



Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Centro de Ciências Exatas e da Terra  
Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional/PROFMAT

**Almir Batista Pereira Filho**

**Aplicações das Cônicas**

Natal, fevereiro de 2015

Almir Batista Pereira Filho

## Aplicações das Cônicas

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador:  
Prof<sup>o</sup>. Dr. Marcelo Gomes Pereira

Natal, fevereiro de 2015

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial  
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Pereira Filho, Almir Batista.

Aplicações das cônicas / Almir Batista Pereira Filho. - Natal, 2015.  
62 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Matemática - Ensino – Dissertação. 2. Cônicas – Dissertação. 3. Propriedade reflexiva e aplicações – Dissertação. 4. Equações canônicas – Dissertação. I. Pereira, Marcelo Gomes. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET

CDU: 51:37.026

Almir Batista Pereira Filho

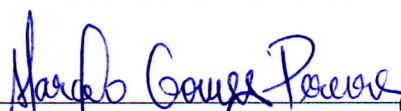
## Aplicações das Cônicas

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovado em: 27 de fevereiro de 2015

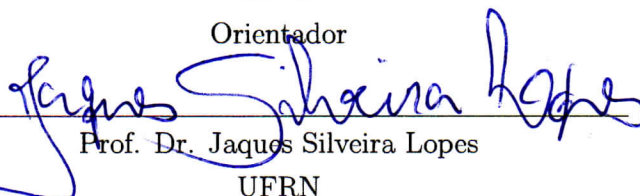
### Banca Examinadora:



Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira

UFRN

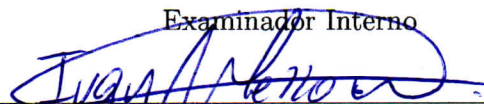
Orientador



Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes

UFRN

Examinador Interno



Prof. Dr. Ivan Mezzomo

UFERSA

Examinador Externo

# Dedicatória

Dedico este trabalho, com muito amor, a minha querida família.

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus por orientar os caminhos que deveria seguir.

A minha família, em especial a minha esposa Amarília e ao meu filho Albert, que souberam entender as ausências durante os finais de semana desses dois anos de curso.

Aos amigos da turma, especialmente aos colegas de viagem de Caicó para Natal e de Natal para Caicó, que tornaram as viagens menos cansativas.

Aos docentes da UFRN que ministram as aulas do curso, e ao professor Dr. Marcelo Gomes Pereira, pela orientação, dedicação e incentivo.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

Por fim, aos idealizadores do PROFMAT, que tornaram do meu sonho uma realidade.

As leis da natureza nada  
mais são que pensamentos ma-  
temáticos de Deus.

Kepler

# Resumo

As cônicas são curvas em que se podem destacar a parábola, a elipse e a hipérbole. Estas tem aplicações usuais através de antenas parabólicas, aquecedores solares, espelhos elípticos, telescópios, entre outros. Neste trabalho, definiremos as cônicas, apresentaremos e mostraremos aplicações da propriedade reflexiva para cada cônica e, ainda, apresentaremos suas equações canônicas.

Também apresentaremos alguns exemplos envolvendo equações canônicas e gráficos das cônicas. Para a construção dos gráficos usaremos o programa GeoGebra.

**Palavras-chave:** Cônicas, propriedade reflexiva e aplicações, equações canônicas.



# Abstract

Conical are curves that can highlight the parabola, ellipse and hyperbola. These have the usual applications via satellite dishes, solar heaters, elliptical mirrors, telescopes, among others. In this paper, we will define the conical, present and show applications of reflective property of each conical and also present their canonical equations.

We also present some examples involving canonical equations and graphs of conic. For the construction of the graphs we will use the GeoGebra program.

**Keywords:** Conical , reflective property and applications , canonical equations.

# Sumário

Introdução	1
<b>1 Transformações de coordenadas no <math>E^2</math></b>	<b>3</b>
1.1 Translação de eixos	3
1.2 Rotação de eixos	6
<b>2 Parábola</b>	<b>11</b>
2.1 Definição	13
2.2 Elementos da Parábola	17
2.3 Equações Canônicas	18
2.3.1 Parábola $\mathfrak{P}$ com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$	18
2.3.2 Parábola $\mathfrak{P}$ com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$	20
2.3.3 Parábola $\mathfrak{P}$ com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo $OX$	22
2.3.4 Parábola $\mathfrak{P}$ com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo $OY$	24
<b>3 Elipse</b>	<b>28</b>
3.1 Definição	29
3.2 Elementos da Elipse	32
3.3 Equações Canônicas	33
3.3.1 Elipse $\mathfrak{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$	33
3.3.2 Elipse $\mathfrak{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$	35
3.3.3 Elipse $\mathfrak{E}$ com centro no ponto $\bar{O} = (x_o, y_o)$	36
<b>4 Hipérbole</b>	<b>39</b>
4.1 Definição	40

4.2	Elementos da Hipérbole . . . . .	43
4.3	Equações Canônicas . . . . .	44
4.3.1	Hipérbole $\mathfrak{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$ . . . . .	44
4.3.2	Hipérbole $\mathfrak{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$ . . . . .	47
4.3.3	Hipérbole $\mathfrak{H}$ com centro no ponto $\bar{O} = (x_o, y_o)$ . . . . .	48

# Introdução

A palavra cônica (ou seção cônica) indica uma curva obtida por meio de um corte de um plano  $\alpha$  secante a um cone circular reto e que não contenha o vértice desse cone. Conforme podemos observar na figura 1, abaixo:

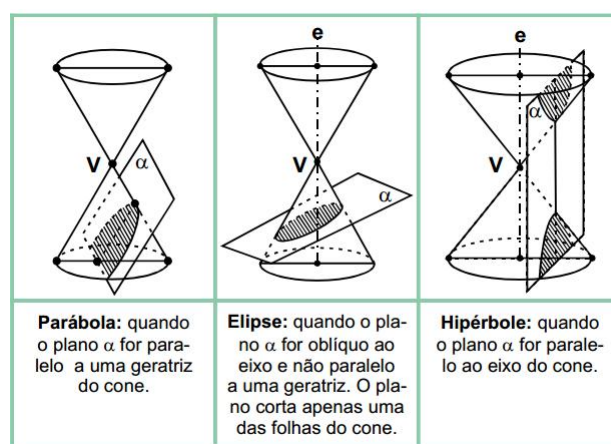


Figura 1: Cônicas - Fonte: Jacir J. Venturi

Conforme [1]:

”A Matemática no ensino médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.”

Nesta perspectiva e como forma de mostrar a importância sobre o tema, já que é parte integrante do currículo do Ensino Médio de Matemática, mas que não é abordado no Programa do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), conforme análise feita no edital do ENEM e das versões das provas aplicadas desde o ano de 1998. Corre-se o risco de tornar-se

um assunto irrelevante nos programas escolares, pois a maioria das instituições de Ensino Médio tomam-no por base para preparar seus planejamentos de ensino o programa do ENEM. Contudo, faz-se necessário uma revisão em tal programa, para que não deixe de fora assuntos tão importantes e necessários para a preparação curricular dos alunos.

Inicialmente, abordamos as transformações de coordenadas como forma de simplificar e/ou compreender melhor algumas equações do 2º grau e que servirão de modelos para os capítulos seguintes. Apresentamos as translações e rotações de eixos cartesianos e, ainda, mostramos quando devemos usar uma translação e/ou rotação.

A partir do segundo capítulo apresentamos um problema motivador como forma de instigar a curiosidade do leitor, ferramentas para desenvolvê-lo e uma proposta de solução.

No segundo capítulo, definimos a parábola, apresentamos a propriedade reflexiva e algumas aplicações, damos os elementos geométricos da parábola e sua forma gráfica. Em seguida, tratamos das suas equações canônicas e mostramos alguns exemplos envolvendo estas equações.

No terceiro capítulo, definimos a elipse, apresentamos a propriedade reflexiva e algumas aplicações, damos os elementos geométricos da elipse e sua forma gráfica. Em seguida, tratamos das suas equações canônicas e mostramos alguns exemplos envolvendo estas equações.

No quarto capítulo, definimos a hipérbole, apresentamos a propriedade reflexiva e algumas aplicações, damos os elementos geométricos da hipérbole e sua forma gráfica. Em seguida, tratamos das suas equações canônicas e mostramos alguns exemplos envolvendo estas equações.

# Capítulo 1

## Transformações de coordenadas no $E^2$

O sistema de coordenadas no plano cartesiano ( $E^2$ ) é um sistema constituído de duas retas orientadas  $X$  e  $Y$  chamadas eixos, perpendiculares entre si e de mesma origem  $O(0,0)$ . O eixo  $OX$  é horizontal, orientado para a direita e sua coordenada é chamada abscissa, o eixo  $OY$  é vertical, orientado para cima e sua coordenada é chamada de ordenada. Usaremos a configuração  $XOY$  para indicar o referido sistema de eixos ortogonais.

A partir das coordenadas de um ponto ou da equação de uma curva em relação a um sistema de referência, é possível encontrar as novas coordenadas desse ponto ou dessa equação da curva, em relação a um novo sistema de referência. Assim, a curva cuja equação  $f(X, Y) = 0$ , quando em relação a um sistema de coordenadas cartesianas  $XOY$ , transformar-se-á numa equação do tipo  $F(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ , quando em relação a um novo sistema de coordenadas cartesianas  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ , através de uma translação e/ou rotação de eixos cartesianos, conforme veremos a seguir.

### 1.1 Translação de eixos

Na translação, criamos um novo sistema de eixos, fazendo uma translação na posição dos eixos em relação à posição inicial. Na figura 1.1, o ponto  $P(x, y)$  pode ser localizado em relação ao sistema de eixos ortogonais  $XOY$ , mas esse mesmo ponto terá coordenadas diferentes em relação ao sistema de eixos ortogonais  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ .

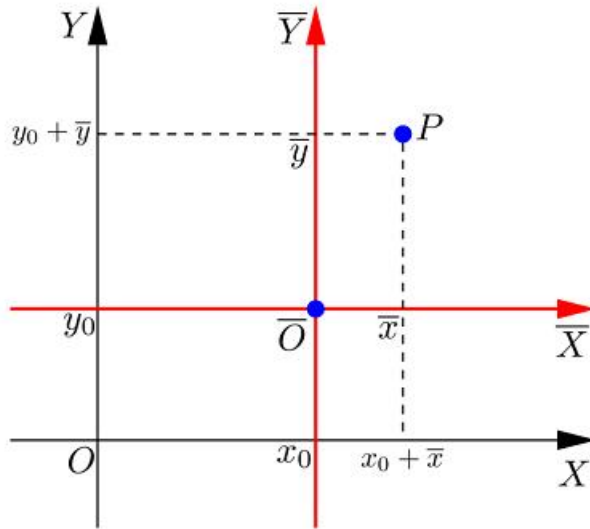


Figura 1.1: Translação de eixos - Fonte: <http://www.professores.uff.br>

Dizemos que o novo sistema  $\overline{XOY}$  foi obtido por uma translação do antigo sistema  $XOY$ . Em ambos os sistemas, conservam-se as unidades de medida.

Sendo  $(x_o, y_o)$  as coordenadas da nova origem no sistema de eixos ortogonais  $\overline{XOY}$  em relação ao sistema de eixos ortogonais  $XOY$ , teremos que:

$$x = x_o + \bar{x} \tag{1.1}$$

$$y = y_o + \bar{y} \tag{1.2}$$

As equações (1.1) e (1.2) são chamadas equações de translação.

