UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

BOSCO SILVEIRA BRITO

ENSINO DE PROBABILIDADE: PROPOSTA DE ENSINO ATRAVÉS DE EXPERIMENTAÇÃO

BELÉM – PARÁ
2015

BOSCO SILVEIRA BRITO

ENSINO DE PROBABILIDADE: PROPOSTA DE ENSINO ATRAVÉS DE EXPERIMENTAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Irene Castro Pereira..

BELÉM – PARÁ
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Brito, Bosco Silveira 1976 -
Ensino de probabilidade: proposta de ensino através de experimentação / Bosco Silveira Brito. - 2015

Orientadora: Irene Castro Pereira
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2015.

1.Probabilidade-Estudo e ensino. 2.Matemática-Estudo e ensino. 3.Probabilidade-Estudo e ensino-Metodologia. I.Título

CDD 22. ed. 519.207

BOSCO SILVEIRA BRITO

ENSINO DE PROBABILIDADE: PROPOSTA DE ENSINO ATRAVÉS DE EXPERIMENTAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 08 / 05 / 2015

Banca Examinadora

Prof. Dra. Irene Castro Pereira. – Orientadora
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA

Prof. Dr. João Claudio Brandemberg – Membro
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá – Membro
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ - UEPA

Aos meus pais, Maria das Neves Silveira Brito e Raimundo da Silva Brito, por toda dedicação com a minha instrução.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que iluminou o meu caminho durante esta jornada.

Agradeço aos meus pais, Maria e Raimundo, pela determinação e luta na minha formação. Aos meus irmãos, Debora e Braldo, pelo apoio.

Aos meus filhos, Jamille e Gustavo, e da minha esposa Shirley Castro, pela compreensão por conta do tempo que não pude desfrutar da companhia de vocês dedicado a essa pesquisa, a vocês dedico todas as minhas conquistas e este trabalho é uma delas.

Agradeço a minha professora, orientadora, Drª Irene Castro Pereira pelo suporte, pelas correções, oportunidade e confiança na elaboração deste trabalho, a minha turma PROFMAT 2013 do qual tive orgulho em fazer parte, pois me proporcionou momentos incríveis. Aos colegas de turma Fabio Neves e Marcos Oliveira que me ajudaram a construir esse trabalho, muito obrigado.

Agradeço também a minha sogra, Maria de Fátima, por todo o esforço feito de acolher meus filhos para que eu, tranquilamente, pudesse desenvolver minhas atividades, muito obrigado.

Agradeço ao Colégio Da Vince que, por todo esse tempo, teve papel fundamental, contribuindo com o seu espaço físico para que nós, da turma PROFMAT2013, pudessemos no reunir e assim desenvolver nossos estudos. Ao grande amigo João Damin, marido da colega de turma Teresa Damim, por todo o zelo e cuidado que por nós teve nesses dois anos, nos propiciando sempre condições de estudo em sua casa, a vocês, muito obrigado.

Agradeço ao meu grande amigo Marcelo Costa pelo apoio e pelo incentivo que me foi dado no desenrolar do curso.

Agradeço a todos que fizeram e fazem parte da minha vida, sem dúvida, cada um de vocês são peças muito importantes para esta realização.

A todos, o meu muito obrigado!

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo".

(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho, é apresentada uma proposta de ensino de probabilidade, com o objetivo de facilitar o aprendizado da matéria pelos alunos através do processo de experimentação, evidenciando o caráter frequencista da probabilidade. Inicialmente é feita uma breve discussão histórica a respeito da formalização do conhecimento da teoria das probabilidades, abordando fatos históricos. Após isso, é apresentada uma análise do livro didático MATEMÁTICA do autor Manoel Paiva e que foi aprovado no PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) e que é utilizado por professores de matemática em muitas escolas públicas no Estado do Pará. Após essa discussão, é mostrado os resultados da pesquisa obtida através da aplicação de questionário a esses alunos da rede pública e, por fim, são apresentados Planos de aula com os respectivos materiais de apoio para que professores possam utilizar nas experimentações em sala de aula, sobre o ensino de probabilidade, com o intuito de melhorar o entendimento dos alunos acerca do assunto.

Palavras-chave: Ensino . Metodologia . Probabilidade.

ABSTRACT

In this work, a probability of teaching proposal is presented, in order to facilitate the learning of the subject by students through the trial process, showing the character of the frequentist probability. Initially a brief historical discussion of the formalization of knowledge of probability theory is made by addressing historical facts. After that, an analysis of the textbook Mathematics of the author Manoel Paiva and approved in NTP (National Textbook Program) and is used by math teachers in many public schools in the state of Pará is presented. After this discussion, it is shown search results obtained through the application of questionnaires to the students of the public and, finally, are presented Lesson plans with support materials for teachers to use in experiments in the classroom, on the likelihood of school in order to improve students' understanding about the subject.

Key-words: Education . Methodology . Probability.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Quando se fala em ensino, e especificamente sobre o ensino de matemática, o grande desafio é decidir o que ensinar e quando ensinar. Quanto ao que ensinar aos estudantes de matemática, teoricamente é relativamente simples, pois ao apresentar os conteúdos e as disciplinas, automaticamente o aluno vai se identificando e buscando aquelas áreas que mais lhe interessa. O grande desafio reside em ensinar matemática aos não matemáticos ou potencialmente não matemáticos. Nesse grupo, se enquadram a grande maioria dos estudantes do ensino médio, para a qual se dirige esse trabalho.

A lei 9394/96, ao considerar o ensino médio como sendo a última fase da educação básica e o CNE - Conselho Nacional de Educação - com a resolução nº 3 de 26 de junho de 1998, que instituiu as Diretrizes Curriculares Nacionais para o ensino médio, tem o objetivo de organizar e orientar a educação pautadas em valores morais e éticos e apontam de que forma o ensino de matemática deve ser incorporado de modo a complementar e aprofundar o que já foi iniciado no ensino fundamentel, considerando que nessa fase o aluno já conta com um grau de maturidade muito maior e, portanto, as discussões ganham um grau muito mais elaborado e um nível de abstração mais elevado, se comparado com o ensino fundamental.

O PCNEM considera que a matemática, em seu papel formativo, tem a finalidade de contribuir para desenvolvimento do pensamento e a obtenção de atitudes que ultrapassam o próprio ambiente da matemática, dessa maneira se pretende gerar no aluno a capacidade de solucionar problemas e desenvolver no mesmo o hábito de investigação e a aptidão para enfrentar novas situações (PCN, 2000, p.40). Portanto, o que se objetiva é que o mesmo consiga, através do ensino, independência e, dessa forma, se torne um cidadão atuante na sociedade e autor do próprio destino.

As dificuldades das escolas e do ensino são imensas uma vez que o mundo atual muda rapidamente e cabe a escola e professores estarem alertas a essas mudanças para adaptar o seu ensino (Parra, 1990, P.11), senão a escola corre o risco de estar cada vez mais afastada da realidade e da dinâmica da vida social, fazendo com que os alunos se sintam menos atraídos pela atividade das aulas e, dessa forma, procuram no meio externo e não na escola, os conhecimentos que julgam necessários para a sua atuação no cotidiano.

Se a idéia, é que o ensino torne o aluno apto a atuar na sociedade, contribuindo com seus conhecimento no desenvolvimento da mesma, nada mais justo do que se trabalhar com o ensino de assuntos de grande aplicabilidade no cotidiano de modo que esses ensinamentos fiquem de forma sólida no entendimento do mesmo, assim, a probabilidade se torna uma ferramenta indispensável para que o mesmo entenda o mundo que o cerca com mais fidelidade, uma vez que o acaso permeia boa parte da vida do mesmo. Segundo Parra (1990, p.17) há que se introduzir, o mais rápido possível as idéias básicas da teoria das probabilidades pois, a matemática na escola, durante muito tempo, tem sido pensada como determinista, onde os problemas devem ser resolvidos com exatidão e o que deve se procurar é um pensamento probabilistico ou estatístico, baseado em valores médios, grandes números, extrapolações e inferências, pois as situações aleatórias são as que mais aparecem na natureza e na vida cotidiana, mas não de uma maneira na qual o aluno seja levado apenas a memorizar fórmulas, conceitos e definições e sim de maneira que seja possível compreender os *por quês* dos acontecimentos.

Neste trabalho, foi verificado a partir da aplicação de questionários (Apêndice) como está o aprendizado e entendimento das noções básicas da teoria das probabilidades de alunos concluintes do ensino médio, da rede pública de ensino, na mesorregião de Belém e os resultados estão bem longe do que se poderia considerar razoável. Nesse contexto, tendo em vista os vários problemas enfrentados em termos de estrutura física e técnicas, os educadores tem que utilizar muita criatividade para vencer tais barreiras.

O trabalho commpleto está dividido em três partes, todas com a mesma metodologia e a mesma proposta final. A primeira, da qual trata esse trabalho, apresenta uma proposta de ensino, através de experimentação de noção de experimentos determinísticos e aleatórios, onde o aluno é convidado a discutir a diferença básica entre os mesmos, espaço amostral e evento, discutindo também a idéia de espaços equiprováveis ou não, finalizando com a definição clássica de probabilidade. A segunda parte, trata dos tipos de eventos e suas probabilidades, tais como evento certo, evento impossível, eventos complementares, eventos mutuamente exclusivos e eventos independentes, esta parte foi elaborada por Fábio Costa de Oliveira Neves e a terceira, e última parte, elaborada por Marcos Oliveira de Oliveira, trata da probabilidade da união de eventos e da probabilidade condicional. Cada autor na sua produção baseou-se no mesmo questionário, porém, analisando em cada trabalho, as atividades e questões propostas associadas aos assuntos mencionados, associados a cada trabalho. A sequência metodológica é a mesma em todas as produções: análise do questionário, análise de livros e proposta de material para melhorar o ensino de probabilidade.

O presente trabalho trás, inicialmente, um resumo histórico do desenvolvimento da teoria das probabilidades, falando dos principais acontecimentos e citando os nomes e obras de grandes matemáticos que contribuiram para essa construção. Após essa discussão, é feita a análise do livro didático aprovados no PNLD - Plano Nacional do Livro Didático - e que é utilizado nas escolas públicas no estado do Pará. O livro avaliado é o livro MATEMÁTICA do autor Manoel Paiva. Após isso, é apresentada a análise dos questionários aplicados mostrando aspectos sociais, educacionais desses alunos, as suas opiniões a respeito do aprendizado de probabilidade e a participação da familia nesse contexto e, posteriormente, e feita a análise de 04 (quatro) das 13 (treze) questões de aplicação do conteúdo de probabilidade constantes no questionário, normalmente trabalhado no ensino médio. Aqui, as questões discutidas e comentadas, de forma detalhada, são as questões 16.1, 16.2, 16.9 e 16.10 do questionário.

De posse dos resultados dos questionários aplicados e da análise dos livros didáticos, percebemos a necessidade de se propor algo que, de fato, possibilite ao educando um aprendizado mais efetivo e sólido e a experimentação possibilita a vivência da sua situação além de, em alguns momentos, com o caráter lúdico prender a atenção do aluno. E se tratando do ensino de probabilidade, é importante a experimentação para que o aluno perceba que ao relaizar um experimento um número bem grande de vezes, através da obtenção da frequencia relativa dos eventos é possível fazer a comparação com os valores de probabilidade que são postulados na teoria, fazendo assim o casamento da teoria com a prática. Após a proposta de atividades, através de planos de aulas, o material ainda trás exercícios do assunto de provas do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, com o objetivo de consolidar o referido aprendizado.

2 NOTAS HISTÓRICAS DE PROBABILIDADE

Segundo Katz(2010), os primórdios dos conceitos de probabilidade se deu em algumas idéias probabilísticas elementares ligadas a jogos de dados, onde a preocupação era o de calcular o número de formas diferentes em que dois ou três dados podiam cair e, dessa maneira, verificar os resultados mais prováveis, para dois e três dados, existem documentos que apontam que existiam 21 formas para dois dados e 56 formas para três dados. Analisando esses resultados, é possível perceber que estão corretos se levarmos em conta apenas os diferentes conjuntos de pontos, sem considerar a ordem na qual acontecem.

O primeiro comentário que afirmava que as 56 formas de um dado cair não eram equiprováveis, aparece em um poema escrito em latim, de um anônimo, intitulado De Vetula[1], escrito algures datado entre 1200 e 1400 que tem o seguinte conteúdo:*"Se os três dados são iguais, há apenas uma forma para cada número; se dois são iguais e um diferente, há três formas; e se todos são diferentes há seis formas"*. Analisando a regra afirmada, é possível concluir que o total de formas para três dados é 216 (KATZ,2010,p.566).

Por volta do século XVI, a idéia de eventos equiprováveis começa a ser compreendida. A primeira tentativa sistemática de fazer esses cálculos está no livro escrito por Cardano[2], escrito por volta de 1526 e publicado após a sua morte, intitulado *Liber de Ludo Aleae*(Livro sobre jogos de azar). Além de contar o número de formas como dois ou três dados podem cair, ele demonstrava um bom entendimento das noções básicas da probabilidade.

Cardano também estava consciente da regra da multiplicação das probabilidades para eventos independentes e no seu livro, registrou a sua confusão inicial quanto ao que devia multiplicar, se eram as possibilidades de ocorrência dos eventos ou se eram as chances de ocorrência. Após resolver a confusão, Cardano generalizou seu pensamento escrevendo que para n tentativas repetidas com k resultados possíveis e m sucessos, as possibilidades corretas a favor são m^n para $k^n - m^n$ (Katz, 2010, p.568).

Cardano também discutiu o problema que De Merè[3] tinha colocado a Pascal[4] o

---

1 Um poema que contém cálculos de probabilidade sobre o arremesso de três dados. Foi escrito em meados do século XIII

2 Girolamo Cardano, nasceu em Pavia, na Itália, em 1501 e faleceu em Roma em 1576, aos 74 anos. Escreveu mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, filosofia, religião e música

3 Antoine Gombaud, denominado Chevalier de Méré (Condado de Poitou, 1607 - 1684), foi um nobre e jogador francês. Seu nome é relacionado ao cálculo matemático de jogos de azar. Em 1654 buscou auxílio de Blaise Pascal, porque já não tinha mais sucesso com seus calculados jogos. Com a juda de Pierre de Fermat as chances de ganho de dois jogos de dados foram determinadas exatamente.

4 Blaise Pascal, nasceu em Clermont-Ferrand em 19 de Junho de 1623 e faleceu em Paris em 19

problema de determinar quantos lançamentos devem ser permitidos para fornecer possibilidades iguais de obter dois seis em um par de dados. Esse problema foi popular durante anos, Cardano argumentou que, "uma vez que há uma possibilidade em 36 de se obter dois seis em um par dados, em média, um tal resultado deveria ocorrer a cada 36 lançamentos. Desta forma, as possibilidades de que um duplo seis ocorra em metade dos lançamentos, ou seja, 18, são iguais". O raciocínio de Cardano implica que em seis lançamentos de um dados um dois, por exemplo, é certo ou em 36 lançamentos de dois dados um duplo seis é certo. É claro que, com os conhecimentos atuais, o que podemos medir é a chance de ocorrência de um evento e não a garantia de que, na realização da experimentação, o evento irá ocorrer, mas Cardano não se apercebeu do erro.

Outro problema colocado por Merè a Pascal, foi o problema sobre a divisão de paradas, esse também havia sido discutido na Itália, em particular, na Summa de Luca Pacioli. A versão de Pacioli do problema tem dois jogadores que jogam um jogo justo, que devia continuar até um dos jogadores ganhar 6 partidas, porém, o jogo é interrompido quando um jogador ganhou cinco rodadas e o segundo jogador ganhou três. A resposta de Pacioli para a divisão dessas paradas era de que as mesmas fossem divididas na razão de 5 para 3.

Tartáglia[5] também teve participação nesse período, realizando alguns cálculos de probabilidade e combinatória em seu trabalho Generalle Tratatto, publicado em 1556. Nesse trabalho, Tartáglia notou que a resposta de Pacioli para o problema devia estar errada, pois esse raciocínio implicava que se o primeiro jogador vencesse uma partida e outro nenhuma, quando o jogo fosse suspenso, o primeiro ficaria com todas as paradas, acarretando então em um resultado injusto.

Apesar de todas as discussões, a aplicação sistemática da análise matemática para solução de problemas de probabilidade, teve início somente em 1654, com os resultados obtidos por Blaise Pascal e Pierre de Fermat[6] em resposta ao problema das divisões das paradas. Essa solução foi descrita nas cartas trocadas entre Parcal e Fermat e colocada, anos mais tarde, na obra de Pascal intitulada *Traité du triangle arithmétic* (Tratado sobre o triângulo Aritmético). Segundo Katz (2010), Pascal se baseou em dois princípios básicos para aplicar a divisão. Pri-

de Agosto de 1662. Deu várias contribuições a várias áreas do conhecimento humano, foi físico, matemático, filósofo moralista e teólogo francês.

[5] Niccolò Fontana mais conhecido com Tartaglia, nasceu em Bréscia, em 1500 e morreu em Veneza, em 13 de dezembro de 1557. Foi um matemático italiano, cujo nome está ligado ao triângulo de Tartaglia e à solução da equação do terceiro grau.

[6] Nasceu em Beaumont-de-Lomagne, na primeira década do século XVII e mofrreu em Castres, em 12 de Janeiro de 1665, foi um matemático e cientista francês.

meiro, *se a posição de um determinado jogador é tal que uma certa soma lhe pertença, quer ganhe ou perca, ele deve receber essa soma, mesmo que o jogo seja interrompido*. Segundo, *se a posição de dois jogadores é tal que se um vencer, uma determinada soma lhe pertene e se perder, pertence ao outro e se os dois jogadores tem possibilidades igualmente boas de vencer, então devem dividir igualmente o prêmio se não podem jogar*.

Tomando como base a argumentação acima, conclui-se que a divisão mais justa não pode levar em consideração o número de rodadas que cada jogador venceu, mas sim a possibiliadade que os mesmos tem de vencer o jogo, portanto, se os jogadores acertarem que o vencedor será quem ganha dois jogos e a pontuação estiver 1 a 0, ou se acertarem que vence quem ganhar 3 jogos e a pontuação está 2 a 1 ou se acertarem que o vencedor é quem ganhar 12 jogos e a pontuação está 11 a 10, o resultado da divisão do prêmio, no momento da interrupção, deve ser o mesmo.

Tanto Pascal como Fermat apresentaram soluções para esse problema, Pascal, por exemplo, o resolveu utilizando o seu triângulo de números, hoje conhecido como triângulo de Pascal, já Fermat o resolveu de forma semelhante sem o uso do triângulo.

Segundo LIMA(2013), para resolver o problema das divisões de paradas, Fermat considerou, primeiramente, um caso particular, em que um jogador A precisava de dois pontos para ganhar o jogo e o jogador B precisava de 3 pontos para ganhar o jogo. Fermat percebeu que mais (2 + 3) - 1 = 4 partidas seriam suficientes para terminar o jogo. Chamando de **a** uma partida vencida por A e de **b** uma partida vencida por B, anotou $2^4 = 16$ possíveis sequências de vitórias de partidas, essas possibilidades são: ***aaaa***, ***baaa***, ***baab***, ***babb***, ***aaab***, ***aabb***, ***baba***, ***bbab***, ***aaba***, ***abab***, ***bbaa***, ***bbba***, ***abaa***, ***abba***, ***abbb*** e ***bbbb***.

Como o jogador A precisava de duas vitórias para vencer o jogo, então todas as sequências acima em que aparecem, pelo menos, dois **a**, simbolizam vitória de A e no caso contrário, vitória de B. Das sequências acima, existem 11 em que **a** aparece duas ou mais vezes e 5 em que isso não acontece. Dessa forma, Fermat concluiu que a divisão das paradas deveria ser feita na razão de 11:5 já que a chance do jogador A vencer é 11 em 16 e a do jogador B vencer é 5 em 16. Generalizando a idéia de Fermat, para o caso em que A precisasse de **m** pontos para vencer o jogo e B precisasse de **n** pontos para vencer, teríamos então $2^{(m+n)-1}$ sequências possíveis e contariamos quantas vezes apareceriam **m** ou mais letras **a** e em quantos deles apareceriam **n** ou mais letras **b**, se chamarmos de α e β essas quantidades, respectivamente, então as apostas deveriam ser divididas na razão $\alpha : \beta$.

Pascal, como foi exposto anteriormente, resolveu o problema utilizando o *triângulo de Pascal*, na qual a linha **n** e a coluna **r** fornecem a combinação de **n** objetos tomados **r** a **r** que representamos por $C_{n,r}$ ou $\binom{n}{r}$. Ele também constatou, assim como Fermat, que mais 4 jogos seriam suficientes para determinar um vencedor e raciocinou que $C_{n,r}$ representaria a quantidade de maneiras que **r** letras **a** poderiam ocupar as n posições das sequencias de vitórias. Assim concluiu que existem $C_{4,4}+C_{4,3}+C_{4,2}=1+4+6=11$ formas de A vencer e $C_{4,3}+C_{4,4}=4+1=5$ maneiras do jogador B vencer. Dessa forma, concluiu Pascal, as apostas deveriam ser repartidas na razão de 11:5, a mesma solução encontrada por Fermat. Generalizando o raciocínio, se A precisasse de **m** pontos e B precisasse de **n** pontos, deveríamos tomar a (m+n)-1 ésima linha, calcular a soma α das m ou mais vezes em que aparecem **a** e a soma β das **n** ou mais vezes em que aparecem **b** e fazer a razão $\alpha:\beta$.

Para Katz(2010), a noção de calcular o valor de uma ação particular tornou-se a base para o primeiro tratado sistemático sobre probabilidades, escrito em 1656, por Christian Huygens[7], na época, um aluno de van Schooten [8]. Ele se interessou pela questão das probabilidades durante uma visita a Paris, em 1655 e escreveu um breve livro sobre o tema, intitulado *De ratiociniis in Aleae Ludo*(Sobre os Cálculos em Jogos de Azar), que apareceu impresso, somente, em 1657, que serviu como livro de introdução à Teoria das Probabilidades até o século XVIII.

A obra de Huygens continha apenas 14 proposições e concluia com cinco exercícios para o leitor. As proposições incluiam algum tratamento dos dois problemas de De Merè, mas Huygens também forneceu discussões acerca do raciocínio por trás das soluções, em particular, como calcular em um jogo de azar, isso fica evidenciado no texto escrito por ele: *"Embora em um jogo puro de sorte, os resulatdos sejam incertos, a hipótese que um jogador tem de ganhar ou perder depende de um determinado valor"*. Esse "valor" ao qual se refere Huygens é semelhante a noção dada por Pascal na sua aposta mas, nos casos de jogas de azar, Huygens podia calcular explicitamente. Hoje, esse "valor" de uma hipótese é o chamado valor esperado, ou seja, a quantidade média que uma pessoa ganharia caso jogasse o jogo muitas vezes.

O livro escrito por Huygens possuia a melhor exposição sobre probabilidade até o

[7] Christiaan Huygens, nascido em Haia em 14 de Abril de 1629 e falecido e Haia em 8 de julho de 1695, matemático, físico e astrônomo holandês, foi uma das figuras mais importante da Revolução Científica. Foi na Física que o seu trabalho mais se destacou, tanto na Mecânica como na óptica.

[8] Franciscus van Schooten, nasceu em Leiden, 1615 e faleceu em Leiden, 29 de maio de 1660. Foi um matemático holandes e é conhecido por popularizar a geometria analítica de René Descartes.

aparecimento do livro *Ars Conjectandi*, de Jacob Bernoulli [9], publicado em 1713. Esse livro continha uma reimpressão do livro de Huygens, complementada com vários comentários e técnicas de análise combinatória. Para Beunoulli, parecia óbvio que quanto maior fosse o número de observações de uma dada situação, mais precisa seria a previsão de ocorrências futuras, a prova científica dessa idéia acabou se evidenciando na chamada **Lei dos Grandes Números**, que estava contida na quarta e última parte do *Ars Conjectandi*. Essas idéias marcaram o início de uma nova era na Teoria das Probabilidades.

Neste período, muitos outros matemáticos se destacaram, como por exemplo, Euler[10]. O interesse de Euler pelo estudo das Probabilidades, impulsionado por Daniel (1700-1782) e Nicolaus Bernoulli (1687 - 1759), fez com que o mesmo escrevesse sobre expectativas de vida, o valor de uma anuidade, loterias, entre outros aspectos da vida em sociedade e como seria previsível, contribuiu, também, com algumas notações, uma vez que, muitas das notações utilizadas até hoje, em várias áreas da matemática, são atribuidas a ele.

Outro nome, que é importante destacar desse período, é o de Pierre Simon Laplace [11] que embora conduzisse bastante pesquisa sobre física, tinha como outro tema principal dos esforços de sua vida a teoria das probabilidades. Em seu *Essai philosophique sur les probabilités*, publicado em 1814, fez uma exposição introdutória para o leitor comum, escrevendo que *"no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números"*, nessa obra, Laplace projetou um sistema matemático de raciocínio indutivo baseado em probabilidades, que hoje coincidem com as ideias Bayesianas. Mas é em sua obra *Théorie analytique des probabilytés* de 1812 que ele mostra ser um mestre de análise. Essa obra está cheia de integrais envolvendo funções beta e gama e além disso, Laplace foi um dos primeiros a mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, a área sob a curva de probabilidade, é $\sqrt{\pi}$. Os fundamentos da Teoria das Probabi-

[9] Nasceu na Basileia, em 27 de dezembro de 1654 e faleceu na Basileia, em 16 de agosto de 1705, foi o primeiro matemático a desenvolver o cálculo infinitesimal para além do que fora feito por Newton e Leibniz, aplicando-o a novos problemas.

[10] Leonhard Paul Euler nasceu na Basileia em 15 de abril de 1707 e faleceu em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783. É considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em campos variados em cálculo e grafo e também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática.

[11] Nasceu em Beaumont-en-Auge, em 23 de março de 1749 e faleceu em Paris, em 5 de março de 1827. Foi um matemático, astrônomo e físico francês que organizou a astronomia matemática, resumindo e ampliando o trabalho de seus predecessores nos cinco volumes do seu *Mécanique Céleste* (Mecânica celeste) (1799-1825). Esta obra-prima traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica usada por Isaac Newton para um estudo baseado em cálculo, conhecido como mecânica física.

lidades foram colocados por Laplace de tal maneira que se mantiveram inalterados até o inicio do século XX.

Segundo Boyer (1996), a teoria dos conjuntos e a teoria da medida, durante o século XX, invadiram partes cada vez maiores da matemática e poucos ramos foram tão influenciados por essa tendência quanto a teoria das probabilidades. O primeiro ano do novo século foram esperançosos para as probabilidades, tanto na física quanto na genética, quando em 1901, Gibbs [12] publicou seus *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (Princípios Elementares de Mecânica Estatística) e nesse mesmo ano foi fundada a *Biometrika* por Karl Pearson (1857-1936). Só para se ter uma idéia de quanto o interesse pela probabilidade crescia, um dos títulos de Poincaré [13] tinha sido *Professor do Cálculo de Probabilidades*.

Além de Itália, França, Suiça, Holanda, outro país europeu que deu enormes contribuições a esse desenvolvimento foi a Rússia. Para Boyer(1996), o estudo de cadeias ligadas a eventos foi iniciado por Andrey Andreyevitch Markov[14], ou Markoff, suas idéias passaram a ser utilizada, de forma substancial, em fenômenos físicos e quimicos e em muitos outros ramos do conhecimento. Em 1931, Andrei Nicolaevich Kolmogoroff (1903-1987) fez importantes avanços nos chamados processos de Markov e satisfez uma parte do projeto de Hilbert, que pedia fundamentos axiomáticos para as probabilidades através do uso da medida de Lebesgue.

.

Na atualidade, são inúmeras as aplicações do conhecimento das probabilidades como, por exemplo, na economia, na administração, na medicina, na biologia, nas telecomunicações, na confiabilidade de um fenômeno e as aplicações das idéias probabilisticas se diversificaram muito, assim como muito conhecimento está agregado ao conhecimento probabilístico de tal meneira que é impossível, hoje, uma exposição rigorosa de teoria de probabilidades sem usar noções de funções mensuráveis e teorias modernas de integração, o modelo atômico atual, por exemplo, é um modelo matemático-probabilístico chamado de Modelo atô-

[12] Josiah Willard Gibbs, nasceu em New Haven, em 11 de fevereiro de 1839 e faleceu em New Haven, em 28 de abril de 1903. Notável físico-matemático americano, contribuiu enormemente no desenvolvimento de estudos teóricos sobre termodinâmica, estabelecendo em bases científicas as noções a respeito do comportamento dos fluidos e da transferência de calor, estabelecendo a conexão da termodinâmica com a química, e assentando as bases definitivas da físico-química.

[13] Jules Henri Poincaré. Nasecu em Nancy, em 29 de abril de 1854 e faleceu em Paris, em 17 de julho de 1912. Foi um matemático, físico e filósofo da ciência francesa.

[14] Andrei Andreyevich Markov, nasceu em Riazan, em 14 de junho de 1856 e faleceu em São Petersburgo, em 20 de julho de 1922. Seus primeiros trabalhos foram limite de integrais e teoria da aproximação, depois de 1900 aplicou métodos de frações contínuas, que havia sido iniciada por Pafnuti Tchebychev na teoria da probabilidade. Provou o teorema do limite central.

mico de Schröndinger, em homenagem ao seu criador Erwin Schröndinger (1887-1961), enfim, são inúmeras as aplicações dessas idéias no cotidiano humano e o limite dessas aplicações, só o futuro poderá nos revelar.

3 ANÁLISE DE LIVRO DIDÁTICO

O ensino da probabilidade pode se constituir em um poderoso instrumento social, na medida em que pode permitir ao estudante uma melhor compreensão das estatísticas oficiais, tornando-o capacitado a exercer mais conscientemente sua cidadania. Esse conhecimento, em qualquer nível de aprendizagem promove a oportunidade de discussão e, no ramo da matemática, de algumas das características mais pertinentes do mundo em que vivemos e são essas características que alimentam o desenvolvimento do tema.

De posse do exposto acima, é apresentado considerações sobre o livro didático que aborda o conteúdo de probabilidade, em nível de Ensino Médio, e que foi aprovado no PNLD 2012 (Plano Nacional do Livro Didático) que se estendeu até o ano de 2014, ano no qual alguns alunos foram instigados a responder um questionário proposto por nós, conforme será visto na próxima sessão.

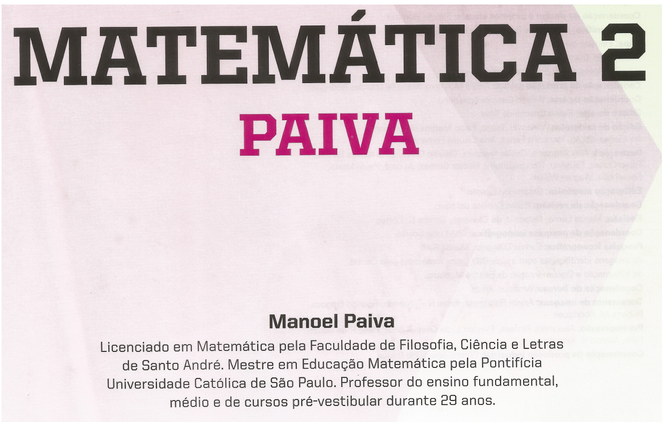
No PNLD 2012 foram aprovados e indicados pelo Governo Federal, através do MEC (Ministério da Educação), sete coleções, das quais, neste trabalho, foi analisado apenas uma obra, a qual é uma das obras utilizada em muitas escolas públicas do estado do Pará, em especial, na capital Belém.

A maioria dos livros do Ensino Médio que abordam o conteúdo de probabilidade, focam mais as questões voltadas para os jogos de azar, não que isso seja negativo quando se procura dar o entendimento do assunto, no entanto é preciso fazer um elo com outros conhecimentos que envolvem tais idéias e, nesse caso, só alguns livros fazem esse elo, em especial, livros que tem a probabilidade como único tópico abordade, realidade muito diferente dos livros didáticos que, por uma série de fatores, tem que ser concisos e que consigam abordar tais idéias. Mas voltando a análise, poucos livros falam do valor histórico deste estudo, uma vez que esta teoria surgiu a partir dos jogos ditos de azar. Estes trabalham muito com exercícios que praticamente só exigem que o aluno decore uma fórmula e aplique, ou seja, exercícios meramente mecânicos. Na obra analisada, o conteúdo é mostrado no volume 2, correspondente, aqui no estado do Pará, a grade curricular do 2º ano do ensino médio.

3.1 ANÁLISE DO LIVRO MATEMÁTICA DE MANOEL PAIVA

O livro analisado foi o livro Matemática do autor Manoel Paiva (2012) da editora Moderna, que possui no seu capítulo 15 (o último do volume) de 19 páginas, o assunto de probabilidade.

Figura 1 – Imagem do livro MATEMÁTICA, contra capa com currículo resumido do autor.



Nesta obra, as explanações teóricas são acompanhadas de exemplos e de exercícios, resolvidos ou propostos. A maioria das atividades propostas é de aplicação do que é exposto no livro e baseado na repetição da ideia aplicada no exemplo ou no exercício resolvido, fazendo com que a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento seja limitada. Nesse modelo, o pensamento crítico deixa de ser incentivado, há pouco espaço para a formulação de hipóteses e para uma aprendizagem mais significativa, ou seja, tudo ocorre de forma muito mecânica.

O assunto é introduzido com um texto tratando da história da probabilidade, o texto propõe a seguinte questão: "Um jogo de dados entre dois adversários chega ao fim quando um dos jogadores vence três partidas em primeiro lugar. Se esse jogo for interrompido antes do final, de que maneira cada um dos jogadores deverá ser indenizado?" No entanto, em nenhum momento do capítulo o autor retoma esse problema para respondê-lo ou dá dicas de como chegar a tal resposta. Em seguida, o autor apresenta o seguinte exemplo: "Um automóvel será sorteado entre os clientes de um shopping center, no dia do sorteio um representante do shopping vai retirar um cupom de um total de 10.000 que se encontram em uma urna. Qual é a probabilidade de uma pessoa que depositou 250 cupons ganhar o automóvel?", o autor aproveita este exemplo para falar sobre experimento aleatório, espaço amostral equiprovável e evento. Após falar sobre estes tópicos, o mesmo define probabilidade. Consideramos muito importante a maneira como foi conduzida a discussão até chegar a definição, pois partiu de um assunto cotidiano e que é de conhecimento do aluno e, somente depois, sistematiza o conteúdo, isto é, conceituou os principais conteúdos.

