < L(x) < L(\alpha).$$

Como L é crescente, temos que $x < \alpha$. Então para algum n natural, tem-se $x < \alpha_n$, daí vem que,

$$L(x) < L(\alpha_n).$$

Então

$$L(x) < L(\alpha_n) \leq b,$$

assim $L(x) < b$. Um absurdo, pois x foi obtido de modo que $b < L(x)$.

Portanto, podemos concluir que para todo $b \in \mathbb{R}$, existe um número $\alpha \in \mathbb{R}^+$, tal que, $L(\alpha) = b$.

$\square$

Corolário 1.1. *Toda função logarítmica L:* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é uma bijeção entre* $\mathbb{R}^+$ *e* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Basta mostrar que L: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Pela **Propriedade 1.1**, L é injetiva e pelo **Teorema 1.2**, mostramos que L é sobrejetiva. Portanto, toda função logarítmica L: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma bijeção entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$.

□

O colorário acima mostra que dado um único número real qualquer y, podemos encontrar na tábua logarítmica o número $x > 0$, em que y é o seu logaritmo. Esta possibilidade é fundamental para o uso dos logaritmos no cálculo aritmético. É fácil ver que a tábua dos logaritmos, lida da direita para esquerda é a tabela da função exponencial, que trataremos adiante.

Observação 1.3. *Note que embora usando uma abordagem diferente daquela feita no ensino médio, observamos que os conceitos e as propriedades relacionadas aos logaritmos continuam válidas.*

CAPÍTULO 2

ÁREA DE UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE

---

2 Área de uma faixa de hipérbole

Neste capítulo abordaremos alguns resultados sobre a área de uma faixa de hipérbole. Tais resultados serão utilizados para definirmos o logaritmo natural.

Vamos definir área de uma faixa de hipérbole. Para tal consideremos duas retas orientadas, perpendiculares entre si e cada par ordenado (x, y) de números reais, representa um ponto do plano, tal que $y = \dfrac{1}{x}$. Para o nosso estudo, vamos considerar apenas o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$, definida por $H = \{(x, y); x > 0, y = \dfrac{1}{x}\}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, denotamos por H_a^b o conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$. Este conjunto é chamado de faixa de hipérbole que é a região limitada pelas duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelos eixos das abscissas e pela hipérbole H.

Vamos calcular a área aproximada de uma faixa H_a^b, por meio de pontos intermediários, decompondo o intervalo $[a, b]$ num número finito de intervalos justapostos. Para cada um dos intervalos $[c, d]$ da decomposição, tal que, $a < c < d < b$, consideremos o retângulo inscrito na faixa H_a^b. A reunião de todos esses retângulos inscritos é chamado de polígono retangular inscrito na referida faixa.

Veja a **Figura 1.1** (página 18) o aspecto geométrico do gráfico da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$; a região hachurada é a faixa H_a^b, representada na **Figura 1.2** (página 19) ; o polígono retangular inscrito na faixa H_a^b, tem aspecto geométrico de acordo com a **Figura 1.3** (página 20).

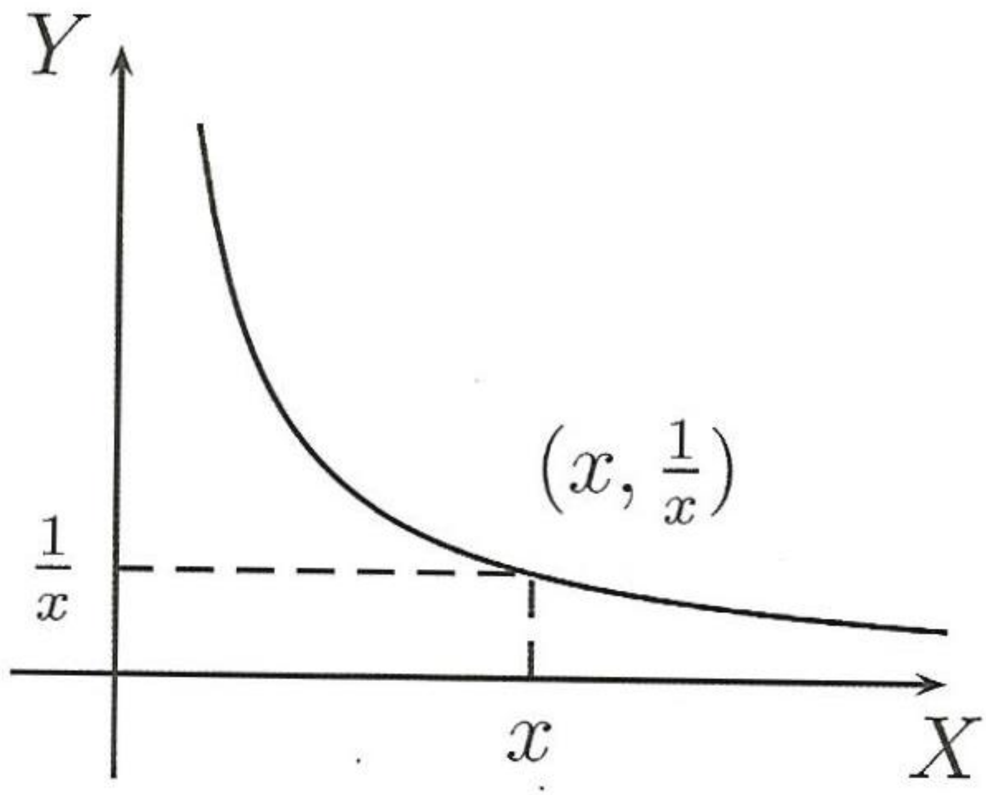

Figura 1.1

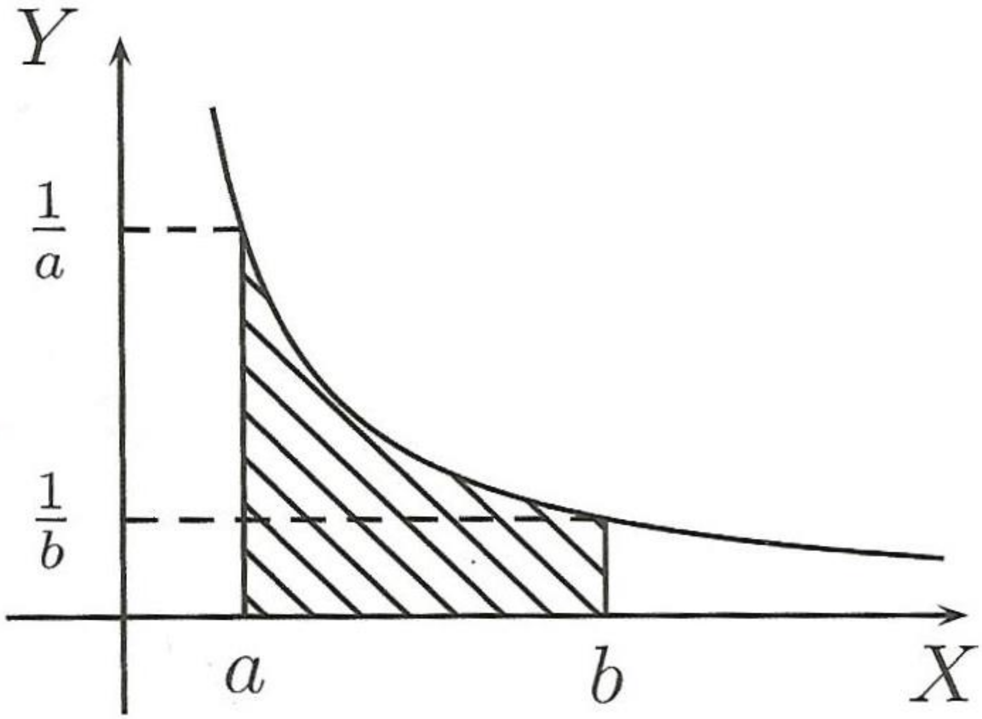

Figura 1.2

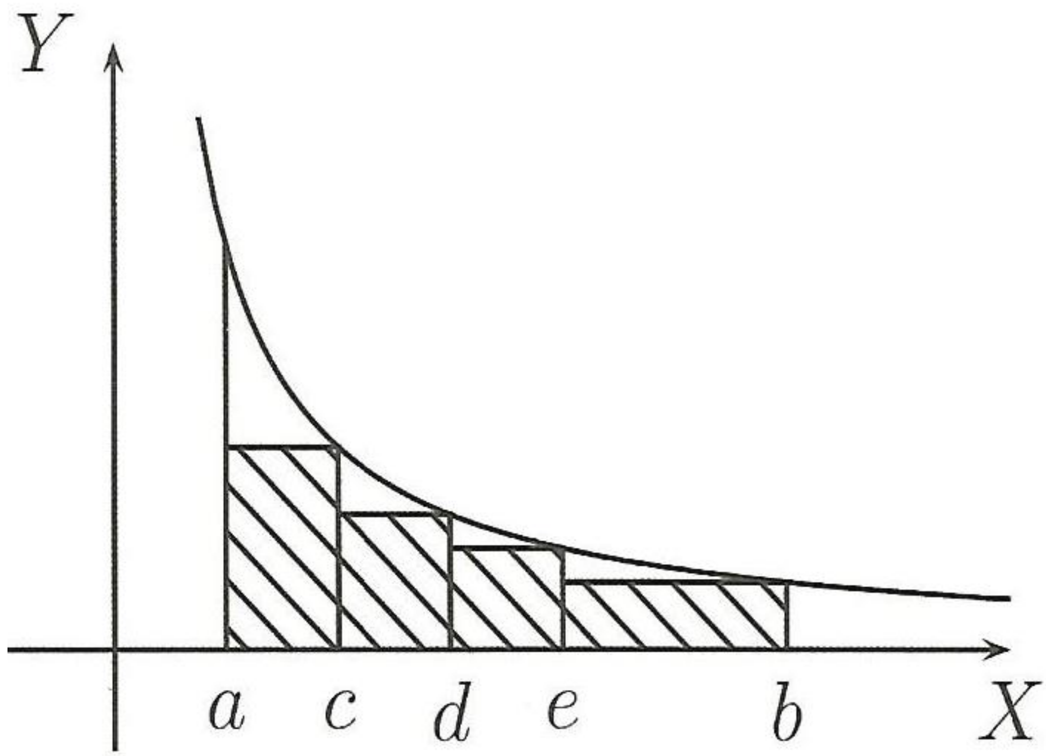

Figura 1.3

Cada polígono retangular inscrito na faixa H_a^b, fornece um valor aproximado por falta para a área de H_a^b. Quanto mais subdividirmos o intervalo $[a,b]$, mais próximo será o valor exato da área da faixa H_a^b. Estes conceitos serão usado mais adiante para definir o logaritmo natural.