Vamos considerar, como exemplo, a circunferência de equação  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$  em relação ao sistema  $XOY$ . Fazemos uma translação de eixos tal que a nova origem seja  $\overline{O} = (2, 3)$  para obter a nova equação da circunferência.

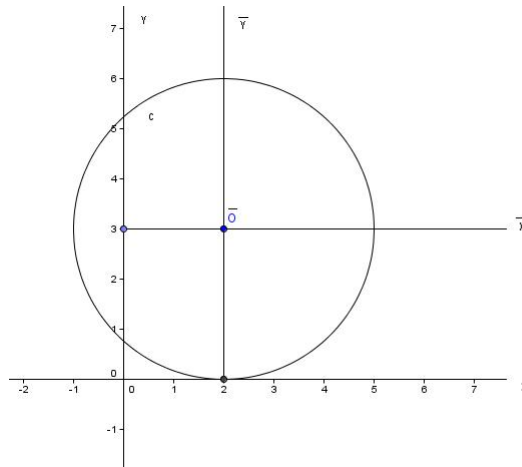


Figura 1.2: Gráfico da circunferência

Substituindo nas equações de translação (1.1) e (1.2), teremos:  $x = \bar{x} + 2$  e  $y = \bar{y} + 3$ .

Substituindo  $x$  e  $y$  por seus valores na equação da circunferência, teremos:

$$\begin{aligned} (\bar{x} + 2)^2 + (\bar{y} + 3)^2 - 4(\bar{x} + 2) - 6(\bar{y} + 3) + 4 &= 0 \\ \Rightarrow \bar{x}^2 + 4\bar{x} + 4 + \bar{y}^2 + 6\bar{y} + 9 - 4\bar{x} - 8 - 6\bar{y} - 18 + 4 &= 0 \\ \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 9 &= 0 \\ \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{y}^2 &= 9 \end{aligned}$$

A circunferência  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$  transforma-se na equação  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 9$  mediante uma translação de eixos, sendo a nova origem  $\bar{O} = (2, 3)$  e raio igual a 3.

Portanto, em uma translação, para eliminarmos os termos de primeiro grau ( $x$  e  $y$ ) da equação de uma cônica, devemos fazer uma translação de eixos para o centro dela, ou seja, fazer a nova origem  $\bar{O}$  coincidir com o centro  $C = (x_c, y_c)$  da cônica. Sendo assim:

- Os coeficientes dos termos do segundo grau não são afetados;
- Os termos do primeiro grau serão eliminados.

Outra maneira para eliminar os termos de primeiro grau seria aplicar as equações (1.1) e (1.2) na equação da cônica e impor as condições para que os coeficientes dos termos



de primeiro grau sejam nulos.

## 1.2 Rotação de eixos

Na rotação, criamos um novo sistema de eixos, fazendo uma rotação dos eixos de um ângulo  $\theta$ , com  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , no sentido anti-horário em relação ao centro. Na figura 1.3,

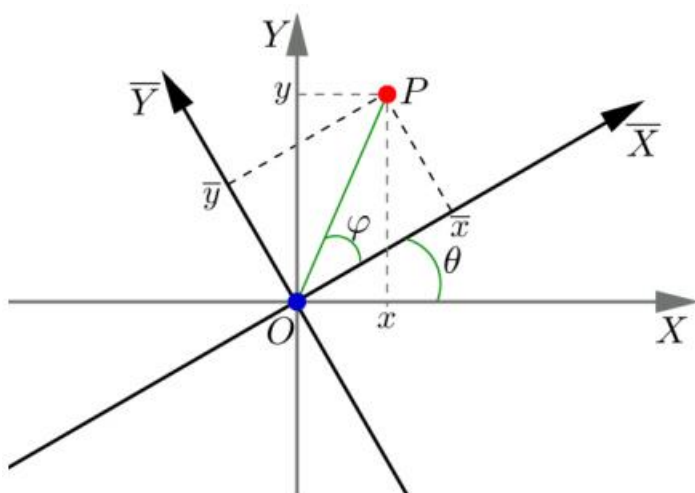


Figura 1.3: Rotação de eixos - Fonte:ebah.com.br

o ponto  $P(\bar{x}, \bar{y})$  pode ser localizado em relação ao sistema de eixos ortogonais  $XOY$ , mas esse mesmo ponto terá coordenadas diferentes em relação ao sistema de eixos ortogonais  $\overline{XOY}$ , considerando, ainda,  $\varphi$  o ângulo que o vetor  $\overrightarrow{OP}$  faz com o semi-eixo positivo  $\overline{OX}$  e  $r = d(P, O)$ . Então, pela figura 1.3, teremos:

$$\bar{x} = r \cos \varphi \quad (1.3)$$

$$\bar{y} = r \sin \varphi \quad (1.4)$$

e, ainda:

$$x = r \cos(\varphi + \theta) \quad (1.5)$$

$$y = r \sin(\varphi + \theta) \quad (1.6)$$

logo, desenvolvendo o cosseno e o seno da soma de dois ângulos nas equações (1.5) e (1.6), obtemos:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi \quad (1.7)$$

$$y = r \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \sin \varphi \quad (1.8)$$

substituindo as equações (1.3) e (1.4) nas equações (1.7) e (1.8), obtemos:

$$x = \cos \theta \bar{x} - \sin \theta \bar{y} \quad (1.9)$$

$$y = \sin \theta \bar{x} + \cos \theta \bar{y} \quad (1.10)$$

As equações (1.9) e (1.10) são chamadas equações de rotação.

Vamos considerar, como exemplo, a elipse de equação  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$  no sistema  $XOY$ , trataremos de elipse no terceiro capítulo. Façamos uma rotação de eixos de amplitude  $\theta = 45^\circ$  para obter a nova equação da elipse no novo sistema de eixos  $\overline{XOY}$ , falaremos sobre elipse no terceiro capítulo.

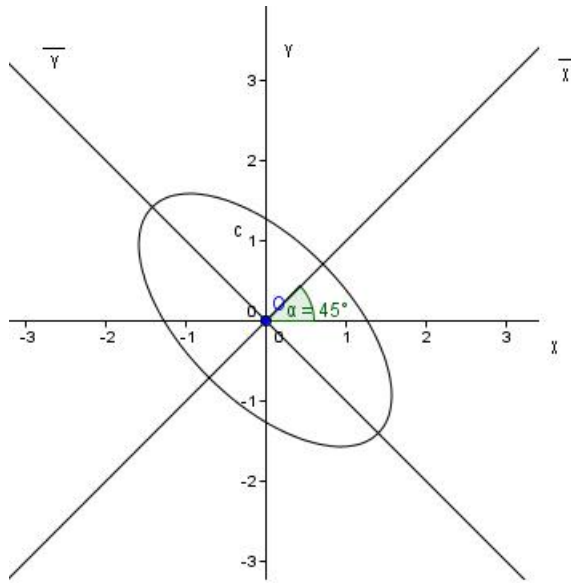


Figura 1.4: Gráfico da elipse

Substituindo nas equações de rotação (1.9) e (1.10) teremos:  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}$  e  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}$ .

Substituindo  $x$  e  $y$  por seus valores na equação da elipse, teremos:

$$\begin{aligned} 5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}\right]^2 + 6\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}\right] + 5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}\right]^2 - 8 &= 0 \\ \Rightarrow 5\bar{x}^2 - 10\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 + 6\bar{x}^2 - 6\bar{y}^2 + 5\bar{x}^2 + 10\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 - 16 &= 0 \\ \Rightarrow 16\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 - 16 &= 0 \\ \Rightarrow 4\bar{x}^2 + \bar{y}^2 &= 4 \end{aligned}$$

Portanto, em uma rotação apropriada de eixos, permitem-nos eliminar o termo  $xy$  em uma equação.

Vejamos a rotação apropriada para uma equação do segundo grau com duas variáveis considerando:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1.11)$$

Dada a equação (1.11), a amplitude  $\theta$  de rotação é dada por:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C} \quad (\text{para } A \neq C) \quad (1.12)$$

Vamos demonstrar:

Substituindo as equações (1.9) e (1.10) da rotação na equação (1.11), ficaremos com:

$$A(\cos(\theta)\bar{x} - \operatorname{sen}(\theta)\bar{y})^2 + B(\cos(\theta)\bar{x} - \operatorname{sen}(\theta)\bar{y})(\operatorname{sen}(\theta)\bar{x} + \cos(\theta)\bar{y}) + C(\operatorname{sen}(\theta)\bar{x} + \cos(\theta)\bar{y})^2 + D(\cos(\theta)\bar{x} - \operatorname{sen}(\theta)\bar{y}) + E(\operatorname{sen}(\theta)\bar{x} + \cos(\theta)\bar{y}) + F = 0.$$

Efetuando as potenciações e os produtos dos fatores acima, encontramos:

$$A \cos^2(\theta)\bar{x}^2 - 2A \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\bar{x}\bar{y} + A \operatorname{sen}^2(\theta)\bar{y}^2 + B(\cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\bar{x}^2 + \cos^2(\theta)\bar{x}\bar{y} - \operatorname{sen}^2(\theta)\bar{x}\bar{y} - \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\bar{y}^2) + C \operatorname{sen}^2(\theta)\bar{x}^2 + 2C \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)\bar{x}\bar{y} + C \cos^2(\theta)\bar{y}^2 + D \cos(\theta)\bar{x} - D \operatorname{sen}(\theta)\bar{y} + E \operatorname{sen}(\theta)\bar{x} + E \cos(\theta)\bar{y} + F = 0.$$

Colocando os termos comuns em evidência, obtemos:

$$(A \cos^2(\theta) + B \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + C \operatorname{sen}^2(\theta))\bar{x}^2 + (-2A \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + B \cos^2(\theta) - B \operatorname{sen}^2(\theta) + 2C \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta))\bar{x}\bar{y} + (A \operatorname{sen}^2(\theta) - B \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + C \cos^2(\theta))\bar{y}^2 + (D \cos(\theta) + E \operatorname{sen}(\theta))\bar{x} + (-D \operatorname{sen}(\theta) + E \cos(\theta))\bar{y} + F = 0.$$

Ainda, pode ser reescrito como:

$$(A \cos^2(\theta) + B \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + C \operatorname{sen}^2(\theta))\bar{x}^2 + [-2(A-C) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + B(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta))]\bar{x}\bar{y} + (A \operatorname{sen}^2(\theta) - B \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + C \cos^2(\theta))\bar{y}^2 + (D \cos(\theta) + E \operatorname{sen}(\theta))\bar{x} + (-D \operatorname{sen}(\theta) + E \cos(\theta))\bar{y} + F = 0.$$

Como o termo  $\bar{x}\bar{y}$ , desaparecerá através de uma rotação, da equação acima, teremos que:

$$\begin{aligned} & -2(A-C) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + B(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)) = 0 \\ \Rightarrow & (C-A)(2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)) + B(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)) = 0 \\ \Rightarrow & (C-A)(\operatorname{sen}(2\theta)) + B \cos(2\theta) = 0. \end{aligned}$$

E, dividindo por  $\cos(2\theta)$ , temos:

$$\begin{aligned} & (C-A) \operatorname{tg}(2\theta) + B = 0 \\ \Rightarrow & \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C} \quad (\text{para } A \neq C) \end{aligned}$$

Se  $A = C \Rightarrow B \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$ .

