Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Triângulos de Heron

Marivaldo Bispo Pereira

Salvador - Bahia
Maio de 2015

Triângulos de Heron

Marivaldo Bispo Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha.

Salvador - Bahia
Maio de 2015

Triângulos de Heron

Marivaldo Bispo Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 14 de maio de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha(Orientador)
UFBA

Profª. Drª. Rita de Cássia de Jesus Silva
UFBA

Prof. Dr. Juan Andrés Gonzalez Marin
UFBA

À minha família

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu desse mais um passo de grande importância na minha vida.

"A Matemática não mente. Mente
quem faz mau uso dela."
Albert Einstein

Resumo

Este trabalho propõe uma discussão sobre os triângulos de Heron. Um triângulo é dito heroniano se possui como medida de seus lados e de sua área números inteiros positivos. Veremos que todo triângulo retângulo de lados inteiros é heroniano e que esses são fáceis de determinar, o que não acontece com os demais membros dessa família. Apresentaremos também diversos métodos para gerar esses triângulos, além de explorar suas propriedades. Finalizaremos com a apresentação de duas atividades que podem ser aplicadas na Educação Básica.

PALAVRAS-CHAVE: Triângulos - Triângulos de Heron - Triângulo heroniano - propriedades.

Abstract

This article proposes a discussion about the Heron triangles. A triangle is considered Heronian if it has the measures of its sides length and its area positive integers numbers. It will be showed that every rectangle triangle of integer number side length is heronian and these one are easy to determine, what does not happen to the other members of this family. It will be also presented diverse methods to generate these triangles, and exploit its properties. it will be concluded with the presentation of two activities that can be applied in basic education.

KEY WORDS: Triangles - Heron triangles - Heronian triangle - Properties.

Sumário

Introdução

Figura 1: Heron de Alexandria

Heron de Alexandria, inventor, matemático, físico e escritor grego, viveu no século III a.C. e produziu diversos trabalhos na área da Mecânica, entre eles, Máquinas de guerras e Mecânica, em que tratava de diversas máquinas simples e do movimento circular. Em Pneumática, descreveu os princípios de funcionamento de uma máquina a vapor. Heron inventou máquinas movidas por pesos, manivelas, água ou fogo. Muitas obras de Heron de Alexandria sobreviveram por intermédio dos árabes e se tornaram conhecidas no Ocidente na Renascença.

Na Geometria, atribui-se a ele a fórmula para calcular a área de um triângulo a partir de seus lados e do seu semiperímetro

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

onde A é a área do triângulo, s o semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$ e a, b e c são as medidas dos seus lados. Porém, neste trabalho trataremos da descoberta do triângulo $(13, 14, 15, 84)$ que é atribuída a ele. Esse triângulo não é retângulo, mas possui como medida de seus lados e de sua área números inteiros. Todos os triângulos que possuem essa propriedade de ter medidas dos lados e da áreas números inteiros são conhecidos como triângulos heronianos. Buscaremos nesse trabalho condições para obter representantes dessa família, bem como explorar as suas propriedades.

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, procuramos descrever métodos para gerar famílias de triângulos heronianos. No segundo, apresentamos diversas propriedades desses triângulos. E no terceiro capítulo expomos duas atividades que podem ser aplicadas a partir do 9º ano da Educação Básica.

1 Construindo Triângulos heronianos

1.1 A fórmula de Heron

Uma fórmula que vai ser muito útil ao longo deste trabalho é a fórmula de Heron. Por esse motivo, dedicamos esta seção para a sua demonstração.

Dado o triângulo ABC abaixo, seja b a sua base e h a altura relativa à base b, a

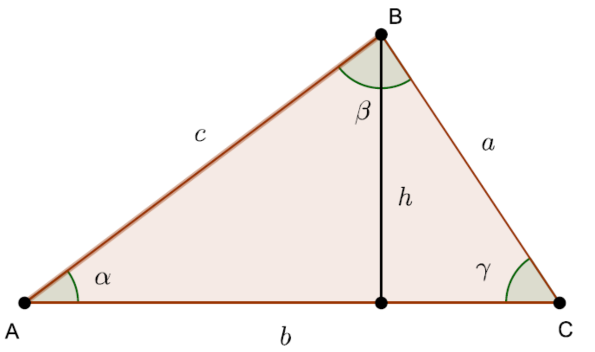


Figura 2: Triângulo ABC

área deste triângulo é dada por $A = \frac{b.h}{2}$. A lei dos cossenos nos diz que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c} \\ &= b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2} \end{aligned}$$

sendo assim, $h^2 = c^2 - (\frac{b^2+c^2-a^2}{2b})^2$, daí teremos

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \frac{b^2.h^2}{4} \\
&= \frac{b^2(c^2 - (\frac{b^2+c^2-a^2}{2b})^2)}{4} \\
&= \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{16} \\
&= \frac{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{16} \\
&= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{16} \\
&= \frac{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2))}{16} \\
&= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16}
\end{aligned}
$$

sendo $s = \frac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do triângulo, teremos $A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, que é equivalente a $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ como queríamos demonstrar.

1.2 Gerando triângulos de Heron Isosceles

Para esse intento, devemos provar dois resultados. O primeiro é o seguinte:

Todo triângulo pitagórico é um triângulo de Heron retângulo.

São ditos pitagóricos todo triângulo retângulo cujos lados são números inteiros positivos. O teorema de Pitágoras nos diz que se um triângulo retângulo tem como lados a, b e c com $a \leq b < c$, sendo a e b seus catetos e c a hipotenusa, então vale a seguinte identidade:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

que é conhecida como teorema de Pitágoras. Podemos associar a cada triângulo retângulo a tripla (a, b, c), chamada tripla pitagórica, por exemplo, a tripla $(3, 4, 5)$ é uma tripla pitagórica. Dado o triângulo retângulo de lados a, b, c inteiros com c sendo sua hipotenusa, sabemos que a área desse triângulo pode ser calculada como $A = \frac{a.b}{2}$. Para provar que a área desse triângulo é um número inteiro, basta provar que a ou b é um número par. Vamos assumir por absurdo que a e b são números ímpares. Dessa forma, eles podem ser escritos como: $a = 2m+1$ e $b = 2n+1$ com m e n inteiros. Sendo assim,

$$\begin{aligned} c^2 &= (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4m + 1 \\ &= 4K + 2 \end{aligned}$$

para algum k inteiro. Esse resultado nos diz que c^2 deixa resto 2 na divisão por 4, o que é um absurdo, pois sendo c par $c = 2m \Rightarrow c^2 = 4m^2$, deixa resto zero na divisão por 4, e sendo c ímpar $c = 2m+1 \Rightarrow c^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4K + 1$ para um certo k inteiro, deixa resto 1 na divisão por 4. Daí ou a ou b é par, garantindo que $A = \frac{a.b}{2}$ é um número inteiro. Sendo assim, demonstramos que todo triângulo pitagórico é heroniano. Para mostrar que a recíproca não é verdadeira, basta lembrarmos do triângulo (13,14,15,84), que é heroniano, mas $15^2 \neq 13^2 + 14^2$.

O segundo resultado que precisamos é:

Todo triângulo heroniano isosceles pode ser decomposto em dois triângulos pitagóricos iguais.

Para isso, peguemos o triângulo isosceles ABC abaixo, sendo M o ponto médio do lado BC. Vamos assumir por absurdo que a é impar. Daí podemos escrever $a = 2m+1$,

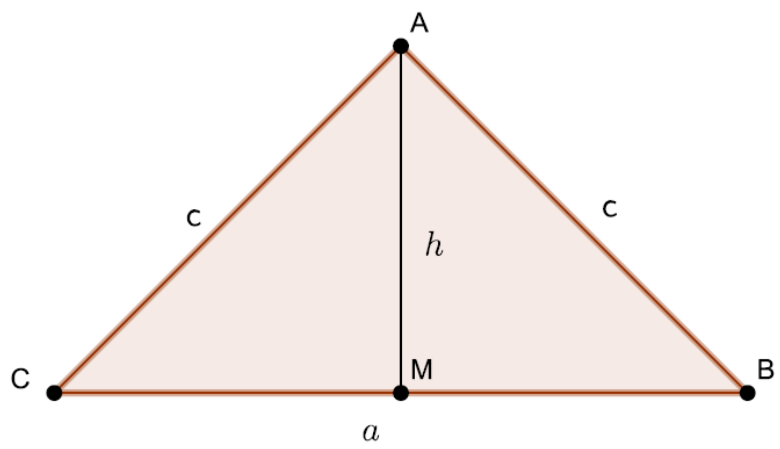


Figura 3: Triângulo isosceles

sendo assim, $BM = m + \frac{1}{2}$ e $h = \sqrt{c^2 - (m+\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{4c^2-4m^2-4m-1}{4}}$. Sendo A a área de ABC, temos

$$A = \frac{a.h}{2} = \frac{(2m+1)\sqrt{\frac{4c^2-4m^2-4m-1}{4}}}{2}$$

que, desenvolvendo, teremos

$$16A^2 = (2m+1)^2.(4c^2 - 4m^2 - 4m - 1)$$

Observe-se que chegamos a um absurdo, pois $16A^2$ é um número par e está escrito como o produto de dois números ímpares. Daí concluímos que a é par e podemos escrever $a = 2m$ e $BM = m$, daí $h = \sqrt{c^2 - m^2}$ e $A = \frac{2m\sqrt{c^2-m^2}}{2}$ e finalmente $\frac{A}{m} = \sqrt{c^2 - m^2}$. Lembrando que por hipótese A, c e m são inteiros, temos que $\frac{A}{m}$ é racional e $c^2 - m^2$ é um quadrado perfeito, pois, caso contrário, $\frac{A}{m}$ seria irracional, o que é um absurdo. Dessa forma, h é um inteiro e (m, h, c) é uma tripla pitagórica.

