



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MARCOS OLIVEIRA DE OLIVEIRA

ANÁLISE DO ENSINO DE PROBABILIDADE

BELÉM – PARÁ

2015

MARCOS OLIVEIRA DE OLIVEIRA

ANÁLISE DO ENSINO DE PROBABILIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Irene Castro Pereira..

BELÉM – PARÁ

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Oliveira, Marcos 1978 -
Análise do Ensino de Probabilidade / Marcos Oliveira
- 2015

Orientadora: Irene Pereira
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do
Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa
de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional),
Belém, 2015.

1. Probabilidades-Estudo e ensino.
2. Matemática-Estudo e ensino.
3. Probabilidades-Estudo e ensino-Metodologia.

I. Título

CDD 22 ed. 519.207

ANÁLISE DO ENSINO DE PROBABILIDADE

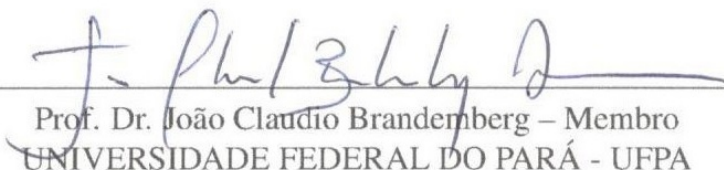
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 08 / 05 / 2015

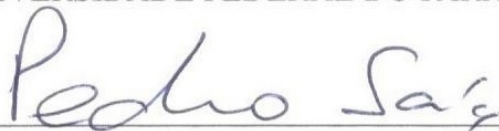
Banca Examinadora



Prof. Dra. Irene Castro Pereira. – Orientadora
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA



Prof. Dr. João Cláudio Brandenberg – Membro
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA



Prof. Dr. Pedro Franco de Sá – Membro
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ - UEPA

As minhas filhas Sara Murakami e
Geovanna Murakami.

AGRADECIMENTOS

À Deus, acima de tudo, que no decorrer desses dois anos me deu saúde, habilidade e competência para a realização desse mestrado profissional e na realização desse trabalho de conclusão do curso.

Agradeço a minha família que sempre me incentivou a nunca desistir do curso devido a dificuldades.

Agradeço a professora Dr.^a Irene Castro Pereira que durante a realização deste trabalho sempre esteve disposta a auxiliar e esclarecer vários pontos de dúvidas desse trabalho.

Agradeço aos Professores Dr. Pedro Franco de Sá e Dr. João Claudio Brandemberg Quaresma, pelas sugestões e por aceitarem a participar da banca examinadora.

Agradeço aos professores com os quais cursei disciplinas no mestrado profissional de matemática, aos Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias, Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo, Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, Prof.^a Dr.^a Rúbia Gonçalves Nascimento e a Prof.^a Dr.^a Irene Castro Pereira, ao Departamento da Pós-graduação de Matemática e Estatística-PPGEM e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por oportunizar o PROFMAT.

Aos demais professores da UFPA.

A todos os funcionários da UFPA.

A todos os colegas de mestrado, em especial a Bosco Silveira Brito, Fábio Costa de Oliveira Neves e Teresa Damin.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas, em particular as minhas lindas e maravilhosas filhas:

Geovanna Murakami Moreira de Oliveira;

Sara Murakami Moreira de Oliveira.

A todos, o meu muito obrigado!

“Como é que a matemática, sendo afinal produto da mente humana independente da experiência, se adapta tão extraordinariamente aos objetos da realidade?”.

Aristóteles

RESUMO

Durante vários anos de experiência lecionando no ensino médio, verificamos que o aprendizado do ensino de probabilidade não está alcançando seu objetivo, neste trabalho tentamos observar os motivos que levam a essas dificuldades de aprendizagens.

Nesse trabalho iremos abordar dois livros didáticos que são utilizados em diversas escolas públicas, analisaremos vários questionários que foram aplicados a 80 alunos do ensino médio, dessa forma neste trabalho iremos observar os resultados dos questionários, em relação aos tópicos de Probabilidades, e no final do trabalho fornecemos uma proposta de material para utilização do professor, em relação aos tópicos de probabilidade da Reunião, Probabilidade Condicionada e Probabilidade do eventos independentes com seus respectivos planos de aulas.

Palavras-chave: Probabilidades-Estudo e ensino, Matemática-Estudo e ensino, Probabilidades-Estudo e ensino-Metodologia.

ABSTRACT

During several years of high school teaching experience , we find that learning the probability of education is not reaching your goal, this work try to observe the reasons that lead to the difficulties of learning. In this paper we will address two textbooks that are used in various public schools , we will analyze several questionnaires that were applied to 80 high school students , thus this work will see the results of the questionnaires in relation to topics of probabilities, and at the end of work provide a proposed material for use of the teacher in relation to topics probability of Reunion Guests probability and Probability of independent events with their respective lesson plans

Key-words: Probability-Study and teaching, Mathematics-Study and teaching, Probability-Study and teaching-methodology.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparativo entre escolaridade do pai e da mãe dos alunos	10
Tabela 2 – Distribuição de respostas à pergunta "você gosta de matemática?"	11
Tabela 3 – Respostas escolhidas pelos alunos na questão 11 do questionário do apêndice A	12
Tabela 4 – Respostas escolhidas pelos alunos na questão 14 do questionário do apêndice A	13
Tabela 5 – Respostas dos alunos a questão 15	14

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Número de alunos por idade que participaram da pesquisa	9
Figura 2 – Número de alunos por gênero que participaram da pesquisa	9
Figura 3 – Distribuição das respostas dos alunos a questão 10.	11
Figura 4 – Exemplo de resposta ao problema 16.3 com item a correto mas item b errado.	15
Figura 5 – Exemplo de resposta ao problema 16.3 com item a incorreto e item b correto.	16
Figura 6 – Exemplo de resposta incoerente com o solicitado no problema 16.3.	16
Figura 7 – Erro de interpretação no problema 16.7	19
Figura 8 – Exemplo de resposta dada no problema 16.7	19
Figura 9 – Exemplo de resposta dada ao problema 16.11	22
Figura 10 – Exemplo de resposta dada por um aluno as questões 16.12 e 16.13	23
Figura 11 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, contra capa com currículo resumido das autoras.	27
Figura 12 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, mostrando a introdução do capítulo probabilidade.	28
Figura 13 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, mostrando como são desenvolvidas as definições dos tópicos de probabilidade.	29
Figura 14 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, mostrando exemplo de exercício sugerido.	30
Figura 15 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, mostrando um exemplo de interdisciplinaridade no final do capítulo.	31

SUMÁRIO

	Lista de tabelas	9
	Lista de ilustrações	10
1	INTRODUÇÃO	1
2	NOTAS HISTÓRICAS DE PROBABILIDADE	2
2.1	INÍCIO	2
3	ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS	8
3.1	PERFIL DOS ALUNOS	8
3.2	RESPOSTAS DOS ALUNOS ÀS QUESTÕES DO QUESTIONÁRIOS	14
4	ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS	25
5	ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS	26
5.1	ANÁLISE DO LIVRO MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO DE KÁTIA SMOLE E MARIA DINIZ	26
5.2	CONSIDERAÇÕES	31
6	MATERIAL DE APOIO AO PROFESSOR	33
6.1	PLANO DE ENSINO 1: PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVEN- TOS	34
6.2	PLANO DE ENSINO 2: PROBABILIDADE CONDICIONADA	44
6.3	PLANO DE ENSINO 3: PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPEN- DENTES.	61
6.4	PLANO DE ENSINO 4: QUESTÕES DE PROBABILIDADE NO ENEM.	79
6.5	CONSIDERAÇÕES	94
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICES	96
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO EM ALUNOS CON- CLUINTES DO ENSINO MÉDIO.	97

1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é tentar compreender a relação aluno versus aprendizado de probabilidade, iremos analisar os fatores que podem levar a grandes dificuldades dos alunos na aprendizagem de probabilidade no ensino médio, queremos observar, onde se encontra o problema do ensino ou da aprendizagem dos nossos alunos, como por exemplo: o modo que os temas são apresentados no ensino de probabilidade ou a sequência como os tópicos são abordados nos livros didáticos, são fatores que podem dificultar o ensino.

Este estudo está dividido em 4 capítulos e 1 apêndice.

No capítulo 1, é realizado um apanhado histórico desde os primórdios da teoria das probabilidades elementares que era ligada aos jogos de dados, passando pelo século XVI, onde a idéia de probabilidade começou a ser compreendida.

No capítulo 2, é feita uma análise de dois livros didáticos, o primeiro livro analisado foi escrito pelas professoras, Kátia Smole e Maria Diniz, doutoras em educação e matemática, respectivamente, pela USP, sob o título MATEMÁTICA: Ensino médio, vol.2, da editora Saraiva.

Para a investigação sobre os conhecimentos e habilidades já concebidas pelos alunos, no capítulo 3, iremos abordar a discussão em relação ao questionário composto por 16 (dezesseis) itens sendo o último subdividido em 13 (treze) questões, além disso foram observadas informações referentes a idade, gênero, ano ou série, se a escola em que estuda é da rede pública ou privada, escolaridade do pai e da mãe, profissão do pai e da mãe e se o aluno gosta de matemática. Este questionário foi aplicado em 80 alunos concluintes do ensino médio.

No capítulo 4, deixamos um sugestão de material para nós professores utilizamos em sala de aula, onde o conhecimento é construído junto com o aluno passo a passo até chegarmos as definições, dessa maneira nosso objetivo é melhorar o aprendizado do aluno.

No final apresentamos o apêndice A: questionário aplicado aos alunos.

2 NOTAS HISTÓRICAS DE PROBABILIDADE

2.1 INÍCIO

Segundo Katz(2010), os primórdios da teoria das probabilidades são proferidas em algumas idéias probabilísticas elementares ligadas aos jogos de dados, onde a preocupação, isso registrado em vários documentos, era o de calcular o número de formas diferentes em que dois ou três dados podem cair, e em alguns documentos, a resposta é 21 formas para dois dados e 56 formas para três dados. Uma análise rápida desses resultados, nos leva a concluir que os resultados estão corretos se levarmos em conta os diferentes conjuntos de pontos, sem considerar a ordem na qual acontecem.

Contar as formas como os dados podem cair veio, provavelmente, da utilização mais primordial dos dados que era a adivinhação. O primeiro comentário conhecido de que as 56 formas de um dado cair não eram equiprováveis aparece em um poema em latim de um anônimo, De Vetula¹, escritos alguns datados entre 1200 e 1400 que tem o seguinte conteúdo: *”Se os três dados são iguais, há apenas uma forma para cada número; se dois são iguais e um diferente, há três formas; e se todos são diferentes há seis formas”*. Analisando a regra afirmada, é possível concluir que o total de formas para três dados é 216.

Por volta do século XVI, a idéia de eventos equiprováveis começa a ser compreendida, tornando assim possível fazer cálculos reais de probabilidade. A primeira tentativa sistemática de fazer esses cálculos está no livro escrito por Cardano², no ano de 1526, intitulado *Liber de Ludo Aleae*(Livro sobre jogos de azar). Para além de contar o número de formas como dois ou três dados podem cair, ele demonstrava um bom entendimento das noções básicas da probabilidade.

Cardano também estava consciente da regra da multiplicação das probabilidades para eventos independentes e no seu livro, registrou a sua confusão inicial quanto ao que devia multiplicar, se era as possibilidades de ocorrência dos eventos ou se eram as chances de ocorrência. Após resolver a confusão, Cardano generalizou seu pensamento escrevendo que para n tentativas repetidas com k resultados possíveis e m sucessos, as possibilidades corretas a

¹ Um poema que contém cálculos de probabilidade sobre o arremesso de três dados. Foi escrito em meados do século XIII

² Girolamo Cardano, nasceu em Pavia, na Itália, em 1501 e faleceu em Roma em 1576, aos 74 anos. Escreveu mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, filosofia, religião e música

favor são m^n para $k^n - m^n$.

Cardano também discutiu o problema que De Merè³ tinha colocado a Pascal⁴ o problema de determinar quantos lançamentos devem ser permitidos para fornecer possibilidades iguais de obter dois seis em um par de dados. Esse problema foi popular durante anos, Cardano argumentou que, “uma vez que há uma possibilidade em 36 de se obter dois seis em um par dados, em média, um tal resultado deveria ocorrer a cada 36 lançamentos. Desta forma, as possibilidades de que um duplo seis ocorra em metade dos lançamentos, ou seja, 18, são iguais”. O raciocínio de Cardano implica que em seis lançamentos de um dados um dois, por exemplo, é certo ou em 36 lançamentos de dois dados um duplo seis é certo. É claro que nesse caso, o que podemos medir é a chance de ocorrência de um evento e não a garantia de que, na realização da experimentação, o evento irá ocorrer, mas Cardano não se apercebeu do erro.

Outro problema colocado por Merè a Pascal, foi o problema sobre a divisão de paradas, esse também havia sido discutido na Itália, em particular, na Summa de Luca Pacioli. A versão de Pacioli do problema tem dois jogadores que jogam um jogo justo, que devia continuar até um dos jogadores ganhar 6 partidas, porém, o jogo é interrompido quando um jogador ganhou cinco rodadas e o segundo jogador ganhou três. A resposta de Pacioli para a divisão dessas paradas era de que as mesmas fossem divididas na razão de 5 para 3.

Tartaglia⁵ também teve participação nesse período, realizando alguns cálculos de probabilidade e combinatória em seu trabalho *Generale Trattato*, publicado em 1556. Nesse trabalho, Tartaglia notou que a resposta de Pacioli para o problema devia estar errada, pois esse raciocínio implicava que se o primeiro jogador vencesse uma partida e outro nenhuma, quando o jogo fosse suspenso, o primeiro ficaria com todas as paradas, acarretando então em um resultado injusto.

Apesar de todas as discussões, a aplicação sistemática da análise matemática para solução de problemas de probabilidade, teve início somente em 1654, com os resultados obti-

³ Antoine Gombaud, denominado Chevalier de Méré (Condado de Poitou, 1607 - 1684), foi um nobre e jogador francês. Seu nome é relacionado ao cálculo matemático de jogos de azar. Em 1654 buscou auxílio de Blaise Pascal, porque já não tinha mais sucesso com seus calculados jogos. Com a ajuda de Pierre de Fermat as chances de ganho de dois jogos de dados foram determinadas exatamente.

⁴ Blaise Pascal, nasceu em Clermont-Ferrand em 19 de Junho de 1623 e faleceu em Paris em 19 de Agosto de 1662. Deu várias contribuições a várias áreas do conhecimento humano, foi físico, matemático, filósofo moralista e teólogo francês.

⁵ Niccolò Fontana mais conhecido com Tartaglia, nasceu em Bréscia, em 1500 e morreu em Veneza, em 13 de dezembro de 1557. Foi um matemático italiano, cujo nome está ligado ao triângulo de Tartaglia e à solução da equação do terceiro grau.

dos por Blaise Pascal e Pierre de Fermat⁶ em resposta ao problema das divisões das paradas. Essa solução foi descrita nas cartas trocadas entre Pascal e Fermat e também colocada, anos mais tarde, na obra de Pascal intitulada *Traité du triangle arithmétique* (Tratado sobre o triângulo Aritmético). Pascal se baseou em dois princípios básicos para aplicar a divisão. Primeiro, se a posição de um determinado jogador é tal que uma certa soma lhe pertença, quer ganhe ou perca, ele deve receber essa soma, mesmo que o jogo seja interrompido. Segundo, se a posição de dois jogadores é tal que se um vencer, uma determinada soma lhe pertence e se perder, pertence ao outro e se os dois jogadores tem possibilidades igualmente boas de vencer, então devem dividir igualmente o prêmio se não podem jogar.

Tomando como base a argumentação acima, conclui-se que a divisão mais justa não pode levar em consideração o número de rodadas que cada jogador venceu, mas sim a possibilidade que os mesmos tem de vencer o jogo, portanto, se acertam que vence quem ganha dois jogos e a pontuação estiver 1 a 0, ou se acertam que vence quem ganha 3 jogos e a pontuação está 2 a 1 ou se acertam que quem vence 12 jogos e a pontuação está 11 a 10, o resultado da divisão do prêmio no momento da interrupção deve ser o mesmo.

Pascal ao solucionar o problema a resolveu utilizando o seu triângulo de números, conhecido como triângulo de Pascal e Fermat a resolveu de forma semelhante sem o uso do triângulo.

Segundo LIMA(2013), para resolver o problema das divisões de paradas, Fermat considerou, primeiramente, um caso particular, em que um jogador A precisava de dois pontos para ganhar o jogo e o jogador B precisava de 3 pontos para ganhar o jogo. Fermat percebeu que mais $(2 + 3) - 1 = 4$ partidas seriam suficientes para terminar o jogo. Chamando de **a** uma partida vencida por A e de **b** uma partida vencida por B, anotou $2^4 = 16$ possíveis sequências de vitórias de partidas.

aaaa	baaa	baab	babb
aaab	aabb	baba	bbab
aaba	abab	baaa	bbba
abaa	abba	abbb	bbbb

Como o jogador A precisava de duas vitórias para vencer o jogo, então todas as sequências acima em que aparecem, pelo menos, dois a, simbolizam vitória de A e no caso contrário, vitória de B. Das sequências acima, existem 11 em que **a** aparece duas ou mais vezes

⁶ Nasceu em Beaumont-de-Lomagne, na primeira década do século XVII e morreu em Castres, em 12 de Janeiro de 1665, foi um matemático e cientista francês.

e 5 em que isso não acontece. Dessa forma, Ferma concluiu que a divisão das paradas deveria ser feita na razão de 11:5 já que a chance do jogador A vencer é 11 em 16 e a do jogador B vencer é 5 em 16. Generalizando a idéia de Fermat, para o caso em que A precisasse de m pontos para vencer o jogo e B precisasse de n pontos para vencer, teríamos então $2^{(m+n)-1}$ sequências possíveis e contaríamos quantas vezes apareceriam m ou mais letras a e em quantos deles apareceriam n ou mais letras b , se chamarmos de α e β essas quantidades, respectivamente, então as apostas deveriam ser divididas na razão $\alpha : \beta$.

Pascal, como foi exposto anteriormente, resolveu o problema utilizando o *triângulo de Pascal*, na qual a linha n e a coluna r fornecem a combinação de n objetos tomados r a r que representamos por $C_{n,r}$. Ele também constatou, assim como Fermat, que mais 4 jogos seriam suficientes para determinar um vencedor e raciocinou que $C_{n,r}$ representaria a quantidade de maneiras que r letras a poderiam ocupar as n posições das sequencias de vitórias. Assim concluiu que existem $C_{4,4} + C_{4,3} + C_{4,2} = 1 + 4 + 6 = 11$ formas de A vencer e $C_{4,3} + C_{4,4} = 4 + 1 = 5$ maneiras do jogador B vencer. Dessa forma, concluiu Pascal, as apostas deveriam ser repartidas na razão de 11:5, a mesma solução encontrada por Fermat. Generalizando o raciocínio, se A precisasse de m pontos e B precisasse de n pontos, deveríamos tomar a $(m + n) - 1$ ésima linha, calcular a soma α das m ou mais vezes em que aparecem a e a soma β das n ou mais vezes em que aparecem b e fazer a razão $\alpha : \beta$.

Para Katz(2010), a noção de calcular o valor de uma ação particular tornou-se a base para o primeiro tratado sistemático sobre probabilidades, escrito em 1656, por Christian Huygens⁷, na época, um aluno de van Schooten⁸. Ele se interessou pela questão das probabilidades durante uma visita a Paris, em 1655 e escreveu um breve livro sobre o tema, intitulado *De ratiociniis in Aleae Ludo*(Sobre os Cálculos em Jogos de Azar), que apareceu impresso, somente, em 1657, que serviu como livro de introdução à Teoria das Probabilidades até o século XVIII.

A obra de Huygens continha apenas 14 proposições e concluía com cinco exercícios para o leitor. As proposições incluíam algum tratamento dos dois problemas de De Merè, mas Huygens também forneceu discussões acerca do raciocínio por trás das soluções, em particular, como calcular em um jogo de azar, isso fica evidenciado no texto escrito por ele: “Embora

⁷ Christiaan Huygens, nascido em Haia em 14 de Abril de 1629 e falecido em Haia em 8 de julho de 1695, matemático, físico e astrônomo holandês, foi uma das figuras mais importantes da Revolução Científica. Foi na Física que o seu trabalho mais se destacou, tanto na Mecânica como na óptica.

⁸ Franciscus van Schooten, nasceu em Leiden, 1615 e faleceu em Leiden, 29 de maio de 1660. Foi um matemático holandês e é conhecido por popularizar a geometria analítica de René Descartes.

em um jogo puro de sorte, os resultados sejam incertos, a hipótese que um jogador tem de ganhar ou perder depende de um determinado valor”. Esse “valor” ao qual se refere Huygens é semelhante a noção dada por Pascal na sua aposta mas, nos casos de jogos de azar, Huygens podia calcular explicitamente. Hoje, esse “valor” de uma hipótese é o chamado valor esperado, ou seja, a quantidade média que uma pessoa ganharia caso jogasse o jogo muitas vezes.

