Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

INDUÇÃO MATEMÁTICA: DISCUSSÃO TEÓRICA E UMA PROPOSTA DE ENSINO †

por

Bruno Thiago da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2015

Natal - RN

† O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da CAPES.

Indução Matemática, Aplicações, Ensino Médio.

UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede.
Catalogação da Publicação na Fonte

Silva, Bruno Thiago da.
Indução matemática : discussão teórica e uma proposta de ensino / Bruno Thiago da Silva. – Natal, RN, 2015.
x, 87 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

1. Indução (Matemática) – Dissertação. 2. Aplicações – Dissertação. 3. Ensino médio – Dissertação. I. Pereira, Marcelo Gomes. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BCZM CDU 511

INDUÇÃO MATEMÁTICA: DISCUSSÃO TEÓRICA E UMA PROPOSTA DE ENSINO

por

Bruno Thiago da Silva

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Teoria dos Números.

Aprovado por:

____

Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira - UFRN (Orientador)

____

Prof. Dr^{a}. Viviane Simioli Medeiros Campos - UFRN (Membro Interno)

____

Prof. Dr. Ivan Mezzomo - UFERSA (Membro Externo)

Fevereiro/2015

Dedicatória

"Dedico este trabalho aos meus pais e a minhas avós."

Agradecimentos

À Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela oportunidade de realização deste curso.

A todos os meus professores da UFRN, da graduação ao mestrado, pelos ensinamentos e contribuição para a minha formação profissional. Em especial, ao Prof. Marcelo Gomes Pereira - que tive a honra de contar como professor na graduação, no mestrado e, agora, como orientador - pela paciência, empenho, sugestões e direcionamentos, que foram fundamentais para elaboração e conclusão deste trabalho.

À Profª Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes, pois foi em suas aulas, ainda na graduação, que passei a admirar a rainha da matemática (Teoria dos Números).

Aos meus pais, Maria Josinete da Silva e Mauro Ferreira da Silva, por me ajudarem a associar, aos estudos, a oportunidade de um futuro melhor.

À minha família, pela paciência e incentivo, em especial, a meu irmão Mario Ferreira, que muito me aconselhou.

Aos meus companheiros de curso, em especial, aos meus amigos Wendell Wallace, Josieldes Santos e Jamerson Fernando, pelos constantes conselhos e incentivo, durante nossas conversas, além do compartilhamento de conhecimento.

Aos amigos João dos Santos, Josenildo Ferreira, Wagner Alves, Silvia Regina, Rosane Cruz, Maria do Céu, Maria Célia (Celinha), Thaís Morais, Lígia Mychelle e Flávia Freitas, pelo apoio em momentos significativos dessa jornada.

Enfim, a todas as pessoas que de alguma forma colaboraram para a conclusão deste trabalho.

Ao Governo Federal, pelo apoio financeiro.

“Todo conhecimento humano começa com intuições, então passa para os conceitos e termina com ideias.”

Immanuel Kant (1724 - 1804)

Resumo

Este trabalho foi idealizado com o objetivo de contribuir para o ensino-aprendizagem da Indução Matemática no Ensino Básico. Divide-se em três partes: na primeira, é feita uma discussão da teoria com fundamentação matemática que visa subsidiar os professores com embasamento teórico; na segunda, é apresentada uma proposta para Inserção do conteúdo no Ensino Médio em que o aluno, orientado pelo professor, e a partir de realização de tarefas com caráter investigativo, deve assimilar conhecimento; por fim, na terceira, oferecemos uma lista de aplicações do método em proposições da matemática básica que busca incitar o desenvolvimento de outras abordagens que podem vir a ser feitas sobre o tema ao longo do Ensino Médio.

Palavras chave: Indução Matemática, Aplicações, Ensino Médio.

Resumen

Este trabajo fue idealizado con el objetivo de contribuir para la enseñanza y el aprendizaje de la Inducción Matemática en la Enseñanza Básica. Se divide en tres partes: en la primera, es hecha una discusión de la teoría con fundamentación matemática que visa subsidiar los profesores con basamento teórico. En la segunda, es presentada una propuesta para la inserción del contenido en la Enseñanza Secundaria en que el alumno, orientado por el profesor, y a partir de la realización de las tareas con carácter investigativo, debe asimilar el conocimiento. Al fin, en la tercera parte, ofrecemos una lista de aplicaciones del método en proposiciones de la matemática básica que busca incitar el desarrollo de otros abordajes que pueden venir a ser hechos sobre el tema al largo de la Enseñanza Secundaria.

Palabras - llave: Inducción Matemática, Aplicaciones y Enseñanza Secundaria.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No ensino médio, costumeiramente, diversos resultados em matemática são apresentados como verdadeiros, porém sem uma justificativa matematicamente rigorosa e que vá além de exemplificações de casos particulares, deixando a pergunta nas cabeças dos alunos mais críticos: "Será que vale sempre?".

Os PCNEM [2] enfatizam a importância de os alunos conhecerem um sistema dedutivo, analisarem os significados dos postulados e teoremas e, o valor de demonstrações. O mesmo documento esclarece:

> "Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é verdade em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente."

Assim, observamos que os referidos Parâmetros sugerem que devemos dar importância à exploração e validação das verdades matemáticas apresentadas nas aulas do Ensino Médio e, com essa motivação, elaboramos este trabalho.

Considerando os aspectos supracitados, o presente trabalho tem como objetivos: propor a inserção do tema 'Indução Matemática' no decorrer do Ensino Médio Brasileiro; demonstrar diversos resultados deste nível de ensino; servir de subsídio, oferecendo mais uma fonte de investigação sobre o assunto; sugerir uma lista de proposições de matemática básica, cuja ferramenta seja aplicável; além de apresentar um modo de introduzir esse conteúdo no mencionado nível de ensino (uma sequência de atividades).

Inicialmente, no capítulo 2, fazemos uma breve discussão acerca da caracterização dada por Giusepe Peano, sobre $\mathbb{N}$ e apresentamos formalmente o 'Princípio da Indução Matemática', como fruto do Axioma de Indução, fornecendo uma fonte de embasamento matemático da teoria, ao professor.

No capítulo 3, baseados nas ideias de 'sequência didática' e de 'investigação matemática', expomos uma proposta de atividade planejada para a introdução desse conteúdo, com o intuito de fazer com que a aprendizagem dos estudantes ocorra de forma significativa.

Finalizamos, no capítulo 4, oferecendo uma coletânea de aplicações diversas do Princípio da Indução Matemática em proposições de matemática do Ensino Médio, visando oferecer, ao leitor, uma lista de situações na matemática deste nível, em que nosso 'princípio' figure como elemento justificador, ampliando seu leque de demonstrações matemáticas, motivando o desenvolvimento de outras abordagens do tema, ao longo do ensino médio e, assim, aprimorando sua formação profissional.

Capítulo 2

Indução Matemática - Discussão Teórica

Gástev [12], ao falar sobre indução, de modo geral, afirma:

> "indução (ou seja, a sugestão de uma ideia ou uma hipótese) sem dúvida desempenha na matemática um papel importante, mas puramente heurístico: permite adivinhar qual deve ser, segundo todas as aparências, a solução. Mas as proposições matemáticas são demonstradas sempre dedutivamente. Nenhum resultado matemático pode ser considerado verdadeiro, válido, se não foi deduzido das proposições de partida."

Nossa 'Indução Matemática', termo introduzido por Augustus De Morgan[1] e usado por matemáticos como Francesco Maurolico[2] e Blaise Pascal[3], não é uma indução no sentido citado por Gástev, mas sim, um método de argumentação dedutivo

[1]De Morgan, Augustus (1806 - 1871), matemático inglês.

[2]Francesco Maurolico (1494-1575), matemático e astrônomo italiano. Foi o primeiro a fazer uso explícito do Método em 1575

[3]Pascal, Blaise (1623-1662), matemático, filósofo e físico francês. Foi o próximo a usar a ideia, fazendo-o repetidamente no seu trabalho sobre o chamado triângulo de Pascal (c. 1653), que ele chamava de 'triângulo Aritmético'.

que pode ser usado para demonstrar que uma determinada proposição é válida para todos os números naturais ou para todos a partir de um certo ponto. Isto é, responder a questões do tipo: O que vai ocorrer com uma proposição $P(n)$, conforme formos testando valores?; Será que vale para todo número natural?

Neste capítulo, nos apropriaremos do Axioma de Indução de Peano[4] e, como consequência deste, apresentaremos nosso método de demonstração em matemática (que ao longo do trabalho chamaremos de 'Princípio da Indução Matemática', 'Indução Finita' ou apenas de 'Indução Matemática').

(a) Francesco Maurolico

(b) Blaise Pascal

(c) Augustus De Morgan

(d) Giuseppe Peano

[4]Peano, Giuseppe (1858 -1932), matemático italiano.

2.1 Giuseppe Peano e o Axioma de Indução

Giuseppe Peano observou que os os números naturais gozavam de quatro propriedades fundamentais que os caracterizam. A 4ª propriedade é chamada de 'Axioma de Indução' e é de especial importância para o nosso trabalho.

Segundo Donadelli [5]:

> "Os axiomas de Peano apareceram na publicação de 1889 Arithmetic principia: novo methodo exposita, Novo método de exposição dos princípios da Aritmética. Esses axiomas formalizavam a ideia de que todos os números naturais podem ser obtidos a partir do número 1, pela soma sucessiva da unidade."

Tais axiomas podem ser enunciados da seguinte forma:

Axioma 1. *Todo número natural possui um único sucessor;*

Axioma 2. *Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;*

Axioma 3. *Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo* 1 *e chamado de "número um";*

Axioma 4. *Se um conjunto de números naturais contém o número* 1 *e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com* $\mathbb{N}$*, isto é, contém todos os números naturais.*

Esclarecemos o conceito de sucessor de um número $n \in \mathbb{N}$ como sendo o número $n' \in \mathbb{N}$ que vem logo depois de n na sequência dos números naturais. Isto é, o sucessor de 1 é 2, de 2 é 3, ... e o de n é $n' = n + 1$.

2.2 Versões do Princípio da Indução Matemática

Antes de apresentarmos as versões mais comuns encontradas do nosso método de demonstração em estudo, faremos algumas definições e daremos uma roupagem mais conveniente ao nosso Axioma de Indução, pois ,de posse deste, descreveremos e justificaremos as principais formas dos teoremas, que ao longo do nosso trabalho, chamaremos de Princípio da Indução Matemática (PIM) ou apenas de Indução Matemática.

Definição 2.1 (Conjunto Indutivo). *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e $S(X)$ o conjunto dos sucessores dos números naturais pertencentes a X. Diremos que X é um conjunto indutivo quando quando $S(X) \subset X$, ou seja, quando o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X.*

Axioma 5 (Axioma de Indução Reformulado). *Se $X \subset \mathbb{N}$ é um conjunto indutivo e contém o 1 então $X = \mathbb{N}$*

Definição 2.2 (Proposição em $\mathbb{N}$). *Chamaremos de uma proposição em $\mathbb{N}$ uma afirmação P passível de assumir valor lógico de verdadeiro ou falso (princípio do terceiro excluído), não podendo ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo (princípio da não contradição), a depender do valor de $\mathbb{N}$ empregado. Denotaremos por $P(n)$: "expressão com valor lógico a depender do n a ser empregado.".*

O **PIM- 1^a forma**, ilustrado na Figura 2.1, é constituído de duas partes, cada uma de considerável importância, pois, na primeira, mostramos que estamos partindo de uma proposição P verdadeira para o primeiro número natural 1 e, na segunda, garantimos que se a afirmação é verdadeira para um natural $n > 1$ qualquer e isso implica em verdadeira para o seu sucessor $n+1$, então é para todo natural n.

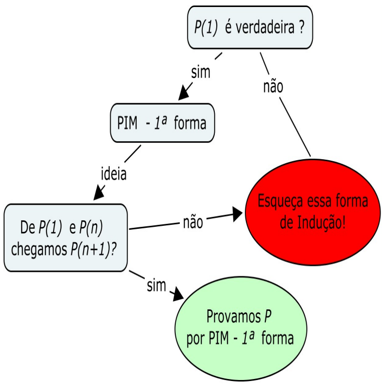


Figura 2.1: Processo do PIM- 1^a forma

Teorema 2.1 (PIM - 1^a forma)**.** *Uma proposição $P(n)$, associada aos números naturais n, é verdadeira para todo n natural quando:*
Parte (i): $P(1)$ é verdadeira;
Parte (ii): Para $n > 1$, se $P(n)$ é verdadeira então $P(n+1)$ é verdadeira.

Demonstração: Seja $X = \{n \in \mathbb{N};\ P(n)\ \ verdadeira\}$, note, pela parte (i), que $1 \in X$ e, pela parte (ii), que X é indutivo. Logo, pelo Axioma de Indução, $X = \mathbb{N}$ e $P(n)$ é verdadeira para todo n natural. ■

Observamos que não é em todos os casos que conseguimos chegar na veracidade de uma proposição para o sucessor de um dado n partindo apenas dessas hipóteses. O **PIM-** 2^a **forma**, ilustrado na Figura 2.2, vem aumentar nosso leque de demonstrações e nos permitir provar que uma proposição é verdadeira para todo n, partindo da veracidade de n com $1 \leq n \leq k$, desde que possamos chegar na veracidade de $P(k+1)$, cobrindo casos não alcançados pelo **PIM-** 1^a **forma**.

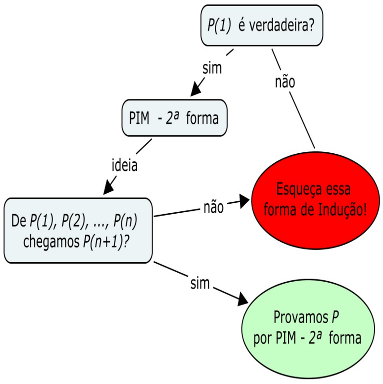


Figura 2.2: Processo do PIM- 2^a forma

Teorema 2.2 (PIM - 2^a forma)**.** *Uma proposição $P(n)$, associada aos números naturais n, é verdadeira para todo n natural quando:*
Parte (i): $P(1)$ é verdadeira;
Parte (ii): Para $n \geq 1$, se $P(n)$ é verdadeira para todo $1 \leq n \leq k$,então $P(k+1)$ é verdadeira.

Demonstração: De fato, nas condições do enunciado, o conjunto X dos números naturais, para o qual $P(n)$ é verdadeira, também satisfaz as condições (i) e (ii) do **PIM-** 1^a **forma**. Do mesmo modo, $X = \mathbb{N}$ e $P(n)$ é verdadeira para todos os números naturais. ■

Até o momento, pensamos em proposições cujas demonstrações começavam com a prova da veracidade para o primeiro valor da sequência natural (0 ou 1) e depois partimos para os valores sequênciais, provando que nossa proposição é válida para todo número natural. Porém, existe um grande número de proposições, cuja validade só pode ser verificada para valores $a \in \mathbb{N}$ maiores que 0 ou 1.

Tendo em vista esse leque de proposições, enunciaremos e justificaremos a seguir alguns princípios que nos servirão de base para o Princípio da Indução Matemática Generalizada (PIMG), que também poderá se apresentar de duas formas e cobrirá uma gama de demonstrações não alcançadas pela 1^a e 2^a forma do PIM.

Proposição 2.1 (Princípio da Boa Ordenação - PBO)**.** *Todo subconjunto não-vazio $A \subset N$ possui um menor elemento.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos admitir que $1 \notin A$, pois ,caso contrário, 1 seria evidentemente o menor elemento de A. O menor elemento de A, cuja existência queremos provar, deverá ser da forma $n + 1$. Devemos ,assim, encontrar um número natural n ,tal que $n+1 \in A$ e, além disso, todos os elementos de A são maiores do que n, logo, maiores do que $1, 2, ..., n$. Em outras palavras, procuramos um número natural n ,tal que $I_n = \{1, 2, ...n\} \subset \mathbb{N} - A$ e $n + 1 \in A$. Com esse objetivo, consideramos o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}.$$

Portanto, X é o conjunto dos números naturais n ,tais que todos os elementos de A são maiores do que n. Como estamos supondo que $1 \notin A$, sabemos que $1 \in X$. Por outro lado, como A não é vazio, nem todos os números naturais pertencem a X, ou seja, temos $X \neq \mathbb{N}$. Pelo axioma de Indução, vemos que o conjunto X não é indutivo, isto é, deve existir algum $n \in X$,tal que $n + 1 \notin X$. Isto significa que todos os elementos de A são maiores do que n ,mas, nem todos são maiores do que $n+1$. Como não há números naturais entre n e $n+1$, concluímos que $n+1$ pertence a A e é o menor elemento de A. ■

Proposição 2.2. *Se A é um conjunto indutivo que contém o número natural $a > 1$, então A contém todos os números naturais maiores do que a.*

Demonstração: Suponhamos que existam números naturais, maiores do que a, não pertencentes ao conjunto indutivo A. Pelo PBO há um elemento b , que é o menor desses números. Com $b > a$, temos que $b = c + 1$ (b é sucessor de algum natural c) e, pela definição de b, tem-se necessariamente que $c \in A$. Mas, como A é indutivo, isto obriga que $b = c + 1 \in A$, gerando uma contradição, pois havíamos admitido que $b \notin A$.

Logo, A tem que conter todos os números naturais maiores do que a. ∎

O **PIMG - 1^a forma**, ilustrado na Figura 2.3, assim como o PIM é constituído de duas partes, ambas importantes, na primeira mostramos que estamos partindo de um fato P verdadeiro para um primeiro número natural a e ,na segunda, garantimos que se a afirmação é verdadeira para um natural $n > a$ qualquer e isso implica em verdadeira para o seu sucessor $n+1$, então é para todo natural n.

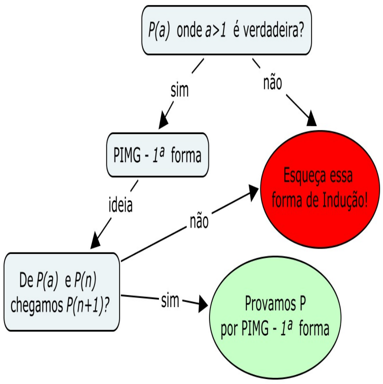


Figura 2.3: Processo do PIMG- 1^a forma

Teorema 2.3 (PIMG - 1^a forma)**.** *Uma proposição $P(n)$, associada aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \geq a$ natural quando:*
Parte (i) $P(a)$ é verdadeira;
Parte (ii) Para $n \geq a$, se $P(n)$ é verdadeira então $P(n+1)$ é verdadeira.

Demonstração: Seja $X = \{n \in \mathbb{N};\ P(n)\ \ verdadeira\}$, note que $a \in X$ e X é indutivo. Logo, pela proposição (2.2), $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq a$. ∎

Assim como o PIM - 2^a forma difere do PIM -1^a forma por explorar casos que exigem mais hipóteses de indução, o PIMG -2^a forma, ilustrado na Figura 2.4, que é a forma mais geral do Princípio da Indução Matemática, vem cobrir todos os casos restantes de proposições em $\mathbb{N}$ que possam vir a ser demonstradas por Indução Matemática.

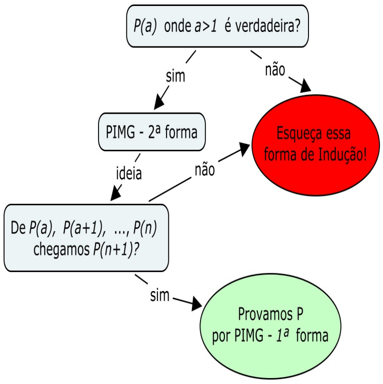


Figura 2.4: Processo do PIMG- 2^a forma

Teorema 2.4 (PIMG - 2^a forma). *Uma proposição $P(n)$, associada aos números naturais n, é verdadeira para todo $n \geq a$ natural quando:*
Parte (i) $P(a)$ é verdadeira;
Parte (ii) Para $n \geq a$, se $P(n)$ é verdadeira para todo $a \leq n \leq k$ então $P(k+1)$ é verdadeira.

Demonstração: Assim como na demonstração anterior, o conjunto indutivo X dos números naturais, para o qual $P(n)$ é verdadeira, também satisfaz a condição (i) do PIMG- 1^a forma. Do mesmo modo, pela proposição (1.2), $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq a$. ■

2.3 Considerações sobre o Uso

Vejamos o quadro a seguir que resume a seção anterior:

Princípio da Indução Matemática		
Teste Inicial	Hipóteses necessárias para chegarmos a $P(n+1)$	Forma usada
P(1)	P(1) e P(n)	1ª forma do PIM
P(1)	P(1), P(2),...P(n)	2ª forma do PIM
P(a>1)	P(a) e P(n)	1ª forma do PIMG
P(a>1)	P(a), P(a+1),...,P(n)	2ª forma do PIMG

Pelo já exposto, uma vez observado que tratamos de uma proposição em $\mathbb{N}$, podemos dizer que uma demonstração bem sucedida, começa pela escolha da forma (PIM ou PIMG) mais adequada ao problema proposto, cuja decisão está dependente da validação do primeiro valor para o qual queremos provar a proposição em questão (parte (i) do princípio ou Passo base); e ainda da necessidade de hipóteses para se chegar na validade da proposição para o sucessor de um valor natural arbitrário (parte (ii) do princípio ou passo indutivo).

Um consideração de fundamental importância é que antes de iniciarmos uma demonstração por Indução Matemática, nos façamos a seguinte pergunta: "Onde queremos chegar?". Ora, esperamos obter a validade de $P(n+1)$ e, partindo dessa pergunta, podemos traçar estratégias para isso (veja a figura 2.5).

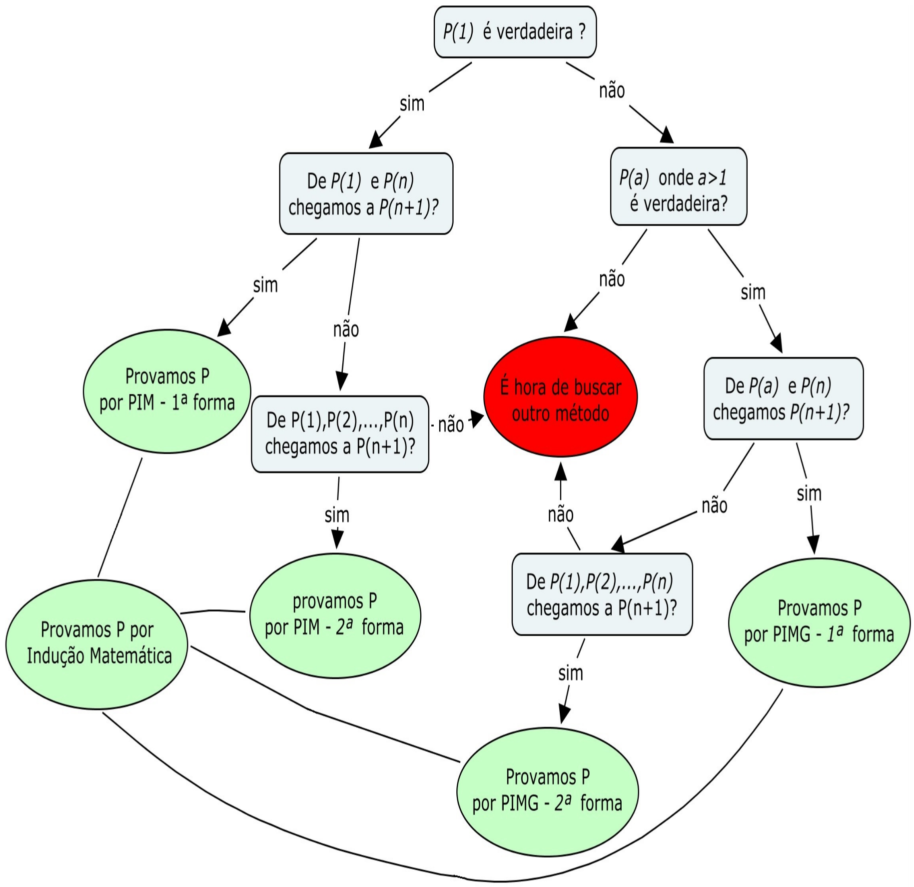


Figura 2.5: Processo de Indução Matemática

Outra consideração relevante é o cumprimento adequado das duas partes que constituem nosso método de demonstração. O mau uso ou deslizes de interpretação nessas etapas pode passar ideias falsas e induzir a erros na demonstração, podendo levar a "provas" de absurdos.

Para melhor fixação das ideias, vejamos os exemplos seguintes que refletem os erros clássicos mais frequentes:

Exemplo 2.1 (Mau uso do Princípio - Pulando o passo base)**.** *Todo natural n é igual a $1 + n$*

Demonstração: Supomos que $n = 1 + n$. Mas sabemos que podemos adicionar 1 em ambos os membros da igualdade. Daí, $n + 1 = 1 + n + 1 = 1 + (n + 1)$.

Logo, por Indução Matemática, n é igual a $1 + n$. $\blacksquare$

ERRO: Obviamente a parte (i) foi pulada. $1 < 1 + 1 = 2$.

Exemplo 2.2 (Mau uso do Princípio - falha no passo base). *Se $a \neq 0$ então $a^{n-1} = 1$ para todo $n > 0$ natural.*

Demonstração: Seja P(n): $a^{n-1} = 1$ para todo $n > 0$ natural.

Parte (i): P(1) é verdadeira pois $a^{1-1} = 1$.

Parte (ii): Assumindo $a^{n-1} = 1$ para algum n, temos $a^{(n+1)-1} = a^n = a^n.(\frac{a^{n-2}}{a^{n-2}}) = \frac{a^{n-1}.a^1.a^{n-2}}{a^{n-2}} = \frac{1.1.1}{1} = 1$.

Logo, por Indução Matemática, $a^n = 1$ para todo n natural. $\blacksquare$

ERRO: Observamos o uso de hipótese não válida, parte (ii). Sabemos que $a^1 = 1$ só é verdade quando $a = 1$, isso ocorreu devido a investigação incorreta do passo base. A proposição falha logo no $n = 2$, assim não poderíamos usar a indução iniciando em $n = 1$.

Exemplo 2.3 (Mau uso do Princípio - falha no passo indutivo). *Todo conjunto não vazio tem apenas 1 elemento.*

Demonstração: Seja $P(n)$: Todo conjunto não vazio tem apenas 1 elemento.

Parte (i): $P(1)$ é obviamente verdadeira.

Parte (ii): Assumindo $P(k)$ verdadeira para todo $1 < k < n$ e considerando $A = \{x_1, x_2, ...x_n, x_{n+1}\}$ temos $x_1 = x_2 = ... = x_n$ e $x_2 = x_3 = ... = x_{n+1}$. Daí, $x_1 = x_2 = ... = x_n = x_{n+1}$.

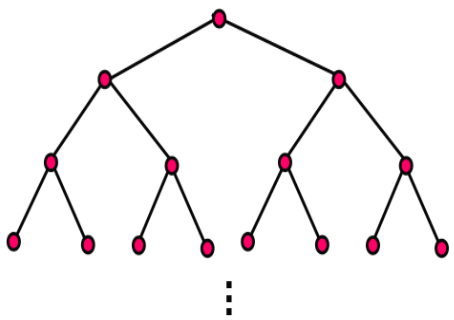
Logo, por Indução Matemática, todo conjunto não vazio tem apenas 1 elemento.

$\blacksquare$

ERRO: Podemos observar que a parte (ii) da demonstração não foi satisfeita. Veja que a organização dos elementos promove uma "distorção da verdade", pois supõe que os dois conjuntos, aos quais se aplicou a suposição de indução, têm um elemento comum, mas isto falha quando $n = 2$ (não podemos separar dois elementos desconhecidos e afirmar que são iguais), o que nos mostra a importância da investigação das hipóteses auxiliares usadas.

Agora, vejamos exemplos em que o método foi usado corretamente:

Exemplo 2.4 (Uso do PIM - 1^a forma)**.** *Considere que a árvore genealógica de uma família apresenta a seguinte característica fundamental: cada casal tem sempre dois filhos e cada um desses filhos também tem dois filhos, conforme ilustração a baixo.*



Geração	Descendentes
1	$2^1=2$
2	$2^2=4$
3	$2^3=8$
...	...

Figura 2.6: Árvore Genealógica

Podemos perceber que a geração n terá 2^n descendentes. Mas precisamos provar essa conjectura.

Demonstração: Seja $P(n)$: A geração n terá 2^n descendentes.

Parte (i)*:* A primeira geração terá $2 = 2^1$ filhos.

Parte (ii)*:* Observe que cada descendente tem 2 filhos, de modo que o número de descendente da geração $k+1$ será o dobro da geração k. Ou seja, $2.2^k = 2^{k+1}$.

Logo, por Indução Matemática, a geração n terá 2^n descendentes. ■

Exemplo 2.5 (Uso do PIM - 1^a forma)**.** *Calcular a soma* $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)}$.

Observamos que:
$S_1 = \frac{1}{1.2}$
$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}$
$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$
e assim sucessivamente.

As igualdades acima são fortes indicadores de que $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$. Mas, será que isso é verdade e vale sempre?

Demonstração: Seja $P(n)$: $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$.

Como $P(1)$ é verdadeira, tentaremos a 1ª forma do PIM.

Parte (i): $P(1)$ é verdadeira, já verificado.

Parte (ii): Supomos que para $n > 1$, $P(n)$ seja verdadeira. Isto é, $S_n = \frac{n}{(n+1)}$.

Como $S_{n+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} + \frac{1}{(n+1).(n+2)}$
$= S_n + \frac{1}{(n+1).(n+2)}$ (substituindo S_n por $\frac{n}{(n+1)}$)
$= \frac{n}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1).(n+2)}$ (e organizando os termos)
$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1).(n+2)}$
$= \frac{n+1}{n+2}$ (concluímos a parte *ii*)

Logo, por Indução Matemática, segue que $S_n = \frac{n}{(n+1)}$ para todo natural n. ■

Exemplo 2.6 (Uso do PIM - 2ª forma)**.** *Dada a sequência numérica onde* $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ *e* $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, *vamos mostrar que* $a_n = 2^n$ *para todo* n *natural.*

Como $P(1)$ é verdadeira, poderíamos tentar a 1ª forma do PIM, mas, ao fazermos essa aplicação, sentiremos a necessidade de uma hipótese de indução mais forte, para chegarmos no $P(n+1)$, pois a_n está dependente de valores anteriores ($a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ hipóteses de indução) e o a_{k+1} fica facilmente expresso por combinações lineares destes, sendo assim, a 2ª forma do PIM se adequa melhor.

Demonstração: Seja $P(n)$: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ e $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \Rightarrow a_n = 2^n$ para todo n natural.

Parte (i): $a_0 = 1 = 2^0$, então $P(0)$ é verdadeira.

Parte (ii): Supomos que $P(n)$ seja verdadeira para todo $1 \leq n \leq k$. assim, $a_{k+1} = 4a_k - 4a_{k-1}$ (trocando a_k por 2^k e a_{k-1} por 2^{k-1})
$= 4.2^k - 4.2^{k-1}$ (e organizando os termos)
$= 2^{k+2} - 2^{k+1}$
$= 2^{k+1}(2-1)$
$= 2^{k+1}$(concluímos a parte ii).

Logo, por Indução Matemática, $a_n = 2^n$ para todo n natural. ■

Exemplo 2.7 (Uso do PIMG - 1^a forma)**.** *$n^2 > 2n$ para todo $n > 2 \in \mathbb{N}$*

Sendo $3^2 = 9 > 2.3 = 6$, temos que os valores de verdade começam em $P(3)$. Então, tentaremos uma demonstração pela 1ª forma do PIMG.

Demonstração: Seja $P(n)$: $n^2 > 2n$ para todo $n > 2 \in \mathbb{N}$.

Parte (i): $P(3)$ é verdadeira.

Parte (ii): Supomos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n > 3$. Isto é, $n^2 > 2n$.

Mas $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ e $n^2 > 2n > 2.3 > 1$, assim, trocando n^2 por 1 ficamos com $(n+1)^2 > 1 + 2n + 1 = 2n + 2 = 2(n+1)$.

Logo, por Indução Matemática, $n^2 > 2n$ para todo $n > 2$.

Exemplo 2.8 (Uso do PIMG - 2^a forma)**.** *Prove que qualquer quantia para postagem maior ou igual a* 12 *centavos pode ser composta usando-se apenas selos de* 4 *e* 5 *centavos.*

Observe que queremos provar que todo inteiro maior ou igual a 12 pode ser representado pela soma de um múltiplo de 4 com um de 5.

Como $12 = 4.3 + 5.0$, temos que o valor de verdade incial é o $P(12)$, indicador de que devemos usar a PIMG.

Usaremos indução sobre k. veja que se usássemos o PIMG - 1^a forma, o próximo n seria $12 + 4 = 16$, ou seja $n + 1 = 16$ e não se conseguiria provar para $P(13)$. São necessários, então, outros casos anteriores a $P(k+1)$, e a partir daí, usar usar a 2ª forma do PIMG, mas, antes observe que $13 = 2.4 + 5$ e $14 = 4 + 2.5$.

Demonstração: Seja P(n): Se $n \geq 12$ natural, então $n = 4a + 5b$ onde a e b são também naturais.

Parte (i)*:* $P(12)$ é verdadeira (visto anteriormente).

Parte (ii)*:* Supomos que $P(n)$ seja verdadeira para todo $12 \leq n \leq k$.

Porém, $k+1 = k-3+3+1 = k-3+4$, e como $P(k-3)$ é verdadeira por (ii), isto é $k-3 = 4a' + 5b'$. Fazendo a devida substituição, temos $k+1 = 4a' + 5b' + 4 = 4.(a'+1) + 5.b'$.

Assim, por Indução Matemática, $n = 4a + 5b$ para todo natural $n \geq 12$. ■

Capítulo 3

Uma Proposta para Inserir o Tema no Ensino Médio

Santos [11], ao tratar do uso de demonstrações no ambiente escolar, a partir de Indução Matemática, defende o uso dessa ferramenta, já no ensino fundamental, pois é quando inicia-se o estudo da Álgebra de uma forma mais independente e, ao mesmo tempo, necessária para outras áreas da Matemática. Ele acredita que ao se procurar trabalhar uma linguagem matemática mais clara, com conceitos mais bem definidos, tem-se a possibilidade de se aprofundar mais na ideia de indução, partindo para um manuseio algébrico.

Já no 8º ano do ensino fundamental, o mesmo sugere que seja trabalhada a conjecturação de casos clássicos como 'O Cálculo da Soma dos ângulos internos de um polígono convexo' e o 'Cálculo das diagonais de um polígono'. Apesar de assumir que não é simples enxergar algumas relações, envolvendo as grandezas trabalhadas, no entanto, afirma que isso não impede que algum aluno consiga conjecturar uma fórmula.

No Ensino Médio, a Indução Matemática se mostra como uma ferramenta eficaz e viável para responder muitas das indagações do tipo: "Será que vale sempre?".

Não ao acaso que Hefez [7] cita:

> "Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de Ensino Médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista."

Com o objetivo de introduzir o método de demonstração por Indução Matemática no Ensino Médio Brasileiro e com o intuito de facilitar a assimilação dos novos conceitos, ao valorizar o conhecimento prévio dos alunos, propomos uma sequência de atividades, baseada nesses resultados citados por Santos [11] (fórmulas para o cálculo das diagonais e das somas dos ângulos internos de um polígono convexo) e em problemas básicos de igualdades e desigualdades.

3.1 Referencial Metodológico

A fim de atingir os objetivos de: introduzir os conceitos básicos da teoria; desenvolver mecanismos de reconhecimento de padrões, de formulação e reformulação de conjecturas, promover o reconhecimento de situações em que podemos tentar uma demonstração por Indução Matemática e a aplicação do método; propomos uma 'sequência didática' cujas atividades foram elaboradas inspiradas por ideias da 'investigação matemática'.

Conforme Peretti e Costa [10]:

> "A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido."

Para Guimarães e Miranda [6]:

> "A investigação matemática é o momento de descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades (PONTE, 2006, p. 13). Para que nenhuma etapa do aprendizado se perca, é preciso, com base nos estudos a partir de PONTE (2006) e ZABALA (2007), que a sequência didática com caráter investigativo seja elaborada a partir de uma organização que envolva os processos de:
>
> - exploração e formulação de questões: quando deve acontecer a apresentação por parte do(a) professor(a) de uma situação problemática em relação a um tema.
> - formação de conjecturas: momento em que pode acontecer o diálogo entre professor(a) e alunos, com a comparação entre os diferentes pontos de vista e a etapa de generalizações.
> - testes e reformulação: essa é a etapa em que os alunos devem resolver exercícios de memorização quando os alunos poderão colocar em prática o que foi firmado nas etapas anteriores. É também o momento de o professor protagonizar o fechamento das conclusões.
> - justificação e avaliação: uma prova escrita (avaliativa ou não) deve ser aplicada aos alunos, e após corrigidas, o professor deve comunicar o resultado para a turma e fazer uma avaliação final do trabalho, levantando os principais pontos em que o aprendizado não aconteceu de forma satisfatória."

3.2 Público Alvo e Perfil da Turma

Nossa sequência de atividades foi desenvolvida para ser aplicada em turmas de estudantes do Ensino Médio, preferencialmente nas turmas de 1ª série pois é nesse momento que é feito o estudo de conjuntos numéricos e retrabalhada a ideia de número natural; e além disso, consideramos que as demonstrações por indução deverão continuar a ser aplicadas em situações diversas, nas séries seguintes.

É pertinente observar, ao considerar os recém chegados ao ensino médio, que durante a aplicação da sequência, muitas dificuldades poderão surgir. Dentre estas, destacamos que:

- alguns alunos não estão acostumados com leitura, muito menos com a de enunciados matemáticos, e isso acarretará sérias dificuldades no entendimento das questões propostas nas folhas de tarefas;
- outros não conseguirão, de imediato, estabelecer as relações existentes entre os fatos expostos ou visualizados nas figuras;
- outros terão dificuldades em relacionar os fatos observados de modo a seguir uma sequência lógica que levaria à conclusão da demonstração;
- e outros conseguirão relacionar os fatos e seguir uma linha correta de raciocínio, porém, terão dificuldade de transferir isso para a escrita de argumentos precisos, em linguagem matemática; o que pode impedir a finalização da demonstração, com a escrita da mesma.

3.3 Procedimentos Metodológicos

Acreditamos que muitas dificuldades surgirão ao longo do trabalho, mas, acreditamos também que essas dificuldades possam ser contornadas ou, ao menos, amenizadas. Para que isso ocorra, recomendamos que o professor atue sempre mantendo um diálogo com os alunos, enquanto eles trabalham nas tarefas propostas, estimulando a comunicação entre os componentes dos grupos e assumindo papéis que favoreçam a aprendizagem, como: dar dicas; apontar erros; sugerir caminhos e promover, no término de cada momento, uma discussão coletiva, na qual devem ser discutidas as conclusões alcançados pelos grupos (formados por dois ou três alunos), nas tarefas, e confirmados ou refutados os resultados obtidos.

Salientamos que não temos a intenção de conseguir, através da sequência de atividades, habilitar todos os alunos a resolver as demonstrações matemáticas, que lhes sejam apresentadas, mas sim, que esta desperte uma posição mais crítica, em relação às verdades matemáticas estabelecidas neste nível de ensino, de tal forma que os alunos percebam a necessidade de justificar essas afirmações, recorrendo, para isso, às demonstrações por Indução Matemática.

A respeito disso, é interessante o que diz Santos [11]:

> "a educação básica necessita de um ensino de matemática menos voltado para resultados e mais voltados para o caminho percorrido para se alcançar. O Princípio de Indução Finita permite um contato de uma forma simples ao cerne da matemática, que não busca resultados, busca caminhos, e possibilidades de se alcançar esse resultado."

3.4 Recursos de Ensino

Para aplicação da sequência, precisaremos de lousa, caneta para lousa, régua, transferidor, computador e projetor; e os alunos, de lápis, borracha, folhas para rabiscos, folhas de tarefas, régua e transferidor.

3.5 Quadro Sintético das aulas e Objetivos

Buscando uma melhor organização do nosso trabalho, dividimos a sequência de atividades em três etapas, cada qual com seus objetivos específicos, porém, interligados. Nelas buscaremos envolver os alunos na realização de tarefas (inseridas nos 7 momentos em que subdividimos essas etapas), geradas a partir de problemas motivadores, em que os alunos serão incentivados a trabalhar, produtivamente, num processo de investigação, formulando questões, processando as informações fornecidas, ensaiando e testando conjecturas e, por fim, provando-as por Indução Matemática.

Cronograma da Sequência				
Etapa	**Momento**	**Previsão**	**Atividade**	**Objetivos**
1	1	2 aulas de 50 min.	O Problema do Cálculo das Diagonais de um Polígono Convexo	Identificar proposições em $\mathbb{N}$, investigar casos, perceber regularidades, formular e reformular questões e elaborar conjecturas.
	2		As Proposições em $\mathbb{N}$	
	3		Problemas de Igualdade e desigualdade. .	
2	4	2 aulas de 50 min	O problema dos Infinitos Dominós enfileirados	Reconher proposições que podem vir a ser demonstradas por Indução Matemática e aplicar o Método.
	5		Solução do Problema das Diagonais	
	6		Solução dos Problemas de Igualdade e desigualdade	
3	7	2 aulas de 50 min.	Soma dos ângulos Internos de um Polígono Convexo	Realizar a avaliação e fechamento da sequêcia e apresentar as considerações finais.

3.6 Avaliação

Buscando avaliar da melhor maneira possível e considerando tanto a produtividade dos alunos nos grupos, quando a individual, propomos que a avaliação desse trabalho seja feita através da análise das atividades resolvidas, da observação, das anotações feitas pelos alunos, durante a aplicação das tarefas; e por uma atividade avaliativa (última folha de tarefas) escrita, a ser aplicada, individualmente, e sem consultas, no término da sequência. Para que isso ocorra de modo mais satisfatório, após cada aula, sugerimos o preenchimento de uma folha de registro (veja APÊNDICE A, página 75) que elaboramos para facilitar a organização e auxiliar a visualização das conquistas dos alunos.

3.7 Desenvolvimento da Etapa I

Nessa etapa, esperamos que o desenvolvimento das atividades leve os alunos a investigar casos; perceber regularidades; fomular questões e, por consequência, elaborar conjecturas, que serão validadas em momentos futuros, nos quais teremos a posse do 'Princípio da Indução Matemática'.

Antes de iniciarmos as atividades, sugerimos que seja feito uma roda de conversa para apresentar a proposta da sequência didática, comentar as atividades que serão desenvolvidas e eliminar eventuais dúvidas.

É importante esclarecer os objetivos a serem alcançados, os procedimentos que serão executados e a postura que os alunos deverão adotar durante a realização das tarefas propostas, em toda sequência didática. Os alunos devem estar conscientes dos papéis de investigadores que exercerão nos diversos momentos dessa sequência didática.

Sugerimos que seja entregue, aos alunos, os recursos materiais (lápis, borracha, régua e folhas para rabiscos) que serão usados para a realização das tarefas e que seja feito a divisão da turma em pequenos grupos de dois ou três alunos, que devem seguir sem alterações ao longo da sequência didática.

Agora, após a organização da sala, podemos iniciar efetivamente as atividades.

3.7.1 O Problema das Diagonais de Um Polígono Convexo

Inicie, de modo expositivo e dialogado, apresentando o problema das diagonais de um polígono convexo.

Quantas diagonais tem um polígono convexo qualquer?

O aluno deverá se perguntar o que acontecerá com esse valor conforme o número de lados do polígono seja aumentado.

Aplique a primeira folha de tarefa e, após resolução desta, promova o compartilhamento dos resultados obtidos pelos grupos, com a turma conduzindo uma discussão sobre os diferentes pontos de vista, visando culminar com a elaboração de conjecturas e com o questionamento: "Será $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ válida para todos os polígonos convexos?" (que será provado em momento futuro, por Indução Matemática).

Sugestões de Dicas para os Alunos

- Usem as informações obtidas nas contas já feitas, isso pode facilitar cálculos;
- Relacionem as figuras em estudo com as já estudadas nos ítens anteriores, isso também pode acelerar cálculos e possibilitar reconhecimento de regularidades;
- A partir de operações básicas (multiplicação e divisão), sempre busquem escrever cada valor D_n obtido em função do n correspondente, de modo a chegar na fatoração de D_n;
- Busquem, constantemente, regularidades nos resultados;
- Observem cuidadosamente as figuras. Elas são fontes de informações, como:
  - Ao escolher um vértice, vemos que o número de diagonais que saem dele é sempre o número de vértices menos 3 (ele não forma diagonal com os dois vértices consecutivos e nem com ele próprio);
  - outra diagonal é o segmento formado pelos vértices consecutivos ao vértice escolhido;
  - as demais serão as diagonais do polígono inscrito formado pelos outros vértices.

Tarefa 1 - Investigando o Número de Diagonais de um Polígono Convexo

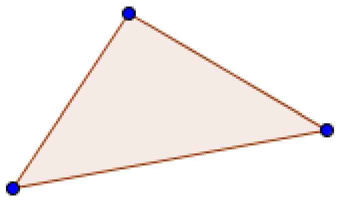
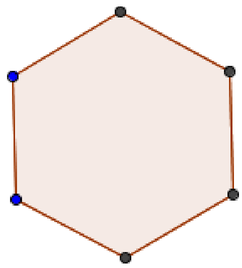
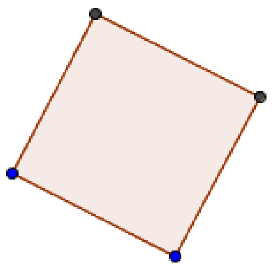
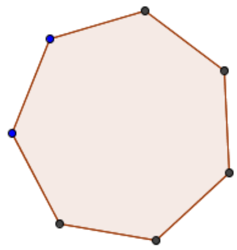
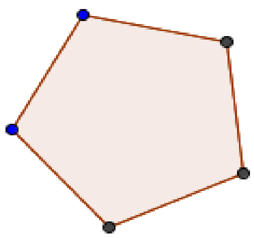
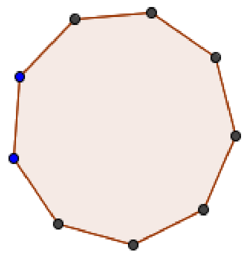
Alunos(as):

____

____

____

1) Usando lápis e régua, trace e determine o número de diagonais de cada polígono a seguir:

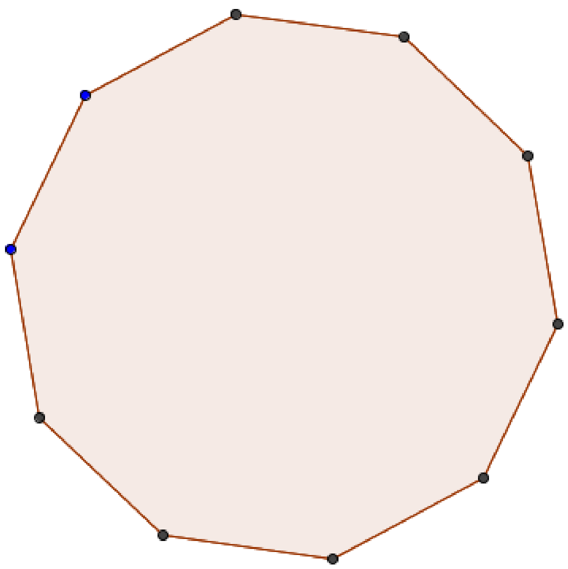
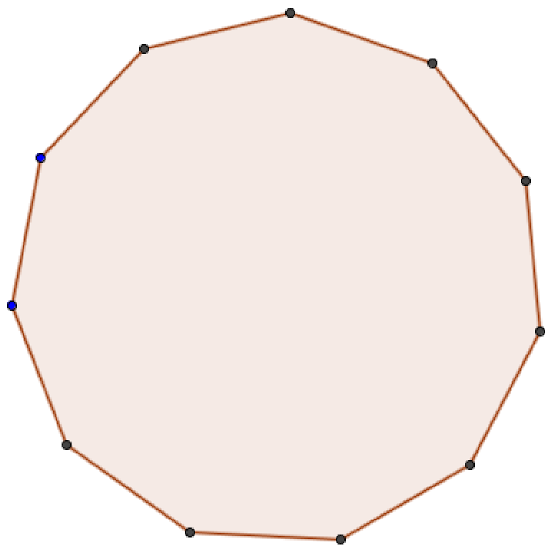
 *D(3)=*	 *D(6)=*
 *D(4)=*	 *D(7)=*
 *D(5)*	 *D(8)=*

2) Organize os dados acima , na tabela a seguir, e preencha a terceira coluna, baseando-se nos resultados das duas primeiras.

Número de lados do polígono (*n*)	Número de diagonais *Dn*	Fatoração de *Dn* em função de *n*

3) É possível expressar os resultados acima em função e *n*? Que conjectura você pode fazer acerca de *Dn*?

4) De posse das figuras a seguir, teste a validade da conjectura elaborada na questão anterior.

Cálculo pela fórmula para $n=10$:	Cálculo pela fórmula para $n=11$:
	
Contagem visual para $n=10$:	Contagem visual para $n=11$:

5) A conjectura ainda está valendo? Se não, reveja seus resultados anteriores e apresente uma reformulação da conjectura.

3.7.2 Investigação de Proposições em $\mathbb{N}$

Nesse momento, recomendamos a conceituação, de modo expositivo e dialogado, de uma proposição P como uma afirmação passível de assumir valor lógico de verdadeiro ou falso (princípio do terceiro excluído), não podendo ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo (princípio da não contradição). É importante deixar claro que aqui trataremos de proposições associadas a números naturais, que são proposições, cujo valor de verdade depende do valor da variável n que venhamos a aplicar na mesma.

Esperamos que essa atividade formalize o conceito de Proposição em $\mathbb{N}$ e insite os alunos a reconhecer, investigar e conjectuar quando colocado diante de uma situação problema.

É interessante a apresentação de um modelo, que será usado ao longo do estudo, como o sugerido a baixo:

Seja $P(n)$**: "expressão com valor de verdadeiro ou falso a depender do** n**"**

E de uma sequência de exemplificações, como a listada a seguir:

Exemplo 3.1. *Será possível fatorar a soma dos n primeiros números ímpares da sequência natural?*

Investigando casos particulares:

n	Soma dos n Primeiros Ímpares	Resultado
1	1	1
2	1+3	4
3	1+3+5	9
4	1+3+5+7	16
5	1+3+5+7+9	25

De posse dos dados da tabela acima, até $n = 5$, percebemos que:

$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$

$n = 2 \Rightarrow 4 = 2^2$

$n = 3 \Rightarrow 9 = 3^2$

$n = 4 \Rightarrow 16 = 4^2$

$n = 5 \Rightarrow 25 = 5^2$

...

Os alunos devem ser levados a observar que os casos acima nos conduz a proposição $P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

É importante que os alunos percebam que a quantidade de valores, testados e verificados como verdadeiros, são indicadores de que a proposição pode ser verdadeira para outros e até para todos os naturais, porém ainda não podemos fazer essa generalização, pois não sabemos o que pode ocorrer com valores maiores. Por enquanto temos apenas conjecturas.