Agora, para gerar os triângulos isosceles heronianos, basta encontrar uma fórmula que gere triplas pitagóricas. Tal fórmula é conhecida como fórmula de Euclides $(m^2 - n^2; 2mn; m^2 + n^2)$. Sendo m e n inteiros positivos e m > n, a tripla acima é uma tripla pitagórica pois

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = (m^2 + n^2)^2$$

O terno produzido por essa fórmula é primitivo se a, b e c são dois a dois primos entre si. Quando m e n são primos entre si, geram todos os triângulos pitagóricos primitivos. A ideia é lançar mão da fórmula de Euclides para gerar triângulos heronianos isósceles, unindo triângulos pitagóricos iguais a partir de um mesmo cateto. Como exemplos temos os triângulos heronianos (8,5,5,12) e (6,5,5,12) apresentados abaixo, que podem ser decompostos em dois triângulos pitágóricos do tipo (3,4,5,6).

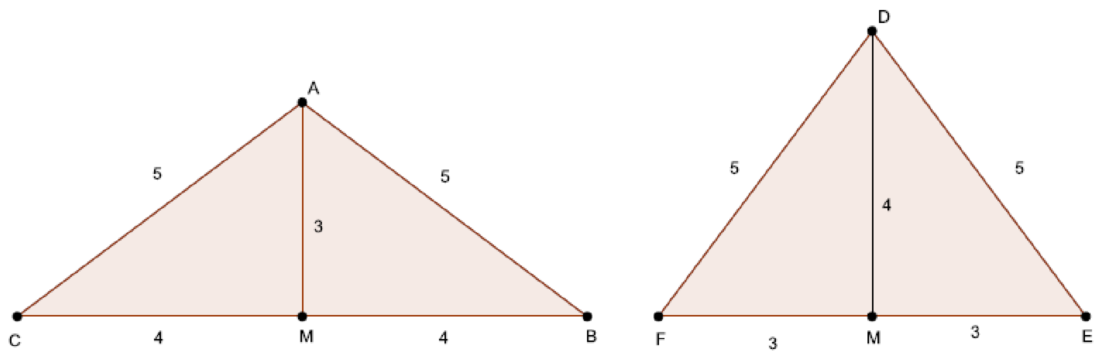


Figura 4: Da esquerda para direita triângulos heronianos (8,5,5,12) e (6,5,5,12)

Com a ideia de colar triângulos pitagóricos iguais, chegamos ao triângulo $(4mn; m^2+n^2; m^2+n^2; (m+n)^2; 2mn.(m^2-n^2))$,

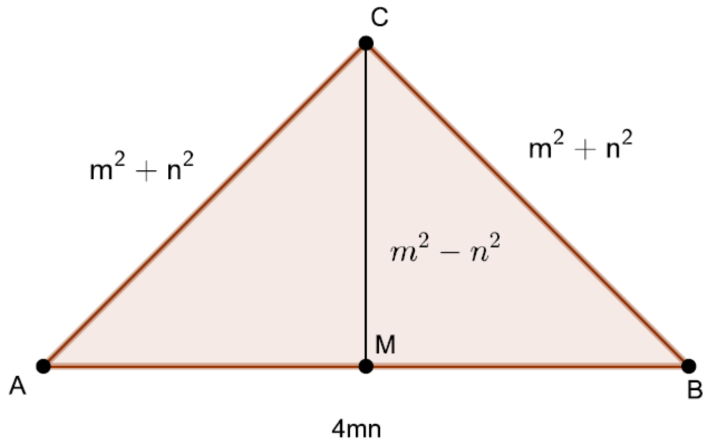


Figura 5: Triângulo $(4mn; m^2+n^2; m^2+n^2; (m+n)^2; 2mn.(m^2-n^2))$

cujo semiperímetro é dado por:

$$s = \frac{4mn + 2m^2 + 2m^2}{2} = 2mn + m^2 + n^2 = (m+n)^2$$

Para encontrar a área, vamos utilizar a fórmula de Heron,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{(m+n)^2.(m^2+2mn+n^2-4mn)(m^2+2mn+n^2-m^2-n^2)^2} \\ &= (m+n).(m-n).(2mn) \\ &= 2mn.(m^2-n^2) \end{aligned}$$

que é um número inteiro, já que, por hipótese m e n são inteiros positivos, desta forma, gerando a família de triângulos de Heron isósceles,

$$(4mn; m^2+n^2; m^2+n^2; (m+n)^2; 2mn.(m^2-n^2))$$

que tem alguns representantes expostos na tabela a seguir:

m	n	a	b	c	s	A
2	1	8	5	5	9	12
3	2	24	13	13	25	60
4	3	48	25	25	49	168
5	4	80	41	41	81	360
6	5	120	61	61	121	660
7	6	168	85	85	169	1092
8	7	224	113	113	225	1680
9	8	288	145	145	289	2448
10	9	360	181	181	361	3420
11	10	440	221	221	441	4620
12	11	528	265	265	529	6072
13	12	624	313	313	625	7800
14	13	728	365	365	729	9828
15	14	840	421	421	841	12180

Tabela 1: Representantes da família $(4mn; m^2+n^2; m^2+n^2; (m+n)^2; 2mn.(m^2-n^2))$

Seguindo o raciocínio anterior, podemos gerar também a família de triângulos heronianos isósceles abaixo:

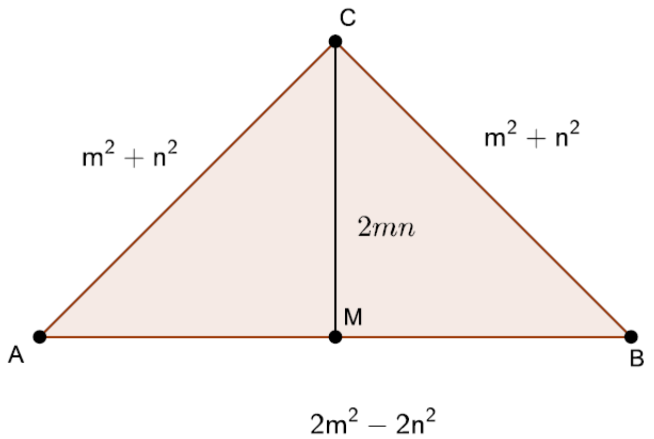


Figura 6: Triângulo heroniano

que tem alguns representantes expressos na tabela que segui.

m	n	a	b	c	s	A
2	1	6	5	5	8	12
3	2	10	13	13	18	60
4	3	14	25	25	32	168
5	4	18	41	41	50	360
6	5	22	61	61	72	660
7	6	26	85	85	98	1092
8	7	30	113	113	128	1680
9	8	34	145	145	162	2448
10	9	38	181	181	200	3420
11	10	42	221	221	242	4620
12	11	46	265	265	288	6072
13	12	50	313	313	338	7800
14	13	54	365	365	392	9828
15	14	58	421	421	450	12180

Tabela 2: Representantes da família

1.3 Uma família que inclui triângulos escalenos

Dado o triângulo ABC abaixo

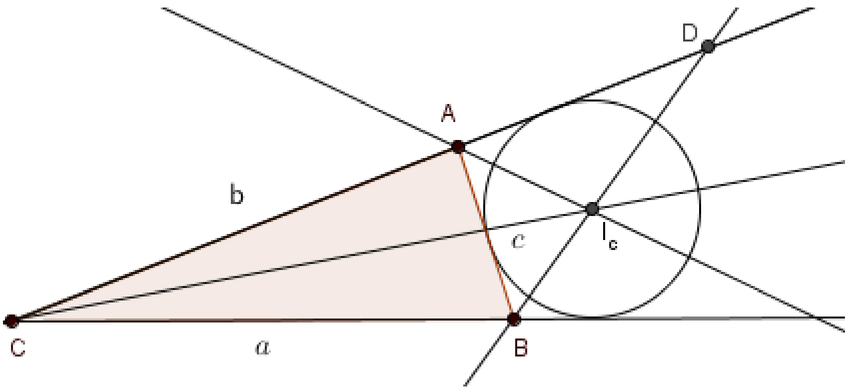


Figura 7: Triângulo ABC com um dos seus exincentros

sendo $BC > AB$ e I_c o exincentro oposto ao lado C (exincentro é o ponto de encontro de duas bissetrizes externas com a bissetriz interna do terceiro ângulo). O teorema da bissetriz diz que: uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Sendo D o ponto de interseção do prolongamento do lado AC com a bissetriz exterior do ângulo $\hat{B}$, aplicando o teorema da bissetriz ao triângulo DBC, teremos:

$$\frac{BI_c}{I_cD} = \frac{CB}{CD}$$

e aplicando ao triângulo DBA:

$$\frac{BI_c}{I_cD} = \frac{AB}{AD}$$

o que nos leva a

$$\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB - AB}{CD - AD} = \frac{a-c}{b}$$

. Se o triângulo ABC for heroniano, a, b e c são números inteiros positivos. Sendo assim, a razão $\frac{a-c}{b}$ será um número racional positivo, e faremos $\frac{a-c}{b} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$, com $u > v$. Podemos tomar $a-c = (u^2-v^2)k$ e $b = (u^2+v^2)k$ com k um inteiro positivo, sendo assim, podemos escrever: $a = c + (u^2 - v^2)k$, $b = (u^2 + v^2)k$ e $c = c$.

Agora vamos determinar os parâmetros c e k. O semiperímetro desse triângulo é:

$$s = \frac{c + u^2k - v^2k + u^2k + v^2k + c}{2} = c + u^2k$$

Usando a fórmula de Heron para calcular a área, teremos:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \sqrt{(c+u^2k)(c+u^2k-c-u^2k+v^2k)(c+u^2k-u^2k-v^2k)(c+u^2k-c)} \\
&= \sqrt{(c+u^2k)v^2k(c-v^2k)u^2k} \\
&= vuk\sqrt{(c+u^2k)(c-v^2k)}
\end{aligned}$$

Para que a área seja um número inteiro, é preciso que $(c + u^2k)(c - v^2k)$ seja um quadrado perfeito, ou seja,

$$c + u^2k = \frac{m}{n}\mu$$
$$c - v^2k = \frac{n}{m}\mu$$

com μ inteiro. Resolvendo para k e c, teremos:

$$k = \frac{m^2 - n^2}{mn(u^2 + v^2)}\mu$$

$$c = \frac{v^2m^2 + u^2n^2}{mn(u^2 + v^2)}\mu$$

que podemos escrever

$$\frac{c}{v^2m^2+n^2u^2}=\frac{\mu}{mn(u^2+v^2)}=\frac{k}{m^2-n^2}=\nu$$

Sendo ν uma constante de proporcionalidade que multiplica os lados para gerar triângulos semelhantes, façamos $\nu = 1$, daí, $c = v^2m^2 + u^2n^2$, $\mu = mn(u^2 + v^2)$ e $k = m^2 - n^2$ para $m > n$. Substituindo os valores de c e de k teremos a família de triângulos heronianos

$$\begin{aligned}&(a,b,c)=(m^2u^2+n^2v^2,(m^2-n^2)(u^2+v^2),n^2u^2+m^2v^2)\\&s=m^2(u^2+v^2)\\&A=mn(m^2-n^2)uv(u^2+v^2)\end{aligned}$$

Para obter tais triângulos, basta atribuir valores inteiros para m, n, u e v tais que $m > n$ e $u > v$. Como exemplo, fazendo $m = 2$, $n = 1$, $u = 2$ e $v = 1$ geramos o triângulo (15,17,8,60) com $s = 20$ e $A = 60$ representado abaixo.

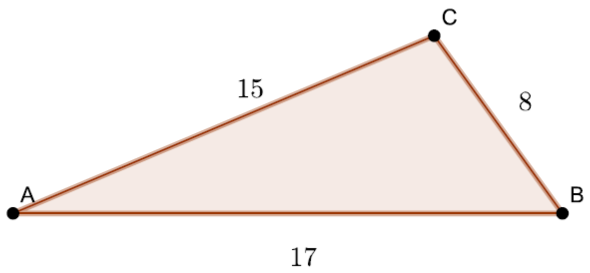


Figura 8: Triângulo $(15, 17, 8, 60)$

A tabela abaixo mostra alguns representantes desta família.

m	n	u	v	a	b	c	A
2	1	2	1	17	15	8	60
3	2	3	2	97	65	72	2340
4	3	4	3	337	175	288	25200
5	4	5	4	881	369	800	147600
6	5	6	5	1921	671	1800	603900
7	6	7	6	3697	1105	3528	1949220
8	7	8	7	6497	1695	6272	5315520
9	8	9	8	10657	2465	10368	12778560
10	9	10	9	16561	3439	16200	27855900
11	10	11	10	24641	4641	24200	56156100
12	11	12	11	35377	6095	34848	106199280
13	12	13	12	49297	7825	48672	190429200
14	13	14	13	66977	9855	66248	326437020
15	14	15	14	89041	12209	88200	538416900

Tabela 3: Representantes da família $(m^2u^2 + n^2v^2, (m^2 - n^2)(u^2 + v^2)$

1.4 Gerando triângulos de Heron escaleno

Outra maneira que temos para construir triângulos de Heron escaleno é juntar dois triângulos pitágoricos diferentes que compartilham um mesmo lado. Podemos usar a fórmula $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, onde m e n são dois números inteiros positivos e $m > n$ para gerar uma terna pitagórica. E usar o mesmo procedimento para gerar outra terna pitagórica $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$, com p e q inteiros positivos e $p > q$. Agora podemos encontrar 4 números distintos tais que $mn = pq$. E a partir deles gerar dois triângulos pitagóricos que têm apenas um lado em comum. Como exemplo podemos escrever $15.3 = 9.5$, onde $m = 15$, $n = 3$, $p = 9$ e $q = 5$. Isso irá criar dois triângulos distintos: $m = 15$ e $n = 3$ gera o triângulo $(216, 90, 234)$ e $p = 9$ e $q = 5$ gera o triângulo pitagórico $(56, 90, 106)$.

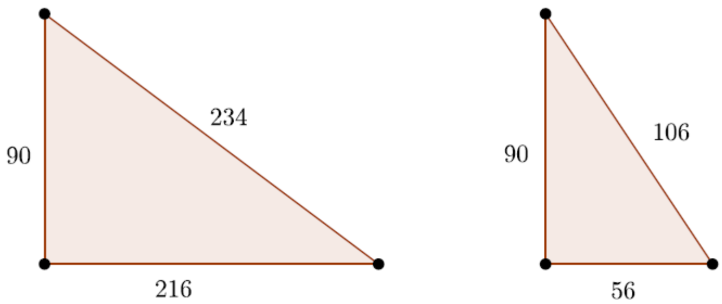


Figura 9: Triângulos pitagóricos

Combinando esses dois triângulos de tal forma que compartilhem o lado de medida 90, teremos o triângulo $(106, 234, 272)$, cuja área é 24480, que é um número inteiro como esperávamos.

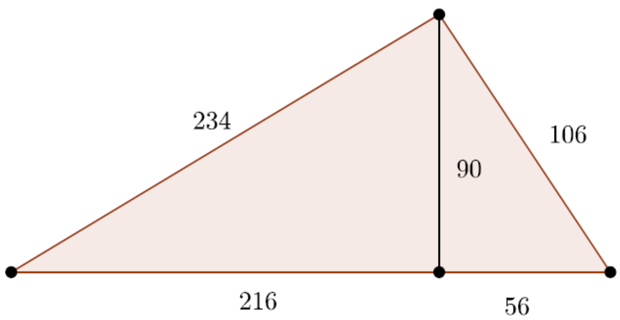


Figura 10: Triângulo $(106, 234, 272)$

Será que qualquer triângulo heroniano pode ser obtido com a união de dois triângulos pitagóricos como descrito acima? A resposta é não. Se tomarmos o triângulo heroniano

$(5, 29, 30)$ com área 72, percebemos que ele não pode ser obtido dessa forma, pois nenhuma de suas alturas tem medida inteira.