O livro de Huygens possuía a melhor exposição sobre probabilidade até o aparecimento do livro *Ars Conjectandi*, de Jacob Bernoulli, publicado em 1713. Esse livro continha uma reimpressão do livro de Huygens, complementada com vários comentários e técnicas de análise combinatória. Para Bernoulli, parecia óbvio que quanto maior fosse o número de observação de uma dada situação, mais precisa seria a previsão de ocorrências futuras, a prova científica dessa idéia acabou se evidenciando na chamada Lei dos Grandes números, que estava contida na quarta e última parte do *Ars Conjectandi*. Essas idéias marcaram o início de uma nova era na Teoria das Probabilidades.

Neste período, muitos outros matemáticos se destacaram, como por exemplo, Euler. O interesse de Euler⁹ pelo estudo das Probabilidades, impulsionado por Daniel (1700-1782) e Nicolaus Bernoulli (1687 - 1759), fez com que o mesmo escrevesse sobre expectativas de vida, o valor de uma anuidade, loterias, entre outros aspectos da vida em sociedade e como seria previsível, contribuiu, também, com algumas notações, uma vez que, muitas das notações utilizadas até hoje, em várias áreas da matemática, são atribuídas a ele.

Outro nome, que é importante destacar desse período, é o de Pierre Simon Laplace que embora conduzisse bastante pesquisa sobre física, tinha como outro tema principal dos esforços de sua vida a teoria das probabilidades. Em seu *Essai philosophique sur les probabilités*, publicado em 1814, fez uma exposição introdutória para o leitor comum, escrevendo que “*no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números*”, nessa obra, Laplace projetou um sistema matemático de raciocínio indutivo baseado em probabilidades, que hoje coincidem com as ideias Bayesianas. Mas é em sua obra *Théorie analytique des probabilités* de 1812 que ele mostra ser um mestre de análise que conhece seu cálculo avançado. Essa obra está cheia de integrais envolvendo funções beta e gama e além disso, Laplace foi

⁹ Leonhard Paul Euler nasceu na Basileia em 15 de abril de 1707 e faleceu em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783. É considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em campos variados em cálculo e grafo e também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática.

um dos primeiros a mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, a área sob a curva de probabilidade, é $\sqrt{\pi}$. Os fundamentos da Teoria das Probabilidades foram colocados por Laplace de tal maneira que se mantiveram inalterados até o início do século XX.

Segundo Boyer (1996), a teoria dos conjuntos e a teoria da medida, durante o século XX, invadiram partes cada vez maiores da matemática e poucos ramos foram tão influenciados por essa tendência quanto a teoria das probabilidades. O primeiro ano do novo século foram esperançosos para as probabilidades, tanto na física quanto na genética, quando em 1901, Gibbs publicou seus *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (Princípios Elementares de Mecânica Estatística) e nesse mesmo ano foi fundada a *Biometrika* por Karl Pearson (1857-1936). Só para se ter uma idéia de quanto o interesse pela probabilidade crescia, um dos títulos de Poincaré tinha sido *Professor do Cálculo de Probabilidades*.

Outro País que deu enormes contribuições a esse desenvolvimento foi a Rússia. O estudo de cadeias ligadas a eventos foi iniciado por Andrey Andreyevitch Markov (1856-1922), ou Markoff, suas idéias passaram a ser utilizada, de forma substancial, em fenômenos físicos e químicos e em muitos outros ramos do conhecimento. As aplicações das idéias probabilísticas se diversificaram muito, assim como muito conhecimento está agregado ao conhecimento probabilístico de tal maneira que é impossível, hoje, uma exposição rigorosa de teoria de probabilidades sem usar noções de funções mensuráveis e teorias modernas de integração, o modelo atômico atual, por exemplo, é um modelo matemático-probabilístico chamado de Modelo atômico de Schrodinger, em homenagem ao seu criador Erwin Schrodinger (1887-1961) . Mas voltando a 1931, Andrei Nicolaevich Kolmogoroff (1903-1987) fez importantes avanços nos chamados processos de Markov e satisfaz uma parte do projeto de Hilbert, que pedia fundamentos axiomáticos para as probabilidades através do uso da medida de Lebesgue. .

Na atualidade, são inúmeras as aplicações do conhecimento das probabilidades como, por exemplo, na economia, na administração, na medicina, na biologia, nas telecomunicações, na confiabilidade de um fenômeno, enfim, o limite dessas aplicações, só o futuro poderá nos revelar.

3 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS

Para nossa investigação sobre os conhecimentos e habilidades já concebidas pelos alunos foi aplicado um questionário (apêndice A), sendo observado informações de cunho tanto social, quanto educacional.

O questionário foi composto por 16 (dezesesseis) itens sendo o último subdividido em 13 (treze) questões. As informações observadas foram referentes a idade, gênero, ano ou série, se a escola em que estuda é da rede pública ou privada, escolaridade do pai e da mãe, profissão do pai e da mãe, se o aluno gosta de matemática, se o aluno costuma estudar matemática fora da escola, se alguém o ajuda nas tarefas de matemática.

Também são feitos questionamentos a cerca de como os assuntos de matemática foram ministrados pelos professores, perguntando sobre qual metodologia foi usada nas aulas de matemática de sua escola e sobre como o professor trabalhou para que o aluno compreendesse melhor o assunto ministrado. A partir de então os questionamentos se aplicam exclusivamente a probabilidade, perguntando-se como o aluno se sente em relação ao conteúdo e, após isso, o discente é convidado a preencher um quadro (ver apêndice A), classificando os tópicos de probabilidade em: muito fácil, fácil, regular, difícil ou muito difícil. A partir daí, foram propostos 13 problemas para que os discentes respondessem, referente ao tema de probabilidade.

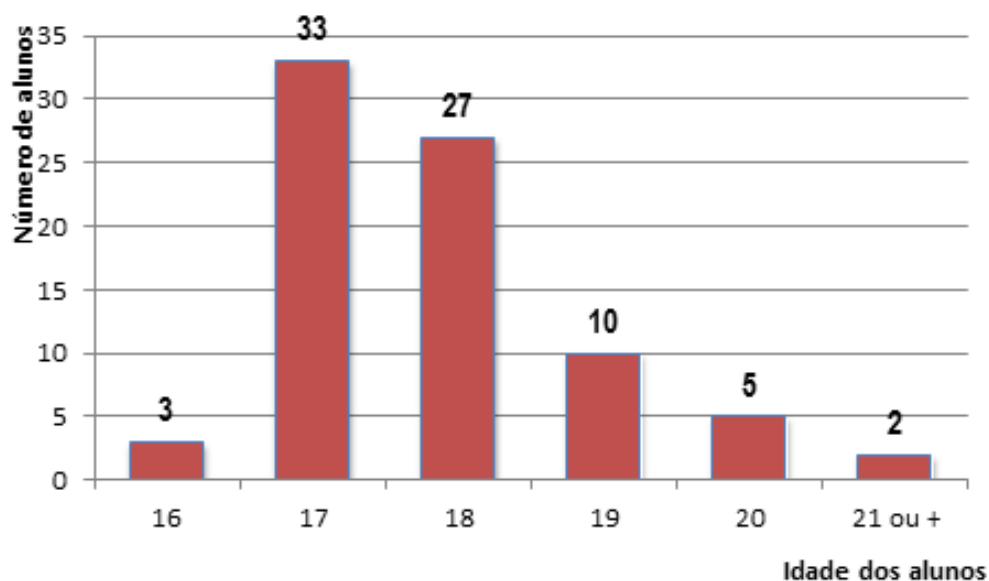
Este questionário foi aplicado em 80 alunos concluintes do ensino médio de uma escola pública estadual do bairro de Nazaré da cidade de Belém-PA. Os resultados da aplicação dos questionários foram avaliados e expostos nos comentários abaixo

3.1 PERFIL DOS ALUNOS

Baseado nas respostas às questões de 01 a 14 do questionário aplicado a 80 (oitenta) alunos da 3ª série do ensino médio, obtivemos o seguinte resultado:

Em relação a questão 01 sobre a idade dos alunos, obtivemos a distribuição mostrada na figura 9.

Figura 1 – Número de alunos por idade que participaram da pesquisa

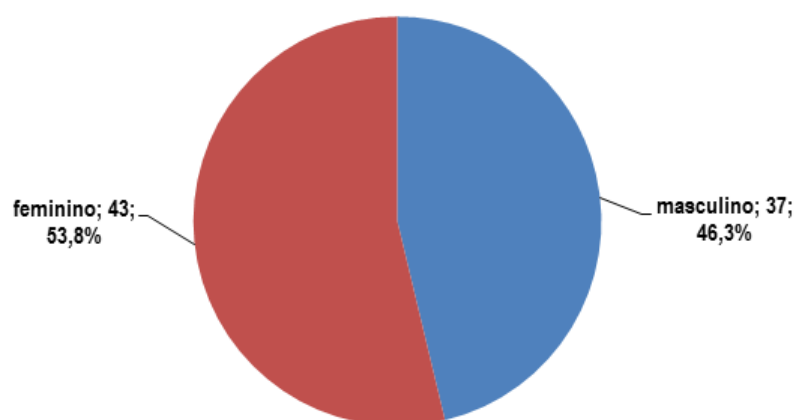


Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

A idade padrão para concluir o ensino médio, considerando o início dos estudos no ensino fundamental com 7 anos, é entre 17 e 19 anos. Dos 80 discentes pesquisados, é possível concluir que 70 (setenta) discentes estão na idade certa para completar o ensino médio, ou seja, quase 87,5% da amostra, enquanto isso, temos cerca de 3,75% de alunos com um ano de antecedência e apenas, cerca de, 8,75% de alunos com um ou mais anos de atraso em relação a idade ideal.

Da questão 02, a distribuição de gênero está mostrada na figura 10.

Figura 2 – Número de alunos por gênero que participaram da pesquisa



Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Do gráfico, aproximadamente 46,25% são do sexo masculino, contra, aproximadamente 53,75% do sexo feminino. Todos os duzentos e dezoito alunos, 100%, são concluintes do ensino médio, das escolas citadas anteriormente que frequentam a escola nos turnos da manhã ou da tarde, pois esta pesquisa não discriminou o turno de estudo dos alunos.

Quanto a escolarização do pai e da mãe, de acordo com nossos 218 alunos, temos a distribuição identificada na tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Comparativo entre escolaridade do pai e da mãe dos alunos

Descritivo	Pai		Mãe	
	Quantidade	Porcentagem	Quantidade	Porcentagem
Não estudou	5	6,25	3	3,75
Ensino fundamental incompleto	12	15,00	5	6,25
Ensino fundamental completo	10	12,50	12	15,00
Ensino médio incompleto	23	28,75	22	27,50
Ensino médio completo	25	31,25	30	37,50
Ensino superior incompleto	3	3,75	5	6,25
Ensino superior completo	2	2,50	3	3,75

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

No quadro acima, podemos avaliar que, aproximadamente, 15% dos pais (masculinos) possuem nível médio completo ou superior completo, enquanto que 18,75% das mães possuem nível médio completo ou superior completo, mostrando, a capacidade feminina de suporte a escolarização como preponderante em relação ao gênero masculino.

Em relação a profissão dos pais e das mães, respondidas nas questões 07 e 08 do questionário, obtivemos as mais variadas respostas, desde “não sei” até “funcionário público do tribunal de justiça”.

A partir da questão 09 entramos na relação dos alunos com a matemática, aqui a pergunta é sobre “o quanto gostam de matemática?”, onde podiam escolher entre 4 opções de resposta: nem um pouco, pouco, razoável ou muito.

Os dados dos questionários podem ser observados na tabela 2, abaixo:

Da análise dos questionários, observa-se que 63,75% dos discentes, dizem que não gostam nem um pouco ou que gostam pouco de matemática, apenas sete alunos demonstraram que gostam muito de matemática, ou seja, 8,75% da amostra.

Isto deixa claro o quanto o ensino de matemática se torna complicado e a aprendizagem extremamente difícil, mas as razões desse fato fogem aos objetivos deste trabalho. Você

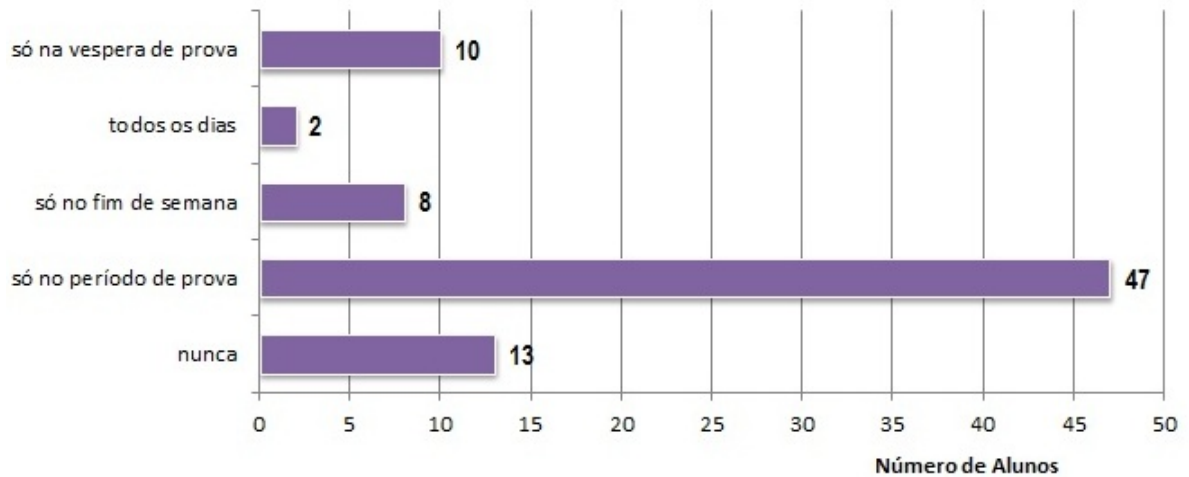
Tabela 2 – Distribuição de respostas à pergunta "você gosta de matemática?"

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Nem um pouco	33	41,25
Pouco	18	22,50
Razoável	22	27,50
Muito	7	8,75

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

costuma estudar matemática fora da escola? Essa foi a 10ª questão proposta no questionário, sendo 5 alternativas possíveis: nunca, só no período de prova, só no fim de semana, todos os dias ou só na véspera da prova.

Figura 3 – Distribuição das respostas dos alunos a questão 10.



Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Como visto na questão anterior e mostrado acima na figura 3, não houve surpresa, apenas 2 alunos relataram que estudam todos os dias, mas o que mais nos chamou a atenção foi o fato de 13 alunos disserem que nunca estudam, ou seja, 16,25% da amostra. Se considerarmos que, aqueles alunos que só estudam na véspera da prova e os que estudam somente em período de prova, e sabemos que eles não costumam ter um bom rendimento na disciplina, e isso quem diz é a nossa experiência no magistério, o percentual sobe para pouco mais de 22,80% da amostra, ou seja, mais uma vez esse quadro mostra a lastimável situação educacional disciplinar em relação aos estudos de matemática.

Na questão seguinte perguntamos: “Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?”, aqueles que anteriormente responderam que nunca estudam foram direcionados a responder que

ninguém os ajuda. Além dessa opção havia ainda professor particular, o pai, a mãe, irmão(ã), amigos, tio(a), namorado(a) ou outros. O resultado está exposto na tabela 3:

Tabela 3 – Respostas escolhidas pelos alunos na questão 11 do questionário do apêndice A

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Ninguém	58	72,50
Professor particular	1	1,25
Pai	0	0,00
Mãe	1	1,25
Irmão(ã)	3	3,75
Amigo(a)	13	16,25
Tio(a)	1	1,25
Namorado(a)	1	1,25
Outro	2	2,50

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Mais uma vez, a enorme maioria, 72,50% dos alunos, disseram que não possuem ajuda no momento de estudar. Esses dados nos fazem concluir que a participação familiar na formação desses alunos é pífia perto da necessidade que se espera ao menos como satisfatória.

As perguntas 12 e 13 tratam de como os alunos perceberam o trabalho do professor ao ministrar as aulas de matemática, sendo que na 12ª questão perguntamos: “Na maioria das aulas de matemática de sua escola, os assuntos são ministrados...” e apresentamos quatro opções para múltipla escolha, são elas: Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios; Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto; Criando um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo e Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos. Não foi surpresa alguma, depois de analisarmos as respostas anteriores, que mais de 96,25% dos 80 alunos responderam a primeira opção, que os professores começam pela definição seguida de exemplos e exercícios, esta é uma metodologia das mais antigas e usadas na rede educacional, talvez por esse motivo, o pouquíssimo ou quase nenhum interesse dos alunos pela matemática, pois o ensino não consegue acompanhar o dinamismo desse aluno, mas esse não é o foco deste trabalho.

Na questão seguinte trata-se de como o assunto ensinado é trabalhado para que o aluno entenda-o melhor o conteúdo de matemática ministrado e, para este item, oferecemos 05 alternativas: Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; Apresentar jogos envolvendo o assunto; Mandar resolver os exercícios do livro didático; Propõe questões de fixação e Mandar que você procure questões sobre o assunto para resolver. Mais uma vez assim como na questão anterior não aconteceu nada que já não fosse o esperado, mais de 93,75% dos

alunos indicaram a primeira opção também, o professor apresenta uma lista de exercícios para serem resolvidos, assim como na metodologia comentada na questão anterior.

Na última questão desta etapa do questionário que buscou conhecer o ambiente dos alunos perguntamos mais especificamente sobre o conhecimento deles em probabilidade. Perguntamos: “Como você se sente em relação ao assunto Probabilidade?” e apresentamos 5 opções de resposta: Nunca estudei; Estudei e não lembro nada; Estudei e lembro pouco; Estudei e lembro quase tudo e estudei e lembro de tudo. As respostas estão no quadro 4 a seguir:

Tabela 4 – Respostas escolhidas pelos alunos na questão 14 do questionário do apêndice A

Alternativas	Quantidade	Porcentagem
Nunca estudei	5	6,25
Estudei e não lembro nada	26	32,50
Estudei e lembro pouco	44	55,00
Estudei e lembro quase tudo	3	3,75
Estudei e lembro tudo	2	2,50

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Temos que 93,75% dos alunos entrevistados se manifestaram como não tendo estudado ou estudaram e não lembram ou lembram pouco sobre o assunto probabilidade. Apenas dois alunos se manifestaram como que se lembra de tudo, estes mesmos disseram nas questões anteriores que gostam muito e estudam todos os dias matemática. Desta forma, podemos montar um pequeno perfil desses alunos, de maneira geral é um aluno com no máximo 01 ano de atraso em relação a idade escolar, com pais escolarizados a nível médio completo ou incompleto, que não gostam de matemática e nem de estudá-la, sem ajuda de familiares e que pouco sabem sobre probabilidade mesmo sabendo que já foi estudada.

As questões que seguem tratam dos conteúdos relacionados a probabilidade (questão 15) e problemas práticos relacionados a esses assuntos. Na questão 15 foi solicitado aos alunos que julgassem o que acharam quanto ao grau de dificuldade de aprendizado dos conteúdos relacionados ao ensino de probabilidade, para isto vamos ver o quantitativo apresentado na tabela 5 abaixo:

Na tabela 5, podemos observar que a maioria dos alunos julgou todos os assuntos como difíceis ou muito difíceis com exceção da definição de probabilidade que foi julgado como sendo de grau de dificuldade regular. Menos de 1% dos alunos, em média, julgaram algum assunto como muito fácil e isto unido com a informação anterior mostra o quanto o

Tabela 5 – Respostas dos alunos a questão 15

Assunto	O que você achou?				
	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Espaço amostral e evento	01	04	28	29	18
Definição de probabilidade	00	07	28	20	25
Probabilidade de um evento certo	00	06	20	21	33
Probabilidade de um evento impossível	01	03	23	25	28
Probabilidade de evento complementar	01	04	21	28	26
Probabilidade da união de eventos.	00	04	21	17	38
Probabilidade condicional	00	05	16	20	39
Probabilidade de eventos independentes	01	05	15	21	38

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

ensino de matemática e, especificamente, de probabilidade está muito aquém do necessário.

3.2 RESPOSTAS DOS ALUNOS ÀS QUESTÕES DO QUESTIONÁRIOS

No item 16, que foi dividido em 13 problemas sobre os conteúdos citados de probabilidade, analisamos as respostas dos alunos na ordem de cada questão, por questão de padronização, será colocada a questão proposta, o conteúdo associado, qual a resposta esperada e, em seguida, os resultados mostrados pelos alunos.

Problema 16.1. No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento “sair um número primo”.

Nessa questão esperávamos que os alunos demonstrassem conhecer a definição de espaço amostral e a definição de evento (definição de número primo). As respostas esperadas eram, para o espaço amostral, o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e, para o evento, o conjunto $E = \{2, 3, 5\}$.

Esta questão proposta, foi colocada como sendo a primeira pois entendemos que é a mais simples e direta entre todas as questões propostas mas, obteve apenas 5 acertos para o espaço amostral e 6 acertos para o evento, ou seja, 6,25% e 7,50% de acertos, respectivamente.

Problema 16.2. Numa urna existem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Retirando-se 1 bola ao acaso, qual a probabilidade de que seu número seja múltiplo de 5?