### Texto complementar

#### Distância entre dois pontos no plano cartesiano

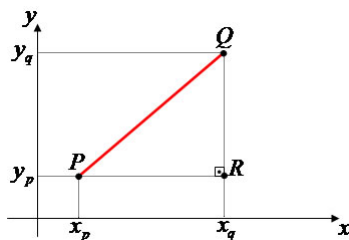


Figura 1.5: Distância entre dois pontos - Fonte: <http://educador.brasilescola.com>

Considerando dois pontos  $P(x_p, y_p)$  e  $Q(x_q, y_q)$  no plano cartesiano conforme a figura 1.13, denotamos por  $d(P, Q)$  a distância entre os pontos P e Q, que é a medida da hipotenusa  $\overline{PQ}$  do triângulo retângulo  $\Delta PQR$  de catetos  $\overline{PR}$  e  $\overline{QR}$ . Sendo a distância entre dois pontos de um eixo medida pelo módulo da diferença das suas coordenadas, as medidas desses catetos são:  $|\overline{PR}| = |x_q - x_p|$  e  $|\overline{QR}| = |y_q - y_p|$ . Do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{aligned}d(P, Q) &= |\overline{PQ}| = \sqrt{|\overline{PR}|^2 + |\overline{QR}|^2} \\ \Rightarrow d(P, Q) &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}\end{aligned}\tag{1.13}$$

# Capítulo 2

## Parábola

A antena parabólica faz parte do cenário da maioria das residências, pois, é uma excelente opção para quem mora longe dos centros urbanos ou em alguma região onde o sinal de TV é fraco. Mas, como funciona a antena parabólica? Um satélite emite um conjunto de ondas eletromagnéticas que serão captadas pela antena parabólica e refletidas para um único local, denominado o foco da parábola, onde estará um aparelho receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a TV transformará em som e imagem.

Como exemplo motivador para o estudo de parábola, vamos considerar uma fábrica que produz refletores parabólicos, conforme a figura 2.1. Qual deve ser a distância do vértice para uma fonte de luz para produzir um feixe de raios paralelos ao eixo da parábola?

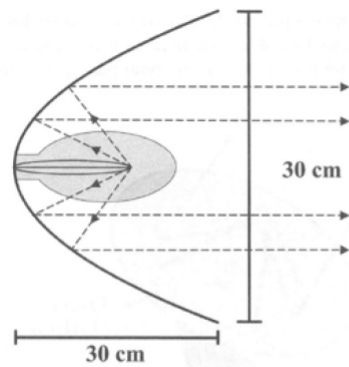


Figura 2.1: Refletor parabólico - Fonte: <http://sites.unifra.br>

Fazendo um gráfico matemático para a figura 2.1 em um sistema adequado de eixos cartesianos, obtemos a figura 2.2 abaixo:

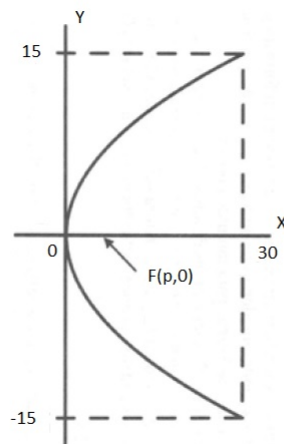


Figura 2.2: Modelo gráfico

Pela propriedade de reflexão da parábola, que veremos na seção seguinte, para que os raios de luz sofram reflexão paralelos ao eixo da parábola, a fonte de luz deve estar no foco do refletor parabólico. Logo, temos que determinar as coordenadas do ponto  $F$  e encontrar a distância entre o foco  $F$  e o vértice da parábola. Escolhendo o ponto de coordenadas  $(30,15)$  do gráfico da figura 2.2 e substituindo na equação (2.1), conforme veremos adiante, obtemos:  $15^2 = 4p30 \Rightarrow p = \frac{225}{120} \Rightarrow p = 1,875cm$ . Portanto, a distância

da fonte de luz ao vértice da parábola é de  $1,875\text{cm}$ .

## 2.1 Definição

É uma curva plana aberta que se obtém quando um plano intercepta um cone reto de modo paralelo à sua geratriz, conforme podemos ver na figura 1. Na parábola, todos os pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado foco, e de uma reta fixa, chamada diretriz. Portanto, a parábola é o lugar geométrico dos pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo e a uma reta fixa são iguais.

A propriedade de reflexão da parábola afirma que se uma reta  $t$ , tangente em um ponto  $P$  sobre a parábola, faz ângulos iguais com a reta que passa por  $P$  paralela ao eixo de simetria e com a reta que passa por  $P$  e o foco  $F$ .

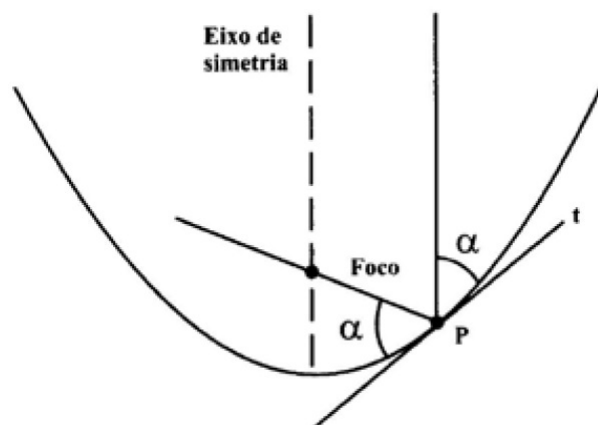


Figura 2.3: Propriedade de reflexão da parábola - Fonte: <http://sites.unifra.br>

Vamos considerar um ponto  $P$  qualquer da parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ , e ainda a reta  $t$ , bissetriz do ângulo. Conforme a figura 2.4:



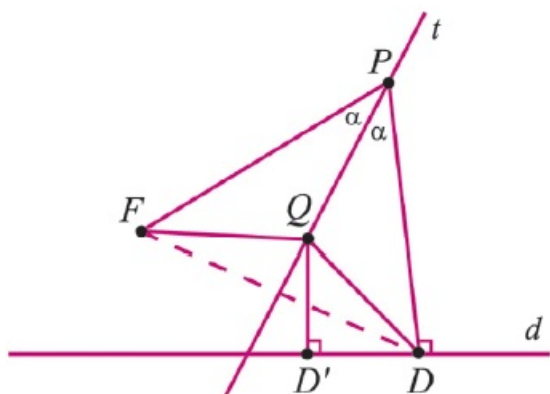


Figura 2.4: Ponto  $P$  da parábola com foco  $F$  e diretriz  $d$  - Fonte: <http://portal.mec.gov.br>

Vamos mostrar inicialmente que o ponto  $P$  é o único ponto tangente à parábola. No triângulo  $PF D$ , como  $\overline{PF} = \overline{PD}$ , então a reta  $t$  é a bissetriz do ângulo  $\widehat{FPD}$ . Portanto, a reta  $t$  é mediatriz do segmento  $\overline{FD}$ . Seja agora  $Q$ , um ponto qualquer da reta  $t$ , distinto de  $P$ . Se  $D'$  é a projeção de  $Q$  sobre  $d$ , temos:  $\overline{QF} = \overline{QD} > \overline{QD'}$ . Logo,  $Q$  é exterior à parábola. Portanto, o ponto  $P$  da reta  $t$  pertence à parábola, e todos os outros pontos de  $t$  são exteriores. Sendo assim,  $t$  é tangente à parábola em  $P$ .

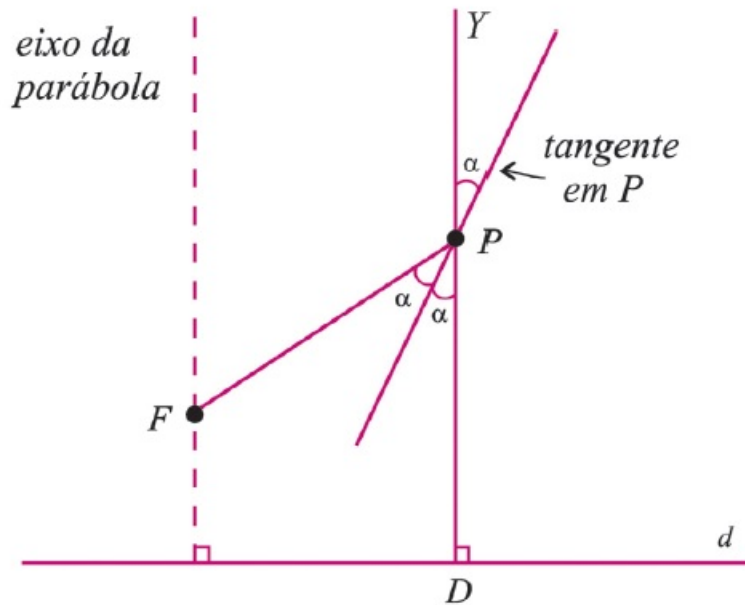


Figura 2.5: Representação gráfica - Fonte: <http://portal.mec.gov.br>

Fazendo um prolongamento do segmento  $\overline{DP}$  determinamos a semi-reta  $\overrightarrow{PY}$ , que faz com a reta  $t$  um ângulo congruente ao formado pelo segmento  $\overline{PD}$  e a reta  $t$ , já que são ângulos opostos pelo vértice. E como a reta  $t$  é bissetriz do ângulo, então, o ângulo formado pelo segmento  $\overline{PF}$  e a reta  $t$  é congruente ao ângulo formado pela semi-reta  $\overrightarrow{PY}$  e a reta  $t$ . Por isso, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão.

Do exposto acima, podemos dizer que todo raio luminoso ou onda que incida sobre a parábola paralelamente ao seu eixo é refletido de modo a passar pelo foco da parábola. O processo inverso também acontece, ou seja, qualquer raio ou onda que seja emitido do foco da parábola e que incida sobre a parábola é refletido numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.

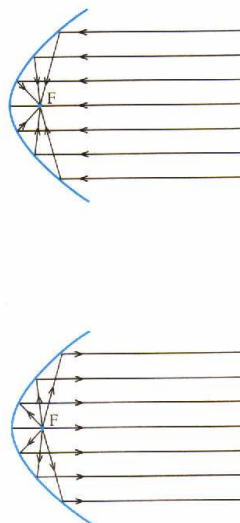


Figura 2.6: Raios refletidos na parábola - Fonte: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br>

Essa propriedade faz com que a parábola apresente várias aplicações, como, por exemplo, em antenas parabólicas, faróis de veículos, fornos solares e em telescópios. Estes exemplos são parabolóides (superfícies obtidas pela rotação de uma parábola ao redor de seu eixo) cujas secções têm o formato de uma parábola.

O sistema dos coletores solares, onde a temperatura no ponto focal pode chegar a  $3800^{\circ}C$ , tem a forma de uma parábola. É nesse ponto focal que é colocado o dispositivo que irá recolher a energia concentrada. O maior forno solar do mundo está em Odeillo nos Pirinéus Orientais, em França, inaugurado em 1970 e, é usado até hoje para fins metalúrgicos na produção de ligas de altas temperaturas e aço.



Figura 2.7: Maior forno solar do mundo - Fonte: [www.buch-der-synergie.de](http://www.buch-der-synergie.de)

O comportamento de uma onda de rádio em relação a uma antena receptora parabólica é que as ondas que encontram a antena numa direção paralela ao seu eixo de

simetria serão refletidas na direção do aparelho que se encontra no foco dessa antena.



