UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ESTUDO DAS CÔNICAS COM GEOMETRIA DINÂMICA

Fernando Neres Gomide

Orientador: Prof. Dr°. André Nagamine

Vitória da Conquista

2015

FERNANDO NERES GOMIDE

ESTUDO DAS CÔNICAS COM GEOMETRIA DINÂMICA.

Dissertação apresentada por **Fernando Neres Gomide** como exigência do curso de Mestrado em Matemática Profissional da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB - sob a orientação do professor **Drº. André Nagamine.**

Vitória da Conquista

2015

AGRADECIMENTOS

A minha família e amigos, que sempre incentivaram meus sonhos e estiveram sempre ao meu lado.

Aos meus colegas de classe e demais formandos pela amizade e companheirismo que recebi.

Ao Professor André Nagamine, que me acompanhou, transmitindo-me tranquilidade nesse momento.

RESUMO

A Geometria Analítica é o estudo da Geometria através da utilização da Álgebra, e os primeiros estudos datam do século XVII. Um importante ramo da Geometria Analítica é o estudo das cônicas, a obra mais completa sobre as cônicas se deu por volta de 225 a.C. porém sem as deduções de suas equações que só foram possíveis a partir do surgimento da Geometria Analítica. Atualmente é uma parte da Matemática que vem sendo negligenciada principalmente nas escolas públicas, muitas vezes por não dar a devida importância ao seu estudo e apenas sendo apresentada de maneira enfadonha através de suas equações. Devido a este problema é necessário criar meios que tornem o ensino mais interessante e estimulante, por isso, aqui será proposta uma nova metodologia de se apresentar as cônicas, usando uma das ferramentas de Geometria Dinâmica mais conhecidas na Educação Matemática, o Geogebra, afim de permitir a manipulação das curvas.

Palavras chaves: Cônicas; Geometria Analítica; Geometria Dinâmica.

Sumário

INTRODUÇÃO 7

CAPÍTULO I 9

1.1 A origem da Geometria Analítica 9

1.2 Estudo das Cônicas 12

1.3 Geometria Dinâmica 13

CAPÍTULO II 16

2.1 Figuras cônicas 16

2.2 Elipse 17

2.3 Hipérbole 21

2.4 Parábola 25

CAPÍTULO III 31

3.1 Elipse 32

3.1.1 Roteiro para construção da elipse no GeoGebra, dados os focos $\boldsymbol{F1}$ e $\boldsymbol{F2}$ e o comprimento $\boldsymbol{2a}$. 33

3.2 Hipérbole 37

3.2.1 Roteiro para construção da hipérbole no GeoGebra, dados os focos $\boldsymbol{F1}$ e $\boldsymbol{F2}$ e o comprimento $\boldsymbol{2a}$. 38

3.3 Parábola 42

3.3.1 Roteiro para construção da parábola no GeoGebra, dados o foco $\boldsymbol{F}$ e a diretriz $\boldsymbol{d}$. 42

CONSIDERAÇÕES FINAIS 49

REFERÊNCIAS 50

INTRODUÇÃO

As cônicas dentro da Geometria Analítica é uma parte importante dos conteúdos de Matemática que são trabalhados no Ensino Médio. Entretanto, seu ensino nas escolas públicas brasileiras vem apresentando baixos rendimentos ao longo do tempo como ressalta os estudos de Pavanello (2004), Peres (1995), Lorenzato (1995), Celestino (2000) e Di Pinto (2000). Isso tem uma consequência direta em cursos de graduação das ciências exatas onde há a necessidade do conhecimento de Geometria Analítica, tais como, Matemática, Física, Engenharias, Ciências da Computação, Arquitetura, etc.

Pavanello (2004) aponta que um dos principais problemas no aprendizado de Geometria Analítica é a falta de significado dado pelos estudantes aos objetos matemáticos estudados, as pesquisas mostraram que a ênfase dada pelas escolas públicas ao ensino de Geometria Analítica está na apresentação de um conjunto de definições, regras e fórmulas, onde o aluno pouco observa o processo construtivo.

Observada essa dificuldade e deficiência no ensino da Geometria Analítica o objetivo deste trabalho é propor para a Elipse, Hipérbole e Parábola uma abordagem diferente da que é usualmente apresentada nos livros didáticos, trabalhando com uma ferramenta de Geometria Dinâmica, no caso, o software GeoGebra. Através desta ferramenta serão construídas a Elipse, a Hipérbole e a Parábola. O GeoGebra permite a manipulação destes objetos, o que possibilita a visualização do processo construtivo seguindo as definições apresentadas.

O GeoGebra é um software livre que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. O seu autor é o professor Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo, na Áustria. Por um lado, o GeoGebra é um sistema de Geometria Dinâmica que permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, cônicas e funções, que podem ser modificados dinamicamente. Por outro lado, podem-se inserir equações e coordenadas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a potência de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite determinar derivadas e integrais de funções, além de oferecer um conjunto de comandos próprios da Análise Matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes e extremos. Qualquer pessoa pode obter esse forte aliado do ensino de Matemática no endereço eletrônico: http://www.geogebra.org/

No capítulo I será apresentada, de maneira breve, a história da Geometria Analítica e o desenvolvimento do estudo das cônicas ao longo do tempo, no capítulo II veremos a forma que os livros didáticos comumente definem as cônicas, e já no capítulo III mostraremos definições alternativas das cônicas, equivalentes às definições comumente utilizadas, mas que possibilitam o uso do GeoGebra.

CAPÍTULO I

1.1 A origem da Geometria Analítica

Segundo Havelange (2006 apud VITRAC, 2009, p. 40), Heródoto foi o primeiro a escrever sobre as origens da Geometria, pois em um de seus livros da sua obra *Enquête*, do século V a.C., esta relatada a mais antiga menção da palavra geometria. Os sacerdotes egípcios contaram a Heródoto que o rei Sesóstris dividia o solo entre todos os egípcios agricultores, atribuindo um lote igual a cada um e prescrevendo que cada detentor passaria a lhe dever um tributo anual com base nessa repartição. Contudo, uma vez ao ano o rio Nilo inundava parte do lote. O proprietário prejudicado ia então ao encontro do soberano, que averiguava o quanto do terreno diminuíra para então providenciar um abatimento proporcional no tributo a ser pago. Ao que tudo indica, concluía Heródoto, foi isso que ensejou o nascimento da geometria. Ele acrescenta que os gregos transmitiam uns aos outros esse conhecimento.

De acordo com Boyer (1996) a descrição de Heródoto é etimológica: “geometria” constiui-se do prefixo “geo”, derivado de “ge”, a terra, e do verbo “métrein”, “medir”. E assim temos “geometria = medida da terra”, e a ideia de que ela teria nascido da agrimensura. Afirmações sobre a origem da Geometria são incertas e muito arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos do que a arte de escrever. Heródoto e Aristóteles não quiseram arriscar-se a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a Geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a Geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade da prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual do vale do Rio Nilo. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da Geometria.

Ainda segundo Boyer (1996) a Geometria foi empregada pelos povos primitivos na construção de objetos de decoração, de utensílios domésticos, de enfeites e na criação de desenhos para a pintura corporal. Formas geométricas, com grande riqueza e variedade, apareceram em cerâmica e pinturas de diversas culturas, com a presença de formas como triângulos, quadrados e círculos, além de outras mais complexas.

Conforme Kobayashi (2001) foi durante os séculos VII e VI a.C. que os gregos começaram a se interessar pela Matemática de uma maneira diferente, não somente pela sua utilidade prática mas sim como ciência. Para Kobayashi (2001), é a partir daí que o homem começa a se preocupar mais sobre o “por que” e não mais sobre o “como”. A principal fonte de informação deste período é o chamado Sumário Eudemiano de Proclo, que é um resumo do desenvolvimento da geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides.

Segundo Bloise:

> [...] O ápice da Geometria Grega é atingido no período helenístico, mas esse fato não implica que não existiram produções importantes anteriormente. Na verdade, existiu uma vasta produção matemática que remonta há muitos séculos antes de Euclides. Toda essa produção recebeu a denominação de Geometria Pré-Euclidiana. Euclides de Alexandria viveu entre 300 e 200 a.C. e desenvolveu o método axiomático (estrutura lógica de pensamento). Embora nenhuma descoberta lhe seja atribuída, sua habilidade de expor didaticamente o conhecimento geométrico foi como o primeiro passo na história do pensamento matemático, bem como da organização da própria Matemática. (BLOISE, 2012, p. 36).

A importância de Euclides é evidenciada pela forma em que sistematizou o conhecimento da geometria como explica Bloise:

> [...] Euclides foi responsável por sistematizar o conhecimento de geometria de sua época. A ordenação da Geometria de seu tempo, que realizou em um sistema dedutivo (do todo para as partes), é um trabalho notável. Ele tomou um pequeno número de conceitos geométricos simples e procurou demonstrar todos os demais como consequências lógicas desses primeiros, isto é, Euclides estabeleceu um sistema axiomático (lógico-dedutivo).
>
> Os Elementos de Euclides representam de um modo perfeito, o tipo de Geometria que dominou as ciências durante todo o período compreendido entre a Antiguidade e a Idade Moderna. Sem dúvida, eles representam uma das contribuições mais importantes para a Metodologia das Ciências. (BLOISE, 2012, p. 37).

Mas apesar deste desenvolvimento a Geometria grega ainda não contava com aparelhagem que permitiria uma operacionalidade como destaca Eves:

> [...] Apesar do brilhantismo faltava operacionalidade à Geometria grega. E isto só iria ser conseguido mediante a Álgebra como princípio unificador. Os gregos, porém, não eram muito bons em álgebra. Mais do que isso, somente

> no século XVII a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a geometria. (EVES, 1997, p. 12).

Apesar de todas as condições para o desenvolvimento da Geometria Analítica duas pessoas que marcaram sua época foram de fundamental importância para sua criação, foram eles Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), a suas participações são evidenciadas por Eves:

> [...] O fato de haver condições para uma descoberta não exclui o toque de genialidade de alguém. E para a geometria analítica o mérito se deu a duas pessoas. Dois franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), ambos graduados em Direito, e curiosamente nenhum deles matemático profissional, são os responsáveis diretos por esse avanço da geometria analítica. O primeiro conduzido por seu grande amor a matemática e o segundo por razões um tanto filosóficas. Vale destacar que não trabalharam juntos em nenhum momento. A geometria analítica é um dos muitos casos, em ciência, de descobertas simultâneas e independentes.
>
> Pierre de Fermat trabalhando como conselheiro junto ao Parlamento de Toulouse dedicava muitas de suas horas de lazer à matemática, não porque faltassem outras maneiras de preencher o tempo disponível, e sim porque não conseguia fugir da sua verdadeira vocação e, mesmo tendo a matemática como hobby, foi, na época, quem mais contribuiu para o avanço desta ciência. Além da geometria analítica, Fermat teve papel fundamental na criação do Cálculo Diferencial, do Cálculo de Probabilidades e, especialmente, da teoria dos números. (EVES, 1997, p. 13).

Eves destaca os principais trabalhos de Fermat e Descartes que foram encontradas contribuições a Geometria Analítica:

> [...] A contribuição de Fermat à geometria analítica foi encontrada num pequeno texto intitulado Introdução aos Lugares Planos e Sólidos datado de no máximo de 1636, porém só foi publicado em 1679, após sua morte, assim como sua obra completa. Isso porque Fermat era bastante modesto e avesso a publicar seus estudos.
>
> O interesse de Descartes pela matemática apareceu cedo, logo aos oito anos de idade, quando estudante do College de la Fleche, uma escola que era

> dirigida por jesuítas. Aos vinte e um anos de idade, já graduado em Direito em Poitiers, mas sempre frequentando rodas de matemáticos na França, ingressa na carreira das armas, uma das poucas opções “dignas” que se ofereciam a um jovem como ele, oriundo da nobreza menor da França. Apesar das batalhas em vários exércitos, o que ocupava os pensamentos e sonhos de Descartes era a ciência e a filosofia.
>
> A Geometria Analítica dada por Descartes surgiu em 1637 no pequeno texto chamado A Geometria como um dos três apêndices do Discurso do método, considerada o marco inicial da filosofia moderna. Em seu texto Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos.
>
> A Geometria Analítica conhecida como é hoje pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Mas cada um deles, a seu modo, sabiam que a idéia central era associar equações a curvas e superfícies. (EVES, 1997, p. 12).

1.2 Estudo das Cônicas

De acordo com Eves (1992) o mais completo tratado sobre as cônicas foi escrito pelo matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga, por volta de 225 a.C., embora elas já tivessem sido estudadas antes dele. A obra *As cônicas*, de Apolônio foi duramente criticada por alguns sábios de sua época, que encaravam esse estudo como puro deleite do autor, sem nenhum interesse no mundo real. O tempo se incumbiu de mostrar que esses sábios estavam enganados: Em 1605, Johannes Kepler publicou *Astronomia Nova... De Motibus Stellae Martis*, onde apresentou um estudo mostrando que os planetas descrevem órbitas **elípticas** em torno do Sol; em 1632, Galileu Galilei escreveu *Dialogo di Galileo Galilei sopra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano* onde descreveu como **parabólica** a trajetória de projéteis; em 1662, Robert Boyle publica um trabalho mostrando que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de uma massa fixa de gás e a pressão exercida sobre ela é **hiperbólica**. Constatamos, ainda, a presença das cônicas em muitas outras situações do mundo real, como na construção de antenas, espelhos e lentes parabólicas ou hiperbólicas; na construção de pontes pênseis; nas trajetórias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas de astros celestes; em Economia, no estudo da curva parabólica de possibilidades de produção etc. Os termos elipse, parábola e hipérbole foram usados por

Apolônio por significarem, respectivamente, falta, igualdade e excesso. Essas classificações referem-se a um número, chamado excentricidade da cônica, que é menor que 1 na elipse (falta), igual a 1 na parábola (igualdade) e maior que 1 na hipérbole (excesso). Muito tempo depois, com a criação da Geometria Analítica, as cônicas passaram a ser reconhecidas a partir de suas equações.

Uma grande ferramenta para o estudo das cônicas é o uso de softwares de Geometria Dinâmica que permite-nos realizar investigações sobre propriedades geométricas que dificilmente conseguiríamos observar sem esse recurso. Aqui estudamos definições alternativas das cônicas, que facilitam técnicas do Desenho Geométrico com o auxílio do computador.

1.3 Geometria Dinâmica

Braviano (2002) explica que um novo termo vem sendo usado na área da Matemática e da Educação Matemática: Geometria Dinâmica. Ele ainda destaca que não se trata de uma nova Geometria ou uma alternativa à Geometria Euclidiana, como a geometria não euclidiana de Lobachevsky chamada de geometria hiperbólica, mas simplesmente uma exploração da ideia de movimento para descrições geométricas.

Ainda segundo Braviano (2000 apud LABORDE, 2002, p. 22) a ideia de movimento na Geometria não é recente, os geômetras gregos idealizaram vários instrumentos para descrever curvas mecanicamente definidas, Porém, o uso de movimento entre eles era evitado por uma questão de purismo lógico. O século XVII marcou uma quebra com a tradição grega, e o uso do movimento para estabelecer propriedades geométricas ou realizar construções geométricas tornou-se explícito.

Braviano (2002), no entanto, constatou que foi em meados da penúltima década do século XX que nasceu um instrumento que permite a abordagem da Geometria de modo efetivamente dinâmico usando o computador, o Cabrí-Géomètre, ele foi o primeiro de muitos que vieram para auxiliar no ensino de Geometria. Trata-se da possibilidade de fazer construções eletrônicas como aquelas com régua e compasso e outras mais. Além disso, elementos básicos podem ser manipulados através do teclado ou do mouse, deslocando-se na tela e trazendo atrelados a si os elementos construídos a partir deles, ou seja, não alterando a posição relativa entre eles, nessa mudança automática de posição está o dinamismo, cuja grande vantagem é preservar relações entre os elementos da figura. Assim, por exemplo, se uma reta r foi inicialmente construída de modo a ser a mediatriz de um segmento AB, é possível impor que, ao mudarmos a posição de um dos extremos A ou B, ela se desloque automaticamente, mantendo-se como mediatriz do novo segmento.

O importante é que essa característica permite explorar diversas instâncias de um problema em busca da verificação de uma conjectura. E isso pode ser feito desde cedo por qualquer estudante do ensino fundamental II ou do Ensino Médio.

Desde muito tempo há muito interesse em melhorar o ensino da Geometria. Em 1988, Putnoki publicou, na RPM 13, uma matéria intitulada *Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso*, de onde extraímos o seguinte texto:

> [...] Já faz um bom tempo que o Desenho Geométrico foi banido das nossas escolas de primeiro e segundo graus. Coincidentemente, de lá para cá, a Geometria, cada vez mais, vem se tornando o grande terror da Matemática, tanto para alunos quanto para professores. Com certeza, não se trata apenas de uma coincidência, mas sim, em parte, de uma consequência. (PUTNOKI, 1988, p. 13).

Braviano (2002) afirma que a escola não pode funcionar mais como um meio inibidor do desenvolvimento das noções espaciais do estudante. Com o advento do computador e sua inserção nas escolas, pode-se oferecer aos alunos a possibilidade de aprimorar seus conhecimentos geométricos usando ambientes computacionais que executem a Geometria Dinâmica. Uma das contribuições do uso da Geometria Dinâmica no ensino vem da possibilidade de aproximar o objeto teórico do objeto material expresso na tela do computador.

Como, por exemplo, a catenária que tem como equação $y = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$, com $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, que descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas à ação da gravidade. Neste caso, o desenho que seria obtido através de uma ferramenta de Geometria Dinâmica seria a da fig. 1.1.

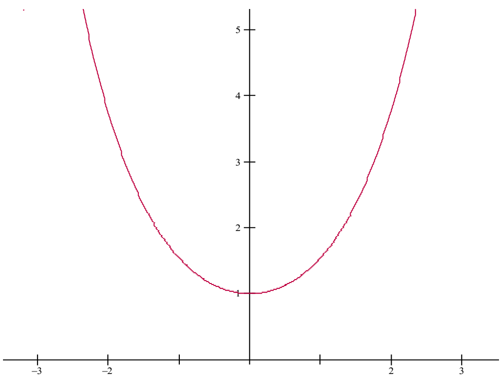


Fig. 1.1 - Catenária

Ela favorece o desenvolvimento de uma leitura geométrica do desenho para o aluno, contornando, assim, uma das dificuldades do ensino da Geometria (o desenho é, em geral, o objeto de raciocínio do aluno, enquanto o professor aborda a figura). Esses programas merecem, portanto, serem explorados e avaliados, por profissionais na área da educação.

Assim Braviano (2002) afirma que:

> [...] A Geometria Dinâmica não é uma nova Geometria, pois não se baseia em outros axiomas ou proposições nem em novas relações de espaço-forma, mas sim um termo usado para designar um modo dinâmico e interativo de trabalhar a Geometria e suas propriedades usando editores gráficos construídos para esse fim. Há que se lembrar também que qualquer desenho no computador é construído a partir de um número finito de pontos e, por menos que se perceba, a dinâmica também se dá discretamente, isto é, as várias posições, embora muito próximas, são em número finito também. A grande diferença é que essas posições são desenhadas numa grande velocidade, o que nos permite obter um número muito grande delas. . (BRAVIANO, 2002, p. 26).

CAPÍTULO II

Neste veremos como são comumente definidas as cônicas nos livros didáticos do Ensino Médio.

2.1 Figuras cônicas

Como o nome sugere, uma figura cônica é obtida a partir de um cone (fig. 2.1). Para definir esse tipo de figura, consideramos duas retas r e e concorrentes em V. A figura $\mathscr{C}$ obtida pela rotação de $360°$ de r em torno de e é chamada de **superfície cônica circular reta de duas folhas**, com vértice V, eixo de rotação e e geratrizes ilimitadas.

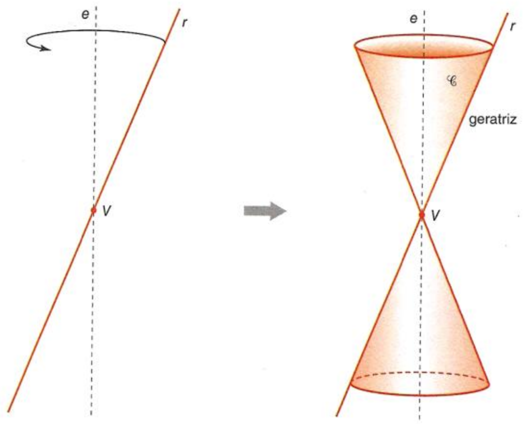
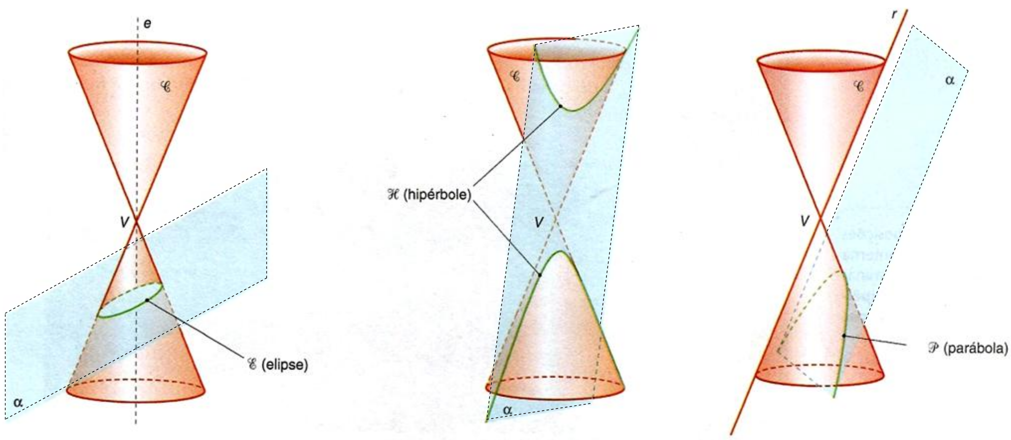


Fig. 2.1

A intersecção de um plano α qualquer com a superfície $\mathscr{C}$ é chamada de figura cônica. Essa figura pode ser um ponto, uma reta, um par de retas, uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Neste trabalho, veremos essas três últimas figuras, mostradas na fig. 2.2.



Elipse: α não passa pelo vértice V e intercepta todas as geratrizes de $\mathscr{C}$ obliquamente ao eixo de rotação e.

Hipérbole: α não passa pelo vértice V e intercepta as duas folhas de $\mathscr{C}$.

Parábola: α é paralelo a uma geratriz de $\mathscr{C}$.

Fig. 2.2

2.2 Elipse

2.2.1 Definição: *A elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior 2a é o lugar geométrico dos pontos P cuja soma das distâncias aos focos é constante e igual a 2a.*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

2.2.2 Elementos de uma elipse

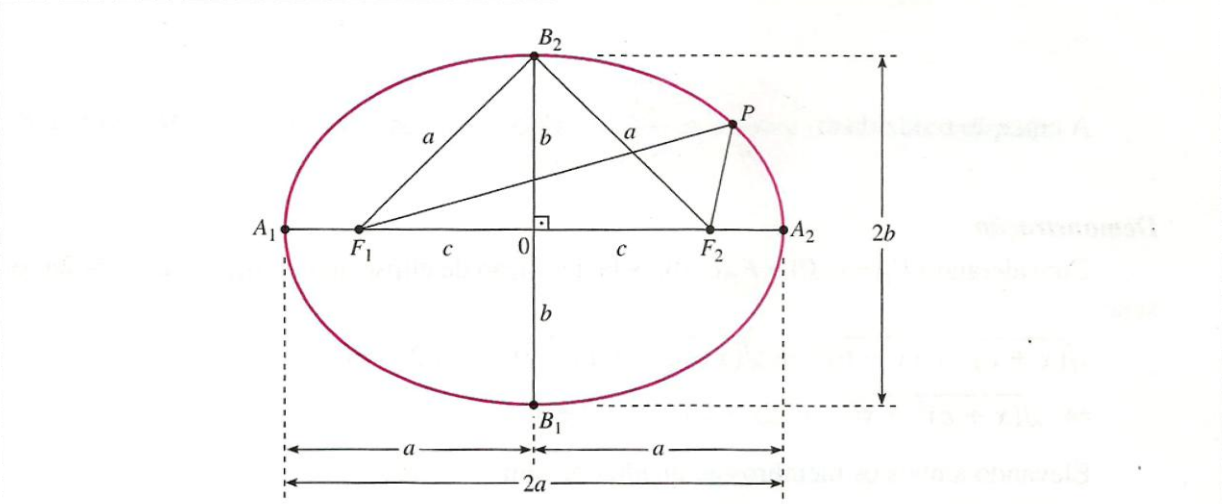


Fig. 2.3 - Elipse

- **Focos** são os pontos F_1 e F_2.
- **Vértices** são os pontos $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$.
- **Eixo maior** é o segmento $\overline{A_1A_2}$ e mede $2a$.
- **Eixo menor** é o segmento $\overline{B_1B_2}$ mede $2b$.
- **Distancia focal** é a razão entre os focos F_1 e F_2, ou seja, $2c$.
- **Excentricidade** é razão $e = \frac{c}{a}$ em que $0 < e < 1$. Quanto menor a excentricidade da elipse, mais arredondada será, ou seja, seu formato será mais próximo de uma circunferência.

2.2.3 Relação fundamental

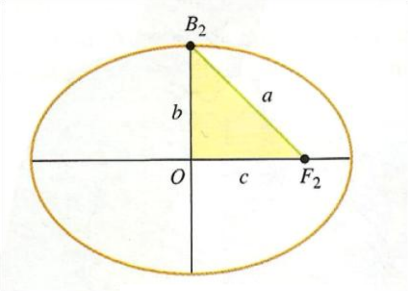


Fig. 2.4

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo B_2OF_2, obtemos a relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2.2.4 Equação reduzida de uma elipse

Traçando uma elipse no plano cartesiano centrada na origem, podemos ter dois casos.

Primeiro caso: Elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo das abscissas.

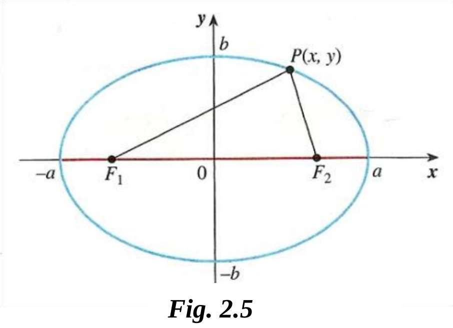


Fig. 2.5

A equação reduzida é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demonstração

Considerando $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$, pela definição de elipse, temos

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Ou seja:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + (y)^2 = 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} + \left(\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 4a^2 - 2cx - 2cx$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 4(a^2 - cx)$$

$$\Longrightarrow \quad a\sqrt{(x-c)^2+(y)^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado, temos:

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+(y)^2}\right)^2 = \left(a^2 - cx\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad a^2[(x-c)^2+(y)^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Longrightarrow \quad a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Longrightarrow \quad a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Longrightarrow \quad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\Longrightarrow \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Pela relação fundamental temos que $a^2 - c^2 = b^2$. Daí resulta que:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2, temos:

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Segundo caso: Elipse centrada na origem e eixo maior.

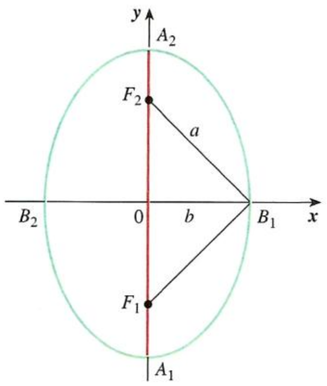


Fig. 2.6

A equação reduzida é:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

A demonstração é análoga a anterior

2.2.5 Outras formas da equação da elipse

Traçando uma elipse no plano cartesiano centrada em um ponto $O'(x_0, y_0)$, podemos ter dois casos.

Primeiro caso: Elipse centrada em um ponto $O'(x_0, y_0)$ e com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas.

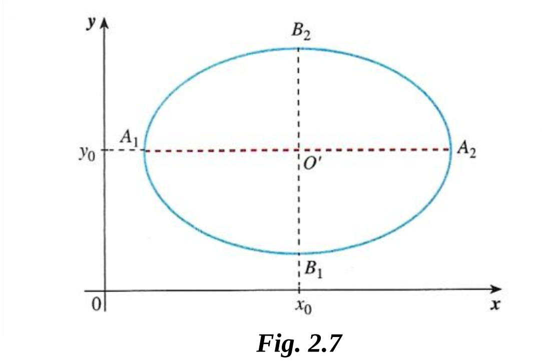


Fig. 2.7

A equação é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Segundo caso: Elipse centrada em um ponto $O'(x_0, y_0)$ e com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas.

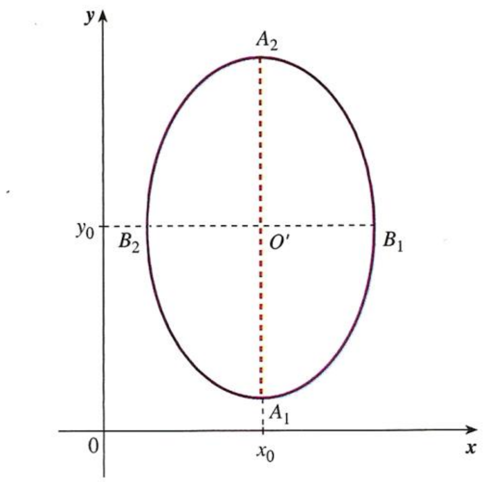


Fig. 2.8

A equação é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

2.3 Hipérbole

2.3.1 Definição: *A hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo transverso igual a $2a$ é o lugar geométrico dos pontos P cuja diferença das distâncias aos focos tem diferença (em módulo) constante e igual a $2a$.*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

2.3.2 Elementos de uma hipérbole

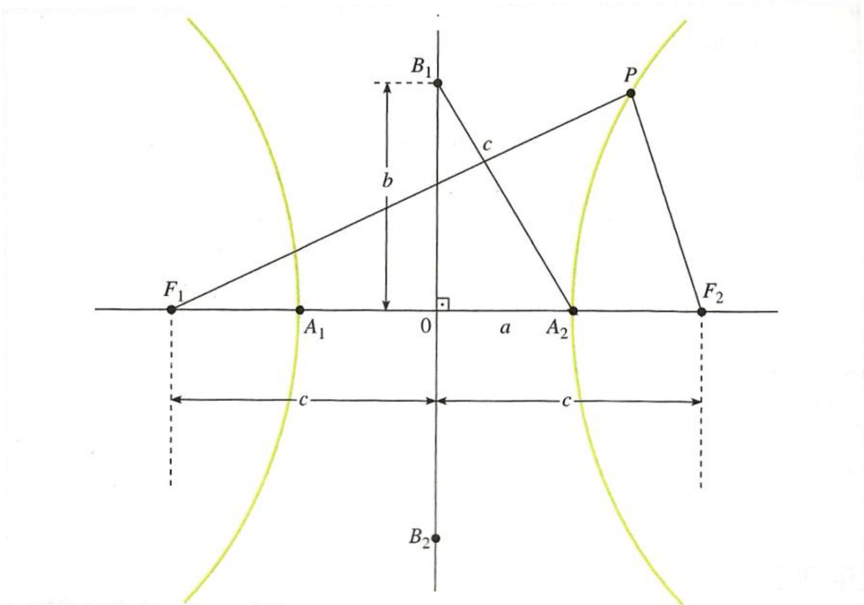


Fig. 2.9 - Hipérbole

- **Focos** são os pontos F_1 e F_2.
- **Eixo real** é o segmento $\overline{A_1A_2}$ e mede $2a$.
- **Eixo imaginário** é o seguimento $\overline{B_1B_2}$ e mede $2b$.
- **Distância focal** é a distancia entre os focos F_1 e F_2, ou seja, $2c$.
- **Excentricidade** é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $e > 1$, pois $c > a$.

2.3.3 Relação fundamental

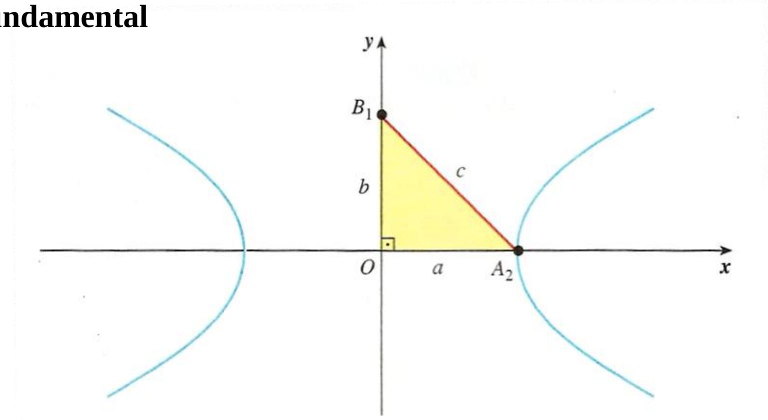


Fig. 2.10

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OB_1A_2, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2.3.4 Equação reduzida de uma hipérbole

Traçando uma hipérbole no plano cartesiano centrada na origem, podemos ter dois casos.

Primeiro caso: Hipérbole com eixo real sobre o eixo Ox e centro na origem.

