Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Uma Nova Abordagem do Ensino da Função Logarítmica com o Uso da Geometria

Osmar Gabriel Soares Filho

Salvador - Bahia

2014

Uma Nova Abordagem do Ensino da Função Logarítmica com o Uso da Geometria

Osmar Gabriel Soares Filho

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT - UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos

Salvador - Bahia
2014

Uma Nova Abordagem do Ensino da Função Logarítmica com o Uso da Geometria

Osmar Gabriel Soares Filho

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Nelson Bastos (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey
UFBA

Prof. Dr. Nelson de A. P. Filho
IFBA

A todos os meus amigos, professores e alunos do Colégio Dom Bosco Salesiano e do Colégio Estadual Georgina Ramos da Silva.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e ao Senhor Jesus pela vida e por todas as bênçãos.

Agradeço aos meus pais Osmar Gabriel Soares e Maria de Lourdes Melo Soares (*in memorian*) que sempre estiveram ao meu lado, mesmo distantes.

Agradeço aos meus filhos Gabriel, Gabriela e João Gabriel que me inspiraram.

Agradeço às minhas irmãs, Antônia, Rita, Aparecida e a toda minha família.

Aos meus amigos Fernando, Cabeto, Walber, Geciara e Mario Sérgio, que são exemplos a serem seguidos.

Aos professores que ministraram as disciplinas do mestrado (PROFMAT).

Aos colegas e amigos do curso, em especial Erivaldo (Léo) e Adroaldo que fizeram a diferença.

Agradeço ao meu ilustre orientador Prof. Dr. José Nelson Bastos, pela gentileza, disponibilidade e competência ao nortear os rumos da execução deste trabalho.

Por fim, quero agradecer à CAPES pelo incentivo e apoio financeiro durante este curso de Mestrado.

Tua caminhada ainda não terminou....
A realidade te acolhe
dizendo que pela frente
o horizonte da vida necessita
de tuas palavras
e do teu silêncio.

Se amanhã sentires saudades,
lembra-te da fantasia e
sonha com tua próxima vitória.
Vitória que todas as armas do mundo
jamais conseguirão obter,
porque é uma vitória que surge da paz
e não do ressentimento.

É certo que irás encontrar situações
tempestuosas novamente,
mas haverá de ver sempre
o lado bom da chuva que cai
e não a faceta do raio que destrói.

Tu és jovem.
Atender a quem te chama é belo,
lutar por quem te rejeita
é quase chegar a perfeição.
A juventude precisa de sonhos
e se nutrir de lembranças,
assim como o leito dos rios
precisa da água que rola
e o coração necessita de afeto.

Não faças do amanhã
o sinônimo de nunca,
nem o ontem te seja o mesmo
que nunca mais.
Teus passos ficaram.
Olhes para trás...
mas vá em frente
pois há muitos que precisam
que chegues para poderem seguir-te.

Charles Chaplin

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma outra abordagem de definição da Função Logarítmica, no ensino médio, através da Geometria, que dessa forma, fornece uma alternativa a mais para assimilação desse conceito por partes dos alunos. Pois com a Geometria, estreitamente ligada ao conceito de área de figuras planas, teremos algo mais concreto para introduzirmos a Função Logarítmica, que será definida como a área sob uma curva, limitada pelo eixo-x e uma reta e consideráveis vantagens relativamente à definição usual de logaritmo como expoente.o.

Palavras chaves: Definição, Função Logarítmica, Área.

Abstract

The present study aims to present another approach of logarithmic function definition, in high school, through the geometry, which thus provides an alternative to assimilation of the concept by parts of the students. Because with the geometry, closely linked to the concept of flat figures area, we'll have something more concrete to introduce the logarithmic function, which is defined as the area under a curve, bounded by the x-axis and a straighter and considerable advantage in relation to the usual definition of logarithm exponent..

Keywords: Definition, Logarithmic Function, Área.

Sumário

Introdução **9**

1 O Ensino da Matemática **12**

1.1 Os documentos oficiais e o estudo das funções logarítmicas 16

1.2 História da invenção dos logarítmos 18

1.3 Descrição do Caderno do Professor de Matemática 19

2 Fundamentação Teórica **21**

2.1 Um Breve Histórico 21

2.2 A Relação da Quadratura da Hipérbole com a Função Logarítmica 21

2.3 Logarítmos e Áreas 26

3 Uma Nova Abordagem do Ensino da Função Logarítmica com o Uso da Geometria **30**

3.1 Função Logarítmica 30

3.2 Logaritmos Naturais 37

3.3 O Gráfico da Função Logarítmica 40

3.4 Propriedades da Função Logarítmica 42

3.5 Equivalência das definições da função logarítmica 47

4 Conclusão **50**

Referências Bibliográficas **51**

Anexo **54**

Introdução

Por mais de dois mil anos, ter uma familiaridade com a Matemática foi considerada como parte indispensável da bagagem intelectual de todas as pessoas cultas. O ensino da Matemática tem se degenerado em exercício repetitivo e vazio de solução de problemas, o que pode desenvolver capacidade formal, mas não conduz a uma compreensão ou maior independência intelectual. (COURANT; ROBBINS, 2000).

Muitos professores de Matemática, já devem ter tido a experiência de serem questionados por seus alunos sobre a importância da Matemática e sua utilidade. (ÁVILA, 2007). A justificativa do ensino da Matemática dada aos alunos resume-se muitas vezes na "importância para o desenvolvimento do raciocínio lógico, ou a aplicação em atividades práticas que envolvem os aspectos quantitativos da realidade".

Esse questionamento sobre a importância da Matemática pelos alunos se deve ao modo de como esta ciência tem sido proposta a esses estudantes, com o propósito de resolver problemas repetitivos mencionados por Courant e Robbins (2000), sem possibilitar a compreensão dos conceitos subjacentes e muito menos favorecer o desenvolvimento da independência intelectual.

Ávila (2007) salienta que o pensamento matemático não deve ser resumido apenas aos seus aspectos lógico-dedutivos, e sim incluir os processos de invenção e descoberta. Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes mais do que da dedução. Para o autor,

> a intuição é a faculdade mental que permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a intervenção do raciocínio. Os matemáticos frequentemente se referem a algum fato "intuitivo", querendo com isto dizer que se trata de algo cuja veracidade é facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que "intuitivo" não é sinônimo de "fácil". Há muitas verdades profundas e difíceis que são apreendidas pela intuição. (ÁVILA, 2007, p. 4)

O ensino da Matemática é justificado pelo autor pela riqueza dos diferentes processos de criatividade proporcionando excelentes oportunidades para o desenvolvimento intelectual do educando e no papel que esta disciplina desempenha na construção de todo o conhecimento humano.

Assim, para atingir plenamente seus objetivos, o ensino desta ciência deve ser feito de maneira a atender certos requisitos básicos.

> O ensino deve sempre enfatizar as ideias da Matemática e sua importância no desenvolvimento da própria Matemática. Os diferentes tópicos da Matemática devem ser tratados de maneira a exibir sua interdependência e organicidade. O ensino da Matemática deve ser feito de maneira bem articulada com ensino de outras ciências, sobretudo a Física. (ÁVILA, 2007, p. 9)

Ao longo da Educação Básica, o ensino das Funções possui um grande espaço no Currículo na disciplina de Matemática. Contudo, resultados de pesquisas que descreveremos nos próximos capítulos, apontam que o conceito de função não é bem compreendido pelos alunos, e muitas vezes esses chegam ao Ensino Superior com dificuldades na compreensão e reconhecimento das funções elementares que são estudadas no Ensino Médio.

O presente estudo teve como objetivo principal apresentar uma forma geométrica (cálculo de área) para a definição da função logarítmica.

No ensino médio, a definição de logaritmo surge da necessidade de se resolver equações do tipo $2^x = 5$, pois não se consegue reduzir todas as potências à mesma base, como é feito nos estudos de equações exponenciais. Já a função logarítmica é apresentada como a inversa da função exponencial, que se apresenta como uma grande dificuldade para os alunos.

Com a definição da função logarítmica por meio de uma área, surgem duas questões, a saber, a equivalência dessa definição com a convencional, e as demonstrações das propriedades da função. Que nesse contexto, devem ser justificadas por meio de cálculos de áreas, ou seja, por meio de uma geometria.

Claramente, tal definição também apresenta as suas dificuldades, o que é natural. Contudo essa definição é mais fácil de ser visualizada e entendida do que a definição usual, que é dada pela inversa da função exponencial, que apresenta dificuldades de entendimento, tais como $3^{\sqrt{2}}$ de modo natural.

É possível introduzir os logaritmos de uma outra maneira e, a partir daí, perceber que existe uma função logarítmica que é inversível e cuja a inversa é a função exponencial definida para todo número real. Dessa forma, teremos resolvido um obstáculo, o problema dos expoentes irracionais.

Nos nossos dias, a utilidade dos logaritmos para efetuar cálculos está ultrapassada, mas, a sua importância mantêm-se bem viva, dado o papel da função logarítmica na modelação matemática de situações reais. No ensino básico, a definição com base numa função exponencial levanta dificuldades ao nível da compreensão do conceito. A função logaritmo surge frequentemente num contexto de modelação, mas em que se aplicam modelos previamente construídos, pelo que as questões se resumem a alguma manipulação algébrica, a par com a utilização de uma calculadora (em substituição das tradicionais tabelas de logaritmos).

Em 2010, o matemático brasileiro Elon Lages Lima propôs uma abordagem geométrica deste conceito, referindo que, "a definição geométrica dos logaritmos apresenta uma vantagem incontestável de simplicidade conceptual".

Mas a abordagem geométrica do conceito de logaritmo remonta também ao século XVII. Surgiu em 1647 com a seguinte descoberta do Jesuíta belga St. Vincent: "A área abaixo do ramo positivo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ é um logaritmo".

No capítulo 1, analisaremos como o ensino da Matemática, o ensino das funções logarítmicas e seus obstáculos, que nos conduziu às questões de pesquisas e aos nossos objetivos, são sugeridos pelos documentos oficiais e como aproximar os conteúdos abordados à realidade do aluno, levando em consideração as experiências dos estudantes, um breve histórico da invenção dos logaritmos e a descrição do caderno do professor de Matemática.

Para subsidiar esse trabalho, no capítulo 2, apresentaremos o referencial teórico, fundamental para o desenvolvimento deste estudo, com a relação da quadratura da hipérbole com a função logarítmica.

No capítulo 3 denominado como "Uma nova abordagem da função logarítmica com o uso da Geometria", para realçar o conceito de logaritmos com a sua definição geométrica, estreitamente ligada ao conceito de área de figuras planas, apresenta consideráveis vantagens relativamente à definição igual de logaritmos como expoente.

Capítulo 1

O Ensino da Matemática

Os estudos aqui apresentados visa à aquisição de competências científicas e pedagógicas necessárias ao exercício da função docente no Ensino da Matemática no Ensino Básico e no Ensino Secundário, articulando o processo de ensino e aprendizagem com as atuais exigências de qualificação do corpo docente decorrentes das transformações da sociedade, da educação e da evolução científica e tecnológica.

Ao iniciar sua vida escolar, a criança inicia o processo de alfabetização, não só em sua língua materna como também na linguagem Matemática, construindo o seu conhecimento segundo as diferentes etapas de desenvolvimento cognitivo; um bom ensino nesse nível é fundamental.

> [...] o aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola. Qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia. Por exemplo, as crianças começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes elas tiveram alguma experiência com quantidades – elas tiveram que lidar com operações de divisão, adição, subtração e determinação de tamanho. Consequentemente, as crianças têm a sua própria aritmética pré-escolar, que somente psicólogos míopes podem ignorar (VYGOTSKY, 1989, p. 94-95).

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve ser bem trabalhado nas escolas, para que futuramente os alunos não apresentem dificuldades graves, quanto a construção deficiente do pensamento lógico-abstrato.

O trabalho com a matemática em sala de aula representa um desafio para o professor na medida em que exige que ele o conduza de forma significativa e estimulante para o aluno. Geralmente as referências que o professor tem em relação a essa disciplina vêm de sua experiência pessoal. Muitos deles afirmam que tiveram dificuldades com aquela matemática tradicionalmente ensinada nas escolas, que tinha como objetivo a transmissão de regras por meio de intensiva exercitação. Cabe então descobrir novos jeitos de trabalhar com a matemática, de modo que as pessoas percebam que pensamos matematicamente o tempo todo, resolvemos problemas durante vários momentos do dia e somos convidados a pensar de forma lógica cotidianamente. A matemática, portanto, faz parte da vida e pode ser aprendida de uma maneira dinâmica, desafiante e divertida.

No âmbito escolar, a educação da matemática é vista como uma linguagem capaz de traduzir a realidade e estabelecer suas diferenças. Na escola, o aluno deve envolverse com atividades matemáticas que a educam nas quais ao manipulá-las ele construa a aprendizagem de forma significativa, pois o conhecimento matemático se manifesta como uma estratégia para a realização das intermediações criadas pelo homem, entre sociedade e natureza.