Figura 2.8: Antena receptora parabólica- Fonte: [www.skyscrapercity.com](http://www.skyscrapercity.com)

## 2.2 Elementos da Parábola

Sejam  $L$  uma reta diretriz e o foco  $F$  um ponto do plano não pertencente a  $L$ , a parábola  $\mathfrak{P}$  de foco  $F$  e diretriz  $L$  é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a  $F$  é igual à sua distância a  $L$ . Ou seja:

$$\mathfrak{P} = \{P(x, y) | d(P, F) = d(P, L)\}$$

Temos, ainda, que:

A reta focal da parábola  $\mathfrak{P}$  contém o foco e é perpendicular à diretriz  $L$ ;

O vértice  $V$  da parábola  $\mathfrak{P}$  pertence à reta focal;

O parâmetro da parábola  $\mathfrak{P}$  é o número  $2p = d(F, L)$ . Veja na figura 2.9 que  $d(V, F) = d(V, L) = p$ ;

Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

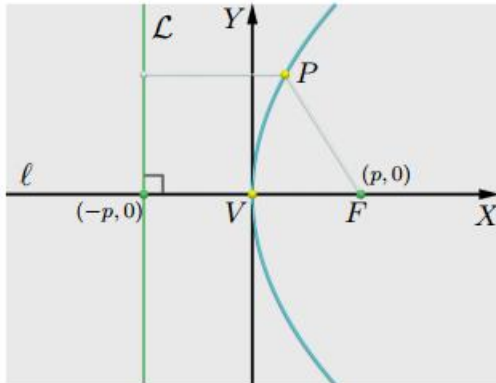


Figura 2.9: Parábola - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

## 2.3 Equações Canônicas

### 2.3.1 Parábola $\mathfrak{P}$ com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

Vamos considerar que o foco  $F$  está à direita da reta diretriz  $L$ , conforme a figura 2.9. Sendo o vértice da parábola na origem  $V = (0,0)$ , temos que o foco é o ponto  $F = (p, 0)$  e a diretriz é a reta  $x = -p$ , onde  $2p = d(F, L)$ . Portanto, se  $P = (x, y) \in \mathfrak{P} \Rightarrow d(P, F) = d(P, L)$ , logo:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|.$$

Elevando-se ambos os termos ao quadrado, temos:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2.$$

Desenvolvendo-se os produtos notáveis, ficamos com:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

Efetuando-se a adição e subtração dos termos semelhantes, obtemos:

$$y^2 = 4px \tag{2.1}$$

A equação (2.1) é conhecida como a equação canônica (ou reduzida) da parábola para a condição citada acima.

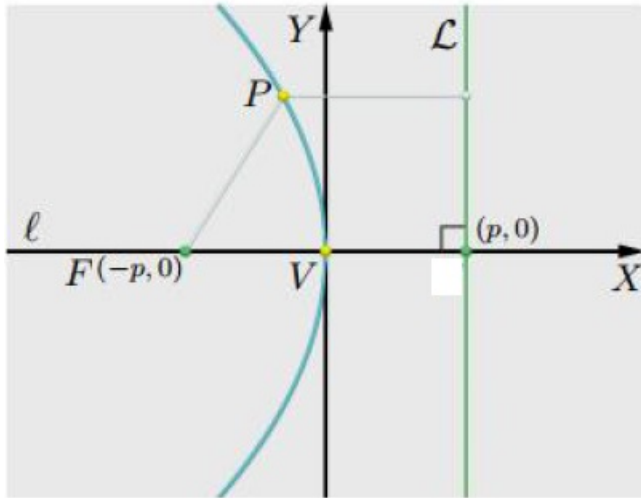


Figura 2.10: Parábola - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Para o foco  $F$  à esquerda da reta diretriz  $L$ , conforme a figura 2.10 temos:  $F = (-p, 0)$  e a diretriz é a reta  $x = p$  e, como  $2p = d(F, L)$ . Portanto, se  $P = (x, y) \in \mathfrak{P} \Rightarrow d(P, F) = d(P, L)$ , logo:

$$\sqrt{(x+p)^2 + y^2} = |x-p|.$$

Elevando-se ambos os termos ao quadrado, temos:

$$(x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2.$$

Desenvolvendo-se os produtos notáveis, ficamos com:

$$x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2.$$

Efetuando-se a adição e subtração dos termos semelhantes, obtemos:

$$y^2 = -4px \tag{2.2}$$

### 2.3.2 Parábola $\mathfrak{P}$ com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

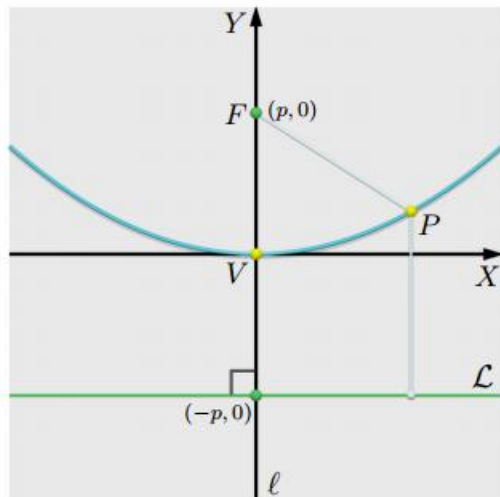


Figura 2.11: Parábola - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Vamos considerar que o foco  $F$  está acima da reta diretriz  $L$ , conforme a figura 2.11. Sendo o vértice da parábola na origem  $V = (0, 0)$ , o foco  $F = (0, p)$  e a diretriz é a reta  $y = -p$  e, como  $2p = d(F, L)$ . Portanto, se  $P = (x, y) \in \mathfrak{P} \Rightarrow d(P, F) = d(P, L)$ , logo:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Elevando-se ambos os termos ao quadrado, temos:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2.$$

Desenvolvendo-se os produtos notáveis, ficamos com:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

Efetuando-se a adição e subtração dos termos semelhantes, obtemos:

$$x^2 = 4py \tag{2.3}$$

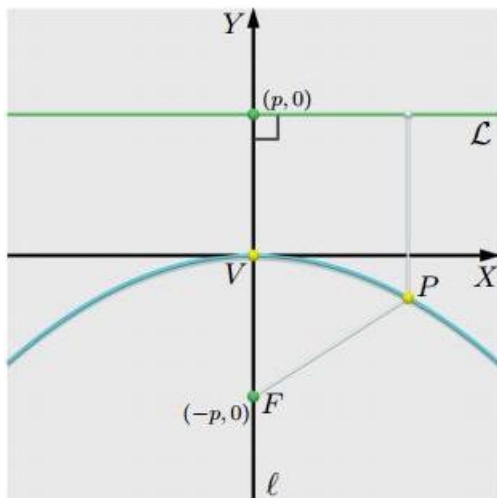


Figura 2.12: Parábola - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Para o foco  $F$  abaixo da reta diretriz  $L$ , conforme a figura 2.12. Sendo o vértice da parábola na origem  $V = (0, 0)$ , o foco  $F = (0, -p)$  e a diretriz é a reta  $y = p$  e, como  $2p = d(F, L)$ . Portanto, se  $P = (x, y) \in \mathfrak{P} \Rightarrow d(P, F) = d(P, L)$ , logo:

$$\sqrt{x^2 + (y + p)^2} = |y - p|.$$

Elevando-se ambos os termos ao quadrado, temos:

$$x^2 + (y + p)^2 = (y - p)^2.$$

Desenvolvendo-se os produtos notáveis, ficamos com:

$$x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2.$$

Efetuando-se a adição e subtração dos termos semelhantes, obtemos:

$$x^2 = -4py \tag{2.4}$$



### 2.3.3 Parábola $\mathfrak{P}$ com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo $OX$

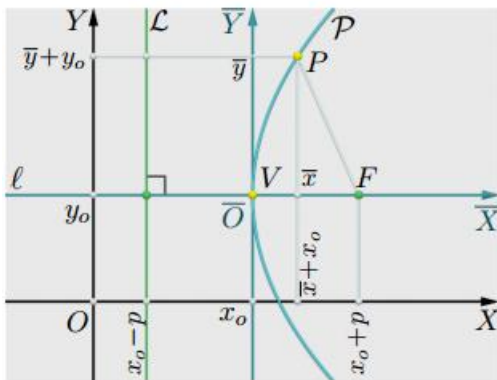


Figura 2.13: Parábola - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Se considerarmos o foco  $F$  à direita da reta diretriz  $L$ , conforme a figura 2.13. No sistema de coordenadas  $\overline{XO\overline{Y}}$ , a equação da parábola é  $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$ , conforme a equação (2.1), o foco é  $\overline{F} = (p, 0)$ , o vértice  $\overline{V} = (0, 0)$ , a reta diretriz  $\overline{L}$  é  $\overline{x} = -p$  e a reta focal é  $\overline{y} = 0$ . Usando as equações (1.1) e (1.2) e substituindo na equação acima, temos a equação da parábola:

$$(y - y_o)^2 = 4p(x - x_o) \quad (2.5)$$

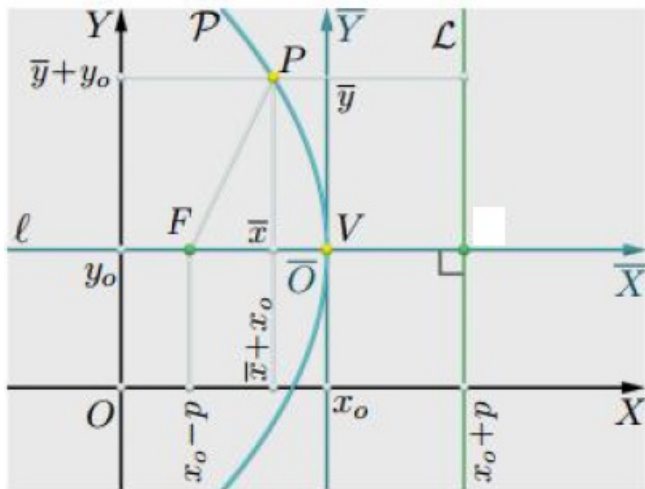


Figura 2.14: Parábola - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Para o foco  $F$  à esquerda da reta diretriz  $L$ , conforme a figura 2.14. No sistema de coordenadas  $\overline{XOY}$ , a equação da parábola é  $\bar{y}^2 = -4p\bar{x}$ , conforme a equação (2.2), o foco é  $\bar{F} = (-p, 0)$ , o vértice  $\bar{V} = (0, 0)$ , a reta diretriz  $\bar{L}$  é  $\bar{x} = p$  e a reta focal é  $\bar{y} = 0$ . Usando as equações (1.1) e (1.2) e substituindo na equação acima, temos a equação da parábola:

$$(y - y_o)^2 = -4p(x - x_o) \quad (2.6)$$

### 2.3.4 Parábola $\mathfrak{P}$ com vértice $V = (x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo $OY$

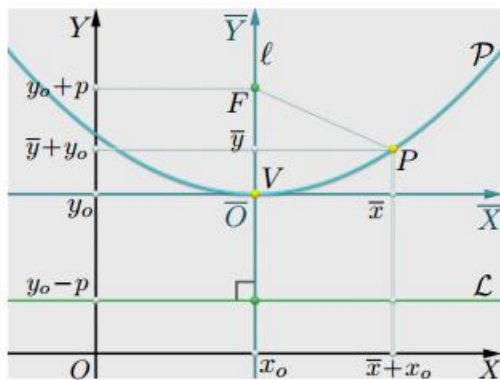


Figura 2.15: Parábola - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Se considerarmos o foco  $F$  acima da reta diretriz  $L$ , conforme a figura 2.15. No sistema de coordenadas  $\overline{XOY}$ , a equação da parábola é  $\bar{x}^2 = 4p\bar{y}$ , conforme a equação (2.3), o foco é  $\overline{F} = (0, p)$ , o vértice  $\overline{V} = (0, 0)$ , a reta diretriz  $\overline{L}$  é  $\bar{y} = -p$  e a reta focal é  $\bar{x} = 0$ . Usando as equações (1.1) e (1.2) e substituindo na equação acima, temos a equação da parábola:

$$(x - x_o)^2 = 4p(y - y_o) \quad (2.7)$$

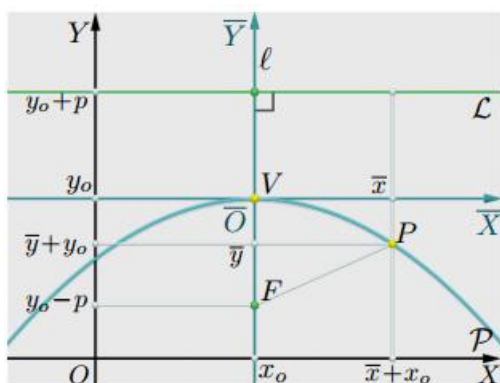


Figura 2.16: Parábola - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Para o foco  $F$  abaixo da reta diretriz  $L$ , conforme a figura 2.16. No sistema de coordenadas  $\overline{XOY}$ , a equação da parábola é  $\bar{x}^2 = -4p\bar{y}$ , conforme a equação (2.4), o foco é  $\bar{F} = (0, -p)$ , o vértice  $\bar{V} = (0, 0)$ , a reta diretriz  $\bar{L}$  é  $\bar{y} = p$  e a reta focal é  $\bar{x} = 0$ . Usando as equações (1.1) e (1.2) e substituindo na equação acima, temos a equação da parábola:

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0) \quad (2.8)$$

Se, por exemplo, tivéssemos que determinar a equação do gráfico da figura (2.17):

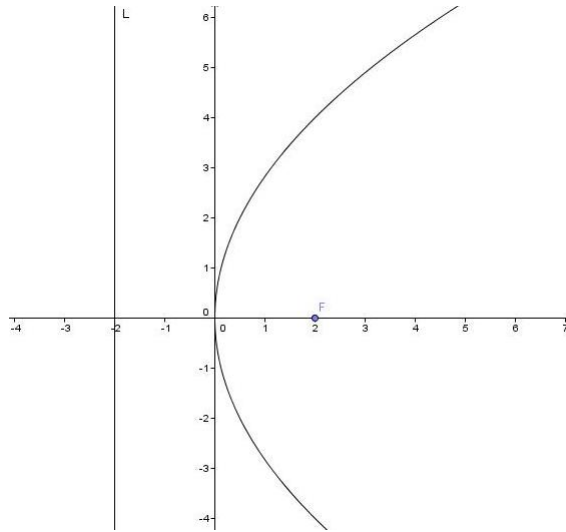


Figura 2.17: Parábola e Reta diretriz

É fácil ver que o seu vértice está na origem e a reta focal coincide com o eixo  $OX$  e passa pelo ponto  $F = (2,0)$ , já que a reta diretriz é dada por  $x = -2$ . Portanto  $p = 2$ . Conforme a equação (2.1), temos que:

$$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4 \cdot 2 \cdot x \Rightarrow y^2 = 8x \quad (2.9)$$

Contudo, é comum vermos as antenas parabólicas, como na figura 2.8, inclinadas em relação aos eixos cartesianos  $XOY$ , portanto será conveniente encontrarmos as equações dessas parábolas através de translação e/ou rotação de eixos, pois fica mais fácil a sua compreensão. Vejamos por exemplo o gráfico da parábola:  $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y = 0$ .

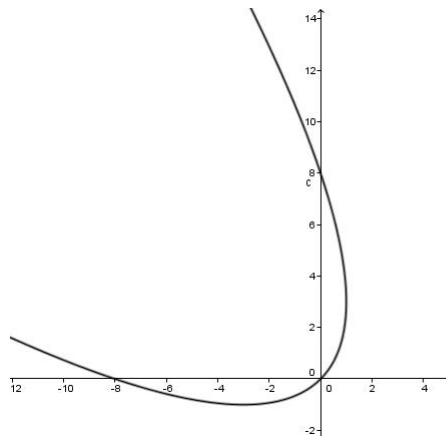


Figura 2.18: Gráfico da parábola

Vamos fazer uma rotação para eliminarmos o termo  $xy$  e como  $A = C$ , temos que a amplitude  $\theta$  de rotação é de  $45^\circ$ . Portanto, substituindo nas equações (1.9) e (1.10), teremos que:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}).$$

E substituindo na equação da parábola dada, teremos:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y})\right]^2 + 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y})\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y})\right] + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y})\right]^2 + 8\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y})\right] - 8\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y})\right] = 0.$$

Efetuando as operações, ficaremos com:

$$\bar{x}^2 = 4\sqrt{2}\bar{y}.$$

Logo uma equação bem mais simples de ser interpretada e que obedece a forma canônica da parábola.

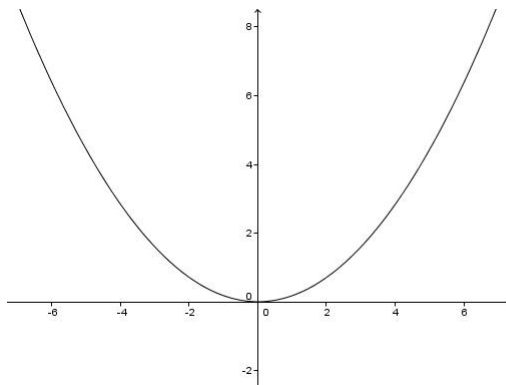


Figura 2.19: Gráfico da parábola após rotação de  $45^\circ$

# Capítulo 3

## Elipse

Por que os refletores elípticos dos dentistas não ofuscam a visão do paciente? Os dentistas usam refletores elípticos que têm como objetivo concentrar o máximo de luz. Dessa forma, o ponto de luz do refletor consiste em um dos focos da elipse.

Como exemplo motivador para o estudo de elipse, vamos considerar que um dentista usa um espelho elíptico conforme figura 3.1 abaixo. Qual a distância entre a lâmpada do espelho e o local em que está concentrada a iluminação na boca do paciente?

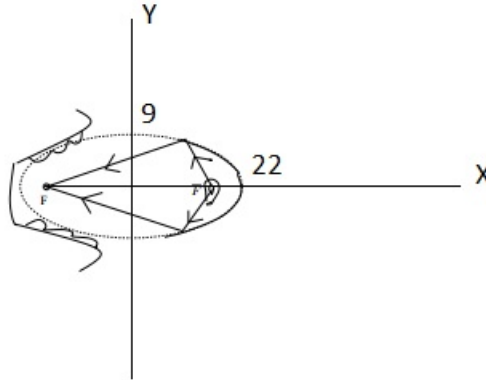


Figura 3.1: Gráfico do refletor elíptico

Pela propriedade que veremos adiante, a lâmpada está em um foco da elipse e o local de iluminação está situado no outro foco da elipse, devemos então determinar a distância entre os focos, que será  $2c$ . Logo, da figura 3.1 temos que:  $a = 22\text{cm}$ ,  $b = 9\text{cm}$  e  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 22^2 = 9^2 + c^2 \Rightarrow c \approx 20\text{cm}$ , sendo a distância entre os dois focos  $2c \approx 40\text{cm}$ , portanto a distância pedida.

### 3.1 Definição

É uma curva plana fechada que se obtém quando um plano intercepta um cone reto de maneira inclinada em relação à sua base, sendo que essa inclinação deve ser menor do que a inclinação da geratriz do cone, conforme podemos ver na figura 1. Na elipse, há a presença de dois pontos fixos, denominados focos. A soma das distâncias de qualquer ponto da elipse até esses focos sempre é um valor constante.

Uma propriedade muito importante da elipse é que uma reta tangente a uma elipse em um ponto  $P$  faz ângulos iguais com as retas que unem  $P$  aos focos da elipse,



conforme indicado na figura 3.2.

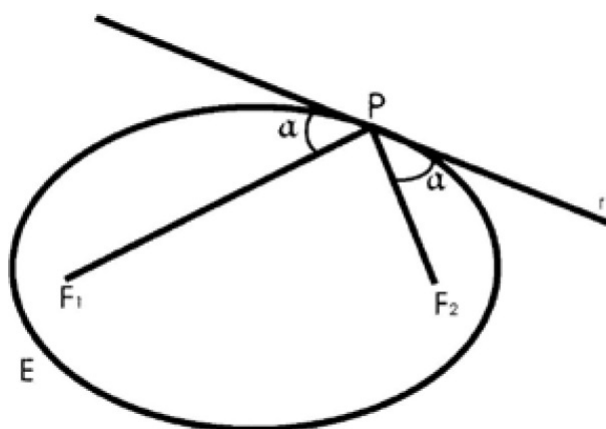


Figura 3.2: Propriedade de reflexão da elipse - Fonte: sites.unifra.br

Vamos demonstrar esta propriedade, sendo  $P$  um ponto da elipse, temos que:  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , conforme veremos adiante, e  $A$  um ponto não pertencente à elipse, tal que:  $d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq 2a$ . Logo, a reta  $r$  será tangente a elipse em  $P$  se, e somente se intersectar a elipse em  $P$  e resultar  $d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq d(P, F_1) + d(P, F_2)$ . Conforme a figura 3.3 abaixo, seja  $P$  um ponto da elipse e  $r$  uma reta tangente à elipse de tal modo que  $P$  pertence a reta  $r$  e, o ângulo entre  $\overline{PF_1}$  e  $r$  seja igual ao ângulo entre  $\overline{PF_2}$  e  $r$ .

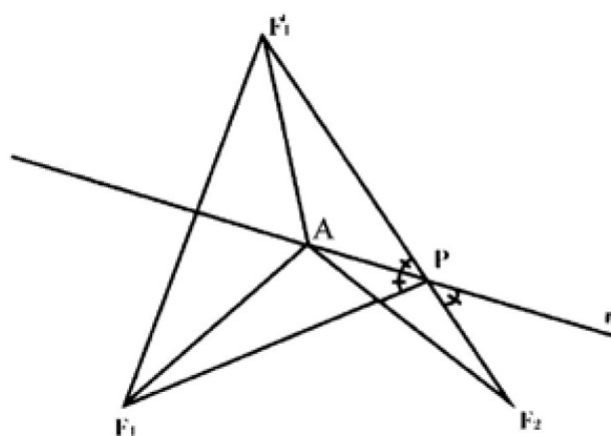


Figura 3.3: Reta  $r$  tangente à elipse em  $P$  - Fonte: sites.unifra.br

Vamos mostrar que a reta  $r$  é tangente a elipse em  $P$ . Seja  $A$  um ponto pertencente a reta  $r$  e diferente do ponto  $P$ ,  $F'_1$  um ponto simétrico de  $F_1$ , em relação a  $r$ . A

reta  $r$  é mediatriz de  $\overline{F_1F'_1}$ , logo  $d(P, F_1) = d(P, F'_1)$  e  $d(A, F_1) = d(A, F'_1)$ . Como a reta  $r$  faz ângulos iguais com  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$  e, pela simetria, os ângulos  $\widehat{F_1PA}$  e  $\widehat{APF'_1}$  também são iguais. Temos que, os segmentos  $\overline{PF_2}$  e  $\overline{PF'_1}$  fazem ângulos iguais com a reta  $r$ , logo, os pontos  $F'_1$ ,  $P$  e  $F_2$  pertencem à mesma reta  $r$ . Então,  $P$  é um ponto da elipse e, como  $d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq 2a$ . Concluimos que  $P$  é o único ponto da reta  $r$  que pertence à elipse, sendo assim, a reta  $r$  tangencia a elipse em  $P$  e, portanto, uma reta tangente a uma elipse em um ponto  $P$  faz ângulos iguais com as retas que unem  $P$  aos focos da elipse.