Para esta questão, desejávamos observar o conhecimento dos alunos quanto a definição de evento e definição de probabilidade, cujas respostas esperadas eram: Evento $E =$

$\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ e probabilidade de ocorrência $P(E) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, ou em percentual igual a 20%.

Como não era explícito no problema a identificação separada da quantificação do evento então não consideramos esta especificidade até porque nenhum aluno fez o registro dela em separado e para nossa satisfação 31 alunos acertaram a probabilidade, ou seja, quase 38,75% de acerto, porém apenas 5 alunos escreveram de forma simplificada a fração e nenhum na forma de porcentagem.

Problema 16.3. Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número:

- a) menor do que 21?
- b) maior do que 20?

Para este problema esperávamos observar os conhecimentos dos alunos acerca de probabilidade de evento certo e probabilidade de evento impossível, cujas respostas esperadas eram 1 e 0, ou, 100% e 0%, respectivamente.

Assim como no problema 16.1, temos dois itens para avaliar, de maneira geral o acerto ou erro ocorreu em conjunto, mas houve vários casos, exemplificados nas figuras 4 e 5, o aluno acertou o item *a* mas errou o item *b* e o outro aluno errou o item *a* e acertou o item *b*.

Figura 4 – Exemplo de resposta ao problema 16.3 com item a correto mas item b errado.

16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número

- a) menor do que 21?
- b) maior do que 20?

1
Não sei

$\frac{20}{20}$

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Como mostrado na figura 4, além de não responder corretamente ao item b, temos no item, a definição de probabilidade, sem o cuidado com a simplificação da fração ou, até mesmo, a divisão fácil de executar, onde o aluno poderia demonstrar conhecer melhor o conceito de probabilidade de evento certo. Da forma mostrada, ficamos sem essa certeza de o aluno conhecer tal conceito.

Figura 5 – Exemplo de resposta ao problema 16.3 com item a incorreto e item b correto.

16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número
 a) menor do que 21?
 b) maior do que 20?

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Já na figura 5, mostra-se que o aluno aparentemente sabe o conceito de probabilidade de evento impossível acertando o item b, mas no item a, demonstrou alguma dificuldade de compreensão.

Dos 80 alunos, tivemos 26 alunos, ou seja, 32,50% que acertaram ao item a, enquanto que 30 alunos, ou, 37,50% acertaram ao item b. Mesmo com valores superiores aos 32% esperávamos mais, pois era um problema que exigia conhecer um conceito simples e sem, necessariamente, envolver qualquer tipo de cálculo para responder esses itens, ainda nessa questão, nos chamou a atenção a resposta mostrada na figura 6, mostrando que o aluno requer cuidados especiais, ou simplesmente não respondeu de forma responsável.

Figura 6 – Exemplo de resposta incoerente com o solicitado no problema 16.3.

16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número
 menor do que 21?
 b) maior do que 20?

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Os eventos certo e impossível apesar de suas previsibilidades não são vistos como experimentos determinísticos, isto será retomado no material proposto ao final deste trabalho, mas sim como eventos que dentro da teoria dos conjuntos absorvida pela teoria das probabilidades nós temos para o evento impossível como o conjunto vazio, que pela teoria dos conjuntos é um subconjunto de qualquer conjunto, e por tanto faz parte do espaço amostral mesmo que indiretamente; já para o evento certo temos um subconjunto idêntico ao conjunto formado pelo espaço amostral, ou seja, um subconjunto próprio e portanto ele incorpora todas as possibilidades ao contrário do impossível que não tem possibilidade alguma de ocorrer.

De qualquer forma como isto foi tratado com os alunos? Eles realmente aprenderam? pelos resultados encontrados podemos inferir que não aprenderam de forma concisa este assunto.

Entre outras preocupações, a figura 6 mostrou ainda que no corpo discente existem alunos com necessidades especiais, não físicas mas de atenção na leitura, interpretação e compreensão, não necessariamente o autor daquela resposta. Ainda assim ele nos faz repensar a importância que os alunos podem ter dado a pesquisa.

Problema 16.4. Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de $\frac{1}{5}$. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

Nesta questão, esperávamos que os alunos demonstrassem conhecer a probabilidade do evento complementar, cuja resposta aguardada era $\frac{4}{5}$ ou até mesmo 80%, no entanto, mesmo sendo este problema de simples solução, tivemos apenas 16 acertos, ou seja, 20,00% dos alunos acertaram esta questão.

Essa questão e esse assunto estão muito mais relacionados ao raciocínio lógico do que a qualquer formalização de conteúdo ou fórmulas meramente decorativas. Pois como podemos perceber a questão é proposta de forma simples, clara e direta, sem nenhuma distração que pudesse atrapalhar a interpretação dos alunos.

Problema 16.5. Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

Esse problema exigia dos alunos conhecerem a definição de evento e a probabilidade da união de eventos, cuja resposta esperada era:

Espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ou seja, $n(S) = 6$.

Evento A, sair um número par

$A = \{2, 4, 6\}$, ou seja, $n(A) = 3$.

Evento B, sair um número primo

$B = \{2, 3, 5\}$, ou seja, $n(B) = 3$.

Evento sair um número par e primo

$A \cap B = \{2\}$, ou seja, $n(A \cap B) = 1$

Probabilidade de sair um número par ou primo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Resposta: $\frac{5}{6}$

Outra possibilidade de resolução é, entender diretamente que, o evento sair um número par ou primo no lançamento de um dado, significa excluir apenas a face com o número 1, assim $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, assim $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{6}$.

Como em questões bem mais simples tivemos os resultados parecidos, observamos que apenas 3 alunos acertaram essa questão, mesmo que sem a devida demonstração do cálculo, simplesmente colocaram a resposta correta, ou seja, menos de 3,75% dos alunos demonstraram saber, de alguma forma, do que se tratava a questão. Alguns alunos chegaram a esboçar calcular a probabilidade dos eventos separadamente, mesmo que, de forma incorreta, mas sem fazer o devido cálculo da intersecção ou mesmo da resposta final correta que era da união.

Problema 16.6. Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

Nessa questão, os alunos deveriam demonstrar conhecimento a respeito de definição de evento e definição de espaço amostral e ainda de probabilidade condicional, com a resposta aguardada como sendo de $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%, tivemos a grata surpresa quando 24 alunos, ou seja, 30,00% da amostra, responderam corretamente a questão que, efetivamente, necessitava mais de cuidado na interpretação do que qualquer cálculo.

Problema 16.7. De um baralho de 52 cartas extraem-se duas cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade se obter um ás e um valete nessa ordem?

Nesse problema, esperávamos que os alunos mostrassem seus conhecimentos acerca da definição de evento, definição de espaço amostral e de probabilidade condicional, uma solução possível seria:

Considere os eventos A e B como sendo “probabilidade da primeira carta retirada, ser um As” e “probabilidade da segunda carta retirada ser um valete”, respectivamente:

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ e } P(B/A) = \frac{4}{51}$$

Assim, a probabilidade de A e B ocorrerem, será:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$$

Portanto, a probabilidade de se retirar duas cartas, sucessivamente e sem reposição, e se obter primeiramente um ás e depois um valete é de $\frac{4}{663}$.

Este problema, em função do cálculo envolvido, mesmo que uma multiplicação simples de frações resolvesse, tinha como resposta um valor elevado para ser respondido sem calculadora, então seriam aceitas respostas indicadas pelo cálculo mesmo que este não fosse concluído, mas mesmo assim, apenas 1 (1,25%) dos alunos acertaram a questão de forma mais intuitiva sem usar o conhecimento de probabilidade condicional. E o pior, encontramos problemas de leitura e interpretação como mostrado na figura 7.

Figura 7 – Erro de interpretação no problema 16.7

16.7. De um baralho de 52 cartas extraem-se duas cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade se obter um ás e um valete nessa ordem?

$R = \frac{4}{48}$ $R = \frac{4}{48}$ //

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Além dessa resposta certa ainda encontramos mais duas respostas, que se aproximaram do cálculo correto conforme está mostrada na figura 8.

Figura 8 – Exemplo de resposta dada no problema 16.7

16.7. De um baralho de 52 cartas extraem-se duas cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade se obter um ás e um valete nessa ordem?

$\frac{4}{52}$ | $\frac{4}{52}$

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Na figura 7, nos espanta o valor 48 mencionado pelo aluno, de onde podemos supor que ele subtraiu do total as 4 opções de possibilidades dos eventos ás e valete, mas que não faz sentido algum para o problema enquanto que, na figura 8, temos dois alunos que não observaram a condicionante e no problema, que faz com que o exercício seja classificado como um problema de probabilidade condicional.

Problema 16.8. Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma dos pontos nos dois dados foi 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles.

Nessa questão, o esperado é que o aluno demonstre conhecimento sobre a definição de evento, definição de espaço amostral e definição de probabilidade condicional, e uma possível solução seria o aluno construir o espaço amostral e verificar desse espaço, quantos pares a soma seria 8 e desses pares, em quantos aparecem a face 5.

Uma possível solução, seria:

Considere que os resultados do lançamento de um par de dados sejam representados por pares ordenados $(D1, D2)$, na qual, $D1$ representa o resultado obtido do primeiro e $D2$ representa o resultado obtido no segundo dado, desse modo o espaço amostral seria da seguinte maneira:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

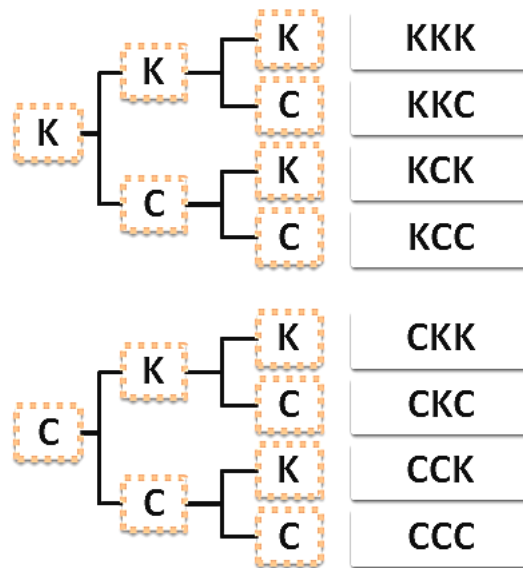
Do espaço amostral acima, os pares ordenados destacados, indicam os pares cujas somas são oito, assim, podemos observar que existem cinco pares satisfazendo essa condição e que, desses pares, em apenas 2 deles, aparecem o número 5, portanto, a probabilidade de se obter uma face 5, sabendo-se que a soma das faces é 8 é de ou 40%.

Infelizmente, desta vez, nenhum aluno obteve êxito neste problema, a grande maioria das respostas indicava que o aluno não sabia como desenvolver o problema.

Problema 16.9. Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente.

Aqui queríamos ver se os alunos eram capazes de determinar o espaço amostral e não de quantificá-lo. Uma possibilidade de resposta seria construir a árvore de possibilidades.

Considerando que K representa o resultado cara e que C o resultado coroa, temos:



Nesse caso, temos 8 possibilidades de ocorrência para o espaço amostral: KKK, KKC, KCK, KCC, CKK, CKC, CCK e CCC.

Neste problema encontramos 8 questionários que apresentaram a resposta correta, ou seja, 10% dos alunos acertaram esta questão que tem o mesmo conteúdo associado da 1ª questão, mas lá o índice de acerto foi melhor, mostrando que conhecer e entender o evento é fundamental.

Problema 16.10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podemos formar números de 2 dígitos com repetição. Qual a probabilidade de, sorteando um desses números, que ele seja par?

Neste problema, aguardávamos que os alunos mostrassem conhecer a definição de evento, a definição de espaço amostral e a definição de probabilidade, o cálculo poderia ser feito de duas maneiras distintas, a primeira maneira é aquela que lembra o fato de que é o último algarismo que determina se um número é par e com isso temos, de forma direta, a probabilidade esperada de $\frac{3}{7}$, ou seja, três números pares de um total de sete possíveis para a última casa ou, da segunda maneira, utilizando o princípio fundamental da contagem ou outra técnica de análise combinatória, que não é nosso foco neste trabalho, mas o aluno poderia calcular quantos números pares de dois algarismos poderiam ser formados, bastando para isso executar o produto $7 \times 3 = 21$ e o total de números possíveis que é $7 \times 7 = 49$, calculando então a probabilidade de $\frac{21}{49}$ que simplificando, resulta em $\frac{3}{7}$, da mesma forma.

Para este problema tivemos 16 alunos, ou seja, 20%, que acertaram, ainda estamos aquém do esperado, pois a questão não necessitava de cálculo mais elaborado ou refinado,

mesmo assim teve aluno que resolveu, ou aparentemente o fez em algum rascunho ou borrão, e colocou a resposta $\frac{24}{56}$ de tal forma que representa uma fração equivalente aquela da resposta correta e como tal consideramos como correta.

Problema 16.11. Lançando dois dados, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

Aguardávamos que os alunos soubessem a definição de evento, a definição de espaço amostral e probabilidade de eventos independentes, cuja resposta seria $\frac{1}{36}$.

Desta vez, infelizmente, apenas 3 alunos alcançaram a resposta correta, ou seja, 20%. Alguns fizeram as probabilidades em separado mas, não souberam ou não perceberam o conectivo e no problema indicando a probabilidade de eventos independentes, conforme a figura 9 a seguir.

Figura 9 – Exemplo de resposta dada ao problema 16.11

16.11. Lançando dois dados qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

$$\frac{1}{6} ; \frac{1}{6}$$

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Alguns alunos até tentaram usar o princípio aditivo ao invés do multiplicativo, estes princípios serão tratados também no material proposto.

Problema 16.12. Um árbitro de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é amarelo de um lado e vermelho do outro. Num determinado lance, o árbitro retira do bolso, ao acaso, um cartão e mostra ao jogador. Qual é a probabilidade de a face que o árbitro vê ser vermelha e de que a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela?

Neste problema esperávamos que os alunos demonstrassem conhecer a definição de evento, a definição de espaço amostral e a probabilidade condicional, cuja resposta aguardada era de $\frac{1}{6}$ que poderia ser determinada de várias formas e entre elas a árvore de possibilidades com indicação das probabilidades.

Nesta questão encontramos apenas 1 aluno que entendeu e resolveu corretamente a questão, pouco mais de 1,2%. Mas o pior é que os demais nem esboçaram qualquer tipo de

rascunho ou tentativa próxima da resposta esperada e muitos simplesmente escreveram “não sei” ou “não entendi” ou algo similar.

Essas respostas também apareceram no problema seguinte como mostrado na figura 10, que mostra como um aluno escreveu suas respostas as duas últimas questões, mas que não foi o único, vários fizeram semelhante a ele.

Figura 10 – Exemplo de resposta dada por um aluno as questões 16.12 e 16.13

16.12. Um árbitro de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é amarelo de um lado e vermelho do outro. Num determinado lance, o árbitro retira do bolso, ao acaso, um cartão e mostra ao jogador. Qual é a probabilidade de a face que o árbitro vê ser vermelha e de que a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela?

Não Sei...

16.13. Num único lance de um par de dados honestos, qual é a probabilidade de saírem as somas “múltipla de 4” ou “primo”?

Não Sei...

Fonte : Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Problema 16.13. Num único lance de um par de dados honestos, qual é a probabilidade de saírem as somas “múltipla de 4” ou “primo”?

Nessa questão, esperávamos que os alunos soubessem sobre definição de evento, definição de espaço amostral e probabilidade da união de eventos, com resposta de $\frac{2}{3}$, pois, as somas que correspondem a números múltiplos de quatro temos 4, 8 e 12 e somas que correspondem a números primos, 2, 3, 5, 7 e 11, esses pares estão destacados na figura abaixo:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Nesse caso, é possível perceber que dos 36 pares, 24 deles atendem a, pelo menos, uma das condições, resultando assim em $\frac{24}{36}$, que simplificando, obtemos $\frac{2}{3}$.

Esse cálculo também poderia ser feito em separado, calculando a probabilidade de se obter soma múltipla de 4 que totalizam 9 pares e portanto $\frac{9}{36}$ e, depois, calculando a probabilidade de se obter soma que represente número primo, totalizando 15 pares e assim, chega-se a probabilidade de $\frac{15}{36}$. Como as duas situações, geram conjuntos disjuntos, então a probabilidade de ocorrência de um evento ou de outro é dado pela soma das probabilidades, chegando-se assim em $\frac{9}{36} + \frac{15}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Nesse exercício, apenas 1 aluno acertou a questão, ou seja, pouco mais de 1,2% da amostra.

De maneira geral, chegamos a um índice aproximadamente de 15,96% de acertos, em média, para as questões propostas na forma de problemas, o que demonstra, claramente, que os problemas de aprendizagem, em relação ao assunto de probabilidade, são enormes e que novas técnicas e novas maneiras de se trabalhar o conteúdo, com esses educandos, devem ser experimentados, com o intuito de melhorar o entendimento desses conceitos, que são tão importantes para o dia a dia dos cidadãos.

4 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

O ensino da probabilidade pode se constituir em um poderoso instrumento social, na medida em que pode permitir ao estudante uma melhor compreensão das estatísticas oficiais, tornando-o capacitado a exercer mais conscientemente sua cidadania. Em qualquer nível de aprendizagem, promove a oportunidade de discussão no ramo da matemática de algumas das características mais pertinentes do mundo em que vivemos e, por sua vez, são essas características que alimentam o desenvolvimento do tema. Assim, apresentamos considerações sobre livros didáticos que abordam o conteúdo de probabilidade, em nível de Ensino Médio, e que foram aprovados no PNLD 2012 (Plano Nacional do Livro Didático) que se estendeu até o ano de 2014, ano no qual alguns alunos foram instigados a responder um questionário proposto por nós, conforme será visto na próxima sessão.

No PNLD 2012 foram aprovados e indicados pelo governo federal através do MEC (Ministério da Educação) sete coleções, das quais analisamos apenas três obras, as quais verificamos que são as mais utilizadas nas escolas públicas do estado do Pará, em especial, na capital Belém.

A maioria dos livros do Ensino Médio que abordam o conteúdo de matemática, focam mais as questões voltadas para os jogos de azar, no entanto só alguns fazem um elo entre esses jogos e a teoria da probabilidade; poucos falam do valor histórico deste estudo, uma vez que esta teoria surgiu a partir destes jogos. Estes trabalham muito com exercícios que praticamente só exigem que o aluno decore uma fórmula e aplique, ou seja, exercícios meramente mecânicos. Nas coleções analisadas, o conteúdo é mostrado no volume 2, correspondente, aqui no estado do Pará, a grade curricular do 2º ano do ensino médio.

5 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

O ensino da probabilidade pode se constituir em um poderoso instrumento social, na medida em que pode permitir ao estudante uma melhor compreensão das estatísticas oficiais, tornando-o capacitado a exercer mais conscientemente sua cidadania. Em qualquer nível de aprendizagem, promove a oportunidade de discussão no ramo da matemática de algumas das características mais pertinentes do mundo em que vivemos e, por sua vez, são essas características que alimentam o desenvolvimento do tema. Assim, apresentamos considerações sobre livros didáticos que abordam o conteúdo de probabilidade, em nível de Ensino Médio, e que foram aprovados no PNLD 2012 (Plano Nacional do Livro Didático) que se estendeu até o ano de 2014, ano no qual alguns alunos foram instigados a responder um questionário proposto por nós, conforme será visto na próxima sessão.

