UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

RAYLSON DOS SANTOS CARNEIRO

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Palmas - TO
2015

RAYLSON DOS SANTOS CARNEIRO

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática. Orientador: Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz.

Palmas - TO
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

C289m Carneiro, Raylson Santos.
Métodos de resolução de equações do terceiro grau / Raylson dos Santos Carneiro - Palmas, 2015.
67f.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Tocantins, Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, 2015.
Linha de pesquisa: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz.

1. Cúbicas. 2. Cardano-Tartaglia. 3. Métodos Numéricos. 4. Newton I. Cruz, Pedro Alexandre. II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.
CDD: 515

Bibliotecário: Marcos Maia
CRB2: 1.445

RAYLSON DOS SANTOS CARNEIRO

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz.

Aprovada em 27 de Março de 2015.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz (Orientador – UFT)

Prof. Dr. Chrystian de Assis Siqueira (UFT)

Profª. Drª. Lady Sakay (UNIRG)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que realmente não medem esforços para melhorar as suas vidas, e de seus familiares e amigos, através da EDUCAÇÃO. Mas em especial, à minha mãe Rosilene; aos meus irmãos Rogério, Ricardo e Ryan; ao meu pai Félix; e acima de tudo, a minha esposa, companheira de todos os momentos, Káttia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela presença constante na minha vida e por ter me confortado nas horas mais difíceis. Obrigado meu senhor por tornar o meu sonho possível.

À SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À UFT (Universidade Federal do Tocantins) nas pessoas do professor coordenador Andrés Lázaro Barraza De La Cruz e dos professores Pedro Alexandre da Cruz, Gilmar Pires Novaes, Christian José Quintana Pinedo, Rogerio Azevedo Rocha e Betty Clara Barraza La Cruz, o meu muito obrigado pela significativa contribuição acadêmica, pela troca de conhecimentos e experiências.

Ao meu orientador, Profº Dr. Pedro Alexandre da Cruz, pela confiança e pela oportunidade de trabalharmos juntos na conclusão deste trabalho.

A todos os amigos que conquistei nas aulas. Mas em especial ao Lucas de Lucca, Jairo Barros, Paulo Roberto e Antônio Francisco, pelas alegrias e tristezas compartilhadas durante e curso.

Se fui capaz de ver mais longe,
é porque me apoiei em ombros de gigantes.
(Isaac Newton)

Resumo

Este trabalho teve por objetivo estudar métodos algébricos de resolução de equações do terceiro grau. Por muitos séculos, matemáticos tentaram determinar um caminho para resolver equações cúbicas do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, procurava-se uma fórmula que utilizasse os coeficientes a, b, c e d. Portanto, foi realizado um estudo histórico enfatizando o método algébrico de Cardano-Tartaglia e o método de Newton, o primeiro foi escolhido pois, através dele que se gerou um estudo detalhado das equações algébricas, principalmente sobre a descoberta dos números complexos e das equações quárticas. Em seguida, construiu-se uma sequência didática, enfatizando os métodos de resolução das cúbicas utilizados pelos principais livros do ensino médio na atualidade, e são eles: Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, Relações de Girard e Pesquisa das Raízes Racionais. Sendo notória, a impossibilidade desses três métodos para solucionar qualquer equação do terceiro grau. Contudo, verifica-se que o método numérico utilizado por Isaac Newton, sem as definições de cálculo diferencial, pode ser aplicado aos discentes do nível médio, pois o mesmo gera uma convergência de aproximação da raiz desejada muito rápida, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini.

Palavras-chave: Cúbicas. Cardano-Tartaglia. Métodos Numéricos. Newton.

Abstract

This work aimed to study algebraic methods of solving equations of the third degree. For many centuries, mathematicians have tried to determine a way to solve equations of the type $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, sought a formula using the coefficients a, b, c and d. Therefore, we conducted a historical study emphasizing the algebraic method of Cardano Tartaglia and Newton's method, the first was chosen because, through him that an indepth study of the algebraic equations, mainly about the discovery of the complex numbers and the quartic equations. Then, we build a didactic sequence, emphasizing the methods of resolution of the main books of the cubic used by high school today, and they are: Practical Device of Briot-Ruffini, Girard and Research Relations of Rational Roots. Being notorious, the impossibility of these three methods for solving any equation of the third kind. However, it turns out that the numerical method used by Issac Newton, no definitions of differential calculus, can be inserted to middle level students, because it generates a convergence of approximation of the desired root very quickly, using the algorithm of Briot-Ruffini.

Key-words: Cubical. Cardano-Tartaglia. Numerical Methods. Newton.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Este trabalho tem por finalidade analisar a resolução de equações de terceiro grau, utilizando os principais métodos adotados por autores de livros de ensino médio para as equações cúbicas, a ideia da fórmula de Cardano e o método numérico de Isaac Newton.

A escolha desse tema surgiu após análise do contexto histórico, onde percebeu-se certo obstáculo de se encontrar um método algébrico de resolução para algumas equações do terceiro grau. Isto pode se tornar um embaraço para os alunos estudarem equações cúbicas, visto que dificilmente se encontra em livros didáticos uma abordagem que apresente algum método específico para a resolução de algumas dessas equações.

Nos livros analisados, Dante (2010) e Iezzi (2010), o estudo sobre equações de grau três é ministrada em funções polinomiais onde principalmente são utilizados o dispositivo de Briot-Ruffini, Relações de Girard e o Teorema das Raízes Racionais. Entretanto, o dispositivo de Briot-Ruffini apenas reduz o grau de uma equação já conhecendo o valor de uma raíz. Já pelas relações de Girard, temos três equações onde se usa as relações: da adição das três raízes, da adição do produto de duas a duas raízes e o produto das três raízes dessa equação, respectivamente. E por fim, o Teorema das Raízes Racionais faz uma pesquisa das possíveis raízes racionais de uma equação.

Conforme DANTE (2010, p. 192), "as equações polinomiais de grau maior do que dois não tem um processo determinado por fórmulas, então devemos procurar uma ou mais raízes para com elas encontrar todas as raízes". Assim, o autor não vislumbra ao aluno a possibilidade de conhecer os métodos de resoluções de equações do terceiro e quarto grau.

Por outro lado IEZZI (2010, p. 180) traz que no século XVI, com o Renascimento Italiano, ocorreu um progresso significativo: a resolução das equações de 3º grau e com decorrência as de 4º grau, em 1545 com a publicação do livro *Ars Magna* de Girolamo Cardano, traz o processo de resolução e a devida demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 3º grau, além do esboço de como resolver uma equação do 4º grau, transformando-a em uma do 3º grau.

Assim, como apresentado acima existe uma divergência de conceitos entre autores de grande renome nos livros de matemática do ensino médio, os quais estão entre os mais utilizados pelas redes públicas de ensino em nosso país, que abordam o tema sobre as equações algébricas de grau maior que dois. Portanto, propomos neste trabalho, um estudo sobre os métodos de resoluções utilizados nos livros de ensino médio e outros métodos possíveis de resoluções de equações do terceiro grau.

Determinar as raízes de polinômios de grau três é um dos problemas mais antigos da matemática. Realizou-se um estudo mais amplo sobre as equações do terceiro grau, tentando superar esses obstáculos didáticos, com o objetivo de levar aos alunos e até mesmo aos professores da área, esses métodos de resoluções, buscando compreender e resolver algebricamente as equações cúbicas.

2 Referencial Teórico

2.1 A Descoberta das Equações do Terceiro Grau

Ao fazer o estudo das equações algébricas do 3º grau, é imprescindível realizar um breve relato histórico da descoberta técnica-científica da matemática envolvendo as equações algébricas.

Segundo GARBI (2010, p. 10), por volta de 1800 a 1600 a.C. na Babilônia começaram a esboçar tentativas de resoluções das equações do terceiro grau. Os babilônios elaboravam tabelas de cubos e raízes cúbicas para auxiliar na procura de um número nas condições de uma suposta equação do terceiro grau. Na verdade os matemáticos e astrônomos babilônicos desse período realizaram feitos surpreendentes, pois eles conheciam a propriedade geral dos triângulos retângulos que séculos depois foi batizada como Teorema de Pitágoras, também resolviam equações do primeiro e segundo grau, calculavam áreas e volumes de algumas figuras geométricas. É admirável que eles tenham chegado a esse nível de desenvolvimento matemático, e certamente as descobertas matemáticas nesse período não eram realizadas totalmente de forma indutiva e já deviam ser acompanhadas de algum raciocínio dedutivo não formalizado.

O grande matemático grego Tales de Mileto (cerca de 640 a 564 a.C.) realizou uma grande transformação no pensamento matemático da época em que vivia, pois até aquele momento as resoluções eram feitas de forma indutiva, talvez dedutiva mas sem formalizações concretas. O mesmo introduziu um conceito revolucionário "as verdades matemáticas precisam ser demonstradas", e assim o fez realizando notórias demonstrações tais como: feixes de paralelas cortadas por transversais produzem segmentos proporcionais (a qual foi homenageada com o seu nome), os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais, dentre outras demonstrações, conforme GARBI (2010, p. 15).

Entretanto na Universidade de Alexandria por volta de 300 a.C., um gênio matemático que se encarregou de sintetizar e sistematizar o conhecimento matemático que se tinha até aquele momento, cujo o nome é Euclides. A biografia de Euclides em geral é desconhecida até os dias de hoje, exceto seus trabalhos que foram preservados, sendo o principal deles "Os Elementos", que consiste em treze livros-textos, considerado a coleção mais influente da matemática de todos os tempos, segundo ASGER AABOE (2013, p. 40).

Escreveu AABOE (2013, p. 53), que nestes treze livros, Euclides incorpora todo o conhecimento matemático acumulado em sua época, com algumas exceções notáveis, como as seções cônicas e a geometria esférica, e possivelmente algumas descobertas próprias. Euclides se notabilizou ao aperfeiçoar o pensamento de Tales Mileto, de que todas as verdades matemáticas deveriam ser demostradas e o mesmo concluiu que nem todas as verdades podem ser provadas, mas algumas delas as mais elementares devem ser admitidas sem demonstrações. Assim, na sua obra definiu uma lista de definições que conhecemos como postulados (natureza geométrica) e axiomas.

AABOE (2013, p. 54), traz os cinco axiomas que Euclides publicou na obra "Os Elementos":

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
2. Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais;
3. Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais;
4. Coisas coincidentes são iguais entre si;
5. O todo é maior do que a parte.

Esses axiomas que Euclides determinou foram de fundamental importância para a resolução das equações algébricas.

De acordo com GARBI (2010, p. 21), após a queda do Egito em 641 d.C., que foi tomado pelos árabes liderado pelo califa Omar, o qual determinou a queima dos mais de 600.000 manuscritos da biblioteca de Alexandria, que considerava como nocivos a população pois todos os livros deveriam repetir os ensinamentos do Alcorão. O que ocasionou na perda da maioria dos textos científicos da época, entretanto alguns deles não foram queimados, entre eles "Os Elementos" de Euclides. Nesse mesmo período um famoso astrônomo e matemático Al-Khwarizmi (783-850), nascido na província persa de Khawarezm, publicou a obra "O livro da Restauração e do balanceamento" que tratava como tema principal as equações, e nesta obra nasceu a palavra álgebra. Al-Khwarizmi também escreveu o "Livro sobre o método hindu de adição e subtração" que deu publicidade a simplificação da simbologia dos números, pois o mesmo utilizava o sistema hindu de numeração decimal, com os algarismos de zero a nove.

Com o decorrer de novas descobertas no campo das equações, o matemático Hindu Sridhara descobriu a fórmula para a resolução das equações do 2º grau no século XI, entretanto todos os créditos foram concebidos ao matemático Bháskara (1114–1185), que foi determinada na ideia de se buscar uma forma de reduzir as equações do 2º grau em uma equação do 1º grau.

GUIMARÃES (2006, p. 44), afirma que o hábito de dar o nome de fórmula de Bháskara para o algoritmo de resolução da equação de segundo grau se estabeleceu no

Brasil por volta de 1960, e aparentemente, é um costume só brasileiro, pois não se encontra o nome de Bháskara associado a esse algoritmo na literatura internacional.

Mas o primeiro cristão que publicou sobre o sistema de numeração Hindu-Arábico foi o matemático italiano Leonardo Pisa (1175-1250), conhecido como Fibonacci, em sua obra *Liber Abaci* (1202), com a tentativa de retirar os algarismos romanos, que eram inconvenientes para as resoluções das equações algébricas.

Após Fibonacci se tornar um matemático de grande reputação com a publicação de suas obras, em 1225 o Imperador Frederico II decidiu promover uma espécie de competição para testar a habilidade de Leonardo, e uma das questões propostas foi encontrar por métodos euclidianos, que era a utilização apenas de compasso e régua, um valor de x que satisfizesse a equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Fibonacci conseguiu provar que não era possível encontrar as raízes por métodos euclidianos, entretanto o mesmo determinou uma única raiz aproximada até a nona casa decimal, sendo ela 1,3688081075, (GARBI, 2010, p. 30).

Esses matemáticos para dar maior publicidade as suas provas de agilidade mental faziam entre si essas competições para a solução de problemas. E a partir desse momento as equações do terceiro grau retornam com muita força entre os matemáticos, a fim de descobrir um método algébrico de resolução para as mesmas.

A resolução algébrica de equações de terceiro grau atinge o seu ápice na Itália em torno de 1500 d.C., os homens que aperfeiçoaram as equações cúbicas foram quase todos italianos, e constituíram um grupo de matemáticos de alta relevância na história desta ciência que é a matemática. E nesse mesmo período na Alemanha, Gutenberg inventava a imprensa (1456), técnica que tornou possível a disseminação rápida do conhecimento em livros publicados.

De acordo com GARBI (2010, p. 31), o próximo matemático a trabalhar com a questão das equações cúbicas foi Luca Paciolo (1455-1514). Frei Franciscano que desde jovem se interessou pela matemática principalmente pela aritmética e é considerado o pai da contabilidade moderna. Luca Paciolo, durante o ano de 1494, com 49 anos de idade, publicou o seu famoso livro *"Suma de Arithmética"*, onde infelizmente cometeu vários erros e um deles foi o de afirmar que os matemáticos não poderiam solucionar as equações cúbicas.

E esta afirmação soou como um desafio muito intrigante para todos os gênios da matemática e o primeiro a enfrentar esse problema foi Scipione Del Ferro (1465-1526), que foi professor na Universidade de Bolonha e cujo sua biografia é pouco conhecida, pois o mesmo não publicava as suas descobertas.

Por volta de 1510, Del Ferro encontrou uma forma geral de resolução de equações cúbicas do tipo $x^3 + px + q = 0$, contudo guardou essa brilhante descoberta até muito próximo ao seu falecimento, para se caso fosse necessário utilizá-la em alguma competição proposta por outro matemático. Pois era comum essas disputas entre professores de Universidades e pretensos professores que na sua maioria desfiavam os que detinham cadeiras nas universidades visando uma vitória no confronto principalmente para conseguir a vaga do oponente como professor. Mas antes de falecer Del Ferro revelou o seu segredo para dois discípulos muito próximos a ele, o seu aluno Antonio Maria Fior e Annibale Dela Nave, sendo esse último seu futuro genro e sucessor da sua vaga na Universidade de Bolonha, conforme LIMA (Matemática Universitária, nº5, 1987, p. 12).

Com a brilhante descoberta em mãos Antonio Maria Fior tentou tirar proveito da situação e em 1535 desafiou Nicoló Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia, para uma disputa onde cada adversário dispunha de 30 problemas, a qual foi aceita pelo seu adversário, e como prêmio foi combinado que o perdedor pagaria trinta banquetes para o vencedor. Fior é claro elaborou os seus problemas envolvendo as equações do 3º grau.