O espelho elíptico do Litotritor é uma parte de um elipsóide (sólido que resulta da rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos) cuja secção tem o formato de uma elipse. Este espelho é um aparelho bastante usado para tratamento dos cálculos renais. Nesse procedimento, as ondas de choque criadas pelo aparelho viajam através da pele e tecidos até encontrarem os cálculos renais mais densos, pulverizando-os. O espelho elíptico concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão, este ponto é um dos focos do espelho elíptico e é exatamente a posição em que se encontra o rim do paciente.

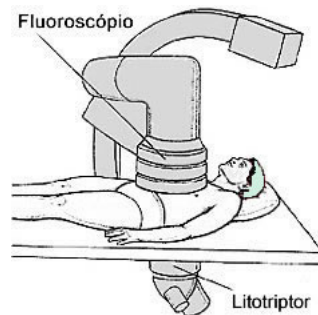


Figura 3.4: Litotritor - Fonte: [www.pedranorim.com.br/litotripsia.htm](http://www.pedranorim.com.br/litotripsia.htm)

### Fragmentação do Cálculo Renal

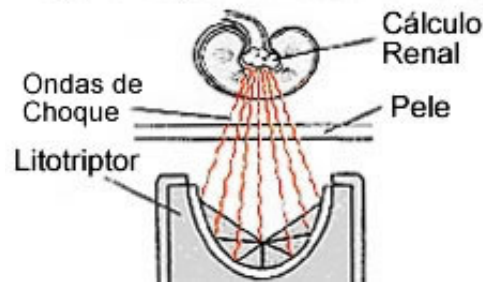


Figura 3.5: Fragmentação do cálculo renal - Fonte: [www.pedranorim.com.br/litotripsia.htm](http://www.pedranorim.com.br/litotripsia.htm)

## 3.2 Elementos da Elipse

Uma elipse,  $\mathfrak{E}$ , de focos  $F_1$  e  $F_2$ , é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos  $P$  cuja soma das distâncias aos focos é igual a uma constante  $2a > 0$ , maior do que a distância entre os focos  $2c \geq 0$ . Ou seja,  $0 \leq c < a$  e  $d(F_1, F_2) = 2c$ , portanto:

$$\mathfrak{E} = \{P(x, y) | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

Temos, ainda que:

A intersecção da elipse com a reta focal (reta que contém os focos) são os pontos  $A_1$  e  $A_2$ , que são chamados vértices da elipse sobre a reta focal, cujo segmento é chamado eixo focal da elipse e  $d(A_1, A_2) = 2a$ ;

O ponto médio do eixo focal é denominado o centro  $C(x_o, y_o)$  da elipse, que é, também, o ponto médio do segmento  $F_1F_2$ ;

A elipse intersecta a reta não-focal (reta perpendicular à reta focal e que passa pelo centro  $C$ ) nos pontos,  $B_1$  e  $B_2$ , chamados vértices da elipse sobre a reta não-focal;

O segmento  $\overline{B_1B_2}$  é denominado eixo não-focal da elipse e seu comprimento é  $2b$ , onde podemos ver na figura 3.6, pelo Teorema de Pitágoras:  $b^2 = a^2 - c^2$ ;

A excentricidade (parâmetro associado a qualquer cônica, que mede o seu desvio em relação a uma circunferência) da elipse é o número  $e = \frac{c}{a}$ , tal que  $0 \leq e < 1$ . Quanto mais próximo de zero for o valor de  $e$ , mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Por outro lado, quanto mais achatada for a elipse, mais o valor de  $e$  se aproxima de 1.

Portanto, temos as seguintes terminologias:

- $a \rightarrow$  distância do centro aos vértices sobre a reta focal;
- $b \rightarrow$  distância do centro aos vértices sobre a reta não-focal;
- $c \rightarrow$  distância do centro aos focos.

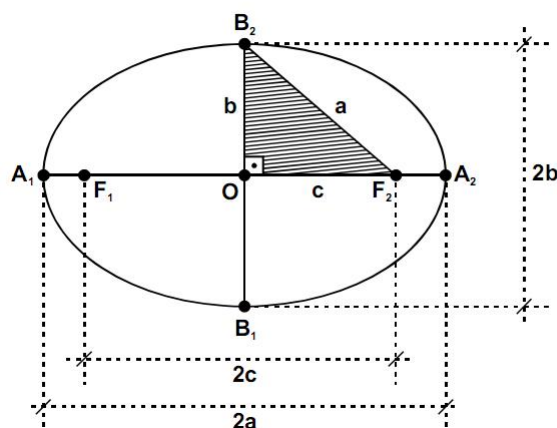


Figura 3.6: Elipse - Fonte: Cônicas e Quádricas - Jacir J. Venturi

### 3.3 Equações Canônicas

#### 3.3.1 Elipse $\mathfrak{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

Vamos considerar os seguintes pontos:  $F_1 = (-c, 0)$ ,  $F_2 = (c, 0)$ ,  $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ ,  $B_1 = (0, -b)$ ,  $B_2 = (0, b)$  conforme indicado na figura 3.6 e, ainda temos que:  $0 < c < a$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

Se  $P = (x, y) \in \mathfrak{E} \Rightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Isolando o primeiro termo:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois termos ao quadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Dividindo os termos por  $-4$ , temos:

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois termos ao quadrado:

$$(a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo todos os termos da equação acima por  $a^2b^2$  encontramos a equação canônica da elipse para a condição citada acima:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.1)$$

Tomando, como exemplo, a equação  $9x^2 + 16y^2 = 144$  para ficar com a forma da equação canônica da elipse, vamos dividir essa equação por 144 e encontraremos a equação  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Comparando com a equação (3.1), teremos que:  $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$  e  $b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$ , portanto a medida do eixo maior (que coincide com o eixo  $OX$ ) é  $2a = 8$  e do eixo menor é  $2b = 6$ . Ainda, temos que:  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 9 + c^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{7}$ , logo as coordenadas dos focos são  $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$  e  $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$ , sendo estes pontos bastante importantes para uma elipse, conforme vimos na aplicação da elipse.

Vejamos o gráfico da elipse na figura 3.7, abaixo:

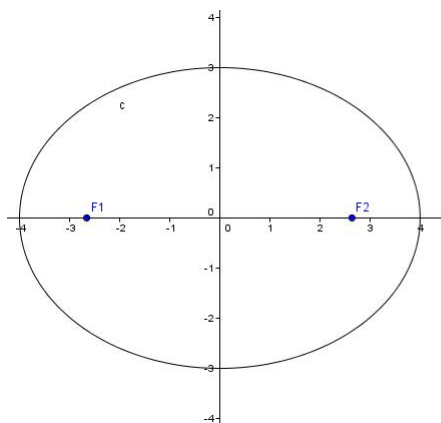


Figura 3.7: Gráfico da elipse

### 3.3.2 Elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

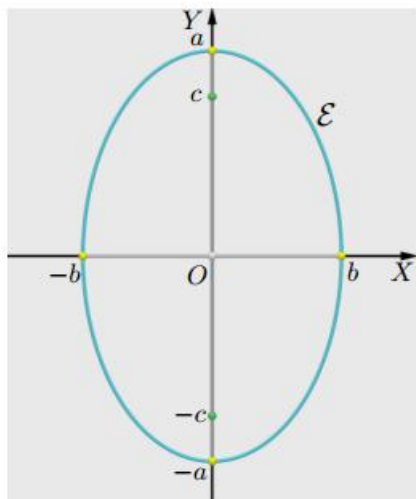


Figura 3.8: Elipse - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Observando a figura 3.8, vamos considerar os seguintes pontos:  $F_1 = (0, -c)$ ,  $F_2 = (0, c)$ ,  $A_1 = (0, -a)$ ,  $A_2 = (0, a)$ ,  $B_1 = (-b, 0)$ ,  $B_2 = (b, 0)$  e, ainda temos que:  $0 < c < a$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

Se  $P = (x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y + c)^2} + \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2a.$$

Isolando o primeiro termo:

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y - c)^2}.$$

Elevando os dois termos ao quadrado:

$$\begin{aligned} x^2 + (y + c)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + (y - c)^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 2cy + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + y^2 - 2cy = c^2 \\ \Rightarrow 4cy &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}. \end{aligned}$$

Dividindo os termos por  $-4$ :

$$a^2 - cy = a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}.$$

Elevando os dois termos ao quadrado:

$$\begin{aligned} (a^2 - cy)^2 &= a^2(x^2 + (y - c)^2) \\ \Rightarrow a^4 - 2a^2cy + c^2y^2 &= a^2(x^2 + y^2 - 2cy + c^2) \\ \Rightarrow a^2x^2 + (a^2 - c^2)y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo todos os termos da equação acima por  $a^2b^2$  encontramos a equação canônica da elipse, para a condição citada acima:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (3.2)$$

### 3.3.3 Elipse $\mathfrak{E}$ com centro no ponto $\bar{O} = (x_o, y_o)$

Considerando  $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$  o sistema de eixos ortogonais obtido transladando o sistema  $XOY$  para a nova origem  $\bar{O}$ , temos que:

Reta focal paralela ao eixo  $OX$

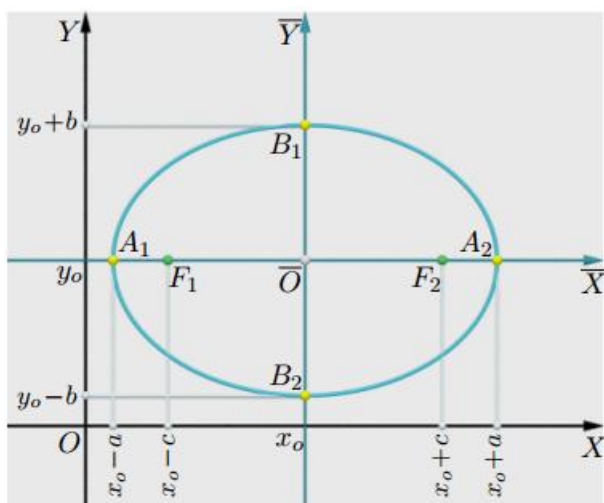


Figura 3.9: Elipse - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Observando a figura 3.9 e usando as equações (1.1) e (1.2) e substituindo na equação (3.1), temos a equação da elipse:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \quad (3.3)$$

### Reta focal paralela ao eixo $OY$

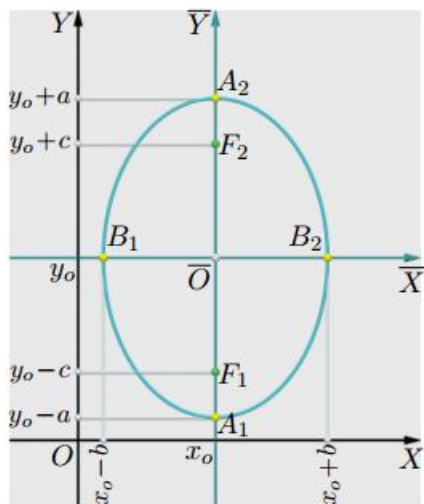


Figura 3.10: Elipse - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Observando a figura 3.10 e usando as equações (1.1) e (1.2) e substituindo na equação (3.2), temos a equação da elipse:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (3.4)$$

Exemplificando, vamos examinar o gráfico na figura 3.11, abaixo:

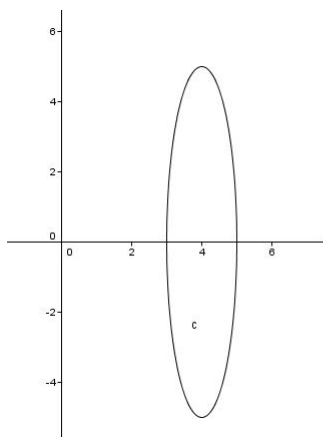


Figura 3.11: Gráfico da elipse



Devemos fazer uma translação do eixo  $OY$  para o ponto  $(4, 0)$ . Logo, temos os seguintes valores  $x_o = 4$ ,  $y_o = 0$ ,  $a = 5$  e  $b = 1$ . Portanto, de acordo com a equação (3.4), temos que a equação da elipse será:  $\frac{(x-4)^2}{1^2} + \frac{(y-0)^2}{5^2} = 1 \Rightarrow (x - 4)^2 + \frac{y^2}{25} = 1$ . Sendo  $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 1 \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{6}$ , logo os focos da elipse são os pontos  $F_1 = (4, -2\sqrt{6})$  e  $F_2 = (4, 2\sqrt{6})$ .

# Capítulo 4

## Hipérbole

A maior parte do universo que conhecemos só pode ser observada através das imagens reproduzidas pelos telescópios. Como essas imagens de conglomerados de estrelas, planetas e outros corpos celestes presentes no espaço são feitas? Um telescópio é como um grande olho, quando enxergamos um objeto, a luz que o olho recebe fica marcada fisicamente na retina, ocupando um espaço que é proporcional ao tamanho desse objeto. Como nosso olho é muito pequeno para enxergar tão longe, foram inventados conjuntos de lentes e espelhos (parabólicos e hiperbólicos) que proporcionam imagens ampliadas do universo. Essas imagens são formadas nos telescópios pela incidência da luz paralela ao eixo focal dos espelhos, pois incidem de uma grande distância, e por fim quando refletidos no espelho hiperbólico do telescópio refletem para o foco deste espelho.

Como exemplo motivador para o estudo de hipérbole, vamos considerar um telescópio que usa espelhos parabólicos e hiperbólicos como esquematizado na figura 4.1 abaixo. Qual a equação de cada um desses espelhos?

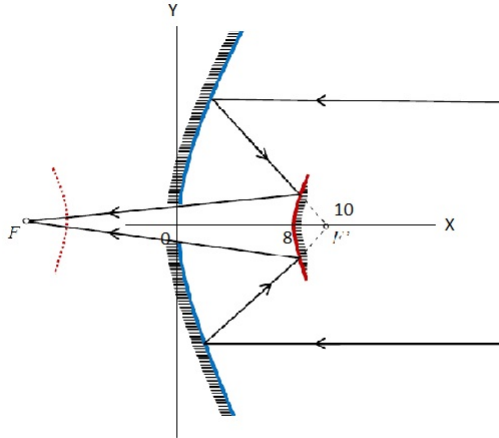


Figura 4.1: Modelo gráfico dos espelhos

Analisando o gráfico da figura 4.1, para o espelho parabólico  $p = 10$  e conforme a equação (2.1), temos que:  $y^2 = 40x$  e, para o espelho hiperbólico  $a = 8$  e  $c = 10$ , como veremos adiante:  $b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{10^2 - 8^2} \Rightarrow b = 6$  e de acordo com a equação (4.1) da hipérbole, temos que:  $\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . Portanto, as equações procuradas são:  $y^2 = 40x$  para o espelho parabólico e  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$  para o espelho hiperbólico.

## 4.1 Definição

É uma curva aberta, com dois ramos, que se obtém quando um plano intercepta um cone reto de modo perpendicular à base do cone, sendo que o ângulo do plano é maior do que o ângulo da geratriz do cone, conforme podemos ver na figura 1. Na hipérbole, há a presença de dois pontos fixos, denominados focos, tal que a diferença entre as distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos focos é sempre um valor constante.

A propriedade de reflexão da hipérbole afirma que uma reta tangente a uma hipérbole, em um ponto  $P$  é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais  $\overline{F_1P}$  e  $\overline{F_2P}$ , ou seja, qualquer segmento de reta dirigido a um dos focos da hipérbole encontra o ramo correspondente e é refletido em direção ao outro foco, conforme podemos ver na figura 4.2:

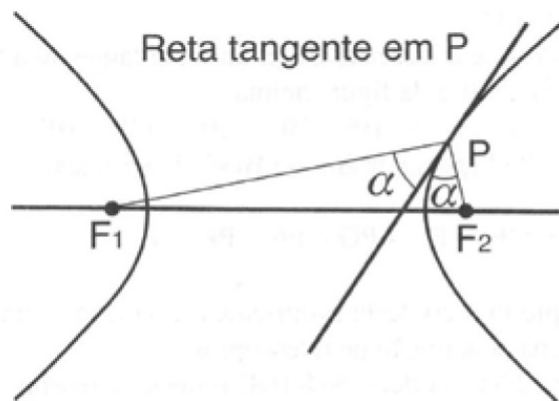


Figura 4.2: Propriedade refletiva da hipérbole - Fonte: sites.unifra.br

Para demonstrar essa propriedade, vamos provar que a bissetriz do ângulo  $\widehat{F_1PF_2}$  é também a reta tangente à hipérbole em P, conforme a figura 4.3 abaixo:

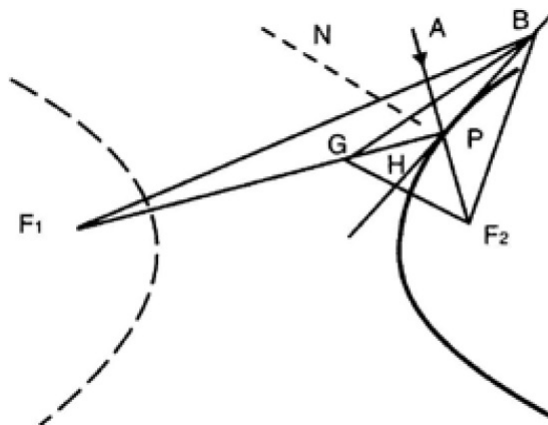


Figura 4.3: Bissetriz e tangente à hipérbole - Fonte: sites.unifra.br

Vamos supor que a bissetriz e a reta tangente sejam as retas coincidentes. Seja  $B$  um ponto qualquer da bissetriz, tal que  $\overline{GF_2} \perp \overline{BP} \perp \overline{NP}$ , donde  $\overline{NP}$  e  $\overline{GF_2}$  são segmentos paralelos e o triângulo  $PGF_2$  é isósceles de base  $\overline{GF_2}$ . Daí, os ângulos desse triângulo em  $G$  e  $F_2$  são congruentes. Mas, os ângulos  $\widehat{GF_2P}$  e  $\widehat{APN}$  são congruentes, pois são correspondentes. E, ainda, os ângulos  $\widehat{NPG}$  e  $\widehat{PGF_2}$ , também, são congruentes, pois são alternos internos. Logo, o ângulo de incidência  $\widehat{APN}$  é igual ao ângulo de reflexão  $\widehat{NPG}$ , segunda a lei de reflexão. Daí,  $\widehat{NPG}$  é o ângulo de reflexão, isto é, o raio refletido

passa por  $F_1$ .

Falta provar que a bissetriz  $\overrightarrow{BP}$  é, também, tangente à hipérbole em  $P$ . Da figura 4.3, temos:  $\overline{BF_1} < \overline{BG} + \overline{GF_1} \Rightarrow \overline{BF_1} - \overline{BF_2} < \overline{BG} + \overline{GF_1} - \overline{BF_2}$ , mas  $\overline{BG} = \overline{BF_2}$  já que o triângulo  $BGF_2$  é isósceles. Portanto,  $\overline{BF_1} - \overline{BF_2} < \overline{GF_1} = \overline{PF_1} - \overline{PG} = \overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ , logo o ponto  $B$  é externo ao ramo da hipérbole por  $P$ , ou seja a bissetriz  $\overrightarrow{BP}$  só toca a hipérbole em  $P$ , portanto é a reta tangente à hipérbole em  $P$ .

A aplicação óptica é o chamado telescópio de reflexão. É constituído, basicamente, por dois espelhos, um maior, chamado primário, que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico, este espelho é um hiperbolóide (superfície obtida pela rotação de uma hipérbole ao redor de seu eixo focal) cuja secção tem o formato de uma hipérbole. Os dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da primeira coincida com um dos da segunda.

Quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico, são dirigidos para o foco pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica. O telescópio Hubble (em órbita desde 1990 a 600 km da Terra) baseia-se nessas propriedades de reflexão.



Figura 4.4: Telescópio Hubble - Fonte: caronteiff.blogspot.com

## 4.2 Elementos da Hipérbole

Uma hipérbole  $\mathfrak{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto de todos os pontos  $P$  do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias aos focos é igual a uma constante  $2a > 0$ , menor do que a distância entre os focos  $2c > 0$ . Ou seja,  $0 < a < c$  e  $d(F_1, F_2) = 2c$ , portanto:

$$\mathfrak{H} = \{P(x, y) | d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a\}$$

Temos, ainda que:

A intersecção da hipérbole com a reta focal (reta que contém os focos) são os pontos  $A_1$  e  $A_2$  que são chamados vértices da hipérbole sobre a reta focal, cujo segmento é chamado eixo focal da hipérbole e  $d(A_1, A_2) = 2a$ ;

O ponto médio do eixo focal é denominado o centro  $C(x_o, y_o)$  da hipérbole que é também, o ponto médio do segmento  $F_1F_2$ ;

A reta perpendicular à reta focal e que passa pelo centro  $C$  é chamada reta não-focal. Como esta reta é a mediatriz do segmento  $F_1F_2$ , a hipérbole não intersecta à reta não-focal, pois, se  $P$  pertencesse a reta não-focal, teríamos:  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a$ ;

Os pontos  $B_1$  e  $B_2$  são chamados vértices imaginários da hipérbole;

O segmento  $\overline{B_1B_2}$  é denominado eixo não-focal da hipérbole e seu comprimento é  $2b$ , que podemos ver na figura 4.5, pelo Teorema de Pitágoras:  $b^2 = c^2 - a^2$ ;

A excentricidade da hipérbole é o número  $e = \frac{c}{a}$ , tal que  $e > 1$ . Há uma proporcionalidade entre a excentricidade e a abertura da hipérbole, quanto maior a excentricidade maior a abertura e vice-versa.

As assíntotas da hipérbole são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação  $\pm \frac{b}{a}$  em relação à reta focal. Assim, a reta focal e a reta não-focal são bissetrizes das assíntotas.

Portanto, temos as seguintes terminologias:

- $a \rightarrow$  distância do centro aos vértices sobre a reta focal;
- $b \rightarrow$  distância do centro aos vértices imaginários sobre a reta não-focal;
- $c \rightarrow$  distância do centro aos focos.

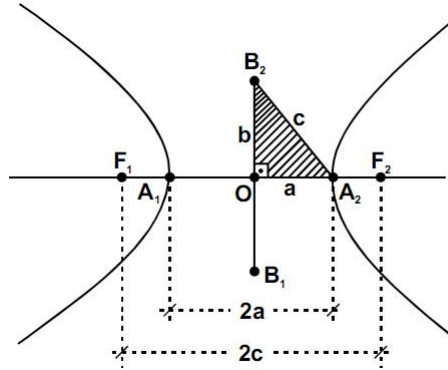


Figura 4.5: Hipérbole - Fonte: Cônicas e Quádricas - Jacir J. Venturi

## 4.3 Equações Canônicas

### 4.3.1 Hipérbole $\mathfrak{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OX$

Vamos considerar os seguintes pontos:  $F_1 = (-c, 0)$ ,  $F_2 = (c, 0)$ ,  $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ ,  $B_1 = (0, -b)$ ,  $B_2 = (0, b)$  e, ainda temos que:  $0 < a < c$  e  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

Se  $P = (x, y) \in \mathfrak{H} \Rightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$  (ramo direito de  $\mathfrak{H}$ ) ou  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a$  (ramo esquerdo de  $\mathfrak{H}$ ).