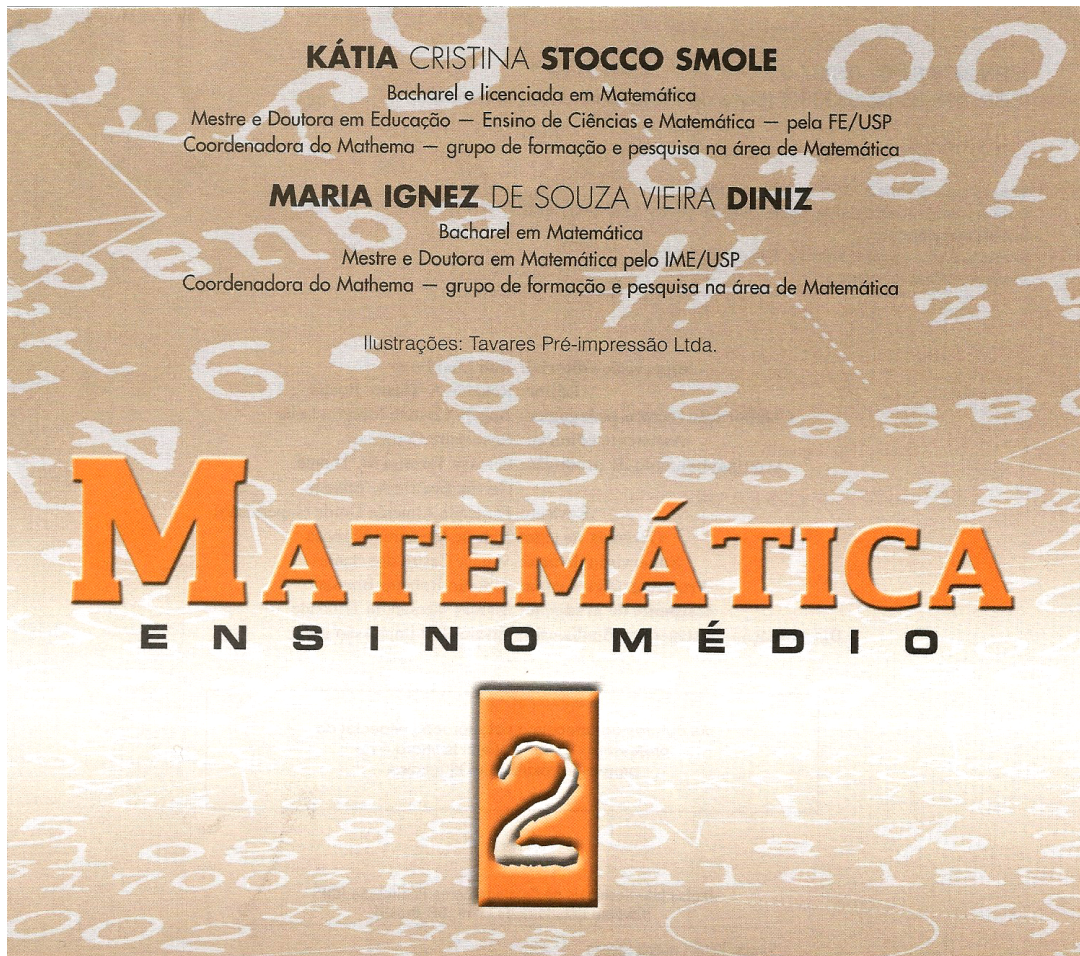
No PNLD 2012 foram aprovados e indicados pelo governo federal através do MEC (Ministério da Educação) sete coleções, das quais analisamos apenas três obras, as quais verificamos que são as mais utilizadas nas escolas públicas do estado do Pará, em especial, na capital Belém.

A maioria dos livros do Ensino Médio que abordam o conteúdo de matemática, focam mais as questões voltadas para os jogos de azar, no entanto só alguns fazem um elo entre esses jogos e a teoria da probabilidade; poucos falam do valor histórico deste estudo, uma vez que esta teoria surgiu a partir destes jogos. Estes trabalham muito com exercícios que praticamente só exigem que o aluno decore uma fórmula e aplique, ou seja, exercícios meramente mecânicos. Nas coleções analisadas, o conteúdo é mostrado no volume 2, correspondente, aqui no estado do Pará, a grade curricular do 2º ano do ensino médio.

5.1 ANÁLISE DO LIVRO MATEMÁTICA: ENSINO MÉDIO DE KÁTIA SMOLE E MARIA DINIZ

O livro analisado foi escrito por duas professoras, Kátia Smole e Maria Diniz, doutoras em educação e matemática, respectivamente, pela USP, sob o título MATEMÁTICA: Ensino médio, vol.2, da editora Saraiva. O conteúdo de probabilidade é tratado na unidade 3 da parte I com um total de 37 páginas.

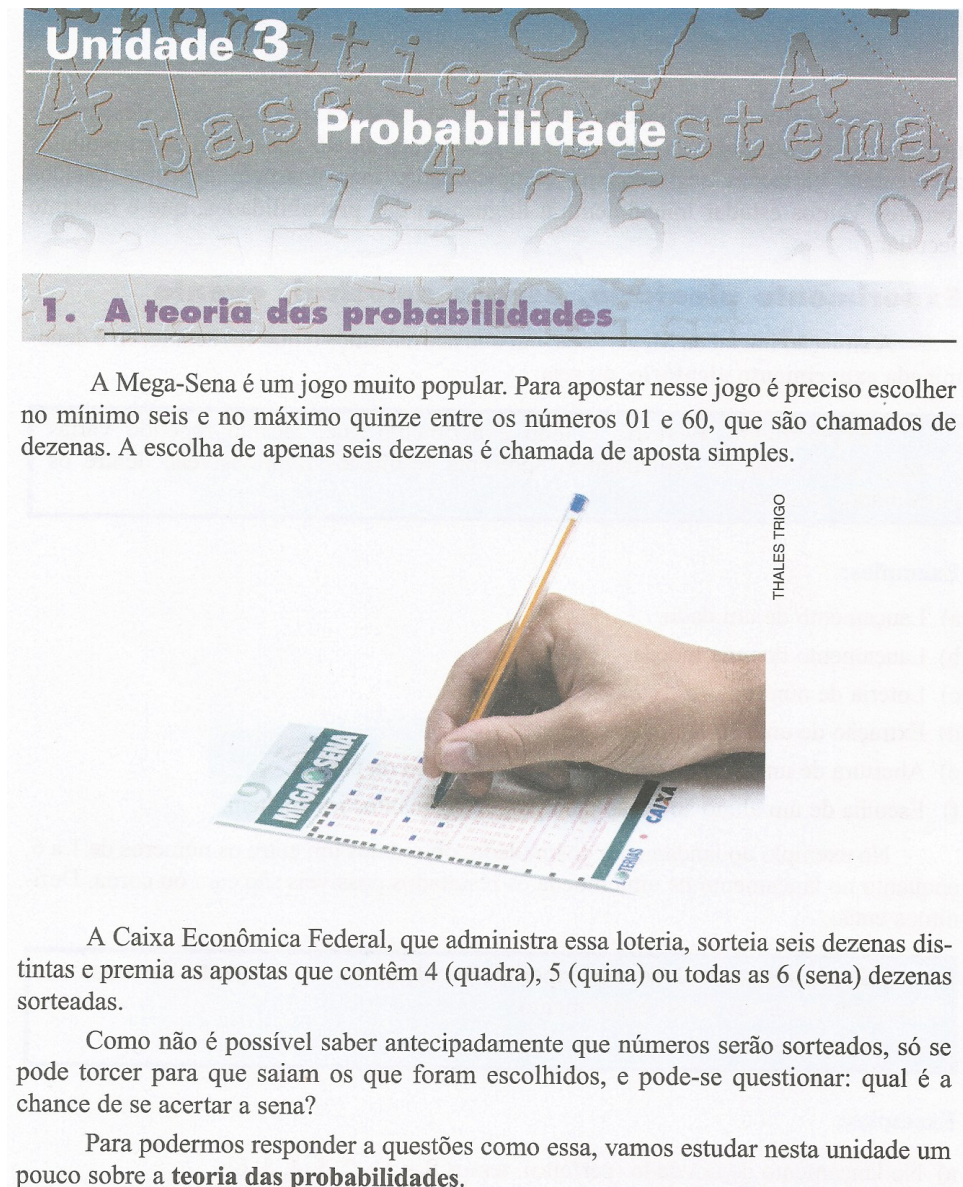
Figura 11 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, contra capa com currículo resumido das autoras.



Fonte: Livro MATEMÁTICA: Ensino Médio de Kátia Smole e Maria Diniz

De maneira geral o conteúdo inicia-se pela apresentação de situações contextualizadas pertinentes, que procuram incentivar o estudo pelos alunos. Na sequência, o conteúdo é rapidamente sistematizado, e seguem-se exercícios resolvidos, o que, por vezes, desfavorece a exploração dos temas pelos alunos.

Figura 12 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, mostrando a introdução do capítulo probabilidade.



Fonte: Livro MATEMÁTICA: Ensino Médio de Kátia Smole e Maria Diniz

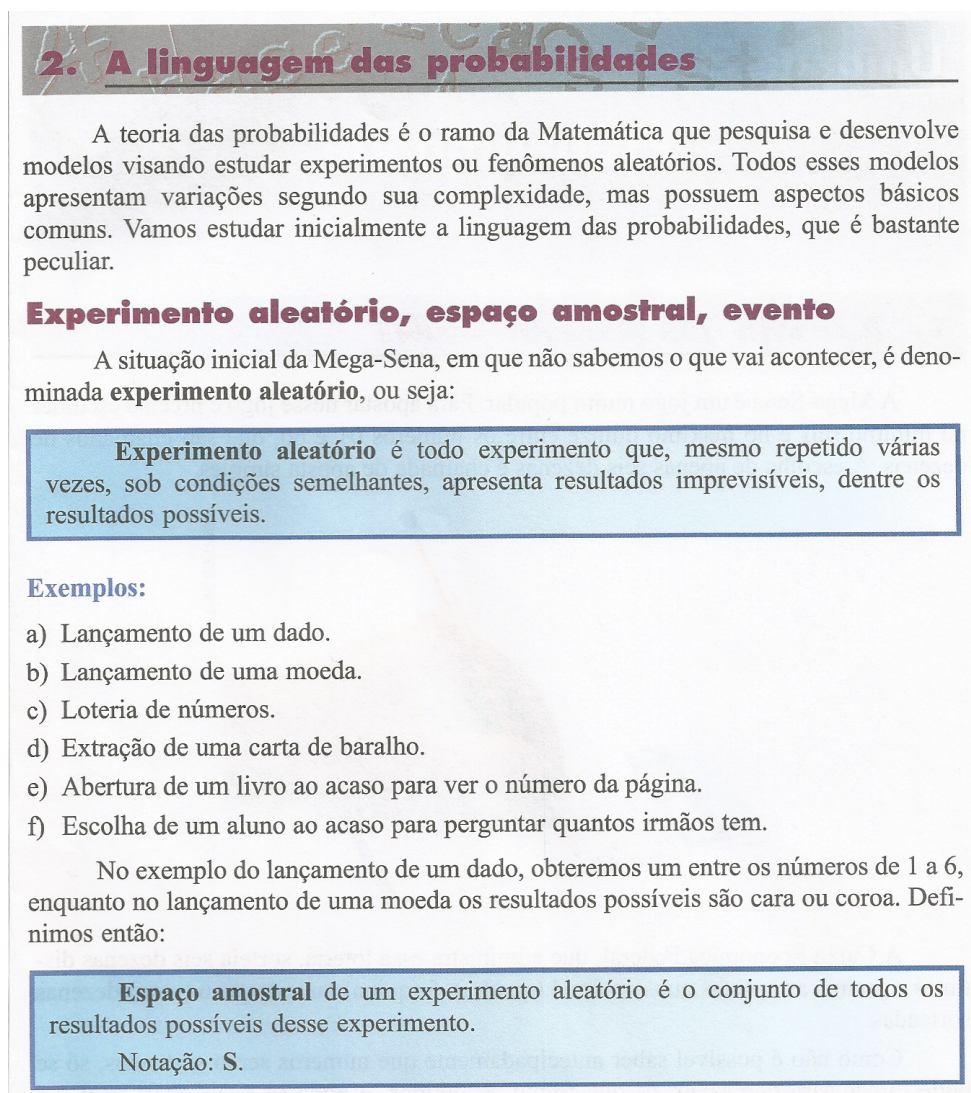
O assunto é introduzido usando como exemplo o jogo da mega sena, conforme vemos na figura anterior. A obra destaca-se pela presença de tópicos interdisciplinares relevantes e atuais, entretanto, eles são muito numerosos e alguns envolvem assuntos mais complexos, em particular os que são tratados na seção Conexão. Nesses casos, o trabalho com tais textos poderá ser dificultado e ficar em um nível apenas informativo.

É um ponto positivo da coleção o emprego de diversos recursos didáticos, em especial o trabalho com a calculadora, simples ou científica, e com softwares livres. Em especial, a introdução do tema é feita mais uma vez, utilizando-se de jogos de azar, mas que neste caso, as

autoras trazem o conhecido jogo da mega sena. Após explicar rapidamente o jogo e a forma de se apostar nele, termina com a seguinte pergunta: “Qual é a chance de alguém acertar na mega sena?”

Os assuntos vem, em seguida, começando pela definição e seguidos de exemplos, todos voltados a jogos, de forma sucinta e sem maiores rodeios ou conexões; o que só é feito no item específico e característico da coleção chamado de conexão, lá é feita uma abordagem ampla da interdisciplinaridade e do entrelaçamento dos conteúdos.

Figura 13 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, mostrando como são desenvolvidas as definições dos tópicos de probabilidade.

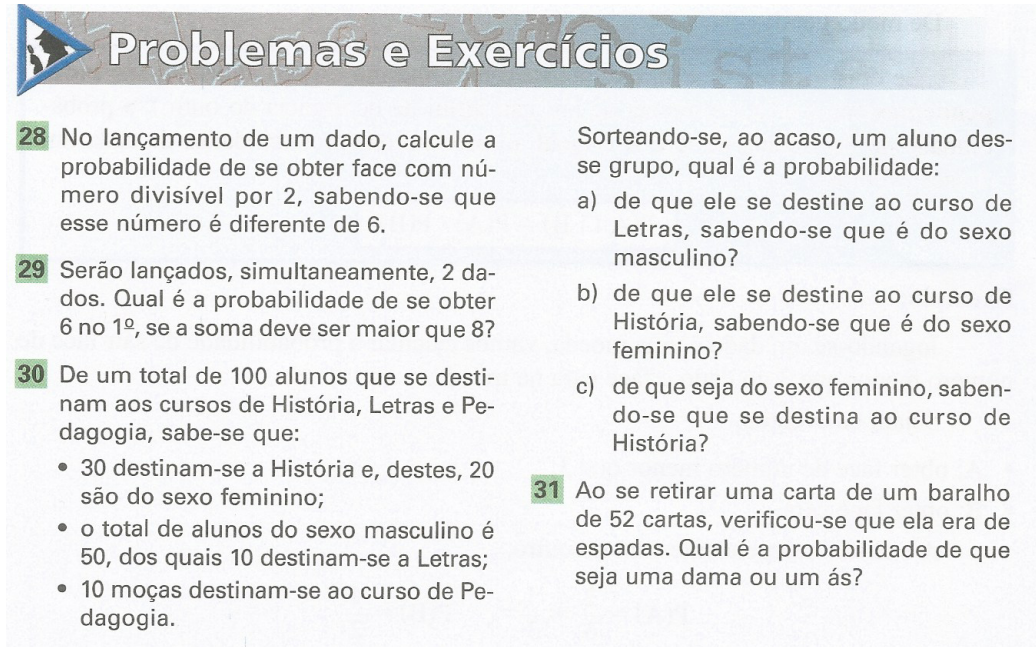


Fonte: Livro MATEMÁTICA: Ensino Médio de Kátia Smole e Maria Diniz

Após alguns tópicos, são sugeridos alguns problemas que, de maneira geral, exigem apenas conhecimento da definição ou aplicação das fórmulas, desta forma, podemos considerá-

los como de nível acessível ao alunado e também de fácil solução.

Figura 14 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, mostrando exemplo de exercício sugerido.



Problemas e Exercícios

28 No lançamento de um dado, calcule a probabilidade de se obter face com número divisível por 2, sabendo-se que esse número é diferente de 6.

29 Serão lançados, simultaneamente, 2 dados. Qual é a probabilidade de se obter 6 no 1º, se a soma deve ser maior que 8?

30 De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de História, Letras e Pedagogia, sabe-se que:

- 30 destinam-se a História e, destes, 20 são do sexo feminino;
- o total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se a Letras;
- 10 moças destinam-se ao curso de Pedagogia.

Sorteando-se, ao acaso, um aluno desse grupo, qual é a probabilidade:

- a) de que ele se destine ao curso de Letras, sabendo-se que é do sexo masculino?
- b) de que ele se destine ao curso de História, sabendo-se que é do sexo feminino?
- c) de que seja do sexo feminino, sabendo-se que se destina ao curso de História?

31 Ao se retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, verificou-se que ela era de espadas. Qual é a probabilidade de que seja uma dama ou um ás?

Fonte: Livro MATEMÁTICA: Ensino Médio de Kátia Smole e Maria Diniz

Apenas no final do capítulo aparecem os exercícios resolvidos, e em seguida mais exercícios propostos, desta vez, mais elaborados e de vestibulares. As autoras encerram a unidade 3, com uma sessão chamada de O ELO, nela o leitor é levado a conhecer um pouco mais do histórico da probabilidade e de algumas situações interdisciplinares, conforme podemos ver na Figura 5.

Figura 15 – Imagem do livro MATEMÁTICA: Ensino Médio, mostrando um exemplo de interdisciplinaridade no final do capítulo.

O Elo Matemática-Genética

Há pouco mais de um século desconhecia-se o modo como algumas características eram transmitidas de pais para filhos. A Genética avançou extraordinariamente em tão pouco tempo, de forma que, hoje em dia, palavras como **DNA**, **gene** e **clonagem** aparecem frequentemente nos meios de comunicação.

As bases da Genética foram lançadas pelo biólogo, botânico e religioso Gregor Johann Mendel (1822-1884), que durante dez anos realizou experiências com o cruzamento de diversas espécies de plantas e de animais. Seu conhecimento matemático permitiu que efetuasse análises estatísticas dos experimentos realizados com pelo menos 28 mil pés de ervilhas, chegando, assim, a elaborar um modelo teórico para explicar a hereditariedade. Apresentou suas conclusões à comunidade científica em 1865, mas suas idéias foram ignoradas até o início do século XX, quando outros pesquisadores chegaram às mesmas conclusões de Mendel.

Mendel estudou isoladamente sete características físicas de pés de ervilhas: textura e cor das sementes, forma e cor das vagens, altura do pé de ervilha, posição das flores e vagens nos ramos e cor das flores. O biólogo cruzou plantas puras para sementes lisas com plantas puras para sementes rugosas e verificou que na primeira geração (F_1) só apareciam sementes lisas, enquanto na segunda geração (F_2), originada da autofecundação de F_1 , obteve 5 474 sementes lisas e 1 850 rugosas (cerca de $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente). Aplicou os mesmos procedimentos para as outras características, obtendo sempre a mesma proporção 3:1. Mendel denominou de variedade dominante aquela que se manifestava em F_1 e de recessiva aquela que, mantida “oculta” em F_1 , reaparecia em F_2 . No exemplo dado, a variedade lisa era o caráter dominante e a variedade rugosa, o recessivo.

Mendel teorizou que cada caráter era determinado por um par de fatores. Na variedade pura, esses fatores eram iguais: **RR** (lisa) e **rr** (rugosa). Na formação dos gametas, esses fatores se separavam, migrando para cada gameta apenas um fator de cada par.

Observe o esquema para a geração F_1 :

		R	R	← Gametas masculinos
	r	Rr	Rr	
	r	Rr	Rr	
	↑			
	Gametas femininos			

Fonte: Livro MATEMÁTICA: Ensino Médio de Kátia Smole e Maria Diniz

5.2 CONSIDERAÇÕES

O livro analisado nesse capítulo, o livro editado pela saraiva das autoras KATIA SMOLE e MARIA IGNEZ DINIZ é um livro que apresenta o conhecimento de forma tradicional, que não faz os alunos refletirem nas construções dos conceitos.

Na próxima sessão, veremos uma análise dos resultados da aplicação do questioná-

rio, do apêndice A, que foram aplicados aos alunos do ensino médio de 5 escolas e que utilizaram, em sua grande maioria, os livros didáticos supracitados e vamos analisar os resultados obtidos do ensino de probabilidade nos moldes propostos pelos livros.

6 MATERIAL DE APOIO AO PROFESSOR

INTRODUÇÃO

Este material é fruto de um trabalho em conjunto com os professores Bosco Silveira Brito e Fábio Costa Oliveira Neves, os quais produziram em particular partes iniciais a esta proposta conforme já mencionado na introdução deste trabalho.

A primeira parte, de responsabilidade do discente Silveira, já definiu e conceituou Experimentos Determinísticos, Experimentos Aleatórios, Espaço Amostral, Evento e definiu o cálculo de probabilidade.

A segunda parte, de responsabilidade do discente Neves, foi conceituou e distinguiu os eventos certos, impossíveis, complementares, independentes, dependentes e mutuamente exclusivos (ou disjuntos) e eventos não exclusivos (ou conjuntos).

A terceira e última parte por minha responsabilidade e conceituar e explorar as propriedades da probabilidade da união de eventos e probabilidade condicionada.,

A sugestão de material pretende-se ajudar ao nosso trabalho como professor na sala de aula, Além disso, queremos também compartilhar um pouco da nossa experiência com o ensino de probabilidade, para que, somando a sua vivência, possamos tentar atingir nosso principal objetivo: buscar a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, não somente de probabilidade, mas na matemática como um todo.

Acreditamos que no cotidiano da sala de aula podemos, a partir de cada problema proposto, buscar o máximo de estratégias e soluções possíveis apresentadas pelos próprios estudantes, escrevê-las, inclusive, no quadro e através delas mostrar para a turma onde estão os erros e acertos de cada solução, para que eles não venham a cometer novamente os mesmos erros e, na verdade, possam aprender com eles. Isto é o que esperamos.

Esta proposta esta subdividida em 3 planos de aulas, todas estruturadas de acordo com os planejamentos a seguir que contém todo o material necessário, a metodologia e uma proposta de formalização dos conteúdos além de vários exercícios resolvidos, atividades propostas e questões do ENEM.

6.1 PLANO DE ENSINO 1: PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 4 h/a

TEMA: Probabilidade da União de eventos.

Conteúdo Programático:

1 Probabilidade da união de eventos.

1.1 Probabilidade da união de dois eventos.

Objetivo Geral:

- Conceituar a probabilidade da união de eventos

Objetivos Específicos:

- Conceituar a probabilidade da união de eventos;
- Discutir a probabilidade da intersecção de eventos;
- Discutir o princípio multiplicativo das probabilidades;
- Discutir o princípio aditivo das probabilidades;
- Aplicar o conceito em situações do dia a dia.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;

- 1 caixa ou saco plástico opaco;
- 10 bolas de isopor brancas, que caibam na caixa ou saco;
- 6 bolas de isopor azuis, que caibam na caixa ou saco;
- 4 bolas de isopor vermelhas, que caibam na caixa ou saco;

Procedimentos Metodológicos:

O nosso objetivo nessa sessão é abordar os conceitos da probabilidade da União de Eventos e explorar sua aplicabilidade. Para a resolução dessas atividades serão utilizados matérias manipuláveis como caixa com fichas coloridas e numeradas.

- **Dinâmica 1:** Na sala de aula o professor escolhe alguns alunos para juntos realizarem a dinâmica.

Material necessário, para cada aluno ou grupo de alunos: 1 caixa ou saco plástico opacos; 10 bolas de isopor brancas, que caibam em uma das caixas; 6 bolas de isopor azuis, que caibam em uma das caixas; 4 bolas de isopor vermelhas, que caibam em uma das caixas.

- **Metodologia**

- Coloque todas as bolas de isopor na caixa.
- Passe a caixa de aluno em aluno, pedindo para que cada um, sem olhar, tire uma bola e veja a sua cor, e reponha a bola na caixa passando para o próximo aluno fazer o mesmo, até que todos tenham manipulado e de posse da caixa aos olhos dos alunos. Após isso, questione:
- Qual a probabilidade de tirar uma bola azul? Vermelha? Branca?Ao retirar duas bolas da caixa, qual é a probabilidade de tirar uma bola azul ou uma bola vermelha?

- **Dinâmica 2:** O professor divide sua turma em 4 equipes , cada equipe recebe uma caixa com fichas coloridas e numeradas e os grupos devem responder as perguntas que são propostas. A caixa deve conter 10 fichas vermelhas numeradas de 1 a 10; 8 fichas azuis numeradas de 11 a 18; 7 fichas brancas numeradas de 19 a 25 e 5 ficha verde numeradas de 26 a 30.

- **Metodologia**

- Nessa atividade o professor entrega as caixas com as fichas aos alunos, com as quantidades especificadas acima e os mesmos são convidados a responder as questões abaixo, onde eles terão que explorar o todo e as partes de interesse, calculando assim as chances conforme já discutido na parte de definição clássica de probabilidade.

De posse da caixa que você recebeu, e se uma ficha fosse retirada dessa caixa, aleatoriamente, responda as questões abaixo:

- a) Qual a probabilidade dessa ficha ser vermelha?

Como o espaço amostral é formado por 30 fichas, ou seja: $S = \{30 \text{ fichas}\}$

O evento ficha vermelha: $A = \{10 \text{ fichas vermelhas}\}$

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

- b) Qual a probabilidade dessa ficha ser verde?

O espaço amostral: $S = \{30 \text{ fichas}\}$

O evento ficha verde: $B = \{5 \text{ fichas verdes}\}$

$$P = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

- c) Qual a probabilidade dessa ficha ser vermelha ou verde?

Sabemos pelos itens anteriores que a probabilidade de sair uma ficha vermelha é $P(A) = \frac{10}{30}$ e a probabilidade de sair uma ficha verde é $P(B) = \frac{5}{30}$, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{30} + \frac{5}{30} = \frac{15}{30} = 0,50 = 50\%$$

- d) Sorteando aleatoriamente uma dessas fichas numeradas de 1 a 30, qual a probabilidade de que ele seja par ou múltiplo de 3?

Temos nesse caso dois eventos: A (número par) e B (múltiplo de 3), observe que:

$$A = \{2, 4, 6, \dots, 30\}, n(A) = 15,$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, \dots, 30\}, n(B) = 10,$$

$$A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30\} \text{ e } n(A \cap B) = 5$$

Note nesse exemplo que temos elementos comuns, devido a isso não podemos apenas somar, pois temos elemento que suas possibilidades serão contadas mais de uma vez, a solução para esse impasse é subtrair apenas uma vez a intersecção.

Portanto, como $n(S) = 30$, vem:

$$P(A) = \frac{15}{30}, P(B) = \frac{10}{30} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{5}{30}$$

Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}$$

Nos problemas *c* e *d*, o professor deve discutir com os alunos as soluções encontradas por eles e mostrar que a probabilidade da união dos conjuntos pode ser calculada pelo utilização da fórmula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Considere o seguinte experimento aleatório: retirar duas cartas de um baralho comum de 52 cartas e verificar qual é a carta. Qual é a probabilidade de obter um às ou uma carta vermelha?

Solução:

Num baralho padrão temos 52 cartas, sendo 13 de cada naipe:

As cartas são: *A* (ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, *J* (valete), *Q* (dama) e *K* (rei)

13 copas: ♡ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 *J Q K A*

13 ouros: ◇ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 *J Q K A*

13 paus: ♣ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 *J Q K A*

13 espadas: ♠ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 *J Q K A*

Portanto, o espaço amostral possui 52 cartas: $n(S) = \{52\}$

A probabilidade de tiramos um às:

Evento *A*: retirar um às

$A = \{\text{às de copa; às de espadas; às de ouros; às de paus}\}$

$$n(A) = \{4\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52}$$

Evento *B*: retirar uma carta vermelha

$B = \{\text{todas as cartas de ouro; todas as cartas de copas}\}$

$$n(B) = \{26\}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{26}{52}$$

Observe, novamente nesse exemplo que temos elementos comuns nos eventos A e B , ou seja:

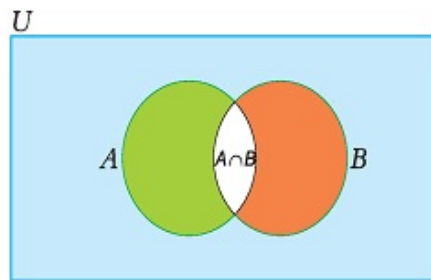
$$A \cap B = A = \{\text{âs de copa; âs de espadas}\}$$

Portanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

FORMALIZANDO O CONCEITO: PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

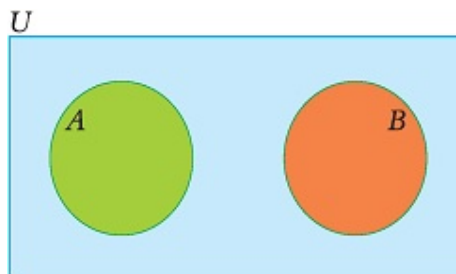
Se A e B são dois eventos de um espaço amostral Ω então a probabilidade de ocorrer o evento A ou B é igual à probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade de ocorrer A e B .



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(Lê-se: probabilidade de ocorrer A ou B)

Em particular: Se caso ocorrer $A \cap B = \emptyset$ (ou seja, a interseção entre os conjuntos A e B é o conjunto vazio), então:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Neste caso, os eventos A e B são chamados mutuamente exclusivos, pois não possuem elemento comum.

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Dois dados são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter a soma dos pontos igual a 8 ou dois números iguais?

Solução:

O espaço amostral seria:

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}, \text{ portanto } n(A) = 36$$

Os eventos seriam:

E_1 : soma 8; $\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$, portanto $n(E_1) = 5$, portanto

$$P(E_1) = \frac{5}{36}$$

E_2 : números iguais; $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$, portanto $n(E_2) = 6$, logo

$$P(E_2) = \frac{6}{36}.$$

$E_1 \cap E_2$: $\{(4, 4)\}$, então $n(E_1 \cap E_2) = 1$, assim $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36}$

$$\text{Então: } P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

2. Qual a probabilidade de, num jogo de dominó (28 "pedras"), ser jogada uma "pedra" que tenha o número 2 ou o número 3?

Solução:

Considere D o evento ocorrer número 2 e T o evento ocorrer número 3.

Temos:

$$n(U) = 28 \text{ (total de "pedras" do jogo de dominó).}$$

O número 2 aparece em sete delas:

$$(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2) \text{ e } (6, 2)$$

Assim, $n(D) = 7$.

Logo, $P(D) = \frac{7}{28}$ e, analogamente, $P(T) = \frac{7}{28}$.

Temos, ainda, $P(D \cap T) = \frac{1}{28}$, pois a pedra (2, 3) é comum às que têm o 3.

$$\text{Logo: } P(D \cup T) = P(D) + P(T) - P(D \cap T) = \frac{7}{28} + \frac{7}{28} - \frac{1}{28} = \frac{13}{28}$$

3. (UFF) Gilbert e Hatcher, em *Mathematics Beyond The Numbers*, relativamente à população mundial, informam que:

- 43% têm sangue tipo O;
- 85% têm Rh positivo;
- 37% têm sangue tipo O com Rh positivo.

Nesse caso, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter sangue tipo O e não ter Rh positivo é de:

- a) 9%
- b) 15%
- c) 37%
- d) 63%
- e) 91%

Solução:

Não ter sangue tipo O e não ter Rh positivo é equivalente pela lei de Morgan a não ter ‘sangue tipo O ou Rh positivo’.

Considere A o evento ter sangue tipo O e B o evento ter Rh positivo.

Logo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 43\% + 85\% - 37\% = 91\%$$

Portanto, não ter sangue tipo O e não ter Rh positivo é $100\% - 91\% = 9\%$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Em uma urna serão colocadas 4 bolas azuis, numeradas de 1 a 4, e 5 bolas amarelas, numeradas de 1 a 5.

Sorteando uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de ela ser azul ou ter número ímpar? (Resolva esse problema de dois modos diferentes primeiro aplicando o teorema da adição de probabilidade, depois aplicando apenas a definição de probabilidade.) $\frac{7}{9}$



2. Na lista de chamada de uma classe, os alunos são numerados de 1 a 30. Para uma chamada oral, o professor sorteou um desses números. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja par ou múltiplo de 6? $\frac{1}{2}$
3. Um colecionador possui em sua videoteca filmes europeus e norte-americanos. Os filmes europeus se distribuem em 10 policiais, 20 romances e 32 comédias. Uma pessoa escolheu, aleatoriamente, um desses filmes para assistir. Calcule a probabilidade de o escolhido ser um filme policial ou um filme europeu. $\frac{3}{5}$
4. Uma loja vende apenas duas marcas de pneus, *A* e *B*. Da marca *A*, a loja tem em estoque 320 pneus de aro 13; 310 de aro 14; 300 de aro 15 e 270 de aro 16. Da marca *B*, tem 300 de aro 13; 300 de aro 14; 310 de aro 15 e 290 de aro 16. Sabendo ser igual a probabilidade de venda para todos os tipos de pneu, qual é a probabilidade de o próximo pneu a ser vendido ser da marca *B* ou ter aro 13?
- a) $\frac{15}{37}$
 b) $\frac{15}{31}$
 c) $\frac{17}{28}$
 d) $\frac{16}{35}$
 e) $\frac{19}{30}$
5. Um cliente escolheu, ao acaso, um apartamento para visitar entre os apartamentos disponíveis para venda em uma imobiliária. A probabilidade de que o apartamento escolhido seja da zona sul é $\frac{1}{2}$, a probabilidade de que tenha mais de uma vaga de garagem é $\frac{2}{3}$, e a probabilidade de esse apartamento ser as zona sul ou ter mais de uma vaga de garagem. $\frac{3}{4}$
6. (UEPA) Os cursos ofertados pela UEPA no PROSEL e PRISE, no município de IGARAPÉAÇU, com as respectivas vagas, constam na tabela abaixo:

CURSO OFERTADO	PROSEL	PRISE
Licenciatura em Letras	20	20
Licenciatura em Matemática	20	20

Supondo que todas as vagas serão preenchidas, a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um aluno do Curso de Licenciatura em Matemática ou um aluno aprovado no PRISE é de:

- a) 25%
 - b) 50%
 - c) 60%
 - d) 75%
 - e) 100%
7. (UNESP) Em um colégio foi realizada uma pesquisa sobre as atividades extracurriculares de seus alunos. Dos 500 alunos entrevistados, 240 praticavam um tipo de esporte, 180 frequentavam um curso de idiomas e 120 realizavam estas duas atividades, ou seja, praticavam um tipo de esporte e frequentavam um curso de idiomas. Se, nesse grupo de 500 estudantes um é escolhido ao acaso, a probabilidade de que ele realize pelo menos uma dessas duas atividades, isto é, pratique um tipo de esporte ou frequente um curso de idiomas, é:
- a) $\frac{18}{25}$
 - b) $\frac{3}{5}$
 - c) $\frac{12}{25}$
 - d) $\frac{6}{25}$
 - e) $\frac{2}{5}$
8. (UEPA) O professor Francisco de Assis realizou uma pesquisa em uma de suas turmas de 2ª série do ensino médio para saber a preferência dos alunos a respeito do tema a ser escolhido para a feira cultural da escola. Assim, apresentou aos alunos dois temas:

Cidadania e Meio Ambiente, obtendo os seguintes resultados:

40 alunos escolheram Cidadania

25 alunos escolheram Meio Ambiente

10 alunos escolheram ambos os temas

5 alunos não escolheram nenhum dos dois temas.

Desta forma, selecionando um aluno da sala, a probabilidade dele ter escolhido **apenas** Meio Ambiente como tema é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

9. (FGV) Uma pesquisa com três marcas concorrentes de refrigerantes, A, B e C , mostrou que 60% das pessoas entrevistadas gostam de A , 50% gostam de B , 57% gostam de C , 35% gostam de A e C , 18% gostam de A e B , 24% gostam de B e C , 2% gostam das três marcas e o restante das pessoas não gosta de nenhuma das três. Sorteando-se aleatoriamente uma dessas pessoas entrevistadas, a probabilidade de que ela goste de uma única marca de refrigerante ou não goste de marca alguma é de:

a) 16%

b) 17%

c) 20%

d) 25%

e) 27%

6.2 PLANO DE ENSINO 2: PROBABILIDADE CONDICIONADA

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 4 h/a

TEMA: Probabilidade Condicional.

Conteúdo Programático:

Probabilidade condicional.

Objetivo Geral:

- Conceituar a probabilidade condicional.

Objetivos Específicos:

- Conceituar a probabilidade condicional;
- Aplicar o conceito em situações do dia a dia.

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;

- Pincel para quadro branco;
- 1 caixa ou saco plástico opaco;
- 10 bolas de isopor brancas, que caibam na caixa ou saco;
- 6 bolas de isopor azuis, que caibam na caixa ou saco;
- 4 bolas de isopor vermelhas, que caibam na caixa ou saco;
- fichas coloridas numeradas de 1 a 30;
- 10 bolas numeradas de 1 a 10;
- dois dados comuns;

Procedimentos Metodológicos:

O nosso objetivo nessa sessão é abordar os conceitos da probabilidade condicionada e explorar sua aplicabilidade. Para a resolução dessas atividades serão utilizados matérias manipuláveis como fichas coloridas e numeradas, bolas de isopor e dois dados.

- **Dinâmica 3:** Continuando a Dinâmica 1.

- **Metodologia**

- Coloque todas as bolas de isopor na caixa, discurta:
- Retirando-se duas bolas da caixa qual a probabilidade da segunda bola ser azul, sabendo que a primeira foi azul e não houve reposição?
- Retirando-se três bolas da caixa qual a probabilidade da terceira bola ser branca, sabendo que a primeira foi azul e a segunda foi vermelha e não houve reposição?

Responda as questões anteriores considerando que houve reposição.

- **Dinâmica 4:** O professor divide sua turma em 4 equipes , cada equipe recebe uma caixa com fichas coloridas e numeradas e os grupos devem responder as perguntas que são propostas. A caixa deve conter 10 fichas vermelhas numeradas de 1 a 10; 8 fichas azuis numeradas de 11 a 18; 7 fichas brancas numeradas de 19 a 25 e 5 ficha verde numeradas de 26 a 30.

- **Metodologia**

- Nessa atividade o professor entrega as caixas com as fichas aos alunos, com as quantidades especificadas acima e os mesmos são convidados a responder as questões abaixo, onde eles terão que explorar o todo e as partes de interesse, calculando assim as chances conforme já discutido na parte de definição clássica de probabilidade.

- **Dinâmica 5:** Para essa atividade será utilizado uma urna com 10 bolas numeradas de 1 a 10.

- **Metodologia**

- O professor sorteará uma bola e dará a turma uma informação a respeito da bola sorteada e a turma terá duas oportunidades para descobrir que número foi sorteado
- O objetivo dessa atividade é mostrar aos alunos que, de posse de uma informação privilegiada, o “chute” na resposta correta se restringe a um conjunto de valores que atendem a tal informação e não mais a todo o espaço amostral. Após essa discussão, os alunos devem ser convidados a responder as questões abaixo.

Considere o seguinte experimento aleatório: dez bolas numeradas de 1 a 10 dentro de uma urna. Será feito um sorteio de apenas uma bola. Se a bola sorteada for de número ímpar, qual a probabilidade de que esse número seja maior que 6?

Observe que a situação descrita não apresenta espaço amostral:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

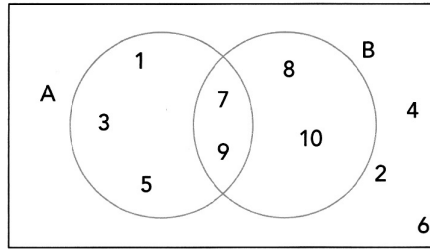
pois há a condição de que a bola sorteada tem número ímpar.

Tal condição, reduz o espaço amostral para $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Seja o evento $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, formado pelos elementos ímpares de E , e o evento $B = \{7, 8, 9, 10\}$, formado pelos elementos de E maiores que 6.

Observe, agora, o diagrama:

Com o espaço amostral foi reduzido, a probabilidade pedida é:



$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{5}$$

- **Dinâmica 6:** Essa atividade será feita utilizando dois dados de 6 faces cada. Cada integrante do grupo deverá escolher um número de 1 a 6.

- **Metodologia**

- Em seguida, cada participante jogará um dado de cada vez, uma única vez. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos dados, a pessoa vence.
- O professor nesse momento, por exemplo, pode discutir com seus discentes as seguintes questões:

a) Qual a probabilidade de sair o número 2 em pelo menos um dos dados ?

O espaço amostral é do tipo (dado 1, dado 2). Assim:

$$S = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (6, 6); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)\}$$

Como queremos que saia o número 2 em pelo menos um dos dados, temos:

$$\text{Evento } A = \{(1, 2); (2, 2); (3, 2); (4, 2); (5, 2); (6, 2); (2, 1); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6)\}$$

Então, a probabilidade de sair o número 2 é

$$P(A) = \frac{\text{número elementos de}(A)}{\text{número elementos de}(S)} = \frac{11}{36}$$

b) Qual é a probabilidade de você ganhar sendo que você não obteve o número 2 no primeiro dado?

O nosso espaço amostral será formado pelos pares ordenados que não apresente o número dois como primeiro elemento.

Então

$$S' = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (6, 6); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)\}$$

Nosso novo evento B extraído de S' agora será os pares ordenados que apresentam o número 2, como segundo elemento, ou seja; Evento

$$A = \{(2, 2); (3, 2); (4, 2); (5, 2); (6, 2)\}$$

A probabilidade pedida é:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

FORMALIZANDO O CONCEITO: PROBABILIDADE CONDICIONADA

Nessa sessão iremos construir o conceito de Probabilidade Condicional e resolver problemas relativos a esse conceito.

Considere o seguinte problema, extraída da revista do professor de matemática, número 4.

Numa rifa são vendidos 100 bilhetes numerados de 00 à 99. Um único prêmio será entregue ao portador do bilhete que for escolhido por sorteio. Esse sorteio será realizado em duas etapas, utilizando-se uma com dez bolas numeradas de 0 a 9. Na primeira etapa, uma bola é escolhida ao acaso obtendo-se assim o algarismo das unidades do número premiado; em seguida, essa bola é devolvida à urna e repete-se o processo para que seja obtido o algarismo das dezenas.

Vamos analisar a situação de dois indivíduos, João e Paulo, cujos bilhetes têm os números 25 e 47 respectivamente.

Antes de ser iniciado o sorteio (e supondo-se que ele seja honesto) os dois têm a mesma probabilidade de sucesso, igual a $\frac{1}{100}$.

Supondo-se que a primeira bola sorteada tenha o número 7, o conjunto dos resultados possíveis do sorteio se reduz a um conjunto com dez elementos, a saber: $\{07, 17, \dots, 97\}$. João já pode rasgar o seu bilhete pois, suas chances de vitória se reduziram de $\frac{1}{100}$ para 0.