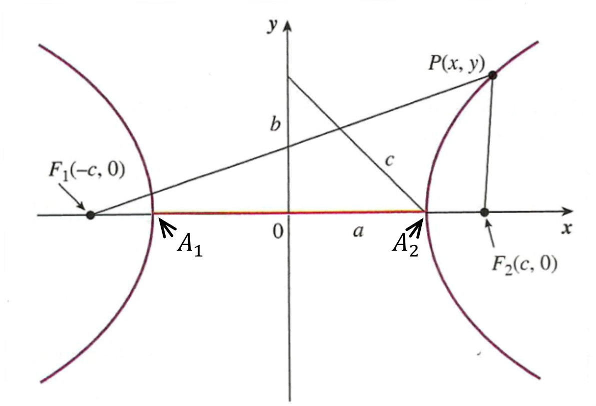
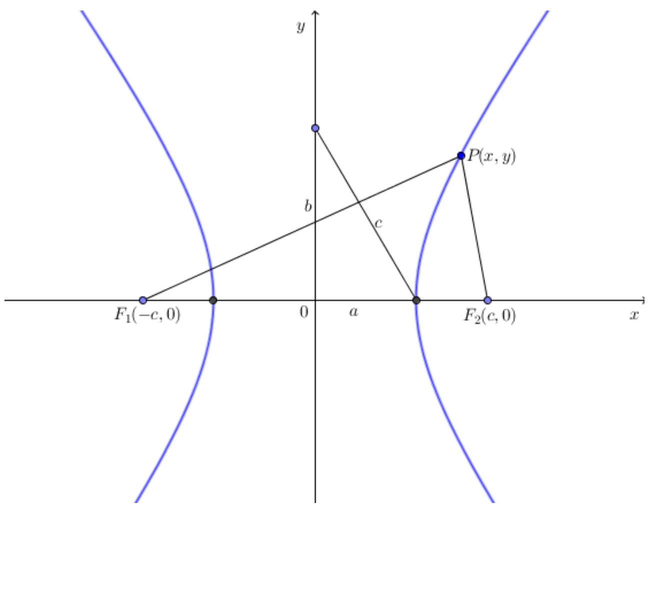


Fig. 2.11

A equação reduzida é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demonstração



Para que um ponto genérico $P(x, y)$ pertença à curva, deve satisfazer a definição, ou seja:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Então, devemos ter:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \pm 2a$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$\Longrightarrow \quad \left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad (x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\Longrightarrow \quad 2cx + 2cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$\Longrightarrow \quad 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$\Longrightarrow \quad 4(cx - a^2) = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$\Longrightarrow \quad (cx - a^2) = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevando essa expressão ao quadrado, vem:

$$(cx - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x - c)^2 + y^2]$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$$

$$\Longrightarrow \quad c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Longrightarrow \quad c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\Longrightarrow \quad x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Pela relação fundamental temos que $c^2 = a^2 + b^2$, ou seja, $b^2 = c^2 - a^2$. Daí resulta que:

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo a ultima igualdade por a^2b^2, vem:

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Segundo caso: Hipérbole com o eixo real sobre o eixo Oy e centro na origem.

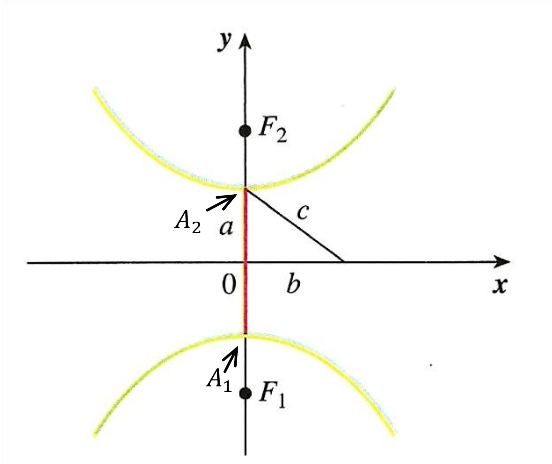


Fig. 2.12

A equação reduzida é:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

A demonstração é análoga a anterior

2.3.4 Outras formas da equação da hipérbole

Traçando uma hipérbole no plano cartesiano centrada em um ponto $M(x_0, y_0)$, podemos ter dois casos.

Primeiro caso: Hipérbole com o eixo real paralelo ao eixo Ox e centro no ponto $M(x_0, y_0)$.

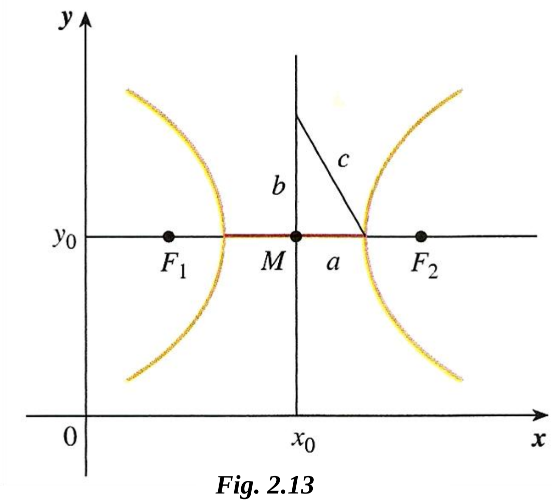


Fig. 2.13

A equação é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Segundo caso: Hipérbole com o eixo real paralelo ao eixo Oy e centro no ponto $M(x_0, y_0)$.

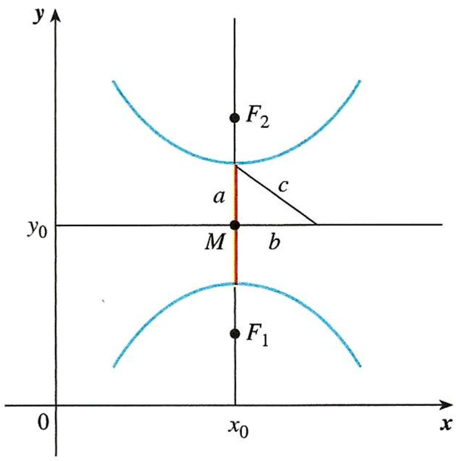


Fig. 2.14

A equação é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

2.4 Parábola

2.4.1 Definição: *A parábola de foco F e reta diretriz d é o lugar dos pontos P equidistantes do foco e da diretriz d.*

$$d(P, d) = d(P, F)$$

2.4.2 Elementos de uma parábola

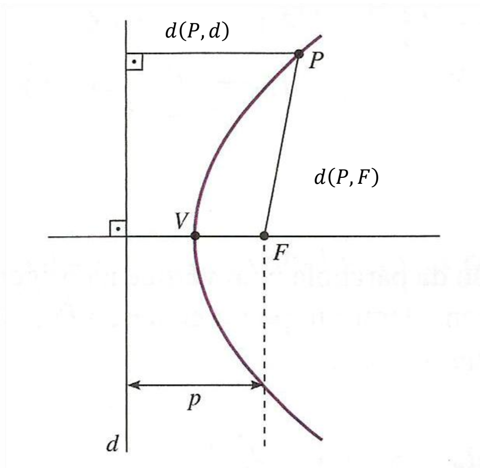


Fig. 2.15 - Parábola

- F é o **foco**.
- V é o **vértice**.
- d é a **diretriz** (reta).
- p é o **parâmetro** da parábola.
- $\overleftrightarrow{VF}$ é o eixo de simetria e $d_{VF} = \frac{p}{2}$.

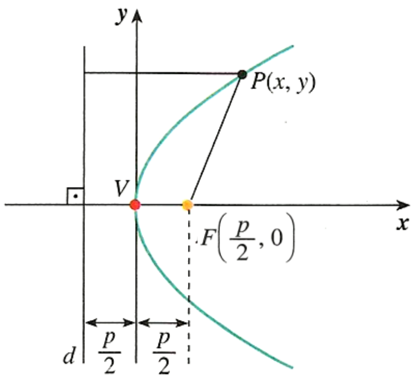
2.4.3 Equação reduzida de uma parábola

Traçando uma parábola no plano cartesiano com vértice na origem, podemos ter dois casos.

Primeiro caso: Parábola com vértice na origem e foco no eixo das abscissas.

A equação reduzida é:

$y^2 = 2px$, se F estiver à direita de V.



O vértice é $V(0, 0)$.

O foco é $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

A reta diretriz é:

$d: x = -\frac{p}{2}$

Fig. 2.16

Demonstração

Para demonstrar a equação da parábola com vértice na origem e o foco no eixo das abscissas à direita de V, temos que considerar um ponto genérico $P(x, y)$.

Então, devemos ter:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

Elevando essa igualdade ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}$$

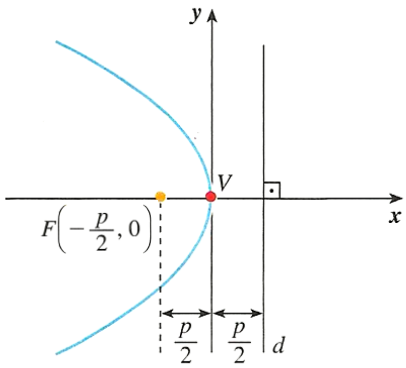
$$\Rightarrow \quad y^2 = 2x\frac{p}{2} + 2x\frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = px + px$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 2px \qquad \blacksquare$$

A equação reduzida é:

$y^2 = -2px$, se F estiver à esquerda de V.



O vértice é $V(0, 0)$.

O foco é $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$

A reta diretriz é:

$d: x = \frac{p}{2}$

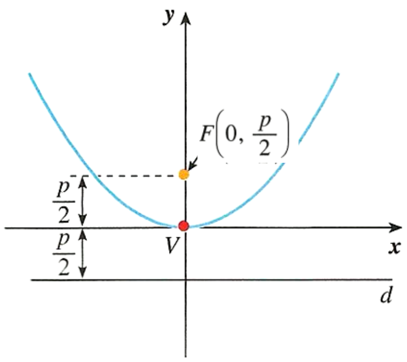
Fig. 2.17

A demonstração é análoga a anterior

Segundo caso: Parábola com vértice na origem e foco no eixo das ordenadas.

A equação reduzida é:

$x^2 = 2py$, se F estiver acima de V.



O vértice é $V(0, 0)$.

O foco é $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

A reta diretriz é:

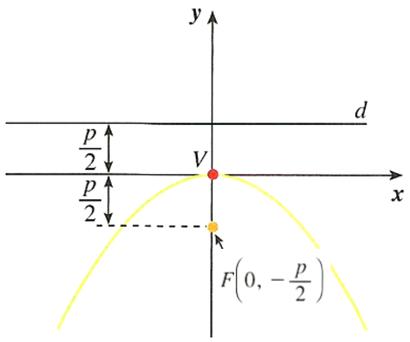
$d: y = -\frac{p}{2}$

Fig. 2.18

A demonstração é análoga a anterior

A equação reduzida é:

$x^2 = -2py$, se F estiver abaixo de V.



O vértice é $V(0, 0)$.

O foco é $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$

A reta diretriz é:

$d: y = \frac{p}{2}$

Fig. 2.19

A demonstração é análoga a anterior

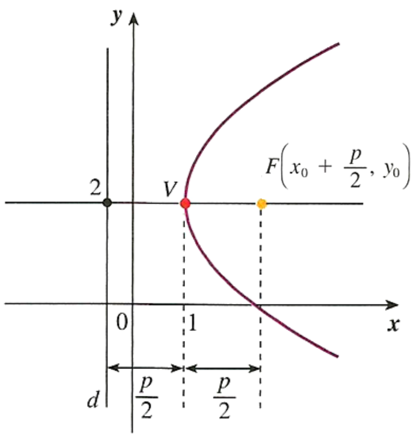
2.3.4 Outras formas da equação da parábola

Traçando uma parábola no plano cartesiano com vértice no ponto $V(x_0, y_0)$, podemos ter dois casos.

Primeiro caso: Parábola com vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas.

A equação é:

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, se F estiver à direita de V.



O vértice é $V(x_0, y_0)$

O foco é $F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$

A reta diretriz é:

$d: x = x_0 - \frac{p}{2}$

Fig. 2.20

A equação é:

$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, se F estiver à esquerda de V.

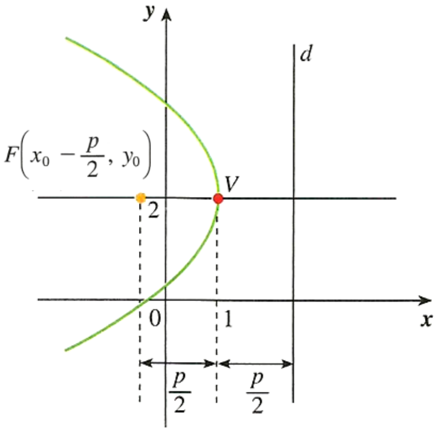


Fig. 2.21

O vértice é $V(x_0, y_0)$

O foco é $F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right)$

A reta diretriz é:

$d: x = x_0 + \frac{p}{2}$

Segundo caso: Parábola com vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas.

A equação é:

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, se F estiver acima de V.

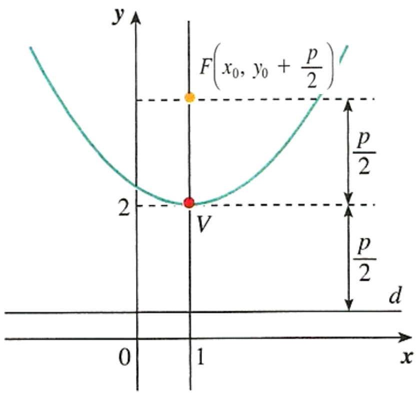


Fig. 2.22

O vértice é $V(x_0, y_0)$

O foco é $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$

A reta diretriz é:

$d: y = y_0 - \frac{p}{2}$

A equação é:

$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$, se F estiver abaixo de V.

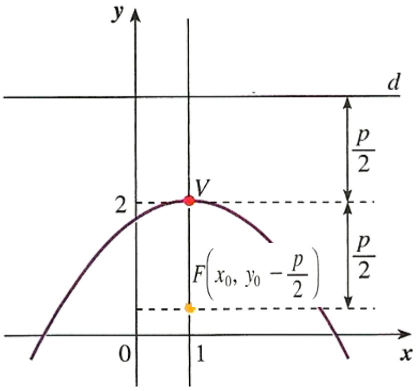


Fig. 2.23

O vértice é $V(x_0, y_0)$

O foco é $F\left(x_0,\ y_0 - \frac{p}{2}\right)$

A reta diretriz é:

$d\colon y = y_0 + \frac{p}{2}$

A demonstração é análoga a anterior

CAPÍTULO III

Neste capítulo o objetivo é utilizar definições de cônicas, equivalentes às definições comumente utilizadas, para obtenção, com régua e compasso, de pontos que possibilitam esboçar a elipse, a hipérbole e a parábola, utilizando o GeoGebra.

Para isso, utilizaremos o GeoGebra que pode ser baixado no site https://www.geogebra.org/.

Ao iniciar o programa já instalado abrirá uma janela conforme a fig. 3.1:

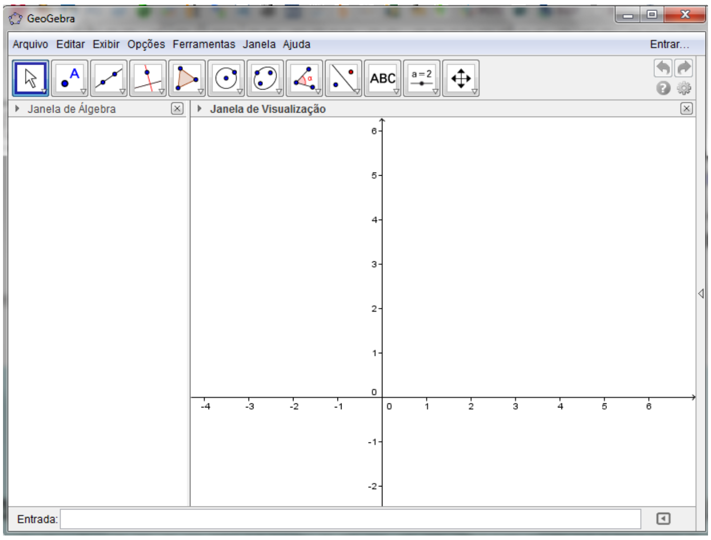


Fig. 3.1

Para uma melhor visualização do processo construtivo será fechada a Janela de Álgebra e serão ocultados os eixos coordenados, para isso, clicando com o botão direito do mouse sobre um dos eixos e selecionando a opção Eixo, como mostra fig. 3.2:

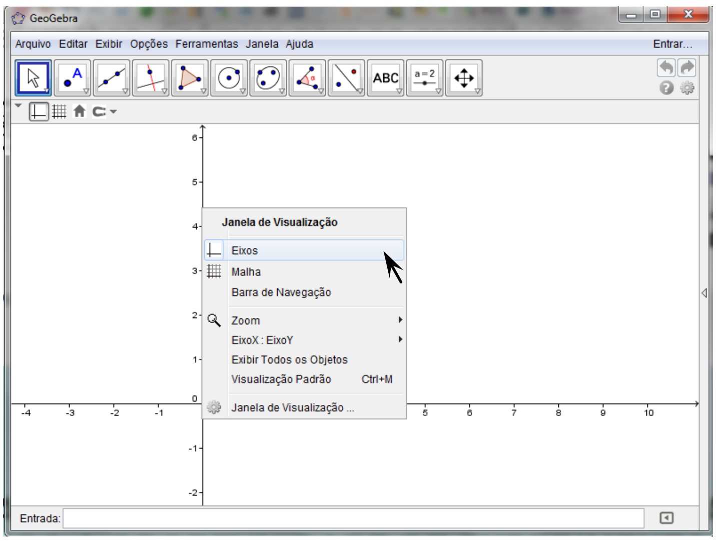


Fig. 3.2

A partir de agora, supomos todas as curvas consideradas contidas em um plano.

3.1 Elipse

A definição usual é: *A elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior 2a é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias aos focos é constante e igual a 2a.*

Essa definição exige que a distância de F_1 a F_2 seja menor do que 2a, de modo que F_2 é interno à circunferência de centro F_1 e raio 2a, que denotaremos $C(F_1, 2a)$. Essa circunferência é chamada circunferência diretora da elipse (a outra seria $C(F_2, 2a)$). Se T for um ponto arbitrário de $C(F_1, 2a)$, então a reta F_1T corta a mediatriz de $\overline{F_2T}$ em um ponto P tal que

$$PF_1 + PF_2 = F_1P + PT = F_1T = 2a$$

o que mostra que P é um ponto da elipse. Como os pontos F_1, P e T são colineares, $C(P, PF_2)$ é tangente a $C(F_1, 2a)$ em T.

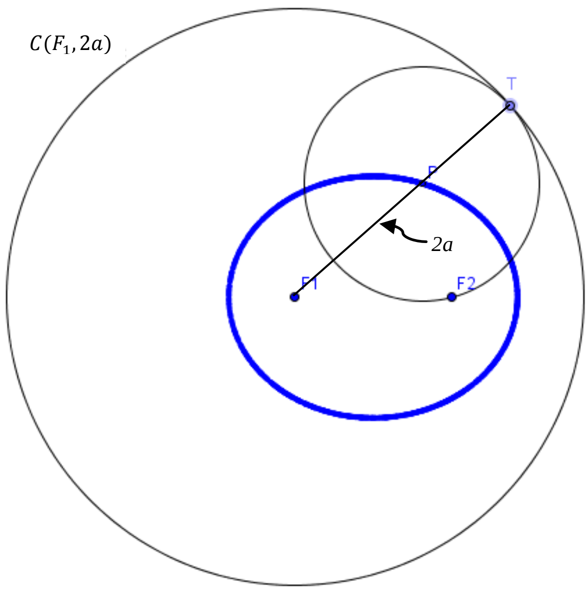


Fig. 3.3 - Elipse

Essa construção pode ser revertida, de forma que chegamos a uma outra definição de elipse, equivalente à usual: A elipse de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos centros das circunferências que contém F_2 e tangenciam $C(F_1, 2a)$, sendo $2a > F_1F_2$.

Essa definição, embora quase nunca usada, presta-se melhor à construção no Geogebra.

3.1.1 Roteiro para construção da elipse no GeoGebra, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2a$.

1. Crie a circunferência C de centro F_1 e raio $2a$, ou seja $C(F_1, 2a)$.

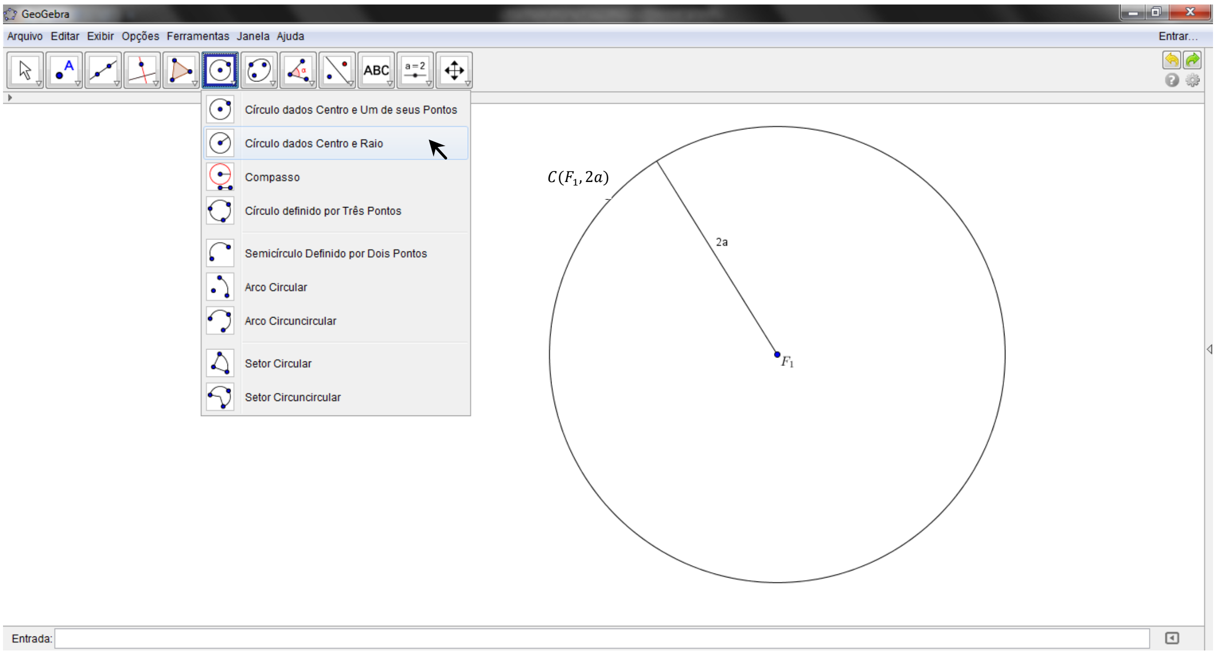


Fig. 3.4

2. Marque um ponto T qualquer na $C(F_1, 2a)$.

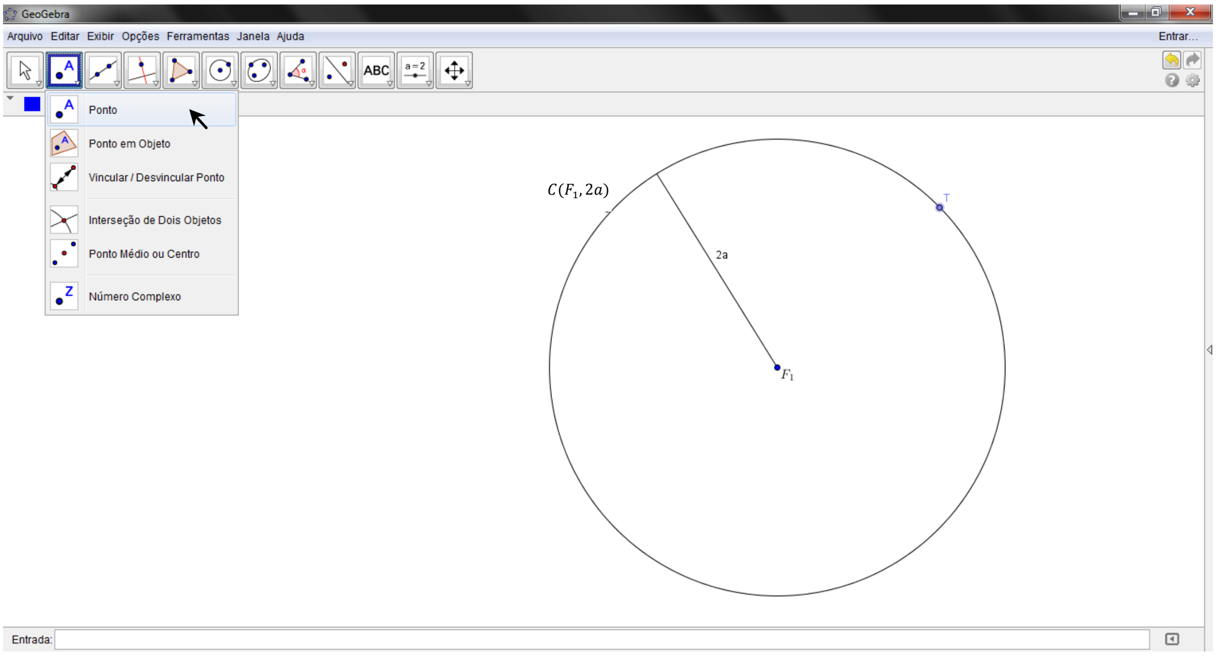


Fig. 3.5

3. Trace a reta que passa por T e por F_1.

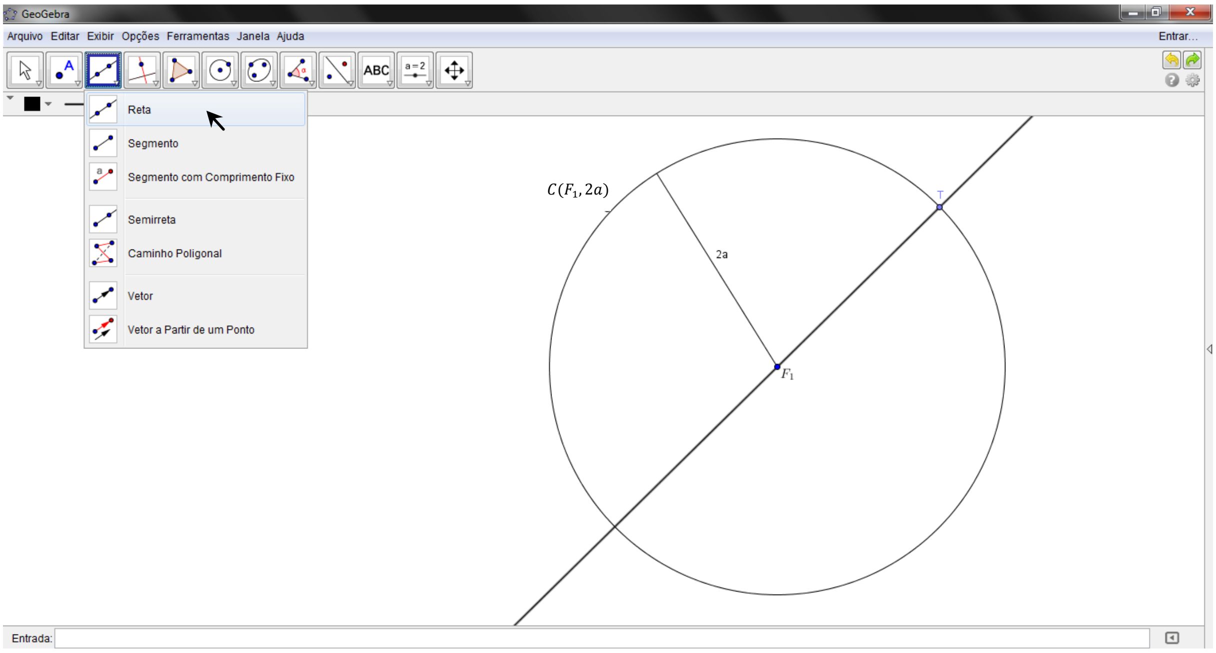


Fig. 3.6

4. Construa o ponto F_2 interno a circunferência $C(F_1, 2a)$.

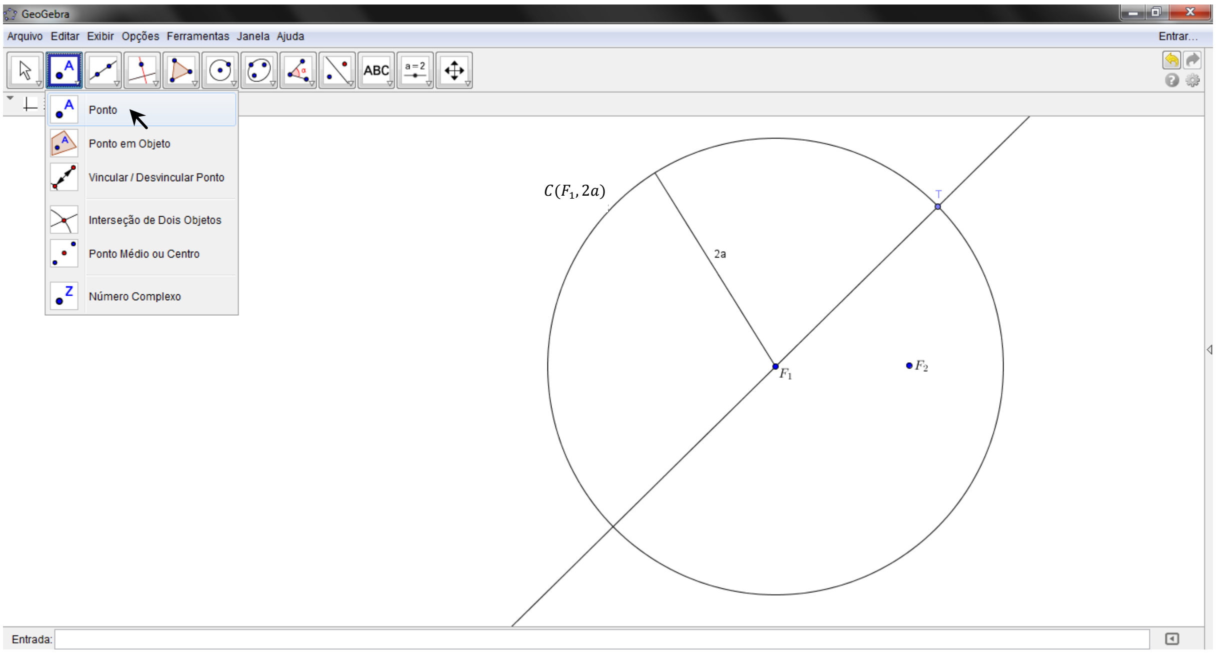


Fig. 3.7

5. Trace a mediatriz do seguimento $\overline{TF_2}$.

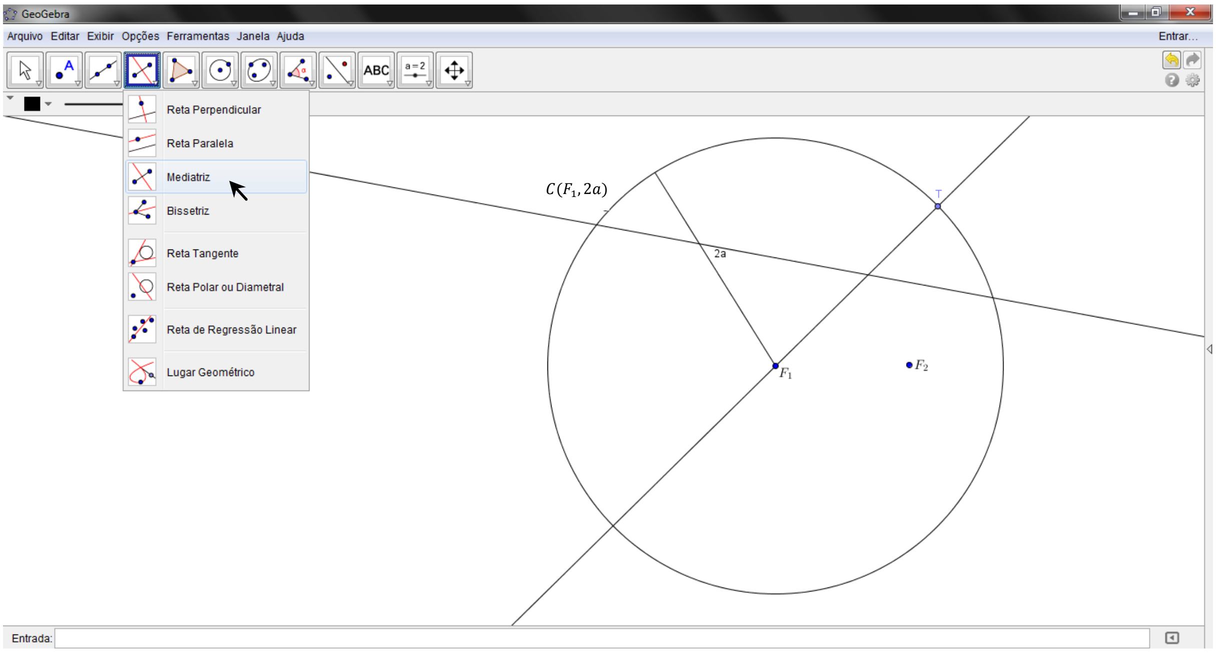


Fig. 3.8

6. A intersecção das retas obtidas em (4) e (5) fornece um ponto P da elipse.

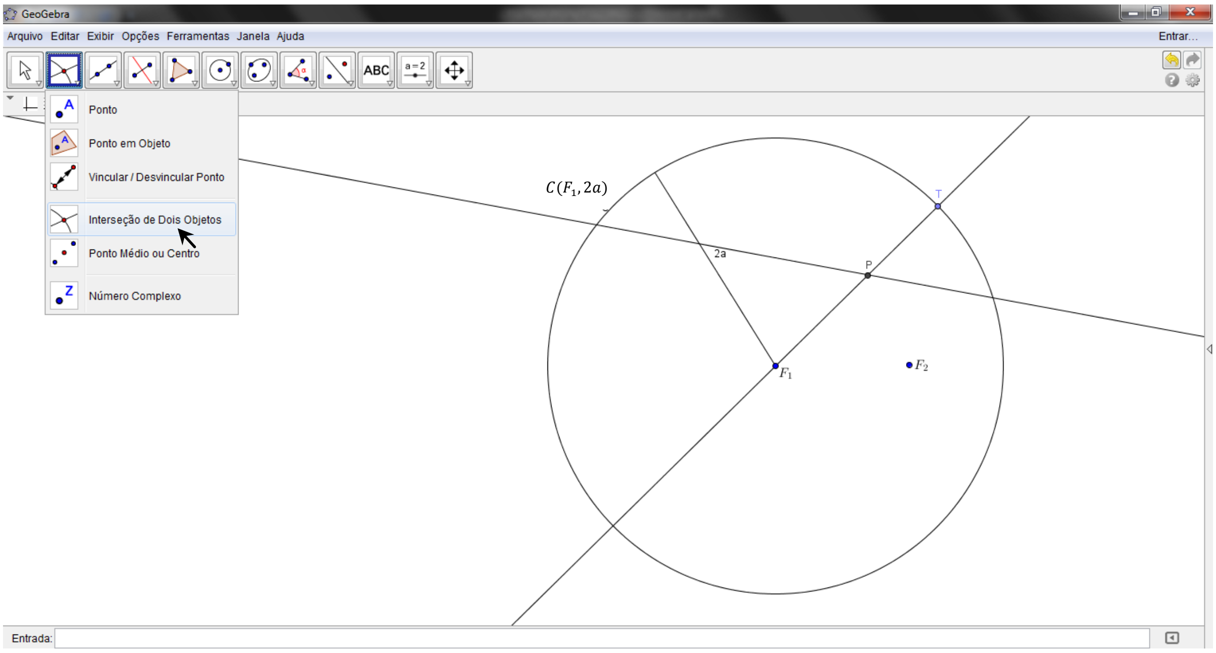


Fig. 3.9

7. Clique no ponto P com o botão direito do mouse e ative a opção “habilitar rastro”.

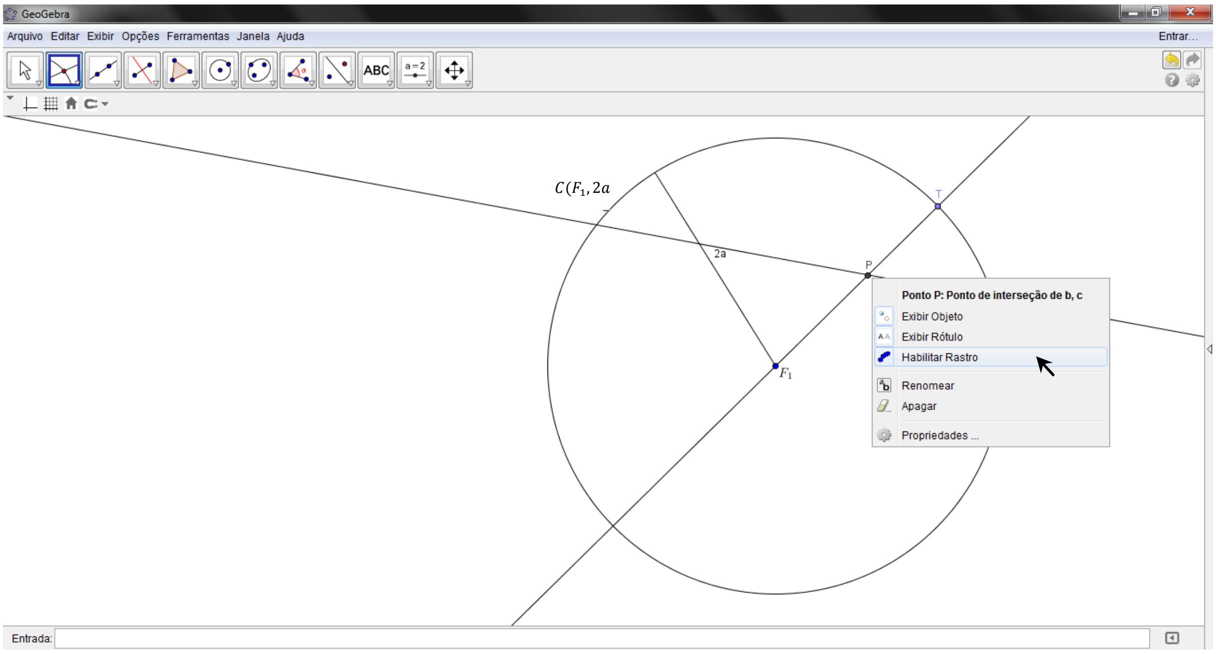


Fig. 3.10

8. Movimente o ponto T e observe o ponto P descrever uma elipse.

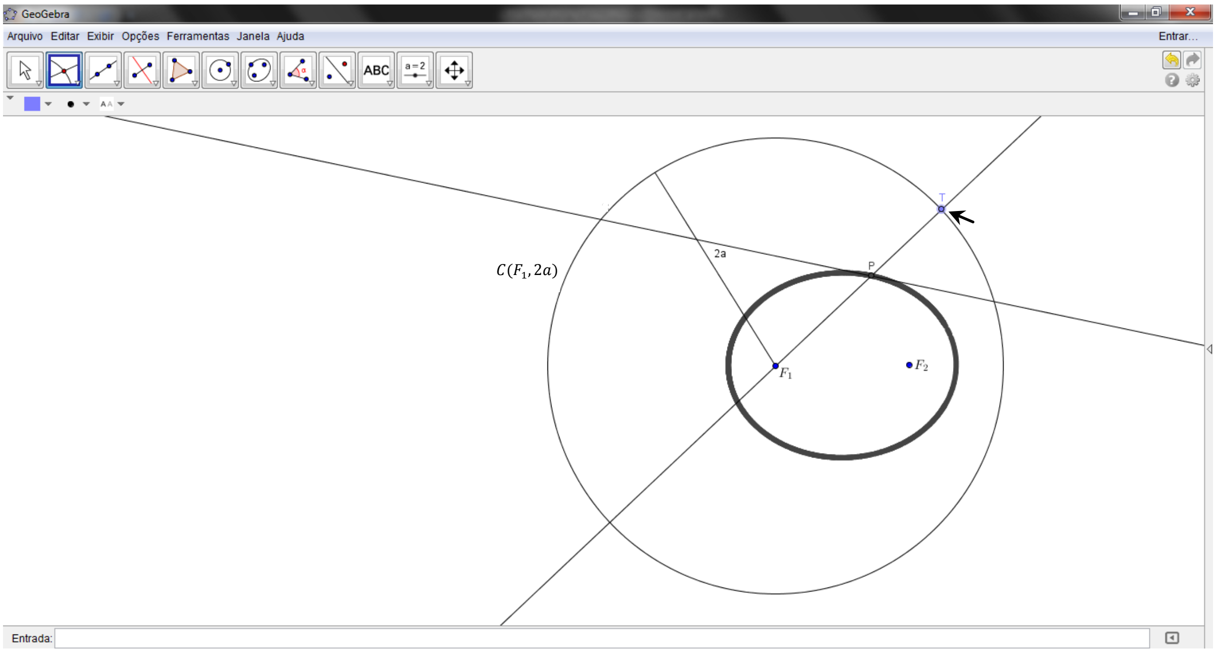


Fig. 3.11

3.2 Hipérbole

Analogamente ao caso da elipse, a definição usual de hipérbole é: *A hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo transverso igual a $2a$ é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias aos focos tem diferença (em módulo) constante e igual a $2a$.*

Essa definição exige que a distância de F_1 e F_2 seja maior do que $2a$, de modo que F_2 é externo à $C(F_1, 2a)$, que é chamada uma circunferência diretora da hipérbole (a outra seria $C(F_2, 2a)$).

Se T for um ponto arbitrário de $C(F_1, 2a)$, então a reta F_1T corta a mediatriz de $\overline{F_2T}$ em um ponto P tal que

$$PF_1 - PF_2 = F_1P - PT = F_1T = 2a$$

(ou $PF_2 - PF_1 = PT - F_1P = F_1T = 2a$, no outro "ramo" da hipérbole), o que mostra que P é um ponto da hipérbole. Como F_1, P e T são pontos colineares, $C(P, PF_2)$ é tangente a $C(F_1, 2a)$ em T.

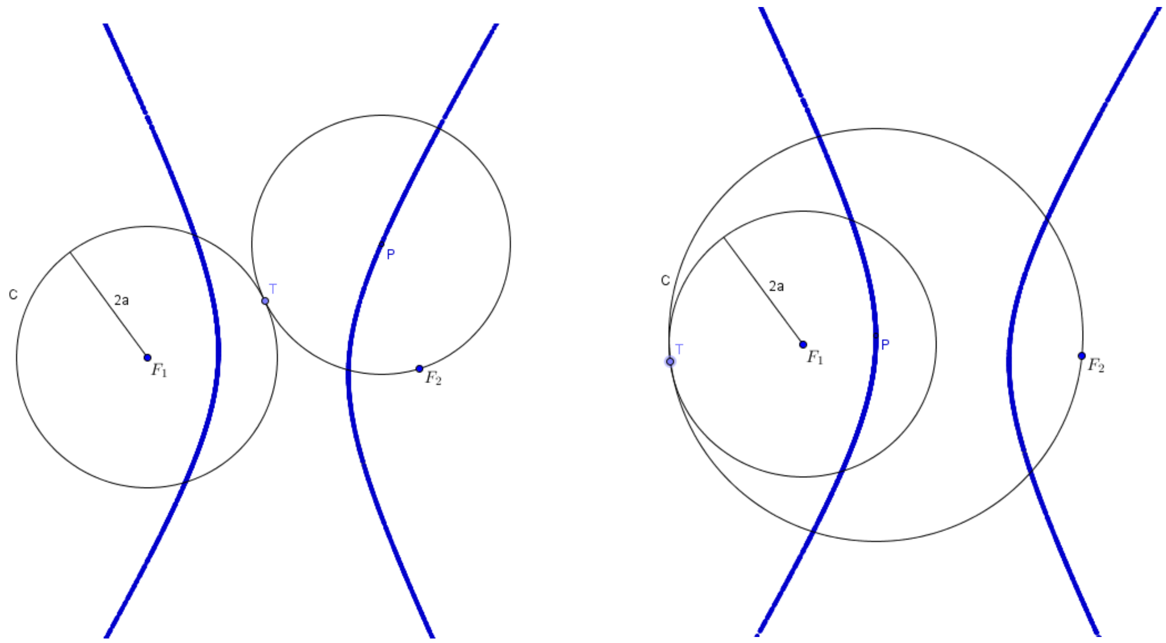


Fig. 3.12 - Hipérbole

Essa construção pode ser revertida, de forma que chegamos a uma outra definição de hipérbole, equivalente à usual: *A hipérbole de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos centros das circunferências que contêm F_2 e tangenciam $C(F_1, 2a)$, sendo $2a < F_1F_2$.*

3.2.1 Roteiro para construção da hipérbole no GeoGebra, dados os focos F_1 e F_2 e o comprimento $2a$.

1. Crie a circunferência C de centro F_1 e raio $2a$, ou seja, $C(F_1, 2a)$.

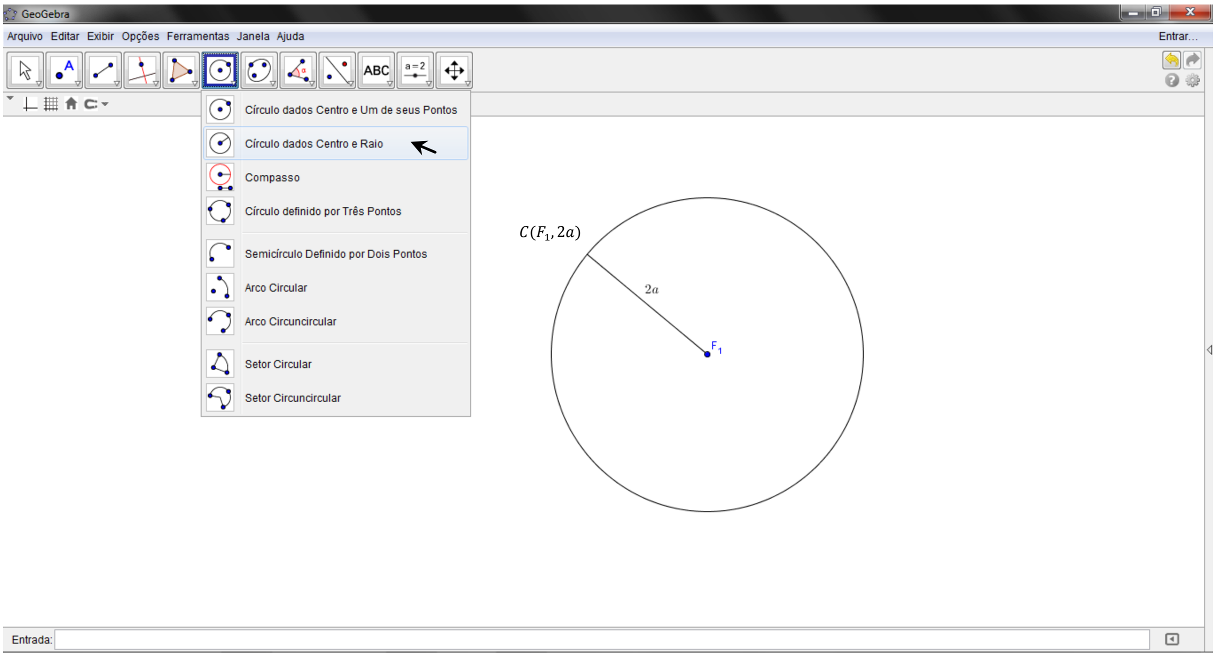


Fig. 3.13

2. Marque um ponto T qualquer na $C(F_1, 2a)$.

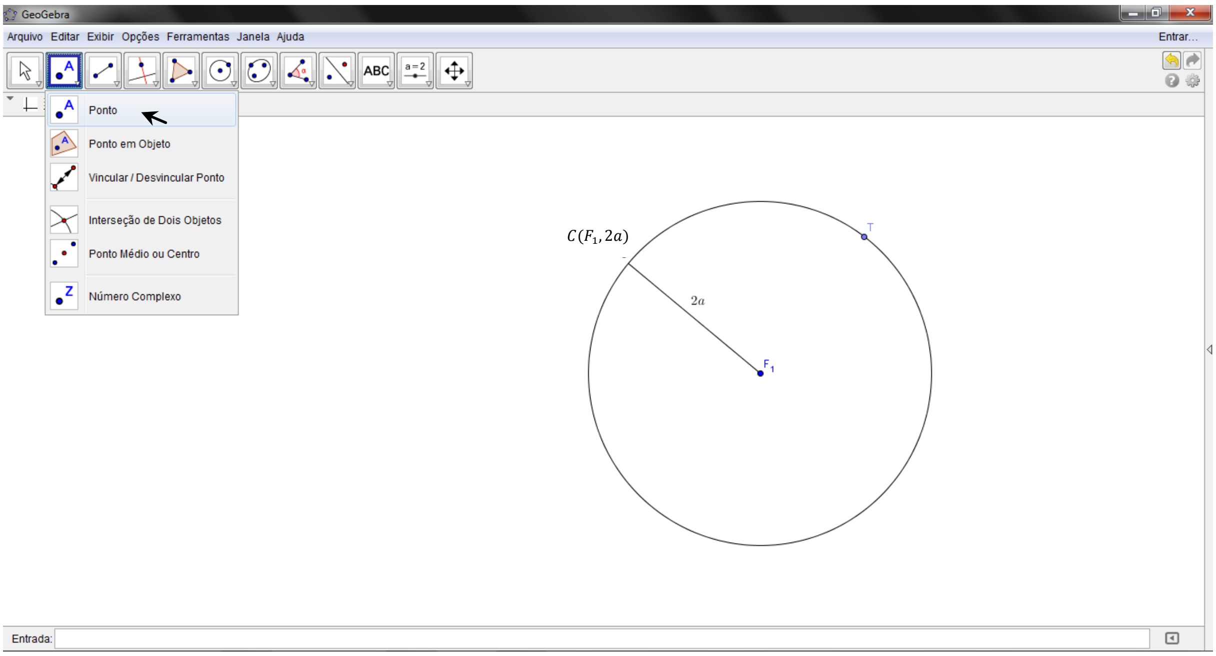


Fig. 3.14

3. Trace a reta que passa por T e por F_1.

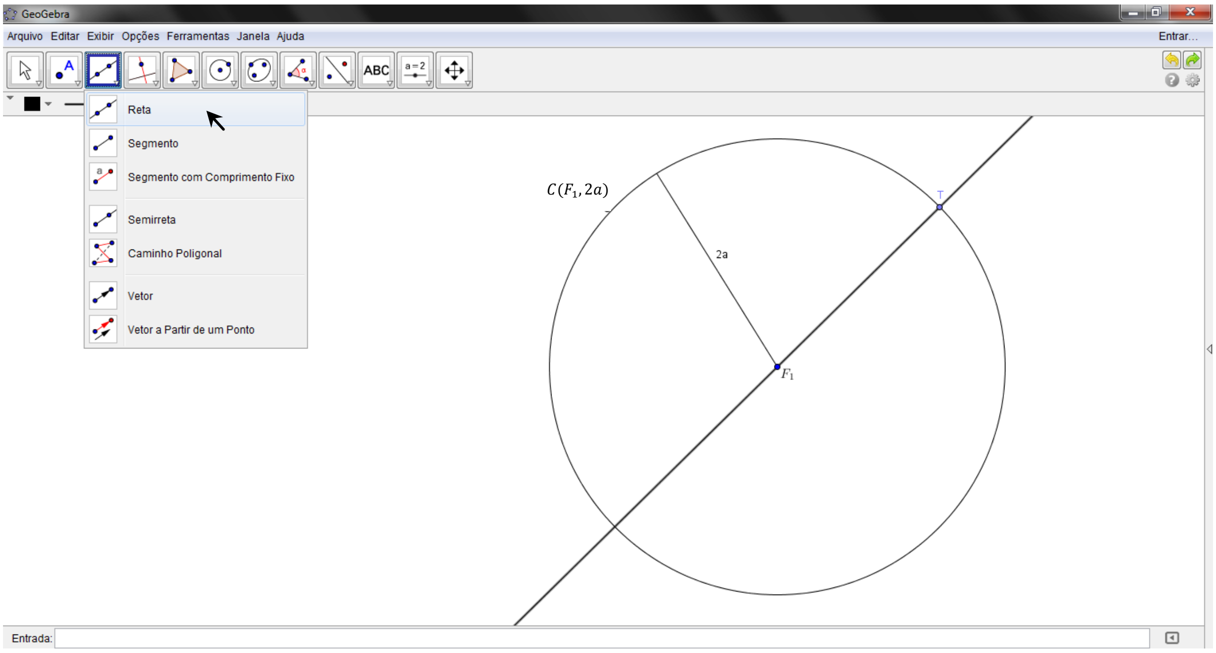


Fig. 3.15

4. Construa o ponto F_2 externo a circunferência $C(F_1, 2a)$.

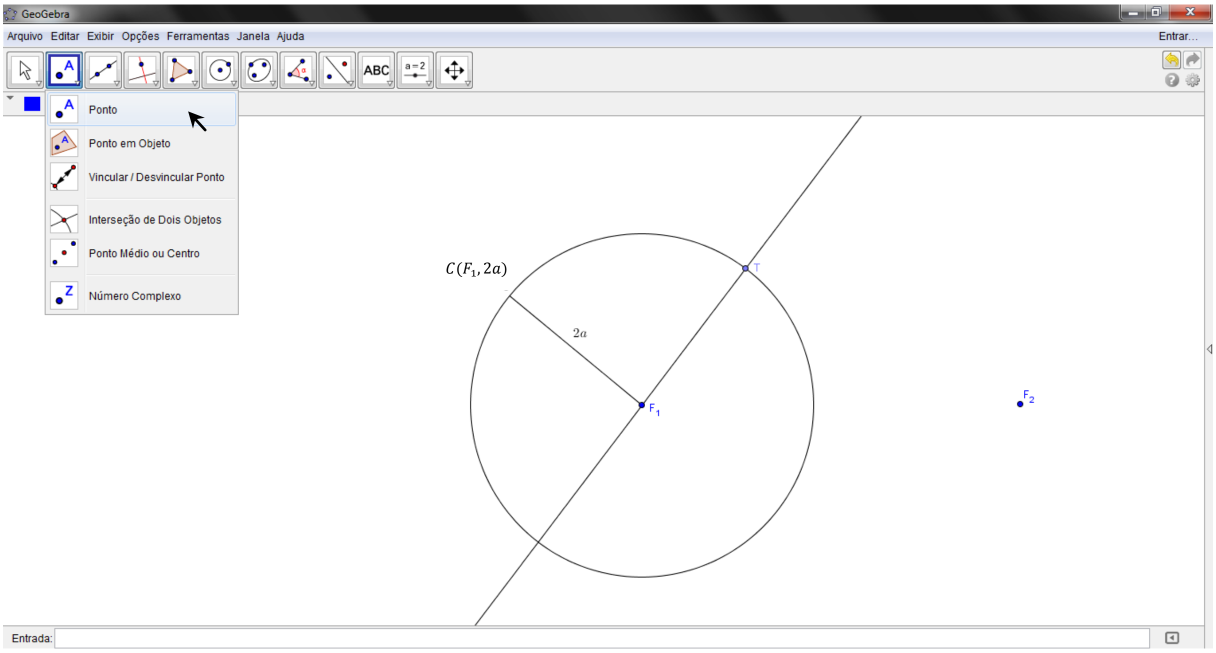


Fig. 3.16

5. Trace a mediatriz do segmento $\overline{TF_2}$ clicando no botão Mediatriz (fig.3.17) e selecionando os pontos T e F_2.

