UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Alvaro Antunes da Silva

Funções convexas e desigualdades: uma abordagem no ensino médio

São José do Rio Preto
2015

Alvaro Antunes da Silva

Funções convexas e desigualdades: uma abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz

São José do Rio Preto

2015

Ficha Catalográfica

Silva, Alvaro Antunes da.
Funções convexas e desigualdades : uma abordagem no ensino médio / Alvaro Antunes da Silva. -- São José do Rio Preto, 2015
68 f. : il.

Orientador: German Jesus Lozada Cruz
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) 3. Funções convexas. 4. Desigualdades (Matemática) 5. Matemática recreativa. 6. Prática de ensino. 7. Matemática - Metodologia. I. Lozada Cruz, German Jesus. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 517.5

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Alvaro Antunes da Silva

Funções convexas e desigualdades: uma abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
UFScar - São Carlos

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
20 de maio de 2015

AGRADECIMENTO

Primeiramente agradecer a Deus pela vida e por me conceder saúde, força e sabedoria para poder concretizar o sonho de tornar-se Mestre na área pela qual tenho tanto amor.

Agradecer a minha família pelos momentos de carinho, incentivo e paciência no decorrer destes anos de muita luta tendo que conciliar trabalho, viagens e estudo. Muito obrigado pela compreensão de vocês pois muitas vezes ausentei-me para desenvolver as atividades do curso.

A todos os professores do Departamento de Matemática do IBILCE/UNESP de São José do Rio Preto que tive a honra de ser aluno pela dedicação, esforço e competência em desenvolver aulas que promovecem o aperfeiçoamento profissional dos mestrandos.

Em especial ao Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz que foi meu orientador pelo incentivo, respeito, atenção, dedicação que sempre demonstrou e por compartilhar sua sabedoria no decorrer destes anos.

Também agradecer aos demais alunos companheiros de curso pela acolhida, respeito e pelo exemplo de grandes profissionais educadores em missão nas diversas regiões do estado de São Paulo e Minas Gerais.

Muito obrigado a todos.

RESUMO

Este trabalho apresenta o conceito e as aplicações das funções convexas de uma variável real e o objetivo principal é mostrar sua utilização em problemas que envolvem desigualdades. Desta forma, são demonstradas a relação entre as médias aritmética e geométrica, a desigualdade de Jensen, a desigualdade de Young, a desigualdade de Hölder e a de Minkowski. Estas, por sua vez, fornecem ferramentas matemáticas poderosas tanto na demonstração como na resolução de situações-problema que ocorrem frequentemente em olimpíadas nacionais e internacionais de matemática e também são empregadas em alguns casos de otimização. Além disso, este trabalho tem como objetivo ser um referencial teórico a ser utilizado tanto nas aulas regulares como em turmas de treinamento para olimpíadas de matemática, auxiliando alunos que estão em busca de estratégias para aumentar seu desempenho e proporcionando aos professores uma forma de ampliar a prática didática em sala de aula.

Palavras-chave: Função Convexa. Desigualdade. Olimpíadas de Matemática. Otimização. Prática de Ensino.

ABSTRACT

This work presents the concept and applications of one real variable convex functions. The main goal is to show their use in problems involving inequalities. In this way, it was established the relationship between the arithmetic and geometric means and proved Jensen's inequality, Young's inequality, Hölder's inequality and Minkowski's inequality. These inequalities provide a powerful mathematical tool both in the statement as in the resolution of problem situations that occur frequently in national and international Math Olympics. We also use them in some cases of optimization. In addition, this work aims to be a theoretical framework to be used both in regular classes as in training classes for math olympics to help students who are looking for strategies to increase their performance and provide a way for teachers to expand the teaching practice in the classroom.

Keywords: Convex Function. Inequality. Math Olympics. Optimization. Teaching Practice.

Sumário

Introdução

As funções convexas constituem uma importante classe de funções na área da Análise Real e são também utilizadas em processos de otimização em áreas como Matemática Aplicada, Mecânica, Termodinâmica, Estatística, Probabilidades além de possibilitar uma forma elegante e eficiente de demonstrar algumas famosas desigualdades como, por exemplo, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1 será realizada uma revisão sobre os conceitos matemáticos a serem utilizados como intervalos, indução matemática, desigualdades e médias.

No capítulo 2 serão apresentadas a definição e as propriedades das funções convexas além de teoremas relacionando-as aos conceitos de convexidade, continuidade e derivabilidade a fim de mostrar que todo ponto de mínimo local é também ponto de mínimo global em problemas de otimização cuja função objetivo é convexa.

No capítulo 3 serão realizadas as principais aplicações das funções convexas de uma variável real em demonstrações e resolução de situações-problema envolvendo a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, a desigualdade de Jensen, de Young, de Hölder e de Minkowski presentes principalmente em questões de olimpíadas nacionais e internacionais de matemática.

No capítulo 4 serão apresentadas as considerações finais e as perspectivas sobre o tema desenvolvido neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos realizar a revisão de alguns conceitos matemáticos a serem utilizados no decorrer deste trabalho.