O teorema a seguir é o mais importante sobre as áreas das faixas de hipérbole.

Teorema 2.1. *Dado um número real $k > 0$, então as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm mesma área.*

Demonstração. Vamos calcular a área de um retângulo inscrito em H cuja base é o segmento $[c,d]$. Então,

$$\frac{1}{d} \cdot (d - c) = 1 - \frac{c}{d},$$

agora calcularemos a área do retângulo inscrito em H e cuja base é o segmento $[ck, dk]$, $k > 0$ ora,

$$\frac{1}{dk}(dk - ck) = 1 - \frac{c}{d}.$$

Portanto, segue que as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk}, com $k > 0$, tem mesma área.

□

Se multiplicarmos por k cada uma das abscissas dos pontos da divisão de $[a,b]$, determinados por uma região retangular P obteremos uma subdvisão do intervalo $[ak, bk]$ e portanto o polígono retangular P' inscrito na faixa H_{ak}^{bk}, terá cada um dos retângulos que o compõem com mesma área que a do retângulo correspondente em P. Então para cada polígono retângular inscrito em H_a^b, existe um inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área.

O **Teorema 2.1** tem uma consequência muito importante, pois transforma as áreas de qualquer faixa nas áreas das faixas da forma H_1^c. De fato, Área$(H_a^b) =$ Área(H_{ak}^{bk}), tomando $k = \dfrac{1}{a}$, temos Área$(H_a^b) =$ Área$(H_{a\frac{1}{a}}^{b\frac{1}{a}}) =$ Área$(H_1^{\frac{b}{a}})$ e fazendo $c = \frac{b}{a}$, tem-se Área$(H_a^b) =$ Área(H_1^c).

Por convenção, para a área da faixa de hipérbole H_a^b, se $a < b$, então Área$(H_a^b) > 0$, quando $b < a$, tem-se Área$(H_a^b) =-$ Área(H_b^a), isto é, Área$(H_a^b) < 0$, sendo $a = b$, logo Área$(H_a^a) = 0$. Quando $a < b < c$, tem-se Área$(H_a^b) +$ Área$(H_b^c) =$ Área(H_a^c), cuja verificação é elementar.

O teorema a seguir é uma ferramenta usada neste trabalho, para mostrar que $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.

Teorema 2.2. *Dados a, b, c, números reais quaisquer, então Área(H_a^b) $+$ Área(H_b^c) $=$ Área(H_a^c).*

Demonstração. Devemos considerar seis casos distintos, vamos mostrar apenas o caso em que $c < a < b$, os outros casos a demostração é análoga. Se $c < a < b$, então

$$\text{Área}(H_c^b) = \text{Área}(H_c^a) + \text{Área}(H_a^b).$$

Daí,

$$\text{Área}(H_c^a) = \text{Área}(H_c^b) - \text{Área}(H_a^b) \Longrightarrow - \text{Área}(H_a^c) = - \text{Área}(H_b^c) - \text{Área}(H_a^b).$$

Portanto,

$$\text{Área}(H_a^c) = \text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c).$$

□

Observação 2.1. *O teorema que afirma serem as áreas de H_a^b e H_{ak}^{bk} iguais continua válido mesmo com esta convenção de sinais. Com efeito, ainda que se tenha $b < a$ será, também*

$$bk < ak,$$

pois $k > 0$.

Portanto, se for $b < a$ tem-se Área(H_a^b) $= -$ Área(H_b^a) $= -$ Área(H_{bk}^{ak}) $=$ Área(H_{ak}^{bk}).

Observação 2.2. *Sendo $c < b < a$, $a < c < b$, $b < c < a$, $c < b < a$, $a < c < b$, vale a igualdade Área(H_a^b) + Área(H_b^c) = Área(H_a^c), mesmo que se tenha $a = c$, $a = b$, $b = c$, ou $a = b = c$, a igualdade ainda se mantém verdadeira.*

2.1 Logaritmos naturais

Uma consequência muito importante da área da faixa de uma hipérbole é a definição dos logaritmos naturais. Assim temos que para todo $x > 0$, $\ln x = \text{Área}(H_1^x)$, onde lnx representa o logaritmo natural de x. E pelas convenções citadas anteriormente, segue que:

$$(i) \ln 1 = \text{Área}(H_1^1) = 0 \Longrightarrow \ln 1 = 0;$$

$$(ii)\ x > 1 \Longrightarrow \ln x = \text{Área}(H_1^x) > 0 \Longrightarrow \ln x > 0;$$

$$(iii)\ 0 < x < 1 \Longrightarrow \ln x = \text{Área}(H_1^x) < 0 \Longrightarrow \ln x < 0.$$

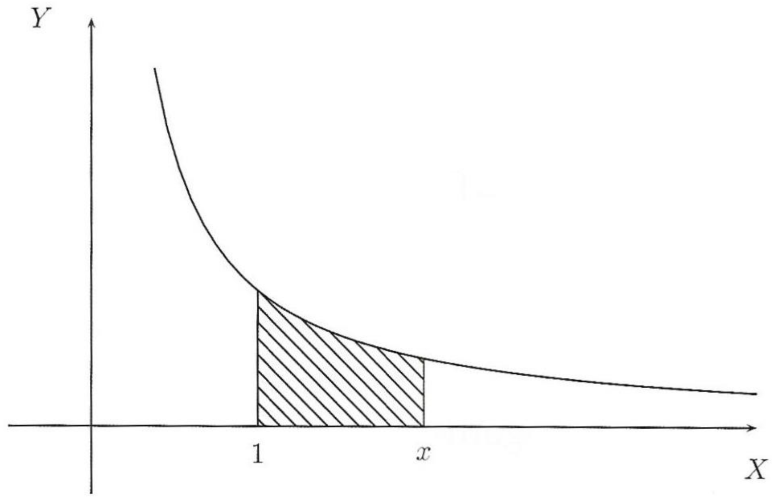

Figura 1.4. A área hachurada é igual a ln x

Observação 2.3. *Temos que* $\ln x$ *não está definida para* $x < 0$*.*

Exemplo 2.1. *Calcularemos um valor aproximado para* $\ln 2$*. Vamos tomar o intervalo* $[1, 2]$ *e dividi-lo em dez partes iguais por meio dos pontos:*

$$1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0.$$

Agora calculando os valores de $\frac{1}{x}$*, de cada um dos valores acima, teremos:*

$$1,000; 0,909; 0,833; 0,769; 0,714; 0,666; 0,625; 0,588; 0,556; 0526; 0,500.$$

Uma aproximação inferior para $\ln 2$*, é numericamente igual a área do polígono retangular inscrito na faixa* H_1^2*, que é composto por dez retângulos de bases medindo* $0,1$ *e suas alturas os dez útimos valores de* $\frac{1}{x}$ *descritos acima. Portanto, a área é:*

$ln2 =$ *Área(*H_1^2*)* $= 0,0909 + 0,0833 + 0,0769 + 0,0714 + 0,0666 + 0,0625 + +0,0588 + +0,0556 + 0,0526 + 0,0500 = 0,6687.$

Então um valor aproximado (por falta) para $\ln 2$ *é* $0,6687$.

Exemplo 2.2. *Calcularemos agora um valor aproximado para* $\ln 3$*. Procedendo de modo análogo tomando o intervalo* $[1, 3]$ *e dividindo-o em vinte partes iguais por meio dos pontos: 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9; 3,0. Agora calculando os valores de* $\frac{1}{x}$*, de cada um dos valores acima, teremos: 1,000; 0,909; 0,833; 0,769; 0,714; 0,666; 0,625; 0,588; 0,556; 0526; 0,500; 0,476; 0,455; 0,435; 0,417; 0,400; 0,385;0,370; 0,357; 0,345; 0,333. Uma aproximação inferior para* $\ln 3$*, é numericamente igual a área do polígono retangular inscrito na faixa* H_1^3*, que é composto por vinte retângulos de bases medindo* $0, 1$ *e suas alturas os vinte útimos valores de* $\frac{1}{x}$ *descritos acima. Portanto a área é:*

$\ln 3 =$ *Área(*H_1^3*)* $= 0,0909 + 0,0833 + 0,0769 + 0,0714 + 0,0666 + 0,0625 + +0,0588 + 0,0556+0,0526+0,0500+0,0476+0,0455+0,0435+0,0417+0,0400+0,0385++0,0370+ 0,0357 + 0,0345 + 0,0333 = 1,066.$

Então um valor aproximado (por falta) para $\ln 3$ *é* $1,066$.

O teorema a seguir mostra que se, $\ln x =$ Área(H_1^x), satisfaz as **propriedades** (A) **e** (B) **da Definição 1.1**, então é uma função logarítmica.

Teorema 2.3. $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Considerando a igualdade Área(H_a^c) = Área(H_a^b) + Área(H_b^c), podemos escrever

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_x^{xy}). \qquad (2.1)$$

E pelo **teorema 2.1**, tem-se

$$\text{Área}(H_x^{xy}) = \text{Área}(H_1^y). \qquad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1), teremos Área(H_1^{xy}) = Área(H_1^x) + Área(H_1^y), isto é,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

Agora vamos provar que $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, é crescente. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x < y$, deve existir um número $a > 1$, tal que, $y = ax$. Então,

$$\ln y = \ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Pelo fato de $a > 1$, logo $lna > 0$, tem-se

$$\ln y > \ln x.$$

Assim, $\ln$ é crescente.