Outro tópico abordado e de forma interessante no livro é a maneira como é conceituado espaço equiprovável. Nesse tópico, o autor simula o lançamento de um dado 1000 vezes e conta a quantidade de vezes que cada face, após os lançamentos, ficam voltadas para cima. Partindo desse exemplo, ele também induz o aluno a ver, que se aumentar a quantidade de lançamentos, a tendência é a estabilidade. O número de vezes que cada face fica voltada para cima tende a se igualar quando o número de lançamentos tende ao infinito. Os demais conteúdos foram conceituados de maneira bem tradicional conforme mostra a Figura 1, ou seja, a partir de então, o autor passa a explicar a teoria e a exemplificá-las baseando-se em exemplos referentes a jogos de azar, as propriedades aparecem de forma simples e clara. Os exercícios apresentados pelo livro são diversos e há uma tentativa de retomar conteúdos anteriormente estudados na disciplina de matemática, tais como: divisibilidade, geometria, a linguagem de conjuntos, estatística, dentre outros.

Figura 2 – Imagem do livro MATEMÁTICA, modo de definição dos tópicos.

Espaço amostral e evento de um experimento aleatório

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** desse experimento. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento** desse espaço.

Achamos que ele poderia ter, ao explicar cada conteúdo, dado mais exemplos do mesmo conteúdo, porém de maneira diferente, para que o aluno não tenha um choque ao tentar resolver os exercícios.

Figura 3 – Imagem do livro MATEMÁTICA, exemplo de exercício resolvido após tópico.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de obter a face cara?

Resolução

Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, o espaço amostral desse experimento é:
$E = \{C, K\}$, em que $n(E) = 2$
O evento que esperamos ocorrer é $A = \{C\}$, em que $n(A) = 1$.

Logo: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{2}$

Ou ainda: $P(A) = 50\%$

(*Nota*: A probabilidade pode ser apresentada sob a forma fracionária, decimal ou percentual.)

2 No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que 3?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que $n(E) = 6$
O evento que esperamos ocorrer é: $B = \{1, 2\}$, em que $n(B) = 2$

Logo: $P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Nesse caso, é preferível representar a probabilidade na forma fracionária, evitando a incômoda representação da dízima periódica.

Nota-se que em poucos momentos o autor tenta instigar o aluno à pesquisa, à experiência, ao estudo reflexivo e crítico do que está aprendendo. O livro não abre muito espaço para exercícios que permitam ao aluno respondê-los com suas próprias palavras, limitando-o a mera repetição mecânica e utilização de fórmulas.

A cada tópico são dados alguns exercícios resolvidos de forma bem clara e direta como mostrada na figura 3.

3.2 CONSIDERAÇÕES

Da análise feita, julgamos a obra MATEMÁTICA do autor PAIVA como uma obra que traz uma boa quantidade de exercícios porém, bem restrita, que pode cumprir a sua função mas que precisa de complementação por parte do professor.

Na próxima sessão, veremos análise dos resultados da aplicação do questionário, do APÊNDICE, aos alunos do ensino médio e que utilizaram o livro didático supracitado e vamos analisar os resultados obtidos do ensino de probabilidade nos moldes propostos pelo livro.

4 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS

Para nossa investigação sobre os conhecimentos e habilidades já concebidas pelos alunos, foi aplicado um questionário (APÊNDICE) que coletou informações de cunho tanto social quanto educacional. O questionário é composto por 16 (dezesseis) itens sendo o último item subdividido em 13 (treze) problemas. As informações observadas foram referentes a idade, gênero, ano ou série, se a escola em que estuda é da rede pública ou privada, escolaridade do pai e da mãe, profissão do pai e da mãe, se o aluno gosta de matemática, se o aluno costuma estudar matemática fora da escola, se alguém o ajuda nas tarefas de matemática. Também são feitos questionamentos a cerca de como os assuntos de matemática foram ministrados pelos professores, perguntando sobre qual metodologia usada nas aulas de matemática de sua escola e sobre como o professor trabalhou para que o aluno compreendesse melhor o assunto ministrado. A partir de então os questionamentos se aplicam exclusivamente a probabilidade, perguntando como o aluno se sente em relação ao conteúdo e, após isso, o discente é convidado a preencher um quadro (vide APÊNDICE), classificando os tópicos de probabilidade em: muito fácil, fácil, regular, difícil ou muito difícil. A partir daí, foram propostos 13 problemas para que os discentes respondessem, referente ao tema de probabilidade. Este questionário foi aplicado a 180 alunos concluintes do ensino médio em duas escolas da região metropolitana de Belém.

Os resultados da aplicação dos questionários foram avaliados e expostos nos comentários e nas tabelas seguintes.

4.1 PERFIL DOS ALUNOS

Baseado nas respostas às questões de 01 a 15 do questionário aplicado a 180 (cento e oitenta) alunos da 3ª série do ensino médio, obtivemos os seguintes resultados.

Em relação a questão 01 sobre a idade dos alunos, obtivemos a distribuição mostrada na figura 4.

Dos 180 discentes pesquisados, temos que 90% (noventa por cento) discentes das escolas pesquisadas, estão na idade certa ou abaixo dessa idade para completar o ensino médio.

Da questão 02, a distribuição por gênero é mostrada na figura 5.

Todos os cento e oitenta alunos, 100%, são concluintes do ensino médio, das escolas pesquisadas, freqüentam a escola nos turnos da manhã ou da tarde, pois esta pesquisa não discriminou o turno de estudo dos alunos.

Figura 4 – Percentual de alunos por idade que participaram da pesquisa

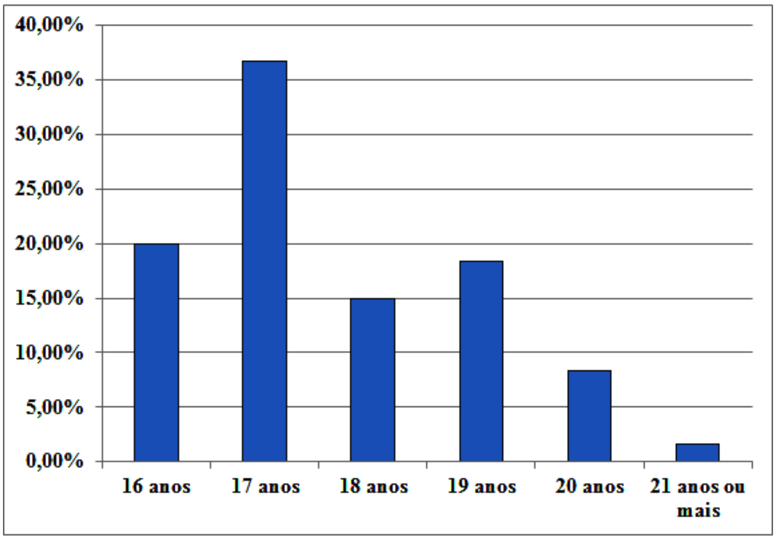
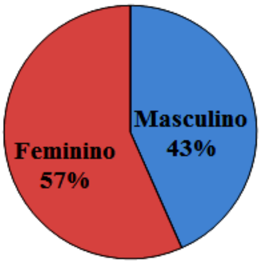


Figura 5 – Percentual de alunos por gênero que participaram da pesquisa



Quanto a escolarização do pai e da mãe, de acordo com nossos 218 alunos, temos a distribuição identificada na tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Comparativo entre a escolaridade do Pai e da Mãe dos alunos.

Descritivo	Pai		Mãe	
	Quant.	Porcent.	Quant.	Porcent.
Não estudou	**12**	**6,67**	**6**	**3,33**
Ensino fundamental incompleto	**27**	**15,00**	**15**	**8,33**
Ensino fundamental completo	**45**	**25,00**	**27**	**15,00**
Ensino médio incompleto	**45**	**25,00**	**39**	**21,67**
Ensino médio completo	**33**	**18,33**	**60**	**33,33**
Ensino superior incompleto	**12**	**6,67**	**21**	**11,67**
Ensino superior completo	**6**	**3,33**	**12**	**6,67**

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Da tabela 1 acima, é possível observar que, aproximadamente, $28,33\%$ dos pais (masculinos) possuem nível médio completo ou superior incompleto ou superior completo, enquanto que, aproximadamente, $51,67\%$ das mães possuem nível médio completo ou superior incompleto ou superior completo, mostrando que as mães, na amostra pesquisada, tem uma formação superior a dos pais e, portanto, uma maior capacidade de suporte aos discentes, quando comparado com o gênero masculino.

Em relação a profissão dos pais e das mães, respondidas nas questões 07 e 08 do questionário, obtivemos as mais variadas respostas, desde “não sei” até “funcionário público do tribunal de justiça”.

A partir da questão 09, entramos na relação dos alunos com a matemática, aqui a pergunta é sobre “o quanto gostam de matemática?”, os mesmos podiam escolher entre 4 opções de resposta: nem um pouco, pouco, razoável ou muito. Os resultados estão mostrados na tabela 2.

Tabela 2 – Distribuição de respostas à pergunta “você gosta de matemática?”

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Nem um pouco	**60**	**33,33**
Pouco	**57**	**31,67**
Razoável	**45**	**25,00**
Muito	**18**	**10,00**

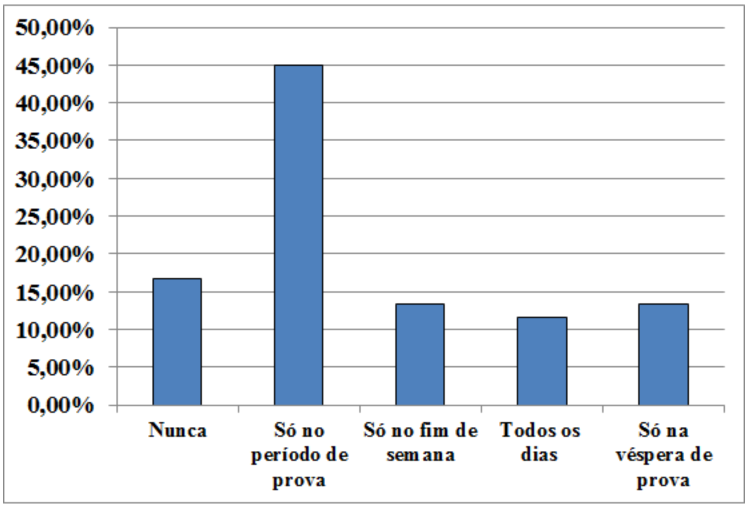
Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Da análise dos questionários, observa-se que 65% dos discentes, disseram que não gostam ou que gostam pouco de matemática, apenas 10% dos discentes disseram que gostam muito de matemática. Isto deixa claro que, ensinar matemática não é tarefa fácil pois o professor já encontra um cenário desfavorável no sentido de identificação do aluno com a disciplina, tornando-se essa questão um complicador nas questões do aprendizado da disciplina, mas as razões desse fato fogem aos objetivos deste trabalho.

"Você costuma estudar matemática fora da escola?", essa foi a 10^a questão proposta no questionário, e pra essa pergunta, foram oferceidas 5 alternativas: nunca, só no período de prova, só no fim de semana, todos os dias ou só na véspera da prova.

Conforme mostrado na figura 6, se compararmos as respostas com o resultado da tabela 2, o resultado não causa surpresa. Apenas, aproximadamente, 12% dos alunos relataram que estudam todos os dias, mas o que mais chama atenção foi o fato de, aproximadamente, 30% dos alunos dizerem que nunca estudam ou que só estudam na véspera da prova, o que acarreta uma dificuldade a mais no aprendizado da disciplina, o que é extremamente preocupante. Se considerarmos aqueles alunos que só estudam em período de prova, cujo percentual é de 45%, também retrata um quadro preocupante pois revela o fato de que, esse estudante, está

Figura 6 – Distribuição das respostas dos alunos à questão 10.



Fonte : Elaborado pelo autor, coforme respostas dos Questionários (APÊNDICE A).

preocupado apenas com as notas para aprovação na disciplina e não com o aprendizado em si. Sabemos que esses alunos não costumam ter um bom rendimento na disciplina, e isso quem diz é a nossa experiência no magistério,ou seja, mais uma vez esse quadro mostra a lastimável situação educacional disciplinar em relação aos estudos em matemática.

Na questão seguinte foi perguntado: “Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?”, as opções de resposta oferecidas foram: Ninguém, professor particular, o pai, a mãe, irmão(ã), amigos, tio(a), namorado(a) ou outros. O resultado está mostrado na tabela 3.

Tabela 3 – Respostas escolhidas pelos alunos à questão 11 do Questionário

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Ninguém	**90**	**50,00**
Professor particular	**18**	**10,00**
Pai	**0**	**0,00**
Mãe	**3**	**1,67**
Irmão(ã)	**18**	**10,00**
Amigo(a)	**39**	**21,66**
Tio(a)	**0**	**0,00**
Namorado(a)	**0**	**0,00**
Outro	**12**	**6,67**

Fonte : Elaborado pelo autor, conforme Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Da tabela 3, a grande maioria, 50% dos alunos, ou seja, metade da amostra, disseram que não possuem ajuda no momento de estudar. Esses dados nos fazem refletir e concluir que a participação familiar na formação desses alunos é muito pequena se compararmos com a necessidade que se espera, ao menos, como satisfatória.

As perguntas 12 e 13 tratam de como os alunos perceberam o trabalho do professor ao ministrar as aulas de matemática, sendo que na 12^a questão foi questionado, “Na maioria das aulas de matemática de sua escola, os assuntos são ministrados...” são apresentadas quatro opções para múltipla escolha, são elas: "Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios"; "Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto"; "Criando um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo"e "Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos". Depois de se analisar as respostas dos questionários, foi possível observar que mais de 96% dos 180 alunos responderam a primeira opção, ou seja, a de que os professores começam pela definição seguida de exemplos e exercícios, esta é uma metodologia das mais antigas e usadas na rede educacional, talvez por esse motivo, o pouquíssimo ou quase nenhum interesse dos alunos pela matemática, pois o ensino não consegue acompanhar o dinamismo do cotidiano desse aluno, mas, esse não é o foco deste trabalho. A distribuição das respostas estão mostradas na tabela 4.

Tabela 4 – Distribuição das respostas à questão 12 do Questionário

Pergunta	Percentual
Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios	**96,66**
Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto	**1,67**
Criando um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo	**1,67**
Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos	**0,00**

Fonte: Elaborada pelo autor conforme respostas dos Questionários

Na questão seguinte, é perguntado como o assunto ensinado é trabalhado para que o aluno entenda melhor o conteúdo de matemática ministrado e, para este item, foram oferecidas 05 alternativas: “Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos"; “Apresentar jogos envolvendo o assunto"; “Mandar resolver os exercícios do livro didático"; “Propõe questões de fixação"; e “Mandar que você procure questões sobre o assunto para resolver". Mais uma vez, assim como na questão anterior, existiu uma resposta que foi escolhida pela maioria absoluta da amostra, mais de 91% dos alunos indicaram a primeira opção, ou seja, o professor apresenta uma lista de exercícios para serem resolvidos, assim como na metodologia comentada na questão anterior. A distribuição está mlostrada na tabela 5.

Na última questão desta etapa do questionário que buscou conhecer o ambiente dos alunos, foi questionado sobre o conhecimento deles em relação a probabilidade. Foi perguntado: “Como você se sente em relação ao assunto Probabilidade?” e foram apresentadas 5 opções de resposta: “Nunca estudei”; “Estudei e não lembro nada”; “Estudei e lembro pouco”; “Estudei e

Tabela 5 – Distribuição das respostas à questão 13 do Questionário

Pergunta	Percentual
Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	**91,67**
Apresentar jogos envolvendo o assunto	**0,00**
Mandar resolver os exercícios do livro didático	**0,00**
Propõe questões de fixação	**8,33**
Mandar que você procure questões sobre o assunto para resolver	**0,00**

Fonte: Elaborada pelo autor conforme respostas dos Questionários

lembro quase tudo" e "Estudei e lembro de tudo". As respostas estão na tabela 6.

Tabela 6 – Respostas escolhidas pelos alunos à questão 14 do Questionário

Alternativas	Quantidade	Porcentagem
Nunca estudei	**21**	**11,67**
Estudei e não lembro nada	**57**	**31,67**
Estudei e lembro pouco	**72**	**40,00**
Estudei e lembro quase tudo	**27**	**15,00**
Estudei e lembro tudo	**3**	**1,66**

Fonte: Elaborado pelo autor a partir das respostas dos Questionários.

Temos que $83,34\%$ dos alunos entrevistados se manifestaram como não tendo estudado ou estudaram e não lembram ou lembram pouco sobre o assunto probabilidade. Apenas $1,66\%$ dos alunos se manifestaram como que se lembram de tudo.

Após esses resultados, foi possível montar um pequeno perfil desses alunos que, de maneira geral, é um aluno com no máximo 01 ano de atraso em relação a idade escolar, com pais escolarizados a nível de ensino médio completo ou incompleto, que não gostam de matemática e nem de estudá-la, sem ajuda de familiares e que pouco sabem sobre o conteúdo de probabilidade, mesmo sabendo que o assunto já foi apresentado pelo professor.

As questões que seguem tratam dos conteúdos relacionados a probabilidade (questão 15) e problemas práticos relacionados a esses assuntos.

Na questão 15 foi solicitado aos alunos que julgassem o que acharam, quanto ao grau de dificuldade de aprendizado, dos conteúdos relacionados ao ensino de probabilidade, esse quantitativo é apresentado na tabela 7.

Tabela 7 – Respostas dos alunos à questão 15 do Questionário

Alunos	O que você achou				
	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Espaço amostral e evento	3	18	39	48	72
Definição de probabilidade	0	21	63	39	57
Probabilidade de um evento certo	0	15	36	54	75
Probabilidade de um evento impossível	3	9	27	39	102
Probabilidade de evento complementar	0	9	42	51	78
Probabilidade da união de eventos	0	18	42	60	60
Probabilidade condicional	0	12	33	60	75
Probabilidade de eventos independentes	3	9	30	54	84

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Da tabela 7, é possivel observar que a maioria dos alunos julgou todos os assuntos como muito difíceis com exceção da definição de probabilidade que foi julgado como sendo de grau de dificuldade regular, menos de 1% dos alunos, em média, julgaram algum assunto como muito fácil e, unido com a informação anterior, mostram o quanto o ensino de matemática e, especificamente de probabilidade, está muito aquém do necessário. Na tabela 7 os itens em destaque representam a escolha da maioria para cada tópico.

4.2 RESPOSTA DOS ALUNOS AOS PROBLEMAS PROPOSTOS NO QUESTIONÁRIO

O item 16, foi dividido em 13 problemas sobre os conteúdos citados de probabilidade, foram analisadas as respostas dos alunos na ordem de cada questão, neste caso, como foi mencionado na introdução, esse trabalho irá discutir, de forma detalhada, apenas os resultados obtidos das questões 16.1, 16.2, 16.9 e 16.10 do questionário aplicado e, as outras questões serão comentadas de forma suscinta. Por questão de padronização, esses resultados serão expostos colocando-se, primeiramente, a questão proposta, depois, o conteúdo associado, em seguida, qual a resposta esperada e, por fim, exemplos de resultados mostrados pelos alunos. As outras questões, terão aqui apenas a citação dos número de acertos, para mais detalhes, consultar os trabalhos de Fábio de Oliveira Neves e de Marcos Oliveira de Oliveira.

Problema 16.1. No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento "sair um número primo".

Nessa questão, o esperado era que os alunos demonstrassem conhecer a definição de espaço amostral e a definição de evento (definição de número primo). As respostas esperadas eram, para o espaço amostral, o conjunto S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e, para o evento, o conjunto

E = {2, 3, 5}. Esta questão proposta, foi colocada como sendo a primeira pois entendemos que é a mais simples e direta dentre todas as questões propostas mas, infelizmente, apenas 15 acertos foram contabilizados para o espaço amostral e 18 acertos para o evento, ou seja, $8,33\%$ e $10,00\%$ de acertos, aproximadamente, respectivamente, e o mais curioso, é que pelo menos, um dos alunos que julgou, na questão 15 esses conhecimentos como muito fáceis, não acertau a questão, como é mostrado na figura 7.

Figura 7 – Comparação entre a opinião de um aluno sobre o conteúdo e sua resposta ao problema correspondente ao conteúdo

15. Preencha o quadro abaixo,e marque o item que representa o que você achou de cada tópico.

Assunto	O que você achou?				
	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Espaço amostral e evento	X				
Definição de probabilidade		X			
Probabilidade de um evento certo			X		
Probabilidade de um evento impossível				X	
Probabilidade de evento complementar					X
Probabilidade da união de eventos.					X
Probabilidade condicional					X
Probabilidade de eventos independentes					X

16. Resolva os problemas a seguir da forma que achar conveniente:
16.1 No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento "sair um número primo".

$\frac{2}{6} + \frac{4}{6}$

Ainda com relação ao problema 16.1, foi possível verificar que acertar o espaço amostral não era garantia de acerto do evento ou que o acerto do evento não garantiu o acerto do espaço amostral, por isso a divergência entre as quantidades de acertos entre os dois.

Foi possivel observar que na figura 7, e mais ainda na figura 8, a seguir, que os alunos confundem a determinação dos eventos ou espaço amostral com a própria probabilidade da ocorrência do evento, um dos motivos prováveis, é a falta de compreensão ou interpretação do que é solicitado no problema.

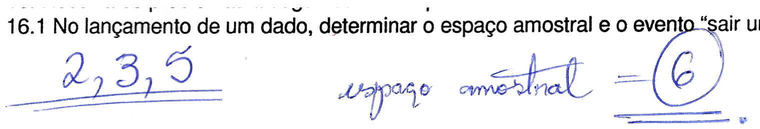
Figura 8 – Exemplo de confusão quanto ao solicitado no comando do problema

16. Resolva os problemas a seguir da forma que achar conveniente:
16.1 No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento "sair um número primo".

$\frac{3}{6}$

Nos questionários, também encontramos outro tipo de confusão, que é a troca da determinação do evento ou espaço amostral com a quantificação de possibilidades de ocorrência, no exemplo da figura 9, temos a perfeita determinação do evento porém ao invés de determinar o espaço amostral temos a quantificação de possibilidades.

Figura 9 – Exemplo de confusão trocando a ideia de determinação pela quantificação de possibilidades.


16.1 No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento "sair um número primo".

2, 3, 5

espaço amostral = 6

Problema 16.2. Numa urna existem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Retirando-se 1 bola ao acaso, qual a probabilidade de que seu número seja múltiplo de 5?

Para esta questão, o desejado era observar o conhecimento dos alunos quanto a definição de evento e definição de probabilidade, cujas respostas esperadas eram:

Evento $E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ e probabilidade de ocorrência P(E) = $\frac{6}{30}$ = $\frac{1}{5}$ ou em percentual igual a 20%.

Como não era explícito, no problema, a identificação separada da enumeração do evento, não foi considerada esta especificidade, até porque nenhum aluno fez o registro dela em separado. Nesse caso, 76 alunos acertaram a probabilidade, ou seja, quase 35% da amostra, porém apenas 5 alunos escreveram de forma simplificada a fração e nenhum na forma percentual.

Problema 16.3. Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número a) menor do que 21? b) maior do que 20?

Nessa questão, o que se pretendia avaliar era o conhecimento do aluno a cerca de evento certo e evento impossível e as respostas esperadas eram 1 ou 100% para o item *a)* e 0 ou 0% para o item *b)*, e o índice de acerto foi igual $26,67\%$ tanto para o item *a)* quanto para o item *b*, porém, acertar o item *a)* não garantia acerto do item *b)* e vice-versa.

Problema 16.4. Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de 1/5. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

Nesse problema se esperava que o discente demonstrasse conhecimento de probabilidade do evento complementar e a resposta esperada era de $\frac{4}{5}$. Embora, esse problema seja um problema de simples resolução, o índice de acertos foi de, aproximadamente, 17% um indice muito baixo se considerarmos que para chegar a tal solução bastava fazer a diferença $1 - \frac{1}{5}$.

Problema 16.5 Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

Nesse questionamento, o que se pretendia avaliar era o conhecimento do discente em relação a probabilidade da união de eventos e uma possibilidade de resolução era:
Espaço amostral: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, ou seja, $n(S) = 6$.
Evento A, sair um número par: $A = \{2,4,6\}$, ou seja, $n(A) = 3$.
Evento B, sair um número primo: $B = \{2,3,5\}$, ou seja, $n(B) = 3$.
Evento sair um número par e primo: $A \cap B = \{2\}$, ou seja, $n(A \cap B) = 1$.

Probabilidade de sair um número par ou primo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Resposta: 5/6

Outra possibilidade de resolução era o discente entender diretamente que, o evento sair um número par ou primo no lançamento de um dado, significa excluir apenas a face com o número 1, assim E = {2, 3, 4, 5, 6} e o espaço amostral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, assim $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{6}$. Nesse problema, o índice de acertos foi de apenas 5%.

Problema 16.6. Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

Nesse problema, verifica-se aplicação da ideia de probabilidade condicional e a resposta esperada era de $\frac{n(par \cap preta)}{n(preta)} = \frac{4}{8}$. Nesse item, o índice de acertos foi de, aproximadamente, $26,67\%$.

Problema 16.7. De um baralho de 52 cartas extraem-se duas cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade se obter um ás e um valete nessa ordem?

A questão avaliava a ideia de probabilidade condicionalde, uma vez que a probabilidade da segunda carta retirada ser influenciada da retirada da primeira e uma solução possível, era considerar o evento A como sendo a primeira carta retirada ser um ás e, nesse caso, P(A) = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ e B, como sendo a segunda carta retirada ser um valete e como o processo é sem reposição de cartas, então, $P(B/A) = \frac{4}{51}$. Assim, $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{4}{52}.\frac{4}{51} = \frac{16}{2652} = \frac{4}{663}$. O índice de acertos da questão foi de, aproximadamente, $1,67\%$.

Problema 16.8 Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma dos pontos nos dois dados foi 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles.

Nessa questão, é cobrado conhecimento de probabilidade condicional e é possível observar no espaço amostral abaixo, em destaque, todos os resultados que atendem soma 8.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

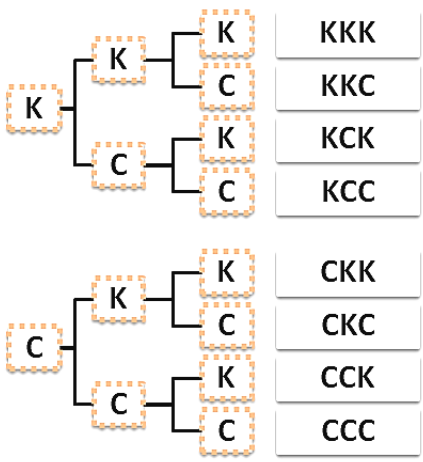
Assim, dos 5 resultados com soma 8, 2 deles apresentam face 5, portanto, a resposta pedida era de $\frac{2}{5}$. O índice de acerto dessa questão foi de 0%.

Problema 16.9. Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente.

Nesse problema, o objetivo era verificar se os alunos eram capazes de determinar o espaço amostral e não de quantificá-lo. Uma possibilidade de resposta seria construir a árvore de possibilidades.

Como exemplo, temos:

Considerando que **K** representa o resultado cara e que **C** o resultado coroa, temos:

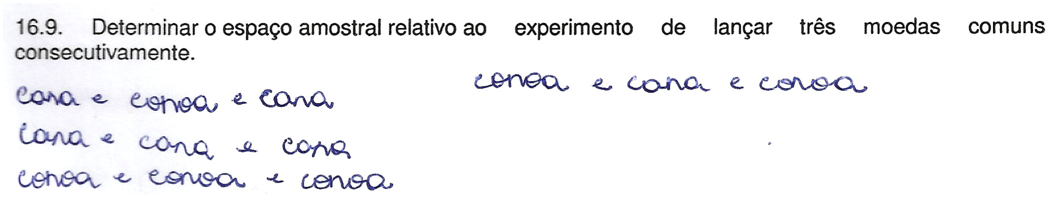


Nesse caso, temos 8 possibilidades de ocorrência para o espaço amostral: **KKK**, **KKC**, **KCK**, **KCC**, **CKK**, **CKC**, **CCK** e **CCC**.

Neste problema, encontramos 21 questionários que apresentaram a resposta correta, ou seja, aproximadamente, 11,67% da amostra acertou esta questão que tem o mesmo conteúdo associado da 1ª questão, mas lá o índice de acerto foi menor, mostrando que conhecer e entender as possibilidades de um experimento acontecer é fundamental, podemos supor que as moedas são mais familiares aos alunos do que os dados.

Alguns alunos, começaram ou esboçaram escrever o espaço amostral mas deixaram incompletos ou simplesmente não conseguiram escrever exatamente as possibilidades. Na figura 11, temos um exemplo de como alguns alunos deixaram como resposta a solução para este problema.

Figura 10 – Exemplo de resposta incompleta ao problema 16.9


16.9. Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente.

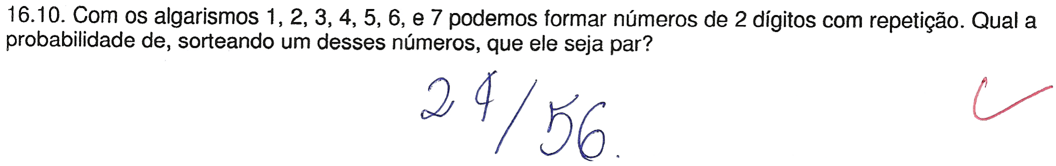
cara e coroa e cara
cara e cara e cara
coroa e coroa e coroa
coroa e cara e coroa

Problema 16.10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podemos formar números de 2 dígitos com repetição. Qual a probabilidade de, sorteando um desses números, que ele seja par?

Neste problema, aguardávamos que os alunos mostrassem conhecer a definição de evento, a definição de espaço amostral e a definição clássica de probabilidade, o cálculo poderia ser feito de duas maneiras distintas, a primeira maneira é aquela que lembra o fato de que é o último algarismo que determina se um número é par e com isso temos, de forma direta, a probabilidade esperada de 3/7, ou seja, três números pares de um total de sete possíveis para a última casa ou, da segunda maneira, utilizando o princípio fundamental da contagem ou outra técnica de análise combinatória que, embora não fosse o foco da questão, possibilitasse o aluno calcular quantos números pares de dois algarismos poderiam ser formados, bastando para isso executar o produto 7x3 = 21 e o total de números possíveis que é 7x7 = 49, calculando então a probabilidade de 21/49 que simplificando, resulta em 3/7, da mesma forma.

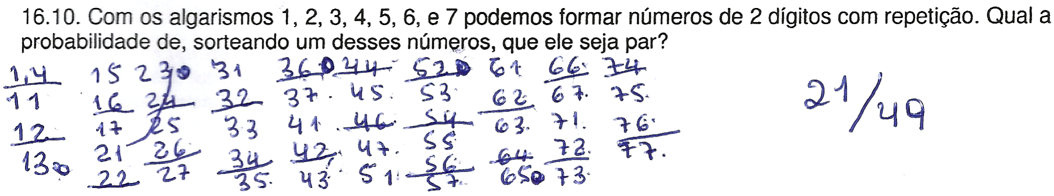
Para este problema, houve 39 alunos, ou seja, aproximadamente 22%, que acertaram, ou seja, ainda estamos bem aquém do esperado, pois a questão não necessitava de cálculo mais elaborado ou refinado, mesmo assim teve aluno que resolveu, ou aparentemente o fez em algum rascunho ou borrão, e colocou a resposta 24/56 de tal forma que representa uma fração equivalente aquela da resposta correta porém, o que representa 24 e o 56 ficamos sem o devido exclarecimento, mas de qualquer forma, a resposta foi considerada correta, e essa situação é mostrada a figura 11.

Figura 11 – Exemplo de resposta ao problema 16.10


16.10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podemos formar números de 2 dígitos com repetição. Qual a probabilidade de, sorteando um desses números, que ele seja par?

24/56.

Figura 12 – Exemplo de resposta ao problema 16.10


16.10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podemos formar números de 2 dígitos com repetição. Qual a probabilidade de, sorteando um desses números, que ele seja par?

21/49

Na figura 12, é mostrado que um dos alunos respondeu ao problema 16.10 usando a contagem direta de eventos sobre o espaço amostral, observa-se que ele começou de forma desorganizada, mas no decorrer do desenvolvimento, acabou por estabelecer um raciocínio lógico.

Problema 16.11. Lançando dois dados, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

Nesse caso, novamente se aborda um problema que utiliza a ideia da probabilidade dos eventos independentes e, considerando A como o evento sair 1 no primeiro dado e B, como sendo sair 5 no segundo dado, a resposta esperada era $P(\cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Nessa questão o índice de acerto foi de, aproximadamente, $6,67\%$.

Problema 16.12. Um árbitro de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é amarelo de um lado e vermelho do outro. Num determinado lance, o árbitro retira do bolso, ao acaso, um cartão e mostra ao jogador. Qual é a probabilidade de a face que o árbitro vê ser vermelha e de que a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela?

Neste problema, se avaliava conhecimento de evento, espaço amostral e probabilidade condicional e a resposta esperada era de $\frac{1}{6}$ que poderia ser determinada de várias formas e entre elas a árvore de possibilidades com indicação das probabilidades.

Para essa questão, o índice de acertos foi de, apenas, 5%

Problema 16.13. Num único lance de um par de dados honestos, qual é a probabilidade de saírem as somas “múltipla de 4” ou “primo”?

Nessa questão, avalia-se conhecimento de evento, espaço amostral e probabilidade da união de eventos. Se o discente constrísse o espaço amostral e destacasse todos os pares que atendessem uma condição ou outra, chegaria em um quadro parecido com o mostrado abaixo, onde estão destacados os pares que ou dão soma múltipla de 4 ou dão soma número primo.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Assim, é possivel observar que dos 36 pares possíveis, 24 deles atendem as condições colocadas, dessa forma, a resposta esperada era $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Outra maneira de fazer, é utilizando a expressão $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, que é a fórmula para o cálculo da probabilidade da união de eventos, assim, sendo A o evento “soma das faces igual a múltiplo de 4” e B, “soma das faces um número primo”, então, $P(A) = \frac{9}{36}$, $P(B) = \frac{15}{36}$ e $P(A \cap B) = 0$. De posse desses resultados, $P(A \cup B) = \frac{9}{36} + \frac{15}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Nessa questão, o índice de acertos foi de, aproximadamente, $1,67\%$

A partir das análise feitas, percebe-se que as dificuldades de entendimento do que significa calcular a probabilidade de um evento está muito longe do que se espera, pois os alunos não conseguem expressar idéias básicas dos assuntos que já foram, pelo menos, apresentados pelo professor a esses estudantes. Portanto há de se criar formas alternativas de trabalhar tais conteúdos de modo que esse conhecimento de fato faça sentido a esse estudante, caso contrário, o fracasso escolar será cada vez maior.