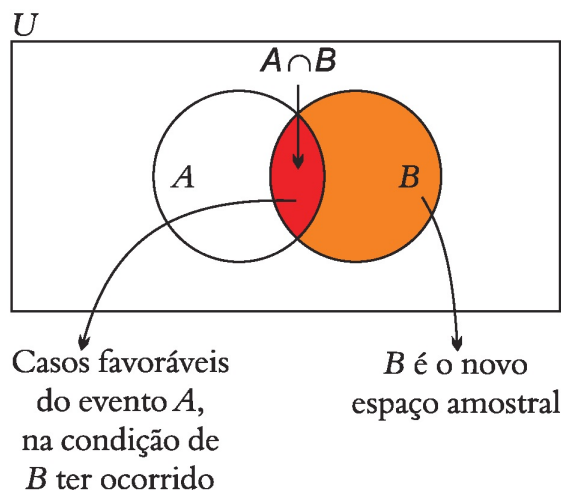
Por outro lado, Paulo viu sua chance multiplicada por 10, passando de $\frac{1}{100}$ para $\frac{1}{10}$. Seja A o evento “Paulo ganha o prêmio”, B o evento “João ganha o prêmio” e C o evento “o número sorteado termina em 7”. Antes da realização da primeira etapa, tínhamos: $P(A) = P(B) = \frac{1}{100}$ e $P(C) = \frac{1}{10}$.

As probabilidades, 0 e $\frac{1}{10}$, calculadas após a realização da primeira etapa, são denominadas probabilidades condicionais de B e A respectivamente, dado que ocorreu o evento C .

Nesse exemplo as probabilidades condicionais foram calculadas através da redução do espaço amostral ao conjunto C , que passou a ser o espaço associado à segunda etapa do sorteio.

Vamos agora desenvolver a seguinte ideia.

Considere que desejamos calcular a probabilidade da ocorrência de um evento A , sabendo-se de antemão que ocorreu certo evento B . Pela definição de probabilidade vista anteriormente, sabemos que a probabilidade de A deverá ser calculada, dividindo-se o número de elementos de A que também pertencem a B , pelo número de elementos de B . A probabilidade de ocorrer A , sabendo-se que já ocorreu B , é denominada Probabilidade condicional e é indicada por $P(A|B)$ — probabilidade de ocorrer A sabendo-se que já ocorreu B — daí, o nome de probabilidade condicional. Neste caso, o espaço amostral passa a ser o evento B , e o conjunto dos resultados favoráveis é dado por $A \cap B$.



Do diagrama pode-se concluir que:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \text{ ou ainda: } P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} \text{ e, portanto: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

A notação usada para a probabilidade condicional é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$P(B|A)$ é a probabilidade de ocorrer o evento B . Dado que o evento A já ocorreu.

Generalizando, temos:

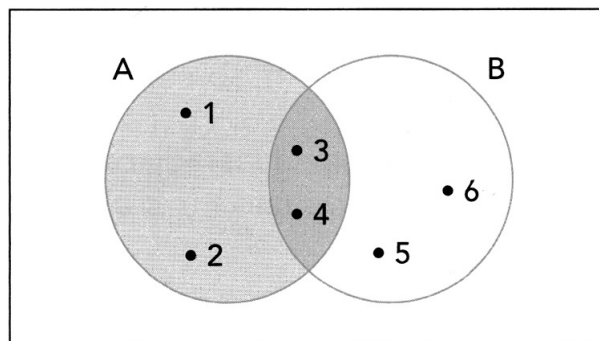
“A probabilidade de ocorrerem dois eventos A e B é a probabilidade de ocorrer o evento A multiplicada pela probabilidade de ocorrer o evento B , tendo ocorrido o evento A .”

Ou seja:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. No lançamento de um dado, considere os seguintes eventos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Qual é a probabilidade de ocorrer o evento B , sabendo-se que ocorreu o evento A ?



Solução:

Sabemos que, ocorreu o evento A ; logo, o espaço amostral fica reduzido a esse evento. O evento B só poderá ocorrer na intersecção de A e B . Assim, temos:

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. Um grupo de 50 moças é classificado de acordo com a cor dos cabelos, e dos olhos de cada moça, segundo a tabela:

	Azuis	Castanhos
Loira	17	9
Morena	4	14
Negra	3	3

Se você marca um encontro com uma dessas garotas, escolhida ao acaso, qual a probabilidade dela ser:

a) Morena de olhos azuis?

Solução:

O total de moças é 50.

O número de morenas de olhos azuis é 4.

Logo:

$$P(M_{AZUL}) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

b) Morena ou ter olhos azuis?

Solução:

O total de moças é 50.

O número moças que satisfazem a essa união não disjuntas é calculado pela teoria de conjuntos:

$$n(M \cup AZ) = n(M) + n(AZ) - n(M \cap AZ) = 18 + 24 - 4 = 38$$

Logo a probabilidade pedida é:

$$P(M \cup AZ) = \frac{n(M \cup AZ)}{50} = \frac{38}{50} = \frac{19}{25}$$

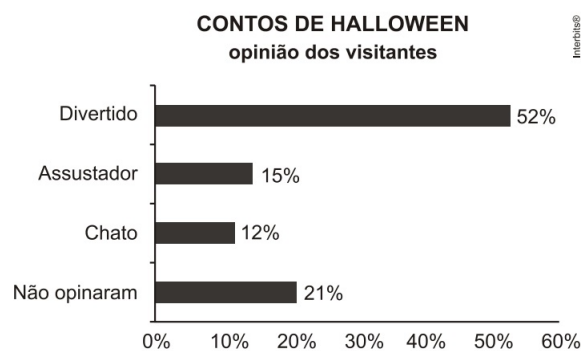
c) Suponha que está chovendo quando você encontra a garota. Seus cabelos estão cobertos, mas você percebe que ela tem olhos castanhos. Qual a probabilidade de que ela seja morena?

Solução:

A probabilidade condicional pedida é $P(M \setminus C)$ que significa a probabilidade de a moça ser morena sabendo que ela possui olhos castanhos:

$$P(M \setminus C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{14}{50}}{\frac{26}{50}} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$$

3.(ENEM) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

- a) 0,09.
- b) 0,12.
- c) 0,14.
- d) 0,15.**
- e) 0,18.

Solução: Observe que o espaço amostral foi reduzido para as pessoas que opinaram, ou seja: $100\% - 21\% = 79\%$.

Portanto a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é igual a:

$$p = \frac{12\%}{79\%} \cong 15\%$$

4. Ao responder uma pergunta num teste de múltipla escolha, um candidato ou sabe a resposta correta ou tenta adivinhar a resposta correta. Seja 0,75 a probabilidade de que o candidato saiba a resposta correta da questão. Caso não saiba a resposta correta o candidato escolhe uma entre quatro opções com probabilidade 0,25 de acerto. Assinale a opção que corresponde ao valor da probabilidade condicional de que o candidato realmente saiba uma questão que tenha respondido corretamente.

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $\frac{3}{16}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{11}{16}$
- e) $\frac{12}{13}$

Solução: basta construir a nossa “árvore” de probabilidades, designando por:

$S \rightarrow$ o candidato SABE a resposta;

$\bar{S} \rightarrow$ o candidato NÃO SABE a resposta.

$A \rightarrow$ o candidato ACERTA a questão;

$\bar{A} \rightarrow$ o candidato NÃO ACERTA a questão.

Como as opções de respostas estão expressas na forma fracionária, facilitará transformarmos 0,75 para $\frac{3}{4}$ e 0,25 para $\frac{1}{4}$. A probabilidade condicional pedida é: “qual a probabilidade de o candidato saber a questão, dado que respondeu corretamente (acertou a questão)?”. Ou seja:

$P(S/A)$, que será igual a $\frac{P(S \cap A)}{P(A)}$.

Então:

$$P(S/A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{13}{16}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{13} = \frac{12}{13}$$

5. Uma em cada 10 pessoas de uma população tem uma determinada doença. Das pessoas que têm a doença, 80% reagem positivamente ao teste Y , enquanto 20% dos que não têm a doença também reagem positivamente. Uma pessoa é selecionada ao acaso na população e o teste Y é aplicado. Assinale a opção que corresponde à probabilidade de que a pessoa selecionada não esteja realmente doente, sabendo-se que reagiu positivamente ao teste Y .

- a) 16,0%
- b) 28,0%
- c) 95,0%
- d) 69,2%
- e) 40,0%

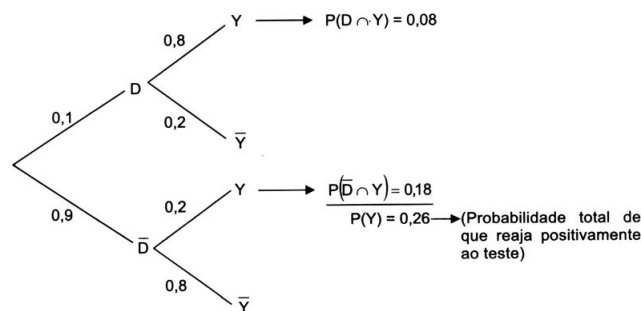
Solução: basta construir a nossa “árvore” de probabilidades, designando por: $D \rightarrow$ tem a doença; $\bar{D} \rightarrow$ não tem a doença; $Y \rightarrow$ reagem positivamente ao teste; $\bar{Y} \rightarrow$ não reagem positivamente ao teste; Se uma em cada 10 pessoas tem a doença ($D = 10\% = 0,1$), então, 9 em cada 10 pessoas não têm a doença ($\bar{D} = 90\% = 0,9$).

Se, dos que têm a doença, 80% ($Y = 0,8$) reagem positivamente ao teste, 20% ($\bar{Y} = 0,2$) não reagirão. Se, entre os que não têm a doença, 20% ($Y = 0,2$) reagem positivamente, 80% ($\bar{Y} = 0,8$) não reagirão.

A probabilidade condicional pedida é: “qual a probabilidade de a pessoa não estar doente, dado que reagiu positivamente ao teste?”. Ou seja:

$$P(\bar{D}/Y) \text{ que será igual a } \frac{P(\bar{D} \cap Y)}{P(Y)}.$$

Para facilmente encontrar o valor do numerador e do denominador dessa fração, construiremos nossa “árvore”:



Logo:

$$P(\bar{D}/Y) = \frac{P(\bar{D} \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0,16}{0,26} \cong 69,2\%.$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Dois eventos, A e B , de um espaço amostral equiprovável E , finito e não vazio, são tais que $n(A \cap B) = 30$ e $n(A) = 120$. Calcule $P(B/A)$. **1/4**

2. Dois eventos, A e B , de um espaço amostral equiprovável E , finito e não vazio, são tais que $P(A \cap B) = \frac{5}{8}$ e $P(A) = \frac{3}{4}$. Calcule $P(B/A)$. **5/6**

3. No lançamento de dois dados, sabe-se que foi obtida, nas faces voltadas para cima, a soma de pontos igual a 6. Qual é a probabilidade de que essas faces apresentem o mesmo número de pontos? **1/5**

4. Um número foi sorteado entre os múltiplos positivos de 5 menores que 52. Sabendo que o número sorteado é ímpar, calcule a probabilidade de que ele seja:

a) O número 25. **1/5**

b) Maior que 17. **3/5**

c) Múltiplo de 3. **2/5**

5. O departamento responsável pelo controle de qualidade de uma indústria de televisores examinou 200 televisores que permaneceram ligados durante certo período de tempo, observando que: 98 aparelhos apresentaram problemas de som, 70 aparelhos apresentaram nenhum tipo de problema. Um desses 200 aparelhos foi escolhido ao acaso, e constatou-se que ele apresentava problemas de imagem. Qual é a probabilidade de que esse aparelho também apresente problemas de som? **3/7**

6. Antes do lançamento de um novo produto no mercado, o fabricante encomendou uma pesquisa sobre a aceitação de dois produtos concorrentes, A e B , já existentes no mercado.

Quatrocentas pessoas responderam à pesquisa, das quais:

- 300 já conseguiram o produto A ;
- 275 já consumiram o produto B ;
- 37 não consumiram A nem B .

Uma dessas pessoas foi escolhida aleatoriamente, e constatou-se que ela já consumiu o produto A. Qual é a probabilidade de que essa pessoa já tenha consumido também o produto B? $53/75$.

7. Para se ter ideia do perfil dos candidatos ao curso de Odontologia em um vestibular, 600 estudantes candidatos a esse curso foram selecionados ao acaso e entrevistados, sendo que, entre esses, 260 eram homens. Descobriu-se que 140 desses homens e 100 das mulheres entrevistadas já estavam cursando o ensino superior em outra instituição. Se um dos 600 estudantes entrevistados for selecionado ao acaso, a probabilidade de ele ser uma mulher que, no momento da entrevista, não estava cursando o ensino superior é igual a

- a) 0,12
- b) 0,57
- c) 0,40
- d) 0,70
- e) 0,42

8. Em determinado concurso, inscreveram-se 110 candidatos, dos quais 30 optaram por Espanhol e 80, por Inglês. O resultado está expresso na tabela abaixo.

As probabilidades de um candidato, escolhido ao acaso, ter conseguido classificação se retirado entre

- I) Os optantes de Espanhol
- II) Todos os inscritos são, respectivamente,

	Classificados	Não Classificados	Total
Espanhol	10	20	30
Inglês	25	55	80
Total	35	75	110

- a) $\frac{1}{3}$ e $\frac{7}{22}$
- c) $\frac{3}{22}$ e $\frac{15}{22}$
- e) $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{7}$

b) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{7}$

d) $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{11}$

Texto

Dois artigos, publicados na revista científica The New England Journal of Medicine, apresentam os resultados dos testes clínicos com vacinas desenvolvidas pela farmacêutica australiana CSL e pela suíça Novartis. As duas pesquisas mostram que uma única dose de vacina será capaz de imunizar contra a gripe suína. Até agora, especialistas apontavam necessidade de uma segunda dose para garantir eficácia contra o H1N1. (...) Os Estados Unidos encomendaram 195 milhões de doses da vacina e devem começar a imunizar a população no início de outubro. Terão prioridade grupos de risco, como profissionais de saúde, crianças e mulheres grávidas.

(O Estado de S.Paulo. 14.09.2009. Adaptado)

9. A vacina da CSL foi testada em 240 voluntários australianos adultos. Admita que, para essa pesquisa, todos os voluntários tenham sido classificados de acordo com o sexo e o estado civil, conforme mostra a tabela:

	Solteiro	Casado	Divorciado	Viúvo
Masculino	40	40	25	15
Feminino	80	25	10	5

Uma pessoa desse grupo é escolhida ao acaso. Sabendo-se que ela é solteira, a probabilidade de tal pessoa ser do sexo masculino é

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{5}{6}$

10. O sangue humano costuma ser classificado em diversos grupos, sendo os sistemas ABO e Rh os métodos mais comuns de classificação. A primeira tabela abaixo fornece o percentual da população brasileira com cada combinação de tipo sanguíneo e fator Rh. Já a segunda tabela indica o tipo de aglutinina e de aglutinôgenio presentes em cada grupo sanguíneo.

Tipo	Fator Rh	
	+	-
A	34%	8%
B	8%	2%
AB	2,5%	0,5%
O	36%	9%

Tipo	Aglutinogênios	Aglutininas
A	A	Anti-B
B	B	Anti-A
AB	A e B	Nenhuma
O	Nenhum	Anti-A e Anti-B

Em um teste sanguíneo realizado no Brasil, detectou-se, no sangue de um indivíduo, a presença de aglutinôgenio A. Nesse caso, a probabilidade de que o indivíduo tenha sangue A+ é de cerca de

- a) 76%
- b) 34%.
- c) 81%.
- d) 39%.

11. Todos os alunos de uma turma de uma escola secundária praticam pelo menos um dos dois desportos seguintes: Handebol e basquetebol. Sabe-se que:

- Metade dos alunos da turma pratica Handebol
- 70% dos alunos da turma praticam basquetebol

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e constata-se que ele é praticante de Handebol. Qual é a probabilidade de ele praticar basquetebol?

- a) 0,1
- b) 0,2

c) 0,3

d) 0,4

12. (UFPA) No Departamento de Recursos Humanos de uma instituição pública de ensino superior estima-se que, quando um servidor redige um documento, em 90% dos casos não há erros, mas quando um bolsista redige apenas 50% não contêm erros. Sabe-se, também, que $\frac{2}{3}$ dos documentos são redigidos por bolsistas. Se um determinado documento contém erros, a probabilidade de ter sido redigido por um bolsista é igual a

a) $\frac{9}{30}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{11}{30}$

d) $\frac{19}{30}$

e) $\frac{10}{11}$

13. Em determinado hospital, no segundo semestre de 2007, foram registrados 170 casos de câncer, distribuídos de acordo com a tabela abaixo:

	Câncer de Pulmão		Outros tipos de Câncer	Total
	Fumante	Não-Fumante		
Homem	54	6	40	100
Mulher	45	5	20	70

A probabilidade de uma dessas pessoas, escolhida ao acaso, ser mulher, sabendo-se que tem câncer de pulmão, é:

a) $\frac{5}{11}$

b) $\frac{7}{17}$

c) $\frac{6}{17}$

d) $\frac{3}{11}$

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística.

Niterói: UFF2008 (versão para download em:

<http://www.professores.uff.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf>).

6.3 PLANO DE ENSINO 3: PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES.

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 4 h/a

TEMA: Probabilidade de eventos independentes

Conteúdo Programático:

- Probabilidade de eventos independentes.

Objetivo Geral:

- Conceituar a probabilidade de eventos independentes, como consequência da probabilidade condicional.

Objetivos Específicos:

- Conceituar a probabilidade de eventos independentes;
- Aplicar o conceito em situações do dia a dia.

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;

- Pincel para quadro branco;
- Jogo de dominó.
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

A finalidade dessa secção é abordar uma consequência da probabilidade condicionada que é o Teorema do Produto e explorar sua aplicabilidade.

- **Dinâmica 7:** Para a realização dessas atividade será utilizado o jogo de peças conhecido como Dominó.

- **Metodologia**

- Considere um jogo de dominó 28 pedras retangulares. Cada pedra está dividida em 2 espaços iguais nos que aparece um número de 0 até 6. As pedras abrangem todas as combinações possíveis com estes números.
- Caso não tenha o jogo de dominó o professor poderia construir junto com os alunos, utilizando papelão.
- O professor poderá fazer vários experimentos, por exemplo:

Retire ao acaso desse dominó uma peça, e sem reposição, retira outra. Qual a probabilidade da soma dos pontos obtida em cada uma das peças retiradas ser igual a 7?

Vamos considerar os seguintes eventos:

A: ocorrência, na 1ª retirada, de uma peça cuja soma dos pontos é igual a 7.

B: ocorrência, na 2ª retirada, de uma peça cuja soma dos pontos é igual a 7.

Observe que a probabilidade de B é condicional em relação a A.

Queremos calcular $P(A \cap B)$, ou seja, a probabilidade de as peças da 1ª e 2ª retiradas terem pontos cuja soma é 7.

Na sessão anterior, vimos que, nesse caso, precisamos calcular $P(A)$ e $P(B|A)$.

$P(A)$: Na 1ª retirada temos três peças cuja soma é 7 de um total de 28 peças.

Logo, $P(A) = 3/28$.

Calculando $P(B|A)$:

Na 2ª retirada, como é sem reposição, há 2 peças, cuja soma é 7 de um total de 27 peças. Logo, $P(B|A) = 2/27$.

Portanto,

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{2}{27} \cdot \frac{3}{28} = \frac{6}{756} = 0,008 \text{ ou } 0,8\%.$$

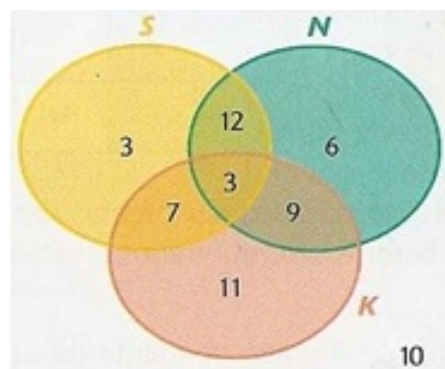
FORMALIZANDO O CONCEITO: PROBABILIDADE DOS EVENTOS INDEPENDENTES

Dois eventos, A e B, de um mesmo espaço amostral (isto é, dois eventos associados ao mesmo experimento aleatório), são independentes quando a probabilidade de que eles ocorram simultaneamente for igual ao produto de suas probabilidades individuais. Em símbolos, A e B serão independentes quando:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Num ginásio fez-se um inquérito acerca da prática de surf (S) natação (N) e karaté (K). Os resultados do inquérito estão resumidos no diagrama seguinte. Escolhido um aluno do ginásio ao acaso, qual é a probabilidade de:



- praticar karaté?
- praticar natação se faz surf?
- um praticante de karaté não praticar surf?

d) Investigue se nesse ginásio a prática de surf é independente da prática de natação.

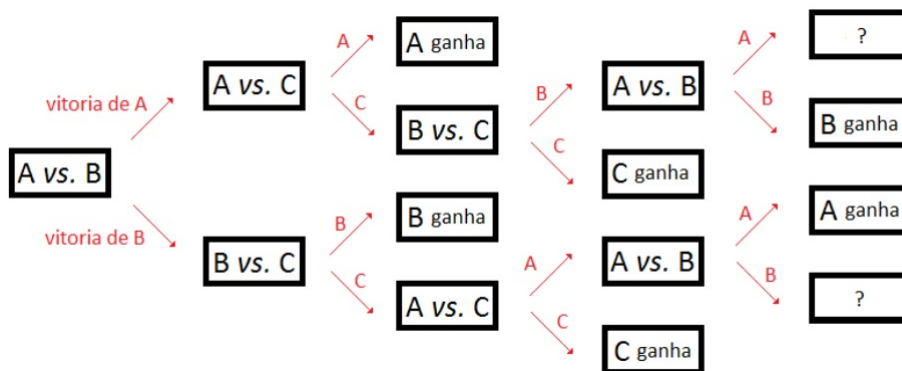
2. Três jogadores A, B e C disputam um torneio de tênis. Inicialmente, A joga com B e o vencedor joga com C, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes seguidas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Suponha que cada jogador tem a mesma probabilidade de vencer, responda:

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág. 105.

(a) Mostre que a soma das probabilidades dos pontos do espaço amostral é 1.

Solução:

Considere a árvore de possibilidades:



Os possíveis eventos são: AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA e BCAB.

Aí, temos que :

$$\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} P(AA) + P(BB) + P(ACC) + P(BCC) + P(ACBA) + P(ACBB) + P(BCAA) + P(BCAB) &= \\ = 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 &= 1 \end{aligned}$$

b) Qual a probabilidade que A vença? Qual a probabilidade que B vença?

Solução:

$$P(\text{A vencer}) = P(AA) + P(BCAA) = 1/4 + 1/16 = 5/16 = 0,3125.$$

De modo análogo:

$$P(B \text{ vencer}) = P(BB) + P(ACBB) = 1/4 + 1/16 = 5/16 = 0,3125$$

c) Qual a probabilidade que não haja decisão?

Solução:

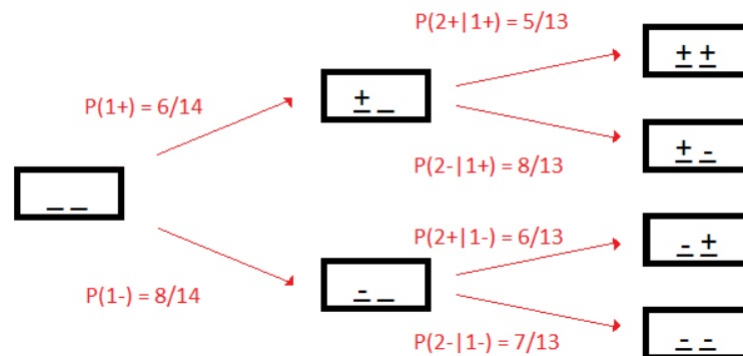
$$P(\text{não haver decisão}) = P(ACBA) + P(BCAB) = 2/16 = 0,125.$$

3. Dentre seis números positivos e oito negativos, dois números são escolhidos ao acaso (sem reposição) e multiplicados. Qual a probabilidade que o produto seja positivo?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág. 110.

Solução:

Como não temos reposição, podemos usar uma árvore de possibilidades:



Com a ajuda do diagrama, observamos que:

$$P(+ +) = \frac{6}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

$$P(+ -) = \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

$$P(- +) = \frac{8}{14} \times \frac{6}{13} = \frac{24}{91}$$

$$P(- -) = \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = \frac{4}{13}$$

Como queremos que o produto dos dois números seja positivo, queremos ++ ou --, e então temos uma probabilidade igual a:

$$\frac{15}{91} + \frac{4}{13} = \frac{43}{91} \text{ ou aproximadamente } 47,25\%.$$

4. Dois sacos exteriormente iguais contêm bolas pretas e vermelhas.

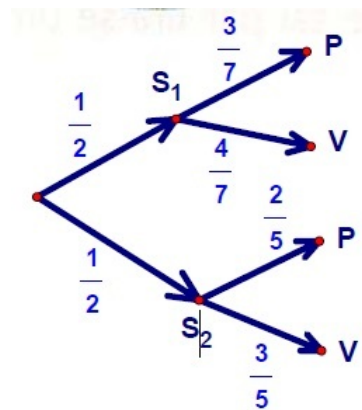
- No saco S_1 há 3 bolas pretas e 4 bolas vermelhas
- No saco S_2 há 2 bolas pretas e 3 vermelhas.

Escolhe-se ao acaso um saco e tira-se uma bola.

- Qual é a probabilidade de que a bola extraída seja vermelha?
- A bola extraída é preta, qual é a probabilidade de que tenha sido extraída do saco S_1 ?
- Qual é a probabilidade de que a bola extraída seja vermelha e tenha saído do saco S_2 ?

Solução:

Observe a árvore de possibilidades



a) A probabilidade de que a bola extraída seja vermelha é

$$P(V) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{41}{70}$$

b) A bola extraída é preta, a probabilidade de que tenha sido extraída do saco S_1 é:

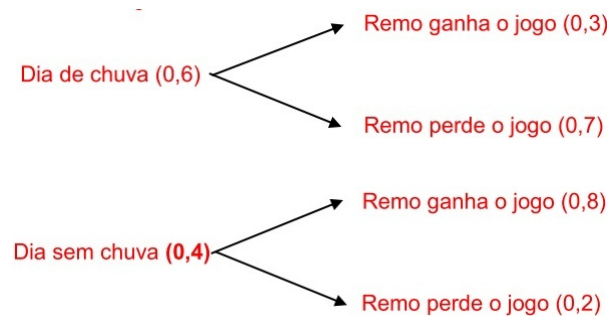
$$P(S_1|P) = \frac{P(S_1 \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}} = \frac{15}{29}$$

c) A probabilidade de que a bola extraída seja vermelha e tenha saído do saco S_2 é

$$P(V \cap S_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

5. Durante o mês de Fevereiro a probabilidade de chuva é de 0,6. O Clube do Remo ganha um jogo em um dia de chuva com probabilidade 0,3; em um dia sem chuva com probabilidade 0,8. Se Remo ganhou um jogo em Fevereiro, qual é a probabilidade de que choveu nesse dia?

Solução: desenhando o diagrama de árvore, temos:



Queremos calcular seja a probabilidade de ter chovido dado que o Clube do Remo ganhou, ou seja:

$$P(\text{Choveu} \mid \text{Remo ganhou}) = \frac{P(\text{Choveu e o Remo ganhou})}{P(\text{Remo ganhou})}$$

$$P(\text{Choveu} \mid \text{Remo ganhou}) = \frac{0,6 \times 0,3}{0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,8} = \frac{0,18}{0,5} = 36\%$$

Então, a resposta é 36%.

6. João e José disputam um jogo com uma moeda equilibrada. Cada jogador lança a moeda duas vezes e vence o jogo aquele que obtiver dois resultados iguais. João começa jogando e, se não vencer, passa a moeda para José e, continuam assim, alternando as jogadas até alguém vencer. A namorada de José desconfia da honestidade do jogo e reclama que João tem mais probabilidade de vitória por iniciar o jogo. Por outro lado, a namorada de João diz que isso é besteira, pois, como o número de jogadas pode ser infinito, tanto faz quem começa jogando. Quem será que tem razão?

Solução: Observe a probabilidade individual

$$P(\text{José vencer o jogo}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{João vencer o jogo}) = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Dois eventos independentes, A e B , são tais que $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$. Calcule:

- a) $P(A/B)$ **3/5**
- b) $P(B/A)$ **2/3**
- c) $P(A \cap B)$ **2/5**
- d) $P(A \cup B)$ **13/15**

2. Uma urna contém 4 bolas, numeradas de 1 a 4. Um experimento consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, 2 bolas dessa urna, considerando como resultado o par ordenado (x, y) , em que x é o número de bola da primeira retirada e y é o número de bola da segunda retirada.

- a) Calcule o número de elementos do espaço amostral E desse experimento. **12**
- b) Determine o evento A formado pelos pares ordenados de E cujo primeiro elemento é 3. Calcule $P(A)$. **1/4**
- c) Determine o evento B formado pelos pares ordenados de E cujo segundo elemento é 2. Calcule $P(B)$. **1/4**
- d) Calcule a probabilidade de obter o número 2 na segunda bola retirada sabendo que na primeira retirada obteve-se a bola com o número 3. **1/3**
- e) Os eventos A e B são independentes? Por quê? **Não, pois $P(A/B) \neq P(A)$**

3. Uma urna contém precisamente 10 bolas, sendo: 3 verdes, 2 pretas e 5 azuis. Retirando 3 bolas da urna, uma de cada vez e com reposição, calcule a probabilidade de saírem:

- a) A primeira bola verde, a segunda preta e a terceira azul. $3/100$
- b) 3 bolas de cores diferentes. $9/50$
- c) 3 bolas azuis. $1/8$
4. Um estojo contém exatamente 9 canetas esferográficas, sendo: 5 de tinta azul e 4 de tinta vermelha. Retirando aleatoriamente 5 canetas desse estojo, sucessivamente e sem reposição, calcule a probabilidade de sair:
- a) 4 de tinta azul e uma de tinta vermelha. $10/63$
- b) 3 de tinta azul e 2 de tinta vermelha. $10/21$
- c) 5 de tinta azul. $1/126$
- d) Pelo menos uma de tinta vermelha. $125/126$
5. Em uma caixa de costura, há exatamente 5 botões de quatro furos e 4 botões de dois furos. Retirando simultaneamente 6 botões dessa caixa, qual é a probabilidade de saírem 5 botões de quatro furos e 1 de dois furos? $1/21$
6. Um mágico colocou em sua cartola 4 cartas de copas, 3 de paus e 2 de espadas. A seguir, pediu a uma criança que retirasse simultaneamente 3 cartas da cartola. Calcule a probabilidade de a criança ter retirado:
- a) 3 cartas de copas. $1/21$
- b) 2 cartas de copas e 1 de paus. $3/14$
- c) 3 cartas de naipes diferentes. $2/7$
7. Sorteando 2 alunos entre 6 rapazes e 6 garotas de uma sala de aula, calcule a probabilidade de serem sorteados:
- a) 2 rapazes. $5/22$
- b) Um rapaz e uma garota. $6/11$

c) Ana e Rui, sabendo que estão participando do sorteio. $1/66$

8. Sorteando dois vértices distintos de um cubo, qual é a probabilidade de que ambos pertençam a uma mesma face do cubo? $6/7$

12. Sob certas condições climáticas e de solo, a probabilidade de uma semente germinar é de 60%. Nessas condições, plantando 3 dessas sementes, a probabilidade de que nasça uma planta é:

a) 86,8%

b) 100%

c) 98,8%

d) 93,6%

e) 84,4%

9. Uma gaveta contém 6 meias azuis e 4 meias pretas. Escolhendo, aleatoriamente, 4 meias da gaveta, qual a probabilidade de elas formarem um par de meias azuis e outro de meias pretas?

a) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{7}$

c) $\frac{2}{7}$

d) $\frac{3}{7}$

e) $\frac{1}{5}$

10. (UFOP) Numa caixa, são depositadas cinco bolinhas: uma azul, uma verde, uma branca, uma preta e uma cinza. João e Pedro fazem a seguinte brincadeira: João se retira do local e Pedro retira duas bolinhas da caixa e as esconde. João, ao voltar, aposta que Pedro retirou as bolinhas cinza e verdes. A probabilidade de que João acerte o resultado é de:

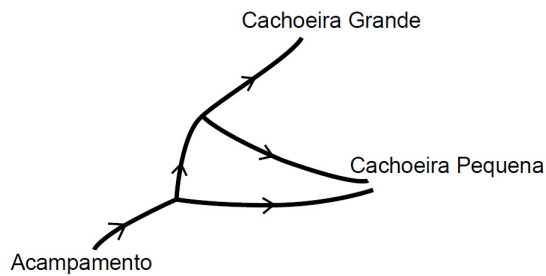
a) 5%

b) 10%

c) 20%

d) 40%

11. (UFMG) Dois jovens partiram do acampamento em que estavam, em direção à Cachoeira Grande e à Cachoeira Pequena, localizadas na região, seguindo a trilha indicada neste esquema:



Em cada bifurcação encontrada na trilha, eles escolhiam, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguiam adiante. Então, é CORRETO afirmar que a probabilidade de eles chegarem à Cachoeira Pequena é

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{6}$

12. O mercado automobilístico brasileiro possui várias marcas de automóveis disponíveis aos consumidores. Para cinco dessas marcas A, B, C, D e E, a matriz fornece a probabilidade de um proprietário de um carro de marca da linha i trocar para o carro de marca da coluna j , quando da compra de um carro novo. Os termos da diagonal principal dessa matriz fornecem as probabilidades de um proprietário permanecer com a mesma marca de carro na compra de um novo.

	A	B	C	D	E
A	0,6	0,1	0,2	0,1	0,0
B	0,3	0,5	0,0	0,1	0,1
C	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1
D	0,3	0,2	0,2	0,3	0,0
E	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

A probabilidade de um proprietário de um carro da marca *B* comprar um novo carro da marca *C*, após duas compras, é:

- a) 0,25
- b) 0,24
- c) 0,20
- d) 0,09
- e) 0,00

13. Considere uma urna contendo 10 bolas vermelhas e 6 bolas verdes. Retirando-se simultaneamente duas bolas da urna, qual é a probabilidade de que as duas bolas selecionadas sejam vermelhas?

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{3}{8}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $\frac{2}{3}$
- e) 2

14. Francisco deve elaborar uma pesquisa sobre dois artrópodes distintos. Eles serão selecionados, ao acaso, da seguinte relação: aranha, besouro, barata, lagosta, camarão, formiga, ácaro, caranguejo, abelha, carrapato, escorpião e gafanhoto. Qual é a probabilidade de que ambos os artrópodes escolhidos para a pesquisa de Francisco não sejam insetos?

- a) $\frac{49}{144}$

- b) $\frac{14}{33}$
 c) $\frac{7}{22}$
 d) $\frac{5}{22}$
 e) $\frac{15}{144}$

15. Uma determinada fábrica de vassouras produz 120 unidades, sendo 60 no período matutino e 60 no vespertino. Das 60 produzidas no período matutino, cinco apresentaram algum defeito, enquanto as 60 produzidas no período vespertino seis apresentaram defeito. Com intuito de realizar um controle de qua-lidade, o gerente da fábrica, no final de cada período, recolhe duas vassouras aleatoriamente. Nesse sentido, a probabilidade de as vassouras recolhidas

- a) serem perfeitas é igual em ambos os períodos.
 b) no período da tarde serem perfeitas é maior que 0,9.
 c) no período da manhã serem perfeitas é de, aproximadamente, 0,84.
 d) no período da manhã serem perfeitas é de, aproximadamente, 0,7.

16. A campanha Nacional de Incentivo à Doação de Órgãos de 2010 traz o conceito “Deixe sua marca, multiplique vidas”. Ela expressa a importância de ser um doador. No transplante de medula, existe uma probabilidade muito maior de haver compatibilidade quando o doador e o receptor são da mesma família. Entre irmãos, as chances de compatibilidade são de 1 para 4. Quando o transplante não acontece entre membros da mesma família, a chance de encontrar um doador compatível é de 1 em 3 milhões. (ABTO, 2010).



Disponível em: <<http://www.abto.org.br>>. Acesso em: 25 nov. 2011. Adaptado.

De acordo com o texto, a probabilidade de um paciente, necessitando de transplante de medula, com 4 irmãos vivos, encontrar entre eles, pelo menos, um doador compatível, é de

- a) $\frac{145}{256}$
- b) $\frac{155}{256}$
- c) $\frac{165}{256}$
- d) $\frac{175}{256}$
- e) $\frac{185}{256}$

17. (UFPA) De um refrigerador que tem em seu interior 3 refrigerantes da marca A, 4 refrigerantes da marca B e 5 refrigerantes da marca C, retiram-se dois refrigerantes sem observar a marca. A probabilidade de que dois retirados sejam da mesma marca é:

- a) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{5}{33}$
- c) $\frac{19}{66}$
- d) $\frac{7}{22}$
- e) $\frac{3}{11}$

18. (UFRJ) Com o intuito de separar o lixo para fins de reciclagem, uma instituição colocou em suas dependências cinco lixeiras de diferentes cores, de acordo com o tipo de resíduo a que se destinam vidro, metal, plástico, papel e orgânico.



Sem olhar para as lixeiras, João joga em uma delas uma embalagem plástica e, ao mesmo tempo, em outra, uma garrafa de vidro. A probabilidade de que ele tenha usado corretamente pelo menos uma lixeira é igual a:

- a) 25%
- b) 30%
- c) 35%
- d) 40%

19. A mutação no DNA de uma célula eucariota acarretou a substituição, no RNA mensageiro de uma proteína, da 15ª base nitrogenada por uma base C. A disposição de bases da porção inicial do RNA mensageiro da célula, antes de sua mutação, é apresentada a seguir:

início da tradução
 $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$
 AUGCUUCUCAUCUUUUUAGCU...

Observe os códons correspondentes a alguns aminoácidos:

Aminoácido	Códon
fenilamina	UUU
fenilamina	UUC
leucina	UUA
leucina	UUG
leucina	CUC
metionina	AUG
valina	GUU
valina	GUA

Sabe-se que o códon de iniciação de leitura é AUG.

A probabilidade de que a proteína a ser traduzida pelo RNA mensageiro da célula que sofreu mutação não apresente alterações na disposição de seus aminoácidos é de:

- a) 0
- b) 0,25

c) 0,50

d) 1,00

20. As 23 vagas de um estacionamento são numeradas de 1 a 23, sendo que as vagas de números 1 a 8 são para carros grandes e as de números 9 a 23 para carros pequenos. Esse estacionamento possui 18 carros estacionados, sendo que 5 deles são grandes, e todos estão estacionados aleatoriamente nas vagas numeradas referentes ao seu tamanho, pequeno ou grande. Se João possui um carro pequeno e um carro grande estacionados nesse estabelecimento, a probabilidade de que ambos estejam ocupando vagas de numeração ímpar é igual a

a) $\frac{4}{15}$

b) $\frac{4}{13}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{16}$

e) $\frac{2}{17}$

21. Uma gaveta contém 6 meias azuis e 4 meias pretas. Escolhendo, aleatoriamente, 4 meias da gaveta, qual a probabilidade de elas formarem um par de meias azuis e outro de meias pretas?

a) $\frac{1}{9}$

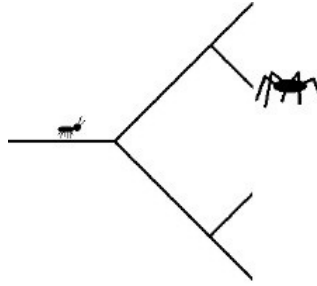
b) $\frac{1}{7}$

c) $\frac{2}{7}$

d) $\frac{3}{7}$

e) $\frac{1}{5}$

22. Uma formiga desloca-se ao longo de um caminho que, como a figura mostra, vai apresentando bi-furcações. A formiga nunca inverte a sua marcha. Ao chegar a uma bifurcação, opta 80% das vezes pelo caminho da esquerda. Qual é a probabilidade de a formiga ser apanhada pela aranha?



- a) 0,16
- b) 0,40
- c) 0,45
- d) 0,64
- e) 0,09

23. (UERJ) Um pesquisador possui em seu laboratório um recipiente contendo 100 exemplares de *Aedes aegypti*, cada um deles contaminado com apenas um dos tipos de vírus, de acordo com a tabela ao lado: Retirando-se simultaneamente e ao acaso dois mosquitos desse recipiente, a probabilidade de que pelo menos um esteja contaminado com o tipo DEN 3 equivale a:

tipo	quantidade de mosquitos
DEN 1	30
DEN 2	60
DEN 2	10

- a) $\frac{8}{81}$
- b) $\frac{10}{99}$
- c) $\frac{11}{100}$
- d) $\frac{21}{110}$

24. (IBMEC) Durante o mês de Março no campeonato de Fórmula 1 a probabilidade de chover em um dia determinado é $\frac{4}{10}$. A equipe Ferrari ganha uma corrida em um dia com chuva com probabilidade igual a $\frac{6}{10}$ e em um dia sem chuva com probabilidade igual a $\frac{4}{10}$. Sabendo-se

que a Ferrari ganhou uma corrida naquele dia de Março, qual a probabilidade de que choveu nesse dia?

a) $\frac{4}{10}$

c) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{6}{10}$

d) $\frac{1}{2}$

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004. MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006. FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: [http : www.professores.u.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob – 0.pdf](http://www.professores.u.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf)).

6.4 PLANO DE ENSINO 4: QUESTÕES DE PROBABILIDADE NO ENEM.

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 2 h/a

TEMA: QUESTÕES DO ENEM.

Conteúdo Programático:

- Revisão.

Objetivo Geral:

- Relembrar conceitos e discutir a aplicação no dia a dia da teoria das probabilidades.

Objetivos Específicos:

- Rediscutir os conceitos estudados;
- Resolver questões do ENEM sobre probabilidade da união e probabilidade condicionada

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá na resolução correta e discussão dos exercícios contidos nessa seção para uso em sala de aula ou para o estudo extra classe, no qual o aluno poderá resolver os problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante as aulas anteriores.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;

- Pincel para quadro branco;e
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

- Propiciar aula expositiva e dialogada;
- Utilizar o quadro de escrever para sintetizar as ideias geradas;
- Seguir a aula com o material da lista de exercícios que seguem, utilizando o data-show;e
- Avaliar a aula no final;
- Comentar e discutir as 13 questões abaixo que já caíram nas provas anteriores do Enem.