1.5 Triângulos de Heron com lados consecutivos

Considerando um triângulo heroniano com lados $a = n - 1$, $b = n$, e $c = n + 1$, o

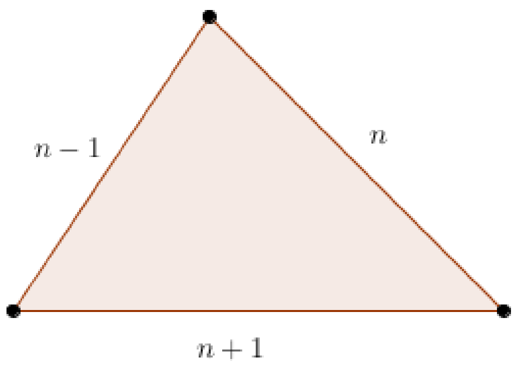


Figura 11: Triângulos heronianos com lados consecutivos

semiperímetro desse triângulo é dado por:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{n-1+n+n+1}{2} = \frac{3n}{2}$$

Usando a fórmula de Heron, temos:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{3n}{2}(\frac{3n}{2} - n + 1)(\frac{3n}{2} - n)(\frac{3n}{2} - n - 1)} \\ &= \sqrt{\frac{3n}{2}(\frac{n+2}{2})(\frac{n}{2})(\frac{n-2}{2})} \\ &= \frac{n}{4}\sqrt{3(n+2)(n-2)} \end{aligned}$$

Verificamos que para a área ser um número inteiro, n deve ser um número par, dessa forma, podendo ser escrito como $n = 2m$, daí,

$$\begin{aligned} A &= \frac{2m}{4}\sqrt{3(2m+2)(2m-2)} \\ A &= m\sqrt{3(m+1)(m-1)} \end{aligned}$$

para A ser um inteiro, devemos ter $(m+1)(m-1) = 3k^2$ para algum k inteiro. Assim,

$$m^2 - 1 = 3k^2$$

$$m^2 - 3k^2 = 1$$

Essa equação é conhecida como equação de Pell's, cuja solução é:

$m_t + k_t\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^t, t = 1, 2, 3...$, resultando valores para n iguais a $n = (2+\sqrt{3})^t + (2-\sqrt{3})^t$ com $t = 1, 2, 3...$, gerando, dessa forma, triângulos heronianos de lados inteiros consecutivos. A tabela abaixo mostra alguns representantes dessa família de triângulos heronianos.

t	n	$(n-1, n, n+1)$
1	4	(3,4,5)
2	14	(13,14,15)
3	52	(51,52,53)
4	194	(193,194,195)
5	724	(723,724,725)
6	2702	(2701,2702,2703)
7	10084	(10083,10084,10085)
8	37634	(37633,37634,37635)
9	140452	(140451,140452,140453)
10	524174	(524173,524174,524175)

Tabela 4: Triângulos heronianos com lados inteiros consecutivos

1.6 Gerando triângulos de Heron com lados em Progressão Aritmética

Dado o triângulo heroniano de lados $2a-d$, $2a$, $2a+d$, seu semiperímetro é dado

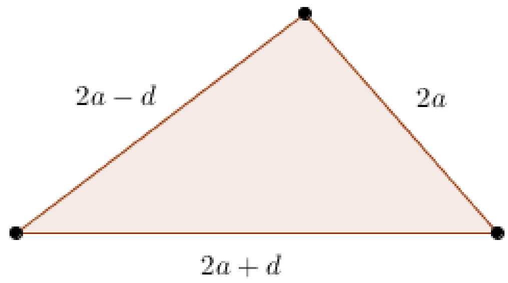


Figura 12: Triângulo $2a-d$, $2a$, $2a+d$

por

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2a-d+2a+2a+d}{2}=3a$$

sendo assim, a sua área é igual a

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{3a(3a-2a+d)(3a-2a)(3a-2a-d)} \\ &= a\sqrt{3(a^2-d^2)} \end{aligned}$$

A área será um inteiro se $a^2-d^2=3k^2$ para algum k inteiro. Essa equação tem solução inteira dada por $a=p^2+3q^2$, $d=p^2-3q^2$, $k=2pq$ para p e q satisfazendo $p^2>3q^2$. Dessa forma, teremos o triângulo $(2a-d,2a,2a+d,3ak)$. A tabela abaixo apresenta alguns representantes dessa família

p	q	a	b	c	A
2	1	13	14	15	84
3	1	18	24	30	216
4	1	25	38	51	456
4	2	52	56	60	1344
5	1	34	56	78	840
5	2	61	74	87	2220
6	1	45	78	111	1404
6	2	72	96	120	3456
6	3	117	126	135	6804

Tabela 5: Representantes da família $(2a-d,2a,2a+d,3ak)$

1.7 Mais uma família de triângulos heronianos

Nós podemos assumir que os lados do triângulo são da forma $(a, b, c) = (p, p + 1, 2p - 1)$ com p inteiro positivo. Sendo assim, o triângulo em questão tem semiperímetro

$$s = \frac{p + p + 1 + 2p - 1}{2} = 2p$$

e sua área é igual a

$$A = \sqrt{2p.(2p - p).(2p - p - 1)(2p - 2p + 1)} = p\sqrt{2(p - 1)}$$

Para ser heroniano a área deve ser um inteiro positivo, daí podemos fazer $p - 1 = 2k^2$, que nos leva a $p = 2k^2 + 1$, com k um inteiro positivo, gerando a família $(a, b, c) = (2k^2 + 1, 2(k^2 + 1), 4k^2 + 1)$. O semiperímetro desses triângulos são dados por:

$$s = 4k^2 + 2$$

e a área por:

$$\begin{aligned} A &= p\sqrt{2(p-1)} \\ &= (2k^2 + 1)\sqrt{2.2k^2} \\ &= 4k^3 + 2k \end{aligned}$$

cuja tabela abaixo nos dá alguns representantes.

k	a	b	c	s	A
1	3	4	5	6	6
2	9	10	17	18	36
3	19	20	37	38	114
4	33	34	65	66	264
5	51	52	101	102	510
6	73	74	145	146	876
7	99	100	197	198	1386
8	129	130	257	258	2064
9	163	164	325	326	2934
10	201	202	401	402	4020
11	243	244	485	486	5346
12	289	290	577	578	6936
13	339	340	677	678	8814
14	393	394	785	786	11004
15	451	452	901	902	13530

Tabela 6: família $(a, b, c) = (2k^2 + 1, 2(k^2 + 1), 4k^2 + 1)$

1.8 Gerando todos os triângulos de Heron

Após gerar diversas famílias de triângulos de Heron, surge uma pergunta: será que existe uma fórmula que gere todos os triângulos heronianos? A resposta a essa pergunta é sim, e essa fórmula foi proposta por Carmichael (1915),

$$a = n(m^2 + k^2)$$

$$b = m(n^2 + k^2)$$

$$c = (m + n)(mn - k^2)$$

para inteiros m, n e k, onde: $mdc(m, n) = 1$, $m \geq n \geq 1$ e $mn > k^2 \geq \frac{m^2 n}{2m+n}$.

A tabela abaixo fornece todos os triângulos heronianos primitivos (mdc dos lados igual a 1) cujos lados são menores que 100.

(a, b, c, A)	(a, b, c, A)	(a, b, c, A)	(a, b, c, A)	(a, b, c, A)
(3,4,5,6)	(5,5,6,12)	(5,5,8,12)	(5,12,13,30)	(10,13,13,60)
(4,13,15,24)	(13,14,15,84)	(9,10,17,36)	(8,15,17,60)	(16,17,17,120)
(11,13,20,66)	(7,15,20,42)	(10,17,21,84)	(13,20,21,126)	(13,13,24,60)
(12,17,20,90)	(7,24,25,84)	(14,25,25,168)	(3,25,26,36)	(17,25,26,204)
(17,25,28,210)	(20,21,29,210)	(6,25,29,60)	(17,17,30,120)	(11,25,30,132)
(5,29,30,72)	(8,29,35,84)	(15,34,35,252)	(25,29,36,360)	(19,20,37,114)
(15,26,37,156)	(13,30,37,180)	(12,35,37,210)	(24,37,37,420)	(16,25,39,120)
(17,28,39,210)	(25,34,39,420)	(10,35,39,168)	(29,29,40,420)	(13,37,40,240)
(25,39,40,468)	(15,28,41,126)	(9,40,41,180)	(17,40,41,336)	(18,41,41,360)
(29,29,42,420)	(15,37,44,264)	(17,39,44,330)	(13,40,45,252)	(25,25,48,168)
(29,35,48,504)	(21,41,50,420)	(39,41,50,780)	(26,35,51,420)	(20,37,51,306)
(25,38,51,456)	(13,40,51,156)	(27,29,52,270)	(25,33,52,330)	(37,39,52,720)
(15,41,52,234)	(5,51,52,126)	(25,51,52,624)	(24,35,53,336)	(28,45,53,630)
(4,51,53,90)	(51,52,53,1170)	(26,51,55,660)	(20,53,55,528)	(25,39,56,420)
(53,53,56,1260)	(33,41,58,660)	(41,51,58,1020)	(17,55,60,462)	(15,52,61,336)
(11,60,61,330)	(22,61,61,660)	(25,52,63,630)	(33,34,65,264)	(20,51,65,408)
(12,55,65,198)	(33,56,65,924)	(14,61,65,420)	(36,61,65,1080)	(16,63,65,504)
(32,65,65,1008	(35,53,66,924)	(65,65,66,1848)	(21,61,68,630)	(43,61,68,1290)
(7,65,68,210)	(29,65,68,936)	(57,65,68,1710)	(29,52,69,690)	(37,37,70,420)
(9,65,70,252)	(41,50,73,984)	(26,51,73,420)	(35,52,73,840)	(48,55,73,1320)
(19,60,73,456)	(50,69,73,1656)	(25,51,74,300)	(25,63,74,756)	(35,44,75,462)
(29,52,75,546)	(32,53,75,720)	(34,61,75,1020)	(56,61,75,1680)	(13,68,75,390)
(52,73,75,1800)	(40,51,77,924)	(25,74,77,924)	(68,75,77,2310)	(41,41,80,360)
(17,65,80,288)	(9,73,80,216)	(39,55,82,924)	(35,65,82,1092)	(33,58,85,660)
(29,60,85,522)	(39,62,65,1116)	(41,66,85,1320)	(36,77,85,1386)	(13,84,85,546)
(41,84,85,1680)	(26,85,85,1092)	(72,85,85,2772)	(34,55,87,396)	(52,61,87,1560)
(38,65,87,1140)	(44,65,87,1386)	(31,68,87,930)	(61,74,87,2220)	(65,76,87,2394)
(53,75,88,1980)	(65,87,88,2640)	(41,50,89,420)	(28,65,89,546)	(39,80,89,1560)
(21,82,89,840)	(57,82,89,2280)	(78,89,89,3120)	(53,53,90,1260)	(17,89,90,756)
(37,72,91,1260)	(60,73,91,2134)	(26,75,91,840)	(22,85,91,924)	(48,85,91,2016)
(29,75,92,966)	(39,85,92,1656)	(34,65,93,744)	(39,58,95,456)	(41,60,95,798)
(68,87,95,2850)	(73,73,96,2640)	(37,91,96,1680)	(51,52,97,840)	(65,72,97,396)
(26,73,97,420)	(44,75,97,1584)	(35,78,97,1260)	(75,86,97,3096)	(11,90,97,396)
(78,95,97,3420)				

Tabela 7: Todos os triângulos heronianos primitivos com lados menores que 100

2 Propriedades dos triângulos heronianos

Será que dado um triângulo temos como saber se ele é um Triângulo de Heron? Quais as propriedades de um triângulo heroniano? Essas são as questões que abordaremos neste capítulo.

2.1 Existe triângulo heroniano equilátero?

Dado um triângulo ABC de lados a, b e c inteiros, a área desse triângulo pode ser calculada pela expressão

$$A = \frac{a.b.sen(\angle C)}{2}$$

No caso do triângulo equilátero com lados inteiros e iguais a m, ficaremos com

$$A = \frac{m^2.sen(60^0)}{2} = \frac{m^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$$

Como m é inteiro e $\sqrt{3}$ irracional, temos que a área é um número irracional, provando que os triângulos equiláteros não fazem parte da família dos triângulos heronianos.

2.2 O perímetro de um triângulo heroniano é sempre par

Dado um triângulo heroniano qualquer de lados a, b e c, o seu perímetro é sempre par, e provaremos isso por absurdo. Suponha-se que o perímetro p seja ímpar. Então, todos os fatores do lado direito da equação abaixo são metades de números inteiros ímpares,

$$A^2 = \frac{p}{2}(\frac{p}{2} - a)(\frac{p}{2} - b)(\frac{p}{2} - c)$$

Como o produto é um inteiro ímpar dividido por 16, esse resultado não pode ser um número inteiro.

2.3 Triângulos de Heron primitivos possuem apenas um lado par

Dado um triângulo de Heron primitivo (mdc dos lados igual a 1) de lados a, b, c, podemos provar que exatamente um de seus lados é par. Sendo a, b e c inteiros, o semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$ é um inteiro ou metade de um inteiro. Se s é um inteiro, então $a + b + c$ deve ser par, mas como $mdc(a, b, c) = 1$, devemos ter um dos lados par e os outros dois ímpares. Se s for metade de um inteiro, então $s - a$, $s - b$ e $s - c$ são todos metade de um inteiro, e nesse caso a área que é dada por $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ não será um número inteiro.

2.4 Triângulo de Heron isosceles tem como base um número par

Para isso, peguemos o triângulo isosceles ABC abaixo, sendo M o ponto médio do lado BC. Vamos assumir por absurdo que a é impar. Daí podemos escrever $a = 2m + 1$,

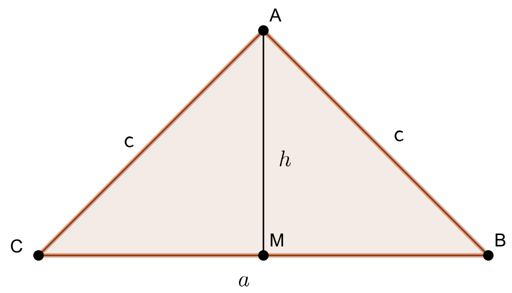


Figura 13: Triângulo isosceles

sendo assim, $BM = m + \frac{1}{2}$ e $h = \sqrt{c^2 - (m + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{4c^2 - 4m^2 - 4m - 1}{4}}$. Sendo A a área de ABC, temos

$$A = \frac{a.h}{2} = \frac{(2m+1)\sqrt{\frac{4c^2-4m^2-4m-1}{4}}}{2}$$

que, desenvolvendo, teremos

$$16A^2 = (2m+1)^2.(4c^2 - 4m^2 - 4m - 1)$$

Observe-se que chegamos a um absurdo, pois $16A^2$ é um número par, e está escrito como o produto de dois números ímpares.

2.5 Não há triângulo heroniano com um lado cujo comprimento seja igual a 1 ou 2

A impossibilidade de ter um triângulo heroniano com lado igual a 1 pode ser justificada com a desigualdade triangular, que diz: em todo triângulo, cada lado é maior que a diferença dos outros dois. Sendo assim, com um lado igual a 1 só é possível gerar triângulos isosceles com base igual a 1 ou um triângulo equilátero de lados iguais a 1. Já provamos anteriormente que em ambos os casos os triângulos não são heronianos.

Suponhamos que exista um triângulo de Heron com lado igual a 2; logo, esse triângulo heroniano é primitivo, pois sabemos que o lado não pode ser igual a 1. Sendo assim, como um dos lados do triângulo é 2, que é par, os outros dois lados são ímpares, e o semiperímetro é dado por $s = \frac{a+b+2}{2}$. Pela desigualdade triângular, sabemos que $a-b=1$ ou $a-b=0$. Sendo $a-b=1$, teremos que o semiperímetro é igual a

$$s = \frac{b+b+1+2}{2} = \frac{2b+3}{2}$$

o que nos dá um semiperímetro que não é inteiro, contrariando a propriedade 2.2. Dessa forma, a única possibilidade é $a = b$. Daí, o semiperímetro é igual a $s = \frac{2b+2}{2} = b+1$, ou seja, $a = b = s-1$, que dará a área igual a

$$A = \sqrt{s(s-2)(s-s+1)(s-s+1)} = \sqrt{s(s-2)}$$

Como A é inteiro, devemos ter $s(s-2) = K^2$ para algum k inteiro positivo, o que é um absurdo.

2.6 Todo triângulo heroniano tem como seno de cada um de seus ângulos internos um número racional

Esta conclusão seguiu da fórmula para o cálculo da área de um trângulo $A = \frac{a.b.sen(\angle C)}{2}$, o que nos leva a $sen(\angle C) = \frac{2A}{ab}$. Como por hipótese A, a e b são inteiros, o $sen(\angle C)$ deve ser racional.

2.7 Todo triângulo heroniano tem como cosseno de cada um de seus ângulos internos um número racional

Provaremos para um ângulo, valendo o mesmo para os demais ângulos. Dado o triângulo ABC abaixo

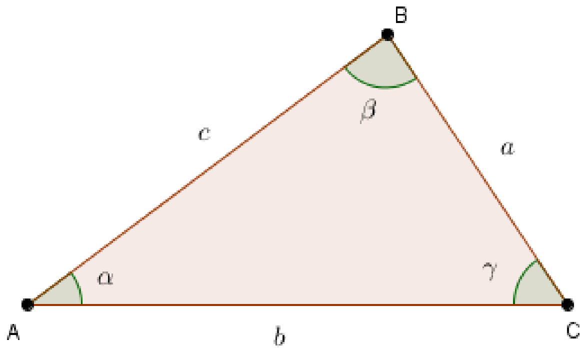


Figura 14: Triângulo ABC

pela lei dos cossenos temos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$
Daí,

$$cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

como a, b e c são inteiros positivos, temos que $cos\alpha$ é racional.

2.8 Não há triângulo heroniano cujos três ângulos internos formem uma progressão aritmética

Suponhamos por absurdo que isso seja possível, então teríamos os ângulos $(\alpha - x, \alpha, \alpha + x)$. Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo mede 180^0, temos que $\alpha - x + \alpha + \alpha + x = 180$, ou seja, $\alpha = 60^0$, o que é um absurdo, pois sabemos que o seno dos ângulos internos de um triângulo heroniano é racional.

2.9 A área de um triângulo de Heron é divisível por 6

Podemos provar isso para um triângulo primitivo, o que é suficiente, já que os demais são obtidos a partir destes, multiplicando todos os lados por um número inteiro positivo. Sendo a, b e c os lados de um triângulo de Heron primitivo, sabemos que um dos lados é par e os outros dois são ímpares. Sendo assim, dois dos termos s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ são pares, o que prova que A é par. Para seguir adiante, precisamos do seguinte resultado: Todo quadrado perfeito deixa resto 0 ou 1 quando dividido por 3. Podemos considerar um número n de uma das formas $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$, onde 0, 1 e 2 são os possíveis restos da divisão de n por 3.

- se $n = 3k$, então $n^2 = 9k^2 = 3.(3k^2)$
- se $n = 3k+1$ então $n^2 = 3(3k^2+2k)+1$
- se $n = 3k+2$, então $n^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$

No primeiro caso, n^2 deixa resto 0, e nos outros dois casos, deixa resto 1, quando dividido por 3.

Agora iremos provar que A é um múltiplo de 3. Vamos supor que nenhum dos termos s,$s-a$, $s-b$, $s-c$ seja múltiplo de 3. Então, eles deixam resto $+1$ ou -1, que é equivalente a um resto 2 na divisão por 3. Como os possíveis restos de $s = (s-a)+(s-b)+(s-c)$ na divisão por 3 só podem ser $1 \equiv 1+1+(-1)$ ou $-1 \equiv 1+(-1)+(-1)$, em cada um dos casos o produto $s(s-a)(s-b)(s-c)$ não pode ser um quadrado perfeito, o que nos leva à conclusão de que um dos s,$s-a$, $s-b$, $s-c$ e A deve ser um múltiplo de 3. Como A é um múltiplo de 2 e de 3, consequentemente A é múltiplo de 6.

2.10 Não é possível ter um triângulo de Heron cujos lados estejam em progressão geométrica

Vamos supor que exista um triângulo heroniano cujos lados estão em progressão geométrica. Seus lados seriam da forma (a_1q^{-1}, a_1, a_1q), como na figura abaixo. O

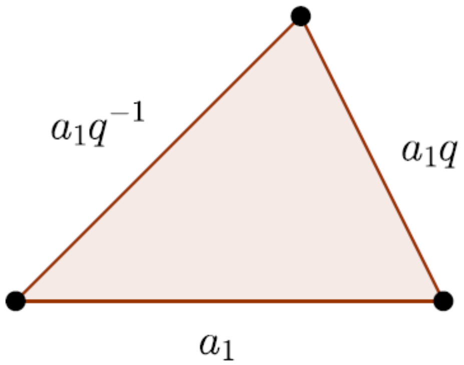


Figura 15: Triângulo (a_1q^{-1}, a_1, a_1q)

semiperímetro é dado por

$$s = \frac{a_1q^{-1} + a_1 + a_1q}{2} = \frac{a_1(1 + q + q^{-1})}{2}$$

sendo assim, teremos

$$A^2 = (\frac{a_1(1+q+q^{-1})}{2})(\frac{a_1(1+q+q^{-1})}{2}) - a_1)(\frac{a_1(1+q+q^{-1})}{2} - a_1q)(\frac{a_1(1+q+q^{-1})}{2} - a_1q^{-1})$$

que, desenvolvendo, teremos

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{4}(1 + q^{-2} + 3q^2 - 2q^{-4})^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{a^2}{4q^2}(-2 + q^2 + q^4 + 3q^6)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Para que possamos concluir nossa análise, precisamos de um resultado: todo quadrado perfeito deixa resto 0 ou 1 quando dividido por 4. Podemos representar um número n qualquer de uma das seguintes formas: $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$ para algum k inteiro positivo.

- Se $n = 2k$, então $n^2 = 4k^2$
- Se $n = 2k + 1$, então $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$

No primeiro caso, n^2 deixa resto 0 quando dividido por 4; no segundo, n^2 deixa resto 1 quando dividido por 4. De posse desse resultado, podemos analisar o resto da divisão da expressão $(-2+q^2+q^4+3q^6)$ na divisão por 4. Se q for da forma $q=2k+1$ para algum k inteiro positivo, teríamos:

$$16k^4+4k^2+192k^6-2=4(16k^4+k^2+48k^6)-2$$

ou seja, a expressão deixa resto 2 na divisão por 4. Se q for da forma $q=2k+1$ para algum k inteiro positivo, teriamos para a mesma expressão um resto igual a 3. Os dois possíveis restos dessa expressão na divisão por 4 nos garantem que a mesma não é um quadrado perfeito. Logo, a área encontrada não é um número inteiro, excluindo a possibilidade de ser um triângulo de Heron.

2.11 O semiperímetro de um triângulo de Heron não pode ser um número primo

Podemos provar isso usando a fórmula de Heron

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

pois o produto $s(s-a)(s-b)(s-c)$ deve ser um quadrado perfeito. Assim, sendo s primo, um dos outros fatores deve ter s como um fator comum, mas isso é um absurdo, pois todos os demais fatores são menores que s.

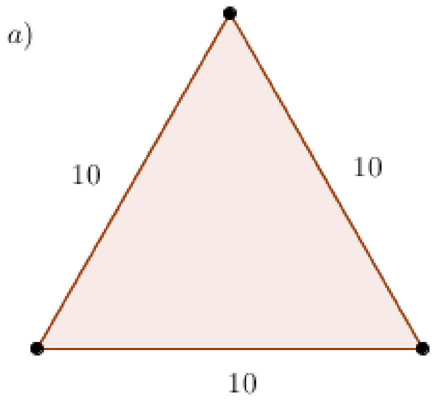
2.12 Todas as alturas de um triângulo de Heron são racionais

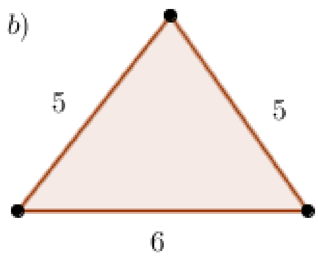
Podemos provar essa propriedade a partir da fórmula da área de um triângulo $A=\frac{b.h}{2}$, onde b aqui é uma base do triângulo e h a altura relativa a essa base. A partir dessa fómula podemos escrever $h=\frac{2A}{b}$. Como A e b são inteiros, h também deve ser um número racional.

3 *Aplicações*

3.1 Problemas

01. Sendo a, b e c os lados de um triângulo, atribui-se a Heron de Alexandria a fórmula $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde A é a área do triângulo e $s = \frac{a+b+c}{2}$ o seu semiperímetro. De posse dessa informação, calcule a área dos triângulos abaixo usando a fórmula de Heron.





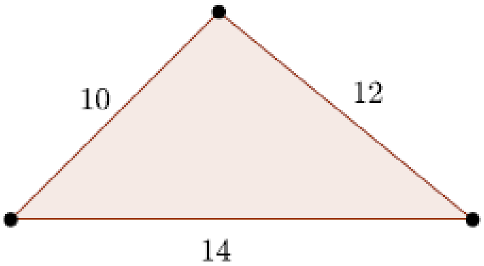
Resolução:

a) Calculando o semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+10+10}{2} = 15$, usando a fórmula de Heron, calculamos a área $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{15.5.5.5} = \sqrt{3.5^2.5^2} = 25\sqrt{3}$

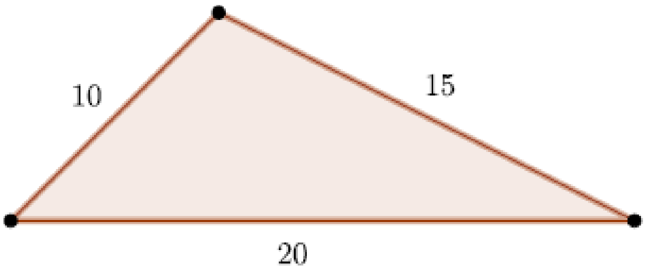
b) Calculando o semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+5+6}{2} = 8$, usando a fórmula de Heron, calculamos a área $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8.3.3} = \sqrt{2^4.3^2} = 12$

02. Chamamos de heroniano o triângulo que tem como medidas dos seus lados e de sua área números inteiros. Dados os triângulos abaixo, identifique qual desses é um triângulo heroniano.

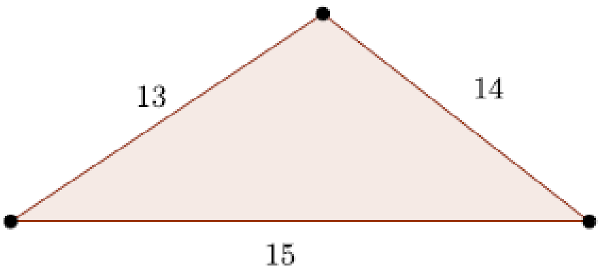
$a)$



$b)$



$c)$



Resolução:

a) Calculando o semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+12+14}{2} = 18$, usando a fórmula de Heron, calculamos a área $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{18.8.6.4} = \sqrt{3^2.3.2.^6.2} = 24\sqrt{6}$; logo, não é um triângulo de Heron.

b) Calculando o semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+15+20}{2} = 22,5$, como o semiperímetro não é um número inteiro, a área também não será.

c) Calculando o semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$, usando a fórmula de Heron, calculamos a área $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21.8.7.6} = \sqrt{3^2.2^4.7^2} = 84$; como os lados e a área são inteiros, trata-se de um triângulo de Heron.

03. Sabe-se que existem triângulos heronianos com lados consecutivos $(n-1, n, n+1)$ e que exemplos desses triângulos podem ser encontrados usando a equação $n = (2+\sqrt{3})^t + (2-\sqrt{3})^t$ com $t = 1, 2, 3...$, em que para cada valor de t encontramos n e consequentemente os lados do triângulo. Dessa forma, faça $t = 2$ e determine os lados e a área do triângulo encontrado.

Resolução:

Como n é dado pela expressão $n = (2+\sqrt{3})^t + (2-\sqrt{3})^t$ para $t = 2$, teremos

$$\begin{aligned} n &= (2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 \\ &= 14 \end{aligned}$$

sendo assim, os lados do triângulo são $(13, 14, 15)$ e a área igual a 84.

04. Em relação ao problema anterior, faça $t = 3$ e determine os lados e a área do triângulo heoniano encontrado.

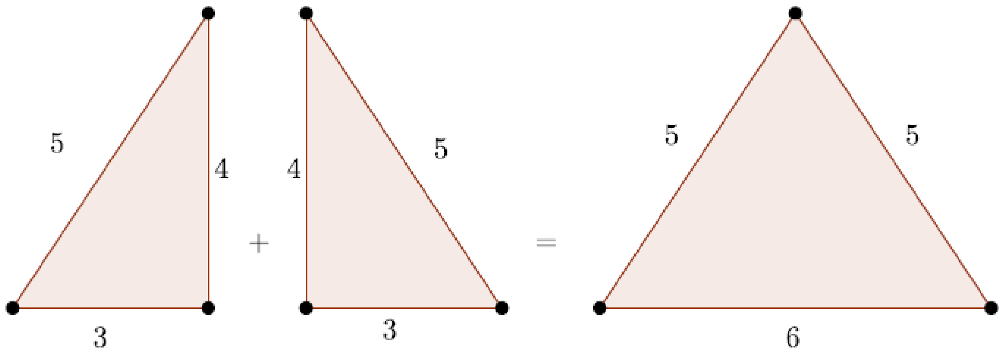
Resolução:

Como n é dado pela expressão $n = (2+\sqrt{3})^t + (2-\sqrt{3})^t$ para $t = 3$ teremos

$$\begin{aligned} n &= (2+\sqrt{3})^3 + (2-\sqrt{3})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3} + +8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} \\ &= 52 \end{aligned}$$

sendo assim, os lados dos triângulos são $(51, 52, 53)$ e a área igual a 1170.

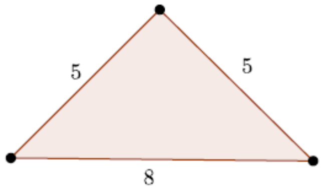
05. Sabe-se que uma forma de obter triângulos de Heron isosceles é unindo triângulos pitagóricos (triângulos retângulos com lados inteiros) idênticos. Como exemplo temos o triângulo (5,5,6) abaixo, que surge da união de dois triângulos pitagóricos idênticos de lados (3,4,5).



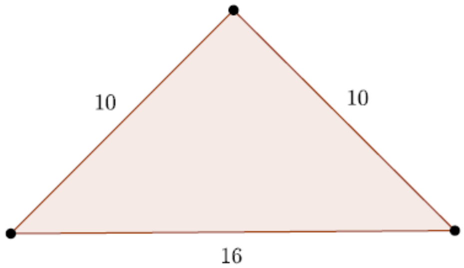
Sendo assim, como podemos obter os triângulos heronianos abaixo a partir de triângulos pitagóricos idênticos?

Resolução:

$a)$



$b)$



a) Sendo um triângulo isosceles, sabemos que a altura coincide com a mediana. Dessa forma, o triângulo pitagórico em questão tem lados x, 4 e 5. Aplicando o teorema de Pitágoras, encontraremos x=3. Daí, o triângulo pitagórico em questão é o triângulo $(3, 4, 5)$.

b) Usando o mesmo procedimento do item anterior, obtemos o triângulo pitagórico $(x, 8, 10)$. Aplicando o teorema de Pitágoras, encontramos $x = 6$. Daí, o triângulo pitagórico em questão é o triângulo $(6, 8, 10)$.

06. Sabendo que a área de um triângulo equilátero é dada por $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, onde l é o comprimento dos lados do triângulo, responda: existe triângulo heroniano equilátero? Justifique.

Resolução:

Não, pois l é um inteiro e se multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{2}$, que é um número irracional, dará para a área um valor irracional.

3.2 Trabalhando com propriedades dos triângulos heronianos

Nesta segunda atividade buscaremos explorar com os alunos algumas propriedades dos triângulos heronianos.

Atividade
Objetivo: Fazer com que os alunos verifiquem e utilizem algumas propriedades dos triângulos heronianos
Material:

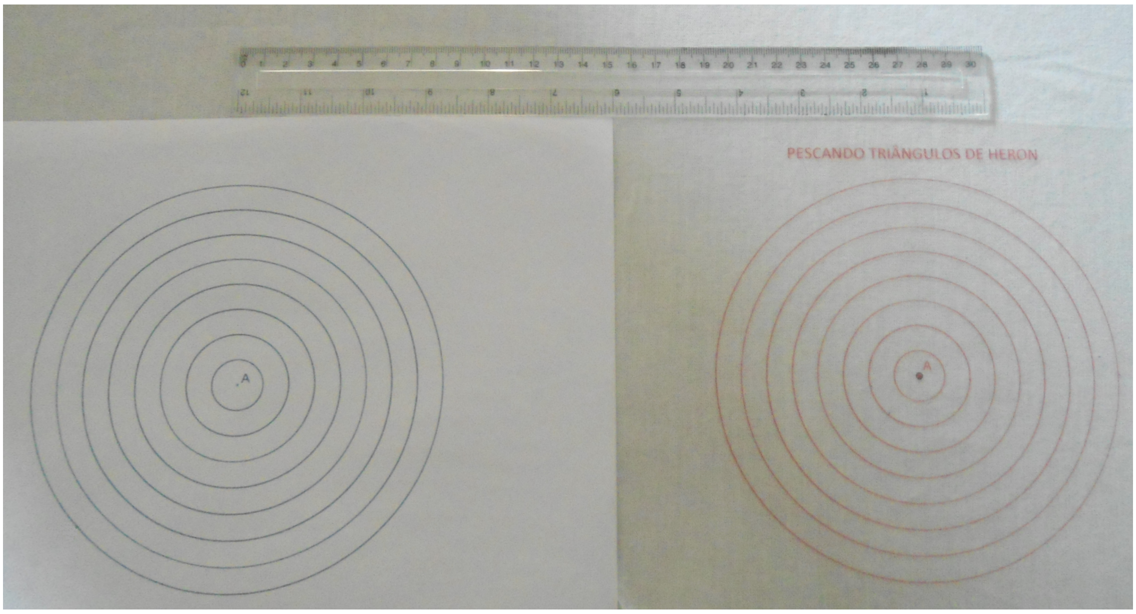


Figura 16: Material

- Régua;
- Desenhos de círculos concêntricos no papel ofício, com raios espaçados de 1cm;
- Desenhos de círculos concêntricos na transparência, com raios espaçados de 1cm.