Portanto provamos que $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.

$\square$

As regras de cálculo com logaritmos naturais (onde x, y são números reais positivos e $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) a seguir são consequências do **teorema 2.3**:

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^m) = m \cdot \ln x$$

$$\ln(\sqrt[m]{x}) = \frac{\ln x}{m}.$$

Essas regras são muito usadas no cálculo de logaritmos e simplificam uma operação aritmética, por outra mais simples ainda.

Exemplo 2.3. *Vamos calcular* $\ln 64$*, usando a regra* $\ln(x^m) = m \cdot \ln x$*, então*

$$\ln 64 = \ln(2^6) = 6 \ln 2.$$

Consultando a tábua dos logaritmos no Apêndice, encontramos $\ln 2 = 0,693$. *Logo,*

$$\ln 64 = 6 \cdot 0,693 = 4,158.$$

Exemplo 2.4. *Calculando agora* $\ln \frac{9}{5}$*, devemos usar a regra* $\ln \frac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$*. Daí,*

$$\ln \frac{9}{5} = \ln 9 - \ln 5 = 2\ln 3 - \ln 5.$$

Consultando na tábua dos logaritmos encontramos $\ln 3 = 1,0986$ *e* $\ln 5 = 1,6094$*. Então,*

$$\ln \frac{9}{5} = 2 \cdot 1,0986 - 1,6094 = 0,5878.$$

Exemplo 2.5. *Usando a regra* $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$*, vamos calcular* $\ln \frac{1}{9}$*. Como* $\ln 9 = 2\ln 3 = 2,1972$*, tem-se*

$$\ln \frac{1}{9} = -\ln 9 = -2,1972.$$

Exemplo 2.6. *Vamos calcular* $\ln(\sqrt[10]{9})$*, usando a regra* $\ln(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{\ln x}{n}$*, segue que*

$$\ln(\sqrt[10]{9}) = \frac{\ln 9}{10} = \frac{2,197}{10} = 0,21972.$$

2.2 O número e

As funções logarítmicas são bijetoras, então podemos garantir que existe um único número real x tal que, $\ln x = 1$. Esse número é representado pela letra e, ele é a base do sistema de logarítmos naturais. Simbolicamente, tem-se

$$\ln x = 1 \iff x = e.$$

O número e é considerado um dos números mais importantes da matemática. Como $\ln x < 0$, quando $0 < x < 1$ e ainda, $\ln x = 1 > 0$, então **e** > 1.

Vimos que um valor aproximado para $\ln 2 = 0,693$ e para $\ln 3 = 1,098$, logo

$$\ln 2 < \ln e < \ln 3,$$

isto é, $2 < \mathbf{e} < 3$, veja na **Figura 1.5** que essa relação é verdadeira e como por definição $\ln e = 1$, logo Área$(H_1^e) = 1$. Pode-se demonstrar que **e** é um número irracional e daí, seu desenvolvimento não é periódico. Um valor aproximado de **e** com oito algarismos decimais é $2,71828182$.

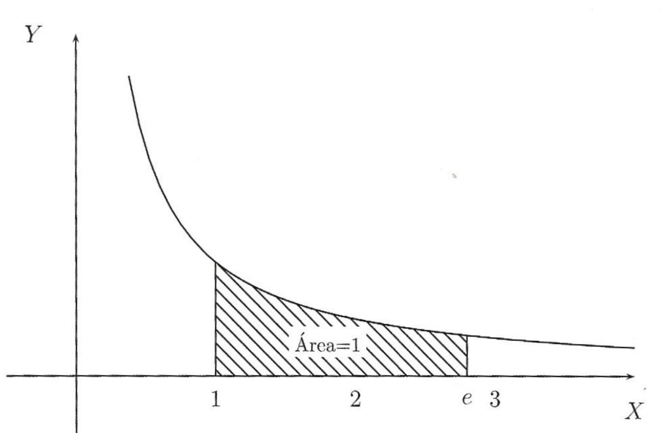

Figura 1.5

Teorema 2.4. *Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional. Tem-se $y = e^r$ se e somente se,* $\ln y = r$.

Demonstração. Dado $y = e^r$, então

$$\ln y = \ln e^r = r \cdot \ln e = r \cdot 1 = r.$$

Portanto, $\ln y = r$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. Reciprocamente, seja $y \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$\ln y = r.$$

Sabemos que $\ln e = 1$, então

$$\ln y = r \cdot \ln e.$$

Daí, podemos escrever

$$\ln y = \ln e^r.$$

Do fato de $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ser uma função logarítmica, pela injetividade segue que

$$y = e^r.$$

$\square$

CAPÍTULO 3

FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL E A MUDANÇA DE BASE

---

3 Função exponencial natural e a mudança de base

Vamos definir a função exponencial de uma base qualquer, mostraremos seus teoremas, suas propriedades e os conceitos relacionados a ela. Trataremos também sobre a mudança de base do logaritmo e finalmente definiremos os logaritmos decimais.

Definição 3.1. *Dado um número real x, definimos e^x como sendo o único número positivo cujo logaritmo natural é x.*

A faixa de hipérbole H_1^y tem área igual a x quando tomamos como abscissa $y = e^x$ (veja a **Figura 1.6**). Assim, quando $x > 0$, então $e^x > 1$ e para $x < 0$, logo $e^x < 1$ e ainda qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, tem-se $e^x > 0$. Simbolicamente podemos definir e^x da seguinte forma:

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

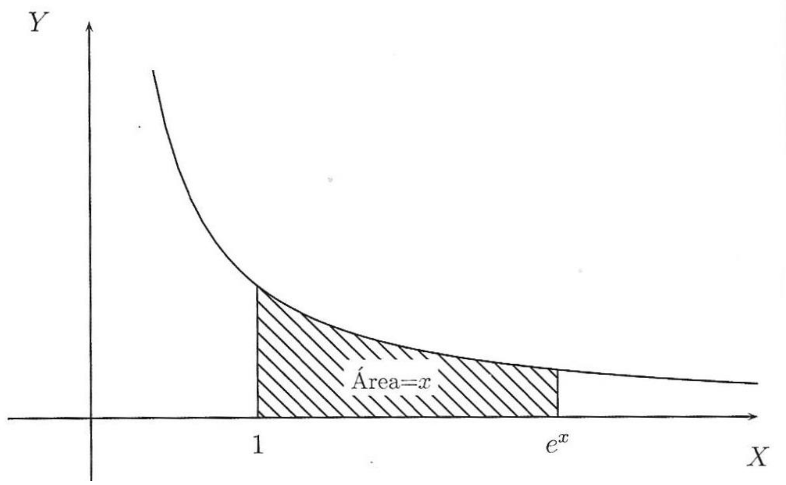

Figura 1.6

Como toda função logarítmica é bijeção entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$, podemos garantir a existência de e^x e sua unicidade. A função exponencial natural $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $y = e^x$ é a inversa da função logarítmica $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $x = \ln y$. Portanto, as igualdades a seguir são verdadeiras $\forall x \in \mathbb{R}$, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}^+$:

$$\ln(e^x) = x;$$

$$e^{\ln y} = y.$$

A propriedade fundamental da função exponencial natural é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.1. *Para todos os números reais x, y, tem-se*

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

Demonstração. Usaremos a igualdade $\ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então

$$\ln(e^x \cdot e^y) = \ln e^x + \ln e^y = x + y.$$

Temos que $e^x \cdot e^y$ é o número real, cujo logarítmo natural é $x + y$. De modo análogo, tem -se

$$\ln(e^{x+y}) = x + y.$$

Assim, segue que e^{x+y} é o número real, cujo logarítmo natural é $x + y$. Portanto, pela injetividade de $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, temos que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

$\square$

Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, tem-se $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, para todo $a \in \mathbb{R}^+$, valendo a mesma regra quando $a = e$, como mostra o colorário a seguir.

Corolário 3.1. *Para todo número real x, então* $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

Demonstração. Usando o fato de $e^0 = 1$ e o teorema anterior, então

$$e^{-x} \cdot e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1.$$

Daí,

$$e^{-x} \cdot e^x = 1.$$

Assim, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Teorema 3.2. *A função exponencial natural* $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *é crescente e assume todos os valores positivos quando* x *varia entre* $-\infty$ *e* $+\infty$.

Demonstração. Vamos mostrar que a função exponencial natural é crescente. Assim $\forall x, y \in \mathbb{R}$, consideremos $x < y$, temos que

$$x = \ln(e^x)$$

e

$$y = \ln(e^y).$$

Então não podemos ter $e^x = e^y$, pois isso levaria $x = y$ e ainda não podemos ter $e^y < e^x$, pois isso acarretaria $\ln(e^y) < \ln(e^x)$, logo $y < x$. Portanto, para $x < y$, tem-se $e^x < e^y$. Agora, dado $a \in \mathbb{R}^+$, tomando $x = \ln a$, segue que

$$e^x = e^{\ln a} = a.$$

$\square$

3.1 Outras bases

A hipérbole $y = \frac{1}{x}$ foi usada para definir os logaritmos naturais. Consideremos a hipérbole $y = \frac{k}{x}$, onde $k > 0$. Teremos que para cada valor de k tem-se um novo sistema de logaritmos. Sejam a e b pontos do eixo x e considerando a faixa de $H(k)_b^a$ de hipérbole $y = \frac{k}{x}$ compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$.

Dado um segmento $[c, d]$, contido no intervalo $[a, b]$, vamos tomar um retângulo de base em $[c, d]$, inscrito na hipérbole $y = \frac{1}{x}$, com altura $\frac{1}{d}$. Seja um outro retângulo de base em $[c, d]$, inscrito na hipérbole $y = \frac{k}{x}$, onde sua altura é $\frac{k}{d}$ e portanto a área do primeiro será

$$\frac{1}{d} \cdot (d - c) = 1 - \frac{c}{d},$$

enquanto a do segundo

$$\frac{k}{d} \cdot (d - c) = k \cdot (1 - \frac{c}{d}).$$

Concluímos que a área do segundo é k vezes a do primeiro.

Qualquer que seja a divisão do intervalo $[a, b]$, sempre determinará dois polígonos retangulares, um inscrito na faixa H_a^b, enquanto o outro na faixa $H(k)_a^b$. Portanto, mostramos que:

$$\text{Área de } H(k)_a^b = k \cdot \text{ Área de } H_a^b.$$

Dado um número real $k > 0$, definimos um novo sistema de logaritmos da forma: $\log x = $ Área de $H(k)_1^x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, ou de maneira equivalente podemos escrever,

$$\log x = k \cdot \ln x.$$

Chamaremos de base do novo sistema de logaritmos o número real $a > 0$ tal que $\log a = 1$. Temos que,

$$\log a = k \cdot \ln a = 1.$$

Assim,

$$\ln a = \frac{1}{k}$$

logo,

$$e^{\ln a} = e^{\frac{1}{k}}$$

isto é,

$$a = e^{\frac{1}{k}},$$

para $k > 0$.

Uma notação para os logaritmos de base a é $\log_a x$, onde $x > 0$. Como $k = \frac{1}{\ln a}$ e $logx = k \cdot \ln x$. Então,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Assim,

$$\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a}.$$

Ou seja,

$$\log_a a = 1.$$

O teorema a seguir garante que $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$*, é uma função logarítmica, com* $a > 1$.

Teorema 3.3. *Para cada* $a > 1$ *a função real, definida para todo* $x > 0$*,* $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$*, é uma função logarítmica.*

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, seja $x < y$, como

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

O fato de $\ln$ ser uma função logarítmica, tem-se

$$\ln x < \ln y.$$

Pelo fato de $a > 1$, tem-se $\ln a > 0$, então

$$\frac{\ln x}{\ln a} < \frac{\ln y}{\ln a} \Longrightarrow \log_a x < \log_a y.$$

Portanto, $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, é uma função crescente.

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, segue

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Donde,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

□

Observação 3.1. *Quando* $0 < a < 1$*, podemos tomar* $b = \frac{1}{a}$*, então* $b > 1$ *e*

$$\log_{\frac{1}{b}} x = \frac{\ln x}{ln\frac{1}{b}} = -\frac{\ln x}{\ln b} = -\log_b x,$$

isto é,

$$\log_a x = -\log_b x.$$

Logo não há necessidade de estudar logaritmos com base menor do que 1.

3.2 Mudança de base e a potência a^x com $x \in \mathbb{R}$

Dados $a > 1$ *e* $b > 1$*, qualquer que seja* $x > 0$*, vale a igualdade* $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Teorema 3.4. *Sejam* a *e* b *números maiores do que* 1*. Para todo* $x > 0$*, tem-se*

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Demonstração. Temos que

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b},$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Então,

$$\log_a x \cdot \log_b a = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

Logo,

$$\log_a x \cdot \log_b a = \log_b x.$$

□

Exemplo 3.1. *Tomando* $a = 10$ *e* $b = e$*, teremos* $\ln x = \log_{10} x \cdot \ln 10$*. Assim, se desejarmos construir uma tábua de logaritmos naturais basta multiplicar todos os logaritmos de uma tábua de base 10, pelo* $\ln 10 = 2,3025$*. Fazendo* $x = b$ *na fórmula de mudança de base, então*

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Isto é,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Sabemos que $\ln(a^r) = r \cdot \ln a$ *é verdadeira para* $a > 0$ *e* $r = \frac{p}{q}$ *racional. Vamos definir* a^x *de tal maneira que a igualdade*

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln a. \qquad (3.3)$$

continue valida. Para garantir a validade de (3.3)*, devemos definir* a^x *como sendo o único número real positivo cujo logaritmo natural é* $x \cdot \ln a$*.*

Definição 3.2. *Dados* $a > 0$ *e para todo* $x \in \mathbb{R}$*, a potência* a^x *é o único número real positivo cujo logaritmo natural é* $x \cdot \ln a$*.*

Assim, para $x = \frac{p}{q}$, com $x \in \mathbb{Q}$ e $q > 0$, o número real positivo $\sqrt[q]{a^p}$ tem logaritmo natural igual a $\frac{p}{q} \cdot \ln a$, isto é, $x \cdot \ln a$. Logo a definição que demos para a^x coincide com a do caso x racional. Portanto a^x está definido $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.3 Propriedades

As propriedades a seguir são usadas na simplificação de cálculos com logaritmos.

Propriedade 3.3.1. Dados $a > 0$ e $b > 1$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $\log_b a^x = x \log_b a$.

Demonstração. Temos que,

$$\log_b a^x = \frac{\ln(a^x)}{\ln b} = x \cdot \frac{\ln a}{\ln b} = x \cdot \log_b a$$

então,

$$\log_b a^x = x \cdot \log_b a.$$

□

Propriedade 3.3.2. Para todo $a > 1$, tem-se $\log_a a^x = x$.

Demonstração. Basta tomar $a = b$ em $\log_b a^x = x \cdot \log_b a$. Então,

$$\log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1$$

ou seja,

$$\log_a a^x = x.$$

□

Propriedade 3.3.3. Qualquer que seja $a > 0$, tem-se $e^{x \cdot \ln a} = a^x$.

Demonstração. Pela **definição 3.2**, dado $a > 0$,

$$x \cdot \ln a = \ln(a^x),$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Então,

$$e^{x \cdot \ln a} = e^{\ln a^x} = a^x.$$

□

3.4 Função exponencial

Uma função exponencial de base a, que associa a cada x real a potência a^x, tem propriedades análogas as já demonstradas para a função exponencial natural e^x, como mostra os teoremas a seguir :

Teorema 3.5. *$\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.*

Demonstração. Pelo **teorema 3.3**, segue

$$\log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y = x + y$$

ou seja,

$$\log_a(a^x \cdot a^y) = x + y.$$

Como a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é injetiva, logo $a^x \cdot a^y$ e a^{x+y} tem o mesmo logaritmo na base a. Portanto,

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

□

Teorema 3.6. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *tem-se* $(a^x)^y = a^{xy}$.

Demonstração. Temos que,

$$\log_a [(a^x)^y] = y \cdot \log_a a^x = xy.$$

E ainda,

$$\log_a a^{xy} = xy$$

daí,

$$\log_a [(a^x)^y] = \log_a (a^{xy}).$$

portanto $(a^x)^y = a^{xy}$, pela injetividade da função logarítmica.

□

Observação 3.2. *Quando* $a > 1$*, a função* $x \mapsto a^x$ *é contínua, positiva e crescente,* $\forall x \in \mathbb{R}$*, tem-se* $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$*.*

Observação 3.3. *Quando* $0 < a < 1$*, então a função* $x \mapsto a^x$*, permanece contínua, positiva mas decrescente, com* $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ *e* $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$*.*

3.5 Logaritmos decimais

Chama-se logaritmos decimais o sistema de logaritmos, cuja a base é 10, sua notação é $\log_{10} x$

ou $\log x$. Usaremos a segunda representação. Então

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10},$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+}$.

Exemplo 3.2. *Para calcular* $\log 6$*, temos*

$$\log 6 = \frac{\ln 6}{\ln 10}.$$

Consultando a tabela de logaritmos naturais no Apêndice, temos que $\ln 6 = 1,7918$ *e* $\ln 10 = 2,3026$*. Assim,*

$$\log 6 = \frac{1,7918}{2,3026} = 0,7782.$$

Exemplo 3.3. *Vamos encontrar o valor de* x*, que satisfaz a equação* $x^{\log x} = 3$*. Tem-se,*

$$x^{\log x} = 3 \Longrightarrow \ln x^{\log x} = \ln 3$$

então,

$$\ln x^{\frac{\ln x}{\ln 10}} = \ln 3 \Longrightarrow \frac{\ln x}{\ln 10} \cdot \ln x = \ln 3.$$

Assim,

$$\frac{(\ln x)^2}{\ln 10} = \ln 3 \Longrightarrow (\ln x)^2 = \ln 3 \cdot \ln 10$$

donde,

$$\ln x = \sqrt{\ln 3 \cdot \ln 10}.$$

portanto,

$$x = e^{\sqrt{\ln 3 \cdot \ln 10}}.$$

3.5.1 Característica e mantissa de um logaritmo decimal

Um número positivo x pode ser escrito na forma $x = a$ x 10^n, onde $a \in [1, 10)$ e n um número qualquer. Sendo $x = a$ x 10^n, sob as condições descritas acima, então

$$\log x = \log(a \cdot 10^n),$$

isto é,

$$\log x = \log a + n \log 10.$$

Assim,

$$logx = loga + n,$$

como $1 \leq a < 10$, tem-se

$$\log 1 \leq \log a < \log 10.$$

Ou seja,

$$0 \leq \log a < 1.$$

Portanto, quando $x = a$ x 10^n, com $1 \leq a < 10$ e $n \in \mathbb{Z}$, segue $\log x = \log a + n$, com $0 \leq \log a < 1$.

Chamaremos $\log a$ de mantissa e n de característica do logaritmo de x. Logo podemos escrever,

$$\log x = \text{característica} + \text{mantissa}.$$

Temos que $\log a > 0$, pois $1 \leq a < 10$, assim a mantissa sempre será positiva, por outro lado a característica de $\log x$ é um número inteiro qualquer.

Exemplo 3.4. *Sendo* $x = 63,2$*, vamos calcular* $\log x$*. Então*

$$\log x = \log 63,2 = \log 6,32 + 1.$$

Usando a tábua do Apêndice, temos $\log 6,32 = 0,8007$*. Portanto,* $\log 63,2 = 1,8007$.

Exemplo 3.5. *Vamos determinar* $\log 547$*. Temos que,*

$$547 = 5,47 \cdot 10^2.$$

Então,

$$\log 547 = \log 5,47 + \log 10^2 = \log 5,47 + 2$$

Consultando na tábua do Apêndice, encontramos $\log 5,47 = 0,7380$ *(mantissa de* $\log 547$ *), a característica é* 2*. Assim,* $\log 547 = 2,7380$.

Observação 3.4. *Nos exemplos anteriores os cálculos foram feitos quando* $x > 1$ *e portanto,* $\log x > 0$.

Exemplo 3.6. *Agara vamos considerar um número x, tal que $0 < x < 1$. Seja $x = 0,000876$, logo,*

$$\log x = \log 0,000876 = \log 8,76 + \log 10^{-4} = -4 + \log 8,76.$$

Pela tabela do Apêndice, tem-se

$$\log x = \log 0,000876 = -4 + 0,9425,$$

isto é, $\log 0,000876 = -3,0575.$

CAPÍTULO 4

ALGUMAS APLICAÇÕES DO LOGARITMO

4 Aplicações logarítmicas no Ensino Médio

Muitos professores da Educação Básica apresentam dificuldades em considerar os conteúdos matemáticos na sua totalidade, acabando por fragmentar conhecimentos e saberes. O ensino de Logaritmos é pouco explorado no Ensino Médio. É necessário o comprometimento do docente para desenvolver a capacidade de articular seu plano de aula, usando as aplicações logarítmicas, como recurso didático de forma interdisciplinar, visto que os logaritmos são aplicados na química, física, geografia, arqueologia, economia e muitas outras áreas do conhecimento. O resultado dessa prática pedagógica fará com que o estudante avance no conhecimento dos logaritmos e outras disciplinas, ampliando e diversificando o processo ensino-aprendizagem.

A aprendizagem será efetiva no processo de construção dos conceitos matemáticos se for trabalhada de maneira que o aluno entenda-a no seu contexto e seja apresentada de forma significativa. Com base nessa perspectiva, as aplicações logarítmicas entram como uma solução na significação e na contextualização de conceitos abordados neste trabalho. Podemos através das aplicações logarítmicas, transformar problemas reais em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real e na matemática.

Os logaritmos foram inventados exclusivamente para facilitar os cálculos de navegação, astronomia, engenharia, comércio e outras áreas, mas o fato de determinar o aumento ou a diminuição de uma grandeza de forma proporcional ao valor da grandeza num dado intervalo de tempo, encontramos hoje suas aplicações em várias áreas do conhecimento.

No Ensino Médio pouco se fala sobre a história e as aplicações dos logaritmos. Muitos estudantes são desmotivados a aprender determinado conteúdo matemático, pois não conhece onde surgiu aquele conhecimento, quem o produziu e também não sabem quais são suas aplicações no seu cotidiano. Uma maneira de tornar o ensino dos logaritmos interessante e motivador é falar sobre suas aplicações, fazer um paralelo entre o abstrato e o concreto. Essa é a proposta de trabalho para o professor do Ensino Médio, ministrar aulas, usando as aplicações logarítmicas descritas neste capítulo.

4.1 Lei de resfriamento de Newton

No século $XVII$, o matemático, físico e astrônomo inglês, Isaac Newton $(1643 - 1727)$, que lançou a base do cálculo diferencial e integral, muitos anos antes da descoberta feita por Leibniz $(1646 - 1716)$, criou a Lei de resfriamento de um corpo, ele descobriu que a partir de observações experimentais, pode-se determinar com exatidão, que a temperatura de um corpo se altera a partir de uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio-ambiente, essa é a conhecida Lei de Resfriamento de Newton.

Na investigação de um homicídio ou de uma morte acidental, em muitos casos é fundamental saber o instante da morte. Vamos deduzir uma fórmula matemática que vai solucionar este problema. Como a taxa na qual um corpo perde calor é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto, e o meio que o contém, então matematicamente esta relação é expressa da forma:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A).$$

Temos que, dT representa a variação de temperatura do objeto durante um intervalo de tempo dt muito pequeno, T é a temperatura do corpo em um dado intervalo de tempo, T_A a temperatura do meio que contém o corpo e k é uma constante de proporcionalidade. Usando algumas técnicas de Cálculo, vamos encontrar uma aplicação dos logaritmos. Então,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A) \Longrightarrow \frac{dT}{T - T_A} = -kdt$$

tem-se,

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_A} = -\int_0^t kdt$$

daí,

$$[\ln(T - T_A)]_{T_0}^{T} = -kt$$

assim,

$$\ln(T - T_A) - \ln(T_0 - T_A) = -kt$$

donde,

$$\ln \frac{T - T_A}{T_o - T_A} = -kt.$$

Logo,

$$\frac{T - T_A}{T_o - T_A} = e^{-kt}.$$

Portanto,

$$T - T_A = (T_o - T_A)e^{-kt},$$

fazendo $T - T_A = D(t)$ e $T_o - T_A = D_0$, onde D_0 é a diferença de temperatura no instante $t = 0$ e $D(t)$ é a diferença no instante t qualquer. Assim, teremos

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-kt}.$$

Exemplo 4.1. *O corpo de uma vítma de assassinato foi encontrado as* 22 *horas, as* $22h30min$ *o médico legista chegou imediatamente no local tomou a temperatura do cadáver, que era de* $32,5^oC$*. Uma hora mais tarde tomou a temperatura outra vez e encontrou* $31,5^oC$*; a temperatura do ambiente foi mantida constante a* $16,5^oC$*. Considerando a temperatura normal da pessoal viva* $36,5^oC$*, determine a que horas a pessoa morreu.*

Resolução 4.1: Usando a fómula $D(t) = D_0 \cdot e^{-kt}$, vamos encontrar inicialmente o valor de k. Temos que,

$$D(1) = 31,5 - 16,5$$

e

$$D_0 = 32,5 - 16,5.$$

Então,

$$15 = 16e^{-k}$$

daí,

$$\ln \frac{15}{16} = -k$$

logo,

$$k = 0,064.$$

Assim,

$$D(t) = 16 \cdot e^{-0,064t},$$

como $D(t) = 36,5 - 16,5$, segue que

$$20 = 16 \cdot e^{-0,064t}$$

tem-se,

$$\ln \frac{5}{4} = \ln(e^{-0,064t})$$

donde,

$$\ln(1,25) = -0,064t.$$

Logo, $t = -3,5h$, o intervalo de tempo é negativo indicando que a pessoa morreu três horas e trinta minutos antes de ser achado. Como corpo da vítma foi encontrado as 22 horas, portanto a hora que a pessoa morreu foi $18h30min$.

4.2 Potencial hidrogenônico

O bioquímico dinamarquês Peter Lauritz Sorensen $(1868 - 1939)$, estudando reações enzimáticas e controle de qualidade da cerveja, determinou uma escala de PH ou potencial de hidrogenônico de uma solução, que consiste na indicação da acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer. O PH é definido como o logaritmo decimal do inverso da concentração de H_3O^+(íon hidrônio).

Assim,

$$PH = -\log[H_3O^+].$$

A classificação do PH são de três formas a seguir:

(i) Se $0 < PH < 7$, então a solução é ácida;

(ii) Se $PH = 7$, então a solução é neutra;

(iii) Se $7 < PH < 14$, então a solução é básica.

Exemplo 4.2. *A água do mar tem $PH = 8,0$. Vamos calcular a sua concentração de íons H_3O^+. Usaremos a fórmula $PH = -\log[H_3O^+]$, então $8,0 = -\log[H_3O^+] \Longrightarrow \log[H_3O^+] = -8 \Longrightarrow [H_3O^+] = 10^{-8}$. A concentração de íons H_3O^+ na água do mar é $[H_3O^+] = 10^{-8}$ mol por litro de solução.*

4.3 Terremotos

A magnitude de um terremoto provocado pelo movimento das placas tectônicas, é medida pela escala Richter, seu criador foi Charles Richter, ele estudou que desastres de grandes proporções liberam energia das placas tectônicas. A escala Richter é logarítimica e possui pontuação de 0 a 9 graus. Nessa escala a magnitude ou graus é o logaritmo decimal da medida das amplitudes das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto. Matematicamente a escala Richter, é dada pela fórmula:

$$M = \log A - \log A_0,$$

onde M: magnitude; A: amplitude máxima; A_0: amplitude de referência.

O aparelho usado para medir as amplitudes é chamado de sismógrafo. A escala Richter pode ser escrita de várias formas distintas, depende apenas das variáveis escolhidas para sua composição. Vamos estudar outra fómula que usa a variável E, que representa a energia mecânica liberada pelo abalo. A magnitude do terremoto é descrita por:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log E - \frac{13}{4}.$$

Exemplo 4.3. *Em 1995 terremoto em Kobe no Japão, liberou $4,0 \cdot 10^{15} J$ de energia mecânica, no abalo. Calcule a magnitude do terremoto.*

Solução: Vamos usar a fórmula

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log E - \frac{13}{4},$$

para determinar a magnitude do terremoto, sendo $E = 4,0 \cdot 10^{15} J$. Então,

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log(4,0 \cdot 10^{15}) - \frac{13}{4}$$

daí,

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log(4,0) + \log(10^{15}) - \frac{13}{4}.$$

Assim, como $\log(4,0) = 0,6020$, teremos

$$M = 0,67 \cdot (0,6020 + 15) - 3,25 \approx 7,2$$

portanto, o terremoto em Kobe no Japão teve magnitude de $7,2$ na Escala Richter.

Observação 4.1. *Sabemos que* $1kwh = 1000{\cdot}3600wh = 3,6{\cdot}10^6 J$*, daí* $4,0{\cdot}10^{15} J \approx 1,2{\cdot}10^9 kwh$. *Considerando que o consumo mensal de uma casa seja de* $100kwh$*, então a energia liberada no terremoto em Kobe, é suficiente para alimentar por um mês* 12 *milhões de residências, cujo consumo mensal é* $100kwh$.