Mas, a construção desse conhecimento pelos alunos ainda está muito longe porque a prática desenvolvida por muitos professores ainda é tradicional, a prática deles não leva seus alunos a construírem uma aprendizagem voltada para a realidade na qual seus alunos participam.

As críticas acerca dos resultados negativos do ensino da matemática levam professores comprometidos com a educação da matemática nas séries iniciais do ensino fundamental a buscarem caminhos para solucionar essas deficiências apresentadas pelos alunos, eles buscam ensinar a matemática voltada à realidade dos alunos.

No entanto as críticas, que de todos os lados se levantam contra os vários aspectos e resultados do ensino da Matemática, vêm, em todo o mundo, ocasionando debates que levam os profissionais da área a repensar o seu papel e a procurar novas estratégias didáticas. Eles buscam atividades matemáticas que sejam realmente educativas e não meramente um treino em uma linguagem sem sentido para o aluno.

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. No momento em que abrimos os olhos pela manhã e olhamos a hora no despertador, estamos "lendo" na linguagem matemática, exercitando nossa abstração e utilizando conhecimentos matemáticos que a humanidade levou séculos para construir. É quase impossível abrir uma página de jornal, cuja compreensão não requeira um certo conhecimento matemático e um domínio mínimo da linguagem que lhe é própria – porcentagens, gráficos ou tabelas são necessários na descrição e na análise de vários assuntos. Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana. Um médico que interpreta um eletrocardiograma está utilizando um modelo matemático; ao dar um diagnóstico, está utilizando o raciocínio matemático e empregando conhecimentos de estatística. Um pedreiro utiliza um método prático para construir ângulos retos que já era empregado pelos egípcios na época dos faraós. Uma costureira, ao cortar uma peça, criar um modelo, pratica sua visão espacial e resolve problemas de geometria.

Apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil (e, por vezes, parece impossível) mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados. O professor, quase sempre, não encontra ajuda ou apoio para realizar essa tarefa de motivar e instigar o aluno, relacionando a Matemática com outras áreas de estudo e identificando, no nosso cotidiano, a presença de conteúdos que são desenvolvidos em sala de aula. Para isso, é importante compartilhar experiências que já foram testadas na prática e é essencial que o professor tenha contacto com textos de leitura acessível, que ampliem seus horizontes e aprofundem seus conhecimentos.

Inserir o conteúdo em contexto mais amplo, provocando a curiosidade do aluno, ajuda a criar a base para um aprendizado sólido que só será alcançado através da real compreensão dos processos envolvidos na construção do conhecimento. Não se trata, é claro, de repetir um caminho que a humanidade levou séculos para percorrer. No entanto, é preciso incentivar o aluno a formular novos problemas, a tentar resolver questões "do seu jeito". O espaço para tentativa e erro é importante para desenvolver familiaridade com o raciocínio matemático e o uso adequado da linguagem. Da mesma forma que é possível ler um texto palavra após palavra, sem compreender seu conteúdo, é também possível aprender algumas "regrinhas" e utilizar a Matemática de forma automática.

O material aqui apresentado sugere abordagem contextualizada e o uso de material concreto e apresenta uma variedade de situações cotidianas em que a matemática se faz presente. Ao mesmo tempo, explora, em cada caso, o conteúdo de forma rigorosa e sistemática, levanta problemas e indica soluções e, nesse processo, expõe os meandros do raciocínio matemático.

O professor e educador George Polya (1887-1985), autor do livro A arte de resolver problemas, afirmava, muito adequadamente, que para ensinar é preciso saber muito mais do que se ensina, é preciso conhecer sua matéria, ter interesse e entusiasmo por ela.

É com grande entusiasmo que a Secretaria de Educação Infantil e Fundamental, agradece a participação da comunidade matemática, por meio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

A aprendizagem no ambiente escolar deve permitir que o aluno compreenda o assunto por meio de exemplos ligados ao seu cotidiano para que, posteriormente, ele seja capaz de resolver problemas mais complexos. A aprendizagem que atribui significado ao conceito permite que os alunos tomem decisões com mais segurança e autonomia em diversas situações.

Chamamos de aprendizagem significativa essa intenção de propiciar aos alunos condições para os conhecimentos conceituais, procedimentais e atitudinais, favorecendo o desenvolvimento de competências e habilidades, valores e princípios éticos para atuarem na sociedade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais dos diferentes níveis de ensino, publicados em 1998, 1999 e 2002, e outros documentos oficiais referentes à Educação no Brasil têm enfatizado a necessidade de focar o ensino e a aprendizagem no desenvolvimento de competências e habilidades por parte do aluno, em lugar de centrá-lo no conteúdo conceitual. Essa visão está em sintonia com uma tendência mundial fundamentada nos quatro pilares para a Educação, propostos pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco, sigla em inglês): aprender a conhecer; aprender a fazer; aprender a viver com os outros e aprender a ser.

O ensino de Funções é um dos assuntos que acompanha a trajetória dos alunos desde o Ensino Fundamental, sendo ampliado esse universo de estudo durante o Ensino Médio e constitui-se como subsídio fundamental para os estudantes que ingressam em diversos cursos no Ensino Superior.

> O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática (EVES, 2008, p. 661).

Apesar de ser um assunto proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM[1], BRASIL, 1999) na estrutura curricular na disciplina de Matemática no Ensino Médio, em especial no primeiro e terceiro ano, há pesquisadores que apontam em seus resultados de pesquisas que há diversas dificuldades de aprendizagem deste conceito por alunos que ingressam no Ensino Superior, tais conceitos são alicerces para futuros tópicos a serem desenvolvidos ao longo do curso.

Existem muitas dificuldades no processo ensino e aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas. Muitas vezes o ensino restringe-se apenas ao estudo das funções afim e quadráticas, e as funções exponenciais e logarítmicas não são trabalhadas no 1º ano do Ensino Médio, na sua totalidade, como deveria.

O estudo desta função deve ser feito neste nível de ensino. Por um lado existe vários modelos matemáticos que se utilizam deste objeto para modelar fenômenos naturais, tais como pH de soluções químicas, escalas para medir a intensidade de terremotos entre outros e, por outro lado, os alunos que ingressarem no Ensino Superior poderão ter dificuldades ao se depararem com o estudo dessa função.

[1]Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Brasil, 1999.

Ao fazer parte do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), houve uma motivação em buscar pesquisas realizadas sobre o ensino das Funções Logarítmicas com o uso da Geometria (cálculo de área).

1.1 Os documentos oficiais e o estudo das funções logarítmicas

Os PCNEM (1999) propõem como critério da seleção de conteúdos a contextualização e citam que cabe ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira autonomia para lidar com os conhecimentos matemáticos. No ensino de funções, o estudante deve compreender o conceito de função em situações diversas para descrever e estudar por meio da leitura de gráficos o comportamento de certos fenômenos e fazer conexões com outras áreas do conhecimento.

Com o propósito de buscar mais subsídios sobre o ensino de função logarítmica, fizemos a leitura dos PCN + Ensino Médio[2]. Além de focalizar o ensino da Matemática de uma forma contextualizada, integrada, relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias para interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, generalizar entre outras ações necessárias para a formação do estudante. Conforme destacam os PCN + Ensino Médio (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e também, à contextualização sociocultural.

Nos PCN+ Ensino Médio os temas foram organizados por três eixos norteadores para possibilitar a articulação dos conteúdos e o desenvolvimento das competências com relevância científica e cultural, desenvolvidos nas três séries do Ensino Médio:

Álgebra: números e funções;

Geometria e Medidas;

Análise de Dados.

O ensino da função logarítmica está situado no primeiro eixo estruturador, em que a unidade temática proposta é a variação de grandezas. Assim o estudo de funções possibilita ao aluno adquirir uma linguagem algébrica necessária para estabelecer a relação de grandeza entre duas variáveis. Desta forma, os PCN + Ensino Médio (2002) propõem ênfase do estudo dos diferentes tipos de funções focalizando seus conceitos, propriedades, interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

[2]PCN+ Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (BRASIL, 2002).

O ensino de funções pode ser permeado de situações do cotidiano, formas gráficas que outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.

> A função exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada a áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras (BRASIL, 2002, p. 121).

As OCEM[3] partem do princípio de que toda situação de aprendizagem deve priorizar o "pensar matematicamente". Desta forma, é necessário priorizar atividades que desenvolvam nos alunos a habilidade do "fazer matemático" por meio de um processo investigativo, dando prioridade à qualidade e não à quantidade dos conteúdos de forma que auxiliem na apropriação do conhecimento.

O documento aponta que no ensino de funções é necessária a exploração das diversas formas de representações de uma função, tais como a representação nos registros algébricos e gráfico, de modo que se explore e se registre qualitativamente crescimento e decrescimento do comportamento da função ao representá-la graficamente.

É importante que o estudo de função seja apresentado ao aluno por meio dos diferentes modelos tais como linear, quadrático e exponencial por meio de situações de aprendizagem que abordem diversas áreas do conhecimento, tais como queda livre, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, crescimento de uma colônia de bactérias, etc.

No que se refere ao estudo da função logarítmica, é recomendado ao professor que faça uma abordagem sobre a função inversa da função exponencial, e possibilite aos alunos uma discussão das características destes modelos, e que na função exponencial o crescimento apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante.

As matrizes de Referência de Matemática estão estruturadas por anos e séries avaliadas. Para cada um deles, são definidos os descritores que indicam uma determinada habilidade que deve ter sido desenvolvida nessa fase de ensino. Esses descritores são agrupados por temas que relacionam um conjunto de objetivos educacionais. Os temas estão agrupados em:

Tema I – Espaço e Forma;

Tema II – Grandezas e Medidas;

Tema III – Números e Operações: Álgebra e Funções.

[3] Orientações Curriculares do Ensino Médio. (2006).

A função logarítmica está localizada no Tema III na qual é indicada pelo descritor D28 que tem por objetivo identificar a representação no registro algébrico e gráfico de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.

Inicialmente, os logaritmos foram utilizados como instrumento para facilitar e simplificar o cálculo aritmético, transformar produtos em somas, permitindo assim a rapidez em resolver situações-problema da época. Contudo, nos dias atuais esse conceito passou por uma série de evoluções e ampliações ao longo do tempo. Para a autora, a introdução deste conteúdo é de vital importância, pois pode explorar situações-problema que envolvam este conceito, com o objetivo de que o aluno perceba a relevância de estudar logaritmos nos dias de hoje.

1.2 História da invenção dos logarítmos

Acreditamos que o ensino da Matemática pode se tornar mais prazeroso para os alunos quando o professor cita a História da Matemática ao iniciar o estudo de um determinado conteúdo.

É importante que os alunos saibam como a Matemática desenvolveu-se com o passar do tempo e não vê-la como uma ciência “pronta e acabada” ou “exata” como geralmente é afirmada pelo senso comum.

Ao iniciar o estudo de um tópico da Matemática é comum ouvirmos perguntas do tipo “Por que temos que estudar este tópico?”. Segundo Ávila, em situação como essa, o professor pode aproveitar este momento de curiosidade do aluno para fazer pequenos relatos da história da Matemática e estimular seu interesse pela disciplina.

Temas como a história do número zero, a história dos algarismos, os números negativos, números complexos, a história do número entre outros conteúdos que são abordados ao longo da Educação Básica “podem despertar a curiosidade dos alunos e transformar o desinteresse do aluno pela Matemática em sua ativa participação no aprendizado” (ÁVILA, 2007, p.11).

Concordamos com as OCEM (2006) no que diz respeito à utilização da História da Matemática em sala de aula:

> [...] também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes na construção do conhecimento matemático (BRASIL, 2006, p. 86).

Neste capítulo, iremos focalizar apenas a história da invenção dos logaritmos, e a repercussão desta invenção na comunidade científica da época e também a relação da quadratura da hipérbole com a função logarítmica.

Segundo Eves (2008) a invenção dos logaritmos foi recebida pela comunidade científica de um modo muito entusiástico, pois havia uma preocupação em facilitar a manipulação de dados numéricos, devido à expansão do conhecimento científico no século XVI e o início XVII nas áreas da geografia, física e astronomia.

John Napier (1550-1617) ficou conhecido pela ideia matemática abstrata que levou 20 anos para desenvolver: os logaritmos.

Antes de elaborarmos nossa sequência didática, fizemos um estudo de como é sugerido o ensino das funções logarítmicas e exponenciais nos documentos oficiais (que relatamos anteriormente no capítulo 1), tais como os PCNEM (BRASIL,1999), PCN + Ensino Médio (BRASIL, 2002), OCEM (BRASIL, 2006), matriz de referência do SAEB (BRASIL, 2005), as pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem da Função Logarítmica, e um breve estudo histórico da invenção dos logaritmos.

Faremos a seguir uma descrição de como é apresentado o tema Função Logarítmica no Caderno do Professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio.

1.3 Descrição do Caderno do Professor de Matemática

O caderno do Professor de Matemática, 1º ano do Ensino Médio – volume 3 tem como objetivo auxiliar os professores em suas práticas de sala de aula.

São propostas ao professor quatro Situações de Aprendizagens a serem trabalhadas durante o 3º bimestre com os alunos do 1º ano do Ensino Médio:

As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial;

Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: a força da ideia de logaritmo;

As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.

Problemas envolvendo expoentes e logaritmos em diferentes contextos: equações e inequações.

Unidade 1 – Consolidação da ideia de potência – significado e operações com expoentes inteiros, racionais e reais.
Unidade 2 – A função exponencial – crescimento, decrescimento e gráficos.
Unidade 3 – A ideia de logaritmo – uma ideia brilhante do século XVII cada vez mais importante no século XXI.
Unidade 4 – Propriedades dos logaritmos – logaritmos em diferentes bases.
Unidade 5 – Logaritmos em diferentes contextos: acidez, escala Richter e decibéis.
Unidade 6 – As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.
Unidade 7 – Problemas envolvendo expoentes e logaritmos em diferentes contextos – equações e inequações.
Unidade 8 – Uma aplicação importante: o uso de gráficos com escala logarítmica.

Figura 1.1: Quadro geral de conteúdos do 3º Bimestre da 1ª Série do Ensino Médio.
Fonte:Colégio Marista de Salvador.

Ao longo do Ensino Fundamental, as potências foram apresentadas gradativamente, sendo que no 6º ano, as primeiras noções; no 8º ano, as potências com expoentes inteiros e no 9º ano, expoentes racionais e reais. No 1º ano do Ensino Médio, o estudo das potências é consolidado por meio da função exponencial com destaque no crescimento ou decrescimento.

> Já os logaritmos, uma invenção genial do século XVII, cuja motivação primeira era a simplificação dos cálculos em uma época de limitados instrumentos para tal, a despeito da abundância de recursos atuais, permanecem como um tema especialmente relevante, não em razão de tais simplificações, mas pela sua adequação para a descrição de fenômenos em que as variáveis aparecem no expoente. Apresentar seu significado mais profundo, o que contribuiu para que sua importância se conservasse, juntamente com as propriedades mais relevantes para seu uso em diferentes contextos. (SÃO PAULO, 2009, p. 9)

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Um Breve Histórico

Observamos que o ensino de logaritmos está pautado nas sugestões apontadas nas Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2006) e também na necessidade de apresentar situações e fenômenos que utilizam modelos logaritmos, como cálculo de juros, intensidade sonora, acidez de líquidos, etc.

A apresentação da função logarítmica é sugerida sendo reconhecida como a função inversa da exponencial neste documento, “uma vez que o que as distingue é apenas uma troca de posição entre as variáveis” (SÃO PAULO, 2009, p. 9).

Após a adoção dos logaritmos pela comunidade científica, outras inovações foram construídas, como usar uma régua, na qual os números poderiam ser colocados em espaços proporcionais aos seus logaritmos. William Oughtred (1574-1660) usou duas escalas logarítmicas que pudessem mover-se, uma em relação à outra, esse instrumento foi publicado em 1622.

2.2 A Relação da Quadratura da Hipérbole com a Função Logarítmica

O método utilizado para encontrar a área de uma linha poligonal fechada é conhecido como quadratura. Segundo Maor (2008) a palavra quadratura é uma forma de expressar em termos de unidade de área, que são quadrados. Se quisermos encontrar a área de um retângulo de lados a e b e se este retângulo deve ter a mesma área de um quadrado de lado x então teremos: $x^2 = ab$ ou $x = \sqrt{ab}$. Com o passar do tempo, a demonstração geométrica de um problema de quadratura abriu caminho para uma abordagem mais computacional, ou seja, a construção real de uma forma equivalente não era mais considerada necessária, desde que fosse possível demonstrar que tal construção poderia ser feita. Contudo, com a introdução dos processos infinitos na matemática, em meados de 1600, o problema da quadratura passou a ser puramente computacional.

Maor (2008) relata que uma das formas que resistiam a todas tentativas da quadratura era a hipérbole. Esta curva é obtida quando um cone é cortado por um plano num ângulo maior que o ângulo existente entre a base do cone e seu lado, e possui um par de linhas retas associadas a ela, suas duas linhas tangentes no infinito. Ao mover ao longo de cada ramo, afastando-se do centro, é possível aproximar cada vez mais dessas linhas, sem ser nunca alcançadas. Essas linhas são definidas como assíntotas da hipérbole (palavra grega "não se encontrando"); que são manifestações geométricas do conceito de limite.

Dentre os matemáticos destacados por Maor (2008) que tentaram resolver o problema da quadratura da hipérbole estão Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650) e Blaise Pascal (1623-1662). Em 1637 Descartes publicou a obra La Geométrie que teve influência em várias gerações de matemáticos, e apresentou ao mundo a Geometria Analítica. Este fato colocou um fim na geometria grega clássica, na qual era fundamental a construção geométrica e a prova, e a geometria tornou-se uma parte inseparável da álgebra, e depois ao cálculo.

Pierre de Fermat interessou-se na quadratura de curvas do tipo $y = x^n$ onde n é um número positivo. Tais curvas são chamadas de parábolas generalizadas. Fermat fez um trabalho semelhante ao método de exaustão de Arquimedes sem recorrer a uma série infinita. O matemático fez aproximação da área sob cada curva por meio de retângulos e as bases desses retângulos formam uma progressão geométrica.

O trabalho de Fermat foi um avanço significativo, pois a quadratura envolveu uma família de curvas fornecida pela $y = x^n$ para valores inteiros, positivos de n.

> Além disso, ao modificar ligeiramente seu procedimento, Fermat mostrou que a equação $y = x^n$ permanece válida mesmo quando n é um inteiro negativo, desde que agora calculemos a área de $x = a$ (onde $a > 0$) até o infinito. Quando n é um inteiro negativo, digamos $n = -m$ (onde m é positivo), obtemos a família de curvas $y = x^{-m}$, chamadas frequentemente de hipérboles generalizadas. Que a fórmula de Fermat funcione nesse caso é um tanto notável, já que as equações $y = x^m$ e $y = x^{-m}$ apesar de sua aparente semelhança representam tipos bem diferentes de curvas: as primeiras são contínuas em toda a parte, enquanto as últimas se tornam infinitas em $x = 0$ e em consequência possuem uma "quebra" (assíntota vertical) neste ponto. (MAOR, 2008, p.92)

O problema da quadratura da hipérbole foi solucionado pelos gregos que foram os pioneiros há 2.000 anos, mas ainda ficam em aberto a fórmula que fornece a área sob a

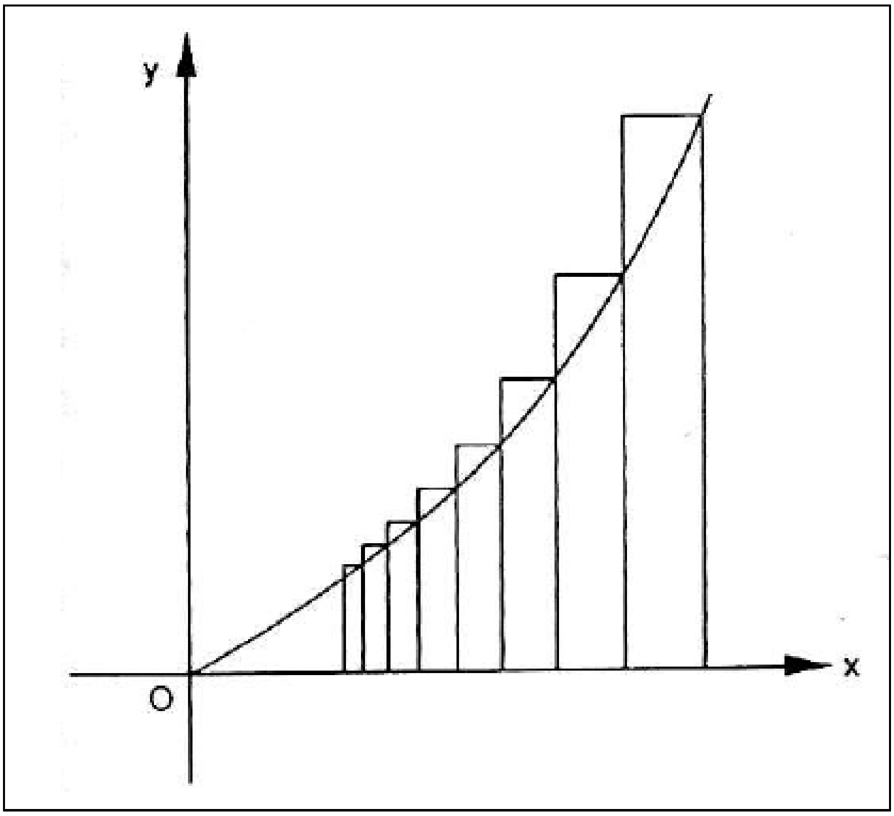

Figura 2.1: Aproximação da área por meio de retângulos maiores.
Fonte: Maor, 2008, p.91

hipérbole como uma função de variável, t.

Contudo, a fórmula de Fermat não funcionou para a curva $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

Segundo o autor, não há certeza de quem de fato trabalhou neste caso particular, devido ao atraso da publicação do trabalho Opus geometricum quadraturae circuli et sectionm coni (1647) escrito pelo jesuíta belga Grégoire de Saint-Vicent[1] (1548-1667) que passou maior parte de sua vida trabalhando em vários problemas de quadratura.

Segundo Maor (2008), um dos alunos de Saint-Vicent iguais. Assim a área é proporcional ao logaritmo da distância horizontal (MAOR,2008, p. 92), Alfonso de Sarasa (1618-1667), registrou explicitamente que se considerarmos $A(t)$ como a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo $x > 0$ até um ponto variável $x = t$, teremos $A(t) = \log t$, uma das primeiras ocasiões que se fez uso de uma função logarítmica, Saint-Vicent percebeu que, quando as bases formam uma progressão geométrica, os retângulos possuem áreas iguais. Assim a área é proporcional ao logaritmo da distância horizontal (MAOR,2008, p. 92). quando até então os logaritmos eram considerados principalmente uma ferramenta de cálculo.

[1]Saint-Vicent percebeu que, quando as bases formam uma progressão geométrica, os retângulos possuem áreas.

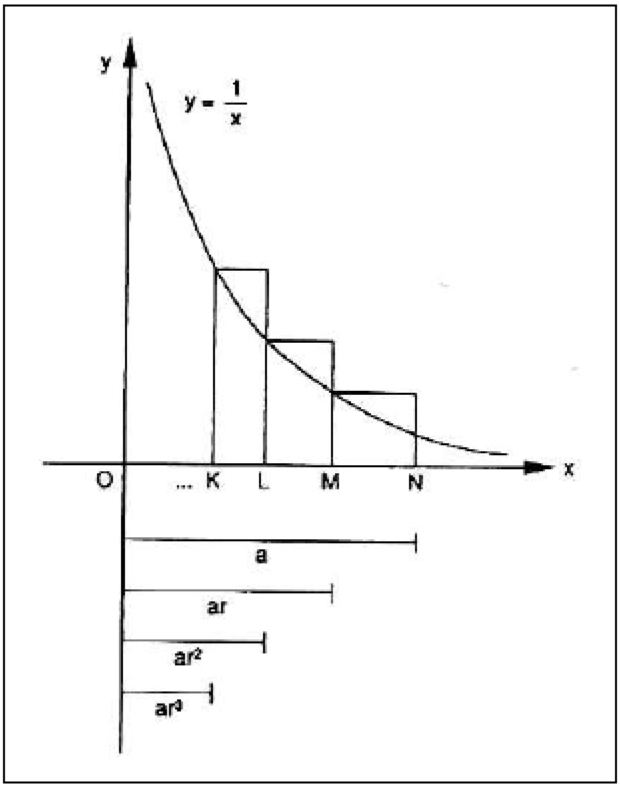

Figura 2.2: O método de Fermat aplicado à hipérbole.
Fonte: Maor, 2008, p. 92.

Também relata o processo de encontrar o inverso da função exponencial. Se $y = e^x$ (denominada por função exponencial natural) e considerando y como sendo um valor determinado, o objetivo é resolver esta equação para x, isto é, expressar x em termos de y.

> Lembramos que o logaritmo comum ou briggsiano de um número $y > 0$ é o número x para o qual $10^x = y$. Exatamente do mesmo modo, o logaritmo natural de um número $y > 0$ é o número x para qual $e^x = y$. E assim como escrevemos $x = \log y$ para o logaritmo comum (logaritmo de base 10) de y, também escrevemos $x = \ln y$ para o logaritmo natural (logaritmo de base e). O inverso da função exponencial é então a função logarítmica natural e sua equação, depois de trocar x e y, é $y = \ln x$. A Figura 2.3 mostra os gráficos de $y = e^x$ e de $y = \ln x$ plotados no mesmo sistema de coordenadas; como acontece com qualquer par de funções inversas, os dois gráficos são reflexos um do outro sobre a linha $y = x$. (MAOR, 2008, p. 142).

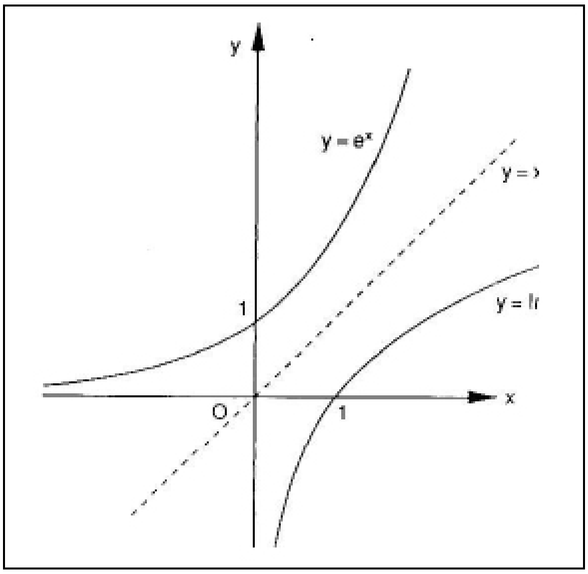

Figura 2.3: As equações $y = e^x$ e $y = \ln x$ representam funções inversas.
Fonte: Maor, 2008, p. 98.

> Com relação à taxa da variação, segundo a notação de Leibniz, a taxa de variação de uma função inversa é recíproca (um dividido por) da taxa de mudança da função original; em símbolo $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. No caso da função exponencial se $y = e^x$ e $\frac{dy}{dx} = e^x = y$ de modo que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ ou seja, a taxa de variação de x em função de y é igual a $\frac{1}{y}$ e isso significa que $x = \ln y$ porque $y = e^x$. Se as letras forem trocadas a fórmula será $y = \ln x$, então $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ ou seja, $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ e isso significa que $\ln x$ é uma antiderivada de $\frac{1}{x}$; $\ln x = \int \frac{1}{x} dx$. (MAOR, 2008, p.142).

A fórmula $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$. em que C é a constante da integração explica a descoberta de Saint-Vicent de que a área sob a hipérbole segue de uma função logarítmica. Se chamarmos esta área de $A(x)$, teremos $A(x) = \ln x + C$ se o ponto inicial desta área for inicialmente como $x = 1$, terá $0 = A(1) = \ln x + C$, no entanto, $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$ e assim teremos $C = 0$. Podemos concluir que a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ de $x = 1$ a qualquer $x > 1$ é igual a $\ln x$. Este resultado dá ao número e um significado geométrico que o relaciona com a hipérbole: $A = \ln x \rightarrow A = 1$ quando $x = e$.

Em resumo, podemos notar que os logaritmos não so foram inventados sem a intenção de contribuir com o desenvolvimento da Matemática e outras ciências, houve uma repercussão na sociedade científica, e esta invenção contribuiu com o desenvolvimento de outros conceitos.

> A quadratura da hipérbole colocou a função logarítmica e o número que foi o único número a ser definido por um processo de limite, $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ na vanguarda da Matemática. O momento crucial foi com a invenção do cálculo, quando se percebeu que o inverso da função logarítmica que depois foi denotado por e^x era igual a sua própria derivada (MAOR, 2008, p.241).

2.3 Logarítmos e Áreas

Na origem do conceito do logaritmo esteve um motivo muito prático: a simplificação dos cálculos aritméticos. Mais precisamente, procurou-se um processo que permitisse transformar produtos em somas.

No início do século XVII, o matemático escocês Napier construiu um sistema de logaritmos constituído por uma tabela com duas colunas que associava a cada número positivo x na primeira coluna a um número $L(x)$ designado por logaritmo de x na segunda coluna, verificando as condições seguintes:

$$x < y \Rightarrow L(x) < L(y) \tag{2.1}$$

$$L(xy) = L(x) + L(y) \tag{2.2}$$

Considere cada $x > 1$ e $L(x)$ a área da porção de plano $A1, x$ do primeiro quadrante limitada pelo grafico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e pelas retas verticais com abscissas 1 e x, conforme a Figura 2.4.

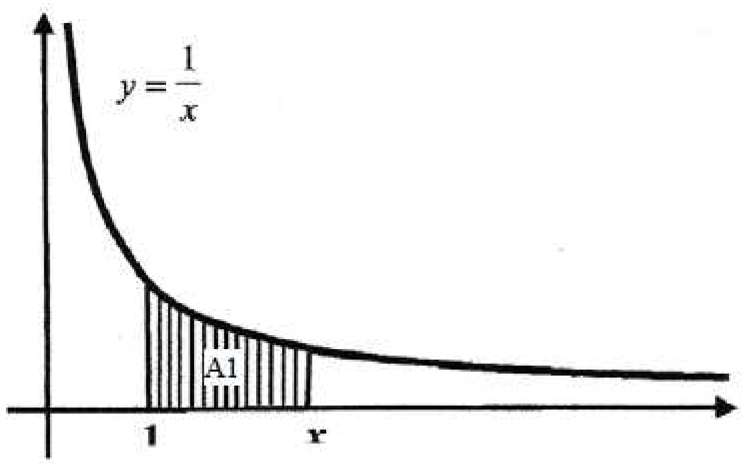

Figura 2.4:

Esta descoberta se baseia que se, para cada $x > 1$, $L(x)$ designar a área da porção de plano $A_{1,x}$ do primeiro quadrante limitada pelo gráfico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e pelas retas verticais com abscissas 1 e x, então para quaisquer $a,b \in [1,+\infty[$ verifica-se a igualdade $L(ab) = L(a) + L(b)$.

Define-se então em $\mathbb{R}_+$ uma função $L(x) = \begin{cases} A_{1,x}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ -A_{1,x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$

Deseja-se então verificar que, à semelhança do logaritmo natural, a função L satisfaz a dupla desigualdade

$$\frac{x}{x+1} \leq L(x+1) \leq x, \;\; \forall x \in]0,+\infty[\tag{2.3}$$

É imediato que a dupla igualdade se verifica para $x = 0$. Da definição de L decorre facilmente a segunda desigualdade, representada geometricamente nas Figuras 2.5 e 2.6 correspondentes, respectivamente, a $x > 0$ e $x \in]0,1[$.

Com efeito, se $x > 0$, a área do retângulo sombreado é igual a x e a área tracejada é igual a $L(x+1)$.

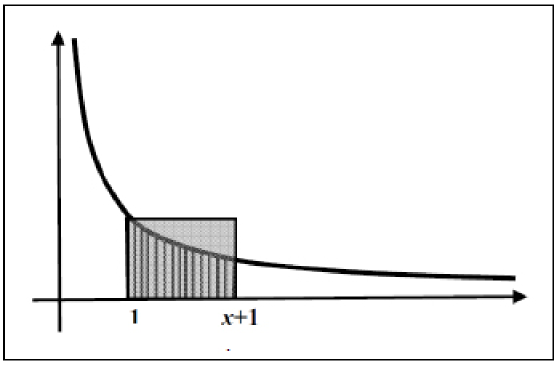

Figura 2.5:

Se $x \in]0,1]$, a área do retângulo sombreado é igual a $-x$ e a área tracejada é igual a $-L(x+1)$.

Então $-x < -L(x+1)$ e, consequentemente, $x > L(x+1)$.

Geometricamente a primeira desigualdade para $x > 0$ e $x \in]0,1[$ com base nas duas Figuras 2.7 e 2.8, tem-se que:

Se $x > 0$ a área do retângulo sombreado é $\frac{x}{x+1}$ e a área tracejada é igual a $L(x+1)$, sendo que $\frac{x}{x+1} < L(x+1)$.

Se $x \in]0,1]$ a área do retângulo sombreado é igual a $\frac{x}{x+1}$ e a área tracejada é igual a $-L(x+1)$. Como $-L(x+1) < -\frac{x}{x+1}$ tem-se que $\frac{x}{x+1} \leq L(x+1)$

Com suporte na representação geométrica verificamos então que

$$\frac{x}{x+1} \leq L(x+1) \leq x, \forall x \in]0,+\infty[\tag{2.4}$$

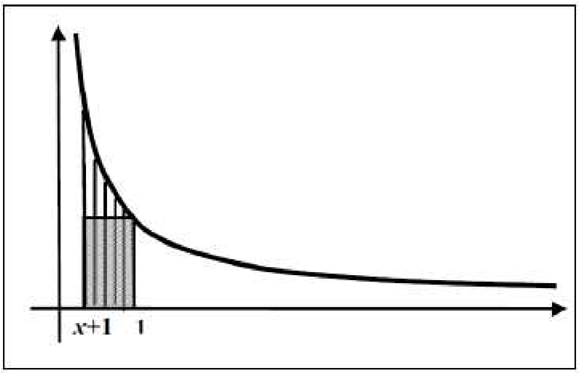

Figura 2.6:

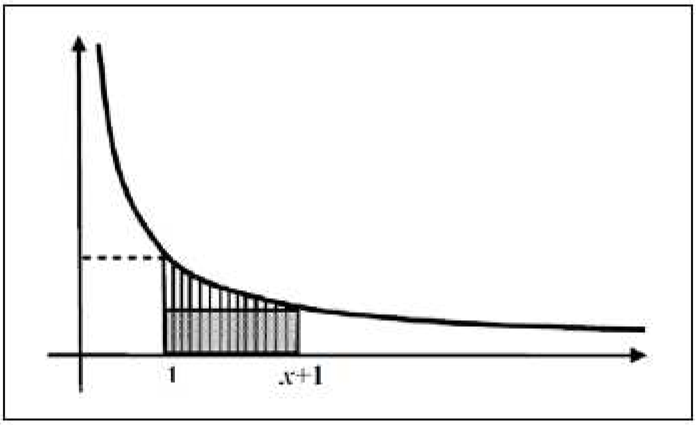

Figura 2.7:

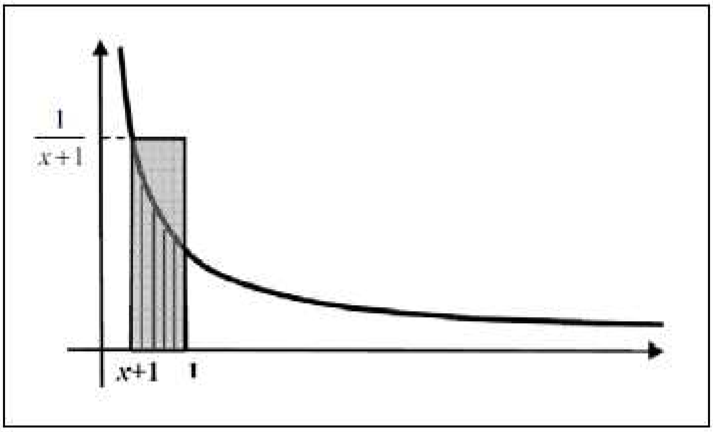

Figura 2.8:

Desta dupla desigualdade, resulta facilmente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{L(x+1)}{x} = 1 \tag{2.5}$$

uma vez que, para $x \neq 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \frac{L(x+1)}{x} \leq 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$.

O valor deste limite permite esclarecer a relação entre a função L e os logaritmos naturais.

Com efeito, sendo a função $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ estritamente crescente em $\mathbb{R}_+$ e tal que $L(xy) = L(x) + L(y)$, a sua função inversa $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é tal que $E(x+y) = E(x).E(y)$.

Usando o fato de que

$$\lim_{x\to 0} \frac{L(x+1)}{x} = 1 \tag{2.6}$$

e usando a mudança de variável $u = L(x+1)$ tem-se que o $E(u) = x+1$. Como $u = L(x+1)$ toma o valor zero quando $x = 0$, resulta que

$$\lim_{x\to 0} \frac{L(x+1)}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{E(u)-1} = 1 \tag{2.7}$$

Então, para qualquer x em $\mathbb{R}$, tem-se que

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(x+h)-E(x)}{x} = \lim_{h\to 0} E(x)\frac{E(h)-1}{h} = E(x) \tag{2.8}$$

Pelo que a função E diferencial em $\mathbb{R}$ e $E'(x) = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Assim, $E(x) = e^x + C$, para todo $x \in \mathbb{R}$ com C constante.

Mas sendo, $L(1) = 0$ tem-se que $1 = E(0) = 1+C = 1$, pelo que $C = 0$ e $E(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Concluímos assim que a função L definida através de áreas planas é a função inversa da função exponencial e podemos finalmente escrever que $L(x) = \ln x$. Os logaritmos naturais podem então ser formulados como áreas planas associadas à hipérbole $y = \frac{1}{x}$.

Capítulo 3

Uma Nova Abordagem do Ensino da Função Logarítmica com o Uso da Geometria

3.1 Função Logarítmica

Como já vimos, para definirmos a função logarítmica precisaremos primeiramente estudar com atenção a função $y = \frac{1}{x}$ que é, uma hipérbole cujos ramos são simétricos em relação à origem.

O nosso objetivo é calcular a área de uma faixa de hipérbole, que é a área da região abaixo do ramo positivo de uma hipérbole, limitada inferiormente pelo eixo dos x e lateralmente por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$, $b > a$.

Considere o ramo positivo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ representada pelo gráfico da Figura 3.1.

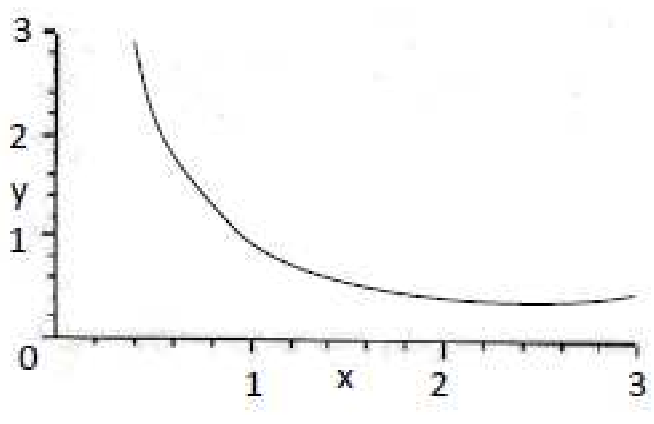

Figura 3.1:

Uma faixa de hipérbole é a região do plano limitada superiormente pela curva $y = \frac{1}{x}$, inferiormente pelo eixo dos x (i.e. pela reta $y = 0$) e lateralmente por duas retas verticais. Designaremos a faixa entre as retas $x = a$ e $x = b$ com a notação F_ab. Veja o exemplo abaixo, a representação gráfica da faixa $F_{0,5}2$.

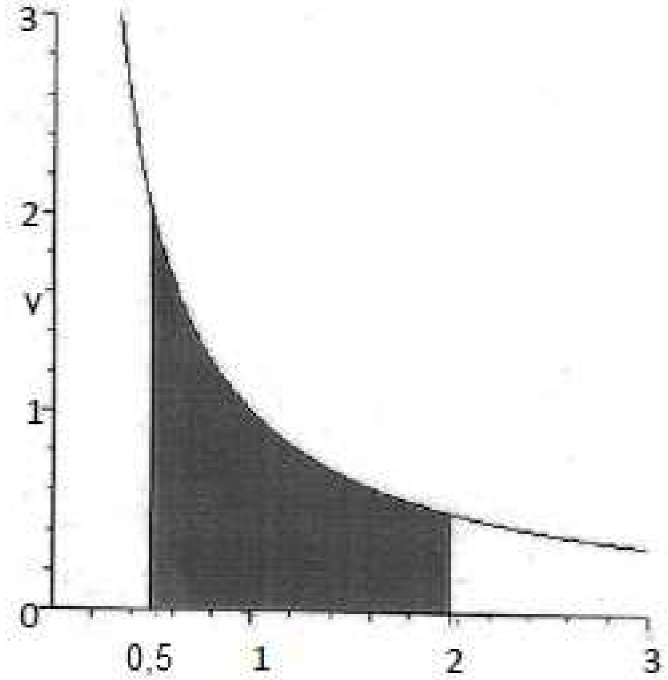

Figura 3.2:

Para calcular a área desta faixa, poderíamos, numa primeira tentativa, aproximá-la pela soma das áreas de retângulos nela inscritos como mostra a Figura 3.3:

Divide-se o intervalo $]0; 0,5]$ em 50 partes, em seguida divide-se também o intervalo$]0,5; 1]$ em 50 partes. Aplicando a soma de Riemman:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i).f(x_{i+1}) \tag{3.1}$$

temos:

i=0

$$\sum = (x_1 - x_1).f(x_1) = 0 \tag{3.2}$$

i=1

$$\sum = (x_2 - x_1).f(x_2) = \frac{1}{2} \tag{3.3}$$

i=2

$$\sum = (x_3 - x_2).f(x_3) = \frac{1}{3} \tag{3.4}$$

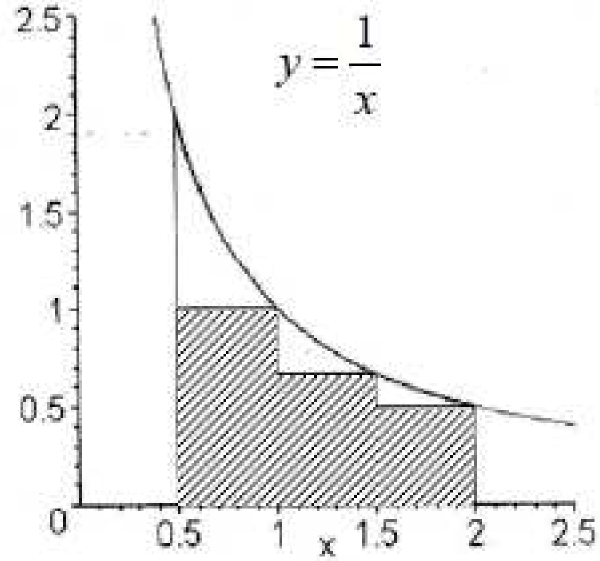

Figura 3.3:

i=3

$$\sum = (x_4 - x_3).f(x_4) = \frac{1}{4} \tag{3.5}$$

Portanto

$$\sum = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} = 1,08333... \tag{3.6}$$

ou

$$50.\left[\sum_{1}^{3} \frac{1}{50}\left(\frac{1}{1+i}\right)\right] = \tag{3.7}$$

$$= 50.\frac{1}{50}\left[\sum_{1}^{3}\left(\frac{1}{1+i}\right)\right] = \tag{3.8}$$

$$= \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} = \tag{3.9}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \tag{3.10}$$

$$= 1,08333... \tag{3.11}$$

A soma das áreas dos retângulos é igual a:

$$50.\left[\sum_{1}^{3} \frac{1}{5+50i}\right] = 1,08333... \tag{3.12}$$

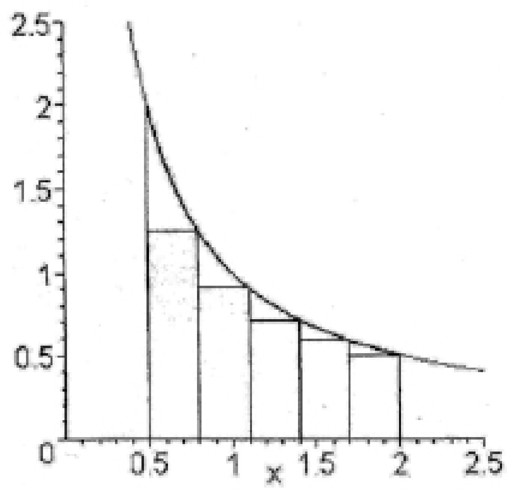

Figura 3.4:

Observe como esta aproximação melhora, quando aumentamos o número de retângulos de três para cinco conforme a Figura 3.4.

Fazendo novamente, o cálculo da soma das áreas dos retângulos, notaremos que o resultado é maior que o anterior e, como pudemos observar pelo gráfico acima, a soma destas cinco áreas é uma aproximação melhor para a área da faixa de hipérbole que se deseja calcular.

Divide-se o intervalo $]0; 0,5]$ em 50 partes em seguida divide-se também o intervalo $]0,5; 1]$ em 30 partes.

Temos,

$$30.\left[\sum_{1}^{5}\left(\frac{1}{50+30i}\right)\right] = \tag{3.13}$$

$$= 30.\frac{1}{10}\left[\sum_{1}^{5}\left(\frac{1}{5+3i}\right)\right] = \tag{3.14}$$

$$= \frac{30}{10}.\left(\frac{1}{50+30.1}+\frac{1}{50+30.2}+\frac{1}{50+30.3}+\frac{1}{50+30.4}+\frac{1}{50+30.5}\right) = \tag{3.15}$$

$$= 3.\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{110}+\frac{1}{140}+\frac{1}{170}+\frac{1}{200}\right) = \tag{3.16}$$

$$= 3.0,396162 \tag{3.17}$$

$$= 1,188436 \tag{3.18}$$

A soma das áreas dos retângulos é igual a

$$30.\left[\sum_{1}^{5}\frac{1}{5+30i}\right] = 1,188436 \tag{3.19}$$

Continuando com o processo de considerar mais e mais retângulos inscritos na faixa hiperbólica, subdividindo-a cada vez mais, obtemos aproximações cada vez melhores para a área que queremos calcular.

A propriedade fundamental das áreas das faixas hiperbólicas é ilustrada na Figura 3.5.

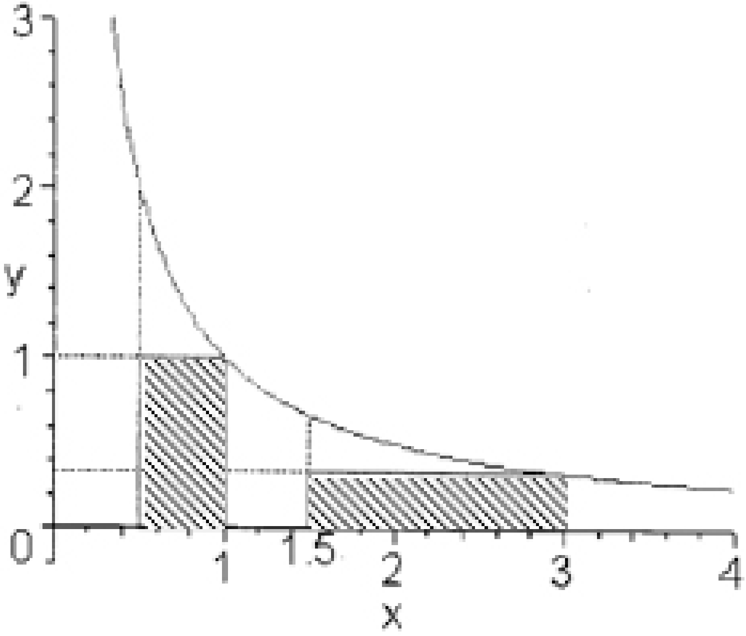

Figura 3.5:

A área dos dois retângulos inscritos na hipérbole acima são iguais. Essa propriedade pode ser generalizada da seguinte maneira: qualquer que seja o número real $k > 0$, as faixas F_ab e $F_{ak}bk$ têm a mesma área.

Desde que se convencione que $areaF_ab = -areaF_ba$ temos claramente que quaisquer que sejam a, b e c reais positivos,

$$areaF_ab + areaF_bc = areaF_ac$$

Para cada número real $k > 0$, definimos a transformação

$$T = T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

que associa a cada ponto $(x, y) \in: \mathbb{R}^2$ o ponto $T(x, y) = (kx, y/k)$, obtido de (x, y) multiplicando a abcissa por k e dividindo a ordenada pelo mesmo k.

Um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo $X' = T(X)$, ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base kb e altura a/k. Portanto X e seu transformado $X' = T(X)$ têm áreas iguais. Mais geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura $F' = T(F)$, cujas dimensões em relação a F são alteradas pelo fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo F e F' têm a mesma área.

O leitor interessado numa análise mais detida do fato de que F e F' têm a mesma área observará que todo polígono retangular contido em F é transformado por T num polígono retangular de mesma área contido em F' enquanto T^{-1} faz o mesmo com os polígonos retangulares contidos em F'.

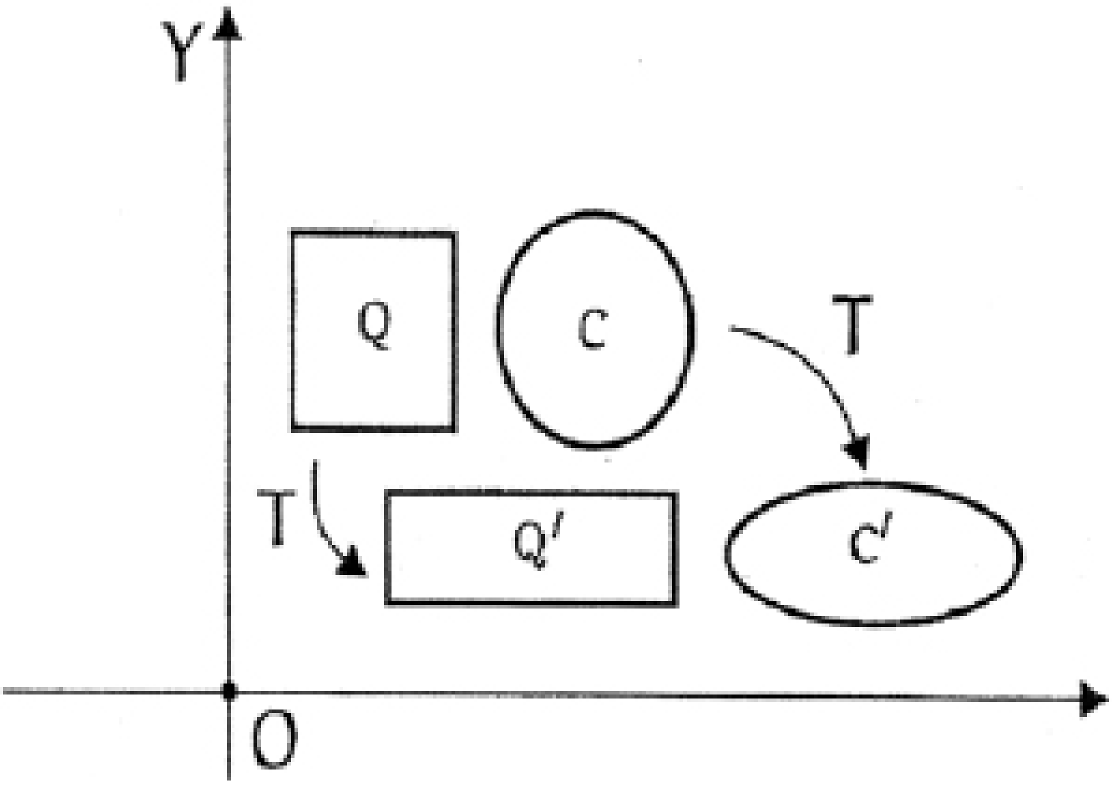

Figura 3.6: Um quadrado, um círculo e suas imagens por $T(x,y) = (2x, y/2)$

Interessa-nos em particular o efeito da transformação T nas faixas de hipérbole.

Seja $H = \{(x, \frac{1}{x}; x > 0\}$ o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$; H é o gráfico da função $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$

Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$, o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) do plano tais que x está entre a e b e $0 < y < \frac{1}{x}$ chama-se uma faixa de hipérbole. H_a^b é o conjunto do plano limitado lateralmente pelas verticais $x = a$, $x = b$, ao sul pelo eixo das abscissas e ao norte pela hipérbole H.

A transformação

$$T = T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}.

Como T preserva áreas, segue-se que, para todo $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

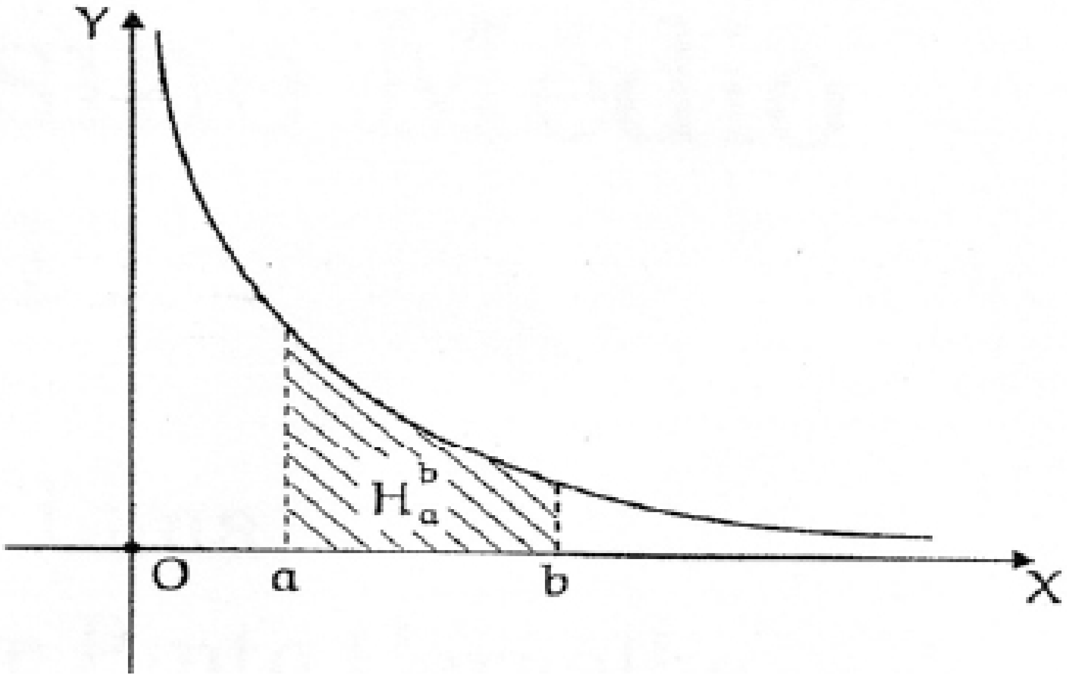

Figura 3.7:

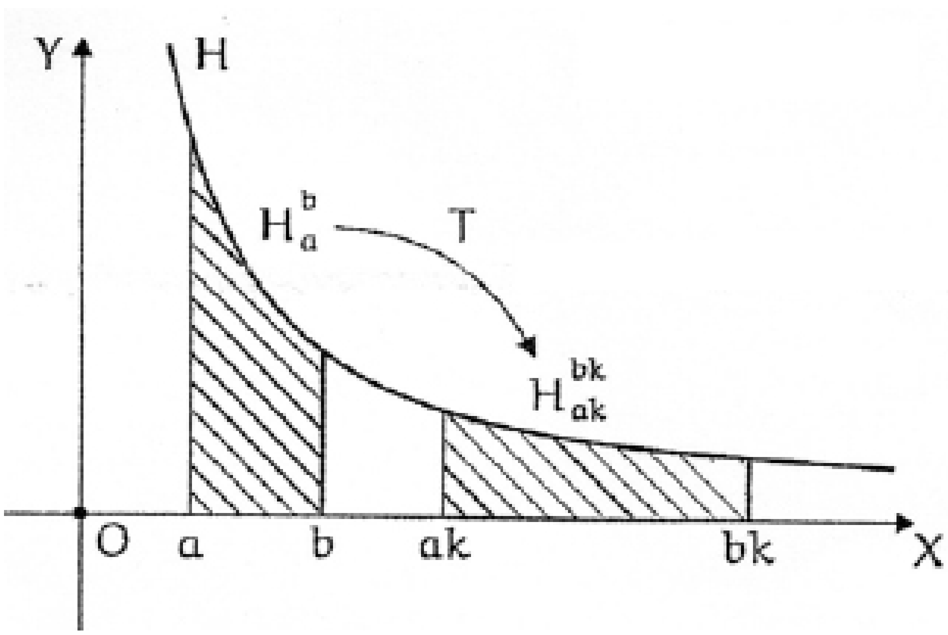

Figura 3.8:

Exemplo:

Consideremos as regiões $A_{1,2}$ entre as retas $x = 1$ e $x = 2$, e $A_{3,6}$ entre as retas $x = 3$ e $x = 6$. A segunda região resulta da primeira contraindo as ordenadas pelo fator 3 e dilatando as abcissas pelo fator 3. Com efeito, esta transformação muda o ponto $(1, 1)$ em $(3, \frac{1}{3})$ e $(2, \frac{1}{2})$ em $(6, \frac{1}{6})$. Então a área da região $A_{1,2}$ é igual à area da região $A_{3,6}$.

Mas a área de $A_{1,2}$ é dada por $L(2)$ e a área de $A_{3,6}$ é dada por $L(6)–L(3)$. Então $L(6)–L(3) = L(2)$ e $L(2x3) = L(2) + L(3)$.

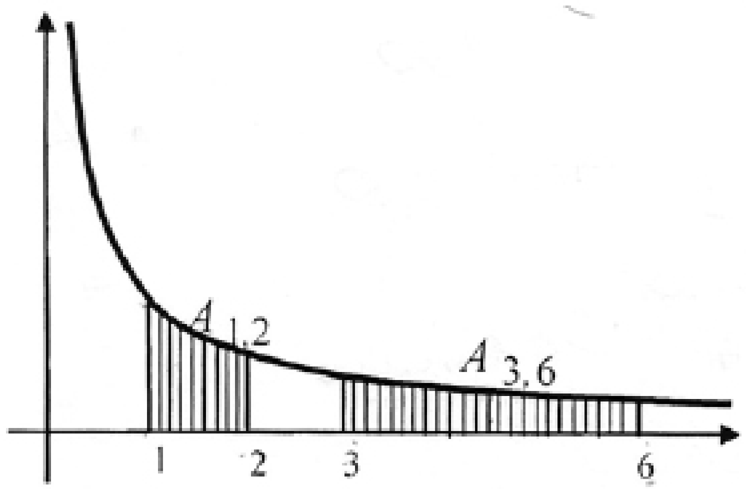

Figura 3.9:

3.2 Logaritmos Naturais

Definiremos a função logaritmo e deduziremos as suas principais propriedades, baseando-nos inteiramente na propriedade fundamental das áreas das faixas de hipérboles. Definimos a função logaritmo pela fórmula:

$$ln(x) = areaF_1x$$

Com essa definição e usando a propriedade fundamental das áreas das faixas, podemos provar que, se x e y são ambos positivos, temos que

$$ln(xy) = ln(x) + ln(y)$$

É claro, pela fórmula acima, que $ln(xyz) = ln(x) + ln(y) + ln(z)$.

Pela continuidade das áreas das faixas, temos:

$$ln(xy) = area(F_1xy) = area(F_1x) + area(F_xxy)$$

Usando a propriedade fundamental das áreas das faixas no último termo desta equação, obtemos:

$$area(F_x xy) = area(F_1 y)$$

o que prova a igualdade desejada.

É fácil ver pela nossa definição e utilizando a convenção de que as áreas das faixas à esquerda de $x = 1$ são negativas, que a função ln satisfaz as seguintes propriedades.

$$ln(1) = 0;$$
$$ln(x) > 0, \text{ se } x > 1;$$
$$ln(x) < 0, \text{ se } x < 1.$$

não estando definida se $x < 0$.

Exemplo:

Para calcular o $ln(2)$ basta achar a área da faixa entre as retas $x = 1$ e $x = 2$, sob a função $f(x) = 1/x$. Se fizermos esses cálculos, aproximando o valor da área por retângulos inscritos, à medida que o número de retângulos aumento obteremos aproximações cada vez maiores para $ln(2)$. O gráfico da Figura 3.10 ilustra este fato.

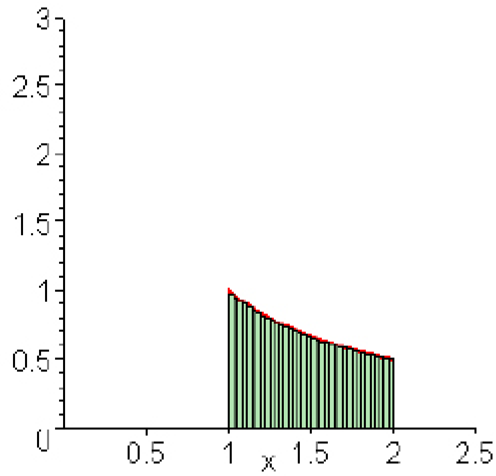

Figura 3.10:

Calculemos agora o valor de $ln(0,5)$, lembrando sempre da nossa convenção de que o valor das áreas à esquerda de $x = 1$ recebem o sinal negativo. Como anteriormente, observe o gráfico da Figura 3.11.

Uma estimativa para o valor de $ln(0,5)$, obtida com 100 retângulos inscritos, pode ser calculada assim:

$$-\frac{1}{200}\left[\sum_{1}^{100} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{200}i}\right] = 0,6906534305 \tag{3.20}$$

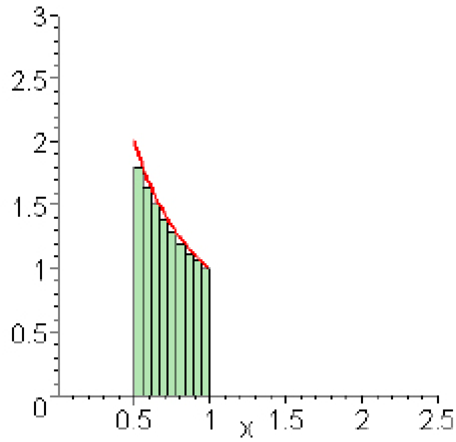

Figura 3.11:

Em 1614 foi publicada por Napier sua invenção intitulada em latim *"Mirifici logarithmorum canonis descriptio"* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos) e posteriormente outro trabalho, *"Mirifici logarithmorum canonis constructio"* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos) foi publicado por seu filho Robert em 1619.

A invenção de Napier foi reconhecida por toda Europa e até locais distantes como a China e adotada por muitos cientistas, como Johannes Kepler, que utilizou com grande sucesso em seus trabalhos sobre as órbitas planetárias.

O único rival de Napier quanto à prioridade da invenção dos logaritmos foi o suíço Jobst Burgi (1552-1632) que construiu uma tábua de logaritmo independentemente de Napier e publicou seus resultados seis anos depois.

> Enquanto a abordagem de Napier era geométrica, a de Burgi era algébrica. Hoje em dia, um logaritmo é universalmente considerado como um expoente; assim, se $n = b^x$, dizemos que x é o logaritmo de n na base b. Dessa definição as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Uma das incongruências da história da matemática é que os logaritmos foram descobertos antes de se usarem expoentes (EVES, 2008, p. 346).

Observemos que:

$$ln\left(\frac{1x}{x}\right) = ln\left(\frac{1}{x}\right) + ln\,(x) = ln\,(1) = 0 \qquad (3.21)$$

E, consequentemente

$$ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln\,(x) \qquad (3.22)$$

$$ln(1/x) = -ln(x)$$

Com isso podemos concluir que:

$$ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln\,(x) - ln\,(y) \tag{3.23}$$

Também temos, como consequência imediata da nossa definição de logaritmo, que para todo número natural m, vale:

$$ln\,(x^m) = m.ln\,(x) \tag{3.24}$$

e

$$ln\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}.ln\,(x) \tag{3.25}$$

Podemos, ainda, observar que essas fórmulas continuam válidas para quaisquer valores de m racional, já que:

$$ln\left(x^{\left(\frac{p}{q}\right)}\right) = \tag{3.26}$$
$$= ln\left(x^{\left(\frac{1}{q}\right)p}\right) = \tag{3.27}$$
$$= p.ln\left(x^{\left(\frac{1}{q}\right)}\right) = \tag{3.28}$$
$$= p\frac{1}{q}.ln\,(x) \tag{3.29}$$

3.3 O Gráfico da Função Logarítmica

Como já vimos, definimos o gráfico de uma função f, como o subconjunto do plano formado pelos pontos $(x, f(x))$, onde x varia no domínio de f.

Assim, o gráfico da função ln é dado pelo conjunto:

$$G = \{(x, n(x)); x > 0\} \tag{3.30}$$

Além disso, pela definição de logaritmo e continuidade das áreas, é fácil ver que a função ln é crescente e assume todos os valores reais entre $(-\infty, \infty)$. Para isso, basta observar que a área da faixa da hipérbole $f(x) = 1/x$ aumenta, à medida que x cresce e a fórmula $ln(2m) = m.ln(2)$ permite concluir que existem logaritmos arbitrariamente grandes. Além disso, como $ln(1/x) = -ln(x)$, à medida que x se aproxima de zero, os valores de $n(x)$ tornam-se arbitrariamente grande e negativos. Uma consequência importante dessas afirmações é que qualquer número real é o logaritmo de um único número real positivo.

Observando o gráfico da função $f(x) = 1/x$, notamos, também, que as áreas correspondentes a faixas de mesma base diminuem à medida que caminhamos no sentido positivo do eixo dos x. Isto quer dizer que a inclinação do gráfico da função $n(x)$ deve decrescer com x.

Em resumo, o gráfico de $y = ln(x)$ é uma curva contida no primeiro e quarto quadrantes, que corta o eixo x no ponto $x = 1$, e que assume valores positivos para $x > 1$ e valores negativos para $x < 1$. Além disso, $ln(x)$ é uma função crescente cujo gráfico deve apresentar inclinação decrescente, como pode ser visto na Figura 3.12.

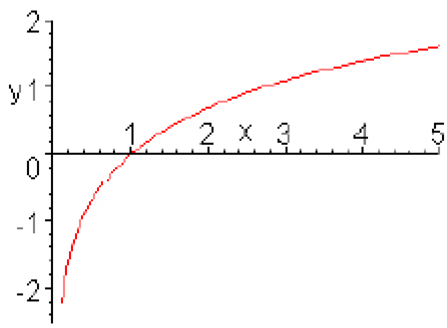

Figura 3.12:

Podemos observar na Figura 3.13, que embora crescente, o gráfico da função $y = ln(x)$ está sempre abaixo do gráfico da função $y = x$.

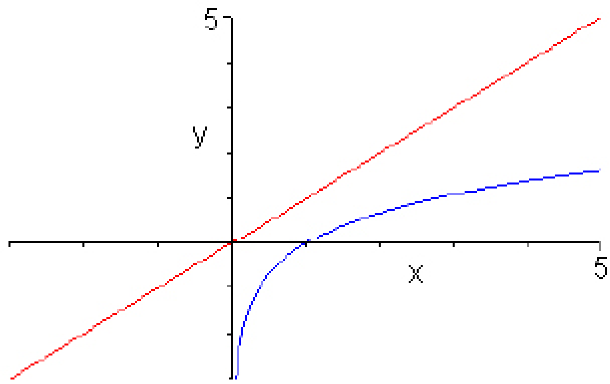

Figura 3.13:

Isto quer dizer que qualquer que seja x real temos $n(x) < x$.

Por outro lado, nos livros do ensino médio a função logarítmica é definida como sendo a inversa da função exponencial, essa definição além de não ter uma conotação geométrica tem como inconveniente a necessidade da compreensão da função exponencial, como por exemplo . Nessa seção por meio do cálculo da área daremos uma outra abordagem da definição da função logarítmica.

Definição: A função logarítmica $log(t)$, para $t > 0$, é definida como a área orientada entre a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ e o eixo x, entre as retas $x = 1$ e $x = t$.

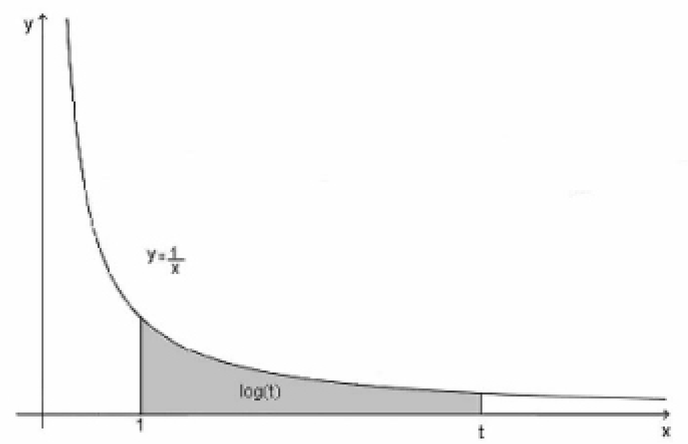

Figura 3.14:

Decorre dessa definição que;

- $log(1) = 0$;
- por ser uma área orientada, para $0 < t < 1$, $log(t)$, em módulo, é o mesmo da área indicada no gráfico, mas, com sinal inverso.

3.4 Propriedades da Função Logarítmica

Propriedade 1: Sejam $A1$ e $A2$ as áreas dos trapezóides limitados pela hipérbole $y = 1/x$, o eixo x e as linhas $x = a_1$, $x = b_1$ e, $x = a_2$, $x = b_2$, respectivamente. Mostraremos que, se $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ então $A1 = A2$.

Prova. Considere o intervalo $[a_1, b_1]$ e uma partição em n partes iguais, em que $\{x_0 = a_1 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b_1\}$ tais que:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b_1 - a_1}{n} = \Delta x, \forall i = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.31}$$

Desta forma temos:

$$x_k = a_1 + k.\Delta x \tag{3.32}$$

Tomando a soma de Riemann, temos:

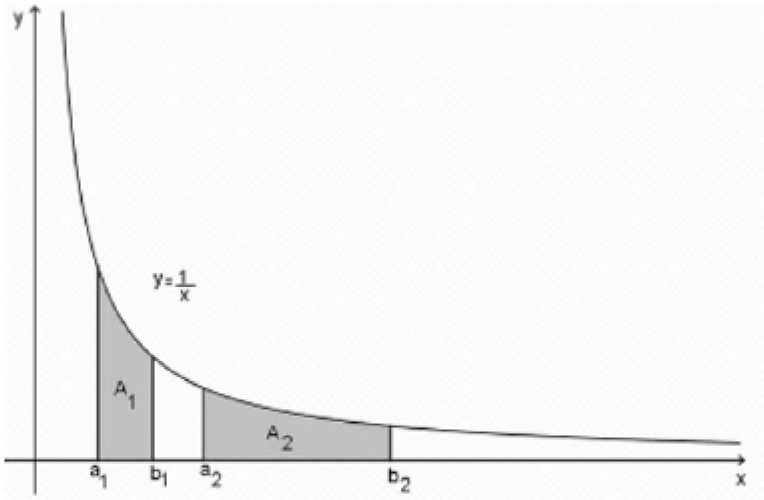

Figura 3.15:

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x = \lim_{n\to\infty} S_k \tag{3.33}$$

Com $f(x) = 1/x$ e S_k a área do k-ésimo retângulo da soma de Riemann. A área de S_k é dada por:

$$S_k = \frac{1}{x_k}, \Delta x = \frac{\Delta x}{a_1 + k\Delta x} \tag{3.34}$$

Portanto,

$$S_k = \left[\frac{1}{a_1 + k.\left(\frac{b_1-a_1}{n}\right)}\right].\frac{b_1 - a_1}{n} = \frac{b_1 - a_1}{(n-k)a_1 + kb_1} \tag{3.35}$$

Dividindo essa expressão por a_1, temos:

Ao considerarmos o segmento $[a_2, b_2]$, como na maneira acima, apenas precisamos trocar a_1 por a_2 e b_1 por b_2. Dessa maneira, obtemos para a área do k-ésimo retângulo s_k o valor de

$$S_k = \frac{\frac{b_2}{a_2} - 1}{(n-k) + k(\frac{b_2}{a_2})} \tag{3.36}$$

Como

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \tag{3.37}$$

temos que (3.36) = (3.37) e portanto $A1 = A2$.

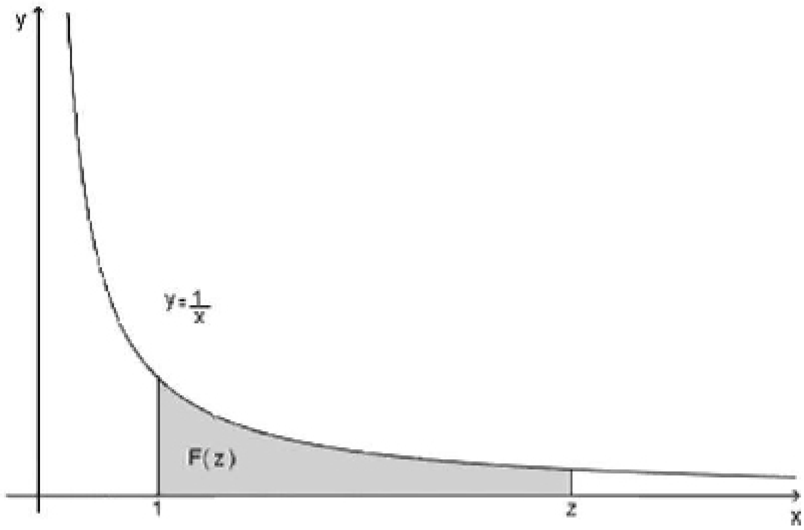

Figura 3.16:

Propriedade 2: Seja $F(z)$ a área do trapezóide limitado pela hipérbole $y = 1/x$, o eixo x, e as linhas $x = 1$ e $x = z$, como mostra o gráfico da Figura **??**.

Provaremos que para quaisquer z_1 e z_2 positivos:

$$F(z_1.z_2) = F(z_1) + F(z_2). \tag{3.38}$$

Prova. Dividiremos a demonstração dessa propriedade em casos.

1º caso. Suponhamos que z_1 e z_2 sejam ambos maiores que 1.

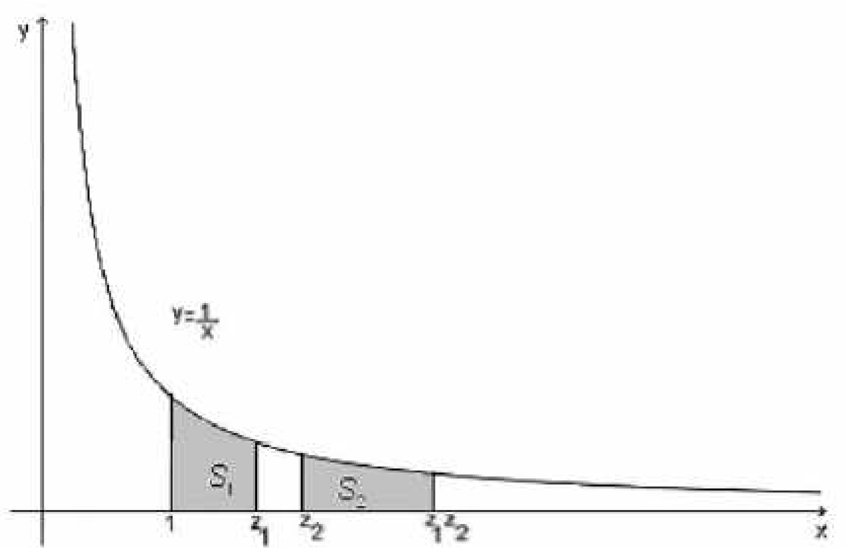

Figura 3.17:

Visto que $\frac{z_1.z_2}{z_2} = z_1$, segue pela demonstração anterior que as áreas S_1 e S_2 são iguais. Assim:

$$S_2 = F(z_1.z_2) - F(z_2) = F(z_1) - F(1) = S_1 \quad (3.39)$$

como $F(1) = 0$, temos

$$S_2 = F(z_1.z_2) - F(z_2) = F(z_1) = S_1 \quad (3.40)$$

assim:

$$F(z_1.z_2) = F(z_1) + F(z_2) \quad (3.41)$$

2º caso. Suponhamos que $z_1 > 1$ e $z_2 < 1$ com $z_2 = \frac{1}{z_1}$, como mostrado no gráfico da Figura 3.18.

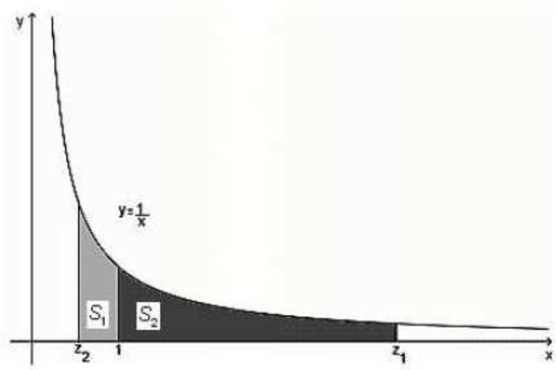

Figura 3.18:

Neste caso, a identidade a ser provada assume a forma

$$0 = F(1) = F(z_1.z_2) = F(z_1) + F(\frac{1}{z_1}) \quad (3.42)$$

ou seja,

$$F(\frac{1}{z_1}) = -F(z_1) \quad (3.43)$$

Dado que

$$z_1 = \frac{1}{\frac{1}{z_1}}, \quad (3.44)$$

segue pela demonstração anterior que as áreas S_1 e S_2 são iguais. Assim:

$$S_1 = F(1) - \frac{1}{z_1} = F(z_1) - F(1) = S_2 \tag{3.45}$$

Como $F(1) = 0$, segue a relação.

3º caso. Suponhamos agora que z_1 e z_2 sejam ambos menores que 1.

Nesse caso, temos,$\frac{1}{z_1} > 1$, $\frac{1}{z_2} > 1$ e $\frac{1}{z_1.z_2} > 1$. Como já foi provado no 2º caso, temos:

$$F\left(\frac{1}{z_1}\right) = -F\left(\frac{1}{z_2}\right) = -F\left(z_2\right) \tag{3.46}$$

e

$$F\left(\frac{1}{z_1.z_2}\right) = -F\left(z_1.z_2\right) \tag{3.47}$$

De acordo com o 1º caso, temos:

$$F\left(\frac{1}{z_1}\right) + F\left(\frac{1}{z_2}\right) = F\left(\frac{1}{z_1.z_2}\right) \tag{3.48}$$

Segue-se

$$-F(z_1) - F(z_2) = -F(z_1.z_2) \tag{3.49}$$

Portanto,

$$F(z_1) + F(z_2) = F(z_1.z_2) \tag{3.50}$$

4º caso. Finalmente, suponhamos que $z_1 > 1$ e $z_2 < 1$, com $z_1.z_2 \neq 1$.

Primeiramente, consideremos o caso em que $z_1 > \frac{1}{z_2}$. Deste modo $z_1.z_2 > 1$.

Como $\frac{1}{z_2} > 1$, podemos usar o resultado já provado:

$$F(z_1.z_2) + F\left(\frac{1}{z_2}\right) = F\left(z_1.z_2.\frac{1}{z_2}\right) = F(z_1) \tag{3.51}$$

Assim:

$$F(z_1.z_2) + F(z_1) - F\left(\frac{1}{z_2}\right) = F(z_1) + F(z_2) \tag{3.52}$$

Portanto,

$$F(z_1.z_2) = F(z_1) + F(z_2) \tag{3.53}$$

O caso em que $z_1 < \frac{1}{z_2}$ é análogo. De fato, temos que $z_1.z_2 < 1$. Como já mostrado anteriormente,

$$F\left(\frac{1}{z_1.z_2}\right) + F(z_1) = F\left(\frac{1}{z_2}\right) \tag{3.54}$$

$$-F(z_1.z_2) + F(z_1) = -F(z_2) \tag{3.55}$$

$$F(z_1.z_2) = F(z_1) + F(z_2) \tag{3.56}$$

$$\tag{3.57}$$

3.5 Equivalência das definições da função logarítmica

Mostraremos que $F(z) = log_e z$.

Prova. Provaremos a propriedade $F(z^\alpha) = \alpha F(z)$, para qualquer α:

1º caso: $F(z_n) = nF(z)$, para n inteiro e positivo.

$$F(z^2) = F(z.z) = F(z) + F(z) = 2F(z) \tag{3.58}$$

$$F(z^3) = F(z^2.z) = F(z^2) + F(z) = 2F(z) + F(z) = 3F(z) \tag{3.59}$$

$$... \tag{3.60}$$

$$F(z^n) = F(z^{n-1}.z) = F(z^{n-1}) + F(z) = (n-1).F(z) + F(z) = nF(z) \tag{3.61}$$

$$F(z^n) = nF(z) \tag{3.62}$$

2º caso: $F(z^k) = kF(z)$, para k inteiro e negativo.

Seja $k = -n$, com n um número inteiro positivo, temos:

$$F(z^k) = F(z^{-n}) = F\left(\frac{1}{z^n}\right) = -F(z^n) \tag{3.63}$$

assim

$$F(z^k) = -F(z^n) = -nF(z) = kF(z) \tag{3.64}$$

$$F(z^k) = kF(z) \tag{3.65}$$

3º caso: $F(z^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}F(z)$, para m um número inteiro.

Seja $z^{\frac{1}{m}} = z_1 \Rightarrow z = z_1^m$

$$F(z_1^m) = mF(z_1) \tag{3.66}$$

$$F(z) = mF(z^{\frac{1}{m}}) \tag{3.67}$$

$$F(z^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}F(z) \tag{3.68}$$

4º caso: $F(z^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m}F(z)$, quando $\frac{n}{m}$ é um número racional.

$$F(z^{\frac{n}{m}}) = F\left[\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^n\right] = nF\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{n}{m}F(z) \tag{3.69}$$

$$F(z^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m}F(z) \tag{3.70}$$

5º caso: $F(z^{\alpha}) = \alpha F(z)$, quando α é um número irracional.

Todo número irracional pode ser aproximado por números racionais, veja o exemplo:

$$\pi = 3,141592... \tag{3.71}$$

$$3 < \pi < 4 \tag{3.72}$$

$$3,1 < \pi < 3,2 \tag{3.73}$$

$$3,14 < \pi < 3,15 \tag{3.74}$$

$$3,141 < \pi < 3,142 \tag{3.75}$$

$$\tag{3.76}$$

Assim, dado um número irracional α, existem duas sequências de números racionais $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ e $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$,tais que

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n ... < \alpha < ...\beta_n < ... < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0 \tag{3.77}$$

com

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \alpha = \lim_{j\to\infty} \beta_j \tag{3.78}$$

Uma vez que $\alpha_j < \alpha < \beta_j$, resulta que $z^{\alpha_1} < z^{\alpha} < z^{\beta_j}$. Como F é uma função crescente,

$$F(z^{\alpha_1}) < F(z^{\alpha}) < F(z^{\beta_j}) \tag{3.79}$$

Das propriedades acima demonstradas, temos que:

$$\alpha_j F(z) < F(z^{\alpha}) < \beta_j F(z), \tag{3.80}$$

que dividida por $F(z)$, resulta que

$$\alpha_j < \frac{F(z^\alpha)}{F(z)} < \beta_j \tag{3.81}$$

Como $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \alpha = \lim_{j\to\infty} \beta_j$, temos

$$\alpha = \lim_{j\to\infty} \alpha_j \leq \frac{F(z^\alpha)}{F(z)} \leq \lim_{j\to\infty} \beta_j = \alpha \tag{3.82}$$

Pelo teorema do confronto,

$$\frac{F(z^\alpha)}{F(z)} = \alpha, \tag{3.83}$$

assim

$$F(z^\alpha) = \alpha F(z) \tag{3.84}$$

para todo α real.

Portanto,

$$F(z) = F(e^{log_e z}) = log_e z.F(e) = log_e z, \tag{3.85}$$

pois, por definição F(e) = 1.

Capítulo 4

Conclusão

Com esse trabalho, tivemos o intuito de apresentar uma outra abordagem da função logarítmica, por meio de áreas. Essa abordagem, oriunda do cálculo integral, possui a vantagem de apresentar tal função por meio de um conceito mais concreto, que é o conceito de área. Claramente, tal definição também apresenta as suas dificuldades, o que é natural. Contudo essa definição é mais fácil de ser visualizada e entendida do que a definição usual, que é dada pela inversa da função exponencial, que apresenta dificuldades de entendimento, tais como definir $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ de modo natural.

Referências Bibliográficas

ARDENGHI, M. J. Ensino e aprendizagem do conceito de função: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

ÁVILA, G. S.S, Várias faces da matemática. São Paulo: Blucher, 2007.

BARBOSA, Luís A. Valentim, Logaritmos: Uma Visão Geométrica, Tese de Mestrado em Matemática para o Ensino, DM-FC-UL, 2005.

BIANCHINI, B. L; PUGA, L. Z. Função: Diagnosticando Registros de Representação Semiótica In: REFREMAT- Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática: UFSC, p. 5-16, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, 1999.

____________, Ministério da Educação. PCN+ Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.

____________. Secretaria da Educação Básica. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Orientações Curriculares para o Ensino Médio; volume 2. Brasília; MEC, 2006.

____________, Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: Ensino Médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.

BROLEZZI, A. C; BARUFI, M.C.B. História da Matemática e ensino de cálculo: reflexão sobre o pensamento reverso. Guarapuava: SBHMat, 2007.

CHAVES, M. I A. Modelando Matematicamente questões ambientais relacionadas com a água a propósito do ensino-aprendizagem de funções na 1ª série do Ensino Médio. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), Universidade Federal do Pará, Belém.

COELHO, S.P.; MACHADO, S.D.A.; MARANHÃO, M.C.S.A. Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de Formação de professores de matemática? Anais do II SIPEM. Santos, 2003.

COURANT, R. ROBBINS, H. O que é matemática? Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DANTE, L. R. Matemática, volume único 1. Edição São Paulo: Ática, 2005.

EVES, H. Introdução à História da Matemática, tradução: Hygino H. Domingues. 3ª reimpressão. Campinas, SP: UNICAMP, 2008.

FERREIRA, R. L. Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmos usando a Engenharia Didática. 2006. Dissertação (Mestrado para o Ensino de Física e Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS.

FIORENTINI, D; Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. In: Revista Zetetiké, Campinas, SP, ano 3, n.4, p. 1-37, 1995.

HAIRER, E., Wanner, G., Analysis by Its History, Springer-Verlag, 1996.

IEZZI, G. et al. Matemática. Volume único. São Paulo: Atual, 1997.

LIMA, Elon Lages, P. O. Uma trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre funções logarítmicas. 2009. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

___________, Elon Lages, Logaritmos, SPM, 2008. Edwards, C.H., Jr., The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, 1979.
HAIRER, E., Wanner, G., Analysis by Its History, Springer-Verlag, 1996.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática In: Educação Matemática uma Introdução: S.D. A et al 2ª edição –São Paulo: EDUC, 2002 pp. 197-208.

MAOR, E. : A história de um número. Tradução Jorge Calife. 4ª edição. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARCONDES, C.A, et al. Matemática. Volume único. São Paulo: Ática, 2003.

NASSER, L. Uma Pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráfico In: Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Maria Clara Rezende Frota, Lilian Nasser, Recife: SBEM, 2009.

NOGUEIRA, J. Eurico e outros, Contar e Fazer Contas: Uma introdução à Teoria dos Números, SPM-Gradiva, 2004.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas na sala de aula. Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SALDANHA, M. S. G. Análise de uma Intervenção Didática sobre Desigualdades e Inequações Logarítmicas no Ensino Médio. 2007. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas

Pedagógicas. Caderno do Professor de Matemática. 1º ano Ensino Médio vol. 3, 2009.

TEIXEIRA, Paula e outros, Funções, 12º ano de escolaridade, Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário, 1999.

ZUFFI, E.M. et al. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 9/10, p. 10-16, abr. 2001.

ZUFFI E.M.; PACCA J.L.A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do EM. Revista Zetetikê, CEPEM-FE/UNICAMP, n.13/14, p.7-27, jan/dez. 2000.

Anexo

1. Teorema do confronto

Sejam f(x), g(x) e h(x) funções reais definidas em um domínio D Re e seja a um ponto (finito ou não) deste domínio, tais que:

Então existe o limite

2. Soma de Riemann

Escolha uma função válida para números reais f a qual se encontra definida no intervalo [a, b]. A Soma de Riemann de f com respeito a partição denominada x0, ... xn com t0, ... tn–1 é: 1 0 1 1 1 n i i f t x x

Cada termo nessa soma é o produto do valor da função, em um ponto do intervalo [xi, xi+1], e comprimento desse intervalo. Consequentemente, cada termo representa área de um retângulo com a altura) e o comprimento . A soma de Riemann é a área sinalizada de todos os retângulos.