1.1 Números Reais

Vamos considerar os conjuntos numéricos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} \\
&\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\} \\
&\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\} \\
&\mathbb{R} = \text{conjunto dos números reais.}
\end{aligned}$$

A teoria dos números naturais pode ser obtida a partir de três axiomas, chamados Axiomas de Peano. O último deles é conhecido como Princípio de Indução Matemática. Ele é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais. Vamos admitir conhecidas as operações de adição, suas propriedades algébricas, bem como a ordem dos números naturais.

Definição 1.1.1 (Princípio de Indução Matemática) *Seja $P(n)$ uma propriedade referente ao número natural n. Suponha que:*

(*i*) *P(1) é válida;*

(*ii*) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$.*

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Exemplo 1.1.2 *Prove que:*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solução. Seja $P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Provaremos a validade de $P(n)$ para todo natural n.

(*i*) $P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$;

(*ii*) Suponhamos que $P(n)$ vale (hipótese de indução). Vamos provar que $P(n+1)$ também vale. De fato,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= (n+1)(\frac{n}{2} + 1) \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

Portanto $P(n+1)$ é verdade. Logo, $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ordem em $\mathbb{R}$. No conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, existe um subconjunto, o qual denotamos por $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado conjunto dos números reais positivos, que satisfaz as seguintes propriedades:

(**P1**) Para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$ tem-se $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$;

(**P2**) Dado $x \in \mathbb{R}$ somente uma das três alternativas ocorre: $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Denotando por $\mathbb{R}^- = \{-x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}^+\}$, a condição $(P2)$ diz que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

e os conjuntos $\mathbb{R}^+, \{0\}$ e $\mathbb{R}^-$ são disjuntos. Os números $y \in \mathbb{R}^-$ são chamados negativos.

Dados dois números reais x e y, é natural procurar uma forma de *comparar* estes dois números. Para isto, uma maneira intuitiva é associar a cada ponto de uma reta um único número real e, reciprocamente, a cada número real um único ponto da reta.

Desta forma, tem-se a reta real, que é construída da seguinte maneira: Fixa-se um ponto da reta chamado *origem* e associa-se a ele o valor 0, define-se uma unidade de comprimento u e um sentido de percurso de modo que à direita da origem localizam-se os pontos $z \in \mathbb{R}^+$ e à esquerda, da origem, os pontos $w \in \mathbb{R}^-$.

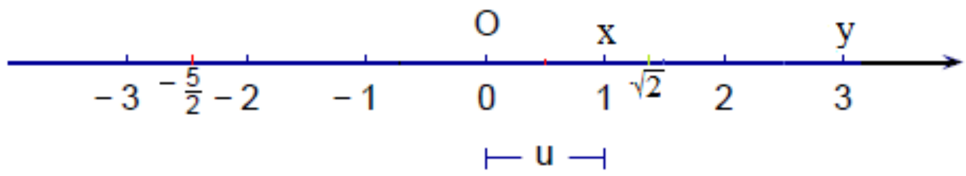

Figura 1.1: Reta real.

Geometricamente, se x está à esquerda de y na reta real, tem-se que x é menor do que y e escreve-se $x < y$. Caso contrário, tem-se $x > y$.

Para compreender melhor este conceito e formalizá-lo, a definição a seguir estabelece uma ordenação para os números reais.

Definição 1.1.3 (Relação de Ordem) *Dizemos que x é menor do que y e denotamos por $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y = x + z$ onde $z \in \mathbb{R}^+$. Neste caso também escreve-se $y > x$ e diz-se que y é maior do que x.*

Em particular, $x > 0$ significa que $x \in \mathbb{R}^+$, isto é, x é positivo, enquanto, $x < 0$ quer dizer que x é negativo ou seja $-x \in \mathbb{R}^+$.

Teorema 1.1.4 (Propriedades) *A relação de ordem $x < y$ definida em $\mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

$(O1)$ *Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$. (Transitividade).*

$(O2)$ *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, somente uma das seguintes alternativas acontece:*

$x = y, x < y$ ou $y < x$. (Tricotomia).
$(O3)$ Se $x < y$ então para todo $z \in \mathbb{R}$ tem-se $x + z < y + z$. (Monotonicidade da adição).
$(O4)$ Se $x < y$ então para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$. (Monotonicidade da multiplicação).

Demonstração. $(O1)$ Se $x < y$ então $y-x \in \mathbb{R}^+$. Se $y < z$ então $z-y \in \mathbb{R}^+$. Logo, $z - x = (y - x) + (z - y) \in \mathbb{R}^+$. Portanto $x < z$.
$(O2)$ Dados $x, y \in \mathbb{R}$, ou $y - x \in \mathbb{R}^+$ ou $y - x = 0$ ou $y - x \in \mathbb{R}^-$. No primeiro caso, tem-se $x < y$, no segundo caso $x = y$ e no terceiro $y < x$. Estas alternativas excluem-se mutuamente por $(P2)$.
$(O3)$ Se $x < y$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$. Daí,

$$y - x + z - z = y - x.$$

Assim, $y + z - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+$. Portanto $x + z < y + z$.
$(O4)$ Se $x < y$ e $z > 0$, tem-se $y-x \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}^+$. Logo $yz-xz = (y-x)z \in \mathbb{R}^+$. Daí, $xz < yz$.

Se $x < y$ e $z < 0$ tem-se $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $-z \in \mathbb{R}^+$. Logo,

$$(y - x)(-z) = y(-z) - x(-z).$$

Daí, $(y - x)(-z) = -yz + xz \in \mