Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

A Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações

Fábio Pereira Borges
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientadora: **Profª. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT
Maio de 2015

A Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Fábio Pereira Borges e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 1 de junho de 2015.

Profª. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues
Orientadora

Banca examinadora:

Prof. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues
Prof. Dr. Magno Alves de Oliveira
Prof. Dr. Almir César Ferreira Cavalcanti

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

P436s Borges, Fábio Pereira.
A Sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações / Fábio Pereira Borges. -- 2015
xii, 76 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientadora: Eunice Cândida Pereira Rodrigues.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Sequências. 2. Propriedades. 3. Atividades didáticas. 4. Ensino médio. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de maio de 2015 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Profª. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues

Prof. Dr. Magno Alves de Oliveira

Prof. Dr. Almir César Ferreira Cavalcanti

A minha mãe Maria e ao meu pai Osmar por sempre acreditar e incentivar a buscar meus objetivos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela proteção e sabedoria. Depois a minha família pelo amor, apoio e pela compreensão nestes últimos dois anos, em especial à minha mãe pela educação dada a mim, minhã irmã Cristiane pelo carinho e à minha esposa Aline pela paciência nos momentos difíceis.

Agradeço ainda aos meus professores, especialmente a minha orientadora Professora Eunice, pelas contribuições e pela experiência partilhada no desenvolvimento deste trabalho.

Gostaria de agradecer ao amigo Marcos Adriano da Silva Terra pelos momentos compartilhados nas idas e vindas de Cuiabá, bem como pela amizade construída para a vida inteira.

Agradeço também a UFMT (Universidade Federal de Mato Grosso) pela oportunidade de cursar um mestrado.

Os meus agradecimentos também a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

Finalmente os meus agradecimentos aos colegas de curso pelos momentos que passamos juntos, nos tornando bem mais que colegas de mestrado, mas também amigos, e ainda a todos os profissionais da EE Dom Aquino pelos dois anos de paciência e colaboração.

Muito obrigado a todos.

“A matemática é o alfabeto com o qual,
Deus escreveu o universo.”

Galileu Galilei.

Resumo

Neste trabalho estuda-se uma sequência gerada através de um problema intitulado "problema dos coelhos" de Fibonacci, que é a sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, ...)$. Especificamente, faz-se uma análise de como a referida sequência está sendo abordada em alguns livros didáticos do ensino médio, um estudo de algumas propriedades e de certas aparições na natureza. Além disso, propõe-se algumas atividades que podem ser trabalhadas conjuntamente com outros conteúdos abordados no ensino médio.

Palavras chave: Sequências, propriedades, atividades didáticas, ensino médio.

Abstract

In this work is a sequence generated by a problem called ‘problem of rabbits’ Fibonacci, which is the Fibonacci sequence $(1.1, 2, 3, 5, ...)$. Specifically, it is an analysis of how such sequence is being addressed in some textbooks of high school, a study of some properties and certain appearances in nature. In addition, it is proposed that some activities that can be worked in conjunction with other content covered in high school.

Keywords: Sequences,properties, educational activities, high school.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em grande diversidade de situações, seja no apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana, ou ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, (MEC (2002)), sinalizam que a matemática deve ser compreendida como uma parcela de conhecimento humano essencial à formação de todos os jovens, a qual contribui na construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

Além disso, relatam que aprender matemática no ensino médio deve ir além da memorização dos resultados dessa ciência e que a aquisição de conhecimento matemático deve estar vinculado ao domínio de um saber pensar matemático. Este domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca por singularidade, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formulação do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. Relatam ainda que no ensino de sequências deve-se garantir a abordagem conectada a ideia de função, atentando-se a lei de formação dessas sequências e também suas propriedades.

Uma dessas sequências repleta de propriedades aritméticas e aplicações em nosso cotidiano é a sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$, proposta no século XII pelo matemático Leonardo de Pisa. A partir de então muitos matemáticos, além do próprio Fibonacci, dedicaram-se ao estudo da sequência que foi proposta e foram encontradas inúmeras aplicações a ela. As empresas, por exemplo, usam a sequência de Fibonacci de uma forma intuitiva, até mesmo porque as dimensões associadas representam algo bonito e econômico. Outro fato interessante, é que certas plantas, mostram os números de Fibonacci no crescimento de seus galhos. A planta Achillea Pitarmica, por exemplo, é uma das que possui tais características.

A sequência de Fibonacci, segundo Zahn (2011), “também é usada na reflexão de luz em uma fibra dupla de vidro, isto é, para calcular o número de possibilidades quando a luz refletir $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou n vezes é, respectivamente, $1, 2, 3, 5, 8$ etc".

Sobre as aparições da sequência na natureza e na arte, Barco afirma que:

> A sequência de Fibonacci torna-se interessante pela frequência e variedade de suas aparições na natureza e na arte, por exemplo, o número de pequenas flores que formam o miolo do girassol é um dos números da sequência de Fibonacci e alguns poetas romanos, como Virgílio, escreveram poemas nos quais a métrica está definida conforme a regra da sequência de Fibonacci. Barco (1987)

Existem ainda, de acordo com Sahd (2011) da revista Mundo Estranho, outras aparições da sequência de Fibonacci, como por exemplo, "a concha do caramujo que a cada novo pedacinho tem a dimensão da soma dos dois antecessores, o camaleão que contraído, seu rabo é uma das representações mais perfeitas da espiral de Fibonacci, entre outras".

Uma abordagem sobre sequência de Fibonacci foi apresentada a mim, pela primeira vez, durante a disciplina de Aritmética cursada no mestrado do Profmat. Daí então, surgiu o interesse em fazer um estudo mais aprofundado sobre o tema.

Inicialmente, analisamos os seis livros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2015, no que diz respeito a inserção ou não da sequência nos conteúdos programáticos do ensino médio (veja material em anexo). Os resultados foram:

- O autor Paiva (2013) inseriu um exercício que faz um breve histórico sobre Fibonacci e retrata o problema dos coelhos.
- As autoras Smole e Diniz (2013) trazem um texto sobre a sequência de Fibonacci, explicitando o problema dos coelhos, falando um pouco sobre razão áurea e do aparecimento de tal sequência na natureza.
- Dante (2013) também faz um breve histórico sobre a sequência citada e apresenta a recorrência que define a sequência de Fibonacci e Iezzi e Hazzan (1977) fazem a mesma abordagem sobre a sequência supracitada.
- Já Leonardo (Ed.) (2013) e Souza (2013) não abordam nada sobre a sequência.

Os livros anteriormente mencionados, que retratam sobre o tema, fizeram uma abordagem superficial, destacando apenas o aspecto histórico da sequência, não frisando as propriedades que a mesma possui. Entendemos que tais propriedades devem ser abordadas seguindo o tripé matemático. Sobre esse tripé, Elon afirma que:

> O ensino da matemática deve abranger três componentes fundamentais, que chamaremos de conceituação, manipulação e aplicações. Da dosagem adequada de cada uma dessas três componentes depende o equilíbrio do processo de aprendizagem, o interesse dos alunos e a capacidade que terão para empregar futuramente, não apenas as técnicas aprendidas nas aulas, mas sobretudo o discernimento, a clareza das ideias,o hábito de pensar e agir ordenadamente, virtudes que são desenvolvidas quando o ensino respeita o balanceamento das três componentes básicas. Elas devem ser pensadas como um tripé de sustentação: as três são suficientes para assegurar a harmonia do curso e cada uma delas é necessária para seu bom êxito.(Lima, 2006)

Para cumprir com as considerações acima mencionadas fizemos um estudo sobre a sequencia de Fibonacci, que foi dividido em etapas, as quais compõem os capítulos de nosso trabalho.

No capítulo 1, realizamos a fundamentação teórica para alicerçar o nosso trabalho, realizar as demonstrações e propostas de atividades.

Na segunda parte, falamos sobre o aspecto histórico da sequência e de seu descobridor Leonardo de Pisa, definimos recursivamente a sequência a partir do famoso problema dos coelhos de Fibonacci, destacamos as principais propriedades da sequência e levantamos algumas discussões a respeito da veracidade de duas dessas propriedades.

Já no terceiro capítulo, apresentamos algumas aparições e/ou manifestações da sequência na natureza e propomos algumas atividades a serem desenvolvidas em sala de aula.

O embasamento teórico para desenvolvimento do nosso trabalho

, foi nos seguintes autores: Zahn (2011), Hefez (2011), Alencar Filho (1981), Alencar Filho (1988), Contador (2012), Eves (2011), Domingues (1991), Lima et al. (2006), entre outros que serão citados ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

A Teoria do Números é uma parte da Matemática que estuda os números em geral, mas em particular, os números naturais ou inteiros positivos, bem como suas propriedades e peculiaridades.

Neste capítulo, mencionaremos alguns conceitos e propriedades da Teoria de Números, importantes para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

1.1 Indução Matemática

Indução matemática é uma poderosa ferramenta matemática usada para provar a verdade de um número infinito de proposições e teoremas.

É comum vermos tal princípio enunciado em dois passos:
(i) A base: mostrar que a afirmação é válida para $n = 1$.
(ii) O passo indutivo: mostrar que se a afirmação é válida para $n = k$, então também é válido para $n = k + 1$.

O Princípio da Boa Ordem, que será assumido como um postulado, será importante na compreensão da demonstração do teorema intitulado Princípio da Indução Matemática.

Postulado 1 (Princípio Boa Ordem) *Todo subconjunto não vazio de números naturais contém um elemento mínimo.*

Teorema 1.1.1 (Princípio de Indução Matemática) *Seja B um subconjunto dos números naturais. Se B possui as seguintes propriedades:*
(i) $1 \in B$
(ii) $k + 1 \in B$ *sempre que* $k \in B$,
então B contém todos os naturais.

Demonstração: Desejamos provar que se B é um subconjunto dos naturais, possuindo as propriedades (i) e (ii), então B necessariamente contém todos os naturais. Vamos provar por redução ao absurdo. Vamos supor que, mesmo possuindo as propriedades (i) e (ii) B não contém todos os naturais. Seja A o conjunto dos naturais não contidos em B. Pelo Princípio da Boa Ordenação, A possui um menor elemento e este é maior que 1, pois $1 \in B$. Seja a_0 este elemento. Note que $a_0 - 1 \in B$ e como B satisfaz (ii), então o sucessor de $a_0 - 1$, que é a_0 também deve pertencer a B. O que é um absurdo, logo A é vazio, o que prova o resultado. ■

Percebamos que esse método funciona provando que a afirmação é válida para um valor inicial, isto é, o caso base, e provando que o processo utilizado para ir de um valor para o próximo valor também é verdadeiro, então podemos obter qualquer valor repetindo esse processo.

A situação a seguir ilustra bem como funciona o Princípio de Indução Matemática e é conhecida como “efeito dominó”.

Imagine que tenhamos uma fila de dominós em pé, se pudermos garantir que:
(i) o primeiro dominó cairá.
(ii) sempre que um dominó cair, seu próximo vizinho também cairá.
Então podemos concluir que todos os dominós cairão.

Vejamos agora algumas aplicações do Princípio de Indução Matemática.

Exemplo 1.1.1 *Este exemplo ilustra o primeiro registro da utilização do Princípio de Indução Matemática feita por Francesco Maurolycus em 1575. Trata-se da determinação de uma fórmula exata em função de $n \geq 1$ para a soma dos n primeiros números ímpares, ou seja, busca-se uma fórmula para*

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1). \tag{1.1}$$

Solução: Vamos calcular a soma para alguns valores particulares de n, isto é, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. Assim, usando (1.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1;\\
S_2 &= 1 + 3 = 4;\\
S_3 &= 1 + 3 + 5 = 9;\\
S_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16;\\
S_5 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25;\\
S_6 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.
\end{aligned}$$

Analisando os casos particulares, tudo nos leva a crer que uma fórmula para tal soma é $S_n = n^2$, mas como não provamos tal fato, a chamaremos de conjectura. Utilizaremos o teorema (1.1.1) para verificarmos se a nossa conjectura é ou não verdadeira.
Demonstração: Seja $p(n) : S_n = n^2$.
$p(1) = 1^2 = 1$, logo $p(1)$ é verdadeiro.

Suponhamos que $p(n)$ seja verdadeiro para algum $n = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$p(k) : S_k = k^2. \tag{1.2}$$

Queremos mostrar que $p(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja,

$$p(k+1) : S_{k+1} = (k+1)^2.$$

Com efeito, somando o termo seguinte $(2k+1)$ em ambos os membros de (1.2), obtemos

$$S_k + (2k+1) = k^2 + (2k+1). \tag{1.3}$$

Como $S_k + (2k+1)$ é S_{k+1}, então (1.3) torna-se

$$S_{k+1} = k^2 + 2k + 1 \Rightarrow S_{k+1} = (k+1)^2,$$

que é o $p(k+1)$. Assim, $p(k+1)$ é verdade, e portanto, pelo teorema (1.1.1), $p(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Conta-se que certo dia, com a intenção de manter a turma em silêncio, um professor pediu aos alunos que somassem os números naturais de 1 a 100, ou seja, $(1 + 2 + 3 + ... + 100)$ e, assim que terminassem, colocassem a solução sobre sua mesa. Quase que imediatamente, um garoto de 10 anos chamado Carl Friedrich Gauss colocou sobre a mesa do professor a resposta encontrada. Ele olhou para o menino com pouco caso, enquanto os demais alunos trabalhavam arduamente. Quando conferiu os resultados, o professor verificou que a única resposta correta era a de Gauss, 5.050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo.Vejamos no exemplo abaixo a solução da questão resolvida por Gauss, mas estendida para um $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.2 *Determine uma fórmula para a soma dos n primeiros números naturais. Seja*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$$

Demonstração: Seja S_n a soma de tais números, isto é,

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n. \tag{1.4}$$

Notemos inicialmente que S_n pode ser escrita também como

$$S_n = n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1, \tag{1.5}$$

Somando (1.4) com (1.5) obtemos:

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + ... + (n+1). \tag{1.6}$$

e assim, a equação (1.6) reduz-se em

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.7}$$

Verificaremos, por indução sobre n, a validade da fórmula de (1.7). Seja $p(n) : S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Notemos que

$$p(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

logo $p(1)$ é verdadeiro.

Suponhamos que $p(k)$ seja verdadeiro para algum $n = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$p(k) : S_k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{1.8}$$

Queremos mostrar que $p(k+1)$ também é verdadeiro, ou seja,

$$P(k+1) : S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Com efeito, somando $(k+1)$ a ambos os membros de (1.8), obtemos:

$$S_k + (k+1) = (k+1) + \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1.9}$$

Como $S_k + (k+1)$ é S_{k+1}, então (1.9) torna-se

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}.$$

Colocando $(k+1)$ em evidência, temos

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

que é o $p(k+1)$. Logo $p(k+1)$ é verdadeiro, e portanto, pelo teorema (1.1.1) temos que (1.7) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

1.2 Recorrência

Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Exemplo 1.2.1 *A sequência (x_n) dos números naturais ímpares $1, 3, 5, 7, ...$ pode ser definida por*

$$x_{n+1} = x_n + 2$$

com $n \geq 1$, e $x_1 = 1$.

Exemplo 1.2.2 *Qualquer progressão aritmética(x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida por*

$$x_{n+1} = x_n + r$$

com $n \geq 1$, e $x_1 = a$.

Exemplo 1.2.3 *Qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a pode ser definida por*

$$x_{n+1} = q.x_n,$$

com $n \geq 1$ e $x_1 = a$.

Notemos que uma recorrência, por si só, não define a sequência. Uma exemplificação é a recorrência do exemplo 1.2.1 $x_{n+1} = x_n + 2$, é satisfeita não apenas pela sequência de números ímpares, mas sim por qualquer progressão aritmética de razão 2. Para que uma recorrência fique completamente determinada é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

Perceba que, nos exemplos 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 temos recorrência de primeira ordem, isto é, cada termo é expresso em função do antecessor imediato. Quando tivermos uma recorrência onde cada termo é expresso em função dos dois termos antecessores imediatos, então teremos uma recorrência de segunda ordem, que é o caso da definição (2.2.1).

1.3 Divisibilidade

Podemos exprimir uma ideia matemática de várias maneiras. Observemos, que por exemplo, as afirmações
(i) b é múltiplo de a.
(ii) b é divisível por a.
(iii) a é divisor de b.
(iv) a divide b.
são equivalentes para todo a e $b \in \mathbb{Z}$.

