



Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Centro de Ciências Exatas e da Terra  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**Venício do Nascimento Silva**

**Teorema de Tales e suas Aplicações**

Natal, fevereiro de 2015

Venício do Nascimento Silva

## Teorema de Tales e suas Aplicações

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Geometria Plana

Orientador:  
Prof. Dr. Cláudio Carlos Dias

Natal, Fevereiro de 2015

Venício do Nascimento Silva

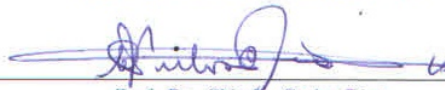
## Teorema de Tales e suas Aplicações

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Geometria Plana

Aprovado em:     /     /

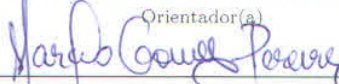
### Banca Examinadora:



Prof. Dr. Cláudio Carlos Dias

Centro de Ciências Exatas e da Terra- UFRN

Orientador(a)



Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira

Centro de Ciências Exatas e da Terra- UFRN

Examinador Interno



Prof. Dr. Ivan Mezzomo

Universidade Federal Rural do Semi-Árido- UFERSA

Examinador Externo

# Dedicatória

Dedico a Deus e a toda minha família, em especial a minha mãe Francinete Bezerra do Nascimento Silva ( Dona Detinha) e a meu pai José Ferreira da Silva ( Zé Dentinho), a meu filho Marcos Vinícius de Medeiros Silva e a minha filha Mayra Vivian de Medeiros Silva. Não posso deixar de dedicar esse trabalho também a minha fortaleza, meu ponto de apoio, a minha querida esposa Maria José Barbosa de Medeiros (Nininha).

# Agradecimentos

Começo agradecendo a Deus, por mais uma conquista em minha vida. A meu pai, Zé Dentinho que sempre me ensinou que deveria seguir uma vida honesta e com muito trabalho. À minha mãe, Dona Detinha, por ter sempre me incentivado a estudar. À minha esposa, por me apoiar durante toda minha vida acadêmica. A minha filha Mayra pelo carinho e as alegrias que me proporciona, ao meu filho Marcos Vinícius pelos incentivos, carinhos e alegrias e a um grande amigo e incentivador Márcio Vieira. Aos membros da banca de avaliação, em especial ao professor Dr. Cláudio Dias, pelas discussões e pelo direcionamento do trabalho. Aos professores do PROFMAT, pelas belíssimas aulas e discussões que muito me enriqueceram. Aos colegas de curso Almir, Antônio Roberto, Cláudio, Jonimar, Márcio e Roberto, pela força e pelos estudos em grupo. À CAPES pelo apoio financeiro e à Sociedade Brasileira de Matemática pela criação e implantação do PROFMAT no Brasil. À todos meus mais sinceros agradecimentos.

”Mais do que o conhecimento, o que faz o verdadeiro mestre é a dedicação. Aos que, possuindo sabedoria, transmitiram-na com amor, o nosso preito de imorredoura gratidão. Aos que souberam suprir as limitações, doando-se por inteiro, nosso perene reconhecimento. Aos que simplesmente nos passaram conhecimento: muito obrigado. E aos que, carecendo de luzes, foram incapazes de se doar, que não sejam julgados, mas compreendidos.”

Johann W. Goethe (1749-1832),  
poeta alemão.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo maior, demonstrar o teorema de Tales, de tal forma, que um aluno do ensino médio possa entender. Um modelo concreto é proposto para ser utilizado pelo aluno em sala de aula, de maneira a compreender os conceitos e aplicações, no tocante, a cartografia, trigonometria e principalmente em triângulos semelhantes, onde demonstramos os principais casos de semelhança, pois esses, são ferramentas eficazes na resolução de situações-problemas na área da geometria plana. Para um melhor entendimento desse trabalho usamos o geogebra para que o aluno possa relacionar teoria e prática em sala de aula, bem como os conceitos de semelhança de triângulos sejam melhor apresentados e assimilados, assim como as respectivas propriedades de cada modelo.

**Palavras-chave:** Teorema de Tales, Semelhança de Triângulos, Geogebra.

# Abstract

This work has as principal objective to demonstrate the Thales' Theorem, so that a high-school student can comprehend it effectively. Thus, a concrete model is proposed to be used by the student in classroom, so he understands about the concepts and applications with respect to cartography, trigonometry and mainly to similar triangles, in which we demonstrate the main cases of similarity, since these are effective tools in solving the problem situations in the area of plane geometry. For a better understanding of this work, we use GeoGebra so that the student can relate theory and practice in classroom, in order that the concepts about similar triangles are best presented and assimilated, as well as their properties to each model.

**Keywords:** Thales Theorem, Similar Triangles, Geogebra.



# Sumário

<b>1</b>	<b>A Matemática na História</b>	<b>2</b>
1.1	Abordagem Histórica . . . . .	2
1.2	Teorema 1 . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Semelhança de Triângulos</b>	<b>11</b>
2.1	Proposição 1 . . . . .	13
2.2	Proposição 2 . . . . .	15
2.3	Proposição 3 . . . . .	16
2.4	Razão entre Áreas de Polígonos Semelhantes . . . . .	17
2.4.1	Proposição 4 . . . . .	17
2.4.2	Proposição 5 . . . . .	19
2.4.3	Corolário . . . . .	20
2.5	Teorema de Tales no Espaço . . . . .	21
2.5.1	Teorema de Tales para planos paralelos . . . . .	21
2.6	Construção de Pirâmides Semelhantes . . . . .	23
2.7	Razão entre os Volumes de dois Sólidos Semelhantes . . . . .	24
2.7.1	Proposição 6 . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Triângulos Congruentes</b>	<b>27</b>
3.1	Definição . . . . .	27
3.2	Casos de Congruências . . . . .	28
3.2.1	1º Caso de Congruência: <b>LAL</b> . . . . .	28
3.2.2	2º Caso de Congruência: <b>ALA</b> . . . . .	29
3.2.3	3º Caso de Congruência: <b>LLL</b> . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Algumas Aplicações da Semelhança de Triângulos</b>	<b>33</b>
4.1	Trigonometria no Triângulo Retângulo . . . . .	33
4.1.1	Definição . . . . .	34
4.1.2	Proposição 1 (Identidade Fundamental) . . . . .	34

4.2	Projeção Estereográfica ou Ptolomaica . . . . .	35
4.3	A Construção do Conceito de Semelhança de Triângulos Com o Auxílio do Geogebra . . . . .	40

# Introdução

A situação atual do ensino público é preocupante devido a necessidade que o professor tem de introduzir novas metodologias de ensino que consiga despertar o interesse dos alunos. Isso se agrava quando particularizamos para a área de matemática, especialmente a geometria. Neste sentido, este trabalho apresenta exemplos do que chamamos de modelos concretos de geometria. Apresentamos, em particular, os modelos específicos: razão e proporção entre segmentos, casos de semelhança de triângulos e relação entre as áreas de dois triângulos semelhantes.

Observamos que, em geral, os alunos do ensino fundamental confundem os conceitos de congruência e semelhança de triângulos. Com a utilização desses modelos como recurso didático em sala de aula, é possível despertar interesse no aluno, auxiliá-lo na compreensão dos conceitos de semelhança e congruência de triângulos e obter as propriedades geométricas relacionadas com esses modelos, as quais serão descritas no objetivo do respectivo modelo e nos resultados.

# Capítulo 1

## A Matemática na História

### 1.1 Abordagem Histórica

Para tratar de semelhança, é imprescindível retomar os estudos do filósofo e matemático grego Tales de Mileto <sup>1</sup> ( 624-547 a.C) , cujo nome está associado ao teorema:

*“Se um feixe de paralelas é interceptado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.”*

Esse teorema é conhecido como teorema de Tales. Sabe-se pouco a respeito da vida e da obra de Tales. Acredita-se que ele tenha sido o primeiro filósofo e geômetra grego conhecido e o primeiro dos sábios gregos. Acredita-se também que ele seja o criador da Geometria demonstrativa.



Nenhum dos escritos de Tales chegou até nós, o que dificulta a determinação precisa de suas ideias ou a certeza a respeito das descobertas matemáticas que realizou. Muito

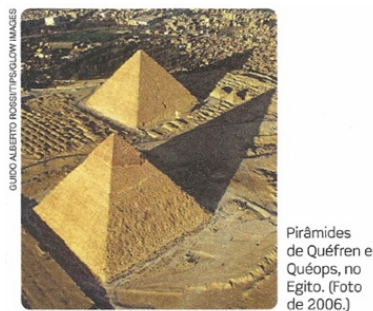
---

<sup>1</sup>Tales de Mileto foi um filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, o primeiro filósofo ocidental de que se tem notícia. De ascendência fenícia, nasceu em Mileto, antiga colônia grega, na Ásia Menor, atual Turquia, por volta de 623 a.C. ou 624 a.C. e faleceu aproximadamente em 546 a.C. ou 548 a.C..

do que sabemos a respeito dele provém do chamado Sumário eudemiano, escrito pelo matemático, filósofo e comentarista grego Proclus<sup>2</sup> (411-485 d.C.).

O Sumário eudemiano é um breve resumo do desenvolvimento da Geometria grega desde os primeiros tempos até a época de Euclides, e é ainda hoje o nosso principal registro histórico a respeito do início dessa ciência na Grécia. Muitos dos conhecimentos de Tales provieram de viagens que ele empreendeu, em especial ao Egito. Tales residiu temporariamente no Egito e, lá, teria aprendido Geometria com os sacerdotes egípcios e, também, aplicado a semelhança de triângulos.

Segundo o Sumário eudemiano, Tales introduziu a Geometria na Grécia após essas viagens. Utilizando metodologias gerais e empíricas, o filósofo grego descobriu muitas proposições, algumas das quais, provavelmente, envolviam semelhança. Além de Proclus, outras fontes mencionam o nome de Tales. O grego Eudemo de Rodas (350-290 a.C.), o primeiro grande historiador da Matemática, por exemplo, afirma que o mesmo mediu a distância de uma torre a um navio.



Pirâmides de Quéfren e Quéops, no Egito. (Foto de 2006.)

Hierônimo, um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), afirmou que Tales teria medido a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito, por meio da observação e da comparação da própria sombra com a sombra da pirâmide. Nesse processo, quando a sombra tivesse o mesmo comprimento da altura dele, a sombra da pirâmide teria o mesmo comprimento que a altura dela.

O matemático e filósofo grego Plutarco (46-119 d.C.) também menciona Tales em sua obra, ao dizer que o mesmo mediu a altura da pirâmide fincando verticalmente uma vara no chão e comparando as razões entre os dois triângulos formados. Com base nesses relatos, vimos que as ideias de proporcionalidade e de semelhança, em particular entre triângulos, estão estreitamente associadas ao nome de Tales. Unindo esses relatos ao fato de a Arquitetura e a Agrimensura terem grande importância no Egito antigo,

---

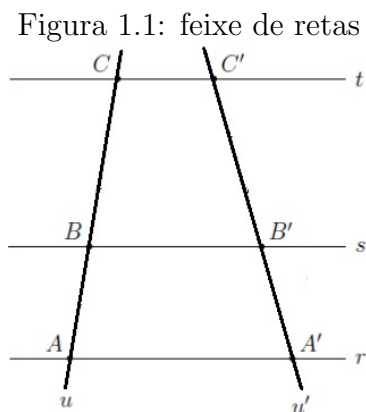
<sup>2</sup>Proclus Lycaeus foi um filósofo neoplatônico grego do século V. Teve o mérito de desenvolver a corrente de pensamento baseada em Platão, iniciada por Plotino e depois expandida por Porfírio e Jámblico. Proclo combina os seus próprios pontos-de-vista com os de seus mestres - Plutarco, Siriano de Alexandria, Porfírio e Jámblico.

bem como ao fato de Tales ter sido o fundador da Geometria demonstrativa na Grécia e o originador da organização da Matemática dedutiva, é razoável a hipótese de que a primeira sistematização da Geometria tenha ocorrido na época de Tales.

O teorema que iremos enunciar a seguir constitui-se numa etapa essencial para o estabelecimento da teoria das figuras semelhantes que será desenvolvida no próximo capítulo. Na sua demonstração iremos utilizar o fato de que todo o número real pode ser aproximado por números racionais.

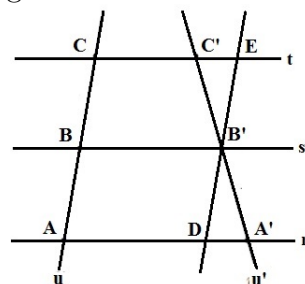
### O teorema de Tales

Consideremos a seguinte situação: temos no plano retas paralelas  $r$ ,  $s$  e  $t$ . Traçamos, em seguida, retas  $u$  e  $u'$ , a primeira interceptando  $r$ ,  $s$  e  $t$  respectivamente nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e a segunda interceptando  $r$ ,  $s$  e  $t$  respectivamente em  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ .



Se fosse  $\overline{AB} = \overline{BC}$ , teríamos, o ponto  $B$  como sendo o ponto médio de  $\overline{AC}$  e se traçarmos uma reta paralela a  $\overline{AC}$  passando pelo ponto  $B'$ , essa nova reta interceptará as retas  $r$  e  $t$  nos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente, como mostra a figura 1.2.

Figura 1.2: feixe de retas 2



Podemos afirmar que os triângulos  $B'DA'$  e  $B'EC'$  são congruentes. De fato, como  $DB'BA$  e  $B'ECB$  são paralelogramos, então  $\overline{DB'} = \overline{AB}$  e  $\overline{B'E} = \overline{BC}$ . Como  $\overline{AB} = \overline{BC}$  por hipótese, então concluímos que  $\overline{DB'} = \overline{B'E}$ . Observe que os ângulos  $\widehat{DB'A'}$  e  $\widehat{EB'C'}$  são congruentes por serem opostos pelo vértice e  $\widehat{B'DA'}$  e  $\widehat{B'EC'}$  são também congruentes por serem ângulos correspondentes determinados por uma transversal cortada pelas paralelas  $r$  e  $t$ . Isto prova a nossa afirmação. Da congruência dos triângulos  $B'DA'$  e  $B'EC'$  decorre imediatamente que  $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$ , fazendo com que o ponto  $B'$  seja o ponto médio de  $\overline{A'C'}$ . De outra forma, já sabemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1$$

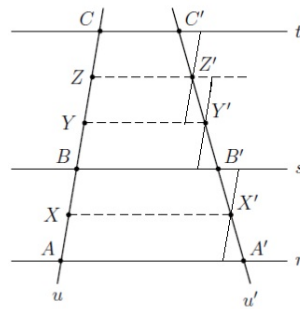
Suponha, agora, que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  seja um número racional, digamos  $\frac{2}{3}$ , para exemplificar.

Dividamos, então, os segmentos  $AB$  e  $BC$  respectivamente em duas e três partes iguais, obtendo pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  em  $u$ , tais que:

$$\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$$

Se traçarmos por  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  paralelas às retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , as quais interseptam  $u'$  respectivamente em  $X'$ ,  $Y'$  e  $Z'$ , conforme figura 1.2, então mais três aplicações de retas paralelas a reta  $u$ , formaremos cinco paralelogramos, conforme figura 1.3.

Figura 1.3: feixe de retas 3



E analogamente, podemos garantir que

$$\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$$

e, daí,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}$$

Prosseguindo com nosso raciocínio, suponha, agora, que fosse  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$ , ou ,  $\overline{AB} = m \cdot \frac{\overline{BC}}{n}$ , onde  $n, m \in \mathbb{N}$ . Isso significa que podemos dividir o segmento  $AB$  em  $m$  partes iguais a  $\frac{\overline{BC}}{n}$ . Usando o mesmo procedimento das paralelas a reta  $u$ , podemos construir  $m + n$  paralelogramos, garantindo que,  $\overline{A'B'}$  se divide em  $m$  partes iguais a  $\frac{\overline{B'C'}}{n}$ , ou seja,  $\overline{A'B'} = m \cdot \frac{\overline{B'C'}}{n}$ , o que dá,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$$

Desse modo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

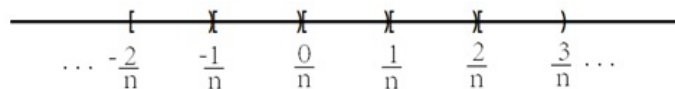
é válida sempre que o primeiro (ou o segundo) membro for um racional.

A pergunta natural nesse momento é a seguinte: a igualdade das razões acima se mantém quando um dos membros da mesma for um número irracional? A resposta é sim, e, para entender o porquê disso, devemos mostrar que todo número irracional pode ser aproximado por números racionais.

Fixando  $n \in \mathbb{N}$  podemos escrever que, o conjunto dos reais é a união de todos os intervalos  $\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$  com  $m \in \mathbb{Z}$ , ou seja,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$$

Figura 1.4: Reta real



Qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , existe um  $m \in \mathbb{Z}$ , tal que,  $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$ . Com isso, temos

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}$$

Como  $\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ , temos

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$



Subtraindo  $\frac{m}{n}$  da desigualdade, temos

$$\frac{m}{n} - \frac{m}{n} \leq x - \frac{m}{n} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} - \frac{m}{n} \Rightarrow 0 \leq x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

Se  $-\frac{1}{n} < 0$ , então teremos a seguinte desigualdade

$$-\frac{1}{n} < 0 \leq x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

Ou seja

$$-\frac{1}{n} < x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

Logo,

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

Observemos agora que quanto maior for o valor de  $n$  menor é o valor de  $\frac{1}{n}$ . Isso significa que dado um número real  $\epsilon > 0$ , por menor que ele seja, é possível encontrar um valor de  $n$ , grande o suficiente, para que se tenha  $\frac{1}{n} < \epsilon$ .

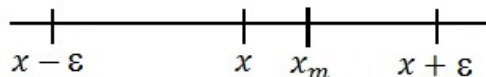
Feito isso podemos escrever,

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \epsilon$$

que é o mesmo que dizer que a distância de  $x$  ao número racional  $x_m = \frac{m}{n}$  é menor do que  $\epsilon$ . Ou seja o número racional  $x_m = \frac{m}{n}$  aproxima  $x$ . Expressamos isso dizendo que o conjunto dos números racionais é denso na reta.

Em geral, tomemos  $x \in \mathbb{R}$ , com  $x$  irracional,  $n \in \mathbb{N}$ , então existe um  $x_m \in \mathbb{Q}$  tal que a distância de  $x$  a  $x_m$  é tão pequena quanto se possa imaginar, isso significa que  $dist(x, x_m) = |x - x_m| < \epsilon$ , ou necessariamente, podemos dizer que  $x_m - \epsilon < x < x_m + \epsilon$ , como mostra a figura 1.5:

Figura 1.5:

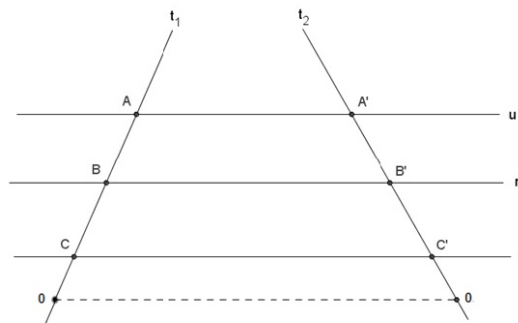


Em palavras  $x_m$  aproxima  $x$  com um erro menor do que  $\epsilon$ .

Voltando a situação inicial, suponha que a reta transversal  $t_1$ , intercepte as retas  $u$ ,  $r$  e  $s$ , paralelas entre si, nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente e a reta transversal  $t_2$ , intercepte as mesmas retas paralelas nos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , respectivamente. Agora, considere que as retas transversais  $t_1$  e  $t_2$  tenham coordenadas reais, de tal modo, que

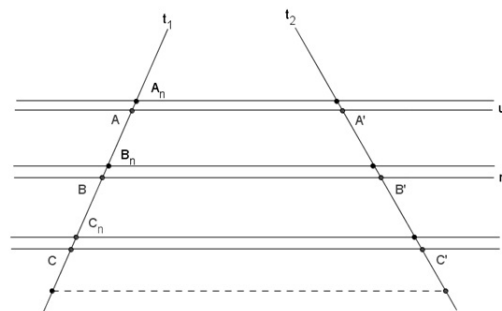
o ponto 0 (zero) esteja abaixo do ponto  $C$  na transversal  $t_1$  e abaixo do ponto  $C'$  na transversal  $t_2$ , conforme figura 1.6.

Figura 1.6:



Considere que o ponto  $A$  tenha coordenada  $a$ , o ponto  $B$  coordenada  $b$  e o ponto  $C$  coordenada  $c$ , fazendo  $\frac{a-b}{b-c} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \alpha$ , com  $\alpha$  irracional. Como todo irracional pode ser aproximado por uma sequência de racionais, então, tomemos as sequências de pontos  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_n$  com coordenadas representadas pelas seguintes sequências de racionais  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_n$ , de modo que,  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  e  $c_n \rightarrow c$ , conseqüentemente,  $A_n \rightarrow A$ ,  $B_n \rightarrow B$  e  $C_n \rightarrow C$ , conforme figura 1.7.

Figura 1.7:



Logo

$$\frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{B_n C_n}} = \frac{a_n - b_n}{b_n - c_n} \rightarrow \frac{a - b}{b - c} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \alpha$$

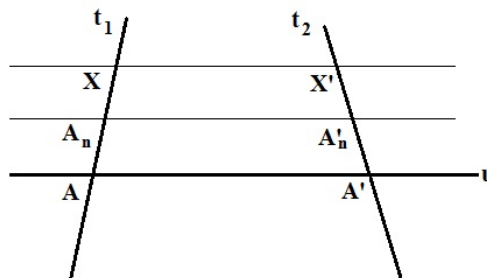
de maneira que a razão  $\frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{B_n C_n}}$  aproxima-se cada vez mais da razão  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ . Abreviamos isso escrevendo

$$\frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{B_n C_n}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Por outro lado, na transversal  $t_2$ , tomemos um ponto  $X'$  com coordenada  $x'$  (racional), de modo que,  $x'$  esteja próximo de  $a'$ , isto é,  $|x' - a'| < \epsilon$ , onde  $\epsilon > 0$  é um erro muito pequeno. Agora por  $X'$  tracemos uma reta paralela a reta  $u$ , a qual, intercepta a reta transversal  $t_1$  em um ponto  $X$  de coordenada  $x$ .

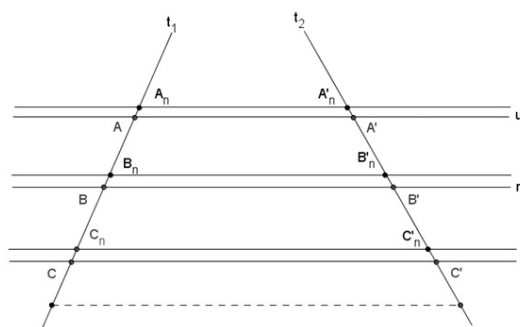
Como  $a_n \rightarrow a$ , existe um certo  $a_n$  entre  $x$  e  $a$ , desse modo a paralela a reta  $u$  pelo ponto  $A_n$  de coordenada  $a_n$ , intercepta a reta transversal  $t_2$  no ponto  $A'_n$  de coordenada  $a'_n$ , com  $a'_n$  entre  $x'$  e  $a'$ . Como  $|x' - a'| < \epsilon$ , então,  $|a'_n - a'| < \epsilon$ , isso diz que,  $a'_n \rightarrow a'$ , conseqüentemente,  $A'_n \rightarrow A'$ , conforme figura 1.8.

Figura 1.8:



De modo análogo, considerando que  $B_n \rightarrow B$  e  $C_n \rightarrow C$ , podemos concluir que as sequências correspondentes  $B'_n$  e  $C'_n$  sobre a reta  $t_2$ , são tais que,  $B'_n \rightarrow B'$  e  $C'_n \rightarrow C'$ , que é o mesmo que dizer  $b'_n \rightarrow b'$  e  $c'_n \rightarrow c'$ , onde  $b'_n$  e  $c'_n$  são, respectivamente, as coordenadas na reta  $t_2$ , de  $B'_n$  e  $C'_n$ , conforme figura 1.9.

Figura 1.9:



Desse modo, podemos escrever

$$\frac{\overline{A'_n B'_n}}{\overline{B'_n C'_n}} = \frac{a'_n - b'_n}{b'_n - c'_n} \rightarrow \frac{a' - b'}{b' - c'} = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{B' C'}} = \alpha$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{A_n B'_n}}{\overline{B'_n C'_n}} \rightarrow \frac{\overline{A' B'}}{\overline{B' C'}}, \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Para finalizar, basta observar que, sendo  $\frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{B_n C_n}}$  racional, então,

$$\frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{B_n C_n}} = \frac{\overline{A'_n B'_n}}{\overline{B'_n C'_n}}$$

Como  $\frac{\overline{A_n B_n}}{\overline{B_n C_n}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $\frac{\overline{A'_n B'_n}}{\overline{B'_n C'_n}} \rightarrow \frac{\overline{A' B'}}{\overline{B' C'}}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , podemos concluir que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{B' C'}}$$

A discussão acima provou um dos resultados fundamentais da geometria euclidiana plana, conhecido como Teorema de Tales ao qual enunciaremos formalmente a seguir.

## 1.2 Teorema 1

Sejam  $u$ ;  $r$  e  $s$  retas paralelas. Escolhemos pontos  $A, A' \in u$ ,  $B, B' \in r$  e  $C, C' \in s$ , de modo que  $A, B, C$  e  $A', B', C'$  sejam dois ternos de pontos colineares. Então,

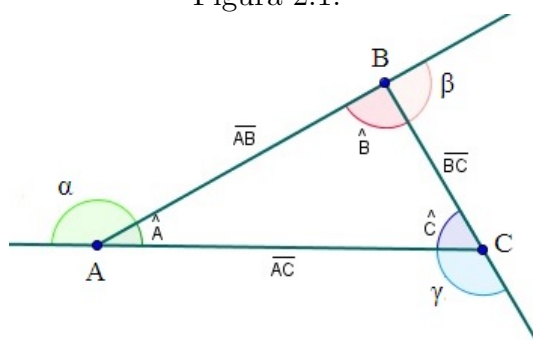
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{B' C'}}$$

## Capítulo 2

# Semelhança de Triângulos

Para entrarmos no estudo de semelhança de triângulos, devemos rever o conceito de triângulo e seus principais elementos. No plano, triângulo é a figura geométrica que ocupa o espaço interno limitado por três segmentos de retas que concorrem, dois a dois, em três pontos diferentes formando três lados e três ângulos internos que somam  $180^\circ$ . Também podemos dizer que o triângulo é a união de três pontos não-colineares (pertencente a um plano, em decorrência da definição dos mesmos), por três segmentos de reta. Para entendermos melhor vejamos um triângulo com seus elementos na figura 2.1.

Figura 2.1:

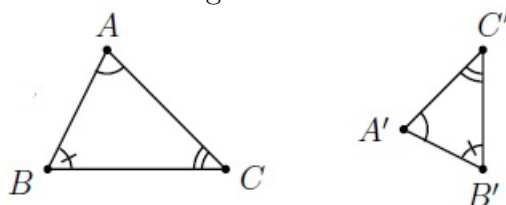


- VÉRTICE: os três pontos não colineares são os vértices do triângulo:  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- LADO: as linhas que os unem, ou seja, os seguimentos de reta são os lados do triângulo:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$

- **ÂNGULO INTERNO:** são os ângulos cujos vértices são os vértices do triângulo e os lados contêm os lados do triângulo. Assim temos três ângulos internos: ângulo  $BAC$ , ângulo  $ABC$  e ângulo  $ACB$ , respectivamente,  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ .
- **ÂNGULO EXTERNO:** os ângulos formados por cada lado e pelo prolongamento do outro lado, são os ângulos externos do triângulo:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Apresentado os elementos, vamos agora desvendar os casos de semelhança de triângulos. Mas antes, o que são triângulos semelhantes? Como identificar que dois triângulos são semelhantes? Para responder essas perguntas vamos ver o conceito de triângulos semelhantes. Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que os ângulos dos vértices correspondentes sejam iguais, e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma. Veja a figura 2.2.

Figura 2.2:



Podemos observar que, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações. Na figura 2.2, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ . Assim,  $\widehat{A} = \widehat{A}'$ ,  $\widehat{B} = \widehat{B}'$  e  $\widehat{C} = \widehat{C}'$  e existe  $k > 0$  tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$$

O valor da constante  $k$  é um número real positivo denominado a razão de semelhança entre os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , nessa ordem. Invertendo tal ordem a razão

de semelhança será  $\frac{1}{k}$ , pois a relação será entre os triângulos  $A'B'C'$  e  $ABC$ .

Portanto podemos escrever  $ABC \sim A'B'C'$  para denotar que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ . Se  $ABC \sim A'B'C'$  na razão de semelhança  $k$ , então  $k$  é também a razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes quaisquer nos dois triângulos. Por exemplo, nas notações dos triângulos  $ABC$  e do triângulo  $A'B'C'$ , sendo  $M$  o ponto médio de  $\overline{BC}$  e  $M'$  o ponto médio de  $\overline{B'C'}$ , temos que:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{M'A'}} = \frac{\frac{\overline{BC}}{2}}{\frac{\overline{B'C'}}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Como foi visto anteriormente

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$$

então

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{M'A'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k.$$

Veremos a seguir, três proposições que estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes. Por tal razão, as mesmas são conhecidas como os casos de semelhança de triângulos usuais. Como suas demonstrações são consequências fáceis da recíproca do teorema de Tales, faremos a prova de todos eles.

## 2.1 Proposição 1

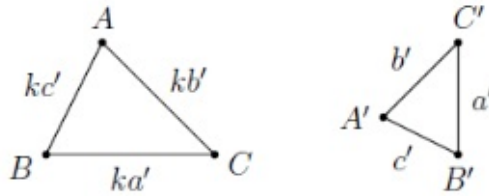
Sejam,  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos no plano, tais que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Então,  $ABC \sim A'B'C'$ , com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ . Em particular  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ .

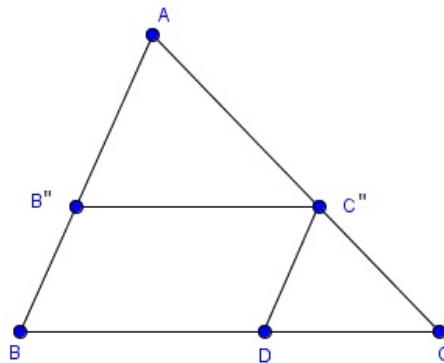
Demonstração:

Figura 2.3:



Sendo  $k$  o valor comum das razões do enunciado, temos  $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD} = k \cdot \overline{C'D'}$  e  $\overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}$ . Suponha sem perda de generalidade,  $k > 1$  e marque o ponto  $B'' \in \overline{AB}$  tal que  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ , como mostra a figura 2.4.

Figura 2.4:



Sendo  $C''$  a interseção do lado  $AC$  da reta que passa por  $B''$  e é paralela ao lado  $BC$ , segue do teorema de Tales que:

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k}$$

de maneira que  $\overline{AC''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AC} = \overline{A'C'}$ .

Trace, agora, a paralela ao lado  $AB$  passando por  $C''$ , a qual intersecta o lado  $BC$  no ponto  $D$ . Então, o quadrilátero  $B''C''DB$  é um paralelogramo, de modo que, novamente pelo teorema de Tales, temos:



$$\frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k}.$$

Logo,  $\overline{B''C''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} = \overline{B'C'}$ .

A discussão acima mostrou que  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ ,  $\overline{B''C''} = \overline{B'C'}$ , isto é, que os triângulos  $AB''C''$  e  $A'B'C'$  são congruentes pelo caso *LLL* de congruência que, veremos no terceiro capítulo desse trabalho. Portanto, temos:

$$\widehat{B} = \widehat{ABC} = \widehat{AB''C''} = \widehat{A'B'C'} = \widehat{B'}$$

e, analogamente,  $\widehat{A} = \widehat{A'}$  e  $\widehat{C} = \widehat{C'}$

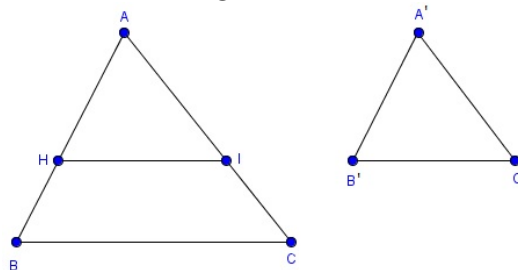
## 2.2 Proposição 2

Se, em dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  tem-se  $\widehat{A} = \widehat{A'}$  e  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$ , então os triângulos são semelhantes.

Demonstração:

Usando o conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , então a congruência dos ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{A'}$  e dos ângulos  $\widehat{B}$  e  $\widehat{B'}$  acarreta na congruência dos ângulos  $\widehat{C}$  e  $\widehat{C'}$ . Para provar que os lados são proporcionais, tomemos um ponto H no segmento  $AB$  que representa o lado do triângulo  $ABC$  de modo que  $\overline{AH} = \overline{A'B'}$  e pelo ponto H trace uma reta paralela ao lado  $\overline{BC}$ , de tal forma que, esta intercepte o lado  $AC$  em um ponto I de modo que  $\overline{AI} = \overline{A'C'}$ , conforme mostra a figura 2.5.

Figura 2.5:



Formando assim, um triângulo  $AHI$  que é congruente ao triângulo  $A'B'C'$ . Segue

pelo teorema de Tales que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AI}}$$

como  $\overline{AH} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{AI} = \overline{A'C'}$ , temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Analogamente podemos mostrar a proporcionalidade de todos os lados dos triângulos e assim concluir que  $ABC \sim A'B'C'$ .

## 2.3 Proposição 3

Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos no plano, tais que:

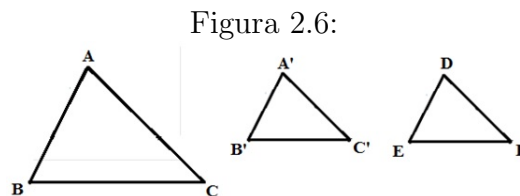
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k \text{ e } \widehat{B} = \widehat{B}'$$

Então  $ABC \sim A'B'C'$ , com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$

Em particular,  $\widehat{A} = \widehat{A}'$ ,  $\widehat{C} = \widehat{C}'$  e  $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$

Demonstração:

Devemos construir o triângulo  $DEF$  de modo que,  $\overline{A'B'} = \overline{DE}$ ,  $\widehat{A} = \widehat{D}$  e  $\widehat{B} = \widehat{E}$ .  
Conforme figura 2.6.



De acordo com a proposição 2, os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes, portanto podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

Usando a informação de que:  $\overline{A'B'} = \overline{DE}$  e a hipótese

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Podemos concluir que  $\overline{B'C'} = \overline{EF}$  e  $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{A'}$  e assim dizer que o triângulo  $A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $DEF$ , como já sabemos que o triângulo  $DEF$  é semelhante ao triângulo  $ABC$ . Então fica fácil concluir que o triângulo  $ABC$  é semelhante ao triângulo  $A'B'C'$ , e assim, escrevermos  $ABC \sim A'B'C'$ .

## 2.4 Razão entre Áreas de Polígonos Semelhantes

Dizemos que dois polígonos  $A_1A_2A_3\dots A_n$  e  $B_1B_2B_3\dots B_n$  são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os seus vértices, de modo que os ângulos dos vértices correspondentes sejam iguais, e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes sejam sempre a mesma.

Portanto podemos escrever  $A_1A_2A_3\dots A_n \sim B_1B_2B_3\dots B_n$  para denotar que os polígonos  $A_1A_2A_3\dots A_n$  e  $B_1B_2B_3\dots B_n$  são semelhantes, com a correspondência de vértices  $A_1 \leftrightarrow B_1, A_2 \leftrightarrow B_2, A_3 \leftrightarrow B_3 \dots$  e  $A_n \leftrightarrow B_n$  e com ângulos correspondentes de mesma medida, ou seja,  $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1, \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2, \widehat{A}_3 = \widehat{B}_3 \dots$  e  $\widehat{A}_n = \widehat{B}_n$ . Se  $A_1A_2A_3\dots A_n \sim B_1B_2B_3\dots B_n$  na razão de semelhança  $k$ , isso significa que  $k$  é a razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes quaisquer nos dois polígonos.

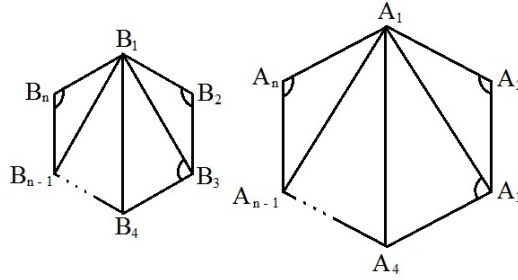
### 2.4.1 Proposição 4

Dados os polígonos  $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$  e  $B_1B_2B_3\dots B_{n-1}B_n$  semelhantes com razão de semelhança  $k$ . Então eles podem ser subdivididos em  $n - 2$  triângulos de modo que os triângulos correspondentes são semelhantes com razão de semelhança também igual a  $k$ .

Demonstração:

Tomemos os polígonos  $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$  e  $B_1B_2B_3\dots B_{n-1}B_n$  semelhantes de razão  $k$ , conforme figura 2.7.

Figura 2.7:



Então podemos escrever:

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{B_3B_4}} = \dots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{B_{n-1}B_n}} = k$$

A partir do vértice  $A_1$  do polígono  $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$  e do seu correspondente  $B_1$  do polígono  $B_1B_2B_3\dots B_{n-1}B_n$  traçaremos  $n - 3$  diagonais, formando  $n - 2$  triângulos.

Como já foi dito sobre semelhança de polígono, o ângulo  $\widehat{A_1}$  têm a mesma medida do ângulo  $\widehat{B_1}$ , ou seja,  $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$  e seus lados proporcionais.

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = k$$

Portanto, podemos dizer que os triângulos  $A_1A_2A_3$  e  $B_1B_2B_3$ , formados ao traçar as diagonais, são semelhantes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) com razão de semelhança  $k$ .

Com essa informação podemos garantir a proporcionalidade dos lados  $A_1A_3$  e  $B_1B_3$ , logo:

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{B_1B_3}} = k$$

Agora, observando os triângulos  $A_1A_3A_4$  e  $B_1B_3B_4$ , podemos dizer que os lados  $A_1A_3$  e  $A_3A_4$  são proporcionais com seu correspondentes lados  $B_1B_3$  e  $B_3B_4$ , assim:

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{B_1B_3}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{B_3B_4}} = k$$

Como o ângulo  $\widehat{A_1A_3A_4}$  tem a mesma medida do ângulo  $\widehat{B_1B_3B_4}$ , ou seja,  $\widehat{A_1A_3A_4} = \widehat{B_1B_3B_4}$ , podemos dizer que, os triângulos  $A_1A_3A_4$  e  $B_1B_3B_4$  são semelhantes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) com razão de semelhança  $k$ .

Analogamente, todos os outros triângulos são semelhantes aos seus correspondentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) com razão de semelhança  $k$ .

Portanto, concluímos que a razão de semelhança vale não apenas para lados proporcionais, mas para quaisquer segmentos correspondentes, inclusive as diagonais dos polígonos.

Assim:

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{B_1B_3}} = \frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{B_1B_4}} = \dots = \frac{\overline{A_1A_{n-1}}}{\overline{B_1B_{n-1}}} = k$$

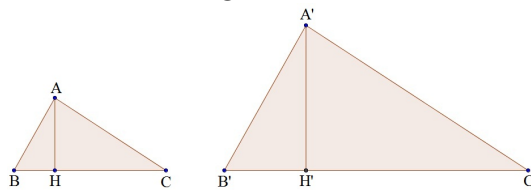
### 2.4.2 Proposição 5

Dados os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  semelhantes com razão de semelhança  $k$ , então a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual à  $k^2$ , ou seja,  $\text{área}(\Delta ABC) = k^2 \cdot \text{área}(\Delta A'B'C')$ .

Demonstração:

Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos semelhantes de razão de semelhança  $k$ . Digamos que seja  $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'}$  e  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ .

Figura 2.8:



Como os triângulos  $ABH$  e  $A'B'H'$  são retângulos em  $H$  e  $H'$ , respectivamente, e o ângulo  $\widehat{B}$  tem a mesma medida do ângulo  $\widehat{B'}$ , temos:

$$\widehat{H} = \widehat{H'} \text{ e } \widehat{B} = \widehat{B'}$$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ , temos:

$$H\widehat{A}B + \widehat{B} + \widehat{H} = 180^\circ \text{ e } H'\widehat{A'}B' + \widehat{B'} + \widehat{H'} = 180^\circ$$

Logo podemos dizer que, o ângulo  $H\widehat{A}B$  tem a mesma medida do ângulo  $H'\widehat{A'}B'$ , ou seja:

$$H\widehat{A}B = H'\widehat{A'}B'$$

Assim, se  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ,  $\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'}$  e  $H\widehat{A}B = H'\widehat{A}B'$ , então pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo) os triângulos  $HAB$  e  $H'A'B'$  são semelhantes, logo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{B'H'}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = k$$

Sendo assim, sejam  $S$  e  $S'$ , respectivamente, as áreas dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , logo

$$S = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} \text{ e } S' = \frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}}{2}$$

Observe agora que:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2}}{\frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}}{2}} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}} = k \cdot k = k^2$$

### 2.4.3 Corolário

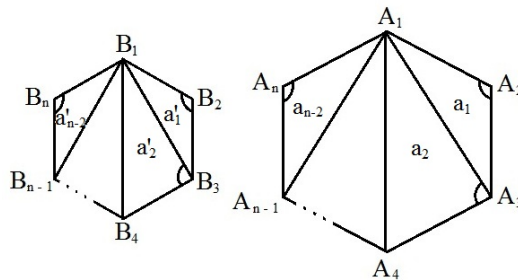
Dados os polígonos  $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$  e  $B_1B_2B_3\dots B_{n-1}B_n$  semelhantes com razão de semelhança  $k$ . então a razão entre as suas áreas é igual à  $k^2$ , ou seja,  $\text{área}(A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n) = k^2 \cdot \text{área}(B_1B_2B_3\dots B_{n-1}B_n)$ .

Demonstração:

Chamaremos  $S$  e  $S'$  as áreas dos polígonos  $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$  e  $B_1B_2B_3\dots B_{n-1}B_n$  semelhantes com razão de semelhança  $k$ . Pela proposição 4 temos que os polígonos podem ser subdivididos em  $n - 2$  triângulos semelhantes tal que, a área do polígono é igual a soma de todas as áreas dos  $n - 2$  triângulos semelhantes.

Chamaremos de  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}$  as áreas dos triângulos do polígono  $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$  e de  $a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_{n-2}$  as áreas dos triângulos do polígono  $B_1B_2B_3\dots B_{n-1}B_n$  conforme figura 2.9.

Figura 2.9:



Sendo assim:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} \text{ e } S' = a'_1 + a'_2 + a'_3 + \dots + a'_{n-2}.$$

Pela proposição 5, podemos escrever:

$$\frac{a_1}{a'_1} = \frac{a_2}{a'_2} = \frac{a_3}{a'_3} = \dots = \frac{a_{n-2}}{a'_{n-2}} = k^2.$$

Portanto:

$$a_1 = k^2 \cdot a'_1, \quad a_2 = k^2 \cdot a'_2, \quad a_3 = k^2 \cdot a'_3, \quad \dots, \quad a_{n-2} = k^2 \cdot a'_{n-2}.$$

Somando membro a membro essas igualdades, vem:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} = k^2 \cdot a'_1 + k^2 \cdot a'_2 + k^2 \cdot a'_3 + \dots + k^2 \cdot a'_{n-2}.$$

Pondo  $k^2$  em evidência, temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} = k^2 \cdot (a'_1 + a'_2 + a'_3 + \dots + a'_{n-2}).$$

Donde:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2}}{a'_1 + a'_2 + a'_3 + \dots + a'_{n-2}} = k^2.$$

Portanto:

$$\frac{S}{S'} = k^2$$

## 2.5 Teorema de Tales no Espaço

Na Geometria Plana, associamos retas paralelas com proporcionalidade, através do teorema de Tales que foi visto no capítulo anterior. Agora, usando o princípio do Teorema de Tales para retas paralelas, usaremos essas propriedades para planos paralelos.

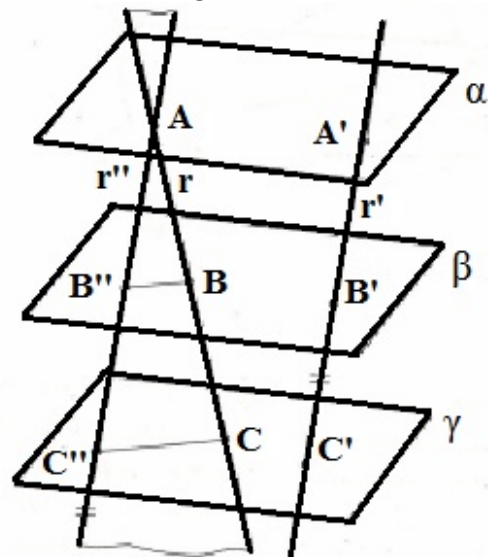
### 2.5.1 Teorema de Tales para planos paralelos

Um feixe de planos paralelos determina segmentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.

Demonstração;

Sejam os planos paralelos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  e sejam  $r$  e  $r'$  duas retas quaisquer que interceptam estes três planos, conforme mostrado na figura 2.10.

Figura 2.10:



A reta  $r$  corta os planos nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e a reta  $r'$  corta os mesmos planos nos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Pelo ponto  $A$  de  $r$  traçamos uma reta  $r''$  paralela a reta  $r'$ , que corta os três planos nos pontos  $A$ ,  $B''$  e  $C''$ . As retas  $r$  e  $r''$  determinam um plano, que corta  $\beta$  e  $\gamma$  segundo as retas paralelas  $BB''$  e  $CC''$ . Logo, pelo Teorema de Tales para retas paralelas, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$$

Mas,  $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{B''C''} = \overline{B'C'}$  e  $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$  por serem segmentos de retas paralelas compreendidos entre planos paralelos. Logo, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



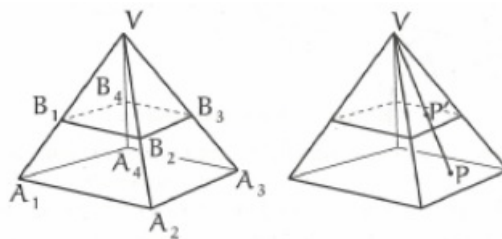
## 2.6 Construção de Pirâmides Semelhantes

Segundo [4] dada uma pirâmide de base  $A_1A_2A_3\dots A_n$  e vértice  $V$ . Tracemos um plano paralelo à base, que corta as arestas laterais, segundo o polígono  $B_1B_2B_3\dots B_n$  e que divide a pirâmide em dois poliedros. Um deles é a pirâmide de base  $B_1B_2B_3\dots B_n$  e o outro é chamado de tronco de pirâmide de bases  $A_1A_2A_3\dots A_n$  e  $B_1B_2B_3\dots B_n$ . Consideremos as duas pirâmides da figura 2.11, e examinemos suas faces laterais. Na face lateral  $VA_1A_2$ , podemos observar que:

$$\frac{\overline{VB_1}}{\overline{VA_1}} = \frac{\overline{VB_2}}{\overline{VA_2}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1A_2}} = k$$

Aplicando o mesmo raciocínio para as demais faces laterais, concluímos que a razão entre duas arestas correspondentes das duas pirâmides é sempre igual a  $k$ .

Figura 2.11: Pirâmides



Na verdade, as duas pirâmides do exemplo são semelhantes na razão  $k$ , ou seja, é possível estabelecer uma correspondência entre seus pontos de modo que a razão entre os comprimentos de segmentos correspondentes nas duas figuras seja constante.

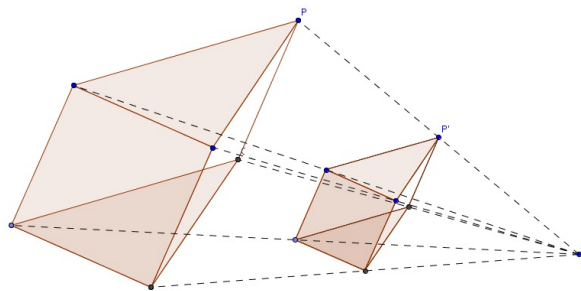
Esta correspondência é estabelecida da seguinte forma: dado um ponto  $P$  da pirâmide  $VA_1A_2A_3A_4$ , seu correspondente na pirâmide  $VB_1B_2B_3B_4$  é o ponto  $P'$  sobre  $VP$ , tal que  $\frac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = k$ , o ponto  $P'$  certamente pertence à segunda pirâmide da figura 2.11. Além disso, tomando um segundo par de pontos correspondentes  $Q$  e  $Q'$ , os triângulos  $VP'Q'$  e  $VPQ$  são semelhantes na razão  $k$ , o que implica em  $\frac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = k$ . Logo, a razão entre segmentos correspondentes nas duas pirâmides é sempre igual a  $k$ , o que demonstra a sua semelhança.

De um modo geral, dado um ponto  $P$  da pirâmide  $VA_1A_2A_3\dots A_n$ , seu correspon-

dente na pirâmide  $VB_1B_2B_3\dots B_n$  é o ponto  $P'$  sobre  $VP$ , tal que  $\frac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = k$ . Além disso, tomando um segundo par de pontos correspondentes  $Q$  e  $Q'$ , os triângulos  $VP'Q'$  e  $VPQ$  são semelhantes na razão  $k$ , o que implica em  $\frac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = k$ . Logo, a razão entre segmentos correspondentes nas duas pirâmides é sempre igual a  $k$ , o que demonstra a sua semelhança.

O que fizemos acima pode ser visto de maneira mais geral e transformado em um método para obter uma figura espacial semelhante a uma figura dada. Dado um ponto  $V$  do espaço e um número real  $k$  positivo, a homotetia de centro  $V$  e razão  $k$  é a função  $\sigma$  que associa a cada ponto  $P$  do espaço o ponto  $P'$  sobre  $VP$ , tal que,  $VP' = k.VP$ , conforme figura 2.12.

Figura 2.12: Figuras homotéticas



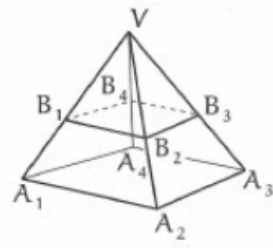
Duas figuras  $F$  e  $F'$  são homotéticas quando existir uma homotetia  $\sigma$ , tal que,  $\sigma(F) = F'$ . Assim, as duas pirâmides do exemplo anterior são homotéticas. Duas figuras homotéticas são sempre semelhantes, pelo mesmo argumento utilizado acima: dados dois pontos  $P$  e  $Q$  em  $F$ , seus correspondentes  $P'$  e  $Q'$  em  $F'$  são tais que os triângulos  $VP'Q'$  e  $VPQ$  são semelhantes na razão  $k$ .

## 2.7 Razão entre os Volumes de dois Sólidos Semelhantes

Ainda em relação a pirâmide de vértice  $V$  e base  $A_1A_2A_3\dots A_n$  ao seccionar encontramos uma segunda pirâmide de vértice  $V$  e base  $B_1B_2B_3\dots B_n$  semelhante à primeira, ou seja, os segmentos correspondentes são proporcionais. Teremos então uma razão  $k$

de semelhança. Aplicando a semelhança na figura 2.13, temos:

Figura 2.13: Pirâmide



$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{VB_2}}{\overline{VA_2}} = k$$

Onde  $\overline{B_1B_2}$  e  $\overline{A_1A_2}$  são as medidas das arestas das bases,  $\overline{VB_2}$  e  $\overline{VA_2}$ , são medidas das arestas laterais,  $h$  e  $H$  são as alturas das pirâmides. Temos ainda que, a razão entre superfícies correspondentes das pirâmides é  $k^2$  e a razão entre seus volumes é  $k^3$ .

### 2.7.1 Proposição 6

Sejam duas pirâmides semelhantes  $P_1$  e  $P_2$  de razão de semelhança  $k$  e alturas, respectivamente,  $H$  e  $H'$  e áreas das bases, respectivamente,  $S$  e  $S'$  e volumes, respectivamente,  $V$  e  $V'$ . A razão entre seus volumes é  $k^3$ .

Demonstração:

Observe que  $k = \frac{H}{H'}$ . Já sabemos que  $\frac{S}{S'} = k^2$ .

Como  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot H$  e  $V' = \frac{1}{3} \cdot S' \cdot H'$ , temos que

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S \cdot H}{\frac{1}{3} \cdot S' \cdot H'} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{H}{H'} = k^2 \cdot k = k^3$$

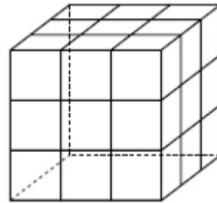
Como todos os poliedros semelhantes são divididos em pirâmides semelhantes, temos que a razão entre duas regiões correspondentes de dois poliedros semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre estes poliedros e a razão entre os volumes de dois poliedros semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança entre estes

poliedros. E em geral, esta regra vale para todos os sólidos geométricos semelhantes.

A seguir, exploraremos um pouco mais esses conceitos nos próximos exemplos.

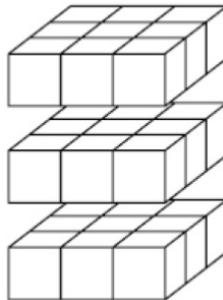
Há um quebra cabeça bastante conhecido, que surgiu nos anos 80, chamado “cubo mágico”, que consiste em um cubo dividido em diversos cubos menores.

Figura 2.14:



Observando melhor, vemos que cada aresta desse cubo foi dividida em três partes iguais. Se observarmos atentamente, veremos que cada face ficou dividida em nove quadrados. Ou seja, dividindo cada aresta em três partes iguais, a área de cada face ficou dividida em  $3^2 = 9$  quadrados menores. Podemos também observar que o cubo ficou dividido em cubinhos menores, cujas arestas são iguais à terça parte da aresta do cubo inicial.

Figura 2.15:



Observe que podemos dividir o cubo em três placas, sendo cada placa formada de  $3^2 = 9$  cubinhos. Assim, teremos  $3 \cdot 3^2 = 3^3 = 27$  cubinhos. Isso nos permite concluir que, se a razão entre as medidas das arestas dos dois cubos (menor e maior) é  $k = 3$ , a razão entre suas áreas é  $k^2 = 3^2 = 9$  e a razão entre seus volumes é  $k^3 = 3^3 = 27$ , como já descrito anteriormente.

## Capítulo 3

# Triângulos Congruentes

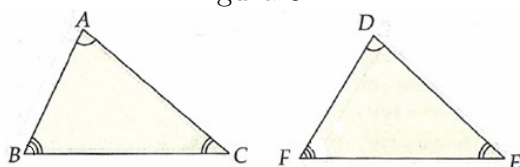
Neste capítulo iremos estudar congruência de triângulos, e esclarecer que é um caso particular de semelhança, onde a razão de semelhança é  $k = 1$ . É por isso que são usados os mesmos casos de semelhança de triângulos em congruência, que são:  $LAL$  (lado-ângulo-lado),  $ALA$  (ângulo-lado-ângulo) e  $LLL$  (lado-lado-lado).

### 3.1 Definição

Dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes entre si se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus lados correspondentes possuam as mesmas medidas e os seus ângulos internos correspondentes também possuam as mesmas medidas e usaremos o símbolo  $\equiv$  para representar congruência, ou seja, quando escrevemos  $\overline{AB} \equiv \overline{DF}$  e  $\hat{A} \equiv \hat{D}$ , queremos dizer que o lado  $AB$  tem a mesma medida do lado  $DF$  e que o ângulo  $\hat{A}$  tem a mesma medida do ângulo  $\hat{D}$ , respectivamente e quando simbolizamos,  $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ , queremos dizer que o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $DEF$ .

Assim:

Figura 3.1:



$$\begin{aligned} \overline{AB} &\equiv \overline{DF} \text{ e } \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \overline{AC} &\equiv \overline{DE} \text{ e } \hat{C} \equiv \hat{E} \Leftrightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF \end{aligned}$$

$$\overline{BC} \equiv \overline{EF} \text{ e } \widehat{B} \equiv \widehat{F}$$

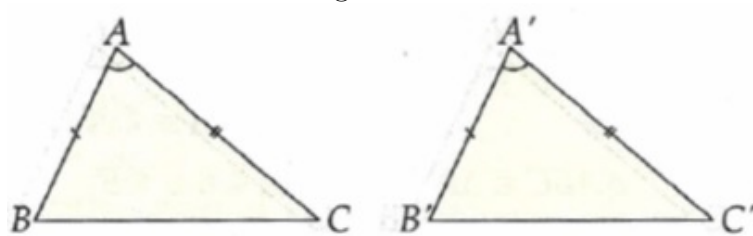
## 3.2 Casos de Congruências

Para concluirmos que dois triângulos são congruentes é necessário compararmos as seis medidas básicas dos triângulos (lados e ângulos). Existem situações em que podemos concluir a congruência de dois triângulos a partir da igualdade de três medidas básicas. Essas situações são chamadas de casos de congruência.

### 3.2.1 1º Caso de Congruência: LAL

O primeiro caso de congruência entre dois triângulos é a correspondência lado-ângulo-lado, e é adotado na geometria euclidiana como um postulado. Se dois triângulos têm, ordenadamente, congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então eles são congruentes.

Figura 3.2:



Observação: As marcas nos lados e no ângulo dos  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  identificam os elementos correspondentes congruentes.

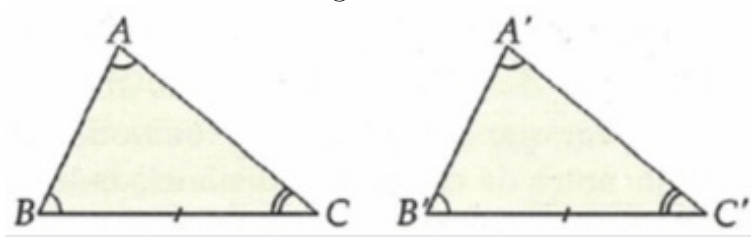
Notemos que pela figura 3.2 os lados  $AB$  e  $AC$  do triângulo  $ABC$  tem a mesma medida dos seus correspondentes lados  $A'B'$  e  $A'C'$  do triângulo  $A'B'C'$  e podemos dizer que o ângulo  $\widehat{A}$  e o seu correspondente  $\widehat{A}'$  também tem a mesma medida, logo:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

### 3.2.2 2º Caso de Congruência: ALA

O segundo caso de congruência de dois triângulos é a correspondência ângulo-lado-ângulo. “Se dois triângulos têm, ordenadamente, congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.”

Figura 3.3:



Assim, observando a figura 3.3, temos:

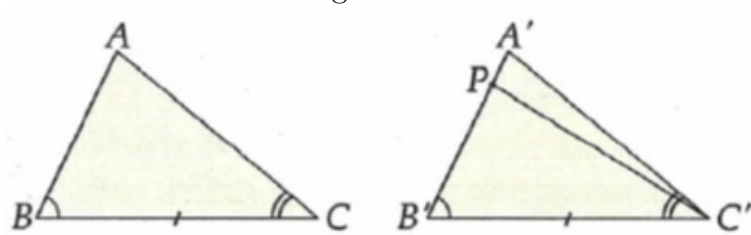
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{array} \right\} \stackrel{ALA}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

#### Demonstração:

Se fosse  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , então teríamos o triângulo  $ABC$  congruente com o triângulo  $A'B'C'$  pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Caso contrário, uma das medidas é menor do que a outra, digamos que seja  $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ .

Assim podemos escolher um ponto  $P$  no segmento  $A'B'$  conforme figura 3.4, de modo que:

Figura 3.4:



$$\overline{AB} = \overline{PB'}$$

Nessas condições temos que o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $PB'C'$  pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Em particular, o ângulo  $\widehat{C} = \widehat{P\hat{C}'B'}$ . Mas isso é uma contradição pois, por hipótese, temos:

$$\widehat{C} = \widehat{C'} \text{ e } \widehat{C} < \widehat{P\hat{C}'B'}$$

Portanto devemos ter:

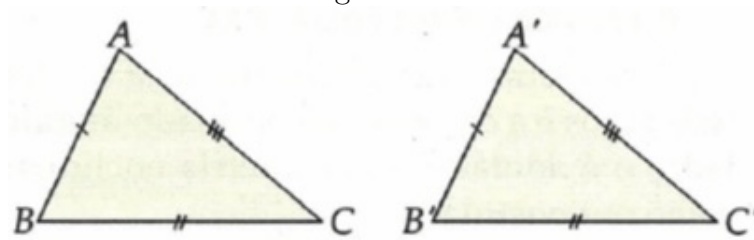
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Conseqüentemente o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $A'B'C'$ .

### 3.2.3 3º Caso de Congruência: LLL

O terceiro caso de congruência de dois triângulos é a correspondência lado-lado-lado. “Se dois triângulos têm os três lados ordenadamente congruentes, esses triângulos são congruentes.”

Figura 3.5:



Pela figura 3.5, os lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  são congruentes aos lados  $A'B'$ ,  $A'C'$  e  $B'C'$ , respectivamente. Assim podemos escrever:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{array} \right\} \stackrel{LLL}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

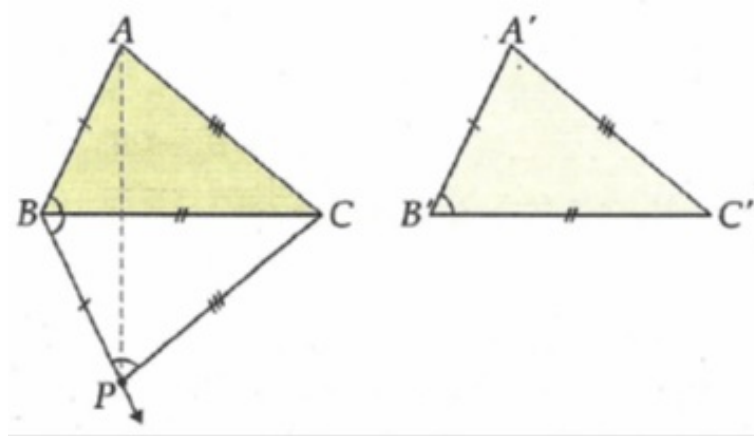
#### Demonstração:

Tomemos dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  com os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  congruentes aos lados  $A'B'$ ,  $B'C'$  e  $A'C'$ , respectivamente, depois disso tracemos uma semirreta  $BP$  no semiplano que não contém o vértice  $A$ , de modo que  $\widehat{P\hat{B}C} \equiv \widehat{A'\hat{B}'C'}$  e  $\overline{BP} \equiv \overline{A'B'}$ , conforme figura 3.6.

Então temos:



Figura 3.6:



$$\left. \begin{array}{l} \overline{BP} \equiv \overline{A'B'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \Delta A'B'C' \equiv \Delta PBC$$

Decorre dessa congruência que:

$$\overline{PC} \equiv \overline{A'C'} \text{ e } \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$$

Sabendo que o lado  $AB$  é congruente ao lado  $A'B'$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{BP} \equiv \overline{A'B'} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{BP} \Rightarrow \widehat{PAB} \equiv \widehat{BPA}$$

Podemos assim dizer que o triângulo  $ABP$  é isóceles, pois:

$$\overline{AB} \equiv \overline{BP} \text{ e } \widehat{PAB} \equiv \widehat{BPA}$$

Como o lado  $AC$  é congruente ao lado  $A'C'$  temos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{PC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{PC} \Rightarrow \widehat{PAC} \equiv \widehat{CPA}$$

Então o triângulo  $ACP$  é isóceles, pois:

$$\overline{AC} \equiv \overline{PC} \text{ e } \widehat{PAC} \equiv \widehat{CPA}$$

Sendo assim, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{PAB} \equiv \widehat{BPA} \\ \widehat{PAC} \equiv \widehat{CPA} \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{PAB} + \widehat{PAC} \\ \widehat{BPC} \equiv \widehat{BPA} + \widehat{CPA} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{BPC}$$

Como o ângulo  $\widehat{PAC}$  é congruente ao ângulo  $\widehat{B'AC'}$ , temos:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BAC} \equiv \widehat{BPC} \\ \widehat{BPC} \equiv \widehat{B'AC'} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'AC'}$$

Assim podemos dizer que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes pelo caso LAL (lado - ângulo - lado) e assim escrever:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'AC'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

## Capítulo 4

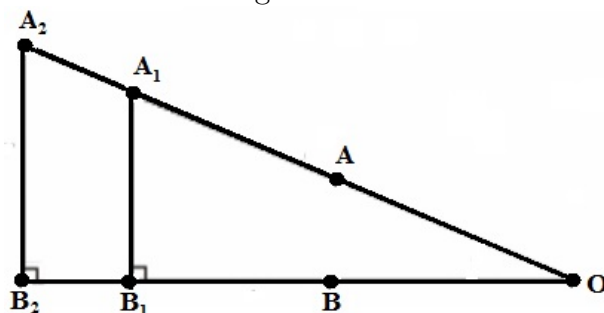
# Algumas Aplicações da Semelhança de Triângulos

### 4.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

A aplicação do caso *ALA* de semelhança de triângulos para triângulos retângulos é tão útil que merece um tratamento especial. De fato, como já conhecemos um ângulo (reto), para que dois triângulos retângulos sejam semelhantes é suficiente que tenham um ângulo congruente. Isto significa que tratando-se de proporções em triângulos retângulos, tudo pode ser expresso em termos de um ângulo.

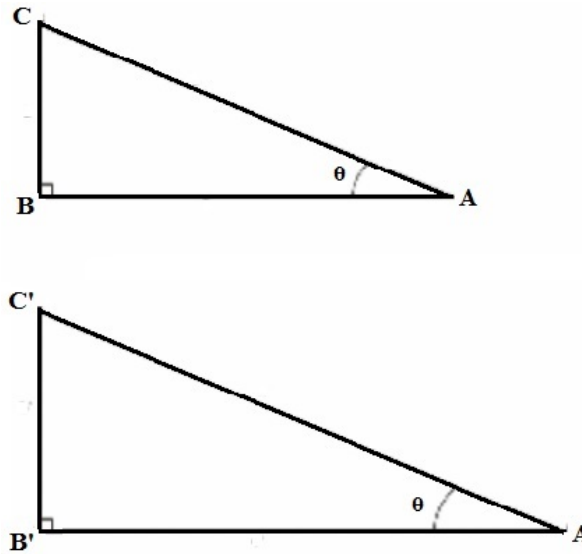
Mais especificamente, dado um ângulo agudo representado por duas semirretas  $OA$  e  $OB$ , se a partir de pontos  $A_1, A_2$  da semirreta  $OA$  traçamos a perpendicular à semirreta  $OB$  pontos de modo que os triângulos retângulos  $OA_1B_1$  e  $OA_2B_2$  sejam semelhantes.

Figura 4.1:



Portanto,  $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_2}}$  ou  $\frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}}$  e analogamente,  $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}}$ . Observe que a proporcionalidade depende apenas do ângulo e não dos comprimentos.

Figura 4.2:



Dessa forma, podemos introduzir as funções trigonométricas definidas no triângulo retângulo.

#### 4.1.1 Definição

Dado um ângulo agudo  $\theta$  em um triângulo retângulo conforme figura 4.2, definimos as funções seno, cosseno e tangente por:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan}(\theta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

A utilização do Teorema de Pitágoras nos fornece a relação entre seno e cosseno.

#### 4.1.2 Proposição 1 (Identidade Fundamental)

$$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$$

Observe que estamos denotando por  $\text{sen}^2\theta = [\text{sen}\theta]^2$  o quadrado da função seno. Analogamente  $\text{cos}^2\theta = [\text{cos}\theta]^2$

**Prova:** O Teorema de Pitágoras nos dá:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

. Usando a definição:

$$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2} = 1$$

Como queríamos demonstrar.

“Muitas medidas são feitas com o uso de métodos indiretos. Tais métodos são utilizados ou porque as medidas não são diretamente possíveis, ou porque esses métodos são mais cômodos ou menos dispendiosos. São exemplos de situações em que as medições indiretas podem ser realizadas com a utilização da trigonometria no triângulo retângulo: a altura de uma montanha, a altura de uma árvore ou torre, o comprimento de um cabo de sustentação que deve ser amarrado no topo de um poste ao chão, a distância entre dois astros - Hiparco (180 a 125 a.C) calculou a distância da Terra à Lua, o cálculo da área de um triângulo, o cálculo da área de um terreno, a projeção de uma área num plano. Vale ressaltar que o método e a precisão obtida em medições dependem dos recursos disponíveis e utilizados.”

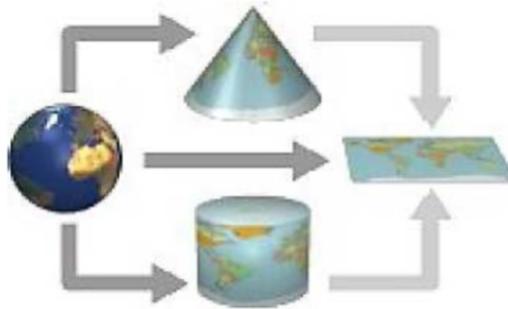
## 4.2 Projeção Estereográfica ou Ptolomaica

Antes de falarmos de projeções estereográficas, vamos fazer uma pequena introdução sobre cartografia.

O planeta Terra pode ser representado por um sólido aproximadamente esférico, assim se pretendermos representar a superfície da Terra, sem distorções, devemos utilizar um globo, pois esta forma de representação apenas implicará na utilização de uma escala de redução. No entanto, os globos na prática são inconvenientes, pois são ultrapassados na representação da Terra, enquanto o mapa (ou carta) é a representação mais usada. Em Cartografia, são definidas e classificadas as projeções cartográficas como a forma que a superfície da Terra é representada numa superfície plana, designada por superfície de projeção. A superfície de projeção pode ser um plano ou uma superfície planificável, habitualmente o cilindro ou o cone. Em Cartografia, de acordo com a superfície de projeção utilizada, as projeções cartográficas são classificadas em planas

ou azimutais, cilíndricas e cónicas figura 4.3.

Figura 4.3: Projeção



Qualquer que seja a superfície de projeção escolhida é impossível projetar a superfície curva da Terra num plano sem que sejam introduzidas distorções, pois a esfera não é planificável. Assim sendo, uma projeção deve ser pensada de acordo com a propriedade que se pretende conservar. De um modo geral, as propriedades que interessam preservar são as distâncias, as áreas ou os ângulos. De acordo com a propriedade que se preserva as projeções são classificadas em:

- Equidistantes: quando as relações de distância são conservadas ao longo de certas linhas ou a partir de determinados pontos.
- Conformes: quando a forma dos objetos (com dimensões infinitesimais) é conservada, ou seja, os ângulos são preservados.
- Equivalentes: quando as proporções entre as áreas dos objetos são conservadas.

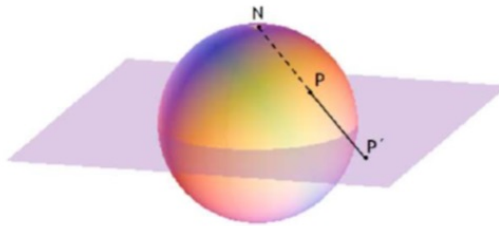
Segundo [5], um mapa geográfico é uma representação de um plano de toda ou parte da superfície da terra. As curvas que são encontradas na superfície da Terra, como as orlas costeiras, rios, etc, estão representadas nos mapas por curvas planas. Um mapa seria perfeito se preservar todos os ângulos e reduzir proporcionalmente na mesma medida cada curva sua escala de distância. Infelizmente é impossível mapear e ter todas as medidas conservadas. No entanto, é possível construir um mapa "semiperfeito", com distâncias distorcidas e ângulos preservados, um mapa deste tipo é denominado como

Conforme.

Começamos construindo um mapa Conforme da esfera, este mapa é comumente chamado de projeção estereográfica. Este mapa é importante em muitos aspectos e foi inventado pelo grande astrônomo grego Cláudio Ptolomeu. Como já foi referido, consideramos a Terra como uma esfera perfeita e tomamos o seu raio como unitário. Em termos de coordenadas  $(X, Y, Z)$ , a equação da esfera é:  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ .

Consideramos o ponto  $(0, 0, 1)$  como o polo norte  $N$ . Em seguida, o Equador é a intersecção da esfera com o plano  $z = 0$ , o qual, chamaremos de plano equatorial. Se traçarmos uma reta passando pelo polo norte  $N$  e qualquer ponto  $P$  sobre a superfície da esfera (Terra), essa reta intercepta o plano equatorial num único ponto  $P'$  como ilustrado na figura 4.4.

Figura 4.4: Plano equatorial



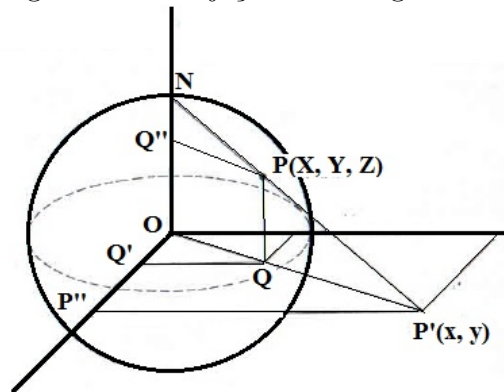
Vamos denotar as coordenadas retangulares de  $P'$  por  $(x, y, 0)$  ou, desde que  $z = 0$  para todos os pontos deste plano, simplesmente escreveremos  $(x, y)$  para  $P'$ , de modo que, cada ponto  $P(X, Y, Z)$  da esfera, associamos um único ponto  $P'(x, y)$  do plano equatorial, obtido pela intersecção da reta que passa por  $P$  e pelo polo norte  $N$  com esse plano. Reciprocamente, a todo ponto  $P'(x, y)$  do plano equatorial corresponde um único ponto  $P(X, Y, Z)$  da superfície da esfera, obtido pela intersecção da reta que liga  $P'$  ao polo norte  $N$  com a esfera (se necessário continuar para além da linha de  $P$ ) teremos  $P(X, Y, Z)$  o ponto de intersecção da reta  $P'N$  com a esfera. (Por exemplo, se  $P'$  é a origem  $(0, 0)$ ,  $P$  é o polo sul  $(0, 0, -1)$ ). Esta transformação ou uma correspondência entre os pontos da esfera menos o polo norte  $N$  com os pontos do plano é chamada de projeção estereográfica.

Observemos que se  $P(X, Y, Z)$  é um ponto da esfera que se aproxima do polo norte, então a reta que liga  $P(X, Y, Z)$  ao polo norte  $N$  tende para uma reta tangente a esfera no polo norte  $N$ , logo sua intersecção com o plano equatorial tende para um ponto no infinito. Como só existe um polo norte, podemos dizer que o plano tem um único ponto no infinito, Assim, se adicionarmos esse "ponto no infinito" para o plano equatorial  $xy$ ,





Figura 4.6: Projeção Estereográfica 1



Notamos que o triângulo  $OP'N$  é semelhante ao triângulo  $Q''PN$  pelo caso AAA, assim, temos:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{Q''P}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{Q''N}}$$

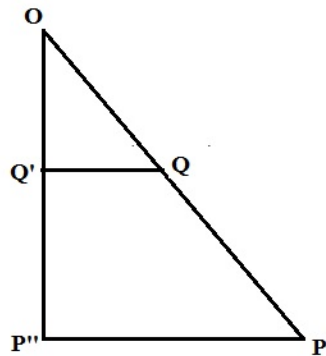
Como,  $\overline{ON} = 1$ ,  $\overline{QP} = Z$  e  $\overline{Q''N} = \overline{ON} - \overline{QP} \Rightarrow \overline{Q''N} = 1 - Z$ , temos:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{Q''P}} = \frac{1}{1 - Z}$$

A figura 4.7 nos permite usarmos o Teorema de Tales, para obtermos:

$$\frac{\overline{OP''}}{\overline{OQ'}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}$$

Figura 4.7: Tales



Como  $\overline{OQ} = \overline{Q''P}$  e  $\overline{Q''P} = \frac{1}{1 - Z}$ , temos:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{1}{1-Z}$$

Portanto podemos concluir que, as coordenada do ponto no plano são dadas por:

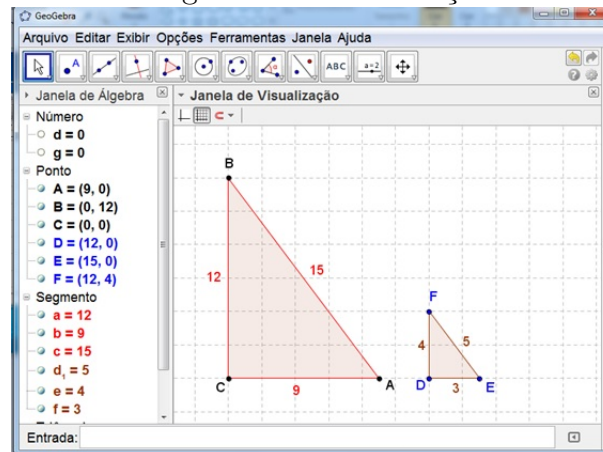
$$x = \frac{X}{1-Z} \text{ e } y = \frac{Y}{1-Z}$$

### 4.3 A Construção do Conceito de Semelhança de Triângulos Com o Auxílio do Geogebra

Para a construção do conceito de semelhança de triângulos, tomamos como principal objetivo orientar os alunos a usar o geogebra e sozinhos alcançarem implicitamente alguns requisitos fundamentais para deduzir tal conceito.

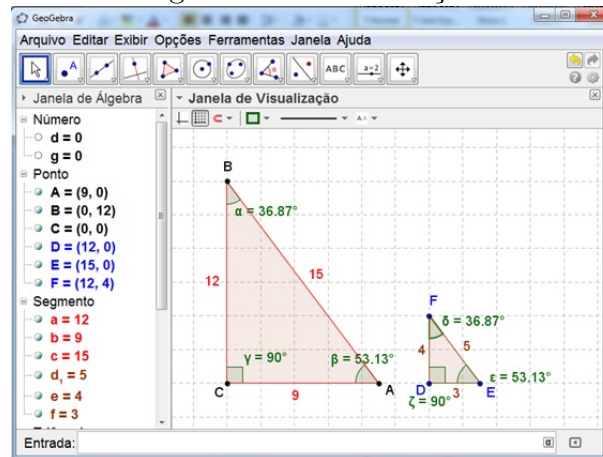
Construímos num primeiro momento, com o auxílio do Geogebra, dois triângulos retângulos com as medidas dos lados já sugeridas conforme figura 4.8.

Figura 4.8: Semelhança



A partir dessa construção inicial, realizamos alguns questionamentos quanto às relações referentes a lados e ângulos de tais triângulos, como por exemplo, o fato de ambos conterem um ângulo reto. Surge então outra questão, quais seriam os valores dos demais ângulos que compõem essas figuras? Como essas medidas não estavam visivelmente indicadas, propusemos que por meio de relações trigonométricas, os alunos buscassem tais valores.

Figura 4.9: Semelhança 1

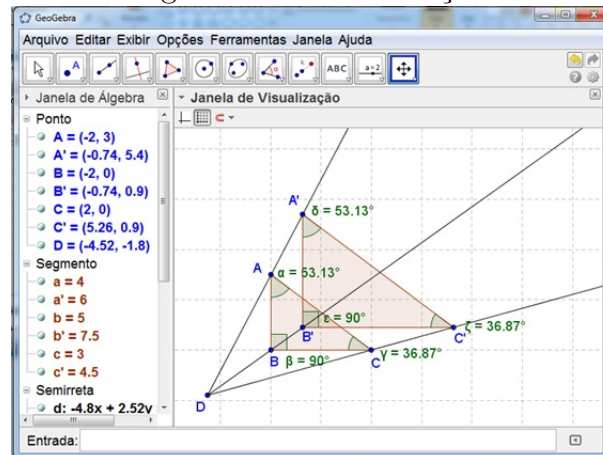


Como já esperado, foram encontrados dois possíveis valores para cada ângulo restante e por isso fez-se necessário relembrar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo conforme figura 4.9. Como consequência de todos os conhecimentos adquiridos até então, obtivemos os critérios que julgamos necessários para a construção do conceito de **semelhança de triângulos**. Porém, antes de introduzir o conceito matemático propriamente dito, dialogamos com os alunos sobre o que eles entendiam por dois objetos serem semelhantes. Explicitada a definição e introduzido os casos de semelhança, apresentamos aos alunos uma página na internet em que eles puderam, de forma divertida, aplicar os conhecimentos recém-adquiridos.

#### Atividade com geogebra - construção de dois triângulos semelhantes.

- Construa o triângulo  $ABC$ , usando a ferramenta “Polígono”.
- Marque um ponto  $D$  fora do triângulo e logo após, crie retas que passe por um dos vértices do triângulo e por este ponto  $D$ .
- Na janela 9, clique na opção “Homotetia dados centro e razão”. Com esta opção ativada, clique no interior do triângulo para selecioná-lo e logo em seguida no ponto  $D$ . Observe que a caixa de homotetia se abrirá pedindo o fator de ampliação (fator maior do que 1) ou redução (fator menor do que 1). Digite nesta caixa o número 1.5 e mande aplicar. Um novo triângulo surgirá a partir do triângulo  $ABC$  e será chamado de  $A'B'C'$ .

Figura 4.10: Semelhança 2



d) Verifique que a razão de semelhança entre os dois triângulos é igual a 1,5. Para isso, efetue a divisão das medidas dos lados do triângulo  $A'B'C'$  pelas medidas dos lados correspondentes do triângulo  $ABC$ . Por exemplo, no campo de entrada, digite  $b'/b$ , que representa o quociente da divisão das medidas dos lados  $A'C'$  e  $AC$ . Depois obtenha os quocientes  $a'/a$  e  $c'/c$ .

e) Marque os ângulos dos triângulos,  $ABC$  e  $A'B'C'$ , e observe que os ângulos correspondentes são congruentes conforme figura 4.10.

Com este conteúdo podemos trabalhar a semelhança entre dois triângulos, e se dois triângulos são semelhantes, então seus lados correspondentes são proporcionais e seus ângulos correspondentes são congruentes. Além disso, com esta atividade podemos trabalhar a soma dos ângulos internos e externos, perímetro e área.

Trabalharíamos este conteúdo pedindo que os alunos construíssem no geogebra os dois triângulos e a cada passo da atividade iríamos pedindo que eles visualizassem que os dois triângulos são semelhantes, pediríamos que marcassem os ângulos internos, para que visualizassem que os ângulos correspondentes são congruentes, que observassem a medida dos lados e verificassem que seus lados são proporcionais. Pediríamos que observassem a soma dos ângulos internos e externos, e que calculassem a área e o perímetro de cada um dos dois triângulos, e depois faríamos uma discussão com toda a turma sobre quais foram às conclusões obtidas.

Por fim, pediríamos que confrontassem seus resultados com os outros colegas, para assim, termos todos os trabalhos unificados e corrigidos.

# Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, J.L.M, *Geometria Euclidiana Plana* 10ª Edição: SBM Rio de Janeiro, 2006.
- [2] Courant, R. e Robbins, H. ,*O que é Matemática?* 1ª Edição: Ciência Moderna 2012.
- [3] Dante, L. R., *Projeto Voaz Matemática*. Editora Ática. 1ª Edição 2012 SP.
- [4] Lima, E. L., *A Matemática do Ensino Médio Volume 2* 6ª Edição: Sociedade Brasileira de Matemática 1998.
- [5] Polya,G. e Latta,G., *Variable compleja* 1ª Edição: Linusa, México 1976.
- [6] Wagner, E. , *Construções Geométricas*. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007
- [7] Wikipédia, Enciclopédia livre, ([https : //pt.wikipedia.org/wiki/TalesdeMileto](https://pt.wikipedia.org/wiki/TalesdeMileto))