Exemplo 4.4. *O terremoto ocorrido em janeiro de* 2010 *no Haiti teve magnitude* $2,0 \cdot 10^{15} J$ *de energia liberada e o do Chile* (2010)*, acusou* $9,55 \cdot 10^{17} J$*. Várias notícias foram divulgadas comparando esses dois terremotos. A relação existente entre as magnitudes das energias liberadas por esses dois terremotos é de*

$$\frac{9,55 \cdot 10^{17} J}{2,0 \cdot 10^{15} J} = 477,5.$$

O terremoto ocorrido no Chile foi em termos de liberação de energia cerca de $477,5$ *vezes maior do que o ocorrido no Haiti.*

4.4 Desintegração radioativa

Os núcleos atômicos possuem a propriedade de emitir partículas e radiações eletromagnétcas que se transformam em núcleos mas estáveis, isto é, um atômo de uma substância radioativa se desintegra, emitindo partículas, transformando em outra não radioativa. Esse fenômeno é chamado de desintegração radioativa. Um exemplo clássico é quando o urânio (U^{238}) sofre decaimento radioativo até se transformar no chumbo (Pb^{206}).

O tempo que os atômos levam para ficarem estáveis varia muito, ele é chamado de meia vida, que é o tempo necessário para metade dos isótopos de uma amostra radioativa se desintegrar. Esse fenômeno ocorre de tal forma que para um instante considerado a quantidade de matéria de uma substância radioativa se desintegre de forma proporcional a quantidade de massa da substância original presente no corpo no instante dado.

Chamaremos de α a constante de proporcionalidade que é determinada em laboratório, o valor de α depende do átomo que compõe a substância radioativa. Dado um corpo de massa M_0, cuja taxa de desintegração é α, considerando que sua desintegração ocorra de maneira instantânea, no fim de cada segundo, então M_0 é a massa da substância quando $t = 0$, passados $t = 1$ segundos a perda de massa deve ser $\alpha \cdot M_0$. Daí,

$$M_1 = M_0 - \alpha \cdot M_0 = M_0(1 - \alpha),$$

decorridos dois segundos, teria

$$M_2 = M_1 - M_0 \cdot (1 - \alpha) \cdot \alpha = M_0(1 - \alpha) - M_0 \cdot (1 - \alpha) \cdot \alpha = M_0 \cdot (1 - \alpha)(1 - \alpha).$$

Assim,

$$M_2 = M_0(1 - \alpha)^2.$$

De uma forma geral, para um instante t segundos restaria a massa:

$$M(t) = M_0(1 - \alpha)^t.$$

Vamos determinar uma melhor aproximação para esse fenômeno, assim fixado um número natural n e considerando que a desintegração ocorra em cada intervalo de tempo $\frac{1}{n}$ de segundo a massa se reduzirá a:

$$M_0 - \frac{\alpha}{n} \cdot M_0 = M_0(1 - \frac{\alpha}{n}).$$

Passado um segundo, ocorreria n desintegraçãoes e fazendo as n reduções, a quantidade de matéria restante será:

$$M_0(1 - \frac{\alpha}{n})^n.$$

Se dividirmos o intervalo $[0, 1]$, por um número $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, sendo cada uma das partes iguais, então a massa do corpo será:

$$\lim_{n \to \infty} M_0(1 - \frac{\alpha}{n})^n = M_0 \cdot e^{-\alpha}.$$

Observação 4.2. *Para chegarmos neste resultado usamos a definição tradicional do cáculo*

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}).$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(1 + (-\frac{1}{n})) = e^{-1}.$$

Vamos calcular a quantidade de matéria no fim de t segundos, devemos considerar o intervalo $[0, t]$ e dividi-lo em n partes iguais, logo a massa que sobrará é:

$$M_0 - M_0 \cdot \frac{\alpha \cdot t}{n} = M_0(1 - \frac{\alpha \cdot t}{n}).$$

Dividindo o intervalo $[0, t]$, por um número natural n, onde as n partes do intervalo são iguais. Após t segundos, teríamos n desintegrações e portanto a massa do corpo restante deve ser $M_0(1 - \frac{\alpha \cdot t}{n})^n$. Após dividirmos o intervalo $[0, t]$, por n suficientemente grande a massa do corpo será reduzida à:

$$\lim_{n\to\infty} M_0(1 - \frac{\alpha \cdot t}{n})^n = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

tomando

$$\lim_{n\to\infty} M_0(1 - \frac{\alpha \cdot t}{n})^n = M(t),$$

então

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Observação 4.3. *A unidade de tempo poderia ser outra diferente do segundo, e para cada unidade de tempo adotado a constante α altera de forma proporcional .*

Considerando uma substância radioativa, cuja meia-vida é t_0 unidades de tempo. Então, na fórmula $M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$, fazendo $M(t) = \frac{1}{2} \cdot M_0$, teremos

$$\frac{1}{2} \cdot M_0 = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t_0}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha \cdot t_0},$$

tomando ln em ambos os lados da igualdade,

$$\ln\frac{1}{2} = \ln(e^{-\alpha \cdot t_0})$$

donde,

$$-\ln 2 = -\alpha \cdot t_0.$$

Então, $t_0 = \frac{\ln 2}{\alpha}$ ou $\alpha = \frac{\ln 2}{t_0}$. Assim, podemos calcular a meia-vida t_0, conhecendo a taxa de desintegração e vice-versa.

Exemplo 4.5. *Uma substância radioativa, vazou contaminando um laboratório durante um experimento. Sabendo que a taxa de desintegração da substância é* $0,4$ *ao ano e que o ambiente só pode ser liberado quando a substância tiver reduzido* $\frac{1}{8}$ *da quantidade de matéria inicial, determine em quanto tempo esse ambiente estará seguro para ser utilizado.*

Solução: Usaremos a fórmula

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

onde $M(t) = \frac{M_0}{8}$ e $\alpha = 0,4$. Então,

$$\frac{M_0}{8} = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{8} = e^{-\alpha \cdot t}.$$

Daí, aplicando $\ln$ em ambos os lados igualdade,

$$\ln \frac{1}{8} = \ln(e^{-\alpha \cdot t})$$

assim,

$$3 \ln 2 = 0,4t \Longrightarrow t = \frac{3 \ln 2}{0,4}.$$

Usando a tábua dos logaritmos no Apêndice, $\ln 2 = 0,6931$. Logo,

$$t = \frac{3 \cdot 0,6931}{0,4} \approx 5,2.$$

O ambiente estará seguro para ser utilizado 5 anos 2 meses e 12 dias .

4.5 Carbono 14

O carbono 14 (C^{14}), é um isótopo radioativo natural do átomo carbono. Dos cinco isótopos instáveis do carbono, o elemento químico C^{14} é o que possui maior meia-vida, que vale aproximadamente 5570 anos. Ele é formado nas camadas superiores da atmosfera, devido ao bombardeio da terra por raios cósmicos.

Nos anos 40 Willar Libby, percebeu que a quantidade de carbono 14, dos tecidos orgânicos mortos diminuía a um ritmo constante com o passar do tempo. Libby usou objetos de idade conhecida, respaldado por documentos históricos e comparou esta com os resultados de sua radiotação. Os diferentes experimentos comprovou a viabilidade do método cerca de 70 mil anos.

Os seres vivos absorvem e perdem carbono 14 mantendo a sua taxa constante. A partir da morte de um ser vivo o C^{14} deixa de ser absorvido, a quantidade de carbono nele existente passa a desintegrar a uma taxa uniforme. Seja α a taxa de desintegração do carbono 14, sabemos que $\alpha = \frac{\ln 2}{t_0}$, como para o C^{14}, $t_0 = 5570$ (a meia-vida), então $\alpha = \frac{\ln 2}{5570}$.

Exemplo 4.6. *No ano de 1998 encontraram o manto que teria sido utilizado para cobrir o corpo de cristo após a crucificação, foi analisado através da técnica do isótopo com número de massa* 14 *do carbono, cuja radioatividade no linho do manto é de* $12,18$ *desintegraçãoes por minuto por grama. Usando a fórmula*

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

onde $M_0 = 14$ *desintegrações por minuto por grama, então*

$$12,18 = 14 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \Longrightarrow \frac{12,18}{14} = e^{-\alpha \cdot t}.$$

Aplicando $\ln$ *a ambos os lados,*

$$\ln(\frac{12,18}{14}) = \ln(e^{-\alpha \cdot t}) \Longrightarrow \ln(0,87) = -\alpha \cdot t \Longrightarrow \ln(\frac{8,7}{10}) = \alpha t.$$

Logo,

$$\ln(8,7) - \ln(10) = -\frac{\ln(2)}{5570} \cdot t,$$

verificando na tábua de logaritmos no Apêndice temos que, $\ln 2 = 0,6931$*,* $\ln(8,7) = 2,1633$ *e* $\ln 10 = 2,3115$*, teremos*

$$2,1633 - 2,3115 = -\frac{0,6931}{5570} \cdot t$$

donde, $t = 1190$*. Portanto, o linho utilizado na confecção do sudário data do ano de* 1190*, ficou determinado que não podia ser o Santo Sudário.*

4.6 Juros contínuos

Dado um capital C, aplicado a uma taxa k porcento ao ano, seu rendimento no fim de um ano é $\frac{kC}{100}$, então o novo capital será:

$$C_1 = C + \frac{kC}{100} = C(1 + \frac{k}{100}),$$

fazendo

$$\alpha = \frac{k}{100},$$

tem-se

$$C_1 = C + \alpha C = C(1 + \alpha),$$

no fim de dois anos o novo capital deve ser:

$$C_2 = C_1 + \alpha C_1 = C_1(1 + \alpha) = C(1 + \alpha)(1 + \alpha) = C(1 + \alpha)^2,$$

isto é,

$$C_2 = C(1 + \alpha)^2.$$

Portanto para m anos o novo capital

$$C(1 + \alpha)^m.$$

O capital C, aplicado a uma mesma taxa de juros, no período $\frac{1}{n}$ de uma fração de um ano, rende de juros $\frac{\alpha C}{n}$. Após a fração $\frac{1}{n}$ do ano o capital C, passa ser:

$$C_1 = C + \frac{\alpha C}{n} = C(1 + \frac{\alpha}{n}).$$

Passando mais $\frac{1}{n}$ do ano, o novo capital será:

$$C_2 = C_1 + \frac{\alpha C_1}{n} = C_1(1 + \frac{\alpha}{n}) = C(1 + \frac{\alpha}{n})(1 + \frac{\alpha}{n}) = C(1 + \frac{\alpha}{n})^2.$$