Exemplo 3.2. *Considerando as expressões n^2 e $2n + 1$, temos que seus valores numéricos em relação aos números naturais dependem do $n \in \mathbb{N}$ a ser empregado.*

Objetivando comparar essas expressões , sugerimos o uso de uma tabela, na qual, podemos registrar os dados e, em seguida, observar os resultados.

n	n^2	**Sinal** ($<$, $>$**ou** $=$)	$2n + 1$
1	$1^2 = 1$	$<$	$2.1 + 1 = 3$
2	$2^2 = 4$	$=$	$2.2 + 1 = 5$
3	$3^2 = 9$	$>$	$2.3 + 1 = 7$
4	$4^2 = 16$	$>$	$2.4 + 1 = 9$
5	$5^2 = 25$	$>$	$2.5 + 1 = 11$

Para estudo do caso, defina a proposição $P(n)$: $n^2 > 2n+1$ e os faça observar o que ocorre ao substituirmos os naturais $1, 2, 3, 4$ e 5 na afirmativa $P(n)$. Isto é:

$P(1)$ é falsa pois $1^2 = 1 < 2.1 + 1 = 3$

$P(2)$ é falsa pois $2^2 = 4 = 2.2 + 1 = 5$

$P(3)$ é verdadeira pois $3^2 = 9 > 2.3 + 1 = 7$

$P(4)$ é verdadeira pois $4^2 = 16 > 2.4 + 1 = 9$

$P(5)$ é verdadeira pois $5^2 = 25 > 2.5 + 1 = 11$

É importante que os alunos sejam instigados a fazerem conjecturas do que estão observando. Mostre que para os valores 1 e 2, a proposição é falsa, porém, passa a ser verdadeira para os valores 3, 4 e 5; e intuitivamente percebemos que para valores maiores, isso também ocorre, mas, não sabemos o que pode ocorrer com valores maiores, ficando apenas com uma conjectura, $P(n)$: $n^2 > 2n+1$ para $n > 2$.

3.7.3 Problemas de Igualdades e Desigualdades

Nessa ocasião, aplicamos a segunda folha de tarefas para que os alunos ponham em prática as observações do momento anterior e façam suas próprias verificações.

Assim como no problema das diagonais, esperamos, que após a aplicação da folha de tarefa e promoção das discussões dos resultados pelos grupos, a atividade culmine com a elaboração de conjecturas e com os questionamentos: “Será que a soma dos n primeiros números naturais pares é $n(n+1)$ sempre?” e “$n^2 < 2^n$ sempre que $n > 3$?” (que serão provadas em momento futuro por Indução Matemática).

Consideramos também que já é o momento de os alunos exigirem uma justificativa para os “fatos” observados, é esperado que eles sintam a necessidade da validação dessas conjecturas e por isso devemos introduzir o “Princípio da Indução Matemática”.

Sugestões de Dicas para os Alunos

- Busquem usar as informações obtidas nas contas já feitas. Isso pode facilitar cálculos e possibilita a observação de possíveis regularidades;
- Comparem os resultados obtidos no item em estudo com os anteriores;
- Busquem, constantemente, regularidades nos resultados;
- A partir de operações básicas (multiplicação e divisão), tentar escrever cada valor obtido, em função do valor correspondente, na coluna n (caso da igualdade);
- Relacionem os valores da coluna "resultados" com seus correspondentes na coluna n (caso da igualdade);
- Observem possível ocorrência de mudança de comportamento na coluna " sinal ($<$, $>$ ou $=$)" no resultado de um ítem em estudo, em relação ao ítens, anteriorermente, verificados (caso da desigualdade).

Observação: De modo opcional, poderíamos fazer uso do laboratório de informática da escola (veja APÊNDICE C, página 84).

Tarefa 2 – Investigando uma Igualdade e uma Desigualdade

Alunos(as):
____
____
____]

Atividade 1 – Investigando uma Igualdade

1) É possível fatorar a soma dos n primeiros números pares naturais? Tente fazer isso em função de *n*.

Teste o *1º* número par:
Teste até o *2º* número par:
Teste até o *3º* número par:
Teste até o *4º* número par:
Teste até o *5º* número par:
Teste até o *6º* número par:

2) Organize os dados acima na tabela a seguir e preencha a terceira coluna, baseando-se nos resultados das duas primeiras.

Número (n)	Valor da Soma	Fatoração da soma

3) Que conjectura você pode fazer acerca da fatoração da soma $2+4+6+...+2.n$?

4) Teste a validade da conjectura elaborada na questão anterior para outros valores de *n*.

5) A conjectura ainda está valendo? Se não, reveja seus resultados anteriores e apresente uma reformulação da mesma.

Atividade 2 – Investigando uma Desigualdade

2) Compare n^2 com 2^n para os valores naturais de *n*.

n	n^2	Sinal de desigualdade (< ou >) ou de igualdade (=)	2^n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

3) Que conjectura você pode fazer de posse dos dados da tabela?

4) Teste a validade da conjectura elaborada na questão anterior para outros valores de *n*.

5) A conjectura ainda está valendo? Se não, reveja seus resultados e apresente uma reformulação da conjectura.

3.8 Desenvolvimento da Etapa II

Nessa etapa, esperamos que o desenvolvimento das atividades leve os alunos a reconhecerem, quando deparados com certos problemas, que estão tratando de proposições em $\mathbb{N}$ e que Indução Matemática pode ser aplicada como método de demonstração e, a partir disso, tente aplicá-la.

Como os alunos já devem estar conscientes da postura que devem adotar e da metodologia usada no decorrer das tarefas, sugerimos apenas que seja feita a apresentação da nova proposta de atividade e dos novos objetivos.

Assim como na etapa anterior, após a entrega dos recursos materiais (agora lápis, borracha e folhas para rabiscos) e da organização da sala, podemos iniciar efetivamente as atividades.

3.8.1 O Problema dos Infinitos Dominós Enfileirados

Nesse momento, compartilhamos da opinião de Pereira [9], que ao falar sobre o efeito dominó, diz:

> "Esta prática traduz, em essência, a ideia central por trás do Principio da Indução Finita e a expressão efeito dominó, comumente utilizada na língua portuguesa, se apropria bem ao seu significado".

Com base nessas afirmações, pretendemos introduzir nosso método de demonstração de modo prático. Para tal feito, sugerimos que seja realizada uma analogia do mesmo, com a queda de dominós. Acreditamos que os alunos perceberão mais facilmente a lógica do Método da Indução Matemática, ao pensarem no efeito dominó.

Portanto, é interessante que o professor apresente um dominó, aos alunos, e exponha a situação na prática conforme a Figura 3.1.

Figura 3.1: Produzindo o Efeito Dominó

Considere que cada dominó, de uma infinita fila de dominós colocados em pé, representa uma aplicação de uma proposição em $\mathbb{N}$. Suponha que a queda de um dominó representa a validade da proposição para o número natural associado a ele. Isto é, a queda do dominó da posição n representa a validade de $P(n)$ (mostre e comente a Figura 3.2).

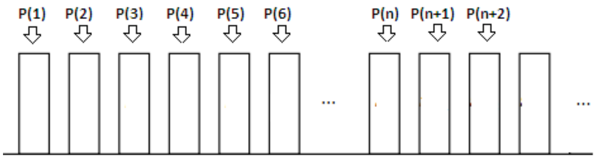
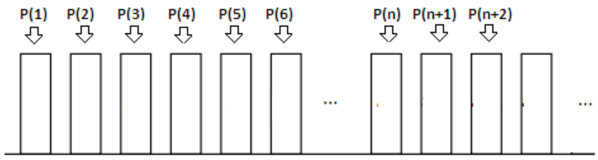


Figura 3.2: Dominós e Proposições em $\mathbb{N}$

Apresente a seguinte questão: O que acontece numa fila de infinitos dominós colocados em pé, lado a lado, se derrubarmos um destes? Certamente os alunos responderão o óbvio e correto: "Todos cairão, mesmo que um a um e sucessivamente".

Faça outro questionamento: Que condições garantirão que todos deverão cair? Uma resposta esperada é que um dominó qualquer sempre derrubará o próximo da fila.

Na sequência, sugerimos que seja feita uma análise desse fato, ligando-o ao nosso objeto de estudo, Proposições em $\mathbb{N}$ (mostre novamente e comente a Figura 3.2).



Agora, faça-os perceber que pode ocorrer 2 situações de especial importância:

1ª situação - Uma 1ª versão do Método: Considere que você tem uma longa fila de dominós em pé, se você derrubar o primeiro, este derrubará o segundo, o segundo, o terceiro e, supondo que isso prossiga, todos cairão. Mas, esse fato pode ser separado em duas partes (mostre e comente a Figura 3.3).

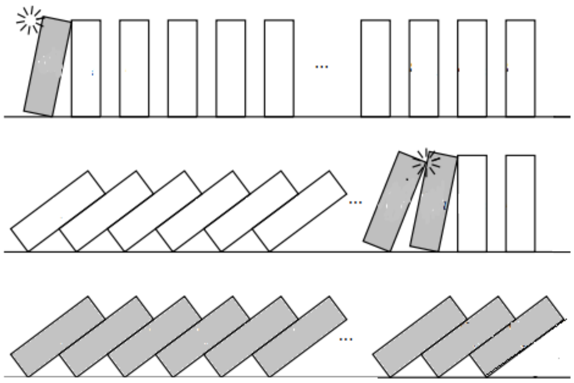


Figura 3.3: Uma 1ª versão do Método

Que são:

1. Inicialmente, um dominó cai.

2. Independente da posição de um determinado dominó, se este cair e derrubar o próximo da sequência, teremos todos caídos.

Porém, consideramos que cada dominó dessa longa fila de dominós colocados em pé, é uma aplicação de uma proposição P em $\mathbb{N}$ (volte a mostrar a Figura 3.3), em que a queda de um dominó representa a validade dessa proposição, para esse número natural.

Assim, eles deverão perceber que dois passos são suficientes para provarmos a validade de uma proposição em $\mathbb{N}$, a saber:

- *Passo base:* Mostrar a veracidade da proposição para um primeiro valor da sequência natural, o 1 no caso. Isto é, $P(1)$ é verdadeira;
- *Passo Indutivo:* Concluir, supondo a validade para um valor qualquer n, a validade para o sucessor desse valor, o $n + 1$. Isto é, $P(n)$ *verdadeira* $\Rightarrow$ $P(n + 1)$ *verdadeira.*

Podemos observar, também, que outra maneira de produzirmos essa situação (**2ª versão do Método**) é garantindo a queda de $P(1)$ e supondo que caída a sequencia $P(2), P(3), ...P(n')$, temos a queda de $P(n' + 1)$ (motre a Figura 3.4).

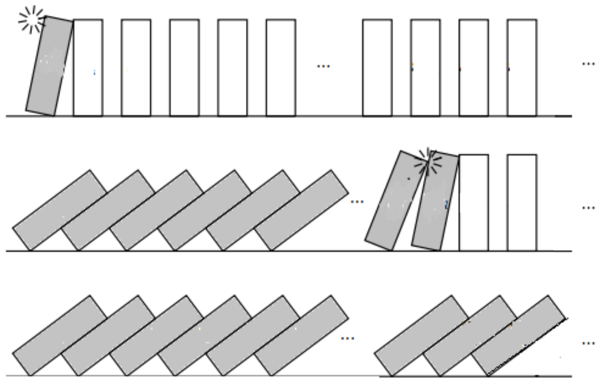


Figura 3.4: Uma 2ª versão do Método

2ª situação - Uma 3ª versão do Método: Agora, considere que o dominó a ser derrubado seja um qualquer, a partir do 1º da fila. Nesse caso, vemos que cairão apenas os dominós a partir deste. Isto é, se nossa proposição P é válida para algum valor, será para um $n' > 1$ e a partir deste (mostre a Figura 3.5).

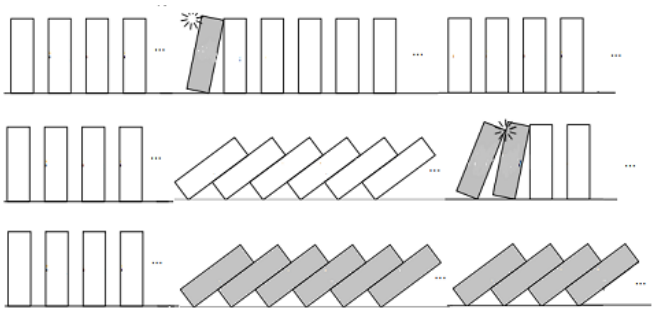


Figura 3.5: Uma 3ª versão do Método

Observe que uma proposição em $\mathbb{N}$ pode ser verdadeira a partir de um $n^{'} > 1$ (lembre da folha de tarefa anterior), e que para resolução desse problema, basta substituirmos o "1" (convencionado como primeiro dominó a cair) pelo $n^{'}$ e pensarmos analogamente a situação anterior.

Assim, os alunos devem entender que provar $P(n)$ é provar:

- *Passo base:* A veracidade da proposição para um primeiro valor da sequência que cairá, agora o $n^{'}$. Isto é, $P(n^{'})$ é verdadeira.
- *Passo indutivo:* Concluir, supondo a validade para um valor qualquer $n > n^{'}$, a veracidade para o sucessor desse valor, o $n + 1$. Isto é, $P(n)$ *verdadeira* $\Rightarrow$ $P(n+1)$ *verdadeira.*

Observe que também podemos produzir essa situação (**4ª versão do Método**) garantindo a queda de P($n^{'} > 1$) e supondo que caída a sequência $P(n'+1), P(n'+2), ...P(n)$, temos a queda de $P(n+1)$ (motre a Figura 3.6).

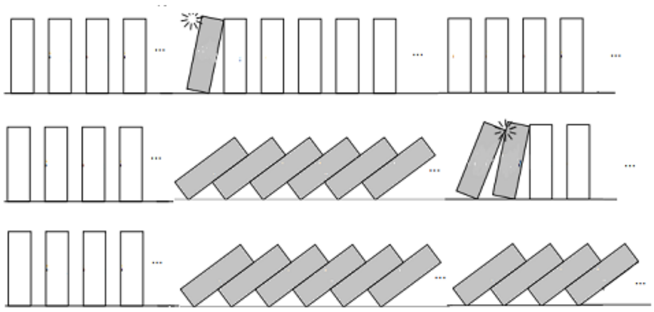


Figura 3.6: Uma 4ª versão do Método

Resuma as situações acima apresentando e comentando o mapa conceitual[1] a seguir, Figura 3.7, que deverá ajudar no entendimento, passo a passo, do processo de Indução Matemática.

[1]Ao observar que uma das maiores dificuldades dos alunos na disciplina de matemática está no fato de que estes, muitas vezes, só decoram os conceitos e costumam não estabelecer as relações entre os conceitos aprendidos, sugerimos esse mapa conceitual como um apoio na superação dessa dificuldade. De modo geral, segundo MOREIRA em <http://www.if.ufrgs.br/ moreira/mapasport.pdf>, mapas conceituais são diagramas que estabelecem relações entre conceitos, ou palavras, que são utilizadas para representar estes conceitos.

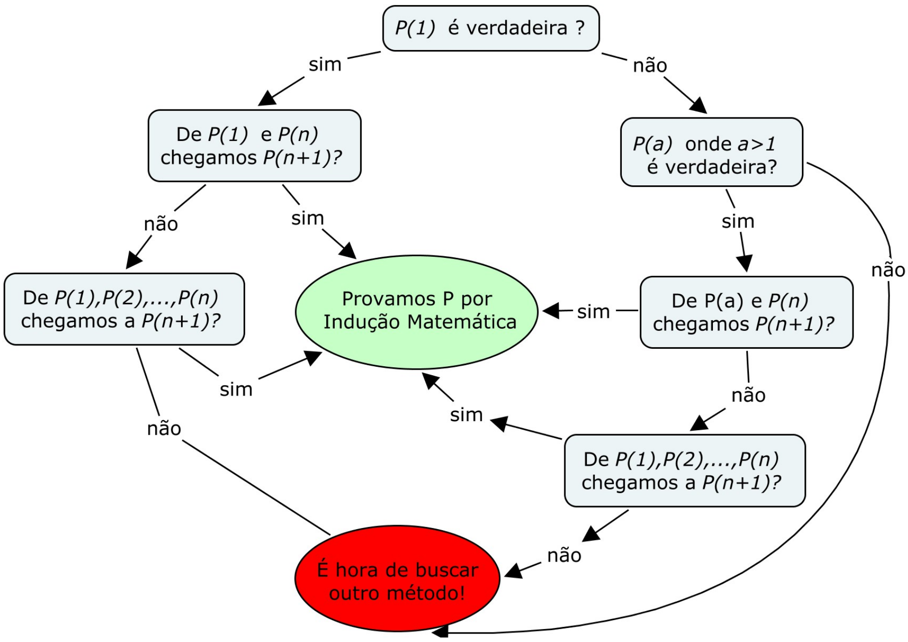


Figura 3.7: Processo de Indução Matemática

Nesse momento, exposto o Princípio da Indução Matemática, aplique-o. Volte ao problema das diagonais e promova uma resposta à questão: "Será $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ válida para todos os polígonos convexos?"

3.8.2 Solucionando o Problema das Diagonais de um Polígono Convexo

Lembre que o problema motivador inicial consistia em determinar o número de diagonais de um polígono qualquer, de n lados, e que, após as investigações, conjecturamos que:

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

.

Faça-os observar que a parte (i) dessa demonstração está satisfeita, pois foi verificada na primeira folha de tarefas. Tendo em vista a satisfação do passo (ii) e a resposta do nosso questionamento inicial ("Será $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ válida para todos os polígonos convexos?"), aplique nossa terceira folha de tarefas.

É importante apresentar aos alunos o questionamento: Onde queremos chegar?; Isso deve levar ao desenvolvimento de estratégias para alcançarem $D_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$.

Os alunos devem estar conscientes de que a demonstração estará concluída, quando conseguirem mostrar que um polígono de $n+1$ lados tem $D_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$ diagonais, partindo do fato de que um polígono de n lados tem $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

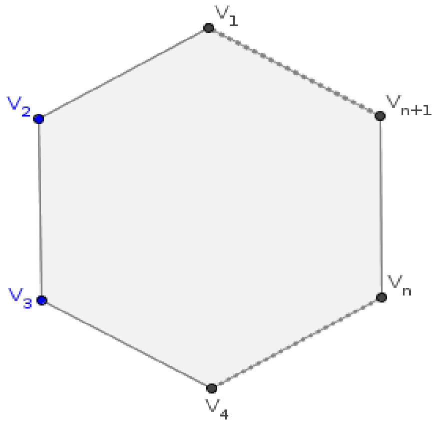
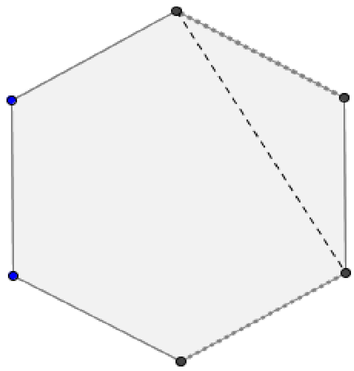
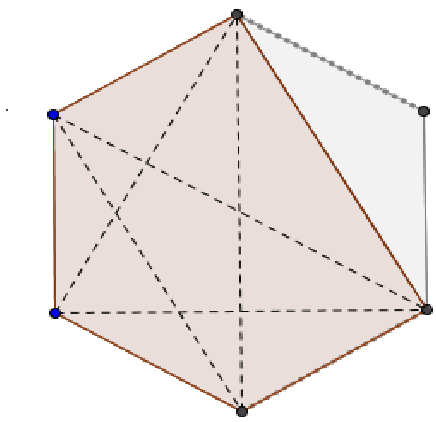
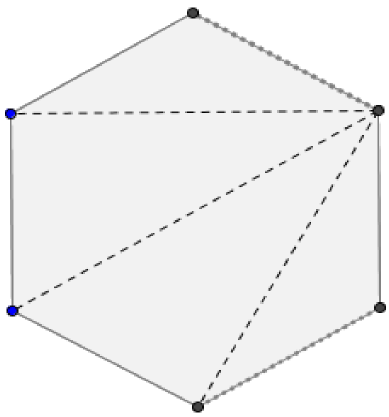
Sugestões de Dicas para os Alunos

- Lembrem-se da tarefa realizada no 1º momento;
- Queremos chegar na validade de $P(n+1)$. A estratégia para isso pode sair da questão "como contar as diagonais?";
- As ideias chaves estão nas figuras. A correta relação entre elas podem concluir a demonstração.

Tarefa 3 – Resolvendo o Problema das Diagonais

Alunos(as):

1) De posse dos fatos expressos nos quadros seguintes, responda as questões.

<table>
<tr><td>Seja P o polígono de n+1 lados abaixo

</td><td>É possível definir um polígono de n lados inscrito em P, traçando um segmento a partir de dois vértices de lados consecutivos. Esse segmento é uma diagonal de P?
</td></tr>
<tr><td>Sabemos contar as diagonais do polígono inscrito. Quantas?</td><td>Sabemos contar as diagonais que saem de Vn+1, Quantas?</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">É Possível contar as diagonais de P a partir dos fatos acima? Se sim, descreva como.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Baseando-se nas situações acima, resolva o problema das diagonais. Isto é, prove a validade de Dn+1.</td></tr>
</table>

3.8.3 Solucionando os Problemas de Igualdade e Desigualdade

Pelo já exposto, é de se esperar que os alunos já tenham percebido a importância das fases que passamos para validar uma proposição em $\mathbb{N}$, para um sequência de números naturais. Isto é:

- Investigação de casos particulares;
- Observação de regularidades que nos levam a conjecturas;
- Prova da validade da conjectura, tornando-a uma proposição válida para uma série de valores naturais.

Nesse momento, devemos voltar a exercitar a aplicação do método, objetivando a fixação de seus passos bases.

- Parte (i) - passo base.
- Parte (ii) - passo indutivo.

Mas, antes de aplicarmos a próxima folha de tarefa, sugerimos que, de modo expositivo e dialogado, seja feito a resolução dos casos utilizados exemplos dos momentos anteriores que deverão esclarecer aos alunos as ideias "chaves" para aplicação do método.

Exemplo 3.3. *Considere o valor da soma dos n primeiros números ímpares na sequência natural, isto é, $1+3+5+...+(2n-1)$. Vemos que o valor da expressão depende do $n \in \mathbb{N}$ a ser tomado e conjecturamos que $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$.*

1ª etapa: Investigação de casos particulares (feita anteriormente).

2ª etapa: Observação de regularidades que nos levarão a conjecturas (já realizada).

$$\boxed{\text{Seja } P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.}$$

3ª etapa: Provando com o Princípio da Indução Matemática.

Parte (i): $P(1)$ é verdadeira pois $1 = 1^2$.

Parte (ii): Supomos que $P(n)$ seja verdadeira para algum n.

Inicie com o questionamento: Onde queremos chegar? Deve ficar claro que queremos chegar em $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$. E para isso contamos com $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Tentaremos transformar a expressão que temos, na que queremos.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \Rightarrow 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Por escolha, vamos estudar o 2º membro da hipótese de Indução e analisar o que podemos fazer. Que operação podemos executar nela para termos $(n + 1)^2$?

Lembre que $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ e observe que uma alternativa pode ser somar $(2n + 1)$ em ambos os membros da igualdade.

Observe também que poderíamos partir da análise do 1º membro.

Mostre que o $P(n + 1)$ teria no 1º membro o $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ mais o próximo número ímpar depois de $(2n - 1)$, isto é, $(2n + 1)$.

Veja que, de todo modo, concluímos que uma boa estratégia é somar $(2n + 1)$ em ambos os membros da hipótese de indução. Façamos:

- Somando $(2n + 1)$:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

- Reorganizando os termos:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Mas, $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ é nosso $P(n + 1)$, conclua, por Indução Matemática, que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Agora, visando facilitar o entendimento da busca de estratégias e organização da demonstração, sugerimos a apresentação com comentários de um mapa conceitual, como o apresentado a seguir na Figura 3.8.

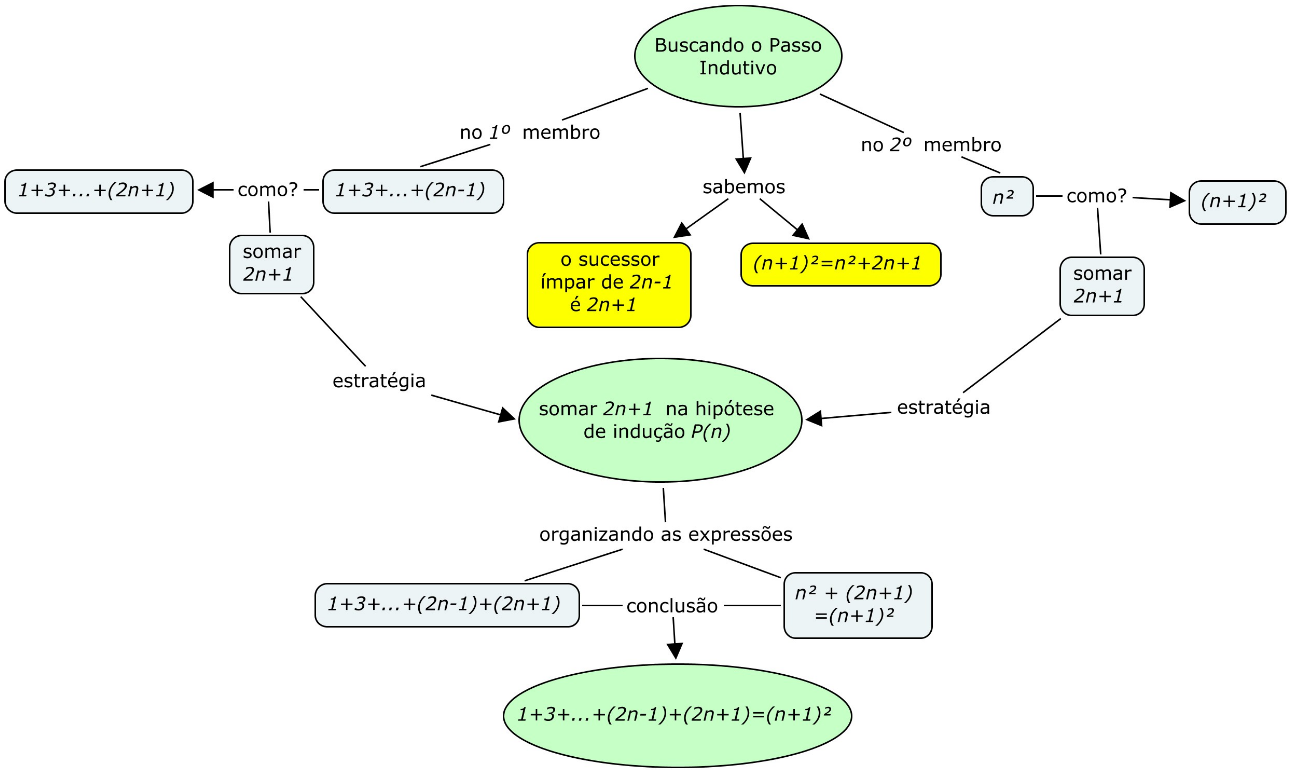


Figura 3.8: Passo Indutivo da Igualdade

Exemplo 3.4. *Considerando as expressões* n^2 *e* $2n+1$*, temos que seus valores numéricos em relação aos números naturais dependem do* $n \in \mathbb{N}$ *a ser tomado. Mostraremos que* $n^2 > 2n+1$ *para* $n > 2$ *usando Indução Matemática.*

1ª etapa: Investigação de casos particulares (feita anteriormente).

2ª etapa: Observação de regularidades que nos levarão a conjecturas. (feita anteriormente).

3ª etapa: Provando com o Princípio da Indução Matemática.

$$\boxed{\text{Seja } P(n) : n^2 > 2n + 1 \text{ para todo natural } n > 2.}$$

Parte (i): $P(3)$ é verdadeira, pois $3^2 = 9 > 2.3 = 6$.

Parte (ii): Supomos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n > 3$.

Novamente, inicie com o questionamento: Onde queremos chegar? deve ficar claro que queremos chegar em $(n+1)^2 > 2(n+1)+1$. Para isso contamos com $n^2 > 2n+1$ para $n > 2$.

Tentaremos, nesse momento, transformar a expressão que temos na que queremos.

$n^2 > 2n + 1 \Rightarrow (n+1)^2 > 2(n+1) + 1$

Por escolha, vamos estudar o 2º membro da hipótese de Indução e analisar o que podemos fazer. Que operação podemos executar nela para termos $(n+1)^2 > 2(n+1)+1$?

Uma boa estratégia seria somar 2 em ambos os membros da nossa hipótese de indução e colocar em evidência, como a seguir:

$n^2 + 2 > 2n + 1 + 2 = 2n + 2 + 1 = 2(n+1) + 1$

Isso resolveu nosso problema para o 2º membro, mas não nos levou a uma situação confortável no 1º membro da expressão, pois teríamos que buscar uma maneira de torná-la igual a $(n+1)^2$, no entanto, o que sabemos de $(n+1)^2$ é que pode ser escrita como $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (produto notável), infelizmente não como $n^2 + 2$.

Vamos então partir do 1º membro e do fato $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Podemos ver que uma boa ideia seria usar essa expressão, mas o que podemos fazer com nossa hipótese de indução para obtermos a desigualdade esperada e o $(n+1)^2$ no 2º membro?

Ora, uma estratégia pode ser adicioar $2n+1$ em ambos os membros, isso completaria o quadrado no primeiro membro e deixaria $2n+1+2n+1$ no segundo membro, que reorganizado $2n+2+2n = 2(n+1)+2n$, contudo, isso ainda não é o que esperamos no 2º membro. Porém, $2n > 1$, pois $n > 2$. Assim, corrigimos nossa estratégia fazendo a troca de $2n$ por 1, o que nos deixaria com a expressão que queremos.

Façamos:

- Somando 2n+1 em ambos os membros da hipótese de indução:

$$n^2 + 2n + 1 > 2n + +2n + 1$$

- Reorganizando os termos:

$$(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 2n$$

- Trocando $2n$ por 1:

$$(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1$$

Desse modo, conclua, por Indução Matemática, que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n > 2$.

Agora, visando facilitar o entendimento da busca de estratégias e organização da demonstração, sugerimos a apresentação com comentários de um mapa conceitual como o apresentado a seguir na Figura 3.9.

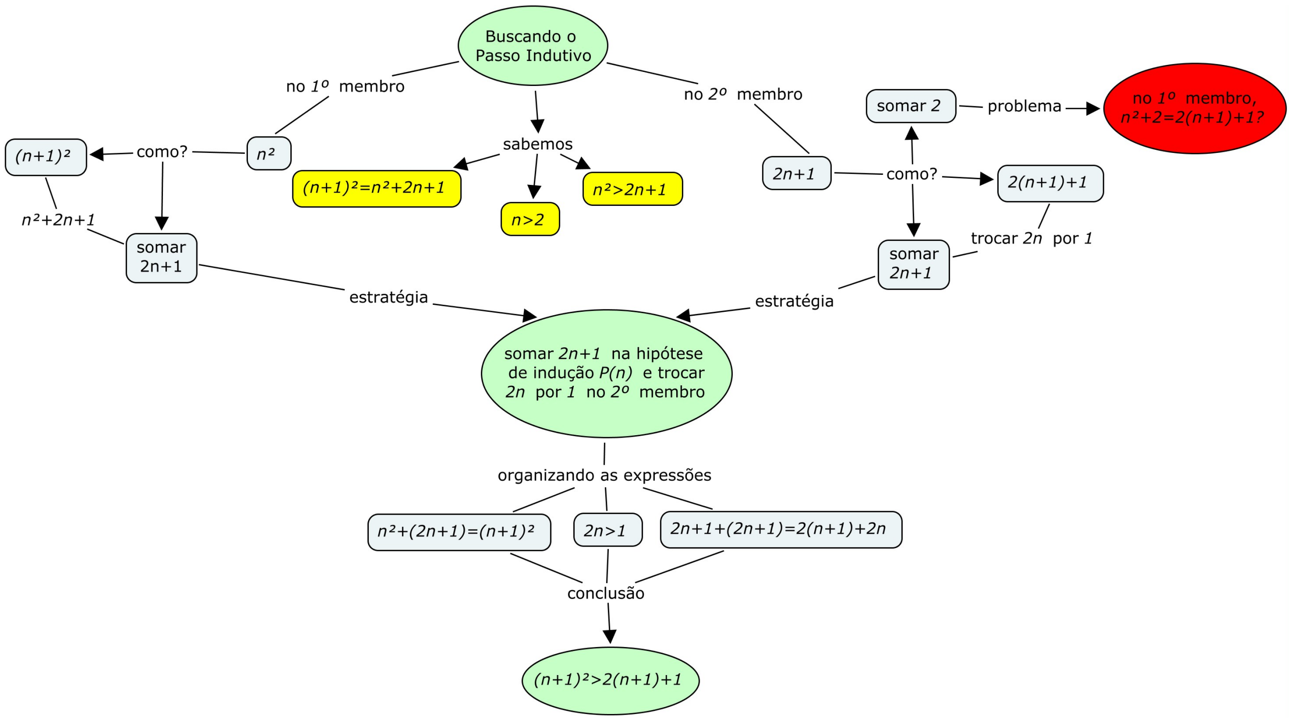


Figura 3.9: Passo Indutivo da Desigualdade

Nesse momento, com a mesma metodologia, entregamos a terceira folha de tarefas para que os alunos exercitem o método e validem as proposições propostas.

Sugestões de Dicas para os Alunos

- Lembrem-se que onde queremos chegar é no $P(n+1)$, então definam estratégias para isso, busque a partir do 1º ou do 2º membro das hipóteses de indução.
- As operações básicas (multiplicação e divisão) serão suficientes.
- Podemos somar ou multiplicar o mesmo valor natural em ambos os membros da hipótese de indução.
- Podemos escrever uma soma a partir de um produto $2x = x + x$

- Numa expressão em que n^2 aparece no 2º membro de uma desigualdade de sinal $>$, podemos fazer a troca de n^2 por $2n+1$ pois do caso exemplo sabemos que $n^2 > 2n + 1$ para $n > 2$.

Tarefa 4 – Solucionando os Problemas de Igualdade e Desigualdade

Alunos(as):

____

____

____

1) Considerando *P(n): 2+4+...+2n=n(n+1)*, responda:

a) Que expressão esperamos obter no segundo membro da igualdade acima para que o passo indutivo da nossa prova seja satisfeito?

b) Sabendo que numa igualdade podemos adicionar o mesmo valor natural, desde que façamos em ambos os membros da igualdade, que expressão você adicionaria em *P(n)* para tentar satisfazer o passo indutivo da nossa prova? Faça essa operação.

c) É possível fatorar a expressão do segundo membro do item (b) ,de modo a obter a expressão do item (a)? Se sim, faça.

c) Organize os dados acima e conclua a demonstração de *P(n)*. Isto é, mostre o passo indutivo.

2) Considerando $P(n): 2^n > n^2$ para todo natural *n>5*, responda:

a) Que expressão esperamos obter no segundo membro da desigualdade acima, para que o passo indutivo seja satisfeito?

b) Que valor natural você adicionaria (ou multiplicaria) em ambos os membros da desigualdade $2^n > n^2$ para tentar satisfazer o passo indutivo da nossa prova? Faça essa operação.

b) De posse do problema exemplo, onde foi provado que $n^2 > 2n+1$ para *n>3*, e da hipótese de indução, $P(n): 2^n > n^2$,para todo natural *n>4,* que substituições podemos fazer tendo em vista a satisfação do passo indutivo da nossa prova?

c) Organize os dados acima e conclua a demonstração de *P(n)*. Isto é, mostre o passo indutivo.

3.9 Desenvolvimento da Etapa III

Nessa etapa, o aluno colocará em prática, de maneira global, os conhecimentos e os procedimentos aprendidos.

Lembramos que essa tarefa deverá ser realizada individualmente, sem consulta ao material, que deverá servir como indicador dos resultados de nossa sequência didática e como parte da nota da disciplina de Matemática.

Após organização da sala, os recursos materiais (lápis, borracha, transferidor e folhas para rabiscos, que serão utilizados para a realização das atividades, bem como a folha de tarefas, deverão ser entregues aos alunos. Na sequência, a Avaliação Final será iniciada.

Sugerimos, também, que seja reservada 01(uma) aula a avaliação final e que, na aula seguinte, o professor faça suas considerações finais sobre o desenvolvimento das atividades; realize a apresentação dos resultados avaliativos, aos alunos; exponha os pontos em que o trabalho foi bem sucedido; além de apontar as falhas para que possam ser corrigidas, posteriormente.

Sugerimos 1 aula para a Avaliação Final e que na aula seguinte o professor deva fazer suas considerações finais sobre o desenvolvimento das atividades, a apresentação dos resultados avaliativos aos alunos, expondo onde o trabalho foi bem sucedido, assim como onde ocorreram erros para que possam ser corrigidos posteriormente.

3.9.1 O problema dos Ângulos Internos de um Polígono (Avaliação Final)

Iniciamos com a seguinte pergunta: O que acontecerá com os ângulos internos de um polígono convexo, conforme o número de lados desse polígono seja aumentado?

Nosso problema motivador consiste em determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer. A partir de investigações, esperamos que os alunos cheguem a conjecturar que:

$$S_n = (n-2).180°$$

.

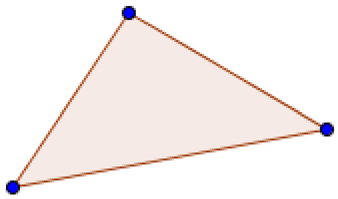
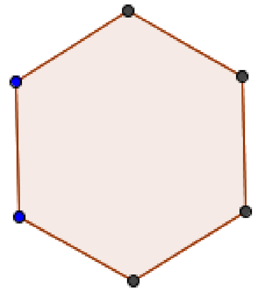
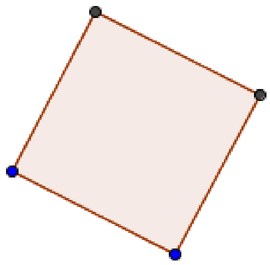
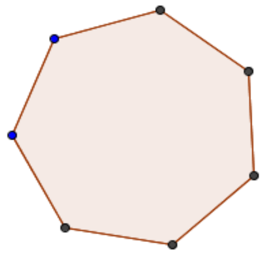
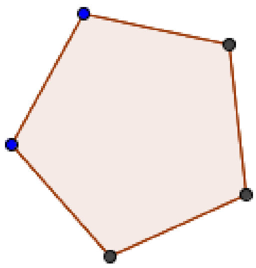
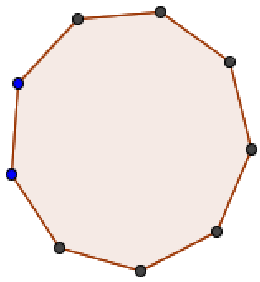
O alunos deverão reconhecer que estão tratando de uma proposição em $\mathbb{N}$ e que o 'Princípio da Indução Matemática' pode ser aplicado.

Ésperamos que eles saibam que a demonstração estará concluída quando conseguirem mostrar que um polígono de $n+1$ lados tem $S_{n+1} = ((n+1)-3).180°$, partindo do fato de que um polígono de n lados tem $S_n = (n-2).180°$.

Observamos que a parte (i) da prova será trabalhado na atividade 1 e a (ii) na 4.

Tarefa 5- Investigando a Soma dos Ângulos Internos de um Polígono Convexo

1) Usando lápis e transferidor, meça e determine a soma dos ângulos internos de cada polígono a seguir:

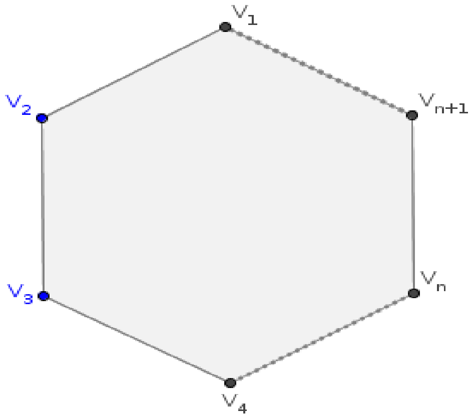
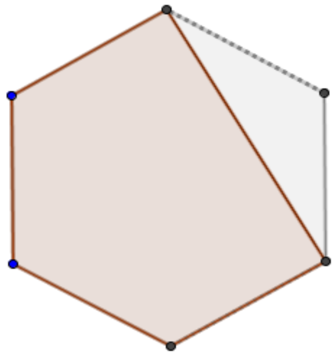
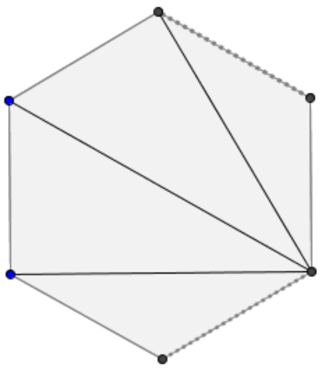
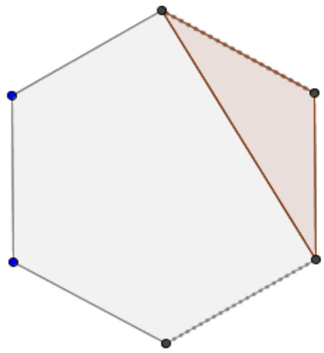
 *S(3)=*	 *S6)=*
 *S(4)=*	 *S(7)=*
 *S(5)=*	 *S(8)=*

2) Organize os dados acima na tabela a seguir e preencha a terceira coluna, baseando-se nos resultados das duas primeiras.

Número de lados do polígono (*n*)	Soma dos ângulos internos *Sn* do polígono de *n* lados	Fatoração de *Sn* em função de *n*

3) Que conjectura você pode fazer acerca de *Sn* ?

4) De posse dos fatos expressos nos quadros seguintes, responda as questões.

Seja *P* o polígono de *n+1* lados abaixo. 	É possível definir um polígono de *n* lados inscrito em *P* traçando um segmento a partir de dois vértices de lados consecutivos. Essa construção gera duas figuras, quais? 
Sabemos a soma dos ângulos internos do polígono inscrito em *P*. Qual é esse valor?	Sabemos a soma dos ângulos internos da outra figura? Qual é esse valor?.
	
É possível somar os ângulos internos de *P*? Se sim, descreva como.	
Baseando-se nas situações acima resolva o problema da soma dos ângulos internos do polígono *P*. Isto é, prove a validade de *Sn+1*.	

Capítulo 4

Sugestões de Aplicações ao Longo do Ensino Médio

Com o intuito de fazer com que o método não seja esquecido como um conteúdo sem importância - do tipo que é visto em determinada série e não mais é usado em momento algum - fizemos uma lista, com algumas demonstrações, que os professores poderão usar como subsídio para elaboração de outras abordagens; para o desenvolvimento de atividades com objetivo similar ao nosso; ou, simplesmente, para executá-las em momentos oportunos.

Observamos que a ordem a seguir é uma sugestão baseada em programas de matemática, encontrados em livros didáticos - que de costume separam os conteúdos do Ensino Médio em três livros, correspondentes as três séries desse nível de ensino - e que pode ser adaptada pelo professor, de acordo com as necessidades e características de cada turma.

Esclarecemos que, nas demonstrações seguintes, iniciaremos com a exposição de resultados já aceitos e, a partir de uma sequência de deduções lógicas, detalhadamente explicadas, concluiremos a generalização da proposição em questão, através de Indução Matemática.

É importante ressaltar que as proposições que apresentaremos, a seguir, costumam ser abordadas de modo expositivo e "validadas" apenas com verificações particulares, realizadas pelos professores (até mesmo em livros didáticos desse nível de ensino) e, às vezes, com generalizações apressadas que pouco acrescentam em rigor e fortalecimento das verdades matemáticas no pensamento dos alunos. Desejamos que a mencionada lista possa contribuir , através de subsídios relativos a demonstrações , para o sucesso de interessados em mudar esse contexto e amenizar as dificuldades encontradas no processo de ensino - aprendizagem do Ensino Médio.

4.1 Aplicações na 1ª série do Ensino Médio

Para esta série de ensino, apresentaremos uma aplicação no estudo de conjuntos (cálculo do número de subconjuntos de um conjunto finito) e outras no estudo de funções cujo o domínio é o conjunto dos números naturais (Progressões Aritméticas e Geométricas).

Proposta de Aplicação 1. *Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.*

Demonstração: Seja $P(n)$:Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

Parte (i): Se $n = 0$, então o conjunto é vazio e só tem ele próprio como subconjunto. Assim, tem $1 = 2^0$ subconjunto.

Parte (ii): Defina o conjunto X com $n+1$ elementos (obviamente $X - \{x_i\}$ tem n elementos).

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$$

Suponha x_i como um elemento de X e considere os fatos a seguir:

1. Um subconjunto de X contém ou não x_i,

2. Aqueles que não contém x_i são subconjuntos de $X - \{x_i\}$;

3. Qualquer subconjunto $Y \subset X - \{x_i\}$ pode ser associado a um subconjunto $Y \bigcup \{x_i\}$ de X que contém x_i.

Observe que os fatos acima nos dizem que existem tantos subconjuntos de X que contém x_i quanto os que não contém. Assim, concluímos que o número de subconjuntos de X é o dobro do número de subconjuntos de $X - \{x_i\}$, que pela hipótese de indução, é 2^n. Assim, X tem $2.2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos.

Logo, por Indução Matemática, um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. ■

Definição 4.1. *Uma Progressão Aritmética é uma sequência de números, onde cada termo, a partir do segundo, é obtido somando ao termo anterior uma constante r, chamada de razão da Progressão Aritmética.*

Isto é, se $f(1) = a_1$ então:

$f(2) = a + r = a = 1.r$

$f(3) = a + r + r = a + 2.r$

$f(4) = a + r + r + r = a + 3.r$

...

Daí, percebemos que $f(n) = a_1 + (n-1).r$. Vejamos a seguir a demonstração desse fato.

Proposta de Aplicação 2. *O termo geral de uma Progressão Aritmética de primeiro termo a_1 e razão r é $f(n) = a_1 + (n-1).r$ qualquer que seja o n natural.*

Demonstração: Seja $P(n)$: $f(n) = a_1 + (n-1).r$ qualquer que seja o n natural.

Parte (i): Se $n = 1$, já está verificado acima, $f(1) = a_1 = a_1 + (1-1).r$.

Parte (ii): Assuma $f(n) = a_1 + (n-1).r$ para algum n. Mas nosso $f(n+1) = f(n) + r$, pela definição de f.

Substituindo $f(n)$ por $a_1 + (n-1).r$, temos:

$f(n+1) = a_1 + (n-1).r + r.$

Agora, pondo r em evidência e reorganizando os termos, temos: $f(n+1) = a_1 + (n-1).r + r = a_1 + ((n-1)+1)r = a_1 + n.r.$

Logo, por Indução Matemática, $f(n) = a_1 + (n-1).r$ para todo n. ■

Definição 4.2. *Uma Progressão Geométrica é uma sequência de números, onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando ao termo anterior uma constante q, chamada de razão da Progressão Geométrica.*

Isto é, se $f(1) = a_1$ então:

$f(2) = a_1.q = a_1.q^1$

$f(3) = a_1.q.q = a_1.q^2$

$f(4) = a.q.q.q = a.q^3$

...

Daí, percebemos que $f(n) = a_1.q^{n-1}$. Vejamos a seguir a demonstração desse fato.

Proposta de Aplicação 3. *O termo geral de uma Progressão Geométrica de primeiro termo a_1 e razão q é $f(n) = a_1.q^{n-1}$ qualquer que seja o n natural.*

Demonstração: Seja $P(n)$: $f(n) = a_1.q^{n-1}$ qualquer que seja o n natural.

Parte (i): Se $n = 1$, $f(1) = a_1 = a_1.q^{1-1}$, a fórmula é obviamente válida..

Parte (ii): Assuma $f(n) = a_1.q^{n-1}$ para algum n. Mas, nosso $f(n+1) = f(n).q$, pela definição de f.

Substituindo $f(n)$ por $a_1.q^{n-1}$, temos:

$f(n+1) = a_1.q^{n-1}.q.$

Agora, juntando as potências e reorganizando os termos, temos: $f(n+1) = a_1.q^{n-1}.q = a_1.q^{n-1+1} = a_1.q^n.$

Logo, por Indução Matemática, $f(n) = a_1 + (n-1).r$ para todo n. ■

4.2 Aplicações na 2ª série do Ensino Médio

Para esta série, apresentaremos algumas demonstrações voltadas para o estudo de análise combinatória (Princípio Fundamental da Contagem, fórmulas para permutações, arranjo, combinações e Binômio de Newton) e uma aplicação em Matrizes.

Proposta de Aplicação 4 (Princípio Fundamental da Contagem)**.** *Considere os r conjuntos:*

- $A_1 = \{a_1, a_2, ..., a_{n_1}\}$ *com* n_1 *elementos;*
- $A_2 = \{b_1, b_2, ..., b_{n_2}\}$ *com* n_2 *elementos;*

  ...

- $A_r = \{z_1, z_2, ..., z_{n_r}\}$ *com* n_r *elementos.*

Então, o número de sequências de r elementos do tipo $(a_i, b_j, ..., z_p)$, onde $a_i \in A_1, b_j \in A_2, ..., z_p \in A_r$ é $n_1.n_2...n_r$.

Demonstração: Seja $P(n)$: $X = \{(a_i, b_j, ..., w_{r-1}); a_i \in A_1, b_j \in A_2 ... w_k \in A_{r-1}\}$ tem $n_1.n_2...n_r$.

Parte (i): Se $r = 2$, então $X = \{(a_i, b_j); a_i \in A_1 \text{ e } b_j \in A_2\}$

Façamos a contagem dos elementos de X:

- Fixando a_1 e variando o b_j, contaremos n_2 pares ordenados;
- Fixando a_2 e variando o b_j, contaremos n_2 pares ordenados;

  ...

- Fixando a_{n_1} e variando o b_j, contaremos n_2 pares ordenados.

Como temos n_1 filas cada uma com n_2 elementos, obviamente X tem $n_1.n_2$ elementos. Ou seja, existe $n_1.n_2$ pares ordenados da forma (a_i, b_j) onde $a_i \in A_1$ e $b_j \in A_2$.

Parte (ii)*:* Supomos que para um $r-1 \geq 2$, $P(r-1)$ é verdadeira. Defina $X = \{(a_i, b_j, ..., w_{r-1});\ a_i \in A_1,\ b_j \in A_2\ ...w_k \in A_{r-1}\}$ com $r-1$ elementos e considere os fatos a seguir:

1. Existem $n_1.n_2...n_{r-1}$ sequências dessas (hipótese de indução).

2. Cada sequência do tipo $(a_i, b_j, ..., w_k, z_l)$ consiste em uma sequência $(a_i, b_j, ..., w_k)$ e um elemento $z_l \in A_r$, onde A_r tem n_r elementos.

Mas pela parte (i), (ii) e os fatos acima, temos que o número de sequências $((a_i, b_j, ..., w_k), z_l) = (a_i, b_j, ..., w_k, z_l)$ onde $a_i \in A_1, b_j \in A_2, ..., w_k \in A_{r-1}, z_l \in A_r$ é $n_1.n_2...n_{r-1}.n_r$.

Logo, por Indução Matemática, X tem $n_1.n_2...n_{r-1}$ elementos. Isto é, exitem $n_1 n_2...n_{r-1}$ sequências do tipo $(a_i, b_j, ..., w_k)$ onde $a_i \in A_1, b_j \in A_2...w_k \in A_{r-1}$. ■

Proposta de Aplicação 5. *O número de permutações de* n *elementos é* $P_n = n!$

Demonstração: Seja $P(n)$: O número de permutações de n elementos é $P_n = n!$.

Parte (i)*:* Se $n = 1$, temos $1 = 1!$ permutação. Logo $P(1)$ é verdadeira.

Parte (ii)*:* Supomos que para $n > 0$, $P(n)$ seja verdadeira.

Defina $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$ com $n+1$ elementos (Assim $X - \{x_{n+1}\}$ tem n elementos).

Escolhamos o elemento x_{n+1} de X. Ao acrescentarmos o elemento x_{n+1} entre os elementos de cada permutação dos elementos de $X - \{x_{n+1}\}$, estamos contando as permutações distintas dos elementos de X. Observe que podemos inserir x_{n+1} de $n+1$ maneiras distintas em cada uma das P_n permutações dos elementos de $X - \{x_{n+1}\}$. Assim, as permutações dos elementos de X são $(n+1).P_n = (n+1)n! = (n+1)!$.

Logo, por Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n. ■

Proposta de Aplicação 6. *O número de Arranjos de m elementos tomados n a n é* $A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$

Por conveniência, usaremos a forma $A_{m,n} = m.(m-1)(m-2)...(m-n+1)$ e procederemos usando Indução matemática sobre n.

Demonstração: Seja $P(n)$: O número de Arranjos de m elementos tomados n a n é $m.(m-1)(m-2)...(m-n+1)$

Parte (i): Se $n = 1$ então $A_{m,1} = m = (m-1+1)$ e a fórmula está valendo.

Parte (ii): Supomos que $A_{m,n} = m.(m-1)(m-2)...(m-n+1)$. para $1 < n < m$. Mostraremos que $A_{m,n+1} = m.(m-1)(m-2)...(m-n)$.

Observe que ao tomar os arranjos de m elementos tomados n a n, acrescentando ao final de cada um deles um dos $m-n$ elementos restantes, estamos obtendo os arranjos de m elementos tomados $n+1$ a $n+1$. Além disso, os arranjos de m elementos, tomados $n+1$ a $n+1$ desse modo, são distintos e qualquer arranjo de m elementos tomados $n+1$ a $n+1$ figura entre estes.

Assim, concluímos que o número de arranjos dos m elementos, tomados $n+1$ a $n+1$ é $A_{m,n}.(m-n) = m(m-1)(m-2)...(m-n+1).(m-n)$, como queríamos.

Logo, por indução Matemática, $A_{m,n} = m.(m-1)(m-2)...(m-n+1)$ que reorganizada para a notação fatorial fica $A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$. ■

Proposta de Aplicação 7. *O número de combinações de m elementos tomados n a n é* $C_{m,n} = \frac{n!}{(m-n)!n!}$

Por conveniência, vamos tomar $C_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1.2.3...n}$

Demonstração: Seja $P(n)$: O número de combinações de m elementos tomados n a n é $\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1.2.3...n}$

Parte (i): Se $n = 1$ então $C_{m,1} = m = \frac{(m-1+1)}{1}$ e a fórmula está valendo.

Parte (ii): Supomos $C_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1.2.3...n}$ para um $1 < n < m$. Mostraremos que $C_{m,n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n)}{1.2.3...n.(n+1)}$

Ao tomar as combinações de m elementos tomados n a n, acrescentando ao final de cada uma delas, como o $n+1$ - ésimo elemento, um dos $m-n$ elementos restantes, cobrimos todas as combinações de m elementos tomados $n+1$ a $n+1$. Fica claro que ao utilizarmos as combinações do modo acima, contamos $C_{m,n}.(m-n)$ combinações. Porém, esse modo de contar considera cada uma das combinações aparecendo, cada uma delas, $n+1$ vezes.

Por exemplo: $\{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$ é obtida quando colocamos

- a_1 em $\{a_2, a_3, ..., a_{n+1}\}$
- a_2 em $\{a_1, a_3, ..., a_{n+1}\}$
- a_3 em $\{a_1, a_2, a_4, ..., a_{n+1}\}$

  ...

- a_{n+1} em $\{a_1, a_2, a_4, ..., a_n\}$

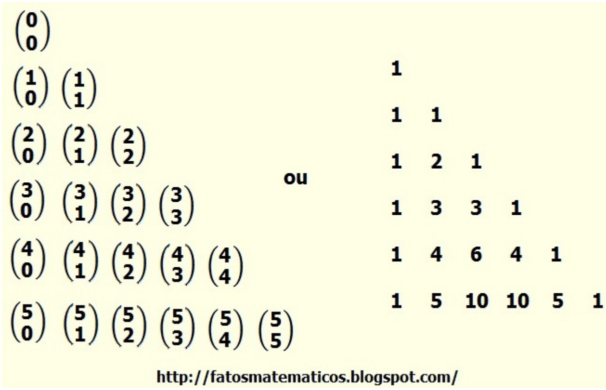
Daí, para contarmos o número correto de combinações de m elementos, tomados $n+1$ a $n+1$, basta usarmos a contagem $C_{m,n}.(m-n)$ e excluirmos os conjuntos contados a mais, isto é, dividir $C_{m,n}.(m-n)$ por $n+1$.

Assim, o número correto de combinações é $C_{m,n+1} = \frac{C_{m,n}.(m-n)}{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1).(m-n)}{1.2.3...n.(n+1)}$, como queríamos.

Logo, por indução Matemática, $C_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1.2.3...n}$ que, reorganizada para a notação fatorial, fica $C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$. ■

Definição 4.3. *Chamamos de Triângulo Aritmético de Tartaglia*[1] *- Pascal ao quadro abaixo, formado com os diversos valores de* $C_{m,n} = \binom{m}{n}$.

[1] Tartaglia, Nicolo Fontana (1500-1557), matemático italiano.



Proposta de Aplicação 8 (Teorema das Linhas no Triângulo Aritmético). $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$ *para todo natural* n

Demonstração: Ora, a expressão do 1º membro representa a contagem dos subconjuntos de um conjunto com n elementos (provado por Indução Matemática na Proposta de Aplicação 1, página 61) que é 2^n para todo natural n. ■

Proposição 4.1 (Relação de Stifel). $\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$

Demonstração: Definamos o conjunto A com $m+1$ elementos onde um dos quais é x.

Observe que o número de subconjuntos de A com $n+1$ elementos é $C_{m+1,n+1} = \binom{m+1}{n+1}$, mas esses subconjuntos também podem ser contados considerando subconjuntos de A com $n+1$ elementos onde x figura, $C_{m,n} = \binom{m}{n}$, mais os subconjuntos de A com $n+1$ elementos onde x não figura, $C_{m,n+1} = \binom{m}{n+1}$.

Assim, $\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$, como queríamos. ■

Proposta de Aplicação 9 (Binômio de Newton). *Dados dois números reais, a e b, e um número natural n, tem-se que:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,. \tag{4.1}$$

Demonstração: Seja $P(n)$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}\, b^k$.

Parte (i): Fazendo $n = 1$ em (4.1), temos $\binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a + b = (a+b)^1$. Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Parte (ii): Supondo 4.1 válida para n.

Multiplicando 4.1 por a e b separadamente, temos:

$$a(a+b)^n = a^{n+1} + \binom{n}{1}a^nb + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n \quad (4.2)$$

$$b(a+b)^n = a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + ... + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n-1}ab^n + b^{n+1} \quad (4.3)$$

Agora, somando membro a membro, (4.2) com (4.3), ficamos com:

$a(a+b)^n + b(a+b)^n = a^{n+1} + a^nb + \binom{n}{1}a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2\binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n + \binom{n}{n-1}ab^n + b^{n+1}$

que reorganizada fica:

$(a+b)(a+b)^n = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + (\binom{n}{0} + \binom{n}{1})a^nb + (\binom{n}{1} + \binom{n}{2})a^{n-1}b^2 + ... + (\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1})ab^n + \binom{n+1}{0}b^{n+1}$

Assim, finalizando com o uso da relação de Stifel, concluímos que:

$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + ... + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$

Logo, por Indução Matemática, segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n. ■

Proposta de Aplicação 10. *Se A é uma matriz invertível então, para todo o n natural A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$*

Demonstração: Seja $P(n)$: A é uma matriz invertível ⇒A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Parte (i)*:* Se $n = 1$, temos que $A^1 = A$ e usando as operações básicas temos

$$(A^1)^{-1} = (A^{-1})^1$$

Agora, considere as seguintes propriedades:

1. $A^{n+1} = A^n.A.$

2. $A^{-1} = (A^{-1})^1$

3. Se A e B são invertíveis, então $A.B$ também é e $(A.B)^{-1} = (B^{-1}.A^{-1})$

Parte (ii): Suponhamos a afirmação válida para algum $n > 1$. Usando as propriedades 1 e 2, podemos escrever A^{n+1} como produto de A e A^n, mostrando que A^{n+1} é inversível por ser um produto de matrizes inversíveis.

$$A^{n+1} = A^n.A$$

Agora, com o uso da propriedades 1, 2, 3 e da hipótese de indução $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, fazendo as devidas substituições, mostramos a identidade $(A^{n+1})^{-1} = (A^{-1})^{n+1}$.

$$(A^{n+1})^{-1} = (A^n.A)^{-1} = (A^n)^{-1}.A^{-1} = (A^{-1})^n.A^{-1} = (A^{-1})^n.(A^{-1})^1 = (A^{-1})^{n+1}$$

Assim, por Indução Matemática, A^n é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para todo natural n. ■

4.3 Aplicações na 3ª série do Ensino Médio

Finalizamos nossa lista, apresentando demonstrações de resultados clássicos de números complexos (Teorema de De Moivre) e polinômios (teorema das raízes e Algoritmo de Euclides para Polinômios), que são temas centrais dessa série de ensino. Aos interessados em questões de olimpíadas, separamos outras aplicações oriundas do banco de questões da OBMEP (veja APÊNDICE B, página 78).

Proposta de Aplicação 11 (Teorema de De Moivre). *Se $z = a(cos(t) + isen(t))$ um número complexo e n um natural, então $z^n = a^n.(cos(nt) + isen(nt))$.*

Demonstração: Seja $P(n)$: $z^n = a^n(cos(nt) + isen(nt))$ para todo natural n.

Parte (i): Se $n = 0$, então $z^0 = 1 = a^0.(cos(0.t) + isen(0.t)) = 1.(1 + i.0) = 1.(1 + 0) = 1$. Assim, $P(1)$ é verdadeira.

Parte (ii): Supomos que para um $n > 0$, $P(n)$ seja verdadeira.

Multiplicando ambos os membros de $z^n = a^n(cos(nt) + isen(nt))$ por $z = a(cos(t) + isen(t))$, temos:

$z^n.z = a^n(cos(nt) + isen(nt))a(cos(t) + isen(t))$

Agora, desenvolvendo o produto e reorganizando os termos:

$z^{n+1} = a^{n+1}[cos(nt).cos(t) + isen(t)cos(nt) + isen(nt)cos(t) + i^2sen(nt)sen(t)] = [cos(nt).cos(t) - sen(nt)sen(t) + isen(t)cos(nt) + isen(nt)cos(t)] = [cos(nt).cos(t) - sen(nt)sen(t) + i(sen(t)cos(nt) + sen(nt)cos(t))]$

Finalizando, aplicando as identidades trigonométricas $cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(x).sen(y)$ e $sen(x + y) = sen(x)cos(y) + sen(y).cos(x)$, concluímos que:

$z^{n+1} = a^{n+1}[cos(nt + t) + isen(nt + t)] = a^{n+1}[cos((n + 1)t) + isen((n + 1)t)]$

Logo, por Indução Matemática, $z^n = a^n.(cos(nt) + isen(nt))$ para todo natural n. ■

Proposta de Aplicação 12. *Um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.*

Demonstração: Seja $P(n)$: Um polinômio f de grau $gr(f) = n$ tem no máximo n raízes.

Parte (i): Se $n = 0$ então estamos falando do polinômio constante, que não tem raízes. Logo $P(0)$ é verdadeira.

Parte (ii): Supomos que para $n > 0$, $P(n)$ seja verdadeira. Definamos o polinômio $f(x) = (x - a)^k g(x)$ com $gr(f) = n + 1$, onde a é uma raiz de multiplicidade $k > 0$. Mostraremos que esse polinomio tem no máximo $n + 1$ raízes.

Considere a sequência de fatos a seguir:

1. Como g é não nulo e $n+1 = gr(g) + k$, temos que $gr(g)$ é no máximo n (g tem grau menor que $n+1$);

2. Se f não tivesse outra raíz além de a, nada teríamos a demonstrar.

Agora, vamos supor que b seja outra raíz de f, daí $f(b) = (b-a)^k g(b) = 0$ e, consequêntemente, $g(b) = 0$, isto é, b tem que ser raiz de g. Como o $gr(g) \leq n$ segue que seu número máximo de raízes é n, pela hipótese de indução. Assim o número máximo de raízes de f é $n+1$.

Logo, por Indução Matemática, segue que um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes. ∎

Proposta de Aplicação 13 (Algoritmo de Euclides para Polinômios)**.** *Sejam a e b dois polinômios com coeficientes reais e $b \neq 0$. Então existem polinômios com coeficientes reais q e r, com $r = 0$ ou grau de r menor que o grau de b tais que:*

$$a = bq + r$$

Além disso, q e r estão determinados de modo único.

Demonstração: Começaremos mostrando a existência de q e r, para isso demonstraremos em duas partes (I e II).

Parte I da existência: Se $a = 0$ ou $gr(a) < gr(b)$, basta colocarmos $q = 0$ e $r = a$, está mostrado que existem esses q e r.

Parte II da existência: Se $gr(a) \geq gr(b)$, procederemos usando Indução Matemática sobre $n = gr(a)$.

Parte (i) da Indução Matemática: Note que $gr(a) = 0$ acarreta que a e $b \neq 0$ são polinômios constantes. Logo, basta tomarmos $q = \frac{a}{b}$ e $r = 0$. Assim, fica mostrado que para $n = 1$ a proposição é verdadeira.

Parte (ii) da Indução Matemática: Supomos verdadeira para $gr(a) = n$.

Seja os polinômios não nulos $a = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} ... + a_0$ de grau n, $b = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} ... + b_0$ de grau m. Mostraremos a validade da proposição para um polinômio $c = c_{n+1}x^{n+1} + c_n x^n + ... + c_0$ de grau $n+1$.

Definamos $d = c - \frac{c_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}b$. Observe que, desse modo, $gr(d) \leq n$, assim, pela hipótese de indução, $d = bq + r$ onde $r = 0$ ou grau de r menor que o grau de b. Mas, podemos escrever $c = d + \frac{c_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}b$ e substituir $d = bq + r$. Isto é:

$$c = bq + r + \frac{c_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}b$$

Daí, reorganizando os termos, temos que $c = b(q + \frac{c_{n+1}}{b_n}x^{n+1-m}) + r$ com $r = 0$ ou grau de r menor que o grau de b, como queríamos.

Logo, por Indução Matemática, segue que existem q e r nas condições do enunciado para todo natural n.

Agora, mostraremos a unicidade de q e r:

Suponhamos $a = bq + r$ e $a = bq_1 + r_1$, nas condições do teorema. Mas, daí teríamos $b(q - q_1) = (r_1 - r)$ com $gr(b(q - q_1)) > gr(r_1 - r)$ e b dividindo $r_1 - r$, o que só é possível se $r_1(x) - r(x) = 0$. Logo, $r_1 = r$ e, consequentemente, $q = q_1$. $\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] BAUMGART, John K. *Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula.* Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, p. 124, 2002.

[3] CRUZ, Marcia. *Laboratório de Apoio Computacional I - Apostila - Usando o software Maple.* Disponível em: <http://minerva.ufpel.edu.br/ alejandro.martins/dis/2012_ 1/ciii/material/apostila_ maple.pdf> Acesso em: 12 de janeiro de 2015.

[4] INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. *Banco de Questões - OBMEP* . Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm> Acesso em: 27 de fevereiro de 2015.

[5] DONADELLI, Jair. *Notas de aulas - Teoria Aritmética dos Números.* Disponível em: <http://professor.ufabc.edu.br/ jair.donadelli/tan.pdf> Acesso em: 01 de dezembro de 2014.

[6] GUIMARÃES, Yara; MIRANDA, Dimas. *UTILIZAÇÃO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA INVESTIGATIVA NAS AULAS DE CÁLCULO NUMÉRICO EM*

CURSOS DE ENGENHARIA. Belo Horizonte: ABENGE, 2010. Disponível em: < http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2010/artigos/508.pdf > Acesso em: 12 de janeiro de 2015.

[7] HEFEZ, Abramo. *Indução Matemática*. Rio de Janeiro: SBM , 2007. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296654.o> Acesso em: 1 de agosto de 2014.

[8] LIMA, Elon Lages et. al.*A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] PEREIRA, Paulo C. A. *O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA - uma abordagem no ensino médio*. 2013. 46f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

[10] PERETTI, Lisiane.; TONIN DA COSTA, Gisele Maria. *Didática na Matemática*. Getúlio Vargas: A REI - Revista de Educação do IDEAU, 2013. Disponível em: <http://www.ideau.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/31_1.pdf> Acesso em: 12 de janeiro de 2015.

[11] SANTOS, Anderson.*O USO DE DEMONSTRAÇÕES NO AMBIENTE ESCOLAR A PARTIR DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA*. 2013. 52f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

[12] SOMINSK, J. S. *Método de Indução Matemática* Tradução de Gelson Iezzi. São Paulo: Atual: Moscou: Editora: MRL, p. 59, 1996.

Apêndice A

Folhas de Registros

SUGESTÕES DE FICHAS PARA REGISTROS DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Ficha de Registro para Avaliação do Grupo ____ - Etapa I

Aluno(a) 1:___________________________________
Aluno(a) 2:___________________________________
Aluno(a) 3:___________________________________

Graduação de execução da proposta	Totalmente	Parcialmente	Não
Os alunos investigaram, corretamente, os valores propostos?			
Foram capazes de fazer observações de padrões?			
Elaboraram uma conjectura plausível?			
Observações:			

Ficha de Registro para Avaliação do Grupo ____ - Etapa II

Aluno(a) 1:___________________________________
Aluno(a) 2:___________________________________
Aluno(a) 3:___________________________________

Graduação de execução da proposta	Totalmente	Parcialmente	Não
Os alunos compreenderam as duas partes do método?			
Definiram onde queriam chegar?			
Estabeleceram relações entre os fatos expostos, buscando alcançar o passo indutivo?			
Conseguiram expressar algebricamente as relações, concluindo uma demonstração de forma organizada?			
Observações:			

Ficha de Registro para Avaliação individual do Aluno - Etapa III **Aluno(a) 1:____ Grupo:____**			
Graduação de execução da proposta	Totalmente	Parcialmente	Não
O aluno investigou, corretamente, os valores propostos?			
Foi capaz de fazer observações de padrões e elaborar uma conjectura plausível?			
Estabeleceu relações entre os fatos expostos buscando alcançar o passo indutivo?			
Conseguiu expressar algebricamente as relações concluindo uma demonstração organizadamente?			
Observações:			

Ficha de Registro para Avaliação individual do Aluno - Etapa III **Aluno(a) 2:____ Grupo:____**			
Graduação de execução da proposta	Totalmente	Parcialmente	Não
O aluno investigou, corretamente, os valores propostos?			
Foi capaz de fazer observações de padrões e elaborar uma conjectura plausível?			
Estabeleceram relações entre os fatos expostos buscando alcançar o passo indutivo?			
Conseguiram expressar algebricamente as relações concluindo uma demonstração organizadamente?			
Observações:			

Ficha de Registro para Avaliação individual do Aluno - Etapa III **Aluno(a) 3:____ Grupo:____**			
Graduação de execução da proposta	Totalmente	Parcialmente	Não
O aluno investigou, corretamente, os valores propostos?			
Foi capaz de fazer observações de padrões e elaborar uma conjectura plausível?			
Estabeleceu relações entre os fatos expostos buscando alcançar o passo indutivo?			
Conseguiu expressar algebricamente as relações concluindo uma demonstração organizadamente?			
Observações:			

Apêndice B

Indução Matemática e a OBMEP

Apesar de não ser comtemplada nos currículos escolares, a Indução Matemática costuma ser cobrada na OBMEP, em provas de 2ª fase do nível 3 (Ensino Médio).

Almejamos, nessa seção, fornecer uma fonte de problemas, extraídos do Banco de questões da OBMEP [4], para professores interessados em preparar seus alunos para esse tipo de avaliação.

Problema Olímpico 1 (OBMEP- Nível 3 - Maior Divisor Ímpar)**.** *Seja n um número inteiro positivo. Para cada um dos inteiros $n+1, ..., 2n$ considere o seu maior divisor ímpar. Prove que a soma de todos estes divisores é igual a n^2.*

Solução: Usaremos a 1ª forma do Princípio da Indução Matemática. Chamemos de S_n a soma dos maiores divisores ímpares dos números $n+1, ..., 2n$.

Seja $P(n)$: A soma dos maiores divisores ímpares dos números $n+1, ..., 2n$ é $S_n = n^2$.

Parte (i): Se $n = 1$, temos o inteiro $1 + 1 = 2$ cujo único divisor inteiro ímpar é $1 = 1^2 = S_1$.

Parte (ii): Supomos que seja verdade para n, isto é, $S_n = n^2$ seja a soma dos maiores divisores ímpares dos números $n+1, ..., 2n$.

Se queremos calcular S_{n+1} , que é a soma dos maiores divisores ímpares dos números

$$n+2, n+3, ..., 2n, 2n+1, 2(n+1),$$

como $n+1$ e $2(n+1)$ têm os mesmos divisores ímpares, isto é equivalente a somar os maiores divisores ímpares de

$$n+2, n+3, ..., 2n+1, n+1$$

que é igual a $S_n + (2n+1)$. Assim, $S_{n+1} = S_n + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Pelo Princípio da Indução Matemática, segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Problema Olímpico 2 (OBMEP - Nível 3 - Soma de Potências)**.** .

(a) Mostre que a identidade abaixo é sempre verdadeira:

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab.(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

(b) Sejam a e b números reais tais que $a+b=1$ e $ab=-1$. Mostre que o número $a^{10}+b^{10}$ é inteiro.

Solução do item (a):

Observe que

$(a+b)(a^n + b^n) = a^{n+1} + ab^n + ba^n + b^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + ab(a^{n-1} + b^{n-1})$

Daí, $a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab.(a^{n-1} + b^{n-1})$.

Solução do item (b):

O exercício pede para mostrar que $f_n = a^n + b^n$ é inteiro para $n = 10$, iremos mais além e mostraremos que $f_n = a^n + b^n$ é inteiro para todo n natural e para isso usaremos Indução Matemática.

$$\boxed{\text{Seja } P(n)\textbf{: } f_n = a^n + b^n \textbf{ é inteiro para todo } n}$$

Parte (i): $f_1 = a + b = 1$ que é inteiro. Logo $P(1)$ é verdadeira

Parte (ii): Supomos que para $n > 1$, $P(n)$ seja verdadeira. Mas pelo item (a),

$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$

$= 1.(a^n + b^n) - (-1)(a^{n-1} + b^{n-1})$

$= 1.(a^n + b^n) + (a^{n-1} + b^{n-1})$

mas, pela hipótese de indução, $(a^n + b^n)$ e $(a^{n-1} + b^{n-1})$ são inteiros, logo, $a^{n+1} + b^{n+1}$ é uma soma de inteiros e, portanto, é inteiro.

Assim, por Indução Matemática, segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Problema Olímpico 3 (OBMEP - Lendo os pensamentos de Ivan)**.** *Sergio pediu para Ivan pensar em um número inteiro positivo. Depois, pediu para Ivan calcular a soma de seus algarismos e, finalmente, elevar ao quadrado o resultado. Sem falar o número em que pensou inicialmente, Ivan contou que obteve como resultado final x. Mostre a Sergio como chegar às seguintes conclusões:*

a) Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 *ou menos algarismos, então x seria menor do que* 730 *.*

b) Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 *algarismos, então x seria menor do que o número no qual Ivan pensou.*

c) Se Ivan tivesse pensado em um número com 5 *ou mais algarismos, então x seria menor do que o número que Ivan pensou.*

Sergio fez depois o seguinte: Considerou o número x que Ivan disse, calculou a soma dos seus algarismos e elevou ao quadrado o resultado. Quando Sergio falou para Ivan o número que obteve, Ivan disse com surpresa que esse foi o número que havia pensado.

d) Determine todos os possíveis valores para o número que Ivan pensou.

Solução do item (a):

Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, a soma de seus algarismos seria no máximo $9+9+9=27$. Então o número final de Ivan x seria no máximo $27^2 = 729$.

Solução do item (b):

Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 algarismos, digamos $abcd$, então $x=(a+b+c+d)^2$. Distinguimos duas possibilidades.

Primeiro, se $a=1$, então

$$x \le (1+9+9+9)^2 = 784 < abcd.$$

Agora, se $a \ge 2$, então

$$x \le (9+9+9+9)^2 = 1296 < abcd.$$

Em qualquer um dos casos, $x < abcd$.

Solução do item (c):

Suponhamos que Ivan pensou em um número com $n \ge 5$ algarismos, digamos $a_1a_2...a_n$.

Daí, $x=(a_1+a_2+...+a_n)^2$. Logo,

$$x \le (9+9+9...9)^2 = (9.n)^2 = 81.n^2 \tag{B.1}$$

Observe que

$$10^{n-1} \le a_1a_2...a_n \tag{B.2}$$

Então, para mostrar que $x < a_1a_2...a_n$ basta mostrar que, para todo inteiro $n \ge 5$ temos:

$$81.n^2 < 10^{n-1} \tag{B.3}$$

e usar (B.1) junto com (B.2).

Para mostrar (B.3), procederemos por indução.

Seja $P(n)$: $81n^2 < 10^{n-1}$ para $n \geq 5$

Parte (i): Para $n = 5$, temos

$$81.5^2 = 1755 < 10000 = 10^{5-1}$$

Parte (ii): Suponhamos então que essa desigualdade é válida para algum inteiro $n \geq 5$, ou seja,

$$81n^2 < 10^{n-1} \tag{B.4}$$

Vamos mostrar que ela é válida para $n+1$. Observemos que, por ser $n \geq 5$, então

$$81(n+1)^2 < 81(2.n)^2 = 4(81n^2) \tag{B.5}$$

Usando a hipótese de indução (B.4) vemos que

$$4(81.n^2) < 4(10^{n-1}) \tag{B.6}$$

Como $4 < 10$ vemos que a última expressão em B.6 é menor do que $10.10^{n-1} = 10^n$. Isto é,

$$4.10^{n-1} < 10.10^{n-1} = 10^n$$

De (B.5), (B.6) e da última observação, obtemos que

$$81(n+1)^2 < 10^{(n+1)-1}$$

Isto conclui a prova por indução e $P(n)$ é, portanto, verdadeira.

Solução do item (d):

Seja I o número pensado por Ivan. Vamos mostrar que $I < 730$. Suponhamos que não seja assim, isto é que $I \geq 730$. Como I é o número final obtido por Sergio a partir de x, podemos aplicar a parte (a) (para Sergio em lugar de Ivan) e concluir que x tem 4 ou mais algarismos. Logo, usando as partes (b) e (c) para Sergio concluímos que $x > I$. Em particular, $x \geq 730$. Pela parte (a), sabemos que então I deve ter 4 ou mais algarismos. Logo, usando as partes (b) e (c) concluímos que $I > x$. Chegamos assim a uma contradição. Fica provado então que $I < 730$.

Além disso, como I é o número final de Sergio, então I é um quadrado perfeito.

Finalmente, basta verificar quais dos valores em $1^2, 2^2, 3^2, 26^2$ e $27^2 = 729$ pode I tomar. Depois dessa verificação vemos que os possíveis valores para onúmero que Ivan pensou são $1, 81, 169$ e 256.

Apêndice C

Uma Possibilidade Computacional: Obtenção de fórmulas pelo MapleSoft

Caso a escola tenha um laboratório de apoio computacional e o sotware MapleSoft[1], podemos usar tais recursos para elaboração das conjecturas.

Segundo Cruz [3]:

> "O uso do computador como ferramenta no ensino, é hoje bastante utilizado em quase todas as áreas. A informática é uma das alternativas mais poderosas no ensino moderno, principalmente aqueles que envolvem modelos matemáticos."

.

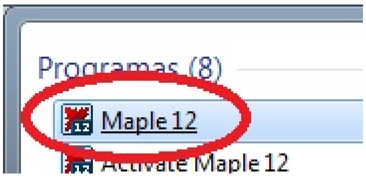
O SofMaple é um sistema matemático simbólico interativo que possui recursos para resolver questões como cálculo algébrico, interpretação de conceitos, visualização gráfica, modelagem de problemas e etc. Aqui, ele será aplicado, apenas, para modelar fórmulas e verificar a validade de nossas conjecturas (identidades envolvendo

[1]Sugerimos o estudo da apostila 'Um Curso de Maple' disponível em www.alunospgmat.ufba.br/adrianocattai/construcoes/maple/manuais/maple-curso-uesc.pdf e indicamos o site http://www.maplesoft.com/ para aquisição do software

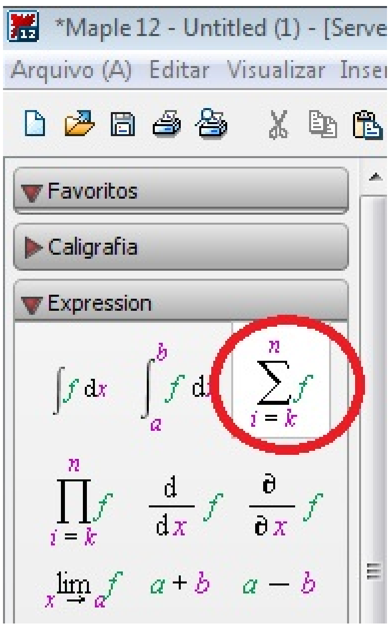
somatórios ou produtórios). Observamos que estamos usando o sistema operacional Windows 7 e o software MapleSoft 12 e que o procedimento, a seguir, é o mesmo para outros somatórios ou produtórios, que venham a ser investigados.

Exemplo C.1. *Vamos buscar um expressão para a soma dos n primeiros números naturais. Isto é, para* $1 + 2 + 3 + ... + n$.

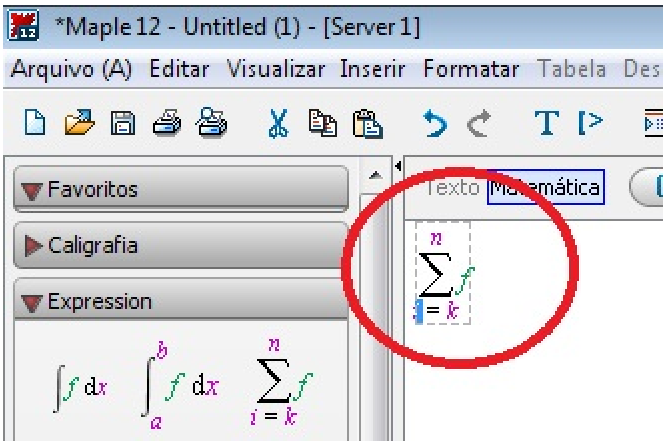
1º passo: Abrir o programa: '1 clique' com botão esquerdo no link circulado.

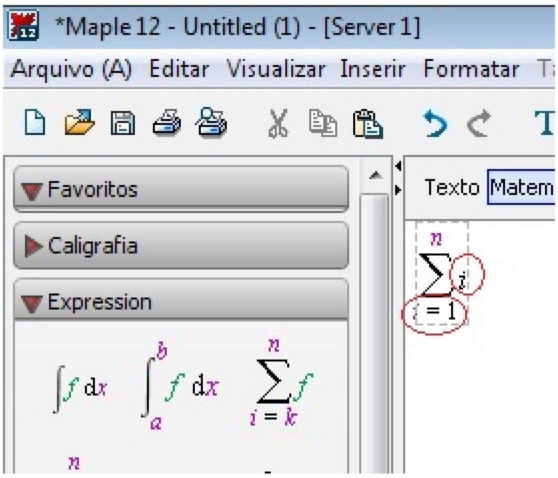


2º passo: Inserir o somatório: '1 clique' com botão esquerdo do mouse no item circulado.



3º passo: Substituir os devidos valores na expressão e teclar 'Enter'. No caso, trocaremos o k pelo 1 e o f pelo i, indicando a soma $1+2+3+...+n$, que queremos modelar.

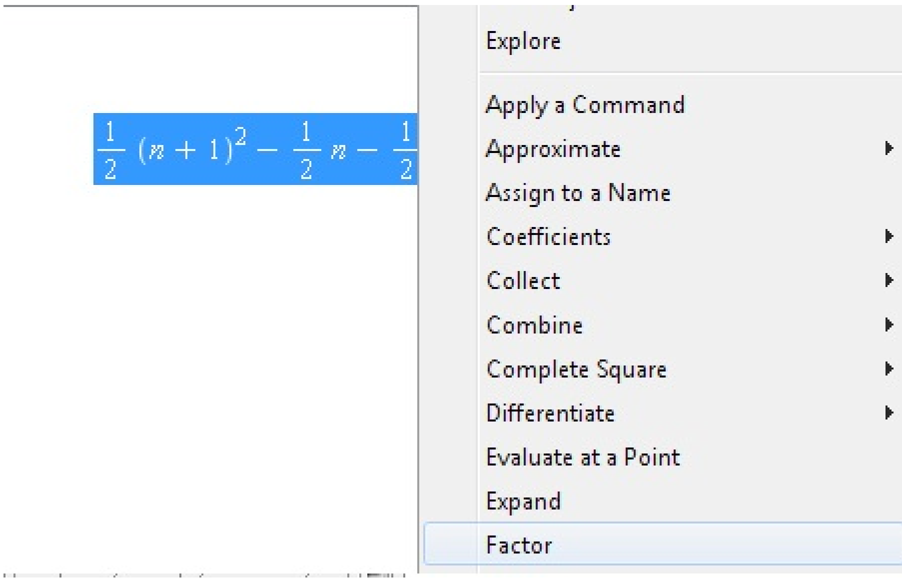




4º e último passo: Selecionar a expressão resultante, dar um clique com o botão direito do mouse e clicar com o botão esquerdo do mouse em 'Factor', o que nos fornecerá uma expressão fatorada.

Nesse momento, teremos uma expressão para o somatório, que esperamos estar de acordo com a que conjecturamos.

$$\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$$



$\overset{\text{factor}}{=}$

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

Chamamos a atenção para o fato de que o MapleSoft não fornece uma expressão para todos os casos de proposições sugeridas nesse trabalho e não substitui a criatividade humana, constituindo-se assim como uma ferramenta adicional para alguns casos; também observamos que o mesmo procedimento pode ser usado para produtórios.