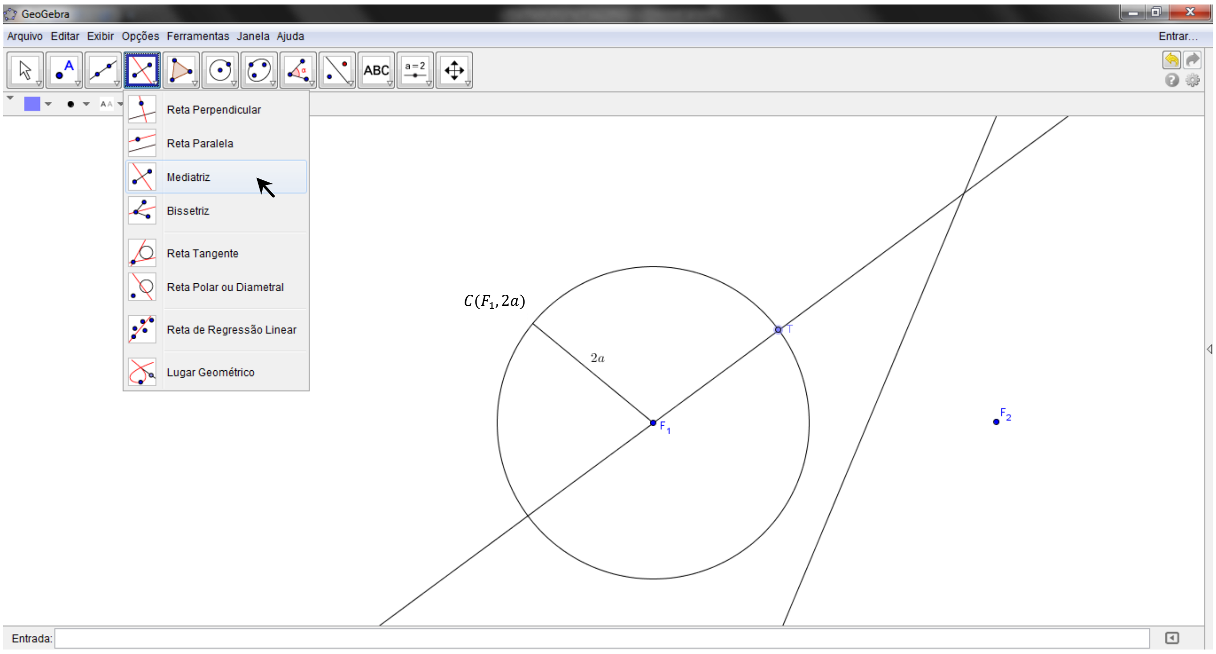


Fig. 3.17

6. A intersecção das retas obtidas em (4) e (5) fornece um ponto P da hipérbole.

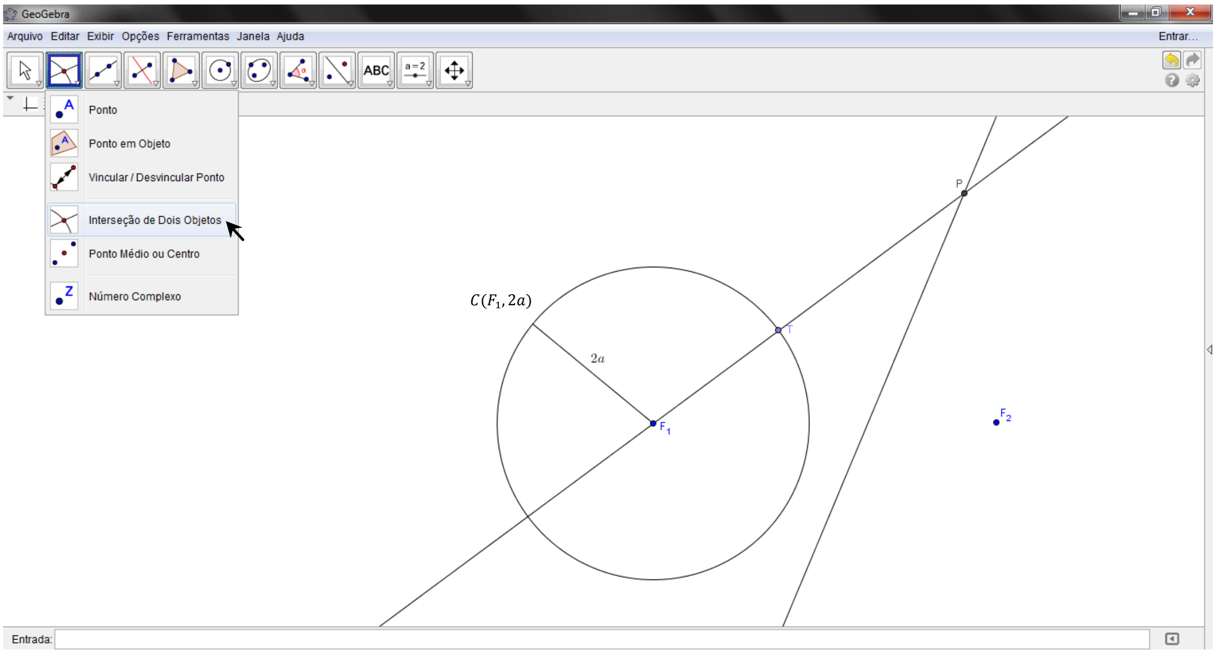


Fig. 3.18

7. Clique no ponto P com o botão direito do mouse e ative a opção "habilitar rastro".

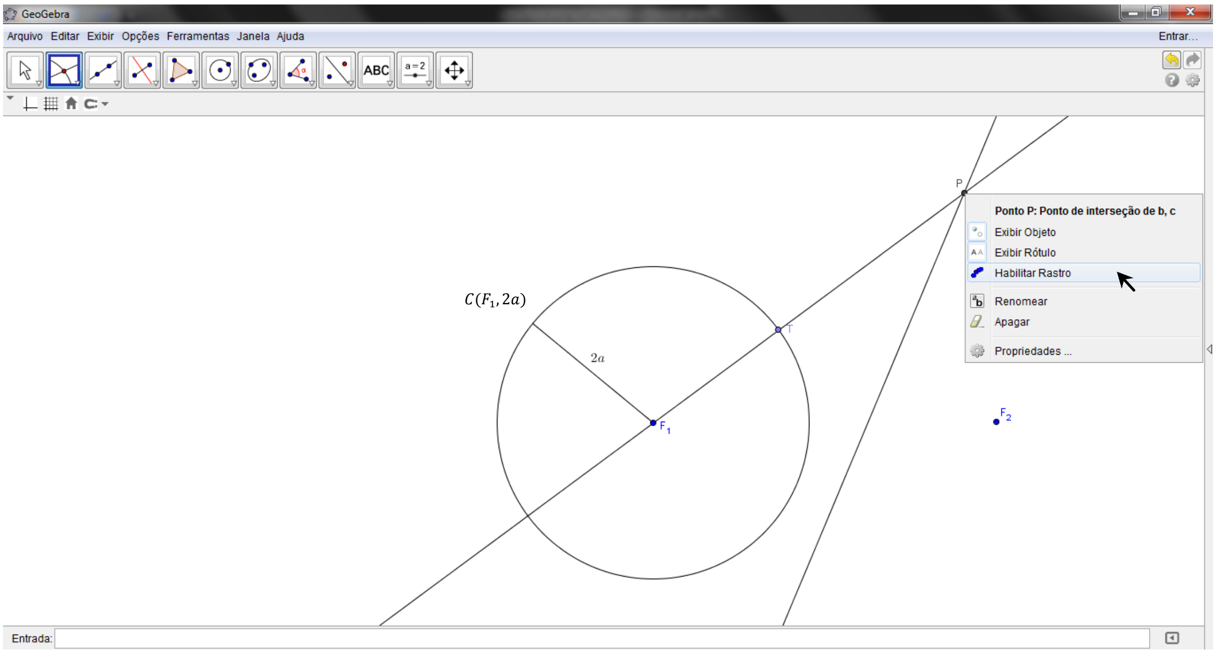


Fig. 3.19

8. Movimente o ponto T e observe o ponto P descrever uma hipérbole.

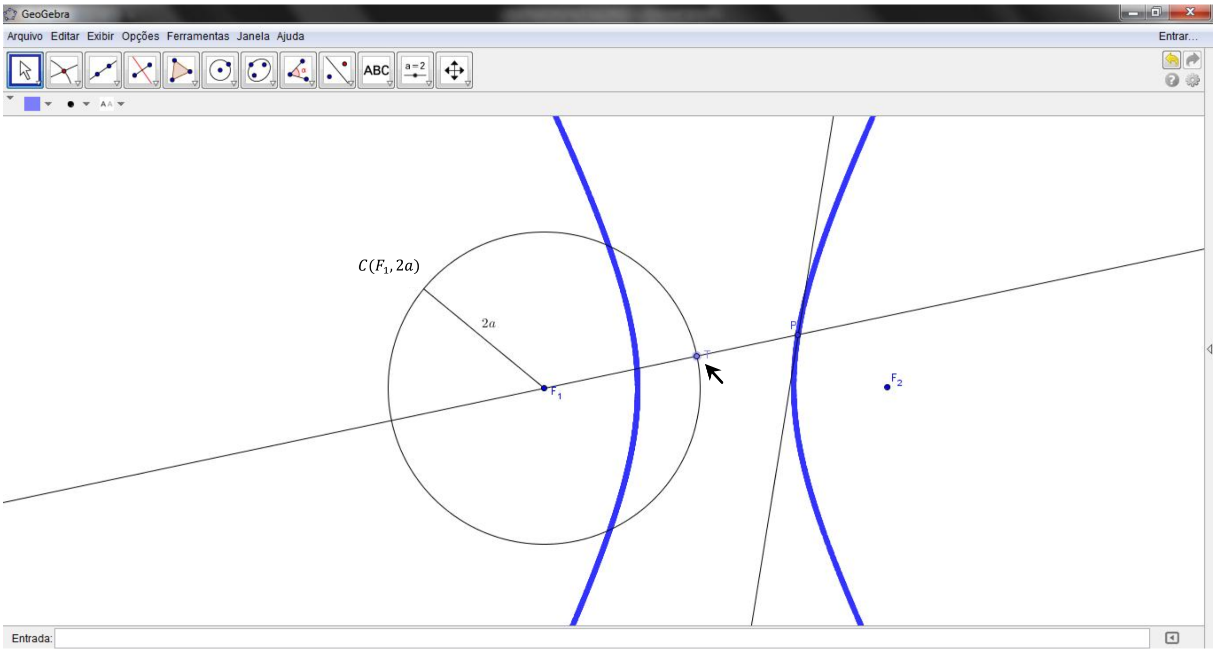


Fig. 3.20

As construções apresentadas para a elipse e a hipérbole são tão idênticas que, na Geometria Dinâmica, uma mesma construção serve para as duas, bastando para isso variar de modo conveniente o comprimento $2a$ ou a distância entre os focos.

3.3 Parábola

A definição usual de parábola é: *A parábola de foco F e reta diretriz d é o lugar dos pontos equidistantes do foco e da diretriz .*

Se P for um ponto da parábola, a perpendicular a d por P corta d em T, tal que $PT = PF$. Portanto, $C(P, PF_2)$ é tangente a d em T.

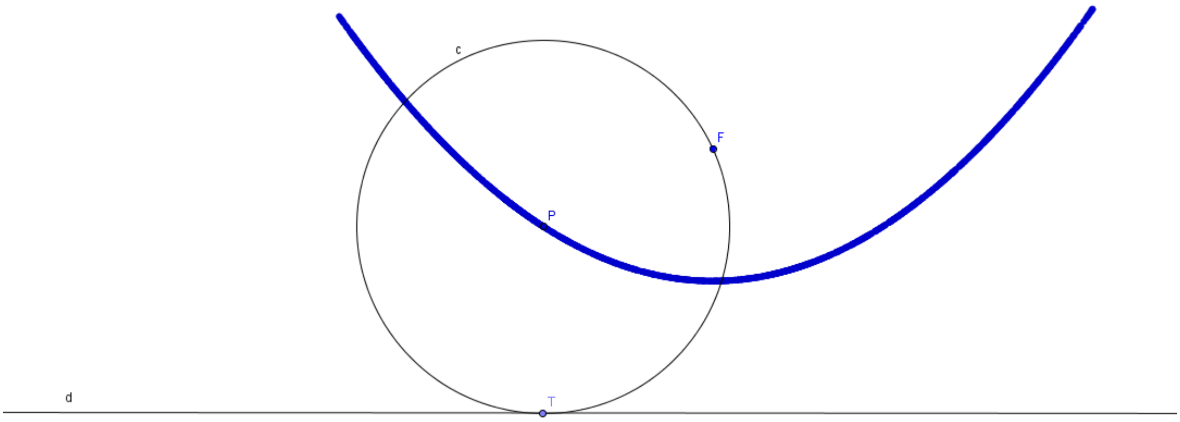


Fig. 3.21 - Parábola

Essa construção pode ser revertida, de forma que chagamos a uma outra definição de parábola, equivalente a usual: *A parábola é o lugar geométrico dos centros das circunferências que contêm o ponto F e tangenciam a reta d (com F ∉ d).*

3.3.1 Roteiro para construção da parábola no GeoGebra, dados o foco F e a diretriz d.

1. Crie uma reta d.

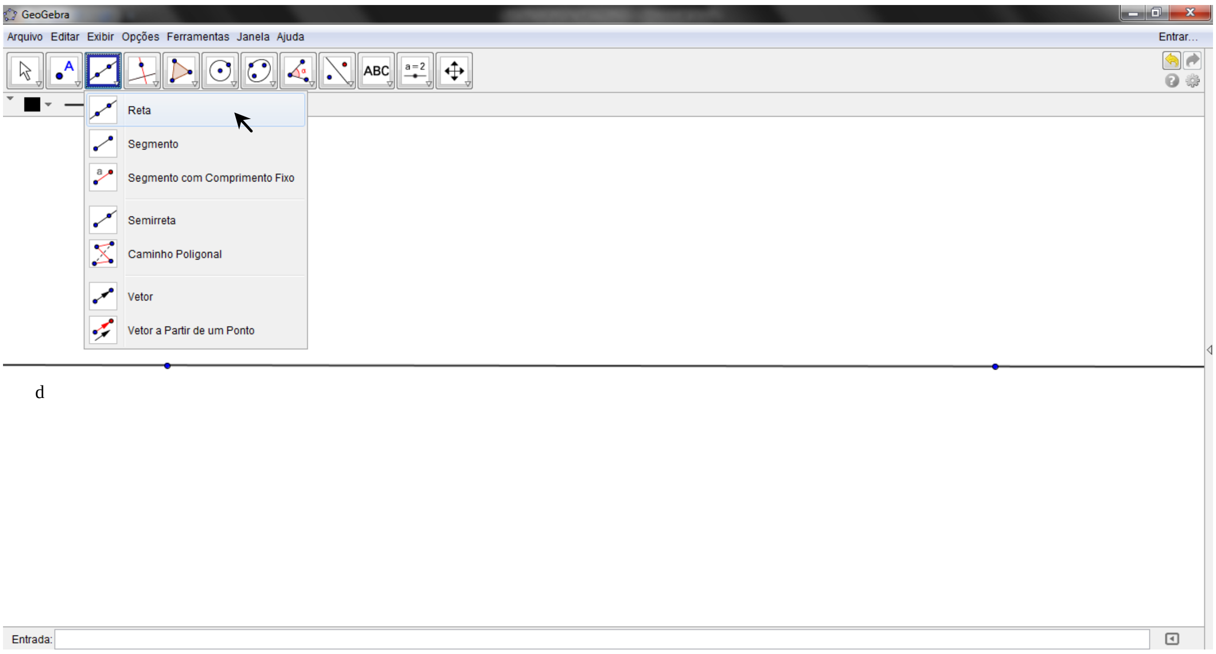


Fig. 3.22

2. Sobre a reta d crie um ponto A.

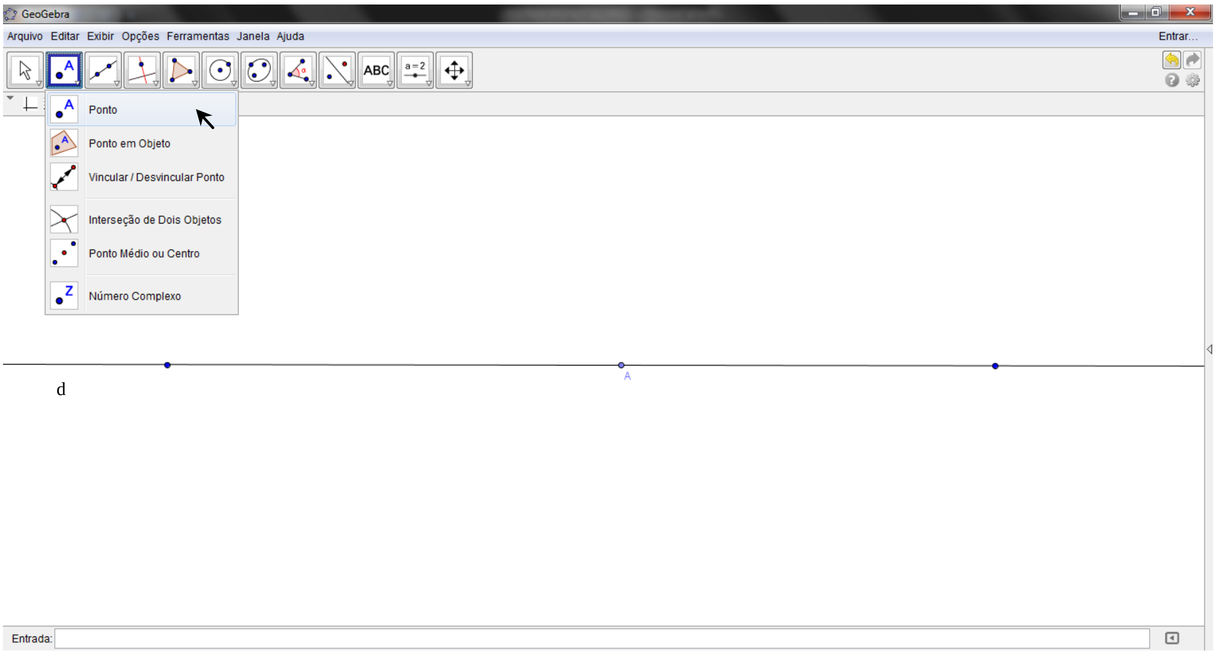


Fig. 3.23

3. Fora da reta d crie o ponto F (foco da parábola).

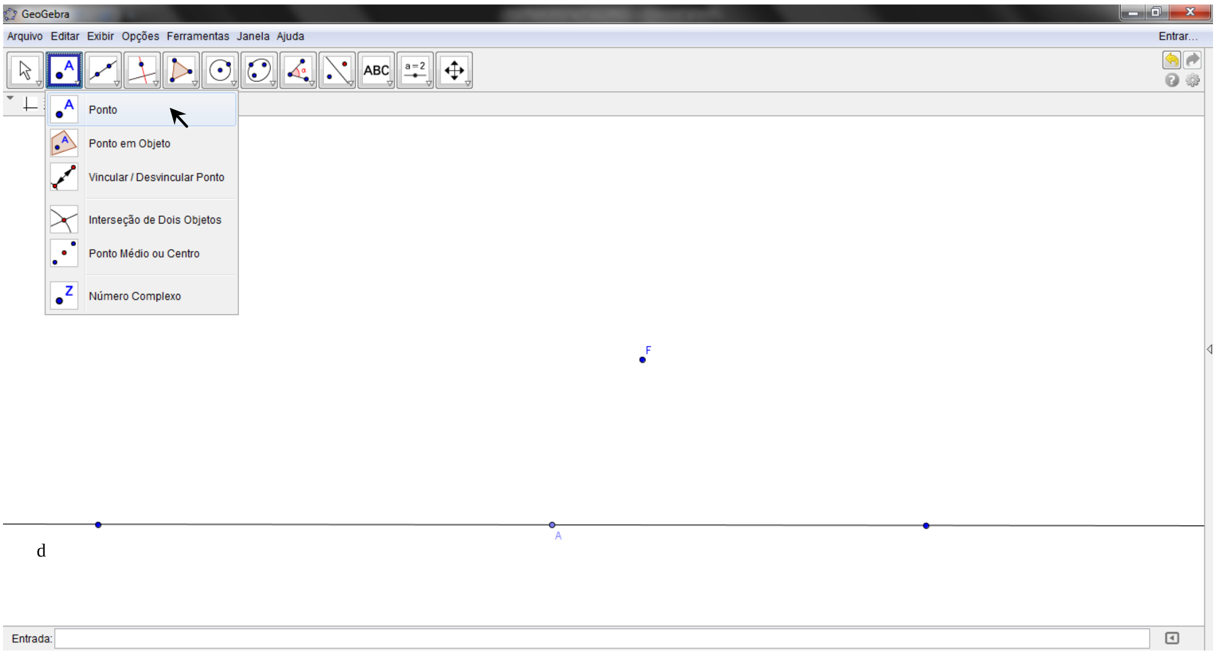


Fig. 3.24

4. Construa a mediatriz l do segmento $\overline{FA}$.

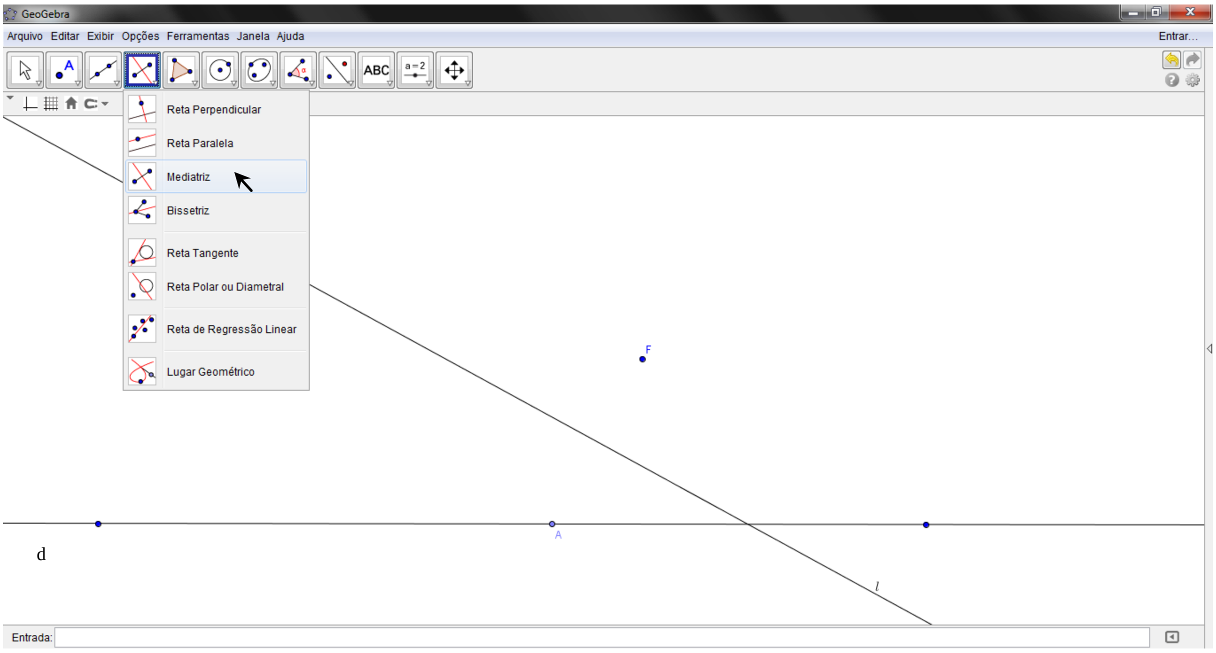


Fig. 3.25

5. Construa a perpendicular r à reta d, passando por A, clicando na ferramenta Reta Perpendicular e selecionando a reta r e o ponto A.

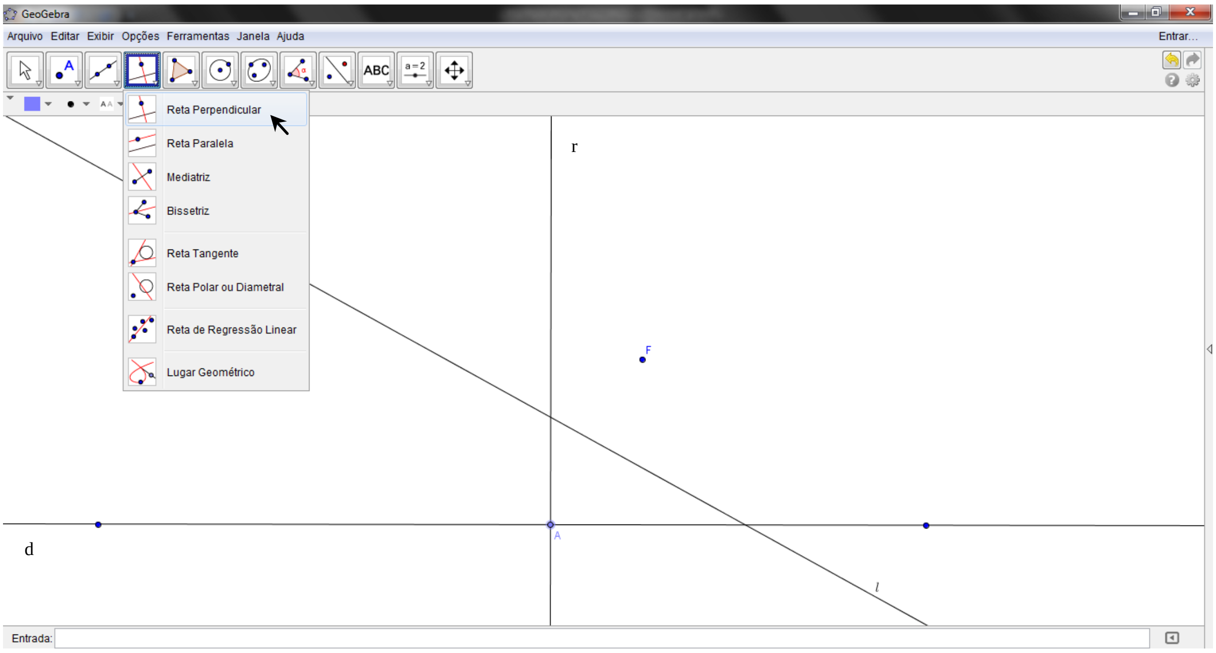


Fig. 3.26

6. Utilizando a ferramenta intersecção de dois objetos, selecione as retas r e l, e encontre o ponto $P \in r \cap l$.

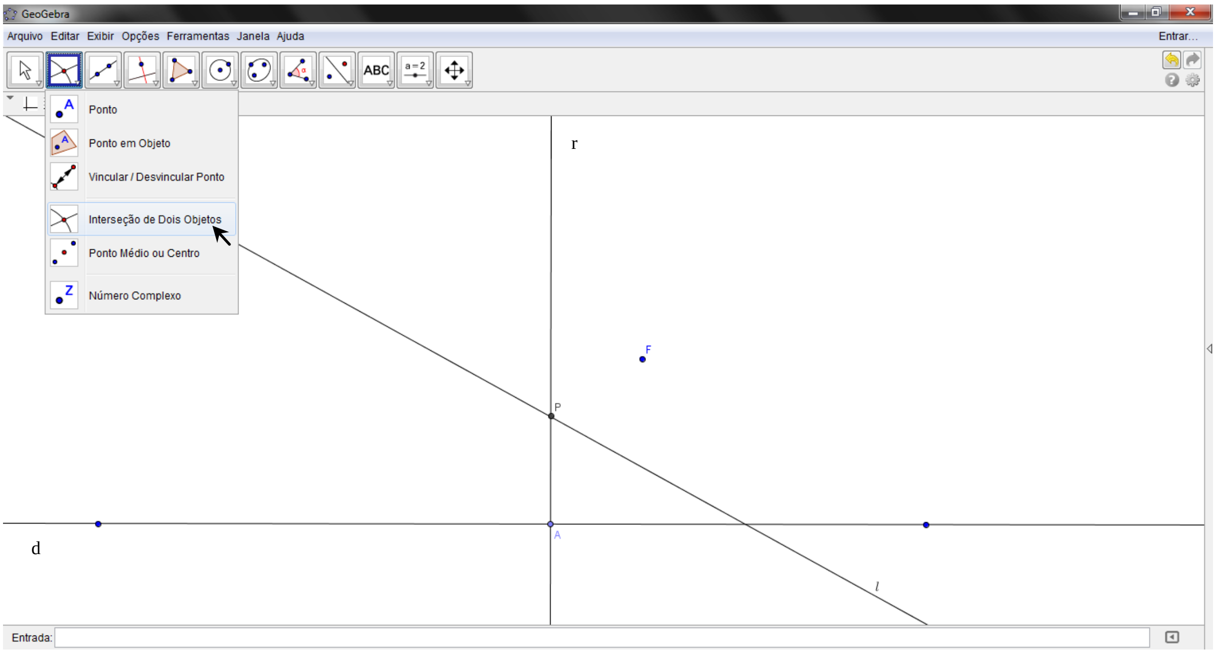


Fig. 3.27

7. A parábola é o lugar geométrico dos pontos P quando A se move ao longo da reta d. Para visualizar a parábola clique no ponto P com o mouse usando o botão direito e selecione a opção Habilitar rastro.

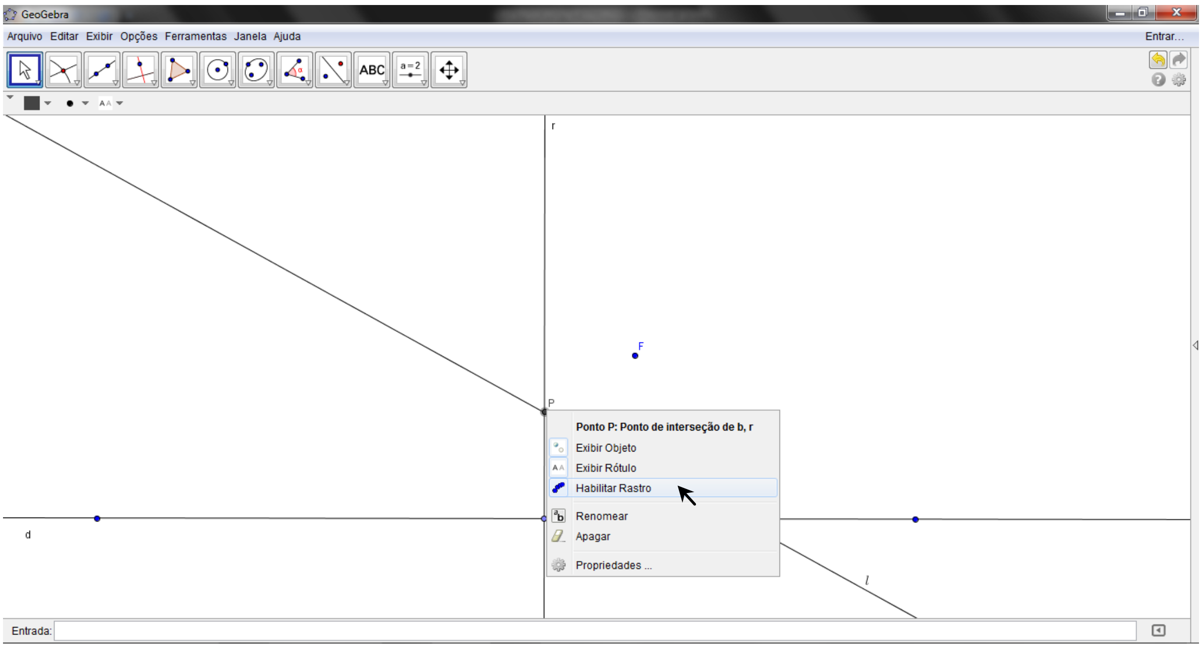


Fig. 3.28

8. Utilizando o botão Mover, movimente o ponto A ao longo da reta d, o rastro deixado pelo ponto P descreve a parábola.

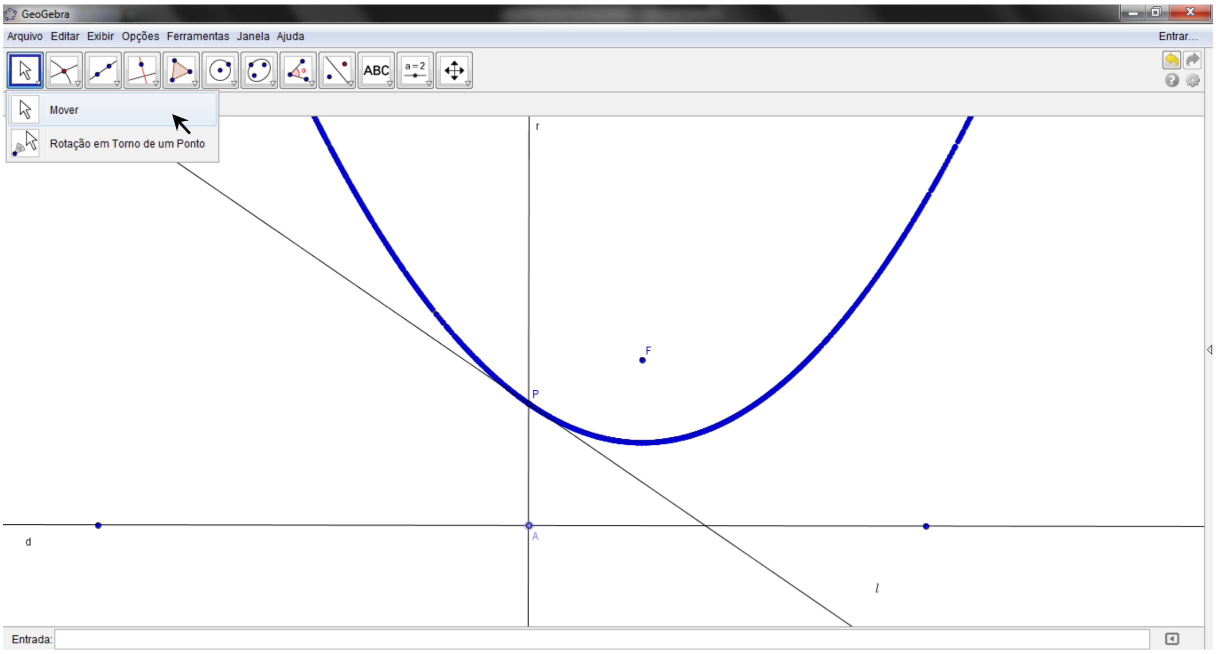


Fig. 3.29

9. Se quisermos, também podemos utilizar a opção Lugar geométrico. Basta clicar sobre o ponto P e sobre o ponto A e obter o traço da parábola construída.

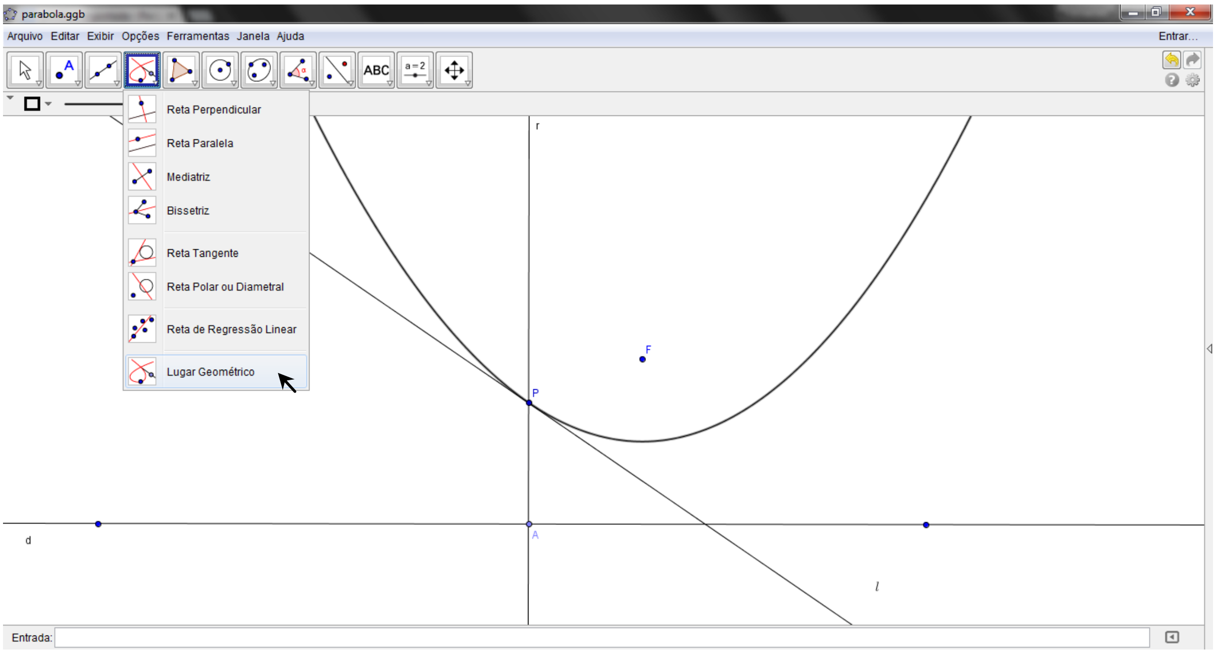


Fig. 3.30

10. Com o mouse clicando no botão direito na reta l, se habilitarmos o rastro.

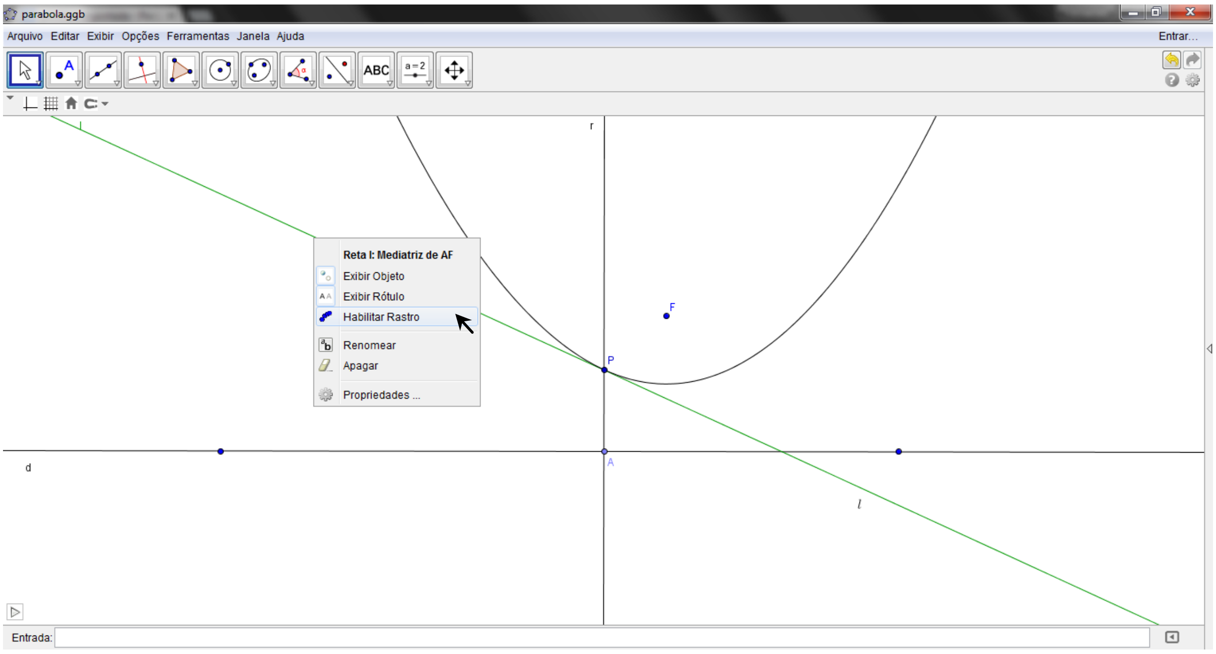


Fig. 3.31

E no ponto A habilitarmos o botão animar,

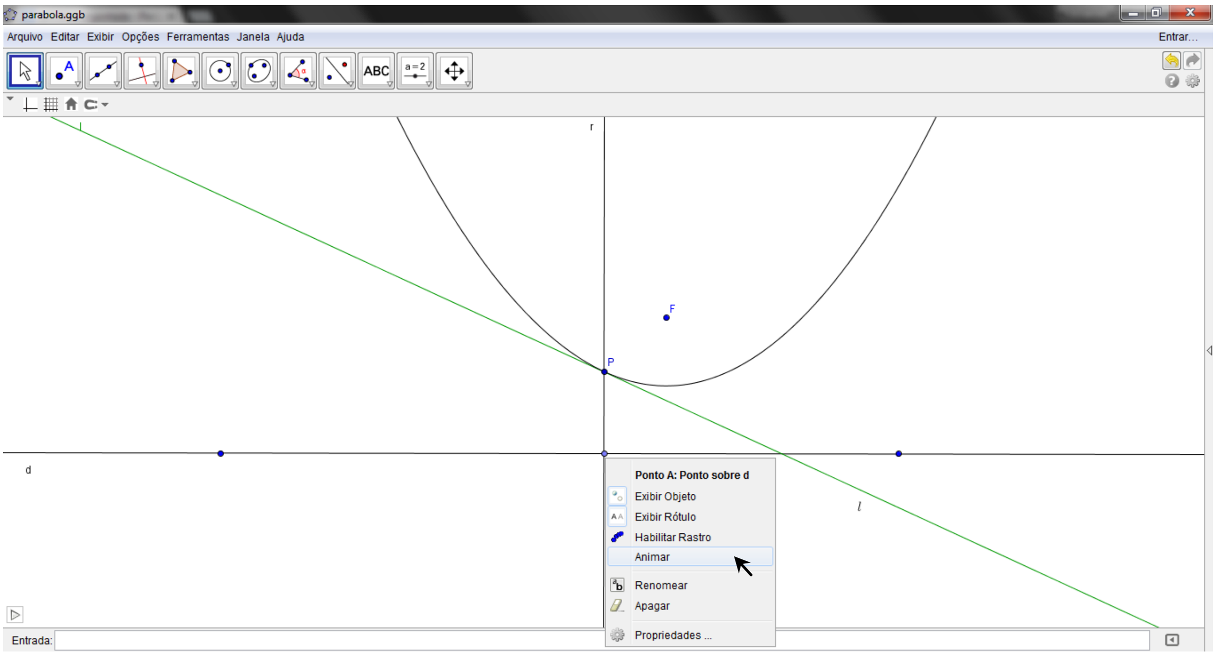


Fig. 3.32

obteremos uma família de retas tangentes à parábola, como na figura a seguir:

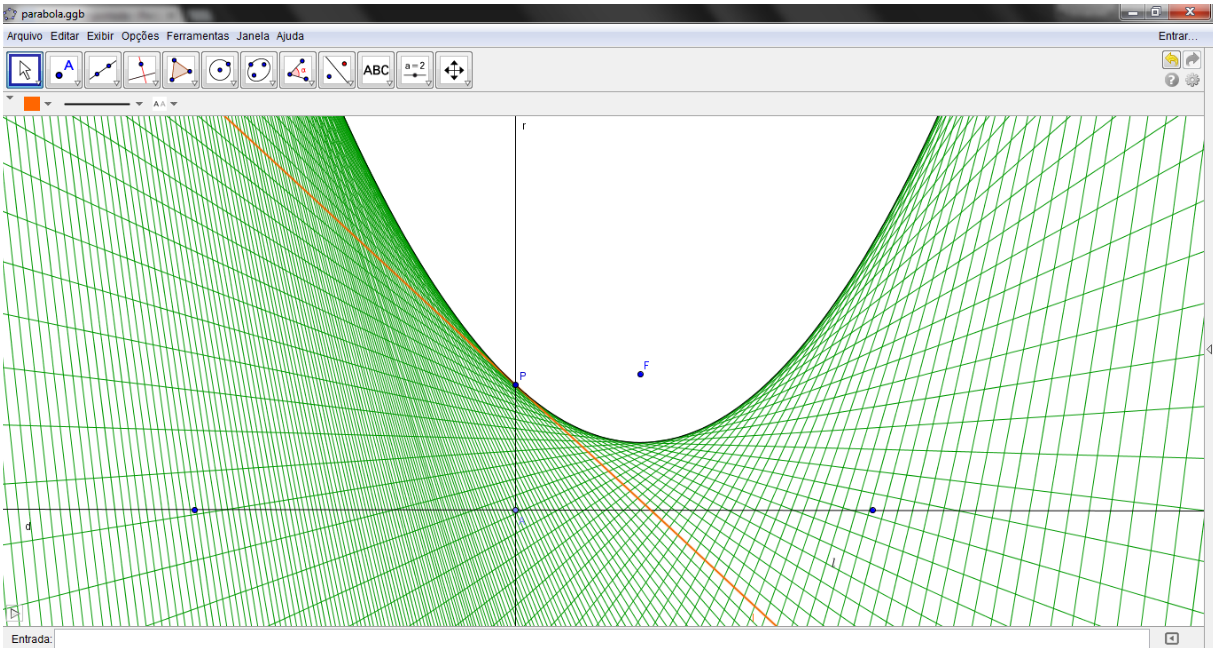

parabola.ggb
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...
ABC
r
P
F
d
Entrada:

Fig. 3.33

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso do computador tem sido considerado uma importante ferramenta no processo de ensino/aprendizagem de Matemática, mas a grande questão é de como utiliza-lo. Para o estudo das cônicas propomos neste trabalho o uso dos programas de Geometria Dinâmica, que não se trata de uma nova Geometria, ou uma alternativa à Geometria Euclidiana, mas simplesmente uma exploração da ideia de movimento para figuras geométricas. Mas para que as atividades com computador constituam realmente momentos de aprendizagem, a forma de implementação dessas atividades é mais importante do que a tecnologia.

Neste trabalho as técnicas do desenho geométrico puderam ser trabalhadas e adaptadas ao meio computacional através de um programa de Geometria Dinâmica, o GeoGebra, de maneira a tornar as construções geométricas rápidas e precisas, além de permitir a manipulação dos objetos construídos, preservando as características das curvas seguindo as suas definições, possibilitando assim a percepção de padrões, instigando a elaboração de conjecturas e testando a validade delas.

A principal contribuição deste trabalho é dar as cônicas um tratamento mais geométrico, já que nas escolas é muito frequente o tratamento puramente algébrico, como constatado por Pavanello (2004) e Peres (1995). É imprescindível que o ensino faça ligações com as novas tecnologias, pois essas ligações tornam o ensino mais interessante, estimulante e o aprendizado mais permanente.

Ao considerar o emprego de computadores na educação como um meio que possibilita a aprendizagem ativa, cabe ao professor de Matemática, decidir se é o momento de integrar essa ferramenta em suas aulas (em particular, aquelas de Geometria e desenho geométrico). Assim, este trabalho fornece uma proposta de abordagem das cônicas no Ensino Médio para que o professor possa introduzi-lo nas aulas de Geometria Analítica.

REFERÊNCIAS

[1] HELLMEISTER, Ana. ***Geometria em sala de aula***. Rio de janeiro: SBM, 2013.

[2] MARMO, C. e HAUFF, G. ***Desenho Geométrico***. São Paulo: Bandeirantes, 1954.

[3] WAGNER, Eduardo. ***Porque as antenas são parabólicas***. Rio de janeiro: RPM 33, 1997.

[4] WINTERLE, P. ***Vetores e Geometria Analítica***. São Paulo: Makron Books, 2000.

[5] EVES, H. ***Introdução a História da Matemática***. Tradução: Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp, Campinas, 1997.

[6] PAVANELLO, R. M. ***O Abandono da geometria: uma visão histórica***. Dissertação (Mestrado) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989

______________ ***Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas***. Tese (Doutorado)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995. 107

_______________. **O abandono** ***do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências***. Zetetiké. nº 7. Ano I. nº 1, 1993.

________________. (org.). ***Matemática nas series iniciais do ensino fundamental: A pesquisa e a sala de aula***. São Paulo: Biblioteca do professor, Coleção SBEM, v. 2, 2004.

[7] PERES. G. ***A realidade sobre o ensino de Geometria no 1° e 2° graus, no estado de São Paulo***. São Paulo: Educação Matemática em Revista. SBEM, n° 4, 1995.

[8] LORENZATO, S. ***Por que não ensinar Geometria?*** In: Revista A Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, 1995, v.4.

[9] BOYER, C. B. ***História da Matemática.*** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora E. Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo, 1996.

[10] KOBAYASHI, M. **A** ***construção da geometria pela criança***. Bauru: EDUSC, 2001.

[11] BELLEMAIN, F. ***Geometria Dinâmica: Diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem***. In: CD Rom da GRAPHICA (15º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico & IV International Conference on Graphics Engeneering for Arts and Design). São Paulo, 2001.

[12] PUTNOKI, J.C. ***Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso***. RPM 13, pag. 13-17, 1988.

[13] VITRAC, B. ***A invenção da geometria***. In Scientific American-História nº 3. São Paulo: Ediouro, 2006.

[14] HAVELANGE, L. ***Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica.*** Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2009.

[15] BLOISE, R**. *Argumentação, Prova E Demonstração Em Geometria: Análise De Coleções De Livros Didáticos Dos Anos Finais Do Ensino Fundamental.*** Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

[16] EVES, Howard. ***História da Geometria***. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

[17] BRAVIANO, G. ***Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria?***. RPM 49, pag. 22-26, 2002.