Se dividirmos o ano em n partes iguais, após cada período $\frac{1}{n}$ de ano, capitalizando os juros produzidos e reinvestindo sucessivamente na mesma taxa, no fim de um ano, o capital deve ser:

$$C(1 + \frac{\alpha}{n})^n.$$

Quando um capital C, aplicado a uma taxa constante, tem seus juros rendidos em cada investimento capitalizados a cada instante, no fim de um ano o capital C, transforma-se em:

$$\lim_{n\to\infty} C(1+\frac{\alpha}{n})^n = C\cdot e^{\alpha}.$$

Assim, quando os juros são capitalizados continuamente em uma transação financeira, ele é chamado de juros compostos. Sendo α a taxa de juros anual, aplicada a um capital C, passados t anos o novo capital deve ser:

$$C(t) = \lim_{n\to\infty} C(1+\frac{\alpha t}{n})^n = C\cdot e^{\alpha t},$$

isto é,

$$C(t) = C\cdot e^{\alpha t}.$$

Observação 4.4. *A unidade de tempo poderia ser outra diferente da anual e para cada unidade de tempo adotado a taxa α altera de forma proporcional .*

Exemplo 4.7. *Aplicando um capital C, a juros compostos de 40 porcento ao ano, determine o tempo necessário para que ele seja quadruplicado.*

Solução: Temos que $\alpha = \frac{40}{100} = 0,4$, assim

$$C(t) = C\cdot e^{0,4t} = 4C.$$

Então,

$$e^{0,4t} = 4 \Longrightarrow \ln(e^{0,4t}) = \ln 4 \Longrightarrow 0,4t = 2\ln 2$$

logo,

$$t = \frac{2\ln 2}{0,4} = \frac{2\cdot 0,693}{0,4} \approx 3,5.$$

Portanto o capital quadruplicará em 3 anos e 6 meses.

4.7 Perdas contínuas

Consideremos um capital C, cuja a taxa de aplicação é $\alpha = \frac{k}{100}$, se durante o período de investimento ocorrer uma redução de capital o investidor terá um prejuízo. Suponhamos que o capital C, teve uma mal investimento sendo a taxa de juros anual $\alpha = \frac{k}{100}$, no fim de um ano o investidor terá perdido αC do seu capital restando:

$$C - \alpha C = C(1 - \alpha).$$

Sendo a perda contínua, istó é, a redução de capital é igual em um mesmo período, então se considerarmos a aplicação anual para cada fração $\frac{1}{n}$ do ano o capital C, se reduzirá $C(1 - \dfrac{\alpha}{n})$. De modo análogo aos juros contínuos, teremos que um capital C sujeito a uma perda contínua de taxa anual ao final de t anos, fica reduzido à:

$$C(t) = \lim_{n\to\infty} C(1 - \frac{\alpha t}{n})^n = C \cdot e^{-\alpha t}.$$

Exemplo 4.8. *Um capital C, sujeito a um prejuízo contínuo de 40 porcento ao ano, determine o tempo necessário para que ele seja reduzido a quarta parte.*

Solução: Usaremos a fórmula,

$$C(t) = C \cdot e^{-\alpha t}.$$

Temos que,

$$C(t) = \frac{C}{4}$$

$$\alpha = \frac{40}{100} = 0,4.$$

Assim,

$$\frac{C}{4} = C \cdot e^{-0,4t}$$

daí,

$$\frac{1}{4} = e^{-0,4t}.$$

Aplicando ln em ambos os lados da útima igualdade,

$$\ln\frac{1}{4} = \ln(e^{-0,4t})$$

logo,

$$\ln 1 - \ln 4 = -0,4t$$

donde,

$$-\ln 4 = -0,4t.$$

Segue que

$$t = \frac{\ln 4}{0,4} = \frac{2\ln 2}{0,4}$$

ou seja,

$$t = \frac{2 \cdot 0,6931}{0,4} = 3,5.$$

Portanto, o capital ficará reduzido à quarta parte em 3 anos e 6 meses.

Observação 4.5. *Motivados pelos **exemplos 4.7 e 4.8**, vamos mostrar que dado um capital C, aplicado a juros contínuos num fim de um período t, será mC, enquanto esse mesmo capital sujeito a prejuízos contínuos no fim do mesmo perído t será $\frac{C}{m}$, sendo m um número inteiro positivo e considerando a mesma taxa de aplicação para ambos investimentos. De fato, sendo $C(t) = mC$ então,*

$$C(t) = C \cdot e^{\alpha t} \Longrightarrow e^{\alpha t} = \frac{mC}{C} \Longrightarrow \ln(e^{\alpha t}) = \ln(m) \Longrightarrow \alpha t = \ln(m) \Longrightarrow t = \frac{\ln(m)}{\alpha}.$$

Por outro lado, fazendo

$$C(t) = \frac{C}{m}$$

$$C(t) = C \cdot e^{-\alpha t} \Longrightarrow e^{-\alpha t} = \frac{\frac{C}{m}}{C} \Longrightarrow \ln(e^{-\alpha t}) = \ln(\frac{1}{m}) \Longrightarrow -\alpha t = \ln(\frac{1}{m})$$

daí,

$$-\alpha t = -\ln(m) \Longrightarrow t = \frac{\ln(m)}{\alpha}.$$

4.8 Pressão atmosférica

O peso de uma coluna vertical de ar com base horizontal, com altura h (em relação ao nível do mar) e área igual a 1, é chamado de pressão atmosférica. A pressão atmosférica é inversamente proporcional a altura h, isto significa que na medida que aumenta a altura h diminui a pressão atmosférica na mesma proporção.

Segundo uma consequência da Lei de Boyle, sendo p_0 a pressão atmosférica ao nível do mar, então a pressão a uma altitude h é

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\alpha h},$$

onde α é uma constante. O instrumento usado para medir a pressão atmosférica, é chamado de *barômetro*.

Vamos determinar o valor da constante α, conhecendo a pressão atmosférica de dois pontos, cujas altitudes são h_1 e h_2. Usando a fórmula

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\alpha h},$$

então

$$p(h_1) = p_0 \cdot e^{-\alpha h_1}$$

$$p(h_2) = p_0 \cdot e^{-\alpha h_2}.$$

Dividindo as duas ultimas igualdades, membro a membro, tem-se

$$\frac{p(h_1)}{p(h_2)} = \frac{p_0 \cdot e^{-\alpha h_1}}{p_0 \cdot e^{-\alpha h_2}}.$$

Donde,

$$\frac{p(h_1)}{p(h_2)} = \frac{e^{-\alpha h_1}}{e^{-\alpha h_2}},$$

assim

$$\frac{p(h_1)}{p(h_2)} = e^{-\alpha h_1 + \alpha h_2}.$$

Ou seja,

$$\frac{p(h_1)}{p(h_2)} = e^{\alpha(h_2 - h_1)}.$$

Aplicando ln em ambos os lados da última igualdade segue,

$$\ln \frac{p(h_1)}{p(h_2)} = \ln(e^{\alpha(h_2 - h_1)})$$

daí,

$$\ln \frac{p(h_1)}{p(h_2)} = \alpha(h_2 - h_1).$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{1}{(h_2 - h_1)} \cdot \ln \frac{p(h_1)}{p(h_2)},$$

isto é,

$$\alpha = \ln(\frac{p(h_1)}{p(h_2)})^{\frac{1}{(h_2 - h_1)}}.$$

Exemplo 4.9. *Vamos mostrar que conhecendo a constante α e possuindo um barômetro, podemos a cada instante determinar a altura h de um avião que voa na atmosfera por meio da fórmula*

$$h = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{p_0}{p}.$$

Seja p_0 a pressão ao nível do mar e $p = p(h)$ é a pressão medida pelo barômetro no momento dado. Sabemos que,

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\alpha h},$$

então,

$$\frac{p(h)}{p_0} = e^{-\alpha h}.$$

Aplicando os logaritmos naturais em ambos os lados da igualdade acima, tem-se

$$\ln \frac{p(h)}{p_0} = \ln(e^{-\alpha h}),$$

Como $p = p(h)$, podemos escrever

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\alpha h.$$

Assim,

$$-\ln \frac{p_0}{p} = -\alpha h \Longrightarrow \ln \frac{p_0}{p} = \alpha h.$$

Portanto, podemos calcular a altura h de um avião por meio da fórmula

$$h = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{p_0}{p}.$$

4.9 População de bactérias

Um dos perigos na alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. A taxa na qual uma população bacteriana cresce é diretamente proporcional a população inicial de bactérias existentes.