Vamos fazer o desenvolvimento do ramo direito de  $\mathfrak{H}$ . Assim, teremos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Isolando o primeiro termo:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois termos ao quadrado:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ \Rightarrow 4xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Dividindo os termos por 4:

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando, novamente, os dois termos ao quadrado:

$$\begin{aligned} (cx - a^2)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\ \Rightarrow c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\ \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo-se todos os termos da equação acima por  $a^2b^2$  encontramos a equação canônica da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.1)$$

Como as assíntotas de  $\mathfrak{H}$  são retas que passam pelo centro  $(0, 0)$  e têm inclinação  $\pm \frac{b}{a}$  em relação ao eixo  $OX$ , suas equações são:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \quad (4.2)$$

Agora, vamos fazer o desenvolvimento do ramo esquerdo de  $\mathfrak{H}$ . Assim, teremos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a.$$

Isolando o primeiro termo:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2a.$$

Elevando os dois termos ao quadrado:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\ \Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= x^2 - 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\ \Rightarrow 4xc &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2. \end{aligned}$$

Dividindo os termos por 4:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando, novamente, os dois termos ao quadrado:

$$\begin{aligned} (cx - a^2)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\ \Rightarrow c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\ \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\ \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2. \end{aligned}$$

Dividindo todos os termos da equação acima por  $a^2b^2$  encontramos a equação canônica da hipérbole, que coincide com a equação (4.1).

Exemplo: Consideremos a equação  $16x^2 - 25y^2 = 400$ , para ficar com a forma da equação canônica da hipérbole, vamos dividir essa equação por 400 e encontraremos a equação  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ , comparando com a equação (4.1), teremos que:  $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$  e  $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ , portanto a medida do eixo maior (que coincide com o eixo  $OX$ ) é  $2a = 10$  e do eixo não-focal é  $2b = 8$ . Ainda, temos que:  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 + 4^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 16 \Rightarrow c = \pm\sqrt{41}$ . Logo as coordenadas dos focos são  $F_1 = (-\sqrt{41}, 0)$  e  $F_2 = (\sqrt{41}, 0)$ ,



sendo estes pontos bastante importantes para uma hipérbole, conforme vimos na aplicação da hipérbole. Ainda, de acordo com a equação (4.2), as assíntotas são  $y = \pm \frac{4}{5}x$ . Vejamos o gráfico da hipérbole na figura 4.6, abaixo:

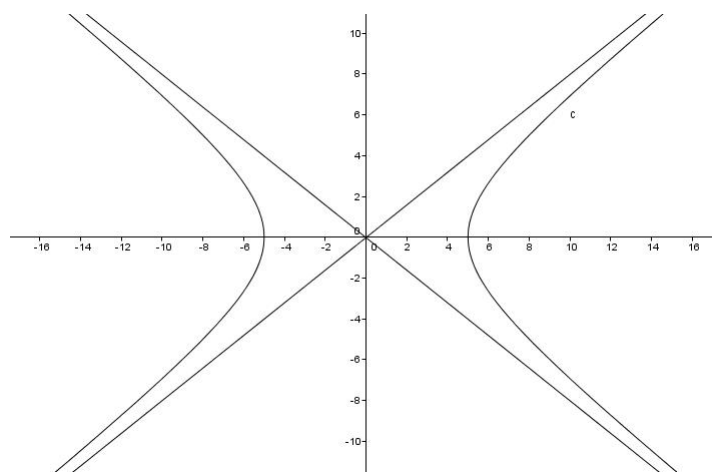


Figura 4.6: Gráfico da hipérbole e assíntotas

### 4.3.2 Hipérbole $\mathfrak{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo $OY$

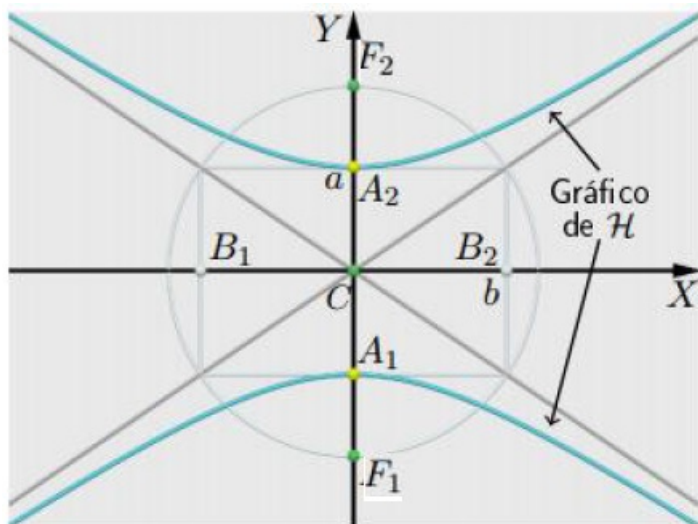


Figura 4.7: Hipérbole - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Observando a figura 4.7, vamos considerar os seguintes pontos:  $F_1 = (0, -c)$ ,  $F_2 = (0, c)$ ,  $A_1 = (0, -a)$ ,  $A_2 = (0, a)$ ,  $B_1 = (-b, 0)$ ,  $B_2 = (b, 0)$  e, ainda temos que:  $0 < a < c$  e  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

Se  $P = (x, y) \in \mathfrak{H} \Rightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$  (ramo superior de  $\mathfrak{H}$ ) ou  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a$  (ramo inferior de  $\mathfrak{H}$ )

Vamos fazer o desenvolvimento do ramo superior de  $\mathfrak{H}$ . Assim, teremos:

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} - \sqrt{x^2 + (y - c)^2} = 2a.$$

Isolando o primeiro termo:

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a + \sqrt{x^2 + (y - c)^2}.$$

Elevando os dois termos ao quadrado:

$$\begin{aligned} x^2 + (y + c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + (y - c)^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 2yc + c^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + y^2 - 2yc + c^2 \\ \Rightarrow 4yc &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}. \end{aligned}$$

Dividindo os termos por 4:

$$yx - a^2 = a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Elevando, novamente, os dois termos ao quadrado:

$$(yc - a^2)^2 = a^2(x^2 + (y - c)^2)$$

$$\Rightarrow y^2c^2 - 2yca^2 + a^4 = a^2(x^2 + y^2 - 2yc + c^2)$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)y^2 - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2.$$

Dividindo todos os termos da equação acima por  $a^2b^2$ , encontramos a equação canônica da hipérbole para a condição citada acima:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (4.3)$$

e as assíntotas são as retas:

$$x = \pm \frac{b}{a}y \quad (4.4)$$

Vamos omitir o desenvolvimento do ramo inferior de  $\mathfrak{H}$ , pois ocorre de forma semelhante ao que fizemos acima e chegaremos às mesmas equações (4.3) e (4.4).

### 4.3.3 Hipérbole $\mathfrak{H}$ com centro no ponto $\overline{O} = (x_o, y_o)$

Considerando  $\overline{X\overline{O}Y}$  o sistema de eixos ortogonais obtido transladando o sistema  $XOY$  para a nova origem  $\overline{O}$ , temos que:



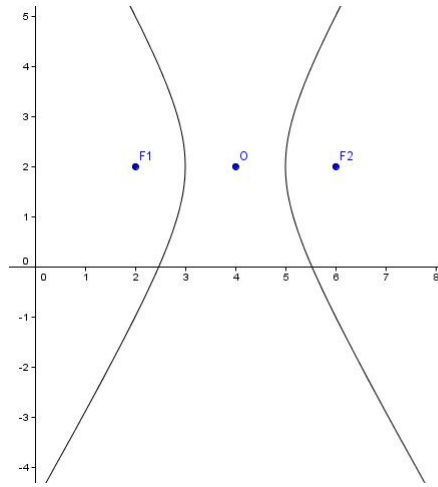


Figura 4.9: Gráfico da hipérbole

Devemos fazer uma translação dos eixos para o ponto  $\bar{O} = (4, 2)$ . Logo, temos os seguintes valores  $x_o = 4$ ,  $y_o = 2$ ,  $a = 1$  e  $c = 2$ . Calculando o valor de  $b$ , temos:  $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 2^2 - 1^2 \Rightarrow b^2 = 4 - 1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{3}$ . Portanto, de acordo com a equação (4.5), temos que a equação da hipérbole será:  $\frac{(x-4)^2}{1^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1 \Rightarrow (x - 4)^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$ .

#### Reta focal paralela ao eixo $OY$

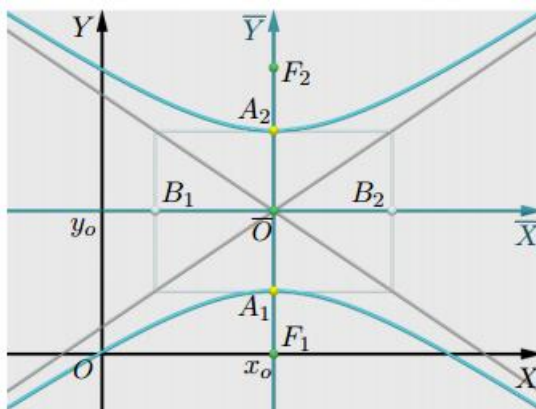


Figura 4.10: Hipérbole - Fonte: Geometria Analítica - João Xavier

Observando a figura 4.10 e usando as equações (1.1) e (1.2) e substituindo na equação (4.3), encontramos:

$$\frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1 \quad (4.7)$$

e substituindo na equação (4.4) determinamos as assíntotas:

$$x - x_o = \pm \frac{b}{a}(y - y_o) \quad (4.8)$$

## Referências Bibliográficas

- [1] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Ensino Médio. Matemática e suas tecnologias. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 27 de novembro de 2014.
- [2] <http://caronteiff.blogspot.com>. Acesso em 10 de maio de 2014.
- [3] <http://ebah.com.br>. Acesso em 12 de abril de 2014.
- [4] <http://educador.brasilecola.com>. Acesso em 12 de março de 2015.
- [5] <http://parquedaciencia.blogspot.com.br>. Acesso em 15 de novembro de 2014.
- [6] <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos>. Acesso em 23 de março de 2015.
- [7] <http://sites.unifra.br/portals>. Acesso em 23 de março de 2015.
- [8] <http://www.buch-der-synergie.de>. Acesso em 19 de abril de 2014.
- [9] <http://www.pedranorim.com.br/litotripsia.htm>. Acesso em 15 de novembro de 2014.
- [10] <http://www.professores.uff.br>. Acesso em 12 de abril de 2014.
- [11] <http://www.skyscrapercity.com>. Acesso em 19 de abril de 2014.
- [12] Xavier, João. *MA 23 - Geometria Analítica - Coleção PROFMAT*, Editora SBM (2011).
- [13] Venturi, Jacir J. . *Cônicas e Quádricas*, 5ª Edição, 2003, Curitiba- PR.
- [14] [www.geogebra.im-uff.mat.br](http://www.geogebra.im-uff.mat.br). Acesso em 19 de setembro de 2013.