Para representar as situações descritas acima usaremos:

$$a \mid b,$$

para dizer que os itens $(i), (ii), (iii)$ e (iv) são satisfeitos, e

$$a \nmid b$$

caso contrário.

Definição 1.3.1 *Sejam a e b inteiros positivos, dizemos que a divide b, se e somente se, existe um inteiro q tal que $b = aq$.*

Proposição 1.3.1 *Sejam $a, c \in \mathbb{Z}$, tal que $a \neq 0$. Então,*
(i) $1 \mid c$.
(ii) $a \mid a$.
(iii) $a \mid 0$.

Demonstração: $(i), (ii)$ e (iii) decorrem imediatamente das igualdades $c = 1.c$, $a = a.1$ e $0 = a.0$. ■

Proposição 1.3.2 *Sejam a, b e c números inteiros, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então*

(i) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.
(ii) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b + c)$ e $a \mid (b - c)$.

Demonstração: Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então existem inteiros q_1 e q_2 tais que

$$b = aq_1 \tag{1.10}$$

$$c = bq_2 \tag{1.11}$$

Subtituindo (1.10) em (1.11), temos

$$c = a(q_1.q_2) \Longrightarrow a \mid c.$$

(ii)Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então existem os inteiros r e s tal que

$$b = af \tag{1.12}$$

$$c = ag \tag{1.13}$$

Daí somando (1.12) com (1.13), obtemos

$$b + c = af + ag \Rightarrow b + c = a(f + g) \Rightarrow a \mid b + c.$$

De modo análogo, se fizermos (1.12) - (1.13), teremos

$$b - c = a(f - g) \Longrightarrow a \mid b - c \ ,$$

o que prova o resultado. ■

Proposição 1.3.3 *Sejam a, b, d, x e y números inteiros, tal que $d \neq 0$, se $d \mid a$ e $d \mid b$, então*

$$d \mid ax + by.$$

Demonstração: Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então existem inteiros q_1 e q_2 tais que

$$a = d.q_1 \tag{1.14}$$

$$b = d.q_2 \tag{1.15}$$

Multiplicando (1.14) e (1.15) respectivamente por x e y, obtemos

$$ax = d.x.q_1 \tag{1.16}$$

e

$$by = d.y.q_2. \tag{1.17}$$

Somando membro a membro as equações (1.16) e (1.17), teremos

$$ax + by = d.x.q_1 + d.y.q_2 = d(x.q_1 + y.q_2),$$

o que mostra que $d \mid ax + by$. ■

Proposição 1.3.4 *Sejam a, b e $n \in \mathbb{N}$, tais que $a > b > 0$. Então*

$$a - b \mid a^n - b^n.$$

Demonstração: Vamos realizar a prova por indução sobre n.

Note que a afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois

$$a - b \mid a^1 - b^1 = a - b.$$

Suponhamos agora que a afirmação seja verdadeira para algum $n = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$a - b \mid a^k - b^k.$$

Queremos provar que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$a - b \mid a^{k+1} - b^{k+1}.$$

De fato,

$$a^{k+1} - b^{k+1} = aa^k - ba^k + ba^k - bb^k = (a - b)a^k + b(a^k - b^k).$$

Como $a - b \mid a - b$,e por hipótese de indução $a - b \mid a^k - b^k$, então pela proposição (1.3.3)

$$a - b \mid a^{k+1} - b^{k+1}.$$

Sendo assim, mostramos que a afirmação é verdadeira para $n = k + 1$, e pelo teorema (1.1.1), temos que a afirmação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 1.3.5 *Sejam a, b e $n \in \mathbb{N}$, com $a + b \neq 0$.*
Então

$$a + b \mid a^{2n+1} + b^{2n+1}.$$

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por indução sobre n.

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois

$$a + b \mid a^{2.1+1} + b^{2.1+1} = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Suponhamos agora que a afirmação seja verdadeira para algum $n = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$a + b \mid a^{2k+1} + b^{2k+1}.$$

Queremos mostrar que a afirmação também é válida para $n = k + 1$, ou seja,

$$a + b \mid a^{2(k+1)+1} + b^{2(k+1)+1}.$$

Veja que

$$a^{2(k+1)+1} + b^{2(k+1)+1} = a^2a^{2k+1} - b^2a^{2k+1} + b^2a^{2k+1} + b^2b^{2k+1} =$$
$$(a^2 - b^2)a^{2k+1} + b^2(a^{^{2k+1}} + b^{2k+1}).$$

Como $a+b \mid a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, e por hipótese de indução, $a+b \mid a^{2k+1}+b^{2k+1}$, logo

$$a+b \mid a^{2(k+1)+1}+b^{2(k+1)+1}.$$

Com isso mostramos também que a afirmação é verdadeira para $n=k+1$ e portanto, pelo teorema (1.1.1), temos que a afirmação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 1.3.6 *Sejam a, b e $n \in \mathbb{N}$, tais que $a \geq b > 0$.*
Então

$$a+b \mid a^{2n}-b^{2n}.$$

Demonstração: Vamos realizar a prova usando indução sobre n.

A afirmação é válida para $n=1$, pois $a+b$ divide $a^{2.1}-b^{2.1}=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para algum $n=k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$a+b \mid a^{2k}-b^{2k}.$$

Queremos mostrar a validade para $n=k+1$, ou seja ,

$$a+b \mid a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}.$$

De fato,

$a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)}=a^2a^{2k}-b^2a^{2k}+b^2a^{2k}-b^2b^{2k}=(a^2-b^2)a^{2k}+b^2(a^{2k}-b^{2k})$.

Como $a+b \mid a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, e por hipótese de indução, $a+b \mid a^{2k}-b^{2k}$, então

$$a+b \mid a^{2(k+1)}-b^{2(k+1)},$$

o que mostra a veracidade da afirmação para $n=k+1$ e pelo, Princípio de Indução Matemática, a afirmação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

1.4 Divisão Euclidiana e Máximo Divisor Comum

Euclides foi um matemático brilhante, que infelizmente até hoje se desconhece a origem e a data de nascimento. Acredita-se que ele tenha vivido na Grécia por volta de 300 a.C. As suas obras mais conhecidas são Os Elementos.

Ele é conhecido como pai da Geometria, mas em seus elementos, além de Geometria ele aborda vários temas da Teoria dos Números. Dois destes temas serão enunciados e demonstrados ao longo deste capítulo, que são: o teorema da divisão euclidiana, que nos permite dividir um número natural por outro, e o algoritmo de Euclides, que é utilizado para calcular o máximo divisor de dois números inteiros.

Proposição 1.4.1 *Se a, b são dois inteiros com $b > 0$, então existem e são únicos q e r tais que*

$$a = bq + r \ \ e \ 0 \leq r < b$$

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente a existência de tais q e r.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$ e considerando o conjunto

$$A = \{a - bx/x \in \mathbb{Z}; a - bx \geq 0\}.$$

Percebamos que para $x = -|a|$, obtemos

$$a - bx = a - b(-|a|) = a + b|a| \geq a + |a| \geq 0,$$

pois $b > 0$, ou seja, $b \geq 1$, sendo assim A é um conjunto não-vazio, e pelo Princípio da Boa Ordem, existe um $r \in A$, tal que r é o menor elemento, além disso, existe um $x = q \in \mathbb{Z}$, com $r = a - bq$, ou seja, $a = bq + r$, provando a existência de tais q e r. Nos resta provar que $0 \leq r < b$. Como $r \in A$, então $r \geq 0$. Por outro lado, se tivesse $r \geq b$, teríamos

$$0 \leq r - b = a - bq - b = a - b(q + 1) < r.$$

Observemos que $a - b(q + 1)$ e $r \in A$, então chegamos a um absurdo, pois tomamos r como menor elemento de A. Logo $r < b$.

Nos resta agora mostrar a unicidade de q e r.

Suponhamos que existam inteiros q_1 e r_1 tais que

$$a = bq_1 + r_1 \text{ e } 0 \leq r < b.$$

Então teremos

$$bq_1 + r_1 = bq + r \Rightarrow r_1 - r = bq - bq_1 \Rightarrow r_1 - r = b(q - q_1),$$

ou seja,

$$b \mid r_1 - r.$$

Por outro lado, temos

$$-b < -r \leq 0 \text{ e } 0 \leq r_1 < b.$$

Logo

$$-b < r_1 - r < b,$$

isto é,

$$|r_1 - r| < b.$$

Deste modo,

$$b \mid r_1 - r \text{ e } |r_1 - r| < b,$$

o que só pode ocorrer se $r_1 - r = 0$, além disso, como $b \neq 0$, então $q - q_1 = 0$. Logo,

$$r_1 = r \text{ e } q_1 = q,$$

o que demonstra a unicidade de q e r. ■

Observação 1.4.1 *Aqui cabe uma pergunta. Por que r deve ser não negativo? Observe que a resposta é simples, pois quando dividimos a por b, estamos na verdade procurando o maior múltiplo de b que é menor ou igual que a, assim $a = bq + r$, logo $r = a - bq$, que é não negativo, pois $bq \leq a$. Mas não podemos definir a divisão de modo que r seja negativo? Caso isso acontecesse, bq seria o menor múltiplo de b maior que a, e aconteceria situações tais como: a divisão de 14 maçãs entre 4 pessoas, seria da seguinte forma: cada um receberia 4 maças e teríamos um resto de -2 maçãs. Ou seja, essa maneira de se fazer divisão não tem nenhum sentido prático.*

A Matemática está presente no nosso cotidiano, mas frequentemente, as pessoas não conseguem associar os conteúdos trabalhados em sala de aula, nos livros didáticos, com tais situações. Por exemplo, o mdc(máximo divisor comum), possui várias aplicações no nosso dia a dia.Vejamos a seguir uma aplicação prática de máximo divisor comum, que será resolvido ao longo deste capítulo.

Exemplo 1.4.1 *Uma indústria de tecidos fabrica retalhos de mesmo comprimento. Após realizarem os cortes necessários, verificou-se que duas peças restantes tinham as seguintes medidas: 156 centímetros e 234 centímetros. O gerente de produção ao ser informado das medidas, deu a ordem para que o funcionário cortasse o pano em partes iguais e maior comprimento possível. Como ele poderá resolver essa situação?*

A seguir vamos definir o máximo divisor comum de dois números inteiros.

Definição 1.4.1 *Sejam a e b, inteiros tal que ao menos um deles sejam diferente de zero. Chama-se Máximo Divisor Comum de a e b, o inteiro positivo*

$$d = mdc(a, b)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$(i) d \mid a$ e $d \mid b$ (ou seja, d é o divisor comum de a e b).
(ii) Se existir um inteiro positivo c, tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$ (isto é, d é o maior divisor comum de a e b).

Exemplo 1.4.2 *Os divisores positivos comuns de -24 e 32 são $1, 2, 4$ e 8, logo o $mdc(-24, 32) = 8$, pois 8 é o maior deles.*

Agora que já definimos o máximo divisor comum, resolveremos o exemplo 1.4.1.

Solução: Note que queremos os retalhos em tamanhos iguais, tal que seja o maior comprimento possível, logo se descobrirmos qual o maior divisor comum das duas medidas resolveremos o nosso problema e poderemos dividí-lo em tais comprimentos. Para calcular o $mdc(156, 234)$, procederemos por decomposição em fatores primos.
$156 = 2.2.3.13$ e $234 = 2.3.3.13$, logo o maior divisor comum dos dois números é $2.3.13 = 78$. Portanto os retalhos devem ter 78cm de comprimento.

É natural que $mdc(a, b) = mdc(b, a)$, ou seja, se pensarmos em um exemplo numérico, como por exemplo o $mdc(8, 20) = 4 = mdc(20, 8)$.

O máximo divisor comum possui diversas propriedades. A seguir apresentaremos algumas delas que serão úteis no decorrer do nosso trabalho.

Definição 1.4.2 *Em particular:*

(i) $mdc(0, 0)$ *não existe.*
(ii) $mdc(a, 1) = mdc(b, 1) = 1$.
(iii) Se $a \neq 0$, *então* $mdc(a, 0) = |a|$.
(iv) Se $a \mid b$, *então* $mdc(a, b) = |a|$.

Exemplo 1.4.3 *Determine o máximo divisor comum dos pares de inteiros abaixo: a)*$mdc(15, 1)$,
b)$mdc(-20, 0)$,
c)$mdc(-4, 20)$

Solução: Para determinarmos o $mdc(15, 1)$, basta observarmos o item (ii) de (1.4.2), além disso para resolver o $mdc(-20, 0)$, simplesmente devemos observar que o item (iii) de (1.4.2), e finalmente se o notarmos o item (iv) de (1.4.2) resolvemos o $mdc(-4, 20)$. Logo as soluções procuradas são respectivamente $1, 20$ e 4.

Lema 1.4.1 *Sejam* a, b *e* $n \in \mathbb{N}$, *então*

$$mdc(a, b) = mdc(a, b + na)$$

Demonstração: Seja $d = mdc(a, b + na)$, logo

$$d \mid a \text{ e } d \mid b + na.$$

Como $d \mid b + na$, segue que

$$d \mid b + na - na = b.$$

Note que d é um divisor comum de a e b, nos resta mostrar que d é o maior deles.

De fato, seja $c \in \mathbb{N}$ outro divisor comum de a e b, logo c também é um divisor comum de a e $b + na$, segue que

$$c \mid d \Rightarrow c \leq d \Rightarrow d = mdc(a, b),$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.4.2 *Sejam a, b e c números naturais, se $b \mid c$, então*

$$mdc(a + c, b) = mdc(a, b).$$

Demonstração: Se $b \mid c$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$c = b.q$$

logo,

$$mdc(a + c, b) = mdc(a + bq, b)$$

assim, pelo lema (1.4.1), seque que

$$mdc(a + c, b) = mdc(a, b),$$

provando o resultado. ■

Proposição 1.4.3 *Sejam a, b e c números naturais, se $mdc(a, c) = 1$, então*

$$mdc(a, bc) = mdc(a, b).$$

Demonstração: Por hipótese sabemos que $mdc(a, c) = 1$, então existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + cy = 1. \tag{1.18}$$

Seja $mdc(a, b.c) = d$, logo $d \mid a$. e além disso, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $a = d.m$ e $bc = dn$.

Tem-se por (1.18) que $ax + cy = 1$, e multiplicando ambos os membros da igualdade por b, obtemos:

$$abx + bcy = b.$$

Substituindo os valores de a e bc respectivamente, temos:
$bdmx+dny = b \Rightarrow d(bmx+ny) = b$, logo $d \mid b$. Como $d \mid b$ e $d \mid a$, então $d \mid mdc(a, b) = d_1$.

Por outro lado, consideremos $mdc(a, b) = d_1$, assim existem $r, s \in \mathbb{N}$ de maneira que $a = d_1 r$ e $b = d_1 s$, deste modo $d_1 \mid a$ e $d_1 \mid b$, então $d_1 \mid bc$, logo $d_1 \mid mdc(a, b.c) = d$. Assim, como $d \mid d_1$ e $d_1 \mid d \Rightarrow d = d_1$.

Portanto se $mdc(a, c) = 1$, então $mdc(a, bc) = mdc(a, b)$. ■

Capítulo 2

A Sequência de Fibonacci

2.1 Um breve histórico sobre a origem da Sequência de Fibonacci

Segundo Mol (2013), “Leonardo de Pisa (c. 1170-1250), também conhecido como Fibonacci, é considerado o mais importante matemático da Europa Medieval”. Além disso, Eves (2011) também afirma que “Fibonacci foi um matemático invulgarmente capaz, sem rivais nos nove séculos da Idade Média”.

O nome Fibonacci quer dizer “filho de Bonnacci”. Seu pai Guiliermo Bonnacci era ligado aos negócios mercantis e passou a trabalhar em Benjaia, na África. Devido a isso, Leonardo teve uma parte de sua educação no continente africano, onde teve contato com a álgebra árabe e com o sistema de numeração indo-arábico. Além disso, conheceu a cultura matemática de diferentes povos (Egito, Sicília, Grécia, Síria e Provença).

Em 1202, Fibonacci(assim chamaremos Leonardo de Pisa),voltando para a cidade de Pisa, escreveu o livro Liber Abaci (Livro do ábaco ou Livro do Cálculo); já em 1220, escreveu a obra Practica Geometriae e, por volta de 1225, escreveu os livros Liber Quadratorum e Flos. No Liber Abaci, Fibonacci introduziu o sistema de numeração indo-arábico na Europa, caracterizando-o com nove símbolos e o zero, apresentando aplicações à matemática comercial, conversões de pesos e medidas, cálculos de taxas de juros e de câmbio, médias, entre outras. Apesar das notórias contribuições de Fibonacci para a matemática nas mais diversos áreas, segundo Mol (2013) “Fibonacci é hoje, no entanto, mais conhecido pela chamada sequência de Fibonacci, apresentada no Liber Abaci como resposta para um problema envolvendo o crescimento de uma população de coelhos”.

Vejamos o problema proposto por Fibonacci.

Quantos casais de coelhos teriam ao final de 1 ano se:

- No primeiro mês temos um coelho macho e um coelho fêmea. Estes dois coelhos acabaram de nascer.

- Um coelho só atinge a maturidade sexual ao fim de um mês.
- O período de gestação de um coelho dura um mês.
- Ao atingirem a maturidade sexual, a fêmea irá dar à luz todos os meses.
- A mãe irá dar a luz todos os meses um coelho macho e um coelho fêmea.
- Os coelhos nunca morrem.

De acordo com Hefez (2011) a solução que Fibonacci propôs foi:

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Tabela 2.1: Solução do problema dos coelhos de Fibonacci

2.2 Definição da sequência de Fibonacci

Assim a solução para o problema anterior é

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144).$$

Fibonacci em suas observações percebeu que cada termo da sequência a partir do terceiro termo é obtido através da soma dos dois termos antecessores. Surge então uma sequência fabulosa, que possui diversas propriedades interessantes em vários ramos da Matemática, além de ter inúmeras aparições em fenômenos da natureza.

A sequência supracitada que será nosso objeto de estudo neste e nos próximos capítulos é a sequência

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$$

que chamaremos de sequência de Fibonacci, onde os termos são chamados de números de Fibonacci.

Aqui devemos nos perguntar, existe alguma relação matemática que define essa sequência?

A resposta é afirmativa, existe sim uma relação que define a sequência de Fibonacci. Vejamos:

Definição 2.2.1 *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência* (f_n) *definida por*

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 2, \tag{2.1}$$

onde $f_1 = f_2 = 1$*, "a sequência de Fibonacci é, por definição, uma sequência recursiva" Contador (2012)*

2.3 Propriedades gerais da sequência de Fibonacci

Ao estudarmos qualquer tema dentro da Matemática, busca-se as particularidades, as especificidades, as características que definem e diferenciam o tema dos demais, e a sequência de Fibonacci é rica em propriedades, que possibilitam ao leitor diversas oportunidades para reconhecer padrão, que é uma das habilidades citadas em MEC (2002). Assim faremos o estudo de algumas propriedades que achamos mais interessantes.

As propriedades desta seção foram realizadas de acordo com as ideias dos seguintes autores Hefez (2011); Alencar Filho (1981, 1988); Domingues (1991); Santos (2014)

Propriedade 2.3.1 *A soma dos* n *primeiros números de Fibonacci, com* $n \geq 1$*, é dada por:*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + ... + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Demonstração: Por definição $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \Rightarrow f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$, logo

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_3 - f_2\\
f_2 &= f_4 - f_3\\
f_3 &= f_5 - f_4\\
f_4 &= f_6 - f_5\\
f_5 &= f_7 - f_6\\
&\vdots\\
f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n\\
f_n &= f_{n+2} - f_{n+1}.
\end{aligned}$$

Somando ordenadamente temos:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=3}^{n+2} f_i - \sum_{i=3}^{n+1} f_i - f_2,$$

como $f_2 = 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=3}^{n+2} f_i - \sum_{i=3}^{n+1} f_i - 1,$$

além disso,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=3}^{n+1} f_i + f_{n+2} - \sum_{i=3}^{n+1} f_i - 1,$$

onde obteremos que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1,$$

como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 2.3.1 *Qual a soma dos 12 primeiros números de Fibonacci?*

Veja que se somarmos $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144$, obteremos 376. Mas nosso intuito é utilizar a propriedade demonstrada, logo pela propriedade (2.3.1), temos:

$$\sum_{i=1}^{12} f_i = f_{n+2} - 1,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{12} f_i = f_{14} - 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{12} f_i = 377 - 1 = 376$$

Portanto a soma dos doze primeiros números de Fibonacci é 376.

Outra propriedade relacionada com a soma dos números de Fibonacci, é a soma dos n primeiros números de índice ímpar, como veremos na propriedade a seguir.

Propriedade 2.3.2 *A soma dos n números de Fibonacci de índice ímpar para todo $n \geq 1$, é dada por:*

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

Demonstração: Por definição $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \Rightarrow f_{n+1} = f_{n+2} - f_n$, além disso, sabemos que $f_1 = f_2$, logo

$$\begin{aligned}
&f_1 = f_2\\
&f_3 = f_4 - f_2\\
&f_5 = f_6 - f_4\\
&f_7 = f_8 - f_6\\
&f_9 = f_{10} - f_8\\
&\vdots\\
&f_{2n-3} = f_{2n-2} - f_{2n-4}\\
&f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}
\end{aligned}$$

Somando ordenadamente as n igualdades, temos

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i} - \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} = \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_{2n} - \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i},$$

logo

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n},$$

completando a nossa demonstração. ■

Vejamos uma pequena situação hipotética envolvendo a propriedade que acabamos de demonstrar.

Exemplo 2.3.2 *Um casal resolveu abrir uma conta poupança para seu filho no dia em que ele nasceu, e combinaram que fariam os depósitos de maneira alternada, isto é, cada ano um deles era responsável pelo depósito, da seguinte maneira:*
No primeiro ano a mãe depositaria $R\$1,00$*;*
no segundo ano o pai depositaria $R\$1,00$*.*
E a partir de então, a quantia depositada, deveria ser a soma dos dois anos anteriores, da seguinte maneira:
no terceiro ano a mãe depositaria $R\$2,00$*;*
no quarto ano o pai depositaria $R\$3,00$*;*
no quinto ano a mãe depositaria $R\$5,00$*; e assim sucessivamente até que o filho completasse 21 anos.*
Qual a quantia que a mãe depositou para o seu filho?

Solução: Inicialmente devemos perceber que os depósitos são feitos segundo o padrão da sequência de Fibonacci, além disso, denotando d_1 o primeiro depósito, d_2 o segundo depósito, e assim sucessivamente, veremos que os depósitos da mãe ocorrem sempre, quando o índice da sequência é ímpar, logo, para sabermos quanto a mãe depositou, basta usarmos a propriedade (2.3.2). Assim

$$\sum_{i=1}^{11} f_{2i-1} = f_{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{11} f_{2i-1} = f_{22},$$

$$\sum_{i=1}^{11} f_{2i-1} = 17711,$$

Portanto a mãe depositará neste período a quantia de $R\$17711,00$

Continuando a análise das propriedades envolvendo a soma de números de Fibonacci, veremos agora a soma dos termos de índice par.

Propriedade 2.3.3 *A soma dos Números de Fibonacci de índice par, é dada por:*

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Demonstração: Sabe-se que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \Rightarrow f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$, logo

$$\begin{aligned}
&f_2 = f_3 - f_1\\
&f_4 = f_5 - f_3\\
&f_6 = f_7 - f_5\\
&f_8 = f_9 - f_7\\
&f_{10} = f_{11} - f_9\\
&\vdots\\
&f_{2n-2} = f_{2n-1} - f_{2n-3}\\
&f_{2n} = f_{2n+1} + f_{2n-1}
\end{aligned}$$

Somando membro a membro, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i+1} - f_1 = \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i+1} + f_{2n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i+1} - f_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i+1} + f_{2n+1} - f_1,$$

logo,

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - f_1,$$

como $f_1 = 1$, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1,$$

o que conclui a nossa demonstração. ■

O problema citado no exemplo anterior pode ser adaptado para ilustrar a aplicação da propriedade que terminamos de demonstrar. Vejamos.

Exemplo 2.3.3 *Um casal resolveu abrir uma conta poupança para seu filho no dia em que ele nasceu, e combinaram que fariam os depósitos de maneira alternada, isto é, cada ano um deles era responsável pelo depósito, da seguinte maneira:*
No primeiro ano a mãe depositaria $R\$1,00$*;*
no segundo ano o pai depositaria $R\$1,00$*.*
E a partir de então, a quantia depositada, deveria ser a soma dos dois anos anteriores, ou seja:
no terceiro ano a mãe depositaria $R\$2,00$*;*
no quarto ano o pai depositaria $R\$3,00$*;*
no quinto ano a mãe depositaria $R\$5,00$*; e assim sucessivamente até que o filho completasse 21 anos.*
Qual a quantia que o pai depositou para o seu filho?

Solução: Observemos que os depósitos são feitos segundo a sequência de Fibonacci, além disso, denotando d_1 o primeiro depósito, d_2 o segundo depósito, e assim sucessivamente, veremos que os depósitos do pai ocorrem sempre, quando o índice da seqência é par, logo para sabermos a quantia depositada pelo pai, basta somarmos 10 primeiros termos de índice par. Assim pela propriedade (2.3.3) temos,

$$\sum_{i=1}^{10} f_{2i} = f_{2.10+1} - f_1,$$

$$\sum_{i=1}^{10} f_{2i} = f_{21} - f_1,$$

$$\sum_{i=1}^{10} f_{2i} = f_{21} - f_1,$$

$$\sum_{i=1}^{6} f_{2i} = 10946 - 1.$$

Portanto o pai depositará neste período a quantia de $R\$10.945,00$.

Além das propriedades já mencionadas sobre a soma dos termos da sequência de Fibonacci, existe uma relação para a soma de números de Fibonacci de índice alternados, que veremos na propriedade a seguir.

Propriedade 2.3.4 *A soma alternada dos primeiros n números de Fibonacci é* $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = (-1)^{n+1}f_{n-1}+1$.

Demonstração: Dividiremos a demonstração em dois casos:
Se n é par, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2q$, então:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = (f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2q-1}) - (f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2q}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} - \sum_{i=1}^{n} f_{2i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}f_i = f_{2q} - f_{2q+1} + 1$$

Como $f_{2q+1} = f_{2q} + f_{2q-1}$
então

$$-f_{2q+1} = -f_{2q} - f_{2q-1},$$

segue que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = f_{2q} - f_{2q} - f_{2q-1} + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = 1 - f_{2q-1},$$

como $n = 2q$ por hipótese, então

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = 1 + (-1)^{n+1}f_{n-1}$$

Se n é ímpar, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$n = 2q + 1 \Rightarrow n - 1 = 2q, \tag{2.2}$$

daí,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = (f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2q+1}) - (f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2q}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = \sum_{i=1}^{n} f_{2i+1} - \sum_{i=1}^{n} f_{2i}$$

Pelas propriedades (2.3.2) e (2.3.3) respectivamente, temos que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = f_{2q+2} - f_{2q+1} + 1$$

Como $f_{2q} = f_{2q+2} - f_{2q+1}$, então

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = f_{2q} + 1 \tag{2.3}$$

Substituindo (2.2) em (2.3), segue que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = f_{n-1} + 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = 1 + (-1)^{n+1}f_{n-1}$$

Portanto, em ambos os casos, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_i = 1 + (-1)^{n+1}f_{n-1}.$$

■

Vejamos agora uma pequena exemplificação sobre o uso da propriedade que terminamos de demonstrar.

Exemplo 2.3.4 *Determine a soma alternada dos 10 primeiros termos da sequência de Fibonacci.*

Solução: Utilizando a propriedade (2.3.4), temos

$$\sum_{i=1}^{10}(-1)^{10+1}f_{10} = 1 + (-1)^{10+1}f_{10-1} \tag{2.4}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{10}(-1)^{11}f_{10} = 1 + (-1)^{11}f_9,$$

logo,

$$\sum_{i=1}^{10}(-1)^{11}f_{10} = 1 - 34 = -33.$$

Já vimos que existe uma fórmula para encontrarmos a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci, mas será que existe alguma relação para soma dos quadrados dos n primeiro números de Fibonacci?

Para respondermos essa questão, analisemos as seguintes situações particulares:

$$\begin{aligned}
&f_1^2 = 1^2 = 1.1 = f_1 f_2\\
&f_1^2 + f_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = f_2 f_3\\
&f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 1 + 1 + 4 = 6 = f_3 f_4\\
&f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 1 + 4 + 9 = 15 = f_4 f_5
\end{aligned}$$

Analisando o comportamento da sequência é natural conjecturarmos que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

Na verdade, a nossa conjectura é verdadeira e nós vamos enunciá-la e demonstrá-la como o teorema a seguir.

Teorema 2.3.1 *A soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é igual a;*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre n.

A afirmação é válida para $n = 1$, pois $f_1 = f_2 = 1$, logo

$$f_1^2 = 1^2 = 1.1 = f_1 f_2 = 1.$$

Suponhamos que a afirmação seja válida para para $n = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_k^2 = f_k f_{k+1},$$

e queremos provar que a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1 \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1} f_{k+2}.$$

Com efeito, por hipótese de indução, temos

$$\sum_{i=1}^{k} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_k^2 = f_k f_{k+1}, \tag{2.5}$$

somando f_{k+1}^2 em ambos os membros da igualdade (2.5), obtemos

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}.f_{k+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k + f_{k+1})$$

Sabemos por definição que $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$, logo

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + ... + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1} f_{k+2}$$

Assim sendo, a verdade para $n = k$ implica na verdade para $n = k+1$, logo pelo teorema (1.1.1), temos que a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Agora enunciaremos mais uma relação notável entre os números de Fibonacci.

Propriedade 2.3.5 $f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + ... + nf_n = (n+1)f_{n+2} - f_{n+4} + 2.$

Demonstração: Vamos efetuar a demonstração por indução sobre n.
Observemos que

$$f_1 = 1 = 4 - 5 + 2 = 2f_3 - f_5 + 2,$$

logo a afirmação é válida para $n = 1$.

Suponhamos que a afirmação seja válida para $n = k \in \mathbb{N}$, isto é

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + ... + kf_k = (k+1)f_{k+2} - f_{k+4} + 2, \tag{2.6}$$

e queremos provar que ela também é válida para $n = k+1 \in \mathbb{N}$, ou seja, que

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + ... + kf_k + (k+1)f_{k+1} = (k+2)f_{k+3} - f_{k+5} + 2.$$

Com efeito, somando $(k+1)f_{k+1}$ em (2.6), temos

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + ... + kf_k + (k+1)f_{k+1} = (k+1)f_{k+2} - f_{k+4} + (k+1)f_{k+1} + 2$$

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + ... + kf_k + (k+1)f_{k+1} = (k+1)(f_{k+2} + f_{k+1}) - f_{k+4} + 2,$$

como $f_{k+2} + f_{k+1} = f_{k+3}$, então

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + ... + kf_k + (k+1)f_{k+1} = (k+1)f_{k+3} - f_{k+4} + 2,$$

somando e subtraindo f_{k+3} no lado direito da última igualdade, obtemos

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + ... + kf_k + (k+1)f_{k+1} = (k+2)f_{k+3} - (f_{k+3} + f_{k+4}) + 2,$$

e sabendo que $f_{k+3} + f_{k+4} = f_{k+5}$, obtemos

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + ... + kf_k + (k+1)f_{k+1} = (k+2)f_{k+3} - f_{k+5} + 2.$$

Mostrando assim a validade de $n = k + 1$, e portanto pelo teorema (1.1.1), a relação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

2.4 Estimativas para os números de Fibonacci

Iremos dar um tratamento quantitativo para a sequência de Fibonacci. Vamos fazer algumas estimativas, alguns questionamentos como por exemplo, com que rapidez encontraremos um número de Fibonacci entre os números naturais, ou ainda, quão grande eles podem se tornar? A nossa primeira estimativa está na propriedade a seguir.

Propriedade 2.4.1 *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n < 2^n$.*

Vejamos como a sentença se comporta para alguns valores particulares:

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1 < 2^1 = 2 \\
f_2 &= 1 < 2^2 = 4 \\
f_3 &= 2 < 2^3 = 8 \\
f_4 &= 3 < 2^4 = 16 \\
f_5 &= 5 < 2^5 = 32 \\
f_6 &= 8 < 2^6 = 64 \\
f_7 &= 13 < 2^7 = 128 \\
f_8 &= 21 < 2^8 = 256
\end{aligned}$$

Podemos notar que para cada valor que tomamos em particular, a sentença é verdadeira. Iremos provar por indução sobre n a veracidade da propriedade para qualquer n natural.
Demonstração: Para $n = 1$, a afirmação é verdade, pois

$$1 = f_1 < 2 = 2^1.$$

Suponhamos que a sentença seja válida para $n = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$f_k < 2^k. \tag{2.7}$$

Queremos mostrar que ela também é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja,

$$f_{k+1} < 2^{k+1}.$$

Com efeito, multiplicando (2.7) por 2, obtemos

$$2f_k < 2.2^k \Rightarrow 2f_k < 2^{k+1}.$$

Note que $2f_k = f_k + f_k > f_k + f_{k-1} = f_{k+1}$, então

$$2f_k > f_{k+1},$$

logo

$$f_{k+1} < 2f_k < 2^{k+1},$$

e assim por transitividade, temos

$$f_{k+1} < 2^{k+1}.$$

Portanto, a afirmação é válida para $n = k + 1$, e pelo teorema (1.1.1) a sentença é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Devemos observar que embora verdadeira esta estimativa não é tão boa, pois ela nos mostra que, por exemplo, $f_{10} = 55 < 2^{10} = 1024$, o que se pode ver facilmente para valores pequenos de n.

Mas vamos continuar investigando estimativas mais precisas, bem como, a maneira como os números de Fibonacci estão dispostos entre os números naturais, isto é, dado um número natural n, quando, a partir de n, podemos ter certeza que encontreremos um número de Fibonacci? Vejamos o que o próximo resultado diz a respeito a isso.

Teorema 2.4.1 *Para todo natural $n \geq 1$, há pelo menos um número de Fibonacci entre n e $2n$.*

Demonstração: Se n é um número de Fibonacci, não há o que provar. Caso contrário, seja f_k o maior número de Fibonacci menor que n, ou seja,

$$f_k < n. \tag{2.8}$$

Multiplicando (2.8) por 2, obtemos

$$2f_k < 2n.$$

Veja que, $2f_k = f_k + f_k > f_k + f_{k-1} = f_{k+1}$, logo

$$f_{k+1} < 2f_k < 2n,$$

assim temos por transitividade que

$$f_{k+1} < 2n.$$

Como f_k é o maior número de Fibonacci menor que n, então $n < f_{k+1}$, assim

$$n < f_{k+1} < 2n,$$

provando que sempre existe um número de Fibonacci entre n e $2n$. ■

Perceba que essa é a melhor estimativa que podemos fazer, entretanto ela não nos diz quantos nem qual(is) número(s) de Fibonacci temos entre n e $2n$.

Podemos ainda fazer uma estimativa entre os números de Fibonacci e as potências de base 2, que será mostrada na propriedade a seguir.

Propriedade 2.4.2 *Existe pelo um número de Fibonacci entre 2^n e 2^{n+1}.*

Demonstração: Se 2^n é um número de Fibonacci, não há o que demonstrar. Se não, então seja f_k o maior número de Fibonacci menor que 2^n, isto é,

$$f_k < 2^n. \tag{2.9}$$

Multiplicando (2.9) por 2, obtemos

$$2f_k < 2.2^n \Rightarrow 2f_k < 2^{n+1}.$$

Perceba que

$$2f_k = f_k + f_k > f_{k+1},$$

logo

$$f_{k+1} < 2f_k < 2^{n+1},$$

e por transitividade obtemos

$$f_{k+1} < 2^{n+1}.$$

Como f_k é o maior número de Fibonacci menor que 2^n, então $f_{k+1} > 2^n$, segue que

$$2^n < f_{k+1} < 2^{n+1}.$$

Portanto sempre existe um número de Fibonacci entre 2^n e 2^{n+1}. ■

Até aqui já mostramos três estimativas para os números de Fibonacci, mas mesmo com essas estimativas, não podemos afirmar muitas coisas sobre a sequência e os termos desta sequência. Por exemplo, se dividir um número de Fibonacci pelo seu antecessor, o que será que obtemos?

Fazendo $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, para n variando de 1 a 3, temos:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1; \ \frac{f_3}{f_2} = \frac{2}{1} = 2; \ \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

Analisando as três primeiras razões, aparentemente não existe nenhuma relação em tal razão, mas como nosso objetivo é investigar o comportamento da sequência, então analisaremos esta razão para n variando de 4 a 6:

$$\frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = 1,666...; \frac{f_6}{f_5} = \frac{8}{5} = 1,6; \frac{f_7}{f_6} = \frac{13}{8} = 1,625;$$

Notemos que a razão aparentemente está cada vez mais próxima de 1,6; porém vamos continuar o nosso estudo, para mais alguns valores de n, para tentarmos encontrar algum padrão na nossa razão, observando agora o comportamento da razão para $7 \leq n \leq 9$;

$$\frac{f_8}{f_7} = \frac{21}{13} = 1,615...; \frac{f_9}{f_8} = \frac{34}{21} = 1,619...; \frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} = 1,617...;$$

Aparentemente a razão está ficando cada vez mais próxima de 1,61 mas será que essa tendência se mantém para os demais valores de n? Continuemos analisando mais alguns casos particulares:

$$\frac{f_{11}}{f_{10}} = \frac{89}{55} = 1,618...; \frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{144}{89} = 1,617...;$$
$$\frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} = 1,618...; \frac{f_{14}}{f_{13}} = \frac{377}{233} = 1,618...;$$

Para esses valores particulares que analisamos, aparentemente podemos conjecturar que se dividirmos um número de Fibonacci pelo seu antecessor, o valor encontrado se aproxima de 1,618, que é um número muito especial, o qual falaremos dele mais adiante.

Como sabemos definir um número de Fibonacci apenas de forma recursiva, isto é, não temos uma expressão para expressar o n-ésimo termo de tal sequência, fica inviável tentar demonstrar a nossa suspeita, que a medida que n se torna suficiente grande, então a razão $\frac{f_{n+1}}{f_n}$, tende para 1,618.

O ideal é que existisse uma maneira para determinarmos com precisão um termo da sequência sabendo apenas a sua posição, pois assim conseguiríamos fazer a nossa demonstração tranquilamente. Será que isso é possível?

A resposta é sim, isso é possível e a relação que permite determinar o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci é conhecida como fórmula de Binet, em homenagem ao matemático que a redescobriu.

Segundo Contador (2012), "foi Jacques Binet 1786 – 1856, matemático que desenvolveu o processo para o cálculo do n-ézimo termo de uma sequência em função da sua posição. Alguns autores atribuem a Leonhard Euler, e outros à Moivre esse desenvolvimento".

O teorema a seguir apresenta o termo da sequência de Fibonacci, em função da posição ocupada na sequência.

Teorema 2.4.2 *O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci é dado por*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big],$$

Demonstração: A definição (2.2.1) é uma recorrência de segunda ordem, pois um dos termos é definido em função dos dois termos antecessores.

A recorrência apresentada na definição (2.2.1), possui equação característica

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

que possui raízes $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Segundo Lima et al. (2006), "se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes".

A demonstração dessa afirmação encontra-se no próprio livro, mas aqui nós omitiremos a demonstração. Utilizando essa ideia, a solução de (2.2.1) é dada por:

$$f_n = C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1} + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}. \tag{2.10}$$

pois a nossa recorrência é da forma $x_{n+1} + px_n + qx_{n-1} = 0$.

Tomando $n = 1$ e $n = 2$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_1 = C_1\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{1-1} + C_2\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{1-1} \\ f_2 = C_1\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{2-1} + C_2\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{2-1} \end{cases}$$

logo,

$$\begin{cases} 1 = C_1\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{0} + C_2\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{0} \\ 1 = C_1\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{1} + C_2\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{1} \end{cases}$$

assim,

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= C_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + C_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema temos:

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \tag{2.11}$$

e

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10), obtemos

$$f_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n}.$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n}\Big], \tag{2.13}$$

que é a fórmula de Binet. ■

Segundo Hefez (2011) "é notável que seja necessário recorrer a fórmulas envolvendo números irracionais para representar os elementos da sequência de Fibonacci que são números naturais".

Vejamos um exemplo de como encontrar um termo da sequência de Fibonacci.

Exemplo 2.4.1 *Encontre o 5º termo da sequência de Fibonacci sem usar a forma recursiva.*

Solução: Como estamos querendo encontrar o 5º termo, então basta descobrirmos o valor de f_5 usando a fórmula de (2.13), isto é,

$$f_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{5} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{5}\Big],$$

expandindo o binômio de Newton, temos:

$$f_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{176+80\sqrt{5}}{32}\Big) - \Big(\frac{176-80\sqrt{5}}{32}\Big)\Big],$$

simplificando, obtemos

$$f_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{160\sqrt{5}}{32}\Big)\Big]$$

$$f_5 = \frac{160\sqrt{5}}{32\sqrt{5}}$$

$$f_5 = 5$$

Como já temos uma fórmula fechada para encontrar qualquer termo da sequência de Fibonacci, já podemos demonstrar que $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ tende para 1,618. Porém antes de efetuarmos a nossa demonstração, vamos fazer um breve relato histórico sobre esse número.

O Número de Ouro, como assim é conhecido, é um número misterioso, enigmático e místico que tem intrigado a humanidade desde a antiguidade. Ele também é conhecido como Número Áureo, Razão Áurea, Proporção Divina, Divina Proporção, Seção ou Secção Áurea por representar para muitos a perfeição, a harmonia e a beleza.

O matemático americano Mark Barr, no final do século XIX, batizou o Número de Ouro pela letra grega phi (Φ), lê-se fi, em homenagem ao escultor grego Fídias (Phidias) ao qual é atribuído a utilização de tal proporção em suas obras tais como Partenon e a estátua de Zeus. Existem relatos que outras figuras importantes no ramo das Ciências utilizaram o número Φ, tais como:Pitágoras, Euclides, Fibonacci, Kepler, dentre outros, mostrando toda misticidade e mistério envolvendo Φ.

Geometricamente, Φ surge a partir da divisão de um segmento em razão extrema e média, que foi definido pela primeira vez por Euclides há cerca de 300 a.C., como se segue:

Definição 2.4.1 *Um segmento de reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte.*

Aplicando a definição acima na figura a seguir, sabendo que $AB > AC > CB$, temos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB},$$

Fazendo $AC = x$ e $CB = 1$, então $AB = x + 1$. daí,

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1},$$

logo,

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{2.14}$$

Notemos que desenvolvendo (2.14) encontraremos duas raízes distintas a saber: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Como a primeira raiz é positiva, então tomaremos

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

logo,

$$\Phi = 1,618033988749895....$$

Portanto, Φ (número de ouro) é um número irracional, isto é, não pode ser representado como uma razão de números inteiros.

Agora já podemos demonstrar a nossa conjectura, enunciada no teorema a seguir.

Teorema 2.4.3 *O limite da razão* $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$*, quando* n *tende ao infinito é* Φ*, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Demonstração: De fato, de acordo com a equação (2.13) sabemos que

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \quad e \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right],$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} = 0,$$

pois $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]},$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

como queríamos demonstrar. ∎

2.5 Relações entre os números de Fibonacci

Já mostramos algumas propriedades para somas de números de Fibonacci, algumas estimativas e, agora, apresentaremos relações entre os números de Fibonacci.

No artigo Dassie e Lima (2012), a seguinte propriedade é enunciada: "dados três termos consecutivos da sequência de Fibonacci o produto do primeiro com o terceiro é igual ao quadrado do segundo menos uma unidade", mas averiguamos que a propriedade citada não é válida para qualquer valor de n. Vejamos nos exemplos a seguir:

- $(..., 1, 2, 3, ...) \Rightarrow 1.3 = 3 = 2^2 - 1$

- $(...,3,5,8,...) \Rightarrow 3.8 = 24 = 5^2 - 1.$

Porém, averiguamos que a propriedade citada não é válida para qualquer valor de n, isto pode ser observado no contra exemplo abaixo.

- $(...,5,8,13,...) \Rightarrow 5.13 = 65 \neq 8^2 - 1,$

logo a propriedade não é válida para quaisquer 3 termos consecutivos da sequência.

Além disso, damos nossa contribuição enunciando um resultado geral para três termos consecutivos da sequência de Fibonacci, que se dá na propriedade a seguir. Em um segundo momento, dividiremos-a em dois casos de modo que facilite o entendimento do leitor, na forma das propriedades (2.5.2) e (2.5.3).

Propriedade 2.5.1 *Dados três números de Fibonacci consecutivos, tem-se a seguinte relação:*

$$f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} + (-1)^n. \tag{2.15}$$

Vejamos o que acontece com essa relação para n variando de 1 a 8:

$$\begin{aligned}
f_2^2 &= 1^2 = 1.2 - 1 = f_1 f_3 + (-1)^1\\
f_3^2 &= 2^2 = 1.3 + 1 = f_2 f_4 + (-1)^2\\
f_4^2 &= 3^2 = 2.5 - 1 = f_3 f_5 + (-1)^3\\
f_5^2 &= 5^2 = 3.8 + 1 = f_4 f_6 + (-1)^4\\
f_6^2 &= 8^2 = 5.13 - 1 = f_5 f_7 + (-1)^5\\
f_7^2 &= 13^2 = 8.21 + 1 = f_6 f_8 + (-1)^6\\
&.
\end{aligned}$$

Analisando os resultados para os valores particulares, realmente parece ser verdadeira a relação e vamos provar isso usando indução sobre n.

Demonstração: A equação é válida para $n = 1$, pois

$$f_2^2 = 1^2 = 1.2 - 1 = f_1 f_3 + (-1)^1.$$

Suponhamos que a equação (2.15) seja verdadeira para $n = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$f_{k+1}^2 = f_k f_{k+2} + (-1)^k, \tag{2.16}$$

e queremos provar que (2.16) é verdadeiro para $n = k + 1$, ou seja,

$$f_{k+2}^2 = f_{k+1} f_{k+3} + (-1)^{k+1}.$$

De fato, somando $f_{k+1} f_{k+2}$ em ambos os membros de (2.16), temos:

$$f_{k+1}^2 + f_{k+1}f_{k+2} = f_kf_{k+2} + f_{k+1}f_{k+2} + (-1)^k,$$

logo

$$f_{k+1}(f_{k+1} + f_{k+2}) = f_{k+2}(f_k + f_{k+1}) + (-1)^k,$$

como $f_{k+1} + f_{k+2} = f_{k+3}$ e $f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$,
então

$$f_{k+1}f_{k+3} = f_{k+2}f_{k+2} + (-1)^k,$$

assim

$$-f_{k+2}^2 = -f_{k+1}f_{k+3} + (-1)^k, \tag{2.17}$$

multiplicando ambos os membros de (2.17) por (-1), obtemos

$$f_{k+2}^2 = f_{k+1}f_{k+3} + (-1)^{k+1}.$$

Como a equação é verdadeira para $n = k + 1$, então pelo teorema (1.1.1), é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

A seguir vamos enunciar e demonstrar duas propriedades que são casos particulares da propriedade que acabamos de demonstrar.

Propriedade 2.5.2 *Dados três números consecutivos da sequência de Fibonacci, tal que o primeiro deles é de índice ímpar, então o quadrado do segundo termo é igual ao produto do primeiro com o terceiro menos uma unidade, isto é,*

$$f_{n+1}^2 = f_nf_{n+2} - 1$$

Demonstração: Basta notar que sendo o primeiro número de índice ímpar, então $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$ e $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = -1$, assim (**??**) pode ser reescrita como

$$f_{n+1}^2 = f_nf_{n+2} - 1,$$

o que conclui a demonstração. ■

Propriedade 2.5.3 *Tomando-se três números consecutivos da sequência de Fibonacci, tal que o primeiro termo é de índice par, então o quadrado do segundo termo é igual o produto do primeiro com o terceiro mais uma unidade, ou seja,*

$$f_{n+1}^2 = f_nf_{n+2} + 1.$$

Demonstração: Aqui devemos notar que como o primeiro termo é de índice par, logo $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $(-1)^n = (-1)^{2k} = 1$, assim (**??**) pode ser reescrita como

$$f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} + 1,$$

o que demonstra a propriedade. ■

Acabamos de apresentar duas relações para quaisquer três termos consecutivos da sequência de Fibonacci, agora mostraremos uma relação para quatro termos consecutivos.