AS QUESTÕES DE PROBABILIDADE NO ENEM

1.(Enem 2014) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1. Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
2. Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
3. Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
4. Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR,I.M.;LOTUFO,P.A.Epidemiologia: abordagem prática. São Paulo: Savier, 2011(adaptado)

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

- a) 47,5%
- b) 85%
- c) 86,3%
- d) 94,4%
- e) 95%

Solução:

A probabilidade da sensibilidade é dada por:

$$P(\text{teste positivo} \mid \text{o paciente está a doença}) = \frac{95}{95 + 5} = 95\%$$

2. (Enem 2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

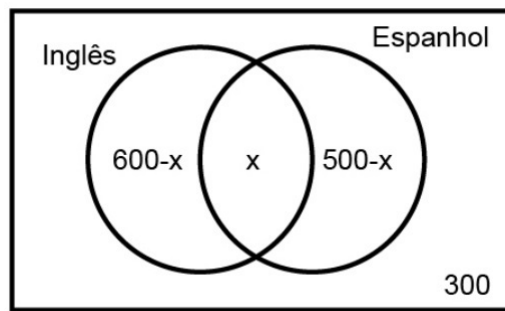
Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{5}{8}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{5}{6}$
- e) $\frac{5}{14}$

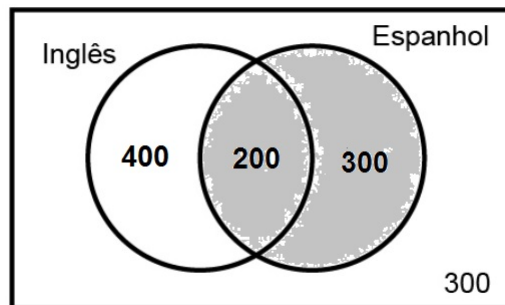
Solução:

Primeiramente devemos representar a situação no diagrama de Euler-Venn e calcular a quantidade de alunos que falam Inglês e Espanhol



$$600 - x + x + 500 - x + 300 = 1200, \text{ portanto } x = 200$$

Substituindo teremos:



A probabilidade de falar espanhol, sabendo-se que ele não fala inglês é igual a:

$$P = \frac{300}{300 + 300} = \frac{1}{2}$$

3.(Enem PPL 2013) Uma fábrica possui duas máquinas que produzem o mesmo tipo de peça. Diariamente a máquina M produz 2.000 peças e a máquina N produz 3.000 peças. Segundo o controle de qualidade da fábrica, sabe-se que 60 peças, das 2.000 produzidas pela máquina M , apresentam algum tipo de defeito, enquanto que 120 peças, das 3.000 produzidas pela máquina N , também apresentam defeitos. Um trabalhador da fábrica escolhe ao acaso uma peça, e esta é defeituosa.

Nessas condições, qual a probabilidade de que a peça defeituosa escolhida tenha sido produzida pela máquina M ?

- a) $\frac{3}{100}$
- b) $\frac{1}{25}$
- c) $\frac{1}{3}$

- d) $\frac{3}{7}$
 e) $\frac{2}{3}$

Solução:

Nessa questão teremos que calcular a probabilidade de que a peça defeituosa (D) escolhida tenha sido produzida pela máquina M , ou seja:

$$P(M | defeituosa) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{60}{120 + 60} = \frac{1}{3}.$$

4.(Enem 2012) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

- a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
 b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
 c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
 d) José, já que ha 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
 e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Solução:

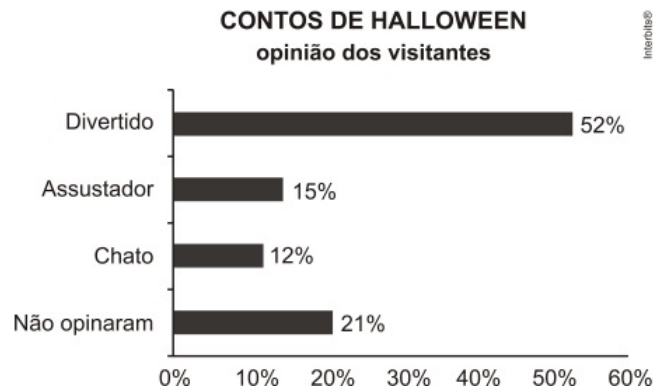
Os possíveis resultados que darão a vitória a José são $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)$ e $(6, 1)$.

Os possíveis resultados que darão a vitória a Paulo: $(1, 3), (2, 2)$ e $(3, 1)$.

Os possíveis resultados que darão a vitória a Antônio: $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3)$ e $(6, 2)$.

Portanto, José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

5.(Enem 2012) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween?”. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

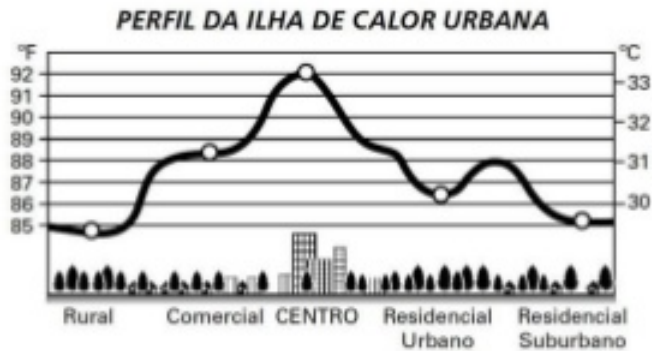
- a) 0,09
- b) 0,12
- c) 0,14
- d) 0,15
- e) 0,18

Solução

Observe que o espaço amostral foi reduzido para as pessoas que opinaram, ou seja:
 $100\% - 21\% = 79\%$.

Portanto a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é igual a $p = \frac{12\%}{79\%} \cong 15\%$.

6.(Enem 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C . Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{3}{5}$
- e) $\frac{3}{4}$

Solução:

O espaço amostral da escolha de Rafael é formado pelas 4 regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano, dessas somente três possuem as temperaturas inferiores a 31°C .

Logo, a probabilidade será: $P = \frac{3}{4}$

7.(Enem 2011) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada. Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é

- a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
- b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
- e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Solução:

Pelo enunciado temos os resultados possíveis para:

Arthur: $\{(1, 11); (2, 10); (3, 9); (4, 8); (5, 7)\}$ (5 possibilidades);

Bernardo: $\{(2, 15); (3, 14); (4, 13); (5, 12); (6, 11); (7, 10); (8, 9)\}$ (7 possibilidades);

Caio: $\{(7, 15); (8, 14); (9, 13); (10, 12)\}$ (4 possibilidades);

Logo, Bernardo apresenta mais chances de vencer.

8.(Enem 21 aplicação 2010) Um experimento foi conduzido com o objetivo de avaliar o poder germinativo de duas culturas de cebola, conforme a tabela.

Germinação de Sementes de duas Culturas de cebola			
Culturas	Germinação		TOTAL
	Germinam	Não Geminam	
A	392	8	400
B	381	19	400
TOTAL	773	27	800

Desejando-se fazer uma avaliação do poder germinativo de uma das culturas de cebola, uma amostra foi retirada ao acaso. Sabendo-se que a amostra escolhida germinou, a probabilidade de essa amostra pertencer à Cultura A é de

- a) $\frac{8}{27}$
- b) $\frac{19}{27}$
- c) $\frac{381}{773}$
- d) $\frac{392}{773}$
- e) $\frac{392}{800}$

Solução:

Novamente uma questão de probabilidade condicionada, vamos considerar os eventos A: “amostra pertence à cultura A ” e B: “amostra escolhida germinou”. Queremos calcular a probabilidade amostra pertencer à Cultura A, sabendo-se que a amostra escolhida germinou, ou seja; calcular a probabilidade condicional $P(A|B)$. De acordo com os dados da tabela, temos que:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{392}{773}$$

9.(Enem 2ª aplicação 2010) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o rock e a MPB. O quadro a seguir registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1000 alunos de uma escola. Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos.

Preferências musical	rock	samba	MPB	rock e samba
número de alunos	200	180	200	70

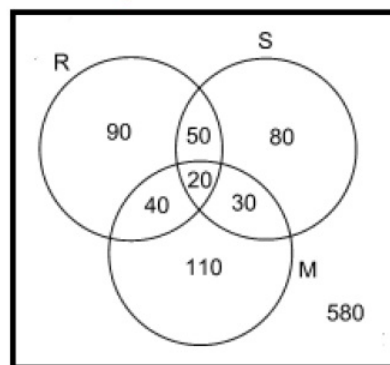
Preferências musical	rock e samba	samba e MPB	rock,samba e MPB
Número de alunos	60	50	20

Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado, qual é a probabilidade de ele preferir somente MPB?

- a) 2%
- b) 5%
- c) 6%
- d) 11%
- e) 20%

Solução:

Primeiramente representamos a situação de acordo com os dados da tabela:



A probabilidade de um estudante selecionado aleatoriamente preferir somente MPB é igual a

$$\frac{110}{1000} \cdot 100\% = 11\%.$$

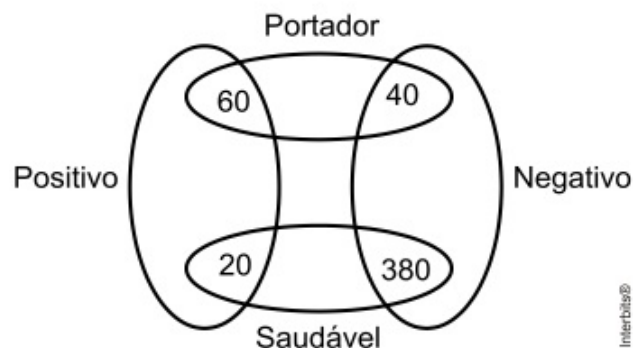
10.(Enem 2ª aplicação 2010) Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o

teste não é totalmente eficaz podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultado negativo. Sabe-se, ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo. Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. A probabilidade de esse rato ser saudável é

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{4}{5}$
- c) $\frac{19}{21}$
- d) $\frac{19}{25}$
- e) $\frac{21}{25}$

Solução:

Vamos representar a situação acima no diagrama de Euler-Venn.



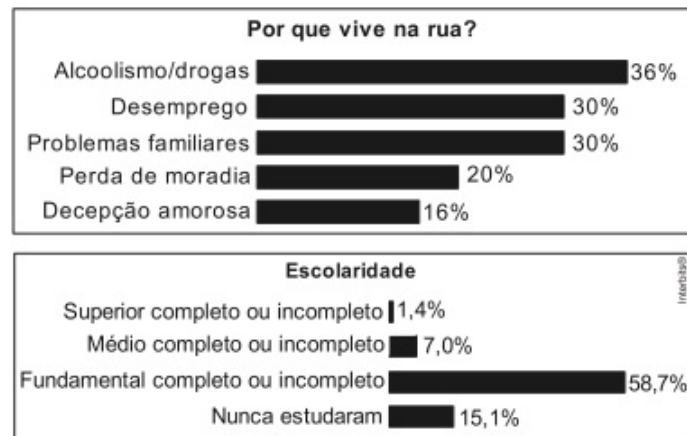
O seu objetivo da questão é calcular a probabilidade de esse rato ser saudável, sabendo que o resultado deu negativo; ou seja, calcular a probabilidade condicional, portanto:

$$\begin{aligned}
 P(\text{saudável} \mid \text{negativo}) &= \frac{n(\text{saudável} \cap \text{negativo})}{n(\text{negativo})} \\
 P(\text{saudável} \mid \text{negativo}) &= \frac{380}{380 + 40} \\
 &= \frac{19}{21}
 \end{aligned}$$

11.(Enem 2008)

A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31.922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir.



Istoé, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q , então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a

- a) 12%
- b) 16%
- c) 20%
- d) 36%
- e) 52%

Solução: Como queremos a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q , temos que utilizar para resolver a probabilidade da união de P e Q ; ou seja,

$$P(P \cup Q) = P(P) + P(Q) - P(P \cap Q)$$

$$40\% = 36\% + 16\% - P(P \cap Q)$$

$$P(P \cap Q) = 52\% - 40\% = 12\%$$

12.(Enem 2007) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela adiante apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	260
crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a

- 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
- 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.
- 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.
- 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
- 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

Solução:

Queremos calcular a probabilidade de escolher uma criança, com a condição de que o paciente internado nesse hospital tem problemas respiratórios causados pelas queimadas, portanto, considere os eventos A : “criança” e B : “tem problema respiratório causado pelas queimadas”.

$$\text{Logo: } P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{150}{150 + 50} = \frac{150}{200} = 0,75$$

13.(Enem 2006) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6:– Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de $2(1 + 1)$ até $12(6 + 6)$. Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.

Tadeu, camisa 2: - Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...

Ricardo, camisa 12: - Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos... Desse diálogo conclui-se que

- Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.
- Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
- Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.
- Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.**
- não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

Solução:

No lançamento de dois dados o espaço amostral é: Assim:

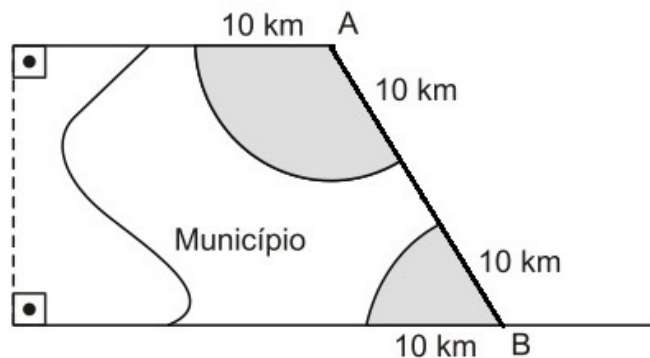
$$S = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (6, 6); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)\}$$

As possibilidades para Pedro vencer são (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4) e (1, 5), então probabilidade de Pedro vencer é $\frac{5}{36}$

As únicas possibilidades para Tadeu ou Ricardo vencerem são (1, 1) e (6, 6), então probabilidade de Tadeu ou Ricardo vencer é $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$.

Observe que $\frac{5}{36} > \frac{2}{36}$, Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

14.(Enem 2001) Um município de 628km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente,

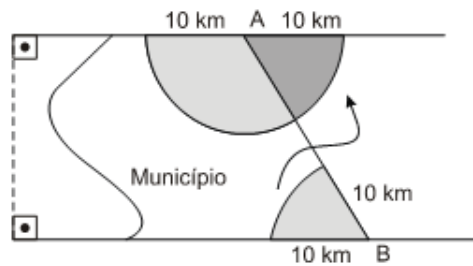
- a) 20%.
- b) 25%.
- c) 30%.

d) 35%.

e) 40%.

Solução:

Observe a figura a seguir



Note que os dois setores circulares juntos representam um semicírculo de raio igual 10 km.

Portanto, a probabilidade é igual a:

$$P = \frac{\pi \cdot 10^2}{628} = 0,25 = 25\%$$

6.5 CONSIDERAÇÕES

O nosso objetivo com esse material de apoio para nós professores é encontrar uma maneira de alcançar os nossos alunos, utilizando dinâmicas, material de apoio e todos os tipos de recursos.

Neste material, encontram-se 4 planos de aulas que servirá como apoio na sala de aula, varias atividades que o professor poderá desenvolver juntos com seus alunos e atividades de fixação que recomendo que o aluno primeiramente tente em seus momentos de estudo.

Temos a certeza das dificuldades do ensinar matemática, mas acreditamos em nós professores, podemos mudar paradigmas.

REFERÊNCIAS

KATZ, Victor J. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. 2ª Ed, Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian. 2010.

BOYER, Carl B. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA/Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach, tradução Elza F. Gomide - 2ª ed. - São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

PARRA, Cecília [et al]. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas; tradução Juan acuña Llorens. - Porto Alegre: Artmed, 1996.

LIMA, Felipe Mascagna Bittencout. O ensino de probabilidade com o uso do problema do jogo dos discos. 2013. 119 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2013.

MEYER, Paul L. Probabilidade: aplicações à estatística; tradução do professor Ruy de C. B. Lourenço Filho. Rio de Janeiro, LTC, 1981.

DANTE, Roberto Luiz. MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES. vol.2, Editora Ática, 2012.

PAIVA, Manoel. MATEMÁTICA. ed. Ed. Moderna, 2012.

SMOLE, Kátia Stocco, DINIZ, Maria Ignez. MATEMÁTICA: Ensino médio, vol.2, da editora Saraiva, 2012.

Diretrizes do CNE, Resolução nº 3. disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf.

Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio. disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>.

APÊNDICE A

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO EM ALUNOS CONCLUINTES DO ENSINO MÉDIO.



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Prezado (a) aluno (a),

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem em Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

1.Idade	2.Sexo Fem. <input type="checkbox"/> Masc. <input type="checkbox"/>	3.Escolaridade
4. A sua escola é () Pública Municipal () Pública Estadual () Pública Federal () Particular		
5. Qual é a escolaridade de seu pai? (até que ano ou serie ele estudou?)		
() Não estudou	() Ensino médio completo	
() Ensino fundamental incompleto	() Ensino superior incompleto	
() Ensino fundamental completo	() Ensino superior completo	
() Ensino médio incompleto		

6. Qual é a escolaridade de sua mãe? (até que ano ou serie ela estudou?)	
<input type="checkbox"/> Não estudou	<input type="checkbox"/> Ensino médio completo
<input type="checkbox"/> Ensino fundamental incompleto	<input type="checkbox"/> Ensino superior incompleto
<input type="checkbox"/> Ensino fundamental completo	<input type="checkbox"/> Ensino superior completo
<input type="checkbox"/> Ensino médio incompleto	
7. Qual a profissão ou em que trabalha o seu pai?	
8. Qual a profissão ou em que trabalha a sua mãe?	
9. Você gosta de matemática?	
<input type="checkbox"/> Nenhum pouco	<input type="checkbox"/> pouco <input type="checkbox"/> Razoável <input type="checkbox"/> Muito
10. Você costuma estudar matemática fora da escola?	
<input type="checkbox"/> Nunca	<input type="checkbox"/> só no período de prova <input type="checkbox"/> só no fim de semana <input type="checkbox"/> Todos os dias
<input type="checkbox"/> Só na véspera de prova	
11. Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?	
<input type="checkbox"/> Ninguém	<input type="checkbox"/> Professor Particular <input type="checkbox"/> Pai <input type="checkbox"/> Mãe
<input type="checkbox"/> Irmão (ã)	<input type="checkbox"/> Amigo(a) <input type="checkbox"/> Tio(a) <input type="checkbox"/> Namorado(a)
<input type="checkbox"/> Outro. Quem?	
12. Na maioria das aulas de matemática de sua escola, os assuntos são ministrados	
<input type="checkbox"/> Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios	
<input type="checkbox"/> Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto	
<input type="checkbox"/> Criando um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo	
<input type="checkbox"/> Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos	
13. Para você entender melhor o assunto ensinado, seu professor(a) de matemática costuma:	
<input type="checkbox"/> Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos	
<input type="checkbox"/> Apresentar jogos envolvendo o assunto	
<input type="checkbox"/> Mandar resolver os exercícios do livro didático	
<input type="checkbox"/> Propõe questões de fixação	
<input type="checkbox"/> Mandar que você procure questões sobre o assunto para resolver	
14. Como você se sente em relação ao assunto Probabilidade?	
<input type="checkbox"/> Nunca estudei	<input type="checkbox"/> Estudei e não lembro nada <input type="checkbox"/> Estudei e lembro pouco
<input type="checkbox"/> Estudei e lembro de quase tudo	<input type="checkbox"/> estudei e lembro de tudo

15. Preencha o quadro abaixo, e marque o item que representa o que você achou de cada tópico.

Assunto	O que você achou ?				
	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Espaço amostral e evento					
Definição de probabilidade					
Probabilidade de um evento certo					
Probabilidade de um evento impossível					
Probabilidade de evento complementar					
Probabilidade da união de eventos.					
Probabilidade condicional					
Probabilidade de eventos independentes					

QUAIS CONHECIMENTOS ESPERAMOS QUE OS ALUNOS NOS MOSTRASSEM:

16. Resolva os problemas a seguir da forma que achar conveniente:

16.1 No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento “sair um número primo”.

16.2 Numa urna existem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Retirando-se 1 bola ao acaso, qual a probabilidade de que seu número seja múltiplo de 5?

16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número

a) menor do que 21?

b) maior do que 20?

16.4. Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de $1/5$. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

16.5 Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

16.6. Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

16.7. De um baralho de 52 cartas extraem-se duas cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade de se obter um ás e um valete nessa ordem?

16.8 Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma dos pontos nos dois dados foi 8, calcule

a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles.

16.9. Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente. Definição de espaço amostral

16.10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podemos formar números de 2 dígitos com repetição. Qual a probabilidade de, sorteando um desses números, que ele seja par?

16.11. Lançando dois dados qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

16.12. Um árbitro de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é amarelo de um lado e vermelho do outro. Num determinado lance, o árbitro retira do bolso, ao acaso, um cartão e mostra ao jogador. Qual é a probabilidade de a face que o árbitro vê ser vermelha e de que a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela?

16.13. Num único lance de um par de dados honestos, qual é a probabilidade de saírem as somas “múltipla de 4” ou “primo”?