Propriedades

- Não existe triângulo de Heron equilátero;
- O perímetro de um triângulo heroniano é sempre par;

- O semiperímetro de um triângulo de Heron não pode ser um número primo;

- Triângulos de Heron primitivos, triângulos cujas medidas dos lados têm *mdc* igual a 1, possuem apenas um lado par;

- Triângulo de Heron isosceles tem como base um número par.

Procedimento
1) Sobreponha as duas figuras: do papel ofício e da transparência. Desloque a transparência de forma que cada centro fique 1 cm distante do outro. Agora, pegando os dois centros e mais qualquer ponto de interseção dos círculos das duas figuras, você encontra quais tipos de triângulos? Pelas propriedades apresentadas anteriormente, esses triângulos podem ser heronianos? Justifique sua resposta usando as propriedades listadas.
Resolução:

Figura 17

Um equilátero e os demais isosceles. Eles não podem ser heronianos, pois não existe triângulo heroniano equilátero, nem triângulo isosceles com base ímpar.

2) Agora distancie 2cm um centro do outro. Pegando os dois centros e mais qualquer ponto de interseção dos círculos das duas figuras, você encontra quais tipos de triângulos? Pelas propriedades apresentadas anteriormente, esses triângulos podem ser heronianos? Justifique sua resposta usando as propriedades listadas. Sugestão: você pode representar os lados do triângulo isosceles como $(x, x, 2)$ e usar a fórmula de Heron para o cálculo da área de triângulos, $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, para provar que a área desse triângulo não têm um valor inteiro.

Resolução:

Equilátero, isosceles e escalenos cujos lados são da forma $(2, x, x+1)$. Já sabemos que

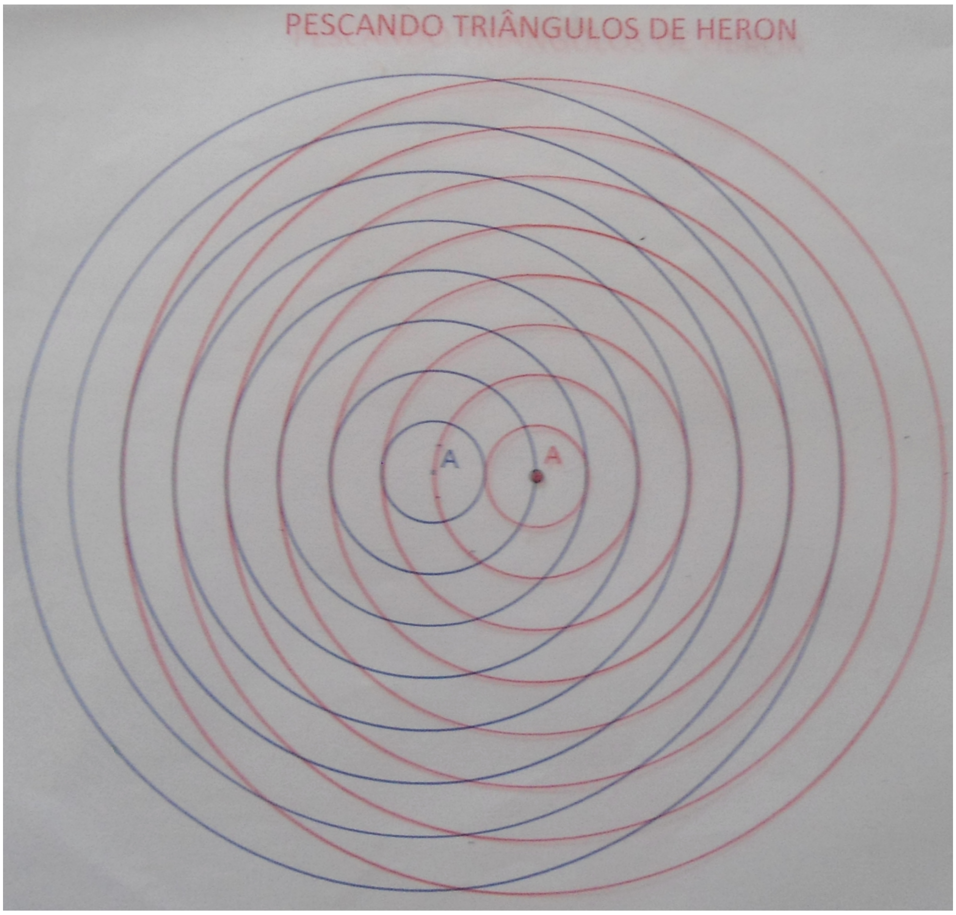


Figura 18

não podemos ter triângulos heronianos equiláteros, agora, podemos ter triângulo isosceles com a base igual a 2? Usando a sugestão dada pelo problema, temos que o semiperímetro desse triângulo é igual a

$$S = \frac{x + x + 2}{2} = x + 1$$

e a sua área

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{(x+1)(x+1-x)(x+1-x)(x+1-2)} \\ &= \sqrt{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

Como $(x+1)(x-1)$ não é um quadrado perfeito, o valor da área não é um número inteiro; logo, os triângulos isosceles de base 2 não podem ser heronianos. Quanto aos triângulos escalenos de lados $(2, x, x+1)$, o perímetro deles é dado por $P = 2 + x + x + 1 = 2x + 3$, que é um número ímpar. Dessa forma, também não podem ser heronianos.

3) Crie uma conjectura a partir das conclusões dos problemas 1 e 2.

Resolução:
Não existe triângulo heroniano com lado de comprimento 1 ou 2.

4) O triângulo $(3, 7, 8)$ satisfaz todas as propriedades acima? Ele é heroniano? O que você pode concluir com isso?

Resoluçaõ:
O semiperímetro é igual a $S = \frac{3+7+8}{2} = 9$ e a área

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{9(9-3)(9-7)(9-8)} \\ &= \sqrt{9.6.2.1} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Como a área não tem um valor inteiro, o triângulo não é heroniano. Dessa forma, podemos concluir que satisfazer as propiedades citadas não garante que o triângulo seja heroniano.

4 Considerações finais

Exploramos neste trabalho os triângulos de Heron. Geramos várias famílias desses triângulos e estudamos as suas propriedades.

A nosso abordagem foi feita utilizando conceitos básicos da Geometria, da Álgebra e da Aritmética, tornando possível realizar este estudo com alunos da educação básica.

Finalizando, a proposta principal deste trabalho é mostrar que o estudo dos triângulos heronianos pode ser entendido como mais uma oportunidade para a aprendizagem de conteúdos importantes da Matemática, uma vez que este estudo permite aos alunos colocar em prática seus conhecimentos de Geometria, Aritmética e Álgebra.

Para quem quiser aprofundar um pouco mais o conhecimento sobre os triângulos de Heron, deixamos a bibliografia que utilizámos para elaborar o trabalho.

Referências Bibliográficas

CARLSON, J. R. Determination of heronian triangles. *Fibonacci Quarterly*, v. 8, p. 499–506, 1970.

CARMICHAL, R. D. *Diophantine Analysis*. London: Chapman e Hall, Limited, 1915.

DICKSON, L. E. *History of the Theory of Numbers, Volume II: Diophantine Analysis*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5, Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2012.

SASTRY, K. Pares de triángulos heronianos con Áreas y perímetros iguales: Una descripción. *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática*, v. 15, p. 5–10, 2004.

YIU, P. Number of theory 2. *Department of Mathematics Florida Atlantic University*, 2007.

YIU, P. Heron triangles which cannot be decomposed into two integer right triangles. *41st Meeting of Florida Section of Mathematical Association of America*, 2008.