Propriedade 2.5.4 *Dados quatro termos consecutivos da sequência de Fibonacci, é verdade que*

$$f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n. \tag{2.18}$$

Inicialmente verificaremos como se comporta essa relação para alguns valores particulares, isto é, para n variando de 1 a 9, obtemos:

$$\begin{aligned}
&f_2 f_3 - f_1 f_4 = 1.2 - 1.3 = -1 = (-1)^1 \\
&f_3 f_4 - f_2 f_5 = 2.3 - 1.5 = 1 = (-1)^2 \\
&f_4 f_5 - f_3 f_6 = 3.5 - 2.8 = -1 = (-1)^3 \\
&f_5 f_6 - f_4 f_7 = 5.8 - 3.13 = 1 = (-1)^4 \\
&f_6 f_7 - f_5 f_8 = 8.13 - 5.21 = -1 = (-1)^5 \\
&f_7 f_8 - f_6 f_9 = 13.21 - 8.34 = 1 = (-1)^6 \\
&.
\end{aligned}$$

Realmente, para alguns valores a relação parece verdadeira. Provemos, agora, a veracidade de (2.18).

Demonstração: Como $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ e $f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1}$, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} &= f_{n+1}(f_{n+1} + f_n) - f_n(f_{n+1} + f_{n+2}) \\
f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} &= f_{n+1}^2 + f_n f_{n+1} - f_n f_{n+1} - f_n f_{n+2} \\
f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} &= f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}.
\end{aligned}$$

Pela propriedade (2.16), sabemos que $f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} + (-1)^n$, assim

$$\begin{aligned}
f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} &= f_n f_{n+2} + (-1)^n - f_n f_{n+2} \\
f_{n+1} f_{n+2} - f_n f_{n+3} &= (-1)^n,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

As duas próximas propriedades são casos particulares, mas não menos importantes do que esta propriedade que acabamos de demonstrar.

Propriedade 2.5.5 *Dados quatro termos consecutivos da sequência de Fibonacci, tal que o índice do primeiro termo é par, então o produto dos meios subtraído do produto dos extremos é igual a 1, ou seja,*

$$f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = 1.$$

Demonstração: A demonstração é bastante simples, pois como o primeiro termo é par, então $(-1)^n = 1$, logo (2.18) fica da seguinte maneira:

$$f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = 1,$$

o que prova o nosso resultado. ■

Propriedade 2.5.6 *Dados quatro termos consecutivos da sequência de Fibonacci, tal que o índice do primeiro termo é ímpar, então o produto dos meios subtraído do produto dos extremos é igual a -1, ou seja,*

$$f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = -1.$$

Demonstração: A demonstração é simples, basta notar que como o primeiro termo é ímpar, então $(-1)^n = -1$, assim (2.18) fica da seguinte maneira:

$$f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = -1,$$

o que prova a nossa propriedade. ■

Propriedade 2.5.7 *Se $m > 1$ e $n \geq 1$, então*

$$f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}.$$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre n.
Se $n = 1$, a afirmação é verdadeira, pois

$$f_{m+1} = f_{m-1}f_1 + f_m f_2 = f_{m-1} + f_m.$$

Suponhamos agora que a afirmação seja verdadeira para $n = 1, 2, 3, ..., k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$f_{m+k} = f_{m-1}f_k + f_m f_{k+1}.$$

Queremos mostrar a veracidade de tal afirmação para $n = k + 1 \in \mathbb{N}$, isto é,

$$f_{m+k+1} = f_{m-1}f_{k+1} + f_m f_{k+2}.$$

Com efeito, pela hipótese de indução, temos

$$f_{m+k} = f_{m-1}f_k + f_m f_{k+1} \text{ e } f_{m+k-1} = f_{m-1}f_{k-1} + f_m f_k.$$

Somando ordenadamente membro a membro as duas igualdades acima, obtemos

$f_{m+k} + f_{m+k-1} = f_{m-1}f_k + f_{m-1}f_{k-1} + f_m f_{k+1} + f_m f_k = f_{m-1}(f_k + f_{k-1}) + f_m(f_{k+1} + f_k)$.

Note que por definição:

$$f_k + f_{k-1} = f_{k+1}; f_{k+1} + f_k = f_{k+2} \text{ e } f_{m+k} + f_{m+k-1} = f_{m+k+1},$$

logo

$$f_{m+k+1} = f_{m-1}f_{k+1} + f_m f_{k+2},$$

demonstrando que a afirmação é verdadeira para $n = k + 1$.

Portanto, pelo teorema (1.1.1), temos a veracidade da afirmação para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.5.1 *Sabendo que* $f_{14} = 377, f_{15} = 610, f_5 = 5$ *e* $f_6 = 8$*, determine o valor de* f_{20}.

Solução: Como pela propriedade (2.5.7) $f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}$, então basta notar que

$$f_{20} = f_{15+5} = f_{14}f_5 + f_{15}f_6,$$

ou seja,

$$f_{20} = 377.5 + 610.8 = 6765.$$

Ainda sobre as relações envolvendo os números de Fibonacci, Dassie e Lima (2012) afirmam que "a diferença dos quadrados de dois números de Fibonacci alternados é sempre um numero de Fibonacci". Na verdade podemos enunciar um resultado ainda mais forte, o qual o faremos na propriedade a seguir.

Propriedade 2.5.8 *A diferença dos quadrados de dois números de Fibonacci alternados é igual a* f_{2n}*, isto é,*

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2, \text{ para todo } n > 1.$$

Demonstração: Pela propriedade (2.5.7) sabemos que $f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}$, logo

$$f_{2n} = f_{n+n} = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1}$$

segue que

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})$$

Sabe-se que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \Rightarrow f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$, então

$$f_{2n} = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n-1} + f_{n+1}),$$

assim

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2,$$

o que completa a nossa demonstração. ∎

2.6 Propriedades Aritméticas

Nesta parte destacaremos aquilo que entendemos de mais importante na sequência de Fibonacci, que é podermos fazer afirmações sobre termos da sequência sem conhecer o valor do termo.

Sobre propriedades da sequência de Fibonacci, Dassie e Lima (2012) afirmam que " a soma de dez termos consecutivos quaisquer da sequência é sempre um número ímpar divisível por 11".

Eles citam ainda alguns exemplos. Vejamos:

- $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143 \Rightarrow 143 : 11 = 13$
- $5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 = 979 \Rightarrow 979 : 11 = 89$
- $89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 + 4181 + 6795 = 17567 \Rightarrow 17567 : 11 = 1597$
- $233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 + 4181 + 6765 + 10946 + 17711 = 45991 \Rightarrow 45991 : 11 = 4181$

Agora, cabe uma pergunta: será que a soma de quaisquer 10 termos consecutivos da sequência citada é sempre um número ímpar e divisível por 11?

Averiguamos que o resultado citado não é válido para todos valores de n propostos, vejamos um contra exemplo mostrando que nem sempre essa soma é ímpar:

- $2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 = 374 \Rightarrow 374 : 11 = 34.$

O nosso contra exemplo mostra apenas que nem sempre a soma é ímpar. Além disso, damos a nossa contribuição na forma do teorema a sequir, mostrando que embora a soma nem sempre seja ímpar, contudo é sempre um múltiplo de 11.

A soma de dez termos consecutivos da sequência de Fibonacci é sempre um múltiplo de 11.

Demonstração: Sejam S_{10} e f_n, respectivamente, a soma de 10 termos consecutivos e o primeiro termo escolhido na sequência de Fibonacci. Sabemos que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ e, de forma recursiva, podemos também escrever

$$
\begin{aligned}
f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n = f_n + f_{n-1} + f_n = 2f_n + f_{n-1} \\
f_{n+3} &= f_{n+2} + f_{n+1} = 2f_n + f_{n-1} + f_n + f_{n-1} = 3f_n + 2f_{n-1} \\
f_{n+4} &= f_{n+3} + f_{n+2} = 3f_n + 2f_{n-1} + 2f_n + f_{n-1} = 5f_n + 3f_{n-1} \\
f_{n+5} &= f_{n+4} + f_{n+3} = 5f_n + 3f_{n-1} + 3f_n + 2f_{n-1} = 8f_n + 5f_{n-1}.
\end{aligned}
$$

De modo análogo, temos que

$$f_{n+6} = 13f_n + 8f_{n-1} \tag{2.19}$$

$$f_{n+7} = 21f_n + 13f_{n-1}$$
$$f_{n+8} = 34f_n + 21f_{n-1}$$
$$f_{n+9} = 55f_n + 34f_{n-1}.$$

Logo a soma dos dez termos consecutivos é dada por,

$S_{10} = f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9} \Rightarrow$
$S_{10} = 143f_n + 88f_{n-1} \Rightarrow$

$$S_{10} = 11(13f_n + 8f_{n-1}) \tag{2.20}$$

Portanto S_{10} é um múltiplo de 11 como queríamos demonstrar. ■

Provamos que dados 10 termos consecutivos da sequência de Fibonacci a sua soma é sempre um múltiplo de 11, mas podemos afirmar algo ainda mais forte, além dessa soma ser múltiplo de 11, o quociente da divisão por 11 é sempre o sétimo termo dentre os escolhidos.

De fato, mostramos em (2.20) que

$$S_{10} = 11(13f_n + 8f_{n-1}). \tag{2.21}$$

Se fizermos $\dfrac{S_{10}}{11}$, obteremos

$$\frac{11(13f_n + 8f_{n-1})}{11} = (13f_n + 8f_{n-1}),$$

que, por (2.19), é o f_{n+6} que é o sétimo termo, o que prova o nosso resultado.

Sendo assim a soma de 10 termos consecutivos da sequência de Fibonacci além de ser múltiplo de 11, o seu quociente é sempre o 7º termo dentre os 10 escolhidos.

Propriedade 2.6.1 *A soma de seis termos quaisquer da sequência de Fibonacci é um múltiplo de 4.*

Demonstração: Seja S_6 a soma dos seis termos consecutivos de Fibonacci, f_n o primeiro termo dentre os escolhidos. Sabemos que

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1},$$

logo

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = f_n + f_{n-1} + f_n = 2f_n + f_{n-1}$$
$$f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1} = 2f_n + f_{n-1} + f_n + f_{n-1} = 3f_n + 2f_{n-1}$$
$$f_{n+4} = f_{n+3} + f_{n+2} = 3f_n + 2f_{n-1} + 2f_n + f_{n-1} = 5f_n + 3f_{n-1}$$
$$f_{n+5} = f_{n+4} + f_{n+3} = 5f_n + 3f_{n-1} + 3f_n + 2f_{n-1} = 8f_n + 5f_{n-1}.$$

Assim,

$$S_6 = f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5},$$

ou seja,

$$S_6 = f_n + f_n + f_{n-1} + 2f_n + f_{n-1} + 3f_n + 2f_{n-1} + 5f_n + 3f_{n-1} + 8f_n + 5f_{n-1} \Rightarrow$$

$$S_6 = 20f_n + 12f_{n-1} \Rightarrow$$

$$S_6 = 4(5f_n + 3f_{n-1}) \tag{2.22}$$

Portanto a soma de seis termos consecutivos de Fibonacci é um múltiplo de 4. ■

Propriedade 2.6.2 *O quociente entre a soma de quaisquer 6 termos consecutivos da sequência de Fibonacci e 4, é sempre igual ao 5º termo dentre os escolhidos.*

Demonstração: Sabe-se pela propriedade (2.6.1) que a soma de 6 termos consecutivos da sequência de Fibonacci é dado por:

$$S_6 = 4(5f_n + 3f_{n-1}),$$

que é um múltiplo de 4. Além disso, dividindo S_6 por 4, obtemos

$$\frac{S_6}{4} = \frac{4(5f_n + 3f_{n-1})}{4} = (5f_n + 3f_{n-1}),$$

que pela demonstração da propriedade (2.6.1) é exatamente o quinto termo dentre os escolhidos.

■

Propriedade 2.6.3 *Dados 14 termos consecutivos da sequência de Fibonacci, a sua soma é sempre um múltiplo de 29.*

Demonstração: Sejam f_n o primeiro termo escolhido na sequência de Fibonacci e S_{14} a soma de 14 termos consecutivos da sequência citada. Então, pela definição recorrente de tal sequência os demais termos de forma ordenada são:

$$
\begin{aligned}
&f_{n+1} = f_n + f_{n-1}\\
&f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = f_n + f_{n-1} + f_n = 2f_n + f_{n-1}\\
&f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1} = 2f_n + f_{n-1} + f_n + f_{n-1} = 3f_n + 2f_{n-1}\\
&f_{n+4} = f_{n+3} + f_{n+2} = 3f_n + 2f_{n-1} + 2f_n + f_{n-1} = 5f_n + 3f_{n-1}\\
&f_{n+5} = f_{n+4} + f_{n+3} = 5f_n + 3f_{n-1} + 3f_n + 2f_{n-1} = 8f_n + 5f_{n-1}\\
&f_{n+6} = f_{n+5} + f_{n+4} = 8f_n + 5f_{n-1} + 5f_n + 3f_{n-1} = 13f_n + 8f_{n-1}\\
&f_{n+7} = f_{n+6} + f_{n+5} = 13f_n + 8f_{n-1} + 8f_n + 5f_{n-1} = 21f_n + 13f_{n-1}\\
&f_{n+8} = f_{n+7} + f_{n+6} = 21f_n + 13f_{n-1} + 13f_n + 8f_{n-1} = 34f_n + 21f_{n-1}\\
&f_{n+9} = f_{n+8} + f_{n+7} = 34f_n + 21f_{n-1} + 21f_n + 13f_{n-1} = 55f_n + 34f_{n-1}\\
&f_{n+10} = f_{n+9} + f_{n+8} = 55f_n + 34f_{n-1} + 34f_n + 21f_{n-1} = 89f_n + 55f_{n-1}\\
&f_{n+11} = f_{n+10} + f_{n+9} = 89f_n + 55f_{n-1} + 55f_n + 34f_{n-1} = 144f_n + 89f_{n-1}\\
&f_{n+12} = f_{n+11} + f_{n+10} = 144f_n + 89f_{n-1} + 89f_n + 55f_{n-1} = 233f_n + 144f_{n-1}\\
&f_{n+13} = f_{n+12} + f_{n+11} = 233f_n + 144f_{n-1} + 144f_n + 89f_{n-1} = 377f_n + 233f_{n-1},
\end{aligned}
$$

logo

$$S_{14} = f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + ... + f_{n+11} + f_{n+12} + f_{n+13},$$

ou seja,

$$S_{14} = 986f_n + 609f_{n-1} = 29(34f_n + 21f_{n-1}),$$

o que demonstra a nossa propriedade.

■

Como acabamos de demonstrar, a soma de 14 termos consecutivos da sequência de Fibonacci é um múltiplo de 29. Contudo além de ser múltiplo de 29, tal soma quando dividida por 29 obtem-se sempre o 9º termo dentre os termos escolhidos. Com efeito, pela propriedade anterior, sabemos que

$$S_{14} = 29(34f_n + 21f_{n-1}).$$

Assim, dividindo S_{14} por 29 obtemos

$$\frac{S_{14}}{29} = \frac{29(34f_n + 21f_{n-1})}{29} = 34f_n + 21f_{n-1},$$

que pelo desenvolvimento da demonstração da propriedade (2.6.3) é o 9º termo dentre os 14 escolhidos, completando a nossa demonstração.

Já apresentamos um resultado para a razão de dois termos consecutivos sobre a sequência de Fibonacci, mas como será que se comporta o *mdc* de dois termos consecutivos de tal sequência? Analisemos a tabela a seguir.

termo da sequência	número de Fibonacci	decomposição em fatores primos
f_1	1	-
f_2	1	-
f_3	2	2
f_4	3	3
f_5	5	5
f_6	8	$2.2.2 = 2^3$
f_7	13	13
f_8	21	3.7
f_9	34	2.17
f_{10}	55	5.11
f_{11}	89	89
f_{12}	144	$2.2.2.2.3.3 = 2^4.3^2$
f_{13}	233	233
f_{14}	377	13.29
f_{15}	610	2.5.61

Tabela 2.2: Decomposição em fatores primos de alguns números de Fibonacci

Analisando a tabela acima, podemos observar que dois termos consecutivos não possuem nenhum fator comum na decomposição em fatores primos, logo o máximo divisor comum de dois termos consecutivos desta tabela é 1. Vejamos a propriedade a seguir sobre o mdc dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci.

Propriedade 2.6.4 *Dois números de Fibonacci consecutivos são coprimos entre si, isto é,*

$$mdc(f_n, f_{n+1}) = 1.$$

Demonstração: Sejam f_n e f_{n+1} os números de Fibonacci consecutivos e seja $d = mdc(f_n,f_{n+1})$, percebamos que $d > 0$ pois f_n e f_{n+1} são inteiros positivos. Notemos ainda que $d \mid f_n$ e $d \mid f_{n+1}$, pois d é o $mdc(f_n, f_{n+1})$, então $d \mid f_{n-1}$, pois $f_{n-1} = f_{n+1}$ - f_n.Como $d \mid f_n$ e $d \mid f_{n-1}$, então $d \mid f_{n-2}$. Continuando com esse raciocínio, verificaremos que $d \mid f_2$, logo $d \mid 1$, pois $f_2 = 1$, logo d só pode ser 1, o que conclui a nossa demonstração. ∎

Propriedade 2.6.5 *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos que f_m é múltiplo de f_{mn}, isto é,*

$$f_m \mid f_{mn}.$$

Demonstração: Procederemos a nossa demonstração por indução sobre n. Perceba que, para $n = 1$ a afirmação é verdadeira pois,

$$f_m \mid f_m.$$

Suponhamos agora que a afirmação seja verdadeira para $n = 1, 2, 3, 4, ..., k \in \mathbb{N}$ (hipótese de indução), ou seja,

$$f_m \mid f_{mk}.$$

Queremos provar que vale para $n = 1, 2, 3, 4, ..., k+1 \in \mathbb{N}$. Iremos mostrar que

$$f_m \mid f_{m(k+1)}.$$

De fato,
$f_{m(k+1)} = f_{mk+m}$, e por (2.5.7), segue que

$$f_{m(k+1)} = f_{mk+m} = f_{mk-1}f_m + f_{mk}f_{m+1}.$$

Como $f_m \mid f_m$ e por hipótese de indução $f_m \mid f_{mk}$, então

$$f_m \mid f_{mk-1}f_m \text{ e } f_m \mid f_{mk}f_{m+1},$$

logo f_m divide a soma, isto é,

$$f_m \mid f_{mk-1}f_m + f_{mk}f_{m+1},$$

ou seja,

$$f_m \mid f_{m(k+1)}.$$

Portanto, pelo teorema (1.1.1), a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Esta propriedade é interessante, pois mesmo sem conhecer o valor de f_n, podemos afirmar, por exemplo, que $5 = f_5$ divide f_{98745} que é um número muito grande e que teríamos dificuldade em escrevê-lo, para depois usar um critério de divisibilidade e afirmar com certeza se é ou não divisível por 5.

Propriedade 2.6.6 *Sejam m e n inteiros positivos tal que $m \mid n$, então*

$$f_m \mid f_n.$$

Demonstração: Inicialmente percebamos que se $m \mid n$, então existe um inteiro q tal que

$$n = mq.$$

Agora faremos a demonstração por indução sobre q.

Se $q = 1$, então $n = m$, logo

$$f_m \mid f_n.$$

Suponhamos agora que a afirmação seja verdadeira para algum $q = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$f_m \mid f_{mk}.$$

Queremos mostrar que a afirmação também é verdadeira para $q = k+1 \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$f_m \mid f_{m(k+1)}.$$

De fato,

$f_{m(k+1)} = f_{mk+m}$ e pela propriedade (2.5.7), temos

$$f_{m(k+1)} = f_{mk-1}f_m + f_{mk}f_{m+1}.$$

Note que $f_m \mid f_{mk-1}f_m$, e sabemos que por hipótese de indução que $f_m \mid f_{mk}$, logo

$$f_m \mid f_{mk}f_{m+1},$$

e assim

$$f_m \mid f_{mk-1}f_m + f_{mk}f_{m+1}.$$

Desse modo, a afirmação é verdadeira para $q = k+1$ e portanto, pelo teorema (1.1.1) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 2.6.1 *Veja que* 3 *divide* f_{12}*, pois* $3 = f_4$ *e pela propriedade* (2.6.6) *temos que* $f_4 \mid f_{12}$.

Lema 2.6.1 *Dados* n *e* $q \in \mathbb{N}$ *o* $mdc(f_{nq-1}, f_n) = 1$.

Demonstração: Com efeito, seja $d = mdc(f_{nq-1}, f_n)$, assim $d \mid f_{nq-1}$ e $d \mid f_n$, sabemos pelo 2.6.5 que $f_n \mid f_{nq}$, além disso se $d \mid f_n$ e $f_n \mid f_{nq}$, então por transitividade $d \mid f_{nq}$.

Como $d \mid f_{nq}$ e $d \mid f_{nq-1}$ por hipótese, então d é o máximo divisor comum de dois números consecutivos de Fibonacci, a saber f_{nq-1} e f_{nq}, logo pela propriedade (2.6.4) temos que $d = 1$.

Portanto o $mdc(f_{nq-1}, f_n) = 1$. ■

Lema 2.6.2 *Dados* m, n, q *e* $r \in \mathbb{N}$*, se* $m = nq + r$*, então o*

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_n, f_r).$$

Demonstração: De fato, o $mdc(f_m, f_n) = mdc(f_{nq+r}, f_n)$. Por (2.5.7), temos que

$$mdc(f_{nq+r}, f_n) = mdc(f_{nq-1}f_r + f_{nq}f_{r+1}, f_n),$$

logo

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_{nq-1}f_r + f_{nq}f_{r+1}, f_n),$$

Pela propriedade (2.6.5) sabe-se que $f_n \mid f_{nq}$, logo $f_n \mid f_{nq}f_{r+1}$ e pela proposição (1.4.2) que afirma que se $b \mid c$, então $mdc(a + c, b) = mdc(a, b)$, temos que

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_{nq-1}f_r, f_n).$$

Pelo lema (2.6.1), sabemos que $mdc(f_{nq-1}, f_n) = 1$, e pela proposição (1.4.3), tem-se que se $mdc(a, c) = 1$, então $mdc(a, bc) = mdc(a, b)$, assim

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_n, f_r)$$

e o lema fica demonstrado. ■

A sequência de Fibonacci ainda possui outras propriedades e outros teoremas, contudo vamos apresentar apenas estes resultados e passar para o próximo capítulo, onde mostraremos algumas aparições/aplicações da sequência citada.

Capítulo 3

Manifestações e aplicações da sequência de Fibonacci

Seguindo as ideias de Lima (2006) sobre o tripé matemático, neste capítulo faremos o que ele chamou de "manipulação", apresentando algumas aparições da sequência de Fibonacci na natureza, em outros ramos da matemática, e em outras disciplinas. Além disso, vamos sugerir algumas aplicações em sala de aula.

A sequência de Fibonacci, bem como os números de Fibonacci tem várias aparições e/ou aplicações no nosso cotidiano. Segundo Contador (2012) "Hoje os números ou a sequência de Fibonacci são um importante aliado da Biologia e da Botânica. Também é aplicada em estudos na distribuição de folhas sobre o caule ou filotaxia e crescimento orgânico."

Ele considera ainda que:

> A série de Fibonacci aparece com frequência em um grande número de fenômenos naturais, define perfeitamente o esquema de reprodução dos coelhos, a proporção entre as abelhas machos e fêmeas nas colméias, a distribuição de folhas no ramo de algumas árvores.Contador (2012)

3.1 Aparições na natureza

Vamos apresentar algumas situações na natureza onde a sequência de Fibonacci se manisfesta nas mais variadas formas.

3.1.1 Aparições nas flores

Inicialmente, mostraremos algumas aparições da sequência de Fibonacci nas flores, mas vejamos bem, são aparições, nem todas as flores apresentam relações com esta sequência.

O nosso primeiro exemplo é da margarida, que de acordo com Zahn (2011) “As margaridas geralmente têm 13, 21, 34, 55 ou 89 pétalas”. Note que estes são números consecutivos da sequência de Fibonacci.

Figura 3.1: Margarida de 13 pétalas

Um outro exemplo onde aparecem os números de Fibonacci são os lírios, em que a quantidade de sépalas (que tem a função de proteger a estrutura) e as pétalas(cuja função é atrair polinizadores) são um número de Fibonacci. De acordo com Ferri (1983), “os lírios possuem 3 pétalas e 3 sépalas”. Vejamos:

Figura 3.2: Lírio vermelho

Podemos ainda citar as quaresmeiras, flores que segundo Ferri (1983) “possuem 5 pétalas”. Logo temos mais um exemplo de flor em que o número de pétalas é um número de fibonacci. Observemos:

Figura 3.3: Quaresmeira. Foto: Jardineiro.net

No livro Sequência de Fibonacci e o número de ouro, Zahn (2011) fotografou duas árvores que os seus galhos crescem segundo a sequência de Fibonacci, vejamos:

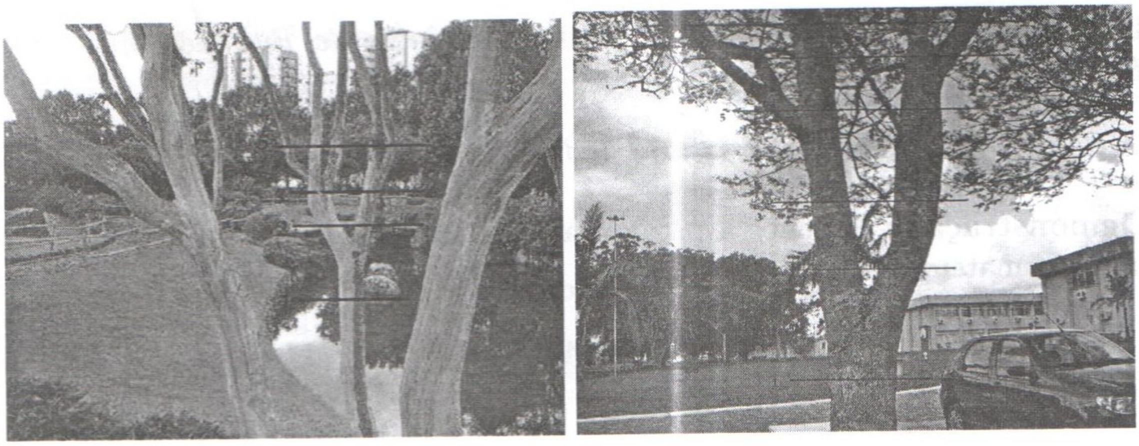


Figura 3.4: Árvores que os galhos crescem conforme a sequência de Fibonacci

Embora existam vários outros exemplos dentro da natureza em que aparecem os números de Fibonacci ou a própria sequência, finalizaremos essa seção apresentando duas manifestações interessantes da sequência citada. A primeira delas é o “girassol”, onde suas sementes preenchem o miolo dispostas em dois conjuntos de espirais, sendo 21 no sentido horário e 34 no anti horário. A segunda é a “pinha”, onde as sementes crescem e se organizam em dois conjuntos de espirais, sendo 08 espirais no horário e 13 no sentido anti horário. Vejamos na imagem abaixo:

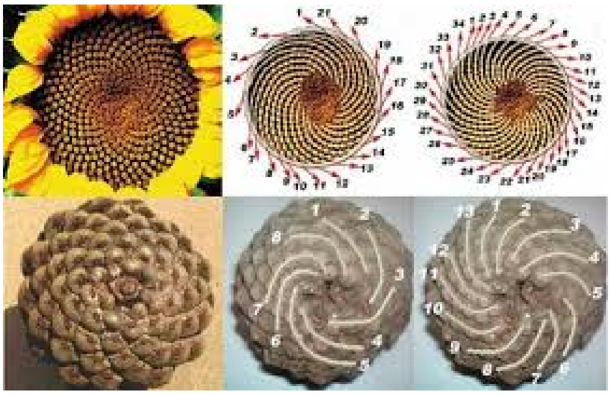


Figura 3.5: Sementes de girassol e pinha

3.2 Aplicações e/ou aparições em outras áreas do conhecimento

3.2.1 Aplicação na Física

Uma outra aparição da sequência de Fibonacci em outras áreas do conhecimento, segundo Zahn (2011), pode ser observada na Física, com o exemplo seguinte: "seja um conjunto formado por duas placas de vidro justapostas, com índice de refração diferentes. Um raio de luz que incidir sobre tal conjunto pode sofrer reflexões e desvios de várias formas". Vamos contar o número de caminhos possíveis de um raio de luz, gradualmente, o número de reflexões nesses caminhos. Observemos a imagem a seguir:

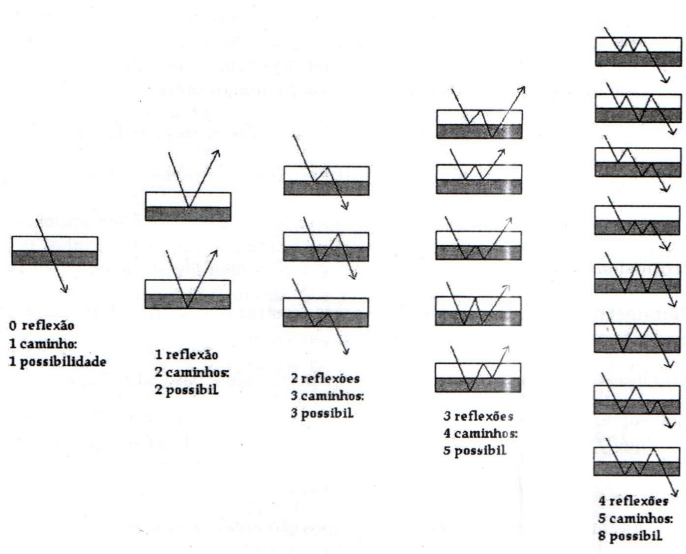
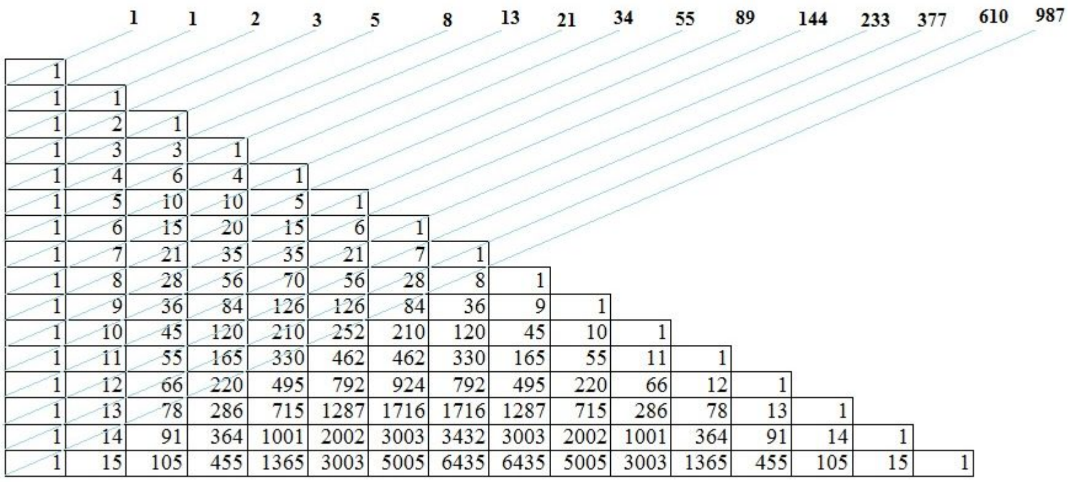


Figura 3.6: Esquema de espelhos

Ao interpretarmos a figura verificamos que o número de caminhos segue a sequência de Fibonacci. Representando o número de reflexões, pela letra n, o número de caminhos será f_n, um número de Fibonacci.

3.2.2 Aplicação no triângulo aritmético de Pascal

A sequência de Fibonacci, além de estar presente na natureza e na Física, também aparece em várias áreas da matemática. Por exemplo, os números de Fibonacci estão presente também no triângulo aritmético de Pascal uma vez que se somarmos os números dispostos na diagonal invertida do triângulo aritmético obteremos exatamente um número de Fibonacci. Na verdade, se somarmos todas as diagonais do triângulo aritmético obteremos exatamente a sequência de Fibonacci, como pode ser visualizado na figura a seguir.



1															
1	1														
1	2	1													
1	3	3	1												
1	4	6	4	1											
1	5	10	10	5	1										
1	6	15	20	15	6	1									
1	7	21	35	35	21	7	1								
1	8	28	56	70	56	28	8	1							
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Figura 3.7: Soma das diagonais invertidas do triângulo aritmético

3.2.3 Aplicação em multiplicação de matrizes

A sequência de Fibonacci, mtambém aparece no contexto das matrizes. Existe uma matriz que a medida que vamos elevando-a a expoentes inteiros positivos maiores que dois obtemos como resposta, números de Fibonacci. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

observemos o seu comportamento. Se fizermos A^2, teremos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{bmatrix},$$

onde todos os elementos da matriz são números de Fibonacci. Fazendo agora A^3, obtemos:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_4 & f_3 \\ f_3 & f_2 \end{bmatrix},$$

onde também todos os elementos são números de Fibonacci. Continuando com raciocínio análogo, calculando A^4, encontramos:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_5 & f_4 \\ f_4 & f_3 \end{bmatrix}.$$

Calculando agora A^5, temos:

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_6 & f_5 \\ f_5 & f_4 \end{bmatrix}.$$

Novamente temos todos os elementos da matriz sendo números de Fibonacci. Seguindo esse raciocínio, é natural conjecturarmos que

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}.$$

De fato, a conjectura é verdadeira e vamos prová-la por indução.

Demonstração: Note que para $n = 2$, a nossa conjectura é verdadeira, pois

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que seja verdadeira a conjectura para $n = k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix}.$$

E queremos mostrar que também é válida para $n = k + 1 \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix},$$

com efeito,

$$A^{k+1} = A^k.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix}.$$

Provando que a validez de $n = k \in \mathbb{N}$ implica a validade para $n = k + 1 \in \mathbb{N}$ e desta forma, pelo teorema (1.1.1) temos que o resultado é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

3.2.4 Aplicação em determinantes de ordem maior que 2

Como dito anteriormente, a sequência de Fibonacci e os seus números estão presentes em algumas matrizes. Agora mostraremos outra situação desta aparição, desta vez, no contexto dos determinantes.

Inicialmente, vamos calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{pmatrix}.$$

Fazendo alguns cálculos, encontramos a resposta det A = 0.

Agora calculemos det B, onde

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 \end{pmatrix}.$$

Realizando os cálculos necessários, a resposta encontrada é det B = 0.

Calculando det C, onde

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 \end{pmatrix}$$

obtemos det C = 0, calculando ainda det D, onde

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 \\ 144 & 233 & 377 \end{pmatrix},$$

temos como resultado det D = 0.

Agora podemos fazer o seguinte questionamento, o que essas quatro matrizes têm em comum, além de terem seus respectivos determinantes iguais a 0? O leitor mais atento, já deve ter percebido que todos os elementos das quatro matrizes são números de Fibonacci e também, são números consecutivos desta sequência.

Podemos ainda fazer outra pergunta: todas as matrizes de ordem 3, cujos elementos são números consecutivos de Fibonacci, têm sempre seu determinante nulo?

A resposta é sim, e a sua justificativa é bastante simples. Como a sequência de Fibonacci é definida como a soma dos dois termos anteriores, então a terceira coluna das matrizes de ordem 3 será a soma das duas primeiras colunas. Sendo assim, a 3ª coluna é combinação linear das duas primeiras, e segundo Iezzi e Hazzan (1977) "se uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]$, de ordem n tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então det M = 0", o que completa a nossa justificativa. O leitor pode encontrar a demonstração da afirmação no próprio livro.

De posse das afirmações do parágrafo anterior podemos fazer a seguinte generalização:

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem n, tal que $n \geq 3$ cujos termos são números consecutivos de Fibonacci, então det A = 0. O fato se dá pela mesma justificativa anterior.

Capítulo 4

Atividades propostas

Segue neste capítulo, algumas sugestões de atividades a serem trabalhadas em sala de aula, referentes a alguns assuntos abordados neste trabalho.

As sugestões apresentadas tem o objetivo de promover uma discussão e reflexão sobre padrões discutidos ao longo deste trabalho.

Sendo assim, cabe aos professores de Matemática orientarem as discussões através de indagações dirigidas tanto no desenvolvimento das atividades, quanto no momento das soluções das mesmas.

4.1 Deduzindo a sequência de Fibonacci

Público

Alunos do 1º ano do ensino médio.

Material

Lápis, borracha, atividade impressa, material dourado e laboratório de informática com acesso à internet.

Tempo previsto

Duas aulas de 60 minutos cada.

Objetivos

- Auxiliar para que aconteça a interação dos alunos em grupo.
- Incentivar o aluno a perceber padrão em sequências.
- Mostrar uma aplicação da matemática no cotidiano do aluno.
- Proporcionar ao aluno condições para aperfeiçoar o seu raciocínio lógico.

Requisitos básicos para o desenvolvimento da atividade

Noções básicas de números inteiros e sequências numéricas.

Atividade 1

Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?

Roteiro da atividade

O professor deve estipular um tempo de aproximadamente 30 minutos para os grupos pensarem e resolverem os seus respectivos problemas. Após esse tempo, o professor deve pedir para cada grupo socializar o problema e a solução encontrada.

Possivelmente, alguns dos grupos não vão encontrar a resposta correta, então cabe ao professor a sua intervenção, fazendo um breve comentário sobre Leonardo de Pisa, relatando que fora ele quem criou este problema em 1202. Porém, o professor não deve solucionar o problema, deve ir orientando os alunos para que eles mesmos respondam a questão. O professor pode adotar o seguinte roteiro:

1º) No primeiro mês teremos quantos casais de coelhos?

2º) No segundo mês teremos quantos casais de coelhos?

Certamente, os alunos responderão 01 casal para cada um dos dois primeiros meses, mas os questionamentos devem continuar.

3º) No terceiro mês, teremos quantos casais? E no quarto mês? E no quinto mês?

Aqui o professor deve estimulá-los a tentar descobrir o padrão da sequência para encontrarem a solução procurada. Caso os grupos não encontrem a solução, ele deve repassar aos grupos a tabela abaixo, para facilitar a solução do problema, estipular aproximadamente 15 minutos para uma nova tentativa de resolução da questão, agora com uso da tabela disponibilizada. Se algum grupo conseguir solucionar o exercício, o professor deve pedir para o grupo aguardar os demais grupos para finalizarem juntos a atividade.

Neste momento, tendo ou não os alunos conseguido resolver o problema, o professor termina a abordagem histórica sobre Leonardo de Pisa, informando que este problema originou a famosa sequência de Fibonacci, que é definida como a soma dos dois termos imediatamente anteriores. Em seguida faz a tabela citada no quadro e resolve o problema com os discentes. O professor também pode explicitar que a sequência citada é obtida através de uma lei de recorrência.

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º			
2º			
3º			
4º			
5º			
6º			
7º			
8º			
9º			
10º			
11º			
12º			

Tabela 4.1: Tabela para a solução do problema dos coelhos

Atividade 2

A sequência de Fibonacci pode ser abordada através de diversos problemas e de maneiras distintas, podendo inclusive ser deduzida de forma divertida, através de brincadeiras, pois brincando também se aprende.

A cerca da aprendizagem nas brincadeiras, pode ser destacado que:

> ... os jogos e brincadeiras propiciam condições agradáveis e favoráveis para o ensino da matemática, uma vez que, com esse tipo de material, o indivíduo é motivado para trabalhar e pensar tendo por base o material concreto, descobrindo, reinventando e não só recebendo informações. (Alves, 2001)

Partindo desse pressuposto, propomos a atividade a seguir, que pode ser desenvolvida de duas formas, uma utilizando o material dourado, e outra no laboratório de informática, utilizando a "ludoteca" da USP disponível no seguinte endereço eletrônico: www.cienciamao.usp.br/tudo/exibir.php?midia=texcod=_fibonacciproblemadostijolos .

Utilizando a animação disponibilizada na "ludoteca" da USP, construa uma parede de tijolos, cujo comprimento é duas vezes maior que a sua altura e se, a parede tiver que levar duas unidades de altura, poder-se-á fazer um número diversas de formas, dependendo do comprimento que se queira. Sabendo que necessariamente o primeiro tijolo deve ser colocado em pé, de quantas maneiras distintas podemos construir uma parede de comprimento n?

Roteiro da atividade

O roteiro descrito é válido tanto para desenvolver a atividade com material concreto (material dourado), quanto para o laboratório de informática, através da ludoteca.

Inicialmente o professor deve fazer os seguintes questionamentos:
De quantas maneiras podemos construir uma parede de comprimento 1? E de comprimento 2? Caso queiramos um parede de comprimento 3, de quantas maneiras podemos construí-la? E se for de comprimento 5?

O professor deve continuar com os questionamentos, proporcionando de maneira diferenciada, através de uma brincadeira, a construção da sequência de Fibonacci. A abordagem histórica da sequência pode ser feita como descrito no roteiro da "atividade 1".

Ao final da atividade o professor deve fazer a pergunta e se formos construir uma parede de comprimento n, poderíamos fazê-la de quantas maneiras distintas?

Oriente os alunos para que percebam que a resposta do problema é a sequência de Fibonacci.

4.2 Soma de 10 termos consecutivos da sequência de Fibonacci

Público

Alunos do 1º ano do ensino médio.

Material

Lápis, borracha e atividade impressa.

Tempo previsto

Duas aulas de 60 minutos cada.

Objetivos

- Contribuir para com a interação dos alunos em grupo.
- Incentivar o aluno a perceber regularidades em sequências.
- Contextualizar o conteúdo de sequências com critérios de divisibilidade.
- Proporcionar ao aluno condições para aprimorar o seu raciocínio lógico.

Requisitos básicos para o desenvolvimento da atividade

Noções básicas de números inteiros e sequências numéricas.

Atividade

Calcule o valor das seguintes somas:

- $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55$
- $2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144$
- $5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377$
- $13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987$

Roteiro da atividade

Inicialmente, o professor deve salientar aos alunos que as somas pedidas são termos consecutivos da sequência de Fibonacci e expor os vinte primeiros termos. Deve frizar ainda que tal sequência foi descoberta na idade média, por Leonardo de Pisa, que ficou conhecido por Leonardo Fibonacci justamente por ter proposto o problema que originou tal sequência e que até hoje ela desperta o interesse de estudiosos das mais variadas áreas do conhecimento, pois a mesma se manifesta em várias situações na natureza e em outras ciências, além da própria Matemática.

Em seguida o professor deve organizar os alunos em grupos e explicar a atividade proposta. Assim que os grupos concluírem a atividade, as resposta devem ser compartilhadas com toda a sala de aula.

Neste momento, o professor deve fazer alguns questionamentos que levem os aluno a perceberem o comportamento da soma.

- O que as somas têm em comum?

Os alunos devem ser capazes de responder que todas tem como resposta um número ímpar. Agora o professor deve perguntar:

- Será que todas as somas de 10 termos consecutivos da sequência de Fibonacci é sempre um número ímpar?

Alguns alunos deverão afirmar que sim, por que fizeram quatro exemplos, e todos tiveram como resposta um número ímpar. Agora, o professor deve pedir para os discentes calcularem outras somas:

- $1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89$
- $3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 + 233$

Ao realizarem os cálculos, serão capazes de perceber que nem sempre essa soma é ímpar.

Finalmente, o professor deve instigar os alunos a perceberem a característica da soma, deve até dar um exemplo mostrando que o padrão está relacionando com critérios de divisibilidade. Se os alunos não conseguirem perceber que todas as somas são múltiplos de 11, deve-se pedir que os alunos façam a decomposição em fatores primos das somas pedidas, finalizando assim a atividade.

4.3 Multiplicação de uma matriz cujo produto são os termos da sequência de Fibonacci

Público

Alunos do 2º ano do ensino médio.

Material

Lápis, borracha, atividade impressa e uma planilha eletrônica.

Tempo previsto

Três aulas de 60 minutos cada.

Objetivos

- Contribuir com a interação dos alunos em grupo.
- Incentivar o aluno a perceber padrão em sequências.
- Mostrar uma relação entre o conteúdo de sequêncis com o produto de matrizes.
- Proporcionar ao aluno condições para elevar o nível de seu raciocínio lógico.
- Utilizar as tecnologias da informação e comunicação como ferramenta pedagógica.

Requisitos básicos para o desenvolvimento da atividade

Noções básicas de produto de matrizes, sequências numéricas e manejo de planilhas eletrônicas.

Atividade

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

calcule A^2, A^3 e A^4.

Roteiro da atividade

Esta atividade é interessante, pois é possível associar um conteúdo de sequências que geralmente é abordado no 1º ano do ensino médio com o produto de matrizes que é visto no 2º ano do ensino médio.

Como a matriz A é de ordem 2, os alunos provavelmente não terão dificuldades em calcular o valor de A^2, encontrando assim que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O professor pode fazer o seguinte pergunta: alguém sabe dizer o que os elementos de A^2 tem de especial? Aqui dificilmente algum aluno vai identificar os números de Fibonacci, até por que a maioria certamente não conhece a sequência e seus termos.

Agora o professor pede para os alunos calcularem A^3, onde eles devem encontrar

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deve ser feito o mesmo questionamento feito para A^2. Caso os alunos ainda não consigam responder corretamente afirmando que se trata dos números de Fibonacci, o professor deve fazer a abordagem histórica sobre Leonardo de Pisa e o surgimento da sequência de Fibonacci, definindo a sequência e exibindo alguns de seus termos.

Finalmente, o professor deve pedir para que seja calculado A^4, onde deve ser encontrado como resposta

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Repete a pergunta: o que essa matriz tem de especial? Neste momento, os alunos já devem ser capazes de perceber, que todos os elementos são números de Fibonacci.

Em uma outra aula, no Laboratório de Informática, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o professor deve pedir aos alunos para continuar realizando os cálculos feitos em sala de aula, fazendo A^5, A^6, A^7, A^8, A^9 e assim sucessivamente. Após as respostas dos alunos, investigar se todos vão perceber que independente de qual potência seja realizada, o resultado obtido é sempre uma matriz cujos termos são números de Fibonacci.

Desta maneira, o professor com essa atividade oportuniza aos alunos o desenvolvimento de várias habilidades. A primeira delas, produto de matrizes de ordem 2, em seguida conhecimento histórico sobre uma sequência numérica famosa, além de utilizar as

Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) para calcular produto de matrizes, e finalmente, propicia aos alunos a oportunidade de perceber um padrão, isto é, uma regularidade, que é previsto nos PCNs como habilidades a serem desenvolvidas com o ensino de Matemática.

4.4 Determinante de matrizes de ordem 3

Público

Alunos do 2º ano do ensino médio.

Material

Lápis, borracha, atividade impressa e laboratório de informática.

Tempo previsto

Duas aulas de 60 minutos cada.

Objetivos

- Cooperar para com a interação dos alunos em grupo.
- Incentivar o aluno a perceber padrão em sequências.
- Apresentar ao aluno uma contextualização do conteúdo de sequências com o cálculo de determinantes.
- Proporcionar ao aluno condições para apurar o seu raciocínio lógico.
- Mostrar ao aluno uma aplicação de propriedades de determinantes.

Requisitos básicos para o desenvolvimento da atividade

Noções de cálculo de determinantes, conhecimento das principais propriedades sobre determinantes.

Atividade

Utilize o método que achar conveniente e calcule o determinante de uma das matrizes dadas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 \\ 144 & 233 & 377 \end{pmatrix}$$

Roteiro da atividade

Esta atividade deve ser trabalhada depois da atividade anterior, sendo assim, os alunos devem reconhecer que os elementos das matrizes são todos números de Fibonacci, e ainda mais, são termos consecutivos.

Com a familiaridade dos alunos com os números de Fibonacci, o professor deve instigar o aluno a perceber a ligação entre a propriedade de determinante que afirma "dada uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]$, de ordem n tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então det M = 0" e como a soma das duas primeiras colunas é igual a terceira coluna, então o determinante é nulo.

O professor pode ainda levar os alunos ao laboratório de informática, e com o auxílio de uma planilha eletrônica, solicitar a estes que calculem o determinante de matrizes de ordem maior que 3, cujos elementos são números consecutivos da sequência de Fibonacci. Desta forma, eles podem comprovar, na prática, a veracidade da propriedade citada acerca de determinante nulo quando uma linha ou coluna é combinação linear de linhas ou colunas.

Capítulo 5

Considerações Finais

No presente trabalho, mostramos que um problema aparentemente simples, proposto ainda na idade média, fascinou e ainda hoje facina vários matemáticos e estudiosos de outras áreas do conhecimento.

Mostramos também a grande variedade de propriedades que a sequência de Fibonacci possui, e demostramos que algumas destas propriedades.

Constatamos, ainda, que a sequência, bem como os seus termos, se manifestam nas mais variadas situações, como na natureza, na Física, em matrizes, em determinantes e no triângulo aritmético de Pascal.

Vimos que a sequência está intimamente ligada com um número misterioso, enigmático, que representa a harmonia e a beleza, o conhecido número de ouro.

Verificamos ainda que os livros de matemática utilizados no ensino médio, não abordam ou pouco abordam este tema(ver anexo).

Diante do que foi abordado, finalizamos este trabalho fomentando a ideia de que: ainda que alguns livros didáticos (no caso da Matemática) apresentem uma pequena ou nenhuma abordagem sobre a sequência de Fibonacci, nós, professores de Matemática, podemos inserir a referida sequência no ensino médio relacionando-a com produto de matrizes, determinantes, triângulo aritmético de Pascal, e a outros contextos. Até mesmo de forma interdisciplinar, como na Física, com o esquema dos espelhos, e na Biologia, analisando o aparecimento da sequência nas sementes de girassol e nas pinhas do pinhão.

O nosso trabalho pretende atender esta demanda, pois não somos os primeiros a falar sobre o tema, porém, procuramos abordar as propriedades de maneira mais simples possível, utilizando uma linguagem acessível aos professores do ensino médio e às demais pessoas que possam ter interesse pelo assunto.

Referências Bibliográficas

Alencar Filho, E. (1981). *Teoria elementar dos números.* Ed. Nobel, São Paulo.

Alencar Filho, E. (1988). *Funções aritméticas números notáveis.* NBL Editora.

Alves, E. M. S. (2001). *A ludicidade e o ensina da matemática. Uma prática possível.* Papirus, Campinas.

Barco, L. (1987). O cientista é um privilegiado leitor da natureza. *Superinteressante*, páginas 44–45.

Contador, P. R. M. (2012). *Matemática, uma breve história.* Livraria da Física, São Paulo, 4 edição.

Dante, L. R. (2013). *Matemática: contexto & aplicações.*, volume 1. Ática, São Paulo, 2 edição.

Dassie, B. A. e Lima, M. L. A. (2012). Cinco propriedades da sequência de fibonacci. *Jornal dá Licença*, 51:18.

Domingues, H. H. (1991). *Fundamentos de Aritmética.* Atual, São Paulo.

Eves, H. (2011). *Introdução à história da Matemática; Tradução Hygino H. Domingues.* Editora da Unicamp, Campinas, 5 edição.

Ferri, M. G. (1983). *Botânica: morfologia externa das plantas(organografia).* Nobel, São Paulo, 15 edição.

Hefez, A. (2011). *Elementos de aritmética.* SBM, Rio de Janeiro.

Iezzi, G. e Hazzan, S. (1977). *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 4. Atual, São Paulo, 2 edição.

Leonardo (Ed.), F. M. (2013). *Conexões com a Matemática (obra coletiva).* Ed. Moderna, São Paulo.

Lima, E. L. (2006). *Matemática e ensino.* SBM, Rio de Janeiro, 3 edição.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2. SBM, Rio de Janeiro, 3 edição.

MEC (2002). PCNs. Parâmetros Curriculares Nacionais: do Ensino Médio. Parte III - Matemática Ciências da Natureza e Suas Tecnologias. Ministério da Educação Básica.

Mol, R. S. (2013). *Introdução à história da Matemática.* CAED-UFMG, Belo Horizonte.

Paiva, M. (2013). *Matemática: Paiva.*, volume 1. Moderna, São Paulo, 2 edição.

Sahd, L. (2011). O que é a sequência de fibonacci? Disponível em http://mundoestranho.abril.com.br/materia/o-que-e-a-sequencia-de-fibonacci Acesso em: 01/set/2014.

Santos, J. P. O. (2014). *Introduçãoà teoria dos números.* IMPA, Rio de Janeiro, 3rd edição.

Smole, K. S. e Diniz, M. I. (2013). *Matemática: ensino médio 1*, volume 1. Saraiva, São Paulo, 8 edição.

Souza, J. R. (2013). *Novo olhar Matemática.*, volume 1. FTD, São Paulo, 2 edição.

Zahn, M. (2011). *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.* Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro.

Anexo

Figura 5.1: Matemática Contexto e Aplicações (capa, volume 1)

Leitura

A sequência de Fibonacci

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, contribuiu com diversas pesquisas para o desenvolvimento da Matemática.

Em 1202, em seu livro intitulado *Líber Abaci*, apresentou o problema que o consagrou. Acompanhe:

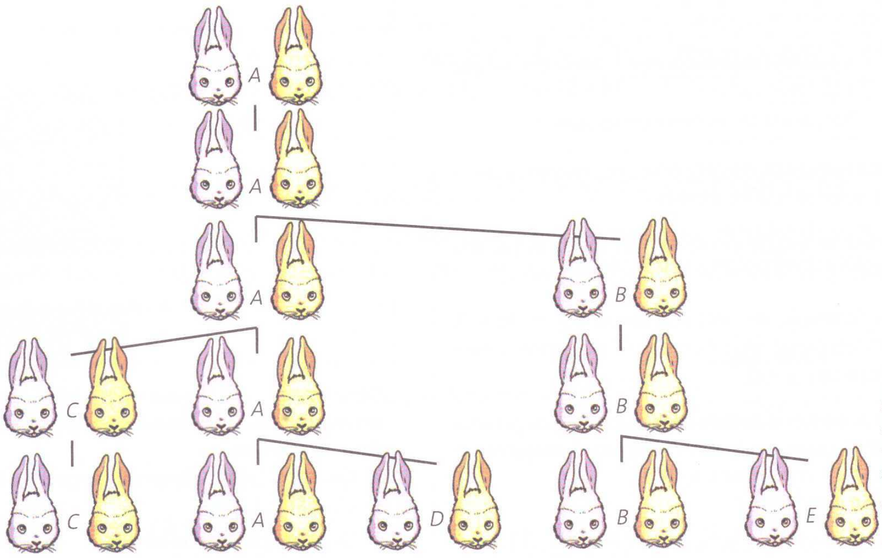

Stefano Bianchetti/Corbis/Latinstock

Fibonacci

Supondo que um coelho tenha vida eterna e que cada casal gere um novo casal, que dará origem a um novo par no segundo mês de vida, e assim sucessivamente, de mês em mês, fica formada uma sequência especial com números naturais. Assim:

- no 1º mês temos um casal de coelhos, que chamaremos de A;
- no fim do 1º mês o casal acasala. Continuamos com um par de coelhos;
- no 3º mês, A gera um par B e passamos a contar com 2 casais;
- no 4º mês, teremos três pares, e o novo casal é uma cria de A; passamos assim a ter A, B e C;
- já no 5º mês, teremos, além da cria de A, uma cria de B, e então ficamos com 5 casais de coelhos: A, B, C, D e E;
- no 6º mês, além das crias de A e B, também teremos uma de C e então contaremos com 8 casais: A, B, C, D, E, F, G e H;
- no 7º mês, teremos crias de A, B, C, D e E e obteremos 13 casais: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L e M;

e assim sucessivamente.



Dam d'Souza/Arquivo da editora

Figura 5.2: Matemática Contexto e Aplicações (pág. 210, volume 1)

Em forma de tabela, temos:

Mês	Casais	Número de casais	Casais que dão cria
1º	*A*	1	
2º	*A*	1	*A*
3º	*A, B*	2	*A*
4º	*A, B, C*	3	*A*
5º	*A, B, C, D, E*	5	*A* e *B*
6º	*A, B, C, D, E, F, G, H*	8	*A, B* e *C*
7º	*A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M*	13	*A, B, C, D* e *E*
etc.			

Ampliando mais ainda essa tabela, temos:

Número do mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	etc.
Número de casais	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	etc.

Podemos formar uma sequência em que cada termo nos dá o número de casais de coelhos:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...) $\rightarrow$ sequência de Fibonacci

1. A fórmula por recorrência da sequência de Fibonacci é dada por:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \text{ e } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ se } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Determine, por recorrência, os três próximos termos, depois do 144 e 233. 377, 610, 987

2. Divida cada termo dessa sequência, a partir de 21, pelo seu precedente:

a) 21 : 13 1,61538
b) 34 : 21 1,61904
c) 55 : 34 1,61764
d) 89 : 55 1,61818

Observe que os quocientes são próximos do número 1,618, que é o "número de ouro" dos gregos, que estudamos no capítulo 1, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$; ele é um número irracional, cujo valor aproximado racional com três casas decimais é 1,618.

Você sabia?

Rodrigo Paiva/Folhapress

A sequência de Fibonacci também é usada na Bolsa de Valores para tentar prever os preços futuros.
Essa mesma sequência aparece em uma parte do filme *O código Da Vinci*, baseado no livro de Dan Brown.
Acesse o *link* <www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/debaser/singlefile.php?id=21241> (Acesso em: 9 abr. 2013) para saber mais sobre o assunto e assistir ao trecho do vídeo.

Capítulo 7 • Sequências 211

Figura 5.3: Matemática Contexto e Aplicações (pág. 211, volume 1)

Figura 5.4: Matemática Ciências e Aplicações (capa, volume 1)

Progressões

Um pouco de História

A sequência de Fibonacci

Uma sequência muito conhecida na Matemática é a sequência de Fibonacci, nome pelo qual ficou conhecido o italiano Leonardo de Pisa (1175-1250). Em 1202, Fibonacci apresentou em seu livro *Liber Abaci* o problema que o consagrou.

Fibonacci considerou, no período de um ano, um cenário hipotético para a reprodução de coelhos. Veja:

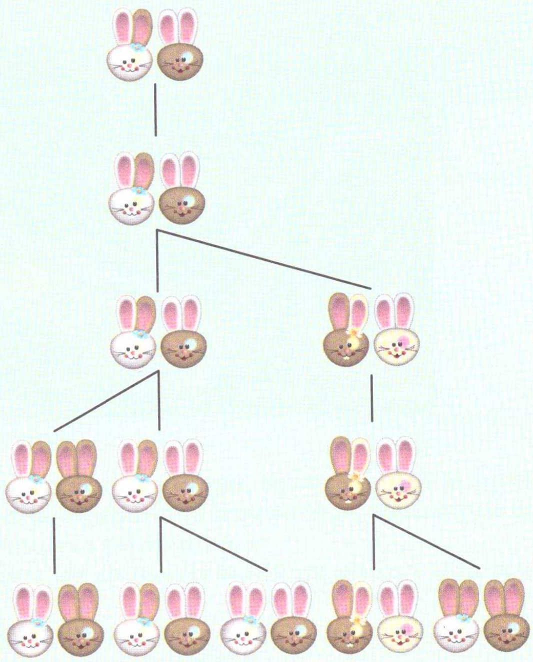
- No início, há apenas um casal que acabou de nascer.
- Os casais atingem a maturidade sexual e se reproduzem ao final de um mês.
- Um mês é o período de gestação dos coelhos.
- Todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal.
- Os coelhos nunca morrem.

© Stefano Bianchetti/Corbis/LatinStock/Coleção particular

Retrato de Leonardo Fibonacci.

Acompanhe, a seguir, a quantidade de pares de coelhos, ao final de cada mês:

- Início: um único casal.
- Ao final de um mês, o casal acasala. Continuamos com um par.
- Ao final de dois meses, a fêmea dá à luz um novo par. Agora são dois pares.
- Ao final de três meses o "primeiro casal" dá à luz outro par, e o "segundo" casal acasala. São 3 pares.
- Ao final de quatro meses, o "primeiro" casal dá à luz outro par; o "segundo casal" dá à luz pela primeira vez e o 3º par acasala. São 5 pares.



Zapt

⋮

e assim por diante...

225

Figura 5.5: Matemática Ciências e Aplicações (pág. 225, volume 1)

Capítulo 10

A sequência de pares de coelhos existentes, ao final de cada mês, evolui segundo os termos da sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$$

Note que, a partir do terceiro, cada termo dessa sequência é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim, essa sequência pode ser definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3 \end{cases}$$

Mais de quinhentos anos mais tarde, o escocês Robert Simson provou a seguinte propriedade dessa sequência: à medida que consideramos cada vez mais termos, o quociente entre um termo qualquer e o termo antecedente aproxima-se de 1,61803398..., que é o número de ouro, introduzido no capítulo 2.

Vejamos alguns exemplos:

$$\frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} \cong 1{,}6176; \quad \frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} \cong 1{,}61805; \quad \frac{f_{20}}{f_{19}} = \frac{6\,765}{4\,181} \cong 1{,}6180$$

Outros estudos mostram uma ligação entre os números de Fibonacci e a natureza, como a quantidade de arranjos das folhas de algumas plantas em torno do caule, a organização das sementes na coroa de um girassol, etc.

Referência bibliográfica:

- *Sequência de Fibonacci e Número de ouro* <www.youtube.com/watch?v=QaWepnGWRs8> (Acesso em: mar. 2013)

Figura 5.6: Matemática Ciências e Aplicações (pág. 226, volume 1)

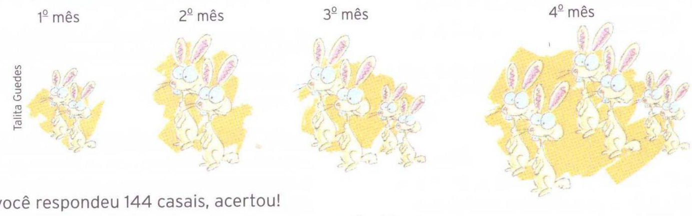
Figura 5.7: Matemática Ensino Médio (capa, volume 1)

PARA SABER MAIS

Sequência de Fibonacci

Acompanhe este problema.

Quantos casais de coelhos serão gerados em um ano, começando com um único casal, se em cada mês cada casal gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês de vida?



Se você respondeu 144 casais, acertou!

Copie e preencha a tabela com os dados que você obteve.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Número de casais	1	1	2								89	144

146 | PARTE 1 NÚMEROS, ESTATÍSTICA E FUNÇÕES

Figura 5.8: Matemática Ensino Médio (pág. 146, volume 1)

Os números que representam a quantidade de casais (1, 1, 2, ..., 144) formam uma sequência denominada **sequência de Fibonacci**, em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), apelidado **Fibonacci** – cujo significado é filho de Bonacci –, que observou essa sequência na natureza e a descreveu. Tente descobrir a lei de formação ou expressão geral da sequência de Fibonacci. Uma dica: é uma fórmula de recorrência!

Você deve estar lembrado de que na unidade 1 apresentamos a razão áurea e vimos que dois números estão em razão áurea se a razão entre eles é o número irracional ϕ (fi) = 1,618... Mas o que a razão áurea tem a ver com a sequência de Fibonacci?

A conexão entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci foi feita pelo matemático escocês Robert Simson (1687-1768). Ele observou que a razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci se aproximava da razão áurea. Por exemplo: $\frac{144}{89} \cong 1{,}618$. Use sua calculadora e verifique este fato para outros termos da sequência. Você pode consultar a tabela dos casais de coelhos.

A sequência de Fibonacci aparece frequentemente na natureza, como no desdobramento dos galhos de uma árvore e na disposição das folhas ao redor do caule. O número de flores que formam o centro do girassol, de segmentos da superfície de uma pinha e de escamas de alguns peixes são também exemplos de números de Fibonacci, isto é, de números da sequência de Fibonacci.

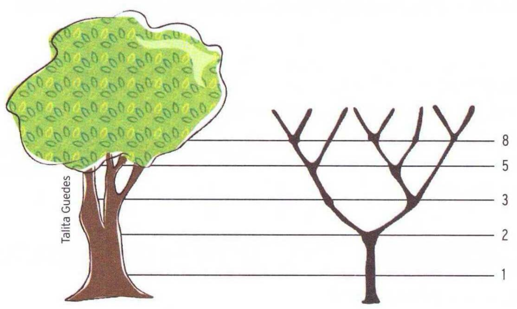


Figura 5.9: Matemática Ensino Médio (pág. 147, volume 1)