5 PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Nessa sessão, é apresentada a poroposta de intervenção desse trabalho, que tem o objetivo de auxiliar os docentes de matemática a trabalhar com o conteúdo de probabilidade, com o intuito de fazer com que os discentes façam uma discussão sobre probabilidade com dinâmicas de modo a consolidar o conhecimento e ajude, os mesmos, a perceber na prática o que é apresentado na teoria.

Para cada plano de aula apresentado, segue-se o material de apoio que serve de roteiro para a execução das atividades.

5.1 PLANO DE ENSINO 1

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 3 h/a

TEMA: Experimentos Aleatórios e Experimentos Determinísticos

Conteúdo Programático:

1 Experimentos Aleatórios e Experimentos Determinísticos

1.1 Experimentos Aleatórios.

1.2 Experimentos Determinísticos.

Objetivo Geral:

- Diferenciar os experimentos determinísticos e aleatórios.

Objetivos Específicos:

- Exemplificar Experimentos Aleatórios

- Exemplificar Experimentos Determinísticos

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;
- Balão;
- Agulha;
- Moedas;
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

- Seguir a dinâmica sugerida no *material para o plano de ensino 1*. Para este procedimento será necessário aproximadamente 1 h/a;
- Propiciar aula expositiva e dialogada;
- Utilizar o quadro de escrever para sintetizar as ideias geradas na dinâmica sugerida;
- Seguir a aula com o conteúdo do *material para o plano de ensino 1* utilizando o data-show;
- Finalizar a aula com exercícios de fixação do conteúdo ministrado contidos e sugeridos no *material para o plano de ensino 1*;
- Avaliar a aula no final;

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: http:www.professores.uff.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf).

5.1.1 Material para o plano de ensino 1

INTRODUÇÃO

Para este trabalho, recomenda-se que os alunos tenham visto com antecedência uma revisão de linguagem de conjuntos e tenham estudado estatística, pois assim, alguns conceitos utilizados ficarão mais claros.

Lucas e Vinícius lançam simultaneamente um dado cada um. O dado de Lucas forneceu em sua face superior o número 3. Qual a chance de Vinícius obter um número maior que o de Lucas?

A teoria das probabilidades estuda situações nas quais podemos estimar as chances de um determinado fato acontecer. Essa teoria é de grande valia para profissionais de diversas áreas, principalmente estatísticos, biólogos, economistas, administradores e engenheiros.

RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES E FORMALIZAÇÃO DOS CONCEITOS

Experimentos Aleatórios e Experimentos Determinísticos

Em sala de aula:

Material necessário:

- balão (bexiga)
- agulha
- moedas

Metodologia:

- Com o balão cheio em uma mão e a agulha na outra mão, pergunta-se aos alunos: “O que vai acontecer se furarmos o balão com a agulha”?
  Espera-se que TODOS digam que o balão vai estourar.

- Com a moeda na mão, pergunta-se aos alunos: “Qual a face da moeda ficará para cima quando largar esta moeda”?
  Espera-se que os alunos se dividam entre as respostas possíveis, CARA ou COROA, ou que cheguem à conclusão de que é difícil “adivinhar” a resposta.

Após essa dinâmica formalizam-se os conteúdos associados conforme segue:

- Ao soltar uma pedra do alto de um edifício, sabemos que esta pedra irá em direção ao chão.
  - Experimento Determinístico
    * Certeza de que o evento irá acontecer!
- Quais as chances de uma determinada rede suportar 20 usuários conectados simultaneamente? Existem dois resultados possíveis: a rede aguenta ou a rede cai.
  - Experimento Aleatório
    * Possibilidade de ocorrência de diversos eventos

Analisem os experimentos seguintes:

1. Determinar o tempo que uma pedra, largada de uma altura de 50 m, leva para atingir o solo.
   Experimento Determinístico
2. Retirar uma carta de um baralho de 52 cartas e verificar seu naipe.
   Experimento Aleatório
3. O espaço percorrido por um automóvel que se desloca a uma velocidade média de 80 Km/h durante 2 h.
   Experimento Determinístico

4. Sortear um número em uma rifa e verificar o número.
   Experimento Aleatório

Formalizando

EXPERIMENTOS DETERMINÍTICOS

Experimentos em que, ao serem repetidos inúmeras vezes, os resultados podem ser previstos ou determinados. Nestes experimentos existe a possibilidade de se fazer a previsão lógica e precisa do resultado.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em condições semelhantes, apresentam diferentes resultados, não sendo possível a previsão lógica dos resultados. Sabemos quais são os prováveis resultados, mas não sabemos qual particular resultado ocorrerá.

ATIVIDADE PROPOSTA

1. Analise os experimentos seguintes e classifique-os em determinísticos ou aleatórios:

a) Dentro de certas condições, é possível prever a que temperatura o leite ferve.
   Experimento Determinístico

b) O sorteio da quina da Loto.
   Experimento Aleatório

c) O sorteio do primeiro prêmio da Loteria Federal.
   Experimento Aleatório

d) De uma urna contendo 4 bolas brancas e 5 vermelhas, retirar 1 bola e observar sua cor.
   Experimento Aleatório

e) Observar a corrente (I) que passa em um circuito elétrico, com certa resistência (R) e diferença de potencial (V).
   Experimento Determinístico

f) Quanto tempo levará um carro para percorrer um trajeto de 200 km numa velocidade média de 100 km/h?
   Experimento Determinístico

5.2 PLANO DE ENSINO 2

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 3 h/a

TEMA: Espaço Amostral e Evento.

Conteúdo Programático:

2 Espaço Amostral e Evento.
2.1 Espaço Amostral.
2.2 Evento.

Objetivo Geral:

- Conceituar espaço amostral e evento.

Objetivos Específicos:

- Exemplificar um Espaço Amostral;
- Exemplificar um Evento.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;
- Dados numerados de 1 a 6;
- Moedas;

- Caixa (qualquer) com fichas (podem ser de papel) numeradas de 1 a 10, de tal forma que não se perceba qual número está escrito nas fichas (ou a caixa é opaca ou dobram-se as fichas de papel);
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

- Seguir a dinâmica sugerida no *material para o plano de ensino 2*. Para este procedimento será necessário aproximadamente 1 h/a;
- Propiciar aula expositiva e dialogada;
- Utilizar o quadro de escrever para sintetizar as ideias geradas na dinâmica sugerida;
- Seguir a aula com o conteúdo do *material para o plano de ensino 2* utilizando o data-show;
- Finalizar a aula com exercícios de fixação do conteúdo ministrado contidos e sugeridos no *material para o plano de ensino 2*;
- Avaliar a aula no final;

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: http:www.professores.uff.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf).

5.2.1 Material para o plano de ensino 2

Espaço Amostral e Evento

Nessa sessão serão utilizados materiais manipuláveis, como dados, moedas e uma caixa com fichas numeradas de 1 a 10. Cada grupo receberá o material para realizar o experimento. O objetivo dessas atividades é conceituar espaço amostral e evento.

Em sala de aula:

Material necessário, para cada aluno ou grupo de alunos

- dado numerado de 1 a 6

- moedas

- caixa (qualquer) com fichas (podem ser de papel) numeradas de 1 a 10, de tal forma que não se perceba qual número está escrito nas fichas (ou a caixa é opaca ou dobram-se as fichas de papel)

Metodologia:

- De posse do dado na mão dos alunos, solicite: "Escrevam o conjunto formado pelos possíveis resultados que podem aparecer na face voltada para cima após o lançamento do dado ao chão" Espera-se que os alunos escrevam o conjunto A = {1,2,3,4,5,6}

- De posse da caixa com as fichas na mão dos alunos, solicite: "Escrevam o conjunto formado pelos possíveis resultados que podem aparecer numa ficha retirada ao acaso dessa caixa" Espera-se que os alunos escrevam o conjunto B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.

- De posse da moeda na mão dos alunos, solicite: "Escrevam o conjunto formado pelos possíveis resultados que podem aparecer na face voltada para cima da moeda após ser lançada duas vezes ao chão" Espera-se que os alunos escrevam o conjunto C = {(cara,cara) ; (cara,coroa) ; (coroa,cara) ; (coroa,coroa)}

- De posse do dado, na mão dos alunos, solicite: "Escrevam o conjunto de todos os resultados que podem aparecer na face voltada para cima após o lançamento do dado ao chão, que são números primos?"Espera-se que os alunos escrevam o conjunto D = {2,3,5}

- De posse da caixa com as fichas na mão dos alunos, solicite: "Escrevam o conjunto de todos os resultados possíveis que podem aparecer numa ficha retirada, ao acaso dessa caixa, que são números pares". Espera-se que os alunos escrevam o conjunto B = {2,4,6,8,10}.

- De posse da moeda na mão dos alunos, solicite: “Escrevam o conjunto formado pelos possíveis resultados que podem aparecer na face voltada para cima da moeda após ser lançada duas vezes ao chão, que apresenta faces iguais” Espera-se que os alunos escrevam o conjunto C = {(cara,cara) ; (coroa,coroa)}

Após essa dinâmica formalizam-se os conteúdos associados conforme segue:

Utilizem os materiais manipuláveis como dado, caixa com fichas numeradas e moedas, para executar os seguintes experimentos aleatórios:

A: De posse do dado observe quais são os resultados que podem ser obtidos ao jogá-lo.
B: Da caixa com 10 fichas numeradas, verifique quais os números que podem ser obtidos ao se retirar uma das fichas.
C: Observe as duas moedas comuns distintas e verifique quais são as possibilidades de resultados com as mesmas.
Com base no que foi observado acima, descreva os conjuntos abaixo:

a) o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório A.
$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório B.
$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

c) o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório C.
$S = \{(cara,coroa);(coroa,cara);(cara,cara);(coroa,coroa)\}$

O professor então deve discutir com os alunos que os conjuntos acima, enumeram todas as possibilidades de resultados e recebem o nome de espaço amostral do respectivo experimento aleatório.

De cada um dos espaços amostrais observados acima, descreva os conjuntos abaixo;

d) o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório A, que são números primos.
$A = \{2,3,5\}$

e) o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório B, que são números pares.
$B = \{2,4,6,8,10\}$

f) o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório C, que apresenta faces iguais.

$C = \{(cara, cara); (coroa, coroa)\}$

O professor deve fazer o comentário de que cada um dos conujutos citados acima, são subconjuntos, ou partes do espaço amostral do experimento aleatório denominando-os de evento.

Formalizando conceitos

ESPAÇO AMOSTRAL

Dado um fenômeno aleatório, isto é, sujeito às leis do acaso, chamamos de espaço amostral ao conjunto formado por todos os resultados possíveis de ocorrer. Em oposição aos fenômenos aleatórios, existem os fenômenos determinísticos, que são aqueles cujos resultados são previsíveis, ou seja, temos certeza dos resultados a serem obtidos.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado, observando a face voltada para cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. Lançamento de duas moedas, observando as faces voltadas para cima.

$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}.$$

EVENTO

Chama-se evento a qualquer subconjunto do espaço amostral.

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Obtenha o espaço amostral dos experimentos abaixo:

   a) Lançamento de uma moeda: $\Omega = \{c, k\}$ sendo $c =$ cara e $k =$ coroa

   b) Lançamento de duas moedas: $\Omega = \{cc, ck, kc, kk\}$

   c) Lançamento de um dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

d) Retirada de uma carta do baralho:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ (\diamondsuit),\\ &\quad A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ (\heartsuit),\\ &\quad A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ (\spadesuit),\\ &\quad A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ (\clubsuit)\}\end{aligned}$$

f) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora:

$$\Omega = \{0, 1, 2, ...\}.$$

g) Investigam-se famílias com três crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo:

$$\Omega = \{MMM, MMF, MFM, FMM, FFM, FMF, MFF, FFF\}, (2^3 = 8 \text{ elementos}),$$
$$\text{onde } M : \text{sexo masculino e } F : \text{sexo feminino.}$$

h) Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que se queimem:

i) De cada família entrevistada numa pesquisa, anotam-se a classe social a que pertence (A, B, C, D) e o estado civil do chefe da família.

$$\Omega = \{(A,S),(B,S),(C,S),(D,S),(A,C),(B,C),(C,C),(D,C)\}, (4 \cdot 2 = 8$$
$$\text{elementos}), \text{ onde } S : \text{solteiro}, C : \text{casado.}$$

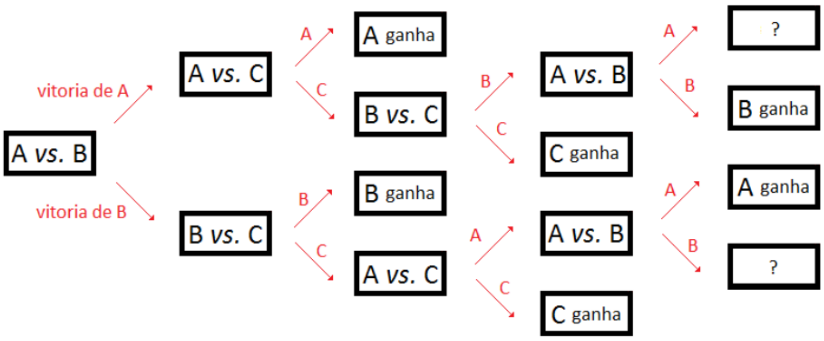
Obs: O espaço amostral depende do que foi considerado no estado civil do chefe de família.

2. Três jogadores A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes seguidas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Quais são os resultados possíveis do torneio?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5a edição, pág 105

Solução:

Considere a árvore de possibilidades:



Com a ajuda da árvore de possibilidadesorganograma, podemos dizer que são possíveis os eventos $AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA$ e $BCAB$. Aí, temos que

$\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$

3. Uma moeda e um dado são lançados. Dê o espaço amostral do experimento e depois represente-o como produto cartesiano dos dois espaços amostrais, correspondente aos experimentos considerados individualmente.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5a edição, pág. 106.

Solução:

O espaço amostral Ω consiste, no caso discreto, da enumeração de todos os resultados possíveis do experimento em questão. O experimento jogar uma moeda tem dois resultados possíveis: cara (C) e coroa (K). Logo, o espaço amostral é $\Omega_1 = \{C, K\}$.

O experimento jogar um dado tem seis resultados possíveis: $1, 2, 3, 4, 5$ e 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

O produto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ é o espaço amostral do experimento jogar uma moeda e um dado, ou seja,

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(C,1), (C,2), (C,3), (C,4), (C,5), (C,6), (K,1), (K,2), (K,3), (K,4), (K,5), (K,6)\}$

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Considerando o experimento: lançar uma moeda comum e anotar o resultado, lançando em seguida um dado comum e anotando o resultado como um par (moeda, dado), descrever:

   a) o espaço amostral S;

   Considerando que **c** representa "Coroa" e **k**, representa "Cara", os resultados possíves são:

   $S = \{(c,1);(c,2);(c,3);(c,4);(c,5);(c,6);(k,1);(k,2);(k,3);(k,4);(k,5);(k,6)\}$

   b) o evento $E_1 =$ sair cara na moeda; $E_1 = \{(c,1);(c,2);(c,3);(c,4);(c,5);(c,6)\}$

   c) o evento $E_2 =$ sair par no dado; $E_2 = \{(c,2);(c,4);(c,6);(k,2);(k,4);(k,6)\}$

   d) o evento $E_3 =$ sair cara na moeda e par no dado; $E_3 = \{(c,2);(c,4);(c,6)\}$

   e) o evento $E_4 =$ sair cara na moeda ou par no dado.

   $E_4 = \{(c,1);(c,2);(c,3);(c,4);(c,5);(c,6);(k,2);(k,4);(k,6)\}$

2. Fazendo duas retiradas consecutivas e sem reposição de bolas de uma urna que contém três bolas verdes e quatro bolas amarelas, qual será o espaço amostral?

   $S = \{(V1,A1);(V1;A2);(V1,A3);(V1,A4);(V2,A1);(V2;A2);(V2,A3);(V2,A4);(A1,V1);$
   $(A1;V2);(A2,V1);(A2;V2);(A3,V1);(A3;V2)\}$

3. Considerando o experimento: fazer dois lançamentos consecutivos de um dado comum e honesto e anotar a face que ficará voltada para cima em cada lançamento, determinar:

   a) O espaço amostral S;

   O espaço amostral do lançamento de dois dados clássicos é formado por 36 pares ordenados

   $\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(3,1);$
   $(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(6,6);(5,1);(5,2);(5,3);$
   $(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\}$

   b) O evento A : A soma dos resultados é 5; $A = \{(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)\}$

   c) O evento B : Os resultados são iguais; $B = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$

5.3 PLANO DE ENSINO 3

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 4 h/a

TEMA: Definição de Probabilidade e Cálculo de Probabilidades.

Conteúdo Programático:

4 Definição de Probabilidade e Cálculo de Probabilidades.
4.1 Definição clássica de probabilidade.

Objetivo Geral:

- Conceituar classicamente probabilidade.

Objetivos Específicos:

- Discutir expectativa, chance e probabilidade;
- Conceituar probabilidade;
- Aplicar o conceito em situações do dia a dia.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;
- Moedas de 50 centavos;
- 10 (dois) dados numerado de 1 a 6 por grupo de alunos;

- Tabelas impressas, uma cópia para cada grupo;
- Listas de Exercícios.
- Papel milimetrado.

Procedimentos Metodológicos:

- Seguir a dinâmica sugerida no material proposto no APÊNDICE B. Para este procedimento será necessário aproximadamente 2 h/a;
- Propiciar aula expositiva e dialogada;
- Utilizar o quadro de escrever para sintetizar as ideias geradas na dinâmica sugerida;
- Seguir a aula com o conteúdo da sessão 4 utilizando o data-show;
- Finalizar a aula com exercícios de fixação do conteúdo ministrado contidos e sugeridos na sessão do APÊNDICE B; e
- Avaliar a aula no final;

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: http:www.professores.uff.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf).

5.3.1 Material para o plano de ensino 3

Definição de Probabilidade e Cálculo de Probabilidades O objetivo dessa sessão é construir a definição de Probabilidade e cálculo de probabilidade de eventos.

Vamos considerar o seguinte problema adaptado do Exame Nacional do Ensino Médio

Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6: - Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisetas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de $2(1+1)$ até $12(6+6)$. Vamos jogar os dados e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.

Tadeu, camisa 2: - Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...

Ricardo, camisa 12: - Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...

A partir desse diálogo, responda:

Nesse momento o professor deve fazer uma discussão com seus alunos, mostrando o que é um espaço equiprovável e que permita ao aluno perceber que nesse problema o espaço não é equiprovável, ou seja, que as somas tem chances diferentes de ocorrência.

a) Em sua opinião, quem é o jogador com maior chance de levar a taça para casa, dentre os 11 jogadores do time? Por quê?

   Solução:

   Jogando dois dados, o espaço amostral é composto por 36 elementos, uma vez que o dado apresenta 6 resultados possíveis.

   Cada elemento do espaço amostral é do tipo (dado 1, dado 2).

   Dessa forma temos:

Ω	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Somando cada um dos resultados possíveis, temos:

$$\begin{array}{cccccc}
1+1=2 & 2+1=3 & 3+1=4 & 4+1=5 & 5+1=6 & 6+1=7 \\
1+2=3 & 2+2=4 & 3+2=5 & 4+2=6 & 5+2=7 & 6+2=8 \\
1+3=4 & 2+3=5 & 3+3=6 & 4+3=7 & 5+3=8 & 6+3=9 \\
1+4=5 & 2+4=6 & 3+4=7 & 4+4=8 & 5+4=9 & 6+4=10 \\
1+5=6 & 2+5=7 & 3+5=8 & 4+5=9 & 5+5=10 & 6+5=11 \\
1+6=7 & 2+6=8 & 3+6=9 & 4+6=10 & 5+6=11 & 6+6=12
\end{array}$$

Portanto o jogador com maiores possibilidades de ganhar é o jogador da camisa 7, devido a soma de resultados possíveis para essa numeração aparecer seis vezes, ou seja

$$(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1).$$

b) Qual a chance de Pedro ficar com a taça?

Solução:

Como a numeração da camisa de Pedro é igual a 6, para ele ser sorteado, a soma dos resultados possíveis deve ser igual a 6.

Dessa maneira temos cinco possibilidades: $A = \{(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)\}$

Portanto, a probabilidade de Pedro ser sorteado é:

$$P = \frac{\text{número}(A)}{\text{número}(S)} = \frac{5}{36} = 0,138 = 13,8\%$$

c) Qual a chance de Tadeu ficar com a taça?

Solução:

A única possibilidade de Tadeu ser sorteado é sair o evento $B = \{(1,1)\}$, pois a soma dos resultados deve ser 2 (número da camisa de Tadeu).

Concluímos que a probabilidade de Tadeu ser sorteado é

$$P = \frac{\text{número}(B)}{\text{número}(S)} = \frac{1}{36} = 0,0278 = 2,77\%$$

d) Qual a chance de Ricardo ficar com a taça?

Solução: Da mesma forma a única possibilidade de Ricardo ser sorteado é sair o evento $C = \{(6,6)\}$, pois a soma dos resultados deve ser 12 (número da camisa de Ricardo).

$$P = \frac{\text{número}(C)}{\text{número}(S)} = \frac{1}{36} = 0,0278 = 2,77\%$$

Nesses exercícios, o professor deve conduzir a discussão de que calcular a chance de ocorrência é verificar em quantos resultados aparecem o que se deseja em relação ao total, resolvendo utilizando as noções básicas de fração, ou seja, de se tomar uma parte de um todo.

Calcule de probabilidade e lei dos grandes números O objetivo dessa experimentação é calcular a probabilidade de um dado valor especifico em um dado através da frequência relativa do mesmo.

Em sala de aula:

Material necessário:

- Dados

- Papel milimetrado

- moedas

Metodologia:

- Com dez dados, fazer lançamentos consecutivos, observando quantas vezes o valor 3, por exemplo, aparece nos lançamentos.

- Registra-se em uma tabela o número de vezes em que aparece o valor 3 em 10, 20, 30 , 40, ..., lançamentos. Quanto mais lançamentos, melhor, e calcula-se, na própria tabela, a razão entre o número de vezes que aparece o 3 e o total de lançamentos realizados.

- Colocam-se no plano cartesino, utilizando o papel milimetrado, a quantidade de lançamentos na horizontal e a razão entre a quantidade de respostas 3 em relação ao total de lançamentos e, assim, desenha-se um gráfico de linhas e observa-se o que acontece com o gráfico a medida que o número de lançamentos aumenta.

Nesse momento da realização do experimento e após observar o resulatdo, o professor deve introduzir a discussão da lei dos grandes números e inserir a idéia do cálculo de probabilidade, comparando o valor da frequência relativa do 3 com o valor postulado de probabilidade de ocorrência do 3 que é $\frac{1}{6} \approx 0,1667$. Após toda essa formalização, fazer o mesmo experimento com moedas de 50 centavos

FORMALIZAÇÃO

DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE

Seja A um evento de um espaço amostral Ω finito, cujos elementos são igualmente prováveis.
Define-se a probabilidade do evento A como

$$P(A) = \frac{\text{números de casos favoráveis}}{\text{números de casos possíveis}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Naturalmente, nesta definição estamos supondo que $n(\Omega) > 0$, ou seja, que Ω tenha algum elemento, pois, se não tivesse, não teríamos o que estudar!

Esta foi a primeira definição formal de probabilidade, tendo sido explicitada por Girolamo Cardano $(1501 - 1576)$, vamos nos referir a ela como a definição clássica de probabilidade.

Note que ela se baseia em duas hipóteses:

1. Há um número finito de eventos elementares, isto é, Ω é um conjunto finito.

2. Os eventos elementares são igualmente prováveis.

Trataremos neste trabalho dos Espaços Amostrais Equiprováveis, ou seja, aqueles onde os eventos elementares possuem a mesma chance de ocorrerem.

Por exemplo, no lançamento de dado, supõe-se que sendo o dado perfeito, as chances de sair qualquer número de 1 a 6 são iguais. Historicamente, foi na idade média, com Galileu, que se registrou pela primeira vez a citação do termo equiprovável.

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Qual a possibilidade de esse número ser:

    a) menor que 3?

    b) maior ou igual a 3?

    Solução:

    a) Sendo: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

    Seja E o evento "o número é menor que 3".

    Temos: $E = \{1,2\}$, então, $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

    b) Basta considerar o evento complementar em relação ao evento anterior, isto é, $E^C = \{3,4,5,6\}$.

    Assim, $P(E^C) = \dfrac{n(E^C)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

2. Uma moeda é lançada três vezes, sucessivamente. Qual a probabilidade de observarmos:

    a) Exatamente uma cara?

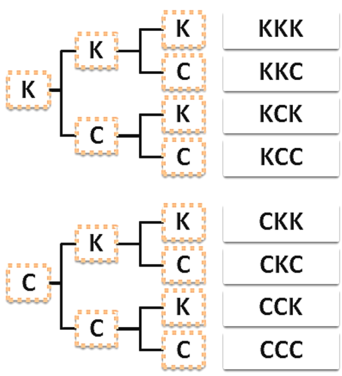
    b) No máximo duas caras?

    Solução:

    Vamos construir um diagrama de árvore onde na 1ł, 2ł e 3ł colunas, respectivamente, representam os possíveis resultados para o 1, 2 e 3 lançamentos.

K : cara

C : coroa



O espaço amostral é formado pelas oito sequências indicadas.

a) O evento E_1 que nos interessa é: $\{(K,C,C),(C,K,C),(C,C,K)\}$', assim:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8} = 37,5\%$$

b) As sequências que nos interessam são aquelas que apresentam nenhuma, uma o duas caras. Assim, o evento pedido é $E_2 = \{(C,C,C),(K,C,C),(C,K,C),(C,C,K),(K,K,C),(K,C,K),$ $(C,K,K)\}$.

Portanto, $P(E_2) = \frac{7}{8} = 87,5\%$

3. André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

   a) 25%.

   b) 27,5%.

   c) 30%.

   d) 33,3%.

   e) 50%.

   Solução:

   No lançamento de duas moedas comuns, temos o espaço amostral:

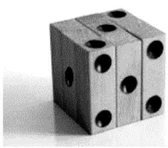
   $\Omega = \{(cara,cara);(cara,coroa);(coroa,coroa);(coroa,cara)\}$

   Portanto, a probabilidade de João vencer será $p = \frac{2}{4} = 50\%$.

4. A lei 3688 de 1941, ainda em vigor, veda "o jogo em que o ganho e a perda dependem exclusivamente da sorte". A exceção seria a loteria pública.

   Zero Hora - 21/04/2007.

   No entanto, são inúmeras as formas que o brasileiro encontra para fazer apostas. Uma delas é o jogo de dados. O dado clássico é o de seis faces gravado com pontos que representam números de um a seis.



Ao lançar dois dados clássicos, A e B, a probabilidade de que o número que aparece na face superior do dado A seja divisor do número que aparece na face superior do dado B é de

a) $\frac{1}{6}$.
b) $\frac{7}{9}$.
c) $\frac{7}{12}$.
d) $\frac{7}{18}$.
e) $\frac{1}{3}$.

Solução:

O espaço amostral do lançamento de dois dados clássicos é formado por 36 pares ordenados

$\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(6,6);(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\}$

O evento A, formado pelos de pares ordenados em que o número que aparece na face superior do dado A é divisor do número que aparece na face superior do dado B será:

$A = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,2);(2,4);(2,6);(3,3);(3,6);(4,4);(5,5);(6,6)\}$

Portanto, a probabilidade será $p = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

5. (UFG) A delegação esportiva de um certo país participou de uma festa e, involuntariamente, quatro jogadores do time de basquetebol, cinco do time de voleibol e nove do time de futebol ingeriram uma substância proibida pelo comitê antidoping. Um jogador de cada time será sorteado para passar por um exame desse comitê. Considerando-se que o time de basquetebol tem 10 jogadores, o de voleibol, 12 e o de futebol, 22 e ordenando-se os times pela ordem crescente da probabilidade de ser "pego"um jogador que tenha ingerido a substância proibida, tem-se

a) basquetebol, futebol, voleibol.
b) basquetebol, voleibol, futebol.
c) futebol, voleibol, basquetebol.
d) futebol, basquetebol, voleibol.

e) voleibol, futebol, basquetebol.

Solução:
$P(\text{basquetebol}) : p = \dfrac{4}{10} = 0,4$
$P(\text{voleibol}) : p = \dfrac{5}{12} \approx 0,417$
$P(\text{futebol}) : p = \dfrac{9}{22} \approx 0,41$
Portanto, colocando os valores acima em ordem crescente, temos:

$$P(\text{basquetebol}) < P(\text{futebol}) < P(\text{voleibol})$$

6. Em uma urna há 10 cartões, cada qual marcado com apenas um dos números: $2,5,6,7,9,13,14,19,21$ e 24. Para compor uma potência, devem ser sorteados sucessivamente e sem reposição dois cartões: no primeiro o número assinalado deverá corresponder à base da potência e no segundo, ao expoente. Assim, a probabilidade de que a potência obtida seja equivalente a um número par é de

   a) 45%

   b) 40%

   c) 35%

   d) 30%

   e) 25%

   Solução:
   Dos números $5,6,7,9,13,14,19,21$ e 24, existem apenas 4 números pares $2,6,14$ e 24 , em que a potência obtida seja equivalente a um mesmo par.
   Portanto a probabilidade será $p = \dfrac{4}{10} = 0,4$.

7. Suponha que, dos imigrantes que chegaram aos Estados Unidos, 120 mil fossem brasileiros. Um dos 15 milhões de imigrantes teve sorte grande naquele país: ficou rico. A probabilidade de que esse imigrante NÃO seja brasileiro é de:

   a) $0,80\%$

   b) $9,92\%$

   c) $80,00\%$

d) $99,20\%$

e) $97,20\%$

Solução:

A probabilidade de ser brasileiro é $p = \dfrac{120000}{15000000} = \dfrac{4}{500} = 0,8\%$.

Como queremos a probabilidade desse imigrante não ser brasileiro, teremos como resposta a probabilidade de $100\% - 0,8\% = 99,2\%$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Duas moedas são lançadas sobre uma mesa. Qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima:

   a) Uma cara e uma coroa? 50%

   b) Duas caras? 25%

   c) Pelo menos uma cara? 75%

2. Três moedas são lançadas sobre uma mesa. Qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima:

   a) Três caras? $12,5\%$

   b) Duas caras e uma coroa? $37,5\%$

   c) Pelo menos uma cara? $87,5\%$

   d) No máximo duas coroas? $87,5\%$

3. No lançamento de dois dados sobre um tabuleiro, qual é a probabilidade de obter nas faces voltadas para cima:

   a) A soma dos pontos igual a 9? $\dfrac{1}{9}$

   b) A soma dos pontos igual a 10? $\dfrac{1}{12}$

   c) A soma dos pontos igual a 9? $\dfrac{1}{6}$

   d) A soma dos pontos igual a 13? 0

   e) A soma dos pontos menor que 15? 1

4. Um dado é lançado duas vezes consecutivas sobre uma mesa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números dos pontos apresentados nas faces superiores seja múltiplo de 3? $\frac{5}{9}$

5. Em um país de 30 milhões de habitantes, 22 milhões têm menos de 25 anos de idade e 18 milhões têm mais de 22 anos. Escolhendo ao acaso um habitante desse país, qual é a probabilidade de ele ter mais de 22 anos e menos de 25 anos de idade? $\frac{1}{3}$

6. Em uma classe de 2 ano do ensino médio, precisamente 64% dos alunos leem jornal, 48% leem revista e 10% não leem jornal nem revista. Escolhendo um desses alunos ao acaso, qual é a probabilidade de que ele seja leitor de jornal e de revista? 22%

7. Na convenção de um partido político, devem ser escolhidos dois candidatos para formar a chapa que vai disputar as próximas eleições presidenciais. A escolha deve ser feita entre 3 homens e 2 mulheres, candidatos à presidência, e 2 homens e 4 mulheres, candidatos à vice-presidência. Admitindo que todos os candidatos tenham a mesma probabilidade de ser escolhidos, a probabilidade de que a chapa vencedora tenha um homem como candidato à presidência e uma mulher como candidata à vice-presidência é:

   a) 40%

   b) 36%

   c) 46%

   d) 28%

   e) 25%

8. (UFPA) Desejando doar uma jóia de família a um de seus netos, dona Rosa resolveu fazer um sorteio: deu a cada neto um número distinto e escreveu cada número em um pedaço de papel. Colocou-os em uma urna e retirou um deles ao acaso. Os cinco filhos de Dona Rosa são: Ana, que tem três filhos; Jorge, que tem quatro; Antônio, que tem cinco; Luísa, que tem seis e Maria, que tem dois filhos. A probabilidade de o neto sorteado ser filho de Jorge é:

   a) 10%

   b) 15%

   c) 20%

d) 25%

e) 30%

9. (OSEC-SP) Foram preparadas noventa empadinhas de camarão; sessenta delas deveriam ser bem mais apimentadas. Por pressa e confusão de ultima hora, foram todas colocadas ao acaso, numa mesma travessa, para serem servidas. A probabilidade de alguém retirar uma empadinha mais apimentada é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{60}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{1}{90}$

10. Em um jogo de par-ou-ímpar, cada um dos dois jogadores escolhe, ao acaso, um dos seis inteiros de 0 a 5. Verifica-se, então, se a soma dos números escolhidos é par ou ímpar. Observando o jogo, José concluiu que era mais provável que a soma fosse par do que ímpar, porque há onze valores possíveis para a soma, os inteiros de 0 a 10, e, entre eles, há seis números pares e apenas cinco números ímpares. Assinale, a respeito da conclusão de José e da justificativa por ele apresentada, a afirmativa correta.

a) As probabilidades são iguais; José errou quando considerou 0 como par.

b) As probabilidades são iguais; José errou quando considerou igualmente prováveis as várias somas possíveis.

c) A probabilidade de a soma ser par é menor que a de ser ímpar.

d) A probabilidade de a soma ser par é maior do que a de ser ímpar, mas não pelo motivo apresentado por José.

e) A conclusão de José e sua justificativa estão corretas.

11. (UEL) Devido à ameaça de uma epidemia de sarampo e rubéola, os 400 alunos de uma escola foram consultados sobre as vacinas que já haviam tomado. Do total, 240 haviam sido vacinados contra sarampo e 100 contra rubéola, sendo que 80 não haviam tomado

dessas vacinas. Tomando-se ao acaso um aluno dessa escola, a probabilidade de ele ter tomado as duas vacinas é:

a) 2%

b) 5%

c) 10%

d) 15%

e) 20%

12. (UEPA) Durante a romaria do Círio de Nossa Senhora de Nazaré, em Belém, foi feita uma pesquisa com 1500 romeiros sobre as promessas que os levaram a acompanhar a procissão na Corda. As promessas foram: recuperação da saúde; aprovação no vestibular e emprego. Dentre os pesquisados: 200 agradeciam pela recuperação da saúde, aprovação no vestibular e pelo emprego; 550 pela recuperação da saúde e aprovação no vestibular; 450 pela recuperação da saúde e pelo emprego; 400 pela aprovação no vestibular e pelo emprego; 200 só pela recuperação da saúde; 130 só pela aprovação no vestibular e 170 só pelo emprego. Nessas condições, a probabilidade de se escolher ao acaso uma das pessoas pesquisadas e esta estar agradecendo pela recuperação da saúde é:

a) $\frac{2}{15}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{11}{30}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{11}{15}$

13. (ENEM) Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) revelaram que no biênio 2004/2005, nas rodovias federais, os atropelamentos com morte ocuparam o segundo lugar no ranking de mortalidade por acidente. A cada 34 atropelamentos, ocorreram 10 mortes. Cerca de 4 mil atropelamentos/ano, um a cada duas horas, aproximadamente.

Disponível em: http://www.ipea.gov.br. Acesso em: 6 jan. 2009.

De acordo com os dados, se for escolhido aleatoriamente para investigação mais detalhada um dos atropelamentos ocorridos no biênio $2004/2005$, a probabilidade de ter sido um atropelamento sem morte é

a) $\frac{2}{17}$

b) $\frac{5}{17}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{5}{3}$

e) $\frac{12}{17}$

14. (ENEM) Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos $0, 1, 2$ e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número $12,50$ que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se $R\$1,00$ de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia $R\$2,00$ de desconto. Qual é a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?

a) $\frac{1}{24}$

b) $\frac{3}{24}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{2}$

15. (PUC) Os 36 cães existentes em um canil são apenas de três raças: poodle, dálmata e boxer. Sabe-se que o total de cães das raças poodle e dálmata excede o número de cães da raça boxer em 6 unidades, enquanto que o total de cães das raças dálmata e boxer é o dobro do número dos de raça poodle. Nessas condições, escolhendo-se, ao acaso, um cão desse canil, a probabilidade de ele ser da raça poodle é

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{5}{12}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{2}{3}$

16. (UFPA) Um tabuleiro quadrado tem nove casas. Uma peça sobre o tabuleiro pode mover-se para as casas lateral esquerda, lateral direita, lateral acima ou lateral abaixo, se não for obstruída em um ou dois destes movimentos estando sobre a borda do tabuleiro. Considere que a peça inicialmente está no centro do tabuleiro e é movida aleatoriamente na superfície deste. A probabilidade de que, após 10 movimentos, a peça esteja de volta ao centro é

    a) $\frac{2}{3}$
    b) $\frac{1}{2}$
    c) $\frac{1}{3}$
    d) $\frac{1}{4}$
    e) $\frac{1}{6}$

AS QUESTÕES DE PROBABILIDADE NO ENEM

01. (Enem 2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{8}$

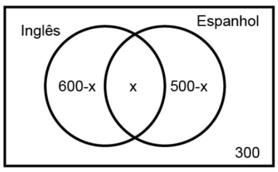
c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{5}{6}$

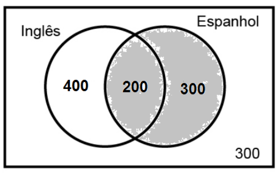
e) $\frac{5}{14}$

Solução:

Primeiramente devemos representar a situação no diagrama de Euler-Venn e calcular a quanti-dade de alunos que falar Inglês e Espanhol



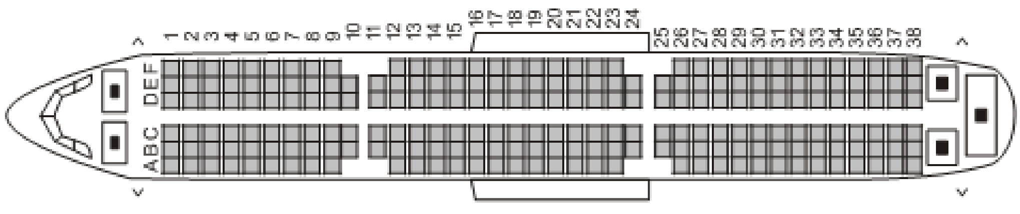
600-x+x+500-x+300=1200 assim x=200 Substituindo teremos:



A probabilidade de falar espanhol, sabendo-se que ele não fala inglês é igual a:

$$P = \frac{300}{300+300} = \frac{1}{2}$$

02.(Enem PPL 2013) Uma empresa aérea lança uma promoção de final de semana para um voo comercial. Por esse motivo, o cliente não pode fazer reservas e as poltronas serão sorteadas aleatoriamente. A figura mostra a posição dos assentos no avião:



Avião com 38 fileiras de poltronas.

Por ter pavor de sentar entre duas pessoas, um passageiro decide que só viajará se a chance de pegar uma dessas poltronas for inferior a 30%. Avaliando a figura, o passageiro desiste da viagem, porque a chance de ele ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é mais aproximada de

a) 31%

b) 33%

c) 35%

d) 68%

e) 69%

Solução:

Analisando a figura acima temos 9 fileiras com 6 lugares, 12 fileiras com 6 lugares e 13 fileiras com 6 lugares e mais 16 lugares, então o número total de assentos é igual a

$(9+12+13)\cdot 6+16=220$.

Analisando a figura novamente, temos: 9 fileiras com 2 lugares, 12 fileiras com 2 lugares e 13 fileiras com 2 lugares, ou seja: o número de assentos em que o passageiro se sente desconfortável é $(9+12+13)\cdot 2=68$.

Concluímos que a probabilidade do passageiro ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é aproximadamente igual a $\dfrac{68}{220}\cdot 100\% \cong 31\%$.

03.(Enem 2012) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente.

José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que ha 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Solução:

Os possíveis resultados que darão a vitória a José são $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)e(6,1)$.

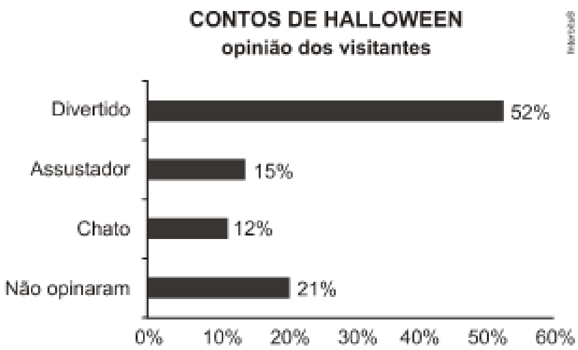
Os possíveis resultados que darão a vitória a Paulo: $(1.3),(2,2)e(3,1)$.

Os possíveis resultados que darão a vitória a Antônio: $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3)$ e$(6,2)$.

Portanto, José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

04.(Enem 2012) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween"?. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

a) $0,09$

b) $0,12$

c) $0,14$

d) $0,15$

e) $0,18$

Solução

Observe que o espaço amostral foi reduzido para as pessoas que opinaram, ou seja: $100\% - 21\% = 79\%$.

Portanto a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é igual a $p = \dfrac{12\%}{79\%} \cong 15\%$.

05.(Enem PPL 2012) Uma coleta de dados em mais de 5 mil sites da internet apresentou os conteúdos de interesse de cada faixa etária. Na tabela a seguir, estão os dados obtidos para a faixa etária de 0 a 17 anos.

Preferências	**Porcentagem**
Música	22,5
Blogs	15,0
Serviços Web*	10,2
Games	10,0
Horóscopo	9,0
Game on-line	7,4
Educação**	6,5
Teen	4,0
Compras	3,4
Outras	12,0

* Serviços web: aplicativos on-line, emoticons, mensagens para redes sodas, entre outros.

** Sites sobre vestibular, ENEM, páginas com material de pesquisa escolar.

Considere que esses dados refletem os interesses dos brasileiros desta faixa etária.

Disponível em: www.navegg.com. Acesso em: 12 nov. 2012 (adaptado).

Selecionando, ao acaso, uma pessoa desta faixa etária, a probabilidade de que ela não tenha preferência por horóscopo é

a) $0,09$

b) $0,10$

c) $0,11$

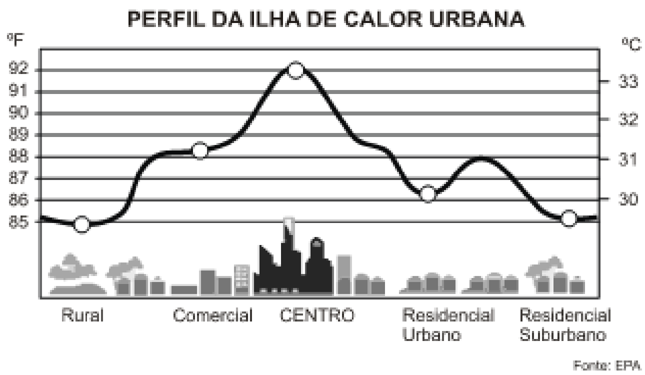
d) $0,79$

e) $0,91$

Solução:

Observe pela tabela que a probabilidade de uma pessoa ela não tenha preferência por horóscopo é $100\% - 9\% = 91\%$.

06.(Enem 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a $31C$. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{4}$

Solução:

O espaço amostral da escolha de Rafael é formado pelas 4 regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano, dessas somente três possuem as temperaturas inferiores a $31C$.

Logo, a probabilidade será: P = $\frac{3}{4}$

07.(Enem 2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suma (HIN1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emilio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Datas da Vacinação	**Público - alvo**	**Quantidade de pessoas vacinadas**
8 e 19 de março	Trabalhadores de saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

a) 8%

b) 9%

c) 11%

d) 12%

e) 22%

Solução:

Analisando a tabela acima, temos que a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

$$P = \frac{22}{42+22+56+30+50} = \frac{22}{100} = \frac{11}{100} = 11\%$$

08.(Enem 2011) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas:1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada. Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é

a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.

b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.

e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Solução:

Pelo enunciado temos os resultados possíveis para:

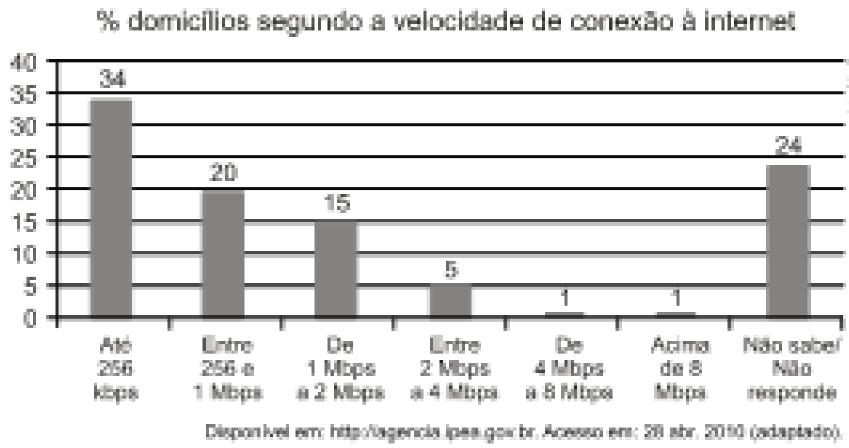
Arthur: $\{(1,11);(2,10);(3,9);(4,8);(5,7)\}$ (5 possibilidades);

Bernardo: $\{(2,15);(3,14);(4,13);(5,12);(6,11);(7,10);(8,9)\}$ (7 possibilidades);

Caio: $\{(7,15);(8,14);(9,13);(10,12)\}$ (4 possibilidades);

Logo, Bernardo apresenta mais chances de vencer.

09.(Enem 2011) O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

a) $0,45$

b) $0,42$

c) $0,30$

d) $0,22$

e) $0,15$

Solução:

Essa questão pode levar a vários questionamentos, vamos supor que as pessoas que não sabem e que não respondem não tenham banda larga acima de Mbps, temos de acordo com o gráfico: o número de residências com internet é igual a $34+20+15+5+1+1+24=100$ e o número de residências com velocidade igual, ou superior a 1 Mbps é igual a $15+5+1+1=22$.

$$P=\frac{22}{100}=22\%$$

10.(Enem 2^a aplicação 2010) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

Disponível em: http:www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

a) $63,31\%$

b) $60,18\%$

c) $56,52\%$

d) $49,96\%$

e) $43,27\%$

Solução:

Observe que o total de espécies é: 263 espécies de peixes $+122$ espécies de mamíferos $+93$ espécies de répteis $+1132$ espécies de borboletas $+656$ espécies de aves igual a: 2266 espécies A probabilidade pedida é dada por $\dfrac{1132}{2266} \cdot 100\% \cong 49,96\%$

11.(Enem 2^a aplicação 2010) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o rock e a MPB. O quadro a seguir registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1000 alunos de uma escola. Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos.

Preferências musical	**rock**	**samba**	**MPB**	**rock e samba**
número de alunos	200	180	200	70

Preferências musical	**rock e samba**	**samba e MPB**	**rock,samba e MPB**
Número de alunos	60	50	20

Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado, qual é a probabilidade de ele preferir somente MPB?

a) 2%

b) 5%

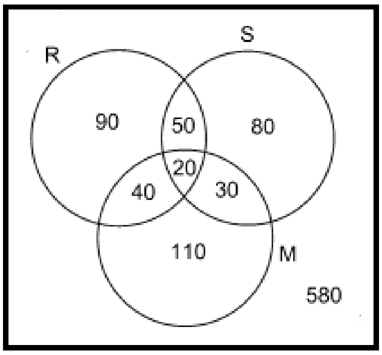
c) 6%

d) 11%

e) 20%

Solução:

Primeiramente representamos a situação de acordo com os dados da tabela:



A probabilidade de um estudante selecionado aleatoriamente preferir somente MPB é igual a

$$\frac{110}{1000} \cdot 100\% = 11\%.$$

12.(Enem 2010) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de $35,5$ e, hoje, é de $37,0$. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NUMERO DE FUNCIONÁRIOS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calcado maior que $36,0$, a probabilidade de ela calçar $38,0$ é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{5}{7}$

e) $\frac{5}{14}$

Solução:

De acordo como a tabela $3+10+1=14$, funcionárias calçam número acima de $36,0$ e somente 10 funcionarias calçam número $38,0$, então a probabilidade será:

$$P=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$$

13.(Enem 2^a aplicação 2010) Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição?

A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

a) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

b) O jogador I, porque acertou $\frac{4}{3}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

c) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{3}{2}$ dos chutes.

d) O jogador I, porque acertou $\frac{12}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

e) O jogador I, porque acertou $\frac{9}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{5}$ dos chutes.

Solução:

A probabilidade do jogador I converte chutes em gol é igual a $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$;

A probabilidade do jogador II converte chutes em gol é igual a $\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$

Observe que $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$,então para iniciar a partida devemos escolher o jogador I.

14.(Enem cancelado 2009 - adaptado) No quadro seguinte, são informados os turnos em que foram eleitos os prefeitos das capitais de todos os estados brasileiros em 2004.

	cidade	turno
1	Aracaju (SE)	1º
2	Belém (PA)	2º
3	Belo Horizonte (MG)	1º
4	Boa Vista (RR)	1º
5	Campo Grande (MS)	1º
6	Cuiabá (MT)	2º
7	Curitiba (PR)	2º
8	Florianópolis (SC)	2º
9	Fortaleza (CE)	2º
10	Goiânia (GO)	2º
11	João Pessoa (PB)	1º
12	Macapá (AP)	1º
13	Maceió (AL)	2º

	cidade	turno
14	Manaus (AM)	2º
15	Natal (RN)	2º
16	Palmas (TO)	1º
17	Porto Alegre (RS)	2º
18	Porto Velho (RO)	2º
19	Recife (PE)	1º
20	Rio Branco (AC)	1º
21	Rio de Janeiro (RJ)	1º
22	Salvador (BA)	2º
23	São Luís (MA)	1º
24	São Paulo (SP)	2º
25	Terezina (PI)	2º
26	Vitória (ES)	2º

Na região Norte, a probabilidade de se escolher uma cidade, ao acaso, em que o prefeito tenha sido escolhido no 2 turno foi, aproximadamente,

a) $42,86\%$

b) $44,44\%$

c) $50,00\%$

d) $57,14\%$

e) $57,69\%$

Solução: A probabilidade de escolher uma capital, ao acaso, em que o prefeito foi eleito no 2 turno

Observe as capitais da região norte:

Belém $\rightarrow$ 2 turno

Boa Vista $\rightarrow$ 1 turno

Macapá $\rightarrow$ 1 turno

Manaus $\rightarrow$ 2 turno

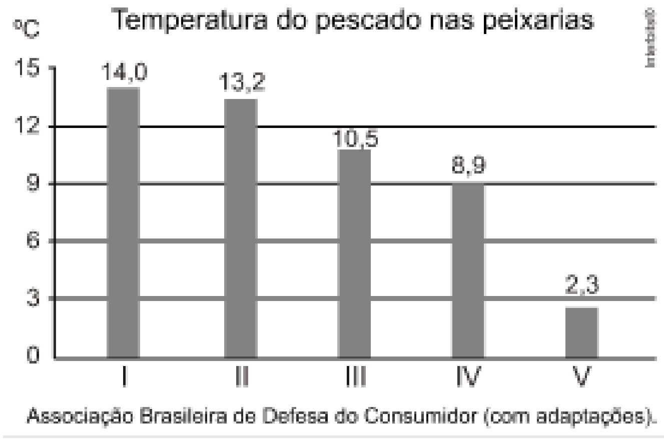
Porto velho $\rightarrow$ 2 turno

Rio Branco $\rightarrow$ 1 turno

Palmas $\rightarrow$ 1 turno

A probabilidade é igual a $\frac{3}{7} = 42,86\%$.

15.(Enem 2007)



Uma das principais causas da degradacao de peixes frescos e a contaminacao por bacterias. O grafico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal e que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre $2C$ e $4C$. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condicao ideal e igual a

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

Solucao:

Analisando o grafico temos que a unica peixaria que vende peixes frescos na temperatura entre $2C$ e $4C$, e a peixaria numero V.

Portanto, a probabilidade é $\frac{1}{5}$.

16.(Enem 2006) A tabela a seguir indica a posição relativa de quatro times de futebol na classificação geral de um torneio, em dois anos consecutivos. O símbolo ? significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, à frente do indicado na coluna. O símbolo · significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, à frente do indicado na coluna.

	A	B	C	D
A				*
B	•		•	• *
C	• *	*		*
D	•		•	

A probabilidade de que um desses quatro times, escolhido ao acaso, tenha obtido a mesma classificação no torneio, em 2004 e 2005, é igual a

a) $0,00$.

b) $0,25$.

c) $0,50$.

d) $0,75$.

e) $1,00$.

Solucao:

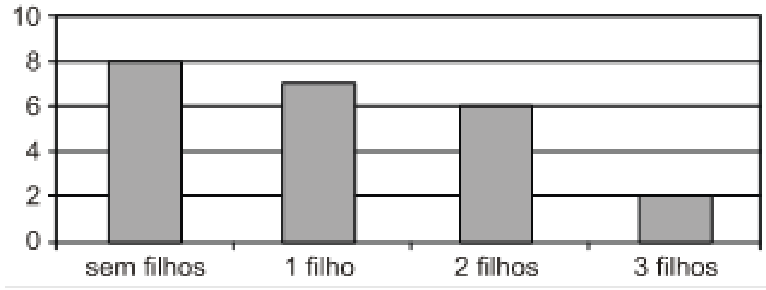
De acordo com as informacoes do enunciado, podemos construir a seguinte tabela:

Analisando a tabela e o enunciado da questao afirma que o simbolo $\cdot$ significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, a frente do indicado na coluna e o simbolo $*$ significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, a frente do indicado na coluna. Entao podemos escrever a seguinte tabela das posicoes de cada time no ano de 2004 e 2005

Posição	2004	2005
1	B	C
2	D	B
3	C	A
4	A	D

Note que nenhum dos times obteve a mesma classificação no torneio em 2004 e 2005, logo temos um evento impossível, então sua probabilidade é igual a zero.

36.(Enem 2005) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

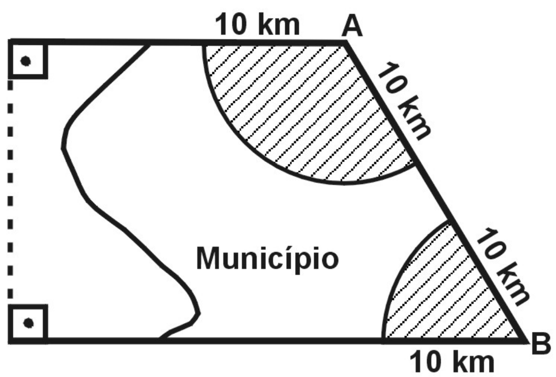
c) $\frac{7}{15}$

d) $\frac{7}{23}$

e) $\frac{7}{25}$

Solução: Observe pelo gráfico que o número total de filhos é igual a $7 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 25$. Como sete mães tiveram um único filho, temos que a probabilidade pedida é $\frac{7}{25}$.

17.(Enem 2001) Um município de $628km^2$ é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente,

a) 20%.

b) 25%.

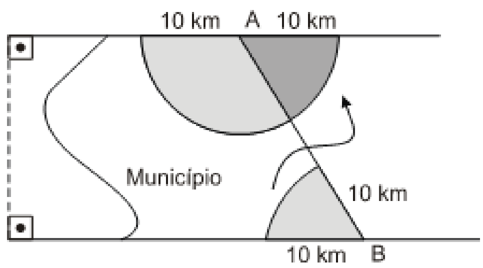
c) 30%.

d) 35%.

e) 40%.

Solução:

Observe a figura a seguir



Note que os dois setores circulares juntos representam um semicírculo de raio igual $10km$. Portanto, a probabilidade é igual a:

$$P = \frac{\frac{\pi \cdot 10^2}{2}}{628} = 0,25 = 25\%$$

18.(Enem 2001) Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, ANDABEM e BOMPASSEIO, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horários dos ônibus	
ANDABEM	BOMPASSO
...	...
6h 00mim	6h 10min
6h 30min	6h 40min
7h oomin	7h 10min
7h 30min	7h 40min

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho e nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

d) duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

e) três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

Solução:
Suponha que Carlos chegou depois das $7h$ ao terminal.
Se Carlos chega entre 7h e 7h10 ela tomará o ônibus BOMPASSEIO.
Se Carlos chega entre 7h10 e 7h30 ela tomará o ônibus ANDABEM.
Se Carlos chega entre 7h30 e 7h40 ela tomará o ônibus BOMPASSEIO.
Se Carlos chega entre 7h40 e 8h ela tomará o ônibus ANDABEM.

Observe que a cada hora, o tempo de espera para um ônibus da empresa ANDABEM é o dobro do tempo de espera para um ônibus da empresa BOMPASSEIO.
Supondo que a probabilidade é diretamente proporcional ao tempo, então a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

19.(Enem 1999) Uma estação distribuidora de energia elétrica foi atingida por um raio. Este fato provocou escuridão em uma extensa área. Segundo estatísticas, ocorre em média a cada 10 anos um fato desse tipo. Com base nessa informação, pode-se afirmar que

a) a estação está em funcionamento há no máximo 10 anos.

b) daqui a 10 anos deverá cair outro raio na mesma estação.

c) se a estação já existe há mais de 10 anos, brevemente deverá cair outro raio na mesma.

d) a probabilidade de ocorrência de um raio na estação independe do seu tempo de existência.

e) é impossível a estação existir há mais de 30 anos sem que um raio já a tenha atingido anteriormente.

Solução: Probabilidade não é algo exato, não significa que a cada dez anos cairá um raio, mas que existe chance de que isto ocorra, portanto a alternativa D é a correta.

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante três fichas voltadas para baixo, estando representadas em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas a seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de $R\$200,00$.

20.(Enem 1998) A probabilidade de o PARTICIPANTE não ganhar qualquer prêmio é igual a:

a) 0

b) $1/3$

c) $1/4$

d) $1/2$

e) $1/6$

Solução:
O espaço amostral é composto por:

$$\omega = \{\text{TVE, TEV, VET, VTE, ETV, EVT}\} \rightarrow \text{n}(\omega) = 6.$$

Seja A o evento nao ganhar qualquer premio: $A = \{VET, ETV\} \rightarrow n(A) = 2$.
Assim, $P = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

21.(Enem 1998) A probabilidade de o CONCORRENTE ganhar exatamente o valor de $R\$400,00$ é igual a:

a) 0

b) $1/3$

c) $1/2$

d) $2/3$

e) $1/6$

Solução:

Seja B o evento ganhar exatamente $R\$\ 400,00$. Para ganhar exatamente $R\$\ 400,00$, o concorrente deverá acertar duas e somente duas letras na posição correta; acontece que isso é impossível, pois, se existirem duas, fatalmente as três lá estarão.

Assim, a probabilidade pedida é a do evento impossível, ou seja, zero.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos dos fenômenos e processos realizados no dia a dia tem um grau de incerteza muito grande e muitos processos chamados determinísticos, assim o são, por considerarem que alguns fatores tem relevância tão pequena para o modelo que podem ser desprezados. O conhecimento de probabilidade, nos seus primórdios, tinha uma relação quase que exclusiva com jogos de azar, tanto que muitos materiais foram escritos com o intuito de prever resultados e mostrar qual seria a melhor estratégia para se conseguir êxito em tais atividades.

A medida que a humanidade foi evoluindo e as relações humanas se tornaram mais complexas, novas necessidades foram surgindo e a teoria das probabilidades começaram a ganhar mais espaço na vida do homem, como por exemplo, no cálculo de seguros de vida. Atualmente, essa teoria está presente em vários ramos da atividade humana como, por exemplo, na economia, na administração, na engenharia, nas telecomunicações, na medicina, enfim, são tantas as inserções que é imprescindível que um cidadão tenha conhecimento da mesma para poder entender uma série de acontecimentos, sejam eles naturais ou não, que tem enorme influência no seu dia a dia e, quando se pensa em atuação no meio em que vive, atuar de forma consciente e contrutiva.

Infelizmente, essa libertação através do conhecimento, e especificamente de probabilidade, não está acontecendo no âmbito escolar, pois o ensino médio, que deveria ter o papel de aprofundamento de discussões e que teria a função de preparar o aluno para se tornar um cidadão consciente e atuante na sociedade, não está conseguindo cumprir o seu papel, uma vez que os resultados obtidos a partir da aplicação dos questionários, refletem com clareza tal ineficiência. Vários são os fatores que podem estar contribuindo para isso, e um deles é que o ensino médio passou a ser apenas uma fase de preparação para o ingresso no ensino superior e, a maioria dos alunos se preocupam apenas em se preparar para uma prova, atualmete o ENEM, e perdem a essência de qual é o objetivo do ensino, que é o de libertar e de tornar a pessoa com olhar mais crítico e consciente de tudo que o cerca. O ingresso no ensino superior não deveria ser a função dessa etapa da vida do estudante e sim a consequência desta fase.

A partir da análise os livros didáticos utilizados, a meneira como estão organizados, fazem pouca relação com questões práticas diárias e priorizam a maneira tradicional de expor os tópicos, fazendo uma apresentação excessivamente em cima de jogos, como nos primórdios, e nos exercícios propostos pedem que o aluno faça exercícios de aplicação cotidiana sem o devido tratamento para isso.

O resultado desse tipo de ensino, refletem-se em situações que estão bem abaixo do que seria esperado para que os alunos pudessem fazer discussões mais profundas e críticas.

Desta forma, para que o ensino de probabilidade seja consistente, é necessário que o discente experimente, ou seja, verifique na prática o que é discutido na teoria, validando, assim, as discussões. Quando isso acontece e quando o processo é bem conduzido, acaba despertando no aluno a curiosidade em saber como essa relação funciona e cria no mesmo o, já mencionado, caráter investigativo. Tendo em vista essa idéia, são propostas no APÊNDICE desse trabalho, material que possa auxiliar o professor na execução da terefa de conduzir a experimentação e discutir com os alunos os resultados das mesmas junto com os referidos planos de aula. Espero, com isso, contribuir para que o ensino médio, volte a ter o caráter formativo de outrora, que contribua para o desenvolvimento do aluno e que também possibilite, como consequência, o ingresso desse aluno no ensino superior, realizando uma excelente prova do ENEM.

REFERÊNCIAS

KATZ,Vitor J. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. 2^a Ed, Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian. 2010.

BOYER, Carl B. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA/Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach, tradução ElzaF. Gomide - 2ª ed. - São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

PARRA, Cecília [et al]. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas; tradução Juan acuña Llorens. - Porto Alegre: Artmed, 1996.

LIMA, Felipe Mascagna Bittencout.O ensino de probabilidade com o uso do problema do jogo dos discos. 2013. 119 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2013.

MEYER, Paul L. Probabilidade: aplicações à estatística; tradução do professor Ruy de C. B. Lourenço Filho. Rio de janeiro, LTC, 1981.

DANTE, Roberto Luiz. MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES. vol.2, Editora Ática, 2012.

PAIVA, Manoel. MATEMÁTICA. ed. Ed. Moderna, 2012.

Diretrizes do CNE, Resolução nº 3. disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf.

Parametros Curriculares Nacionais, Ensino Médio. disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf.

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: http:www.professores.uff.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf).

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Prezado (a) aluno (a),

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem em Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1.Idade	2.Sexo ◯ Fem. ◯ Masc..	3. Escolaridade

4. A sua escola é

( ) Pública Municipal ( ) Pública Estadual ( ) Pública Federal ( ) Particular

5. Qual é a escolaridade de seu pai? (até que ano ou serie ele estudou?)

( ) Não estudou

( ) Ensino fundamental incompleto

( ) Ensino fundamental completo

( ) Ensino médio incompleto

( ) Ensino médio completo

( ) Ensino superior incompleto

( ) Ensino superior completo

6. Qual é a escolaridade de sua mãe? (até que ano ou serie ela estudou?)

( ) Não estudou
( ) Ensino fundamental incompleto
( ) Ensino fundamental completo
( ) Ensino médio incompleto
( ) Ensino médio completo
( ) Ensino superior incompleto
( ) Ensino superior completo

7. Qual a profissão ou em que trabalha o seu pai?

8. Qual a profissão ou em que trabalha a sua mãe?

9. Você gosta de matemática?

( ) Nenhum pouco ( ) pouco ( ) Razoável ( ) Muito

10. Você costuma estudar matemática fora da escola?

( ) Nunca ( ) só no período de prova ( ) só no fim de semana ( ) Todos os dias
( ) Só na véspera de prova

11. Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?

( ) Ninguém ( ) Professor Particular ( ) Pai ( ) Mãe
( ) Irmão (ã) ( ) Amigo(a) ( ) Tio(a) ( ) Namorado(a)
( ) Outro. Quem?

12. Na maioria das aulas de matemática de sua escola, os assuntos são ministrados

( ) Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios
( ) Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto
( ) Criando um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo
( ) Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos

13. Para você entender melhor o assunto ensinado, seu professor(a) de matemática costuma:

( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos
( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto
( ) Mandar resolver os exercícios do livro didático
( ) Propõe questões de fixação
( ) Mandar que você procure questões sobre o assunto para resolver

14. Como você se sente em relação ao assunto Probabilidade?

( ) Nunca estudei ( ) Estudei e não lembro nada ( ) Estudei e lembro pouco
( ) Estudei e lembro de quase tudo ( ) Estudei e lembro de tudo

15. Preencha o quadro abaixo,e marque o item que representa o que você achou de cada tópico.

Assunto	**O que você achou**				
	Muito Fácil	**Fácil**	**Regular**	**Dificil**	**Muito Dificil**
Espaço amostral e evento					
Definição de probabilidade					
Probabilidade de um evento certo					
Probabilidade de um evento impossível					
Probabilidade de evento complementar					
Probabilidade da união de eventos.					
Probabilidade condicional					
Probabilidade de eventos independentes					

QUAIS CONHECIMENTOS ESPERAMOS QUE OS ALUNOS NOS MOSTRASSEM:

16. Resolva os problemas a seguir da forma que achar conveniente:

16.1 No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento "sair um número primo".

Definição de espaço amostral

Definição de evento (definição de número primo)

16.2 Numa urna existem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Retirando-se 1 bola ao acaso, qual a probabilidade de que seu número seja múltiplo de 5?

Definição de evento (múltiplo de 5)

Definição de probabilidade

16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número

a) menor do que 21? Probabilidade de evento certo

b) maior do que 20? Probabilidade de evento impossível

16.4. Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de 1/5. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

Probabilidade de evento complementar

16.5 Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

Definição de evento

Probabilidade da união de eventos

16.6. Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

Definição de evento

Definição de espaço amostral

Probabilidade condicional

16.7. De um baralho de 52 cartas extraem-se duas cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade se obter um ás e um valete nessa ordem?

Definição de evento

Definição de espaço amostral

Probabilidade de eventos independentes

Probabilidade da união de eventos

16.8 Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma dos pontos nos dois dados foi 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles.

Definição de evento

Definição de espaço amostral

Definição de probabilidade

16.9. Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente. Definição de espaço amostral

16.10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podemos formar números de 2 dígitos com repetição. Qual a probabilidade de, sorteando um desses números, que ele seja par?

Definição de evento

Definição de espaço amostral

Definição de Probabilidade

16.11. Lançando dois dados qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

Definição de evento

Definição de espaço amostral

Probabilidade de eventos independentes

Probabilidade da união de eventos

16.12. Um árbitro de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é amarelo de um lado e vermelho do outro. Num determinado lance, o árbitro retira do bolso, ao acaso, um cartão e mostra ao jogador. Qual é a probabilidade de a face que o árbitro vê ser vermelha e de que a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela?

Definição de evento

Definição de espaço amostral

Probabilidade condicional

16.13. Num único lance de um par de dados honestos, qual é a probabilidade de saírem as somas "múltipla de 4" ou "primo"?

Definição de evento

Definição de espaço amostral

Probabilidade da união de eventos