Mas pouco antes da data marcada para o desafio, Tartaglia descobriu que seu adversário estava preparado com um método de resoluções de equações cúbicas, fornecida pelo falecido professor Scipione Del Ferro. Assim o mesmo mobilizou todo o seu conhecimento em busca da resolução das equações cúbicas até que no dia 10 de fevereiro de 1535, determinou um método de resolução das equações cúbicas do tipo $x^3+px+q=0$ e também determinou um método de resolução das equações do tipo $x^3+px^2+q=0$.

Este segundo método foi seu grande triunfo pois Fior não tinha o conhecimento de resolução das equações cúbicas com o termo ao quadrado e sem o termo do primeiro grau. Com isso, Tartaglia resolveu todos os trinta problemas propostos por Fior, enquanto esse saiu humilhado, pois na maioria dos problemas que Tartaglia propôs fez referência as equações cúbicas sem o termo do primeiro grau, conforme GARBI (2010, p. 36).

Figura 1 – *Nicoló Fontana(1499-1557)*

De acordo com GUIMARÃES (2006, p. 66), o oponente Nicoló Fontana teve uma infância marcada por perdas e muito sofrimento, em 1512 quando os franceses saquearam a Brescia na Itália, sua cidade natal. Parte da população, inclusive mulheres e crianças buscaram refúgio na igreja, mas soldados invadiram o santuário e diante de sua própria mãe, Nicoló foi gravemente ferido por golpes em todo o corpo, e que lhe provocou permanente dificuldades na fala, daí ele ganhou o seu apelido de Tartaglia, que significa gago em italiano, o qual ficou muito conhecido. Apesar da infância amarga, Tartaglia desde cedo demonstrava muito interesse pelos estudos, e principalmente para a matemática, entretanto sua mãe retirou-o da escola, pois não tinha condições financeiras de arcar com as despesas. Tartaglia passou a estudar por conta própria, e sem dinheiro para comprar papel, pena e tinta dirigia-se a noite ao cemitério, onde escrevia com carvão sobre as lápides dos túmulos. No futuro conseguiu ganhar prestígio como professor em Verona e Veneza, ambas na Itália, e entre suas principais obras esta *Nova Scientia* (1537) onde criou à balística, que estuda o movimento de projéteis, também escreveu sobre a aritmética popular e foi o primeiro italiano a publicar uma versão do livro "Os Elementos" de Euclides em latim (1543).

A notícia do triunfo de Tartaglia se espalhou rapidamente, chegando aos ouvidos de Girolamo Cardano (1501-1576), médico, astrólogo, matemático, filósofo, físico e professor italiano nascido em Pávia, responsável pela primeira descrição da febre tifóide e do método de tratamento da sífilis. Tornou-se um respeitado professor de matemática em Pádua e de medicina em Bolonha e Milão. Foi sem dúvida, o mais sábio algebrista da sua época.

> Para termos uma idéia de quão extenso e profundo era seu conhecimento, citamos a seguir os comentários de Gabriel Naudé (1600-1653), que publicou a autobiografia de Cardano pela primeira vez em 1643: *Não somente era ele inquestionavelmente um médico notável, como foi também provavelmente o primeiro e único homem a se distinguir em todas as ciências ao mesmo tempo. É uma das ilustrações da Natureza daquilo que um homem é capaz de atingir. Nada de significativo lhe era desconhecido em filosofia, medicina, astronomia, matemática, história, metafísica ou as ciências sociais, ou em outras áreas mais remotas do conhecimento. Ele também errava, é claro, isso é apenas humano; é maravilhoso, porém, quão raramente ele errava.* (MILIES, RPM nº25, 1994, p. 16).

Como físico, fez experiências para a determinação do ar, para provar que ele tinha peso tal como a terra e a água. Publicou *De Subtilitate Rerum*, uma coleção sobre a Física aristotélica e invenções, na área da matemática publicou vários livros entre eles o *Liber de Ludo Aleae*, um livro sobre jogos de azar onde apresentou as primeiras definições sistemáticas de probabilidade.

A notícia sobre a descoberta da resolução das cúbicas por Tartaglia se deu no momento em que Cardano se empenhava para escrever *A Practica Arithmetica e Generalis* que englobou Aritmética, Álgebra e Geometria, e para aproveitar a oportunidade Cardano solicitou de Tartaglia que revelasse qual era o método de resolução das cúbicas para que o mesmo pudesse publicá-las em sua obra, obviamente que Tartaglia não concordou com a ideia alegando que ele mesmo faria a publicação em uma obra de sua autoria, e a partir daquele instante começaram uma série de insultos entre os matemáticos, de acordo GUIMARÃES (2006, p. 67)

Figura 2 – *Girolamo Cardano (1501-1576)*

Mas Cardano não se deu por vencido, após a negativa de Tartaglia, por muitas vezes procurou-o, até que depois de muitos juramentos de segredo Tartaglia decidiu confiar o segredo, e assim o mesmo enviou-lhe o segredo em um poema, de forma cifrada e misteriosa. Nesta época os estudiosos matemáticos não tinham ainda uma notação algébrica adequada para as equações e eram utilizadas algumas notações muito distintas uma das outras, por isso o envio da resolução em forma de poema.

A seguir será descrito o poema enviado por Tartaglia a Cardano, de forma traduzida para a nomeclatura atual de acordo com MILIES (Revista do Professor de Matemática, 1994, nº 25, p.18)

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
Se igualam a qualquer número discreto
Acha dois outros diferentes nisso.

2. Depois terás isto por consenso
Que seu produto seja sempre igual
Ao cubo do terço da coisa certo.

3. Depois, o resíduo geral
Das raízes cúbicas subtraídas
Será tua coisa principal.

4. Na segunda destas operações,

Quando o cubo estiver sozinho
Observarás estas outras reduções.

5. Do número farás dois, de tal forma
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa.

6. Depois, por um preceito comum
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito.

7. Depois, a terceira destas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas.

8. Isto eu achei, e não com passo tardo,
No mil quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar.

Entretanto Cardano recebeu o referido poema, mas não conseguiu fazer a tradução do mesmo, e assim fez mais juramentos a Tartaglia para que lhe repassasse a demonstração da fórmula sem muitos mistérios, e assim Tartaglia o fez. Os estudos realizados por Cardano e Ludovico Ferrari (1522-1557), um de seus discípulos, conduziram a importantes avanços na teoria das equações, como o reconhecimento de raízes múltiplas em vários casos, relações entre coeficientes e raízes, e aceitação de raízes negativas, irracionais, imaginárias e principalmente a solução por radicais da equação do quarto grau, feita por Ferrari. Entretanto, Cardano nunca enunciou explicitamente que uma equação do terceiro grau deveria ter três raízes e uma do quarto grau com quatro raízes.

De acordo com LIMA (Matemática Universitária, nº5, 1987, p. 14) Esses progressos realizados por Cardano e Ferrari já eram suficientes para a publicação de um novo livro, coisa que Cardano fez com muita frequência pois o mesmo chegou a publicar mais de cem livros, mas ele se encontrava impedido de fazer a publicação pois esses progressos eram baseados na descoberta de Tartaglia, e o qual fez juramentos bíblicos de guardar o segredo. Contudo Cardano anos depois teve acesso à descoberta de Scipione Del Ferro através de Annibale Dela Nave, que lhe mostrou todas as anotações de seu sogro, e nesse momento Cardano se sentiu desobrigado da promessa feita a Tartaglia sobre o segredo das equações cúbicas. Em 1545 Cardano publica o livro *Ars Magna*, que com certeza deve ter sido a sua principal obra no segmento da matemática, que incluía as demonstrações das equações do terceiro grau.

Como era de se esperar a reação de Tartaglia foi explosiva e a partir daquele momento começaram muitas disputas e ofensas entre os dois matemáticos, e Tartaglia no ano seguinte publicou os *Qvesiti et Inventioni Diverse* (1546), o que não adiantou nada para Tartaglia, pois todos os créditos da humanidade foram dadas a Girolamo Cardano, e tanto que o método de resolução ficou conhecido como método de Cardano. E a resposta a publicação de Tartaglia foi dada por Ferrari em um panfleto em defesa do seu mestre, e Tartaglia respondeu com a publicação de um panfleto também. Essa disputa entre Ferrari e Tartaglia durou entre 1547 e 1548, finalizando com um debate matemático entre os dois em Milão, o qual não houve um vencedor, mas as autoridades da Brescia, onde Tartaglia estava trabalhando, consideraram o desempenho dele insuficiente e retiraram dele o cargo de professor. Por fim Tartaglia retornou para Veneza, aonde viveu até seus últimos dias de vida no obscuro e solidão, conforme LIMA (Matemática Universitária, nº5, 1987, p. 15)

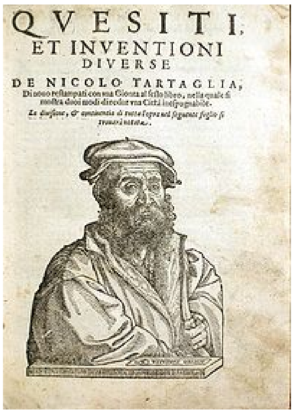

Figura 3 – *Qvesiti et Inventioni Diverse (1546)*

O que devemos lembrar é que Del Ferro apenas havia descoberto a resolução das equações do terceiro grau da forma $x^3+px+q=0$ e que foi Tartaglia que demonstrou os tipos $x^3+px+q=0$ e $x^3+px^2+q=0$, sem conhecer o desenvolvimento realizado por Del Ferro, mas sabendo da existência de uma fórmula que resolveria aqueles problemas. Mas tanto Del Ferro como Tartaglia em seus métodos de resolução conseguiram determinar apenas uma das raízes da equação do terceiro grau, e ficou um suspense no ar, como uma equação do segundo grau possui duas raízes e uma do terceiro grau apenas uma única raiz.

E os matemáticos desse período trabalharam em cima desta questão nos próximos dois séculos (XVII, XVIII e inicio do XIX) até conseguirem chegar em uma conclusão imprescindível para o ramo da matemática: os números complexos. Rafael Bombelli, nascido na Bolonha, Itália em 1530 e engenheiro hidráulico de profissão, foi o primeiro a desvendar o mistério.

> Os estudos de Bombelli começaram na tentativa de conciliar o resultado fornecido pela fórmula de Cardano para a equação
>
> $$x^3 - 15x - 4 = 0$$
>
> $$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$
>
> com a raíz $x = 4$, constadada por simples observação.
>
> Conforme ele mesmo revelou em 1572 no livro ***L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica***, seu método baseou-se no pensamento rude segundo o qual $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente. (GARBI, 2010, p. 51).

O feito de Bombelli é de extrema importância para a resolução das equações do terceiro grau, não só por auxiliar a encontrar raízes destas equações, mas também por mostrar que equações como estas possuem três raízes.

Outro matemático a estudar as equações do terceiro grau foi François Viéte (1540-1603), o maior matemático francês do século XVI, nascido em Fontenay na França e falecido em Paris, chegou a trabalhar em tribunais por quatro anos, pois seu pai era um advogado e no início seguiu a carreira de seu progenitor, mas Viéte começou a publicar alguns livros textos no segmento da matemática e com a divulgação dos mesmos foi convidado a ser o conselheiro privado do rei Henrique III. Viéte foi um grande algebrista, e um profundo conhecedor da geometria e trigonometria, também tinha grande facilidade em fazer substituições em incógnitas de modo caírem em problemas mais fáceis de serem resolvidos. Nesse segmento é bom frisar, que "o uso de letras para representar números em álgebra teve inicio com Françóis Viéte, em 1591", de acordo com LIMA (Matemática Universitária, n^{o}5, p.14).

Com os seus estudos Viéte conseguiu transformar a equação do terceiro grau na sua forma geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em outra sem o termo do segundo grau, fazendo a substituição de $x = y - (b/3a)$ e assim determinando um outro caminho algébrico para solução das equações do terceiro grau, diferente do que foi descoberto por Tartaglia, mas muito parecido, chegando ao seguinte resultado:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} - \frac{P}{\sqrt[3]{-\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}}} \tag{2.1}$$

O que Viéte fez foi fugir dos números complexos, já que não conseguia trabalhar com eles, usando trigonometria fazendo substituições de incógnitas sendo $x = k.cos\theta$, no lugar da substituição de Tartaglia que fez $x = u + v$. E assim Viéte trabalhou com números bastante aproximados, não há como negar que foi um grande avanço, mas sem enfrentar os números complexos, Viéte chegou em alguns casos onde o valor do cosseno era maior que um, e sabia-se que eram uma inverdade pois $-1 \leq cos\theta \leq 1$.

De acordo com GARBI (2010, p. 63), dois grandes matemáticos franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) foram grandes estudiosos em relação aos números complexos, e de forma independente e quase simultaneamente, inventaram o que conhecemos hoje como a Geometria Analítica, que consiste no estudo da geometria por meio de equações. Fermat nasceu em Beamount de Lomagne e viveu na cidade de Toulose na França, onde era jurista de formação acadêmica e magistrado por profissão, o qual suas funções não lhe exigiam todo o seu tempo, assim dedicou-se ao estudo da matemática realizando descobertas notáveis especialmente no campo da teoria dos números. Fermat também desenvolveu uma técnica de associar equações a linhas geométricas para que pudesse estudá-las, o qual não foi publicado por ele, mas sim por Descartes, que proporcionou a descoberta de Newton e Leibiniz no estudo do cálculo diferencial.

René Descartes (1596-1650), nasceu em La Haye, na França, e cursou a Universidade de Poitieres, era um homem vaidoso e adorava a fama e o contato com a nobreza da França, ao contrário de Fermat que era uma pessoa pacata e modesta, realizou trabalhos nos campo da matemática, óptica, filosofia, psicologia. Já sobre os números complexos não existem registros informando, se foi Descartes ou Fermat o primeiro a estudar sobre eles, embora estes não tenham desenvolvido técnicas novas para a solução de equações algébricas. Entretanto, Descartes prestou grande contribuição à respectiva teoria fazendo com que as raízes de números negativos fossem aceitos como soluções, o que na época ainda encontravam uma grande resistência pelos estudiosos matemáticos. Quando Descartes falava sobre os números complexos, uma frase feita por ele deu a denominação a estes números que envolviam raízes quadradas de valores negativos. A frase em questão é: *"nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias"*(GARBI, 2010, p.75). Foi portanto Descartes que batizou $\sqrt{-1}$ de um número imaginário, o qual já havia sido determinado por Bombelli.

O próximo matemático a contribuir para a resolução das equações algébricas foi Isaac Newton (1642-1727), um sábio e endeusado durante a sua vida e igualmente após a sua morte, e podemos dizer que as ciências exatas estão divididas em duas partes: Antes e depois de Isaac Newton. Newton nasceu prematuramente no dia de natal de 1642 em Woolsthorpe na Inglaterra, com a morte de seu pai enquanto ainda estava na barriga de sua mãe, e com o novo casamento de sua mãe, Newton foi morar com sua avó. Newton até os dezoito anos de idade não demostrava nenhum talento para os estudos, até que certo dia visitou uma feira aos 20 anos e comprou um livro de Astrologia e logo não entendeu os temas, assim ficou intrigado com aquilo e a partir desse momento começou a estudar sobre o segmento da matemática. Um fato interessante é que Newton leu "Os Elementos"de Euclides e achou o seu inicio tão fácil e evidente. As descobertas de Newton aconteceram de forma muito rápida, tanto que em 1665 ele inventou o cálculo diferencial, em 1666 a teoria das cores, o cálculo integral e a lei da gravitação universal, e assim em dois anos Newton se tornou um "Deus", pois havia feito as maiores descobertas na matemática e física até a sua época, (GARBI, 2010, p. 79).

Figura 4 – *Isaac Newton (1642-1727)*

Newton desenvolveu métodos numéricos, para determinar raízes de equações algébricas de forma aproximada, com uma aproximação tão boa quanto se quisesse. Mas Newton não se interessou pelo estudo dos números complexos, o qual ele os chamava de “impossíveis”. Por outro lado seu amigo íntimo, o francês Abraham De Moivre (1667-1754) pensava de forma diferente e estudou-os dedicadamente.

No estudo dos números complexos, deve-se citar Leonhard Euler (1707-1783), este nasceu na Basiléia na Suíça, era discípulo de Jean Bernoulli (1667-1748), dotado de uma memória espetacular. Euler revelava sinais de um futuro promissor na matemática, pela facilidade que dominava essa ciência, embora aos 28 anos de idade tenha perdido a visão do seu olho esquerdo e em 1765 perdeu a visão total, isso não o impediu de produzir, ditando suas descobertas para um secretário. Euler foi um dos matemáticos que mais produziu e publicou trabalhos, mais de oitocentos, em várias áreas da matemática e física, e também foi o consolidador da simbologia moderna, tendo não somente consagrado o que havia de melhor na época mas também inventando o que muito se utiliza até os dias de hoje. Uma das representações propostas por Euler foi justamente a letra i substituindo $\sqrt{-1}$. Euler passou a estudar os números da forma $z = a \pm bi$, onde a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$, aprofundou-se tanto nesse segmento que ficou considerado como o matemático que dominou os números complexos.

3 Principais Métodos de Resoluções das Equações do Terceiro Grau Aplicados no Ensino Médio

Ao fazer-se uma pesquisa nos principais livros didáticos, da disciplina de matemática, utilizados no currículo do ensino médio das escolas públicas do Brasil, em especial no 3º ano do ensino médio, verifica-se que as equações algébricas de grau três não possuem um estudo detalhado, como acontece com as equações do 1º e 2º grau, no ensino fundamental. Entretanto, os livros didáticos trazem alguns métodos de resoluções das equações de 3º grau, e também observa-se que existem alguns problemas abordados nesses livros, que em sua solução requer o conhecimento de equações desse nível.

De acordo com IEZZI (2010, p.179) “Quando o grau do polinômio é 3 ou 4, é possível determinar as raízes das equações por meio de fórmulas que envolvem as quatro operações fundamentais e a extração de raízes. No entanto, essas fórmulas não são estudadas nos cursos de ensino médio.”

Entre os métodos que auxiliam na resolução das equações do terceiro grau estão: dispositivo prático de Briot-Ruffini, Relações de Girard e pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica. Esses três métodos conseguem determinar as raízes de algumas equações do terceiro grau, não podendo ser generalizado para todas as equações algébricas de grau três.

3.1 Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

Antes de detalharmos este dispositivo, vamos conhecer um pouco sobre a biografia de Paolo Ruffini (1765-1822) “médico e matemático italiano que iniciou os seus estudos de matemática e medicina na Universidade de Modena onde recebeu o grau de doutor. Como matemático, seu nome está associado à divisão de um polinômio por um binômio da forma $x-\alpha$ e com a prova (1803) da impossibilidade de resolver algebricamente, por radicais, a equação de grau 5”, conforme GUIMARÃES (2006, p. 21).

Esse dispositivo é utilizado na divisão de polinômios de qualquer grau por $x-\alpha$, mas em especial quando “α” for uma raiz da equação algébrica, o resto da divisão será igual a zero, e assim reduz em um grau a equação original. Pela decomposição de um polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$), em fatores de primeiro grau teremos $P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, como os valores de x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ... ,x_1 são raízes desse polinômio, o valor de $P(x) = 0$.

Portanto quando se dividir uma equação $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, por uma de suas raízes encontraremos uma equação do segundo grau $q_2x^2+q_1x+q_0=0$, e utilizando a fórmula de Bháskara, pode-se determinar as duas raízes que faltam da equação. Esse método é bastante utilizado, mas para isso precisamos conhecer previamente uma das raízes da equação.

Os valores de q_2, q_1 e q_0 são determinados de acordo com o seguinte processo:

1. O valor de α e os coeficientes da equação a_3, a_2, a_1 e a_0, são colocados na primeira linha, estes são oriundos de "$x-\alpha$"e da equação $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$;

2. A segunda linha é determinada através dos seguintes passos:

$$\begin{cases} q_2 = a_3 \\ q_1 = \alpha q_2 + a_2 \\ q_0 = \alpha q_1 + a_1 \\ r = \alpha q_0 + a_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Resultando em,

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & \mathrm{a}_3 & \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_0 \\ \hline & \mathrm{q}_2 & \mathrm{q}_1 & \mathrm{q}_0 & \mathrm{r} \end{array} \tag{3.2}$$

Esses resultados de q_2, q_1 e q_0 acontece devido ao fato de dividir o polinômio de grau 3, $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ por $f(x)=x-\alpha$, e obteremos como quociente um polinômio q(x) de grau 2, dado por $q_2x^2+q_1x+q_0=0$. Pela divisão euclidiana sabemos que $P(x)=f(x).q(x)+r$, então:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=(x-\alpha)(q_{n-1}x^{n-1}+....+q_1x+q_0)+r$$

$$a_nx^n+...+a_1x+a_0=q_{n-1}x^n+....+q_1x^2+q_0x-(\alpha q_{n-1}x^{n-1}+....+\alpha q_1x+\alpha q_0)+r$$

$$a_nx^n+...+a_1x+a_0=q_{n-1}x^n+(q_{n-2}-\alpha q_{n-1})x^{n-1}+...+(q_0-\alpha q_1)x+(r-\alpha q_0) \tag{3.3}$$

Assim igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtem-se os resultados dos valores de q.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{a}_0 = r-\alpha q_0 & \Rightarrow & \mathrm{r} = \alpha q_0 + a_0 \\ \mathrm{a}_1 = q_0-\alpha q_1 & \Rightarrow & \mathrm{q}_0 = \alpha q_1 + a_1 \\ \mathrm{a}_2 = q_1-\alpha q_2 & \Rightarrow & \mathrm{q}_1 = \alpha q_2 + a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{a}_n = q_{n-1} & \Rightarrow & \mathrm{q}_{n-1} = a_n \end{array}$$

Exemplo: 01) Sabendo que -1 é raiz da equação $x^3+x^2-3x-3=0$. Determine as outras raízes dessa equação.

Solução:

-1	1	1	-3	-3

-1	1	1	-3	-3
	1			

-1	1	1	-3	-3
	1	1.(-1)+1=0		

-1	1	1	-3	-3
	1	0	0.(-1)-3 = -3	

-1	1	1	-3	-3
	1	0	-3	-3.(-1)-3 = 0

-1	1	1	-3	-3
	1	0	-3	0

Portanto os valores de q_2 , q_1 e q_0 são respectivamente 1, 0 e -3. Assim pode-se afirmar que $x^3+x^2-3x-3=(x+1).(x^2-3)=0$, resultando numa equação do segundo grau $x^2-3=0$, que resolvendo teremos as outras duas raízes iguais a $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

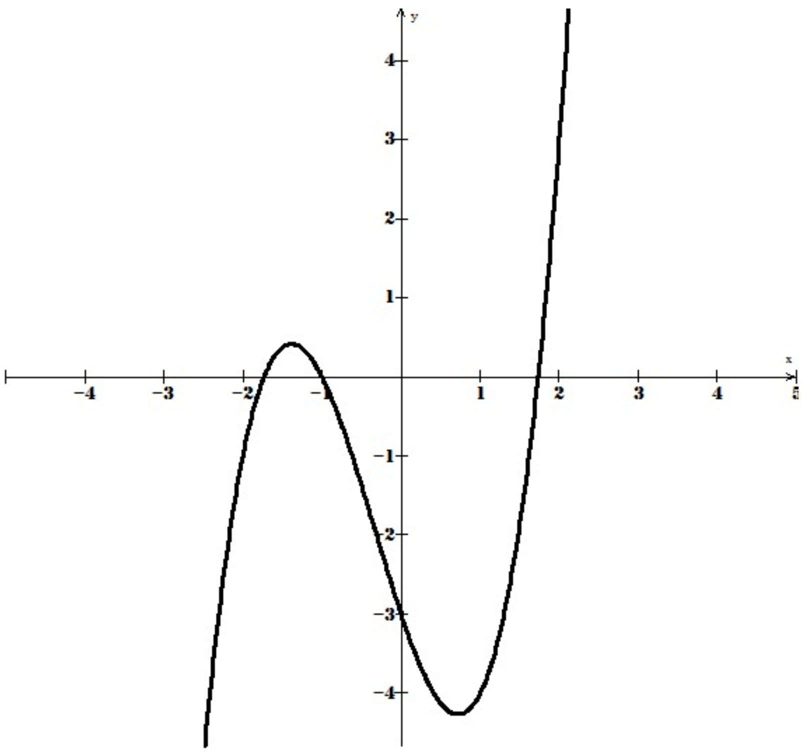

Figura 5 – *Gráfico da equação* x^3+x^2-3x-3

Exemplo: 02) Determine as raízes da equação $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

Solução: É de fácil verificação que 2 é raiz dessa equação, portanto conhecendo uma das raízes da equação podemos utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para reduzir a uma equação do segundo grau, e assim determinar as duas raízes que faltam.

2	1	-1	-1	-2
	1	1	1	0

Logo, $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2).(x^2 + x + 1) = 0$.

Assim resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + x + 1 = 0$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação.

Utilizando a fórmula de Bháskara temos que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Sendo, $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, as três raízes da equação são $S = \left\{2, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

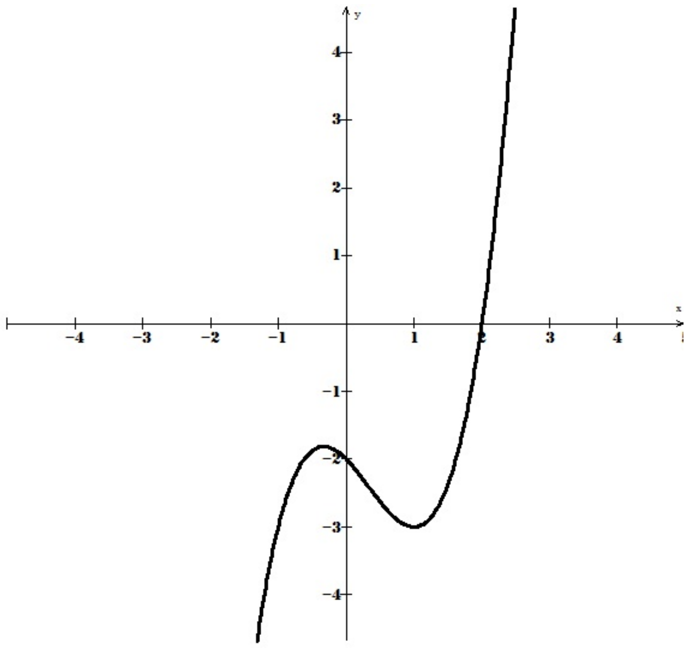

Figura 6 – *Gráfico da equação* $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

Logo, podemos verificar que o dispositivo prático de Briot-Ruffini, ou também conhecido como algoritmo de Ruffini, é uma ferramenta muito interessante na resolução das equações cúbicas. Entretanto, para a sua utilização, como visto anteriormente, há a necessidade de conhecer uma das raízes da equação, o que não generaliza a resolução de todas as equações do terceiro grau. E de acordo com ANDRADE (RPM nº34, 1997, p.14) "...Apesar de fazer uma grande restrição com relação ao grau do divisor, é um algoritmo amplamente divulgado e utilizado no 2º grau".

3.2 Relações de Girard

"Algumas relações entre coeficientes de uma equação polinomial e suas raízes, conhecidas como relações de Girard constituem uma ferramenta importante no estudo das raízes de um polinômio quando conhecemos alguma informação sobre elas" (IEZZI, 2010, p.187). Portanto, como enfatizado as relações de Girard são muito úteis, mas existe a necessidade de se conhecer alguma informação sobre as raízes da equação.

O matemático Francês Albert Girard nasceu em 1595 em Saint Mihiel na França e morreu no dia 8 de dezembro de 1632 em Leiden na Holanda. Sua dedicação em matemática foi principalmente no campo da álgebra, trigonometria e aritmética. Foi o primeiro a publicar as abreviaturas *sen*, *cos*, *tg* em seu tratado sobre trigonometria em 1626. Também ficou famoso por ser o primeiro a formular a definição da sucessão de Fibonacci, que é expressa da seguinte forma $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Publicou a obra *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629), onde nele principalmente constava a demonstração de que as equações algébricas podiam ter raízes negativas e imaginárias, conforme GUIMARÃES (2006, p. 23).

Assim como o dispositivo prático de Briot–Ruffini, as relações de Girard são válidas para polinômios de grau n, mas como este trabalho está concentrado nas equações de grau 3, iremos apresentar a demonstração das relações de Girard apenas para as equações cúbicas.

Demonstração: Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Podemos escrever essa equação em um produto de polinômios do primeiro grau em função dessas raízes, sendo:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2)(x - x_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x^3 - x^2x_1 - x^2x_2 + xx_1x_2 - x^2x_3 + xx_1x_3 + xx_2x_3 - x_1x_2x_3)$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3+(-x_1-x_2-x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3 \tag{3.4}$$

Portanto, igualando os coeficientes cujos termos são equivalentes temos:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \tag{3.5}$$

Que são conhecidas como as relações de Girard para uma equação do terceiro grau.

Exemplo: 03) Sabendo que uma das raízes é igual à soma das outras duas raízes da equação $x^3-8x^2+19x-12=0$. Determine as três raízes dessa equação.

Solução: Sendo x_1, x_2 e x_3, as raízes dessa equação, e os coeficientes $a=1$, $b=-8$, $c=19$ e $d=-12$, temos pelas relações de Girard as seguintes equações

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{8}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x_1+x_2+x_3=8$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{19}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=19$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{-12}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x_1x_2x_3=12$$

Mas sabemos que $x_1=x_2+x_3$, e substituindo na 1ª relação de Girard, teremos

$$x_1+x_2+x_3=8 \qquad \Rightarrow \qquad x_1+x_1=8 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_1=8 \qquad \Rightarrow \qquad x_1=4$$

E substituindo nas relações de Girard o valor de $x_1=4$

$$4+x_2+x_3=8 \qquad \Rightarrow \qquad x_2+x_3=4 \qquad \Rightarrow \qquad x_2=4-x_3$$

$$\begin{aligned}4x_2+4x_3+x_2x_3=19 \qquad &\Rightarrow \qquad 4(x_2+x_3)+(4-x_3)x_3=19\\ &\Rightarrow \qquad 4.4+4x_3-x_3^2=19\\ &\Rightarrow \qquad x_3^2-4x_3+3=0\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do 2º grau temos que $x = 1$ ou $x = 3$.

Logo os valores de x são 1 ou 3 para os valores $x = 1$ ou $x = 3$, respectivamente.

Assim as três raízes da equação são $S = \{1, 3, 4\}$.

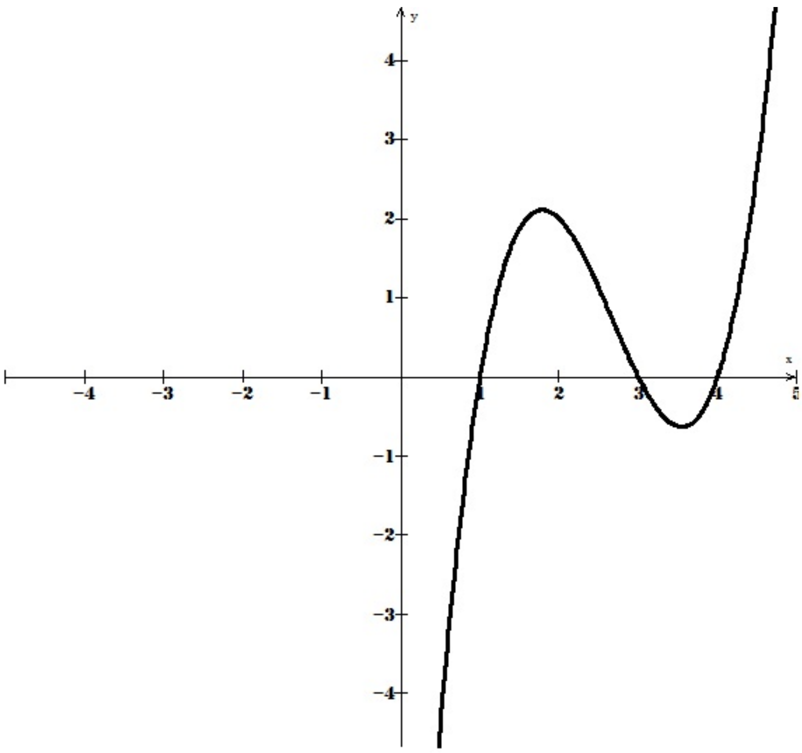

Figura 7 – *Gráfico da equação* $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$

Neste exemplo, após utilizar a 1ª relação de Girard e determinar o valor de uma das raízes, poderia-se ter utilizado o dispositivo prático de Briot-Ruffini, e encontraria a equação do segundo grau $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Exemplo: 04) Sendo a equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, determine o valor das raízes dessa equação, sabendo que suas raízes encontram-se em uma progressão aritmética.

Solução: Sendo x_1, x_2 e x_3, as raízes dessa equação, e os coeficientes $a = 1$, $b = -9$, $c = 23$ e $d = -15$, temos pelas relações de Girard as seguintes equações

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-9}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{23}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 23$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{-15}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x_1x_2x_3 = 15$$

Mas sabemos que as raízes dessa equação se encontram em forma de uma P.A.(progressão aritmética).

$$(x_1, x_2, x_3) \qquad \Rightarrow \qquad (x_2 - r, x_2, x_2 + r)$$

Onde r é a razão da progressão aritmética, assim $x_1 = x - r$ e $x_3 = x_2 + r$. E substituindo na 1ª relação de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 - r + x_2 + x_2 + r = 9 \qquad \Rightarrow \qquad 3x_2 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 3$$

Neste exemplo, ao conhecer uma das raízes, iremos utilizar o dispositivo prático de Briot–Ruffini. Dividindo $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ por $x - 3$.

3	1	-9	23	-15
	1	-6	5	0

Logo, $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x-3).(x^2 - 6x + 5) = 0$.

Assim resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - 6x + 5 = 0$, temos outras duas raízes dessa equação, que são $x = 1$ e $x = 5$.

Portanto, as três raízes da equação são $S = \{1, 3, 5\}$.

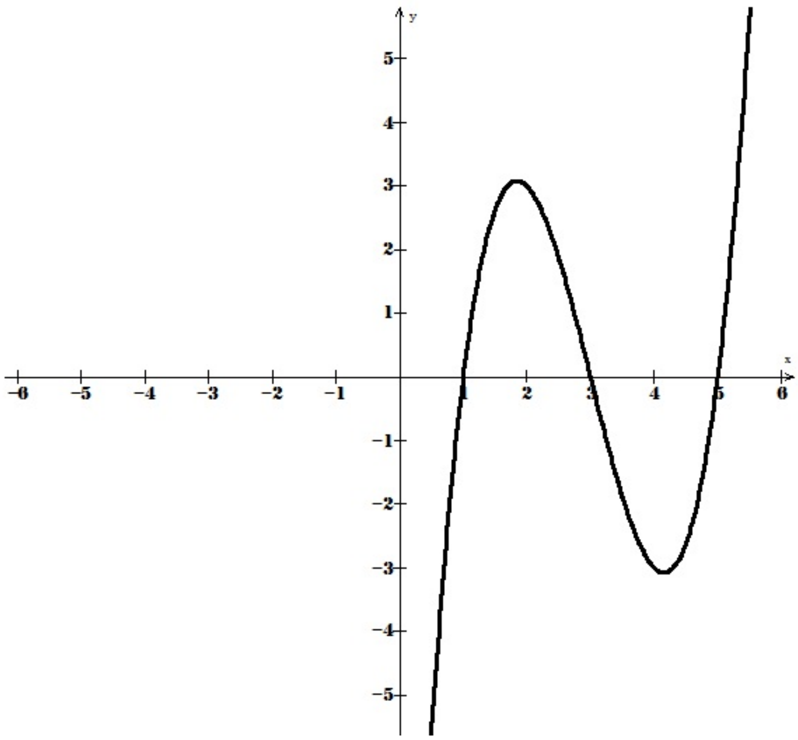

Figura 8 – *Gráfico da equação* $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$

Por fim, pode-se perceber que as relações de Girard conseguem resolver algumas equações cúbicas. Entretanto, para a sua utilização há a necessidade de conhecermos uma característica das suas raízes, ou seja, alguma informação especial para que possam ser utilizadas as relações, o que também não generaliza a resolução de todas as equações do terceiro grau.

3.3 Teorema das Raízes Racionais

O terceiro método de resolução de equações algébricas de grau três, que são apresentados no ensino médio é o teorema das raízes racionais, para as equações algébricas que possuem coeficientes inteiros, pois através dele pode-se fazer uma pesquisa das possíveis raízes racionais de uma equação.

Conforme IEZZI (2010, p.195) "O teorema das raízes racionais não garante a existência de raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros. Caso existam raízes racionais, o teorema fornece todas as possibilidades para tais raízes".

Teorema das raízes racionais: Seja uma equação polinomial de coeficientes inteiros $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ com p e q primos entre si, é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração: Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação, temos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n\left(\frac{p^n}{q^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + ... + a_2\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \tag{3.6}$$

Vamos colocar duas situações, na primeira deve-se isolar o valor de a_np^n, e na segunda deve-se isolar o valor de a_0q^n.

$$a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1})$$

$$a_0q^n = -p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_2pq^{n-2} + a_1pq^{n-1}) \tag{3.7}$$

Como foi definido que todos os coeficientes são inteiros, e os valores de p e q também são números inteiros, então temos que a_np^n e a_0q^n, também são números inteiros, logo para facilitar a interpretação, as seguintes substituições deverão ser feitas:

$$\alpha = a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}$$

$$\beta = a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_2pq^{n-2} + a_1pq^{n-1} \tag{3.8}$$

Resultando em, com α e $\beta \in \mathbb{Z}$,

$$a_np^n = -q\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_np^n}{q} = -\alpha$$

$$a_0q^n = -p\beta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_0q^n}{p} = -\beta \tag{3.9}$$

Essas igualdades mostram as seguintes relações de divisibilidade entre os coeficientes:

1. a_np^n é divisível por q. Como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q, isto é, q é divisor de a_n.

2. a_0q^n é divisível por p. Como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p, isto é, p é divisor de a_0.

Exemplo: 05) Determine o valor das raízes da equação $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$.

Solução: Ao ter-se uma questão desse grau para ser resolvida, observa-se que a mesma não fornece uma das raízes e resolvê-la por tentativa não visualizará com facilidade uma das raízes, o que fica inviável a utilização do dispositivo prático de Briot–Ruffini.

E por outro lado a questão também não fornece uma informação sobre as raízes, o que impossibilita a utilização das relações de Girard. Entretanto, todos os coeficientes são inteiros, o que possibilita a utilização do teorema das raízes racionais, e se a equação tiver alguma raiz racional ela será da forma racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, sendo p divisor de a_0 e q divisor de a_n.

Assim, deve-se fazer uma pesquisa das raízes racionais dessa equação cúbica. Sendo $a_0 = -2$ e $a_n = 3$, logo os possíveis valores de p e q são:

p é divisor de a_0, logo $p \in \{-2, -1, +1, +2\}$

q é divisor de a_n, logo $q \in \{-3, -2, -1, +1, +2, +3\}$

Resultando em $\frac{p}{q} \in \mathrm{S} = \left\{-2, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, +\frac{1}{2}, +\frac{2}{3}, +1, +2\right\}$

Chamando g(x) o polinômio oriundo da equação, deve-se fazer as verificações:

$$g(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$$

$$g(-2) = 3(-2)^3 - 7(-2)^2 + 8(-2) - 2 = 3(-8) - 7.4 - 16 - 2 = -70$$
$$g(-1) = 3(-1)^3 - 7(-1)^2 + 8(-1) - 2 = 3(-1) - 7.1 - 8 - 2 = -3 - 7 - 8 - 2 = -20$$
$$g\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 7\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 8\left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = -\frac{8}{9} - \frac{28}{9} - \frac{16}{3} - 2 = -\frac{34}{3}$$
$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = -\frac{1}{9} - \frac{7}{9} - \frac{8}{3} - 2 = -\frac{50}{3}$$
$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{3}{8} - \frac{7}{4} - 4 - 2 = -\frac{65}{3}$$
$$g\left(+\frac{1}{3}\right) = 3\left(+\frac{1}{3}\right)^3 - 7\left(+\frac{1}{3}\right)^2 + 8\left(+\frac{1}{3}\right) - 2 = \frac{1}{9} - \frac{7}{9} + \frac{8}{3} - 2 = 0$$

Com, $g\left(+\frac{1}{3}\right) = 0$, logo 1/3 é raiz da equação $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$, e para determinarmos as outras duas raízes deve-se utilizar o dispositivo prático de Briot–Ruffini, dividindo $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$ por $x - \frac{1}{3}$.

1/3	+3	-7	+8	-2
	+3	-6	+6	0

Logo, $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = \left(x - \frac{1}{3}\right).(3x^2 - 6x + 6)$.

Resolvendo a equação do segundo grau $3x^2 - 6x + 6 = 0$, ou da forma simplificada $x^2 - 2x + 2 = 0$, tem-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bháskara temos que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Sendo, $a = 1$, $b = -2$ e $c = 2$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.2}}{2.1}$$
$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$x = \frac{+2 \pm 2i}{2}$$
$$x = 1 \pm i$$

Portanto, as três raízes da equação são $S = \left\{+\frac{1}{3}, 1 - i, 1 + i\right\}$

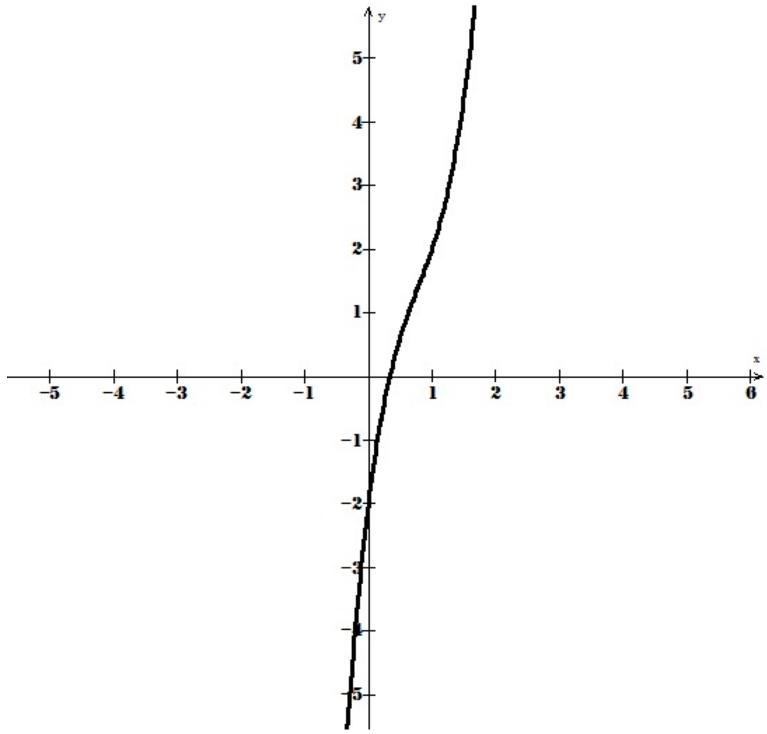

Figura 9 – *Gráfico da equação* $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$

Exemplo: 06) Observe as figuras seguintes, em que estão indicadas as dimensões do cubo e do paralelepípedo:

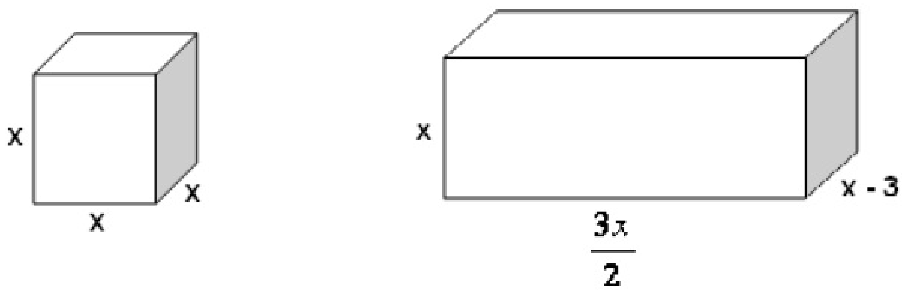

Figura 10 – Cubo e Paralelepípedo

Determine os valores de x para os quais o volume do cubo excede o do paralelepípedo em 32 unidades.

Solução: Primeiramente vamos utilizar a fórmulas de volume para chegarmos a uma equação algébrica em função de x.

$$V_{cubo} = x.x.x \qquad \Rightarrow \qquad V_{cubo} = x^3$$

$$V_{paralelepípedo} = x.\left(\frac{3x}{2}\right).(x-3) \qquad \Rightarrow \qquad V_{paralelepípedo} = \left(\frac{3x^3-9x^2}{2}\right)$$

Como sabemos pelo enunciado, o volume do cubo excede o do paralelepípedo em 32 unidades.

$$V_{cubo} = V_{paralelepípedo} + 32$$
$$x^3 = \left(\frac{3x^3-9x^2}{2}\right) + 32$$
$$2x^3 = 3x^3 - 9x^2 + 64$$
$$x^3 - 9x^2 + 64 = 0$$

Nesse ponto a resolução da questão recai em uma equação do terceiro grau, sem nenhuma informação sobre as raízes, que possibilitem utilizar as relações de Girard ou o dispositivo prático de Briot-Ruffini. Entretanto, todos os coeficientes são inteiros, o que possibilita a utilização do teorema das raízes racionais, e se a equação tiver alguma raiz racional ela será da forma racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, sendo p divisor de a_0 e q divisor de a_n.

Assim deve-se fazer uma pesquisa das raízes racionais dessa equação cúbica. Sendo $a_0 = +64$ e $a_n = +1$, logo os valores de p e q são:

$p \in \{-64, -32, -16, -8, -4, -2, -1, +1, +2, +4, +8, +16, +32, +64\}$

$q \in \{-1, +1\}$

Como sabe-se que as raízes dessa equação devem ser positivas e não nulas, pois se trata de comprimento de sólidos geométricos. Logo, $\frac{p}{q} \in \{+1, +2, +4, +8, +16, +32 + 64\}$, denominando $g(x)$ o polinômio oriundo da equação, vamos fazer as verificações:

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 64$$

$g(+1) = (+1)^3 - 9(+1)^2 + 64 = 1 - 9 + 64 = 56$

$g(+2) = (+1)^3 - 9(+2)^2 + 64 = 8 - 36 + 64 = 36$

$g(+4) = (+4)^3 - 9(+4)^2 + 64 = 64 - 144 + 64 = -16$

$g(+8) = (+8)^3 - 9(+8)^2 + 64 = 512 - 576 + 64 = 0$

Com, $g(8) = 0$, logo 8 é raiz da equação $x^3 - 9x^2 + 64 = 0$, e para determinar as outras duas raízes deve-se utilizar o dispositivo prático de Briot–Ruffini. Dividindo $x^3 - 9x^2 + 64$ por $x - 8$.

+8	+1	-9	+0	+64
	+1	-1	-8	0

Logo, $x^3 - 9x^2 + 64 = (x-8).(x^2 - x - 8)$.

Assim resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - x - 8 = 0$, teremos as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bháskara temos que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Sendo, $a = 1$, $b = -1$ e $c = -8$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-8)}}{2.1}$$
$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Portanto, as três raízes da equação são $S = \left\{+8, \frac{1+\sqrt{33}}{2}, \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right\}$.

Como x deve ser positivo e não nulo, os valores que satisfazem a solução do problema $x = +8$ ou $x = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

Então, pode-se concluir que o teorema das raízes racionais conseguem determinar pelo menos uma raiz em uma grande parcela de equações cúbicas, pois pelo teorema das raízes complexas, se existe uma raiz complexa na equação logo o conjugado desse número também será raiz dessa equação, ou seja, sabe-se que pelo menos uma das raízes da equação cúbica deve ser pertencente aos reais. Mas também não podemos generalizar, pois o teorema das raízes racionais é valido apenas para equações com coeficientes inteiros, e que tenham raízes racionais.

3.4 Restrições aos Principais Métodos Utilizados no Ensino Médio Envolvendo as Equações Cúbicas

Como vimos nos itens 2.1, 2.2 e 2.3 os principais métodos de resolução de equações cúbicas utilizados no ensino médio, não são suficientes para a resolução de qualquer equação do terceiro grau. Como por exemplo, para determinar as raízes da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$, sem nenhuma informação privilegiada sobre as suas raízes.

Neste caso não pode-se utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, pois não foi fornecida na questão nenhuma das raízes dessa equação e a verificação de uma raiz não é de fácil interpretação analisando apenas a equação.

As relações de Girard não são suficientes para a resolução da mesma, pois não foi informada alguma relação entre as raízes.

E por último, pelo Teorema das raízes racionais pode-se fazer a pesquisa de raízes racionais, pois todos os coeficientes da equação são inteiros. Assim vamos fazer uma pesquisa das raízes racionais dessa equação Sendo $a_0 = -3$ e $a_n = +1$, logo os valores de p e q são:

$p \in \{-3, -1, +1, +3\}$

$q \in \{-1, +1\}$

Resultando em $\frac{p}{q} \in \{-3, -1, +1, +3\}$. Chamando $g(x)$ o polinômio oriundo da equação, vamos fazer as verificações:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 3$$

$g(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 2(-3) - 3 = -27 + 27 - 6 - 3 = -9$

$g(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 2(-1) - 3 = -1 + 3 - 2 - 3 = -3$

$g(+1) = (+1)^3 + 3(+1)^2 + 2(+1) - 3 = 1 + 3 + 2 - 3 = +3$

$g(+3) = (+3)^3 + 3(+3)^2 + 2(+3) - 3 = 27 + 27 + 6 - 3 = +57$

Logo, podemos afirmar que essa equação não possui nenhuma raiz racional. E automaticamente não conseguimos determinar as raízes da equação pelo teorema das raízes racionais. Então, pode-se afirmar que essa equação não tem solução? Para solucionar este problema e outros da mesma natureza, que é o principal motivo deste trabalho, realizamos várias pesquisas bibliográficas, e encontramos algumas disparidades sobre o assunto, principalmente em autores de livros do ensino médio. De acordo com Dante (2010, p.192) “As equações polinomiais de grau maior do que 2 não têm um processo determinado de resolução por meio de fórmulas. Devemos procurar, então, uma ou mais raízes para com elas encontrar todas as raízes”.

Entre os principais estão: O método de Cardano-Tartaglia e o método numérico para equações polinomiais. Como citado no primeiro capítulo desse trabalho, no contexto histórico, falamos sobre a descoberta de Scipione Del Ferro(1465-1526) para as equações algébricas do terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$ e posteriormente também a de Nicoló Fontana (1499-1557), para as do tipo $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$, conseguindo posteriormente generalizar para qualquer equação do terceiro grau na sua forma geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em outra sem o termo do segundo grau fazendo algumas substituições, e também a genealidade de Isaac Newton na determinação de método numérico de aproximação de raízes reais de uma equação polinomial.

No próximo capítulo desse trabalho iremos demonstrar a fórmula de Nicoló Fontana

(1499-1557), mais conhecido como Tartaglia, que na verdade ficou famosa como "método de Cardano", pois foi este que fez a primeira publicação sobre o método de resolução, e que possui grande importância para a matemática, principalmente no segmento da álgebra, por instigar a curiosidade dos matemáticos e pensadores da época a trabalharem com valores negativos em raízes quadradas.

4 Resolução de Equações Cúbicas por Meio de Radicais

Para determinar as raízes de equações como a utilizada no item 3.4, sendo ela $x^3+3x^2+2x-3=0$, podemos utilizar fórmulas por meio de radicais, sendo a principal delas determinada por Tartaglia no século XVI. Neste capítulo além da demonstração do método de Cardano-Tartaglia, para a determinação de uma das raízes da equação cúbica, iremos também fazer uma análise das raízes cúbicas e apresentar algumas equações resolvidas pelo método de Cardano-Tartaglia.

4.1 Método de Cardano-Tartaglia

Abaixo segue a demonstração feita por Nicolo Fontana (Tartaglia), em relação às equações cúbicas, com algumas alterações algébricas para facilitar a compreensão, principalmente em relação à linguagem matemática utilizada atualmente e pelo fato de utilizarmos uma equação do terceiro grau completa. Baseado em um conjunto de ideias e demonstrações realizadas nas obras de Gilberto Garbi (GARBI, 2006), Paulo Sérgio Guimarães (GUIMARÃES, 2006), Elon Lages Lima (LIMA, 1985), Carlos Alberto Knudsen (KNUDSEN, RPM nº07, 1985), Adilson Gonçalves (GONÇALVES, 2013) e Cesar Polcino Milies (MILIES, RPM nº25, 1994).

Considere a equação polinomial do 3º grau da forma $ax^3+bx^2+cx+d=0$ em que a, b, c e d são constantes reais.

Para deixarmos a variável do 3º grau sem a constante dominante, dividi-se toda a equação por a.

$$ax^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

Onde,

$$A=\frac{b}{a} \qquad B=\frac{c}{a} \qquad C=\frac{d}{a}$$

Resultando em,

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0 \tag{4.1}$$

Vamos realizar uma mudança de variável que a equação fique sem o termo do segundo grau.

$$
\begin{gathered}
x = y + k \\
(y+k)^3 + A(y+k)^2 + B(y+k)x + C = 0 \\
y^3 + 3y^2k + 3yk^2 + k^3 + A(y^2 + 2yk + k^2) + By + Bk + C = 0 \\
y^3 + (A+3k)y^2 + (3k^2 + 2Ak + B)y + (k^3 + Ak^2 + Bk + C) = 0 \qquad (4.2)
\end{gathered}
$$

Observe que para anular o termo y^2 devemos supor o valor de k como:

$$k = -\frac{A}{3}$$

$$y^3 + \left[A + 3\left(-\frac{A}{3}\right)\right]y^2 + \left[3\left(-\frac{A}{3}\right)^2 + 2A\left(-\frac{A}{3}\right) + B\right]y + \left[\left(-\frac{A}{3}\right)^3 + A\left(-\frac{A}{3}\right)^2 + B\left(-\frac{A}{3}\right) + C\right] = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{A^2}{3} - \frac{2A^2}{3} + B\right)y + \left(-\frac{A^3}{27} + \frac{A^3}{9} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0$$

$$y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)y + \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0 \qquad (4.3)$$

Substituindo por P e Q, para facilitar a interpretação,

$$P = B - \frac{A^2}{3}$$

$$Q = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C \qquad (4.4)$$

Onde P e Q são constantes reais,

$$y^3 + Py + Q = 0$$

Para resolvermos a equação acima supomos que a solução é a soma de duas parcelas:

$$
\begin{gathered}
y = u + v \\
(u+v)^3 + P(u+v) + Q = 0 \\
u^3 + 3v^2u + 3vu^2 + v^3 + P(u+v) + Q = 0 \\
u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + P(u+v) + Q = 0 \\
(u^3 + v^3 + Q) + (P + 3uv)(u+v) = 0 \qquad (4.5)
\end{gathered}
$$

Para que esta igualdade seja verdadeira, pode-se utilizar os seguintes valores:

$$u^3+v^3+Q=0 \qquad ou \qquad P+3uv=0$$

Colocando em função de u e v,

$$\begin{cases} u^3+v^3 & = & -Q \\ u^3v^3 & = & -\dfrac{P^3}{27} \end{cases} \tag{4.6}$$

Sendo u^3 e v^3 as raízes de uma equação do segundo grau, pela soma e produto. Portanto resolver o problema equivale-se a resolver uma equação do 2º grau da forma $z^2-S_1z+P_1=0$, onde conhecemos a soma e o produto das raízes.

$$S_1=-Q \qquad ou \qquad P_1=\left(-\frac{P}{3}\right)^3$$

$$z^2-S_1z+P_1=0$$

$$z^2-(-Q)z+\left(-\frac{P}{3}\right)^3=0$$

$$z^2+Qz+\left(-\frac{P}{3}\right)^3=0$$

$$z=\frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-4.1.\left(-\frac{P}{3}\right)^3}}{2.1}$$

$$z=-\frac{Q}{2}\pm\sqrt{\frac{Q^2-4\left(-\frac{P}{3}\right)^3}{4}}$$

$$z=-\frac{Q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}$$

$$z_1=-\frac{Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3} \qquad e \qquad z_2=-\frac{Q}{2}-\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3} \tag{4.7}$$

Como utilizamos a adaptação da soma e produto de uma equação do segundo grau, onde $u^3=z_1$ e $v^3=z_2$. Logo sabemos que:

$$u^3 = z_1$$

$$u^3 = -\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} \tag{4.8}$$

e por outro lado:

$$v^3 = z_2$$

$$v^3 = -\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} \tag{4.9}$$

Substituindo $y = u + v$, temos:

$$y = u + v$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}} \tag{4.10}$$

Essa foi a solução encontrada por Tartaglia para determinar uma das raízes de uma equação cúbica da forma $y^3 + Py + Q = 0$.

> ...Graças ao método de solução das equações do terceiro grau, que foi desenvolvido por Tartaglia, há uma considerável mudança dos rumos da álgebra dos números. Independentemente de a equação de terceiro grau que desejemos resolver ter raízes reais, e uma raiz real ela certamente possui, ela passará pela solução de uma equação do segundo grau que, via de regra, possui soluções complexas. Em outras palavras, para que essa solução possa ser obtida, é necessário tratar com uma nova categoria de números, diretamente associados a uma quantidade dada por $i = \sqrt{-1}$, e que foram denominados por L. Euler como números imaginários. Em outras palavras, a solução dessa equação de terceiro grau exigiu o desenvolvimento de uma álgebra dos números complexos.(GUIMARÂES, 2006, p.57)

E como nessa demonstração adaptamos para uma equação do tipo $ax^3+bx^2+cx+d=0$, temos então:

$$x = y + k$$

$$k = -\frac{A}{3} \qquad e \qquad y = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}-\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}}$$

$$x = y - \frac{A}{3}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}-\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}}-\frac{A}{3} \tag{4.11}$$

Essa é uma das raízes da equação do tipo $ax^3+bx^2+cx+d=0$, com os seguintes valores em função dos coeficientes a, b, c e d.

$$P = B - \frac{A^2}{3}$$

$$Q = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C$$

$$A = \frac{b}{a} \qquad B = \frac{c}{a} \qquad C = \frac{d}{a}$$

Com essa fórmula de Cardano-Tartaglia, só é possível encontrar uma raiz de imediato, mas na verdade uma equação do terceiro grau devem existir três raízes. Entretanto, quando Tartaglia a desenvolveu, ele ainda não tinha o conhecimento dos números complexos e também não tinha uma maneira de realizar uma aproximação dos números, e em muitos casos a raiz fornecida pela fórmula de Cardano–Tartaglia nos conduz a números aproximados (aproximação tão boa quanto quisermos). E por outro lado, também chegaremos a situações em que o valor no interior da raiz quadrada seja negativo, ocasionando uma falsa impressão de não determinação dessa raíz. Isto significa que não há soluções algébricas para as equações do terceiro grau? Não, isto pode ser esclarecido através de uma comparação com as equações do 2º grau. Seja uma equação $x^2=3$, cuja as raízes, obtidas por métodos algébricos são exatamente $x=\pm\sqrt{3}$. Entretanto, quando procuramos converter a expressão $\sqrt{3}$ em números grafados na notação decimal, somente podemos fazê-lo de forma aproximada, ou seja, $x=\pm 1,732050808...$, por isso deve-se trabalhar com números aproximados e complexos, conforme GARBI(2010, p. 138).

Portanto na seção 4.2, vamos explorar a equação fornecida por Tartaglia para encontrar uma classificação das três raízes existentes em uma equação cúbica. Temos que nos atentar para um fato importante, o valor do discriminante da equação de Cardano-Tartaglia.

4.2 Análise das Raízes de uma Equação do Terceiro Grau

Nesta seção vamos demonstrar a classificação das raízes de uma equação do terceiro grau, em relação ao conjunto dos números reais ou complexos. Vamos utlizar a fórmula de Cardano-Tartaglia (4.10), demostrada na seção anterior para a equação cúbica do tipo $x^3+Px+Q=0$, em que:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2}-\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3}}$$

> Preliminarmente, observaremos que
>
> $$f(x) = x^3\left(1+\frac{P}{x^2}+\frac{Q}{x^3}\right)$$
>
> Para valores de x que tenham valor absoluto muito grande, P/x^2 e Q/x^3 são insignificantes, logo, para tais valores, na soma dentro dos parênteses prevalece o sinal de 1, que é positivo. Então o sinal de $f(x)$, quando o valor absoluto de x é muito grande, é o mesmo sinal de x^3, isto é, de x. Em particular, o polinômio $f(x)$ é negativo para valores muito grandes negativos de x e é positivo se x é um número positivo muito grande. Segue-se daí que $f(x)$, por passar continuamente de negativo a positivo, deve-se anular em algum ponto. Toda esta conversa serve para concluir que toda equação do terceiro grau tem pelo menos uma raiz real (LIMA, 2012, p. 22).

A análise se faz necessária apenas na expressão algébrica que encontra-se no radical quadrático, passaremos a denomina-lo de discriminante, representado pela letra grega Δ (Delta maiúscula).

$$\Delta = \left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3 \tag{4.12}$$

Para isso vamos supor duas situações: Quando existirem raízes complexas, e quando não existirem raízes complexas na equação do terceiro grau. E sabendo que uma equação do terceiro grau, do tipo x^3+Px+Q, necessariamente possui uma raiz real.

No primeiro caso a ser analisado, vamos supor que dentre as raízes de uma equação do terceiro grau tenhamos uma raíz complexa do tipo $a+bi$, com $b\neq 0$. Mas sabemos que pelo Teorema das Raízes Complexas que se um número complexo $z=a+bi$, com $b\neq 0$, é raiz de uma equação com coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z}=a-bi$ também é raiz dessa equação. Consequentemente, temos $x_1=a+bi$ e $x_2=a-bi$ e $x_3\in\mathbb{R}$.

Para que o termo de segundo grau seja anulado devemos supor: $x_1+x_2+x_3=0$, pois pela decomposição de um polinômio $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (com $a\neq 0$), em fatores de primeiro grau teremos $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Como os valores x_1, x_2, e x_3 são raízes desse polinômio, conforme (3.4), tem-se:

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$
$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$$

Para eliminar o termo de grau dois da equação, utilizaremos a seguinte igualdade,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$a + bi + a - bi + x_3 = 0$$
$$2a + x_3 = 0$$
$$x_3 = -2a \tag{4.13}$$

Substituindo na equação geral temos:

$$x^3 + [(a+bi)(a-bi) + (a-bi)(-2a) + (a+bi)(-2a)]\,x - [(a+bi)(a-bi)(-2a)] = 0$$
$$x^3 + (a^2 - b^2i^2 - 2a^2 + 2abi - 2a^2 - 2abi)x - (-2a^3 + 2ab^2i^2) = 0$$
$$x^3 + (-3a^2 + b^2)x - (-2a^3 - 2ab^2) = 0$$
$$x^3 + (b^2 - 3a^2)x + 2a(a^2 + b^2) = 0 \tag{4.14}$$

Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia na equação acima em forma de $x^3 + Px + Q = 0$, teremos então:

$$P = b^2 - 3a^2 \qquad\qquad Q = 2a(a^2 + b^2)$$

Onde o discriminante da equação será,

$$\Delta = \left[\frac{2a(a^2+b^2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{b^2-3a^2}{3}\right]^3$$
$$\Delta = a^2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + \frac{b^6 - 9a^2b^4 + 27a^4b^2 - 27a^6}{27}$$
$$\Delta = a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4 + \frac{b^6 - 9a^2b^4 + 27a^4b^2 - 27a^6}{27}$$
$$\Delta = \frac{27a^6 + 54a^4b^2 + 27a^2b^4 + b^6 - 9a^2b^4 + 27a^4b^2 - 27a^6}{27}$$
$$\Delta = \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{27} \tag{4.15}$$

Portanto, independente dos valores de a e b, referente as raízes complexas $x_1 = a + bi$ e $x_2 = a - bi$, o disciminante da equação será positivo, pois todos os valores de a e b se apresentam com expoentes pares. Então podemos concluir que, se existir raíz complexa em uma equação do terceiro grau, logo o valor do seu discriminante será positivo ou nulo ($\Delta \geq 0$).

No segundo caso a ser analisado, vamos supor que dentre as raízes de uma equação do terceiro grau não há raíz complexa do tipo $a+bi$ com $b \neq 0$, ou seja, existirá apenas raizes reais.

Assim utilizaremos, conforme (3.4), a expressão geral de uma equação do terceiro grau em função de suas raízes x_1, x_2 e x_3.

$$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3=0$$

Para que o termo de segundo grau seja anulado devemos supor: $x_1+x_2+x_3=0$, logo temos que $x_3=-x_1-x_2$.

$$x^3+[x_1x_2+x_2(-x_1-x_2)+x_1(-x_1-x_2)]\,x-x_1x_2(-x_1-x_2)=0$$

$$x^3+(x_1x_2-x_1x_2-x_2^2-x_1^2-x_1x_2)x+x_1^2x_2+x_1x_2^2=0$$

$$x^3-(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)x+x_1^2x_2+x_1x_2^2=0 \tag{4.16}$$

Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia na equação acima em forma de $x^3+Px+Q=0$, teremos então:

$$P=-(x_1^2+x_1x_2+x_2^2) \qquad e \qquad Q=x_1^2x_2+x_1x_2^2$$

ou

$$P=x_1x_2-(x_1+x_2)^2 \qquad e \qquad Q=x_1x_2(x_1+x_2)$$

Onde o discriminante da equação será,

$$\Delta=\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3$$

Substituindo os valores teremos,

$$\Delta=\left[\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{2}\right]^2+\left[\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)^2}{3}\right]^3$$

$$\Delta=\left(\frac{x_1^2x_2^2(x_1+x_2)^2}{4}\right)+\frac{x_1^3x_2^3-3x_1^2x_2^2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+3x_1x_2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)^2-(x_1+x_2)^6}{27}$$

$$\Delta=\left(\frac{x_1^4x_2^2+2x_1^3x_2^3+x_1^2x_2^4}{4}\right)+\left(\frac{-x_1^6-3x_1^5x_2-6x_1^4x_2^2-7x_1^3x_2^3-6x_1^2x_2^4-3x_1x_2^5-x_2^6}{27}\right)$$

$$\Delta=\frac{-4x_1^6-12x_1^5x_2+3x_1^4x_2^2+26x_1^3x_2^3+3x_1^2x_2^4-12x_1x_2^5-4x_2^6}{108}$$

$$\Delta = -\frac{(x_1-x_2)(-4x_1^5-16x_1^45x_2-13x_1^3x_2^2+13x_1^2x_2^3+16x_1x_2^4+4x_2^5)}{108}$$

$$\Delta = -\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_2)(-4x_1^4+2x_1^35x_2+33x_1^2x_2^2+20x_1x_2^3+4x_2^4)}{108}$$

$$\Delta = -\frac{(x_1-x_2)^2(x_1+2x_2)(4x_1^3+12x_1^2x_2+9x_1x_2^2+2x_2^3)}{108}$$

$$\Delta = -\frac{(x_1-x_2)^2(x_1+2x_2)(2x_1+x_2)(2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2)}{108}$$

$$\Delta = -\frac{(x_1-x_2)^2(x_1+2x_2)(2x_1+x_2)(x_1+2x_2)(2x_1+x_2)}{108}$$

$$\Delta = -\frac{(x_1-x_2)^2(x_1+2x_2)^2(2x_1+x_2)^2}{108} \tag{4.17}$$

Portanto, se as raízes x_1, x_2 e $x_3 \in \mathbb{R}$, o disciminante da equação será negativo ou nulo, pois no Δ todos os valores de x_1, x_2 e x_3 se apresentam com expoentes pares. Então, pode-se concluir que se não existir raíz complexa em uma equação do terceiro grau, o valor do seu discriminante será negativo ou nulo ($\Delta \leq 0$).

A partir dos resultados encontrados acima, supondo a existência ou não de raízes complexas em uma equação do terceiro grau, vamos verificar nos dois casos a questão em que o discriminante possa ser nulo.

No primeiro caso para que Δ seja nulo os valores de a e b devem ser nulos também, $a = b = 0$, o que é um absurdo pois pela suposição deve existir raízes complexas da forma $x_1 = a+bi$ e $x_2 = a-bi$, com $b \neq 0$. E por fim as três raízes seriam nulas, pois se $a = b = 0$ e $x_3 = -2a$, logo $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

No segundo caso para que Δ seja nulo, deve-se analisar as três situações: $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + 2x_2 = 0$ e $x_2 + 2x_1 = 0$. Lembrando que $x_3 = -x_1 - x_2$, onde foi utilizado para anular o termo do segundo grau da equação cúbica.

1. Para $x_1 - x_2 = 0$, tem-se $x_1 = x_2$;

2. Para $x_1 + 2x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = -2x_2$. Portanto, $x_3 = x_2$;

3. Para $2x_1 + x_2 = 0$, ou seja, $x_2 = -2x_1$. Portanto, $x_3 = x_1$.

Assim, pode-se concluir para $\Delta = 0$, tem-se três raízes reais onde pelo menos duas devem ser coincidentes.

Conforme GARBI (2010, p. 134), sobre a classificação das raízes das equações do terceiro grau, pode-se resumir em:

Discriminante	**Raízes da equação**
$\Delta < 0$	Três raízes reais
$\Delta = 0$	Três raízes reais, sendo duas ou três iguais*
$\Delta > 0$	Uma raíz real e duas complexas conjugadas

*Se as três forem iguais todas serão nulas.

4.3 Aplicabilidade da Fórmula de Cardano-Tartaglia

Após demonstrações realizadas nas seções 4.1 e 4.2 sobre a fórmula de Cardano-Tartaglia, iremos resolver alguns exemplos utilizando essa fórmula e a classificação das suas respectivas raízes de acordo com o valor do seu discriminante. Em especial no exemplo 09 resolveremos a equação citada na seção 3.4, sendo ela $x^3+3x^2+2x-3=0$, que foi utilizada como uma restrição aos principais métodos adotados no ensino médio atualmente.

Exemplo: 07) Determine as raízes da equação $x^3-3x-2=0$, utilizando o método de Cardano-Tartaglia.

Solução: Essa equação já se encontra da forma $x^3+Px+Q=0$, logo os valores de P e Q são respectivamente, -3 e -2.

$$\Delta = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3$$
$$\Delta = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3$$
$$\Delta = 1-1$$
$$\Delta = 0$$

Pela análise do discriminante, $\Delta = 0$, conclui-se que essa equação possui três raízes reais, sendo no mínimo duas iguais. Substituindo os valores de P e Q na fórmula de Cardano-Tartaglia, teremos:

$$x = \sqrt[3]{-\left(\frac{-2}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-2}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3}}$$
$$x = \sqrt[3]{1+\sqrt{1-1}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{1-1}}$$
$$x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 1 + 1$$

$$x = 2$$

Como encontramos a raiz real da equação, podemos então utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para efetuar a divisão entre $x^3 - 3x - 2$ e $x - 2$.

2	1	0	-3	-2
	1	2	1	0

Logo, $x^3 - 3x - 2 = (x-2).(x^2 + 2x + 1)$.

Assim, resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + 2x + 1 = 0$, tem-se as duas raízes que faltam dessa equação, sendo $x_2 = x_3 = -1$.

Portanto, as três raízes da equação são: $S = \{-1, -1, 2\}$.

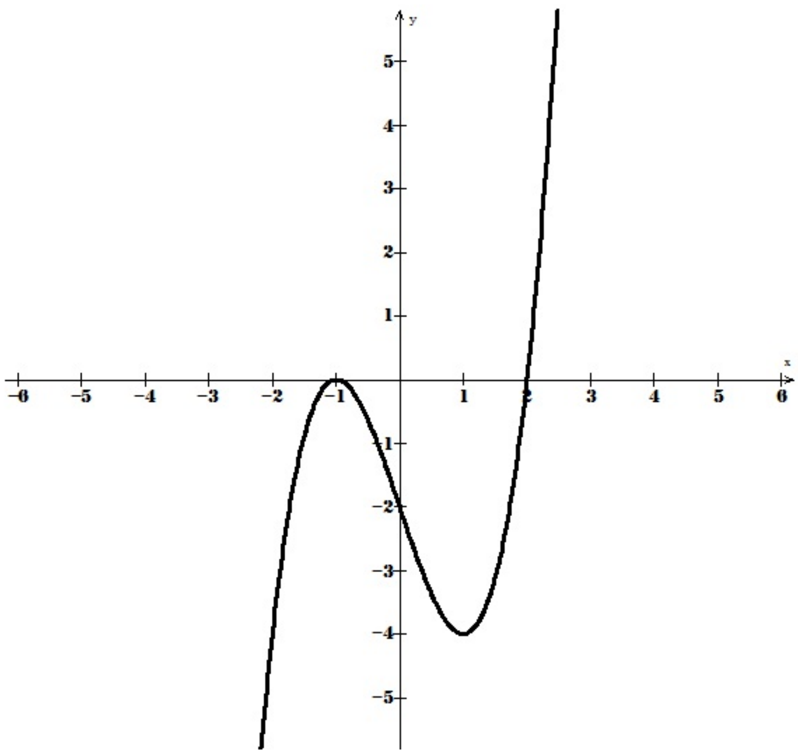

Figura 11 – *Gráfico da equação* $x^3 - 3x - 2 = 0$

Neste exemplo, em vez de utilizar a fórmula de Cardano-Tartaglia para determinar as raízes dessa equação, poderia ter utilizado o Teorema das Raízes Racionais, e encontraríamos as raízes $x = 2$ e $x = -1$.

Exemplo: 08) Determine as raízes da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, utilizando o método de Cardano-Tartaglia.

Solução: Essa equação já se encontra da forma $x^3+Px+Q=0$, logo os valores de P e Q são respectivamente, -6 e -9.

$$\Delta=\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3$$

$$\Delta=\left(\frac{-9}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3$$

$$\Delta=\frac{81}{4}+\frac{-216}{27}$$

$$\Delta=\frac{49}{4}$$

Pela análise do discriminante, $\Delta>0$, conclui-se que essa equação possui uma raiz real e duas raízes complexas. Substituindo os valores de P e Q na fórmula de Cardano-Tartaglia, teremos:

$$x=\sqrt[3]{-\left(\frac{-9}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\left(\frac{-9}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2+\left(\frac{-6}{3}\right)^3}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}$$

$$x=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}$$

$$x=2+1$$

$$x=3$$

Como encontramos a raiz real da equação, podemos então utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para efetuar a divisão entre x^3-6x-9 e $x-3$.

3	1	0	-6	-9
	1	3	3	0

Logo, $x^3-6x-9=(x-3).(x^2+3x+3)$.

Assim, resolvendo a equação do segundo grau $x^2+3x+3=0$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bháskara temos que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Sendo, $a = 1$, $b = 3$ e $c = 3$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.3}}{2.1}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, as três raízes da equação são: $S = \left\{3, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

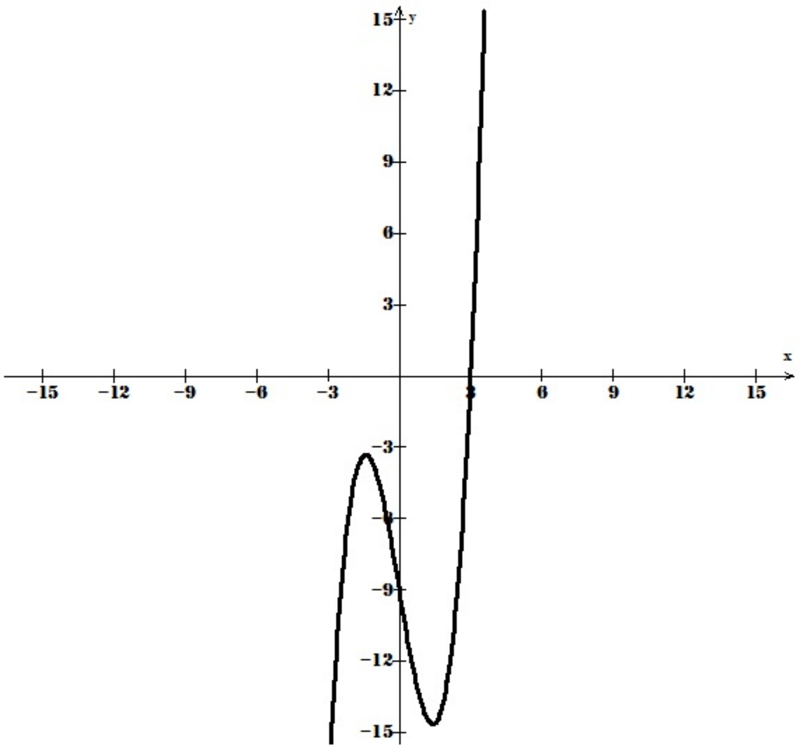

Figura 12 – *Gráfico da equação* $x^3 - 6x - 9 = 0$

Neste exemplo, em vez de utilizar a fórmula de Cardano-Tartaglia para determinar a raiz real da equação, poderia ter utilizado o Teorema das Raízes Racionais, e encontraríamos a raiz $x = 3$.

Exemplo: 09) Determine as raízes da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$.

Solução: Neste exemplo, como visto na seção 3.4, não podemos trabalhar com nenhum dos principais métodos utilizados no ensino médio. Portanto, a fórmula a ser utilizada será a de Cardano-Tartaglia.

Essa é uma equação do tipo $ax^3+bx^2+cx+d=0$, com os seguintes valores dos coeficientes: $a=1$, $b=3$, $c=2$ e $d=-3$.

$$A=\frac{b}{a} \qquad B=\frac{c}{a} \qquad C=\frac{d}{a} \qquad \Rightarrow \qquad A=3 \qquad B=2 \qquad C=-3$$

$$P=B-\frac{A^2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad P=2-\frac{3^2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad P=-1$$

$$Q=\frac{2A^3}{27}-\frac{AB}{3}+C \qquad \Rightarrow \qquad Q=\frac{2(3)^3}{27}-\frac{3.2}{3}+(-3) \qquad \Rightarrow \qquad Q=-3$$

$$\Delta=\left(\frac{Q}{2}\right)^2+\left(\frac{P}{3}\right)^3$$
$$\Delta=\left(\frac{-3}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^3$$
$$\Delta=\frac{9}{4}+\frac{-1}{27}$$
$$\Delta=\frac{239}{108}$$

Pela análise do discriminante, $\Delta>0$, pode-se concluir que essa equação possui uma raiz real e duas raízes complexas. Substituindo os valores de P e Q na fórmula de Cardano-Tartaglia, temos:

$$x=\sqrt[3]{-\left(\frac{-3}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\left(\frac{-3}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^3}}-\frac{A}{3}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{239}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{239}{108}}}-\frac{3}{3}$$
$$x\approx 1,440260224+0,231439657-1$$
$$x\approx 0,671699881$$

Como encontramos a raiz real da equação, podemos então utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para efetuar a divisão entre $x^3+3x^2+2x-3=0$ e $x-0,671699881$.

0,671699881	1	3	2	-3
	1	3,671699881	4,466280373	0

Logo, $x^3+3x^2+2x-3\approx(x-0,671699881).(x^2+3,671699881x+4,466280373)$.

Assim, resolvendo a equação $x^2+3,671699881x+4,466280373=0$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bháskara temos que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Sendo, $a = 1$, $b = 3,671699881$ e $c = 4,466280373$

$$x = \frac{-3,671699881 \pm \sqrt{(3,671699881)^2 - 4.1.(4,466280373)}}{2.1}$$
$$x = \frac{-3,671699881 \pm \sqrt{-4,383741476}}{2}$$
$$x = \frac{-3,671699881 \pm 2,093738636i}{2}$$
$$x = -1,835849941 \pm 1,046869315i$$

Portanto, as três raízes da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$, são aproximadamente:

$$\begin{cases} x_1 = 0,671699881 \\ x_2 = -1,835849941 + 1,046869315i \\ x_3 = -1,835849941 - 1,046869315i \end{cases}$$

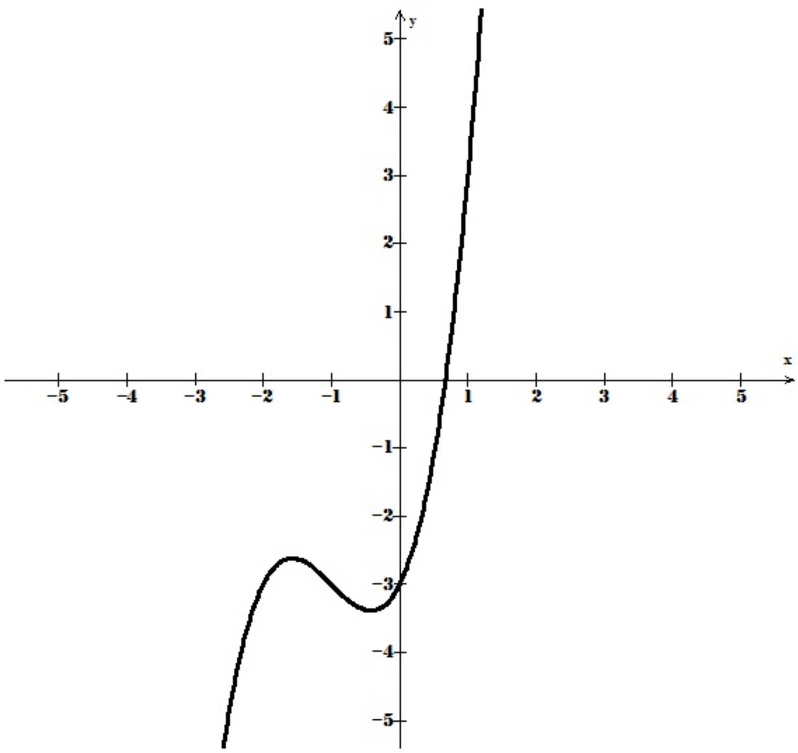

Figura 13 – *Gráfico da equação* $x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$

Observando a resolução utilizada neste exemplo pelo método de Cardano-Tartaglia, foi necessária a utilização de números aproximados, e isso gera um certo desapontamento.

Exemplo: 10) Determine as raízes da equação $x^3 - 10x + 4 = 0$, utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia.

Solução: Essa é uma equação do tipo $x^3 + Px + Q = 0$, com os seguintes valores dos coeficientes P e Q são respectivamente, -10 e 4.

$$\Delta = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3$$

$$\Delta = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-10}{3}\right)^3$$

$$\Delta = 4 - \frac{1000}{27}$$

$$\Delta = -\frac{892}{27}$$

Nesse caso é preciso aplicar os conceitos dos números complexos e de trigonometria, em especial utilizando as leis De Moivre, com uma série de substituições, e ainda utilizará valores das tábuas trigonométricas, que também são aproximados. E por essas razões não aprofundaremos na resolução de exercícios em que $\Delta < 0$, pelo método de Cardano-Tartaglia.

As fórmulas descobertas por Scipione Del Ferro e Nicoló Fontana, para as equações cúbicas tiveram uma grande contribuição para o estudo dessas equações, mas por outro lado nunca foram bem aceitas pelos autores de livros de ensino médio justamente por se tratar de um algoritmo muito extenso, e com muitas substituições de variáveis, e principalmente pela utilização das tábuas trigonométricas e os números aproximados. No entanto, a partir deste algoritmo foi possível a descoberta dos números complexos, a demonstração do número de raízes de uma equação, a descoberta de Ludovico Ferrari(1522-1565) de um algoritmo para a resolução de equações de quarto grau.

De acordo com GARBI (2010, p. 137), as tábuas trigonométricas são, de um modo geral, elaboradas através de técnicas de Cálculo Infinitesimal, a fórmula descoberta por Tartaglia, não oferece resultados práticos melhores do que os de Newton. Ao contrário, esse é mais simples e prático, confirmando que Newton realmente foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Assim no próximo capítulo iremos demonstrar um método numérico para a resolução de equações polinomiais, em especial as cúbicas, que podem ser aplicados ao ensino médio com o auxílio de uma calculadora para facilitar as operações matemáticas.

5 Método Numérico para a Resolução de Equações Polinomiais

Conforme CARNEIRO (RPM nº40, 1999, p.33), existem vários métodos numéricos para determinar as raízes de uma equação algébrica, mas em sua maioria os procedimentos são muito semelhantes. Os mesmos obedecem uma cronologia da seguinte forma:

1. Localizar um intervalo onde se encontram as raízes;
2. Escolher um valor inicial dentro do intervalo onde se encontra uma raiz;
3. Realizar um processo repetitivo, que a partir do valor inicial se aproxime o mais rápido possível para a raiz desejada.

Os métodos numéricos determinam uma sequência de valores aproximados que permite obter as raízes de uma equação polinomial, com um grau de aproximação tão grande quanto se deseje. Um dos principais matemáticos a desenvolverem métodos numéricos foi Isaac Newton.

As contribuições de Newton na teoria das equações algébricas foram: utilização de métodos algébricos aproximados para a determinação de raízes reais das equações, um método aproximado não algébrico utilizando o cálculo diferencial (conhecido atualmente como método de Newton) e um conjunto de critérios numéricos para a pesquisa das raízes, (GARBI, 2010, p. 86).

5.1 Método de Newton-Rapshon

Esse método tem por objetivo a determinação de valores aproximados das raízes de uma função, e foi proposto por Isaac Newton em dois momentos: em 1669 em sua obra *De analysi per aequationes número terminorum infinitas*, onde era composta por ideias adquiridas em 1665-1666 sendo publicado apenas em 1711 e em sua outra obra *De metodis fluxionum et serierum infinitarum*, escrito em 1671, sendo aprimorado para qualquer tipo de função real em 1690 por Joseph Raphson. Daí sua popularidade como método de Newton-Raphson. Entretanto foi extremamente importante a atuação de tantos outros grandes matemáticos como L. A. Cauchy, J.Fourier, Kantorovich, Fine e Bennet, entre outros, os quais contribuíram com o método provando que o mesmo convergia quadraticamente desde que o ponto inicial fosse tomado em uma vizinhança da solução procurada (Fourier), que o mesmo se estende para funções de várias variáveis, e que pode ser utilizado para se provar a existência de raízes de outras equações (Cauchy), conforme MACHADO e ALVES (2013, p. 31).

Aqui será apresentado o método de Newton-Raphson, para que tenhamos conhecimento da origem do mesmo, entretanto o mesmo se inviabiliza na utilização no ensino médio por requerer um conhecimento prévio de cálculo diferencial. O método de Newton-Raphson consiste em uma sequência de cálculos da tangente do ângulo formado entre uma reta tangente a curva $f(x)$ em um ponto inicial x_0 e o eixo das abscissas, que por sua vez resultará em um novo ponto x_1, ao qual definirá uma nova reta tangente que por sua vez propiciará um novo ponto x_2 e assim sucessivamente.

Abaixo segue representação algébrica do método de Newton-Rapshon:

$$tg\theta = f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (5.1)$$

Agora, vamos mostrar a interpretação gráfica do método de Newton-Rapshon, para uma melhor compreensão, de como esse método é eficaz, e a sua convergência para a aproximação da raiz da equação algébrica é rápida. Esse tipo de método aplica-se não só as equações algébricas, mas também as equações transcedentes, que são equações onde não possuem uma solução exata expressa através de funções conhecidas.

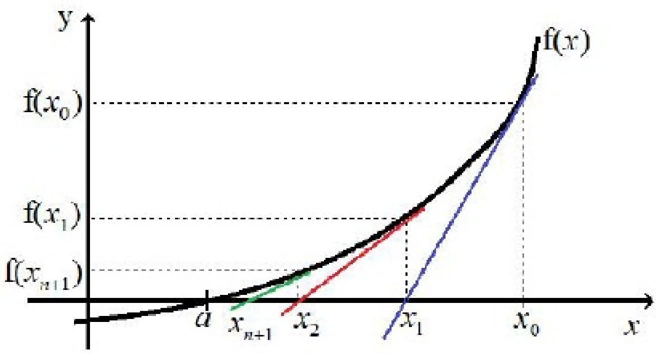

Figura 14 – *Curva $f(x_n)$ e retas tangentes*

5.2 Método Algébrico Aproximado para o Encontro de Raízes Reais

Esse procedimento algébrico que será apresentado nesta seção foi também formulado por Isaac Newton, mas sem a utilização do cálculo diferencial, apenas com processo de divisão entre polinômios. Assim podemos utilizar nas equações algébricas, nos casos em que os coeficientes são números reais para encontrar raízes reais aproximadas.

Para facilitar o processo de divisão entre os polinômios, utilizaremos os dispositivo Prático de Briot-Ruffini. Por isso, pode-se com certa facilidade trabalhar esse método nas equações cúbicas no currículo do Ensino Médio.

Abaixo segue os passos que devem ser realizados para a utilização do método algébrico de Newton, em relação às equações cúbicas. Baseado em um conjunto de ideias e demonstrações realizadas nos textos científicos de Gilberto Garbi (GARBI, 2006) e João Paulo Q. Carneiro (CARNEIRO, RPM nº40, 1999).

Considere a equação polinomial do 3º grau da forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em que a, b, c e d são constantes reais e x_0 uma aproximação da raiz.

Divide-se $f(x)$ por $x - x_0$, obtendo um quociente $q_1(x)$, do 2º grau, e um resto R_0.

Divide-se $q_1(x)$ por $x - x_0$, obtendo um quociente $q_2(x)$, do 1º grau, e um resto S_0.

Divide-se $q_2(x)$ por $x - x_0$, obtendo um quociente $q_3(x)$, de grau zero, e um resto T_0.

Esse processo de divisão será exposto no mesmo dispositivo prático de Briot-Ruffini:

	a	b	c	d
x_0	a	...	...	R_0
x_0	a	...	S_0	
x_0	a	T_0		
	a			

Onde as divisões efetuadas no dispositivo prático de Briot-Ruffini, resultam exatamente nas funções:

$$\begin{cases} f(x) = (x - x_0).q_1(x) + R_0 \\ q_1(x) = (x - x_0).q_2(x) + S_0 \\ q_2(x) = (x - x_0).q_3(x) + T_0 \\ q_3(x) = a \end{cases}$$

Substituindo esses valores na função $f(x)$,

$$f(x) = (x - x_0).q_1(x) + R_0$$

$$f(x) = (x - x_0).\left[(x - x_0).q_2(x) + S_0\right] + R_0$$

$$f(x) = (x - x_0).\left\{(x - x_0).\left[(x - x_0).q_3(x) + T_0\right] + S_0\right\} + R_0$$

$$f(x) = (x - x_0).\left\{(x - x_0).\left[(x - x_0).a + T_0\right] + S_0\right\} + R_0$$

$$f(x) = a(x - x_0)^3 + T_0(x - x_0)^2 + S_0(x - x_0) + R_0$$

Onde x_1 é a segunda aproximação de uma raiz real da equação do terceiro grau gerada pela função $f(x) = 0$, sendo $x_1 = x_0 + h$, e consequentemente essa segunda aproximação será melhor do que a primeira x_0. Fazendo a substituição de x_1 em $f(x) = 0$, temos:

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = a(x - x_0)^3 + T_0(x - x_0)^2 + S_0(x - x_0) + R_0 = 0$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_0)^3 + T_0(x_1 - x_0)^2 + S_0(x_1 - x_0) + R_0 = 0$$

$$a(x_0 + h - x_0)^3 + T_0(x_0 + h - x_0)^2 + S_0(x_0 + h - x_0) + R_0 = 0$$

$$ah^3 + T_0h^2 + S_0h + R_0 = 0$$

Se x_0 estiver bastante próximo da raiz exata, h será um valor muito pequeno e portanto podemos desprezar os temos h^2 e h^3, ficando com uma equação do primeiro grau aproximada da forma:

$$S_0h + R_0 \approx 0 \qquad \Rightarrow \qquad h \approx -\frac{R_0}{S_0}$$

E esse resultado substituido na segunda aproximação da raiz,

$$x_1 = x_0 + h \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_0 - \frac{R_0}{S_0}$$

E esse processo pode ser repetido a quantidade de vezes em que se for necessária para aproximação da raiz exata da equação, ou seja, pode-se formar um processo iterativo, calculando x_2, x_3, ..., x_n.

Mas para que o método desenvolvido por Newton tenha uma aproximação rápida, necessita-se de uma escolha do valor de x_0 próximo a raiz exata da equação cúbica. Mas existem algumas dicas para localizar o intervalo em que essa raiz real deva estar, e a principal delas é: se um polinômio assumir valores opostos em u e v, então ele terá pelo menos uma raiz entre u e v.

Isso foi validado pelo matemático Bernhard Bolzano (1781-1848), onde demonstrou o seguinte Teorema: Dados uma equação algébrica em sua forma canônica $f(x) = 0$ e dois números reais u e v $(u < v)$, se $f(u)$ e $f(v)$ tiverem o mesmo sinal, o número de raízes reais dessa equação dentro do intervalo (u, v) será par; se $f(u)$ e $f(v)$ tiverem sinais opostos, o número de raízes reais dessa equação dentro do intervalo (u, v) será ímpar, conforme GARBI (2010, p.123).

Essa localização de um intervalo onde se encontra uma raiz real também pode ser realizada pela construção do gráfico da equação algébrica, mas isso pode gerar um certo desconforto ao aluno sem o uso de tecnologias. Entretanto, temos que nos atentar, que estamos trabalhando com exercícios do ensino médio, e na sua maioria a equação deriva de um problema concreto, e assim a localização da raiz ou raízes procuradas, decorre muitas vezes dos próprios dados do problema.

O método algébrico aproximado para o encontro de raízes reais de uma equação polinomial $f(x) = 0$, elaborado por Isaac Newton, se resume em geral nos três passos seguintes:

1. Escolher a primeira aproximação x_0 da raiz real;
2. Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir duas vezes a equação polinomial $f(x) = 0$ por $x - x_n$ obtendo os restos R_n e S_n, onde $n = 0, 1, 2, ...$;
3. Definir o valor de $x_{n+1} = x_n - \dfrac{R_n}{S_n}$.

5.3 Aplicabilidade do Método Algébrico de Newton em Exercícios do Ensino Médio

Vamos elucidar problemas contextualizados e diretos que envolvam equações do terceiro grau, utilizando o método numérico demonstrado na seção anterior.

Exemplo: 11) Deseja-se construir um reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, com a capacidade de 2000 litros, usando $20m^2$ de um certo material nas paredes, fundo e tampa. Quais devem ser as dimensões (comprimento, largura e altura) desse reservatório?

Solução: Como a base do prisma é quadrada então teremos comprimento igual a largura, que denominaremos de x, e a altura será chamada de h.

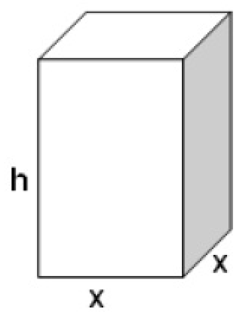

Figura 15 – *Prisma reto de base quadrada*

Utilizando as fórmulas do volume e da área total de um prisma reto temos:

$$V = x.x.h \qquad \Rightarrow \qquad V = x^2h$$

$$A_t = 2(x.x + x.h + h.x) \qquad \Rightarrow \qquad A_t = 2x^2 + 4hx$$

Como o volume do prisma é de 2000 litros, o que equivale a $2m^3$, e a área total desse prisma é de $20m^2$, então:

$$2 = x^2 h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{2}{x^2}$$

$$20 = 2x^2 + 4hx \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2 + 4hx - 20 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 2hx - 10 = 0$$

Substituindo o valor de h na segunda equação temos:

$$x^2 + 2x\left(\frac{2}{x^2}\right) - 10 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \left(\frac{4}{x}\right) - 10 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 - 10x + 4 = 0$$

E aí chegamos em uma equação do terceiro grau, que até já foi exposta na seção 4.3 como o exemplo 10, e não determinamos as raízes dessa equação pelo método de Cardano-Tartaglia, pelo fato do $\Delta < 0$, e não podemos utilizar os métodos usais do ensino médio, pois não temos nenhuma informação sobre as suas raízes, e pela pesquisa das raízes racionais, pois essa equação não possui nenhuma raiz racional. Então, vamos utilizar o método númerico de Isaac Newton apresentado na seção anterior, seguindo os três passos do seu resumo.

1. *Escolher a primeira aproximação x_0 da raiz real:*
   Como estamos trabalhando com medidas de um prisma, logo as raízes procuradas são positivas. Assim, experimentando o primeiro valor positivo inteiro na equação temos $f(1) = -5$. E uma outra constatação importante, o valor do termo independente é postivo, assim para x nulo a função terá resultado positivo, $f(0) = 4$. Portanto, existe pelo menos uma raiz real entre 0 e 1.

$$x_0 = 0 \qquad ou \qquad x_0 = 1$$

2. *Utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir duas vezes a equação polinomial $f(x) = 0$ por $x - x_n$ obtendo os restos R_n e S_n, onde $n = 0, 1, 2, ...$:*
   Escolhendo $x_0 = 0$, vamos montar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, sabendo que os coeficientes $a = 1$, $b = 0$, $c = -10$ e $d = 4$.

	1	0	-10	4
0	1	0	-10	4
0	1	0	-10	

3. *Definir o valor de $x_{n+1} = x_n - \dfrac{R_n}{S_n}$:*
   Utilizando $n = 0$, temos:

$$x_{0+1} = x_0 - \frac{R_0}{S_0} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0 - \left(\frac{4}{-10}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0,4$$

E assim, repete-se o processo para aproximar ainda mais a raiz da equação algébrica, neste caso deve-se fazer uma aproximação até a quinta casa decimal.

	1	0	-10	4
0,4	1	0,4	-9,84	0,064
0,4	1	0,8	-9,52	

Utilizando $n = 1$, temos:

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{R_1}{S_1} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 0,4 - \left(\frac{0,064}{-9,52}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 0,406723$$

	1	0	-10	4
0,406723	1	0,406723	-9,834577	0,000051
0,406723	1	0,813445	-9,503730	

Utilizando $n = 2$, temos:

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{R_2}{S_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 0,406723 - \left(\frac{0,000051}{-9,503730}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_3 \approx 0,40672$$

Com uma aproximação até a quinta casa decimal não houve nenhuma alteração de x_2 para x_3. Logo, podemos admitir que uma das raízes dessa equação é aproximadamente $0,40672$. Dividindo a equação $x^3 - 10x + 4 = 0$ por $x - 0,40672$ encontraremos um polinômio do segundo grau que nos fornecerá a outras duas raízes dessa equação.

	1	0	-10	4
0,40672	1	0,40672	-9,83458	0,00008

Logo, $x^3 - 10x + 4 \approx (x - 0,40672).(x^2 + 0,40672x - 9,83458)$.

Assim resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + 0,40672x - 9,83458 = 0$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bháskara temos que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Sendo, $a = 1$, $b = 0,40672$ e $c = -9,83458$

$$x = \frac{-0,40672 \pm \sqrt{(0,40672)^2 - 4.1.(-9,83458)}}{2.1}$$

$$x = \frac{-0,40672 \pm \sqrt{39,50374}}{2}$$

$$x = \frac{-0,40672 \pm 6,28520}{2}$$

Portanto, as três raízes da equação são aproximadamente, $x_1 = 0,40672$, $x_2 = 2,93924$ e $x_3 = -3,34596$. Entretanto, as raízes que nos interessam são apenas as positivas.

$$x_1 = 0,40672 \qquad \Rightarrow \qquad h_1 = \frac{2}{0,40672^2} \qquad \Rightarrow \qquad h_1 = 12,09036$$

$$x_2 = 2,93924 \qquad \Rightarrow \qquad h_2 = \frac{2}{2,93924^2} \qquad \Rightarrow \qquad h_2 = 0,23150$$

Então, chega-se a conclusão de que as dimensões do reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, será aproximadamente:

$$comprimento = 0,40672m \qquad largura = 0,40672m \qquad altura = 12,09036m$$

ou

$$comprimento = 2,93924m \qquad largura = 2,93924m \qquad altura = 0,23150m$$

Exemplo: 12) Calcule as coordenadas dos pontos de intersecção entre a parábola de equação $y = -x^2 + 1$ e a hipérbole de equação $y = \frac{1}{x}$.

Solução: Igualando as duas equações, pois temos pontos de intersecção

$$-x^2 + 1 = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x^3 - x + 1 = 0$$

Então, vamos utilizar o método númerico de Isaac Newton. Escolhendo a primeira aproximação x_0 da raiz real, verifica-se que valor do termo independente é positivo, assim para x nulo a função terá resultado positivo, $f(0) = +1$. Constatando os valores de -2 e -1 para a equação temos que: $f(-2) = -5$ e $f(-1) = +1$. Portanto, existe pelo menos uma raiz real entre -1 e -2.

$$x_0 = -1 \qquad ou \qquad x_0 = -2$$

Escolhendo $x_0 = -1$, vamos montar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, sabendo que os coeficientes $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$ e $d = 1$. Nesse caso vamos trabalhar com uma aproximação de quatro casas decimais.

	1	0	-1	1
-1	1	-1	0	1
-1	1	-2	2	

$$x_{0+1} = x_0 - \frac{R_0}{S_0} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -1 - \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -1,5$$

	1	0	-1	1
-1,5	1	-1,5	1,25	-0,875
-1,5	1	-3	5,75	

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{R_1}{S_1} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -1,5 - \left(\frac{-0,875}{5,75}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -1,3478$$

	1	0	-1	1
-1,3478	1	-1,3478	0,8166	-0,1007
-1,3478	1	-2,6956	4,4497	

$$x_{2+1} = x_2 - \frac{R_2}{S_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = -1,3478 - \left(\frac{-0,1007}{4,4497}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_3 \approx -1,3252$$

	1	0	-1	1
-1,3252	1	-1,3252	0,7562	-0,0021
-1,3252	1	-2,6504	4,2685	

$$x_{3+1} = x_3 - \frac{R_3}{S_3} \qquad \Rightarrow \qquad x_4 = -1,3252 - \left(\frac{-0,0021}{4,2685}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_4 \approx -1,3247$$

	1	0	-1	1
-1,3247	1	-1,3247	0,8166	0,0001
-1,3247	1	-2,6494	4,2645	

$$x_{4+1} = x_4 - \frac{R_4}{S_4} \qquad \Rightarrow \qquad x_5 = -1,3478 - \frac{0,0001}{4,2645} \qquad \Rightarrow \qquad x_5 \approx -1,3247$$

Com uma aproximação até a quarta casa decimal não houve nenhuma alteração de x_4 para x_5. Logo, podemos admitir que uma das raízes dessa equação é aproximadamente $-1,3247$. Dividindo a equação $x^3 - x + 1 = 0$ por $x + 1,3247$, o que já foi realizado pelo x_5, então $x^3 - x + 1 \approx (x + 1,3247).(x^2 - 1,3247x + 0,8166)$.

Assim resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - 1,3247x + 0,8166 = 0$, determinaremos as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bháskara temos que,

$$x = \frac{1,3247 \pm \sqrt{(-1,3247)^2 - 4.1.(0,8166)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1,3247 \pm \sqrt{-1,5116}}{2}$$

$$x \approx \frac{1,3247 \pm 1,22947i}{2}$$

Portanto, as três raízes da equação são aproximadamente, até a quarta casa decimal, $x_1 = -1,3247$, $x_2 = 0,6624 + 0,6147357i$ e $x_3 = 0,6624 - 0,6147357i$. Entretanto, a raíz que nos interessa é apenas a real.

$$x = -1,3247 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{-1,3247} \qquad \Rightarrow \qquad y = -0,7549$$

Então, concluimos que o ponto de intersecção da parábola $y = -x^2 + 1$ e a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ é $(-1,3247; -0,7549)$.

5.4 Equações do Terceiro Grau com Raízes não Racionais devem ser Debatidos no Ensino Médio?

Um elegante caminho para as soluções dessas equações de grau três, onde não são compostas por raízes racionais ou não são fornecidas informações privilegiadas sobre essas raízes, seria a utilização de métodos numéricos. Mas infelizmente, nos dias atuais essas equações não são possíveis de serem resolvidas pelo métodos ensinados na maioria dos livros do ensino médio.

Por outro lado, vimos nos problemas resolvidos na seção 5.3, que o método algébrico de Newton converge para uma aproximação da raiz da equação do terceiro grau de forma muito rápida. Entretanto, os métodos numéricos ainda não ocupam até hoje o seu devido lugar de prestígio no ensino médio, isso se dá aparentemente por alguns motivos: por se tratarem de valores aproximados; por entenderem que a resolução demanda um esforço demasiado; e como principal fator, os docentes e autores entendem, na sua maioria, a necessidade de utilização de conceitos de cálculo diferencial para a utilização de métodos numéricos.

Em contraposição ao que se é utilizado nos livros, o currículo do ensino médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Esses conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível, conforme os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio - PCNEM (Parte III, 2000, p.44).

Considerações Finais

Os estudos e esforços de vários matemáticos por mais de dois séculos, com a finalidade de descobrirem uma fórmula para a resolução das equações do terceiro grau, foi uma chave importante para adquirem conhecimento que geraram outras grandes descobertas. Por isso, o contexto histórico que envolve as equações cúbicas demonstra a brilhante história da matemática, e o seu estudo é muito importante para docentes e discentes tenham conhecimento do fascínio desta ciência.

Atualmente os livros didáticos, de modo geral, apresentam uma abordagem para o conteúdo de equações cúbicas sem uma "motivação"para professores e alunos. O importante não é ensinar matemática como uma simples repetição de fórmulas e resultados. O importante é ensinar, mostrando historicamente os seus avanços, sobre tudo como se desenvolveu cada parte dessa ciência. Portanto, o estudo das equações algébricas são indispensáveis para se ampliar o conhecimento da matemática, demonstrando a fascinante evolução que a humanidade teve no decorrer dos tempos. Assim, o desenvolvimento de recursos que venham facilitar a aprendizagem das equações de grau três, devem ser valorizados e incentivados.

Com o levantamento dos métodos utilizados pelos principais livros didáticos para a resolução das cúbicas, vimos que os mesmos não generalizam a resolução de todas as equações desse tipo, em especial resolvem alguns casos, preferencialmente aquelas que possuem raízes inteiras. Entretanto, desde o século XVI a fórmula foi desenvolvida por Tartaglia para determinar pelo menos uma raíz dessa equação, mas encontrar efetivamente sua solução não é uma tarefa simples, o que leva a concluir que realmente a sua abordagem para os alunos do ensino médio, não seja viável, levando em consideração o nível de conhecimento dos mesmos. Mas por outro lado, vimos que os métodos numéricos podem ser utilizados, sem o conhecimento prévio do cálculo diferencial, na resolução das equações cúbicas trazendo uma aproximação rápida em algumas casas decimais, com apenas o auxílio de calculadora simples.

A proposta deste trabalho foi a de enfrentar essa complexidade das cúbicas e caminhar na aprendizagem para fornecer melhor suporte para o estudo da álgebra. Tornando viável a utilização de exercícios interessantes, que envolva principalmente a geometria espacial. Concluindo nosso trabalho, acredita-se ter contribuído para fomentar novas pesquisas no segmento das equações cúbicas, e principalmente a quebra de paradigmas da não utilização de métodos numéricos no ensino médio.

Referências Bibliográficas

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. *Tradução de João Bosco Pitombeira*, 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ANDRADE, Lenimar Nunes. **Uma generalização de Briot-Ruffini**. In *Revista do Professor de Matemática*, nº 34. SBM, 1997. p. 14-20.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM)**. Parte III: *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

CARNEIRO, José Paulo Q. **Equações algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio**. In *Revista do Professor de Matemática*, nº 40. SBM, 1999. p. 31-40.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**, vol. 3: ensino médio, 1ª edição. São Paulo: Àtica, 2012.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. 4ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. 5ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

GUIMARÃES, Paulo Sérgio. **Equações Algébricas**. Santa Maria: Ed. da UFSM, 2006.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações**, vol. 3: ensino médio, 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

KNUDSEN, Carlos Alberto. **A teoria das equações algébricas**. In *Revista do Professor de Matemática*, nº 07. SBM, 1985. p. 26-31.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, *Coleção do professor de matemática*, 2012.

LIMA, Elon Lages. **A equação do terceiro grau**. In *Revista Matemática Universitária*, nº 5. SBM, 1987. p. 09-23.

MACHADO, Inácio de Araujo; ALVES, Ronaldo Ribeiro. **Método de Newton**. In *Revista eletrônica de educação da Faculdade Araguaia*, nº 4, p. 30-45. 2013. Dísponivel em: www.fara.edu.br/sipe/index.php/renefara/article/download/153/137. Acesso em 16 de fevereiro de 2015.

MILIES, César Polcino. **A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau**. In *Revista do Professor de Matemática*, nº 25. SBM, 1987. p. 16-22.