Sendo P_0, a população inicial bactérias em um intervalo de tempo t_0, considerando k a constante de proporcionalidade, passando $t = 1$ unidade de tempo, a nova população de bactérias será:

$$p_1 = p_0 + k \cdot p_0 = p_0(1 + k),$$

passados $t = 2$ unidade de tempo, teremos

$$p_2 = p_1 + k \cdot p_1 = p_1(1 + k) = p_0(1 + k)^2,$$

No fim de $t = m$ unidade de tempo a população bactérias é:

$$p_0(1 + k)^m.$$

Considerando um intervalo de tempo t e dividindo-o em n partes iguais em cada fração $\frac{1}{n}$ de t, a população bactérias passa ser:

$$p_0(1 + \frac{k}{n}),$$

como o crescimento bacteriano ocorre a uma taxa constante, então no fim do período t a quantidade de bactérias deve ser:

$$p_0(1 + \frac{tk}{n})^n.$$

Considerando que pra $t_0 = 0$, a população inicial bactérias seja p_0 e dividindo o intervalo t em n partes iguais, após cada período $\frac{1}{n}$ de t a cultura de bactéria cresça a uma taxa constante. Então se considerarmos um número natural n suficientemente grande, após t unidades de tempo a população de bactérias será:

$$p(t) = \lim_{n \to \infty} p_0(1 + \frac{kt}{n})^n = p_0 \cdot e^{kt}.$$

Portanto,

$$p(t) = p_0 \cdot e^{kt}.$$

Exemplo 4.10. *A taxa de crescimento populacional de uma certa bactéria é proporcional ao tamanho da sua população. Em condições ideais, quando essa bactéria é desenvolvida em um caldo de cultura, o número de células na cultura dobra, aproximadamente a cada* 20 *minutos. Vamos determinar quanto tempo levará para uma colônia de* 100 *células atingir o valor de 1 milhão células.*

Então, usando a igualdade $p(t) = p_0 \cdot e^{kt}$*. Temos que, para* $t = 20$ *min, segue que* $p(20) = 2p_0$*, então*

$$2p_0 = p_0 \cdot e^{kt}$$

assim,

$$e^{kt} = 2$$

donde,

$$\ln e^{20k} = ln2$$

daí,

$$20k = \ln 2.$$

Portanto,

$$k = \frac{\ln 2}{20},$$

logo podemos escrever,

$$1000000 = 100 \cdot e^{\frac{\ln 2}{20}t}$$

tomando logaritmos, temos

$$\ln(e^{\frac{\ln 2}{20}t}) = \ln 10000.$$

Ou seja,

$$\frac{\ln 2}{20} \cdot t = 4 \cdot \ln 10 \Longrightarrow t = \frac{80 \cdot \ln 10}{\ln 2}.$$

Usando a tabela de logaritmos no Apêndice, encontramos $t = 266$ *min, isto é,* 4 *horas e* 26 *minutos.*

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5 Abordagem no Ensino médio

O ensino de logaritmo no Ensino Médio limita-se aos livros didáticos, técnicas de memorização, uma prática pedagógica mecânica e arcaica, com análise superficial do conteúdo. A utlização de sua história poderá potencializar o processo de ensino e aprendizagem. O estudo histórico do surgimento de um conceito é um fator importante para todos os participantes do processo de ensino e aprendizagem.

A história dos logaritmos é pouca discutida em sala de aula. Alunos e professores devem ter um bom conhecimento da matemática, saber demonstrar teoremas e usar a sua linguagem, mas isso não é o suficiente. É pedagógico usar a história da matemática no processo de ensino como promoção de uma aprendizagem significativa.

De acordo com Miguel (ver [4]), "o uso da história estaria como uma associação entre o conhecimento atualizado de matemática e suas aplicações, o que levaria o estudante a perceber a matemática como sendo uma criação humana, buscando razões pelas quais é feita a matemática, assim como as conexões que existem entre a matemática e as outras ciências ou conhecimentos".

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio proposto pelo Ministério da Educação de 2000 (ver [8]), "a matemática deve ser ensinada abrangendo aspectos formativos (desenvolvimento de pensamentos e aquisição de atitudes), instrumental (conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento), científico (deve ser vista como um sistema axiomático que possibilita validar intuições e da sentido a técnicas aplicadas)".

O caráter formativo ou instrumental, segundo esse documento, pode ser executado usando como recurso metodológico a história da matemática, habilitando o aluno a investigar e analisar fatos matemáticos interpretando a própria realidade retirando-o da condição passiva. "O uso da história da matemática torna a aprendizagem significativa, mobilizando o discente e estabelecendo entre ele o objetivo do conhecimento, fazer uma relação de reciprocidade"de acordo com Miorim (ver [5]).

De acordo com Queiroz (ver [6]), o professor deve refletir sobre a escola, currículo, relação professor- aluno, prática docente, recursos didáticos, pesquisa, indicadores educacionais, projetos e programas educacionais que buscam a melhoria da qualidade da educação no ensino básico, bem como os diversos modos de avaliar a aprendizagem, considerando a singularidade de cada estudante para construir seu processo de aprendizagem, seu desenvolvimento, suas relações com a comunidade escolar, sua história de vida, suas influências e as interferências que fazem no contexto cultural em que estão inseridos. A formação do professor do Ensino Médio vai além do ambiente escolar, mas envolve também, as concepções de mundo, de homem ou mulher, de desenvolvimento humano dos alunos, bem como o modo de ensinar e aprender, valores sociopolíticos da comunidade em que a escola se insere.

Dessa forma, o professor da Educação básica, poderá utilizar como recurso pedagógico auxiliar a história dos logaritmos, as ideias fundamentais do conceito que são a transformação da multiplicação em adição e a divisão em subtração. É fundamental que o aluno aprenda a resolver equações, sistemas e inequações envolvendo logaritmos, pois auxiliam na compreensão das propriedades. E saber que o conceito de logaritmos foi desenvolvido no início do século $XVII$ para simplificar cálculos numéricos, mas com a construção de calculadoras científicas e o avanço computacional, as tábuas logarítmicas perderam seu interesse como instrumento de cálculo, porém várias leis matemáticas, diversos fenômenos naturais, econômicos, sociais, têm uma aplicação forte dos logaritmos.

O ensino da matemática, pode ser efetuado de modo que mostre suas aplicações em outras áreas do conhecimento humano, dando ênfase a interdisciplinariedade. Dessa forma, apresentamos neste trabalho, uma sugestão para uma Feira de Matemática usando os logaritmos de forma interdisciplinar, com a participação de um professor das seguintes disciplinas: história, geografia, fisíca, química, biologia e matemática.

A parte histórica dos logaritmos pode ser abordada pelo professor de matemática, enquanto o de história pode falar sobre os grandes descobrimentos, oriundos da navegação no século $XVII$, o de física pode falar sobre as pesquisas realizadas pelos astrônomos do mesmo século. O professor de matemática deve apresentar a teoria dos logaritmos, já o professor de geografia pode explicar sobre os terremotos, sua formação e a destruição causada por eles, citando os países mais devastados por esse fenômeno da natureza. O professor de biologia pode falar sobre o crescimento bacteriano, mostrar as doenças causadas por bactérias no ser humano e sua prevenção. O de química pode abordar sobre substâncias radioativas, seu uso na medicina e os efeitos causados pala radiação no organismo humano e como evitá-los.

O professor de física pode apresentar os conceitos relacionados ao resfriamento de um corpo, seu uso na investigação da medicina legal. E para finalizar esse projeto o professor de matemática pode mostrar a aplicação dos logaritmos em cada uma das disciplinas que foi apresentada aos alunos e também deixando claro que o estudante do ensino médio, pode saber usar a matemática para resolver problemas e para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento, para que isso se torne possível, o discente deve reconhecer a linguagem algébrica relacionando grandezas, modelar situações, associar diferentes funções aos seus gráficos, identificar regularidades e relacionar o conceito de função à exemplos reais.

Muitos dos alunos do Ensino Médio questionam o professor, sobre a história do conteúdo que está sendo ministrado. Uma forma de melhorar o processo de ensino e aprendizagem dos logaritmos é trabalhar a sua história descrita neste trabalho. Essa é nossa proposta de trabalho pra o professor da Educação Básica.

CAPÍTULO 6

APÊNDICE

6 Apêndice

Apresentaremos duas tabelas, que poderão ser usadas em sala de aula, nos cálculos numéricos com logaritmos.

A primeira tabela (A) apresenta as mantissas, com quatro algarismos exatos, dos logaritmos decimais dos números $1,00$ a $10,09$.

As tábuas logarítmicas, são fornecidas com quatro algarismos decimais exatos. Como a segunda tabela (B) apresenta os logaritmos naturais dos números $1,00$ a $10,09$, então os que não constam podem ser calculados, usando a fórmula:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

A Tabela dos Logaritmos Decimais de 1 a 10,09

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0606	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	0,1004	0,1039	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3655	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4579	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900

Tabela dos Logaritmos Decimais de 1 a 10,09

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5065	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5443	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5798	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6281	0,6294	0,6301	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6803
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7404	0,7412	0,7419	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7686	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7774
6,0	0,7782	0,7788	0,7796	0,7803	0,7810	0,7818	0,7825	0,7832	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,7993	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8222	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8337	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8382
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8579	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8982	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	0,9063	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9191	0,9196	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9529	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9667	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9708	0,9713	0,9719	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952
9,9	0,9956	0,9961	0,9965	0,9969	0,9974	0,9978	0,9983	0,9987	0,9991	0,9996

B Tabelas dos Logaritmos Naturais de 1 a 10,09

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2152	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0617	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782

Tabelas dos Logaritmos Naturais de 1 a 10,09

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4184	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5603	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8215	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587

N	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9820	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0010
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1360	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016
10,0	2,3026	2,3036	2,3046	2,3056	2,3066	2,3076	2,3086	2,3096	2,3106	2,3115

BIBLIOGRAFIA

[1] LIMA, E. L. Logaritmos. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996.

[3] EVES. H. Introdução a história da matemática. 5. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

[4] MIGUEL, A. Três estudos sobre a história e educação matemática. 1993. (Tese de Doutorado) Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1993.

[5] MIORIM, A. M. M. Os logaritmos na cultura escolar brasileira. Natal:SBHMat, 2002.

[6] QUEIROZ, N. L. N. Escola, organização curricular, seus principais conceitos e prática docente. Brasília, dezembro de 2012.

[7] BRASIL. Ministério da Edução e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001.

[8] BRASIL. Ministério da Edução e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

[9] BRASIL. Ministério da Edução e Cultura. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2006.

[10] LIMA, E.L. A matemática do ensino médio-volume 1 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Augusto César Morgado. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] DANTE, L. R. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo: Editora Ática, 2013.

[12] RAMALHO, F. J. Os fundamentos da física / Francisco Ramalho Junior, Nicolau Gilberto Ferraro, Paulo Antônio de Toledo Soares. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2007.

[13] FRANCA, G. Medicina Legal. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2008.

[14] SANTOS, W. L. Química cidadã. São Paulo: Editora AJS, 2013.

[15] LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. 3. ed. Volume 1. São Paulo: HARBRA Ltda, 1994.

[16] PECORARI, M. Logaritmos e Aplicações. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo, 2013.

[17] KOTZ, J. C. Química geral 2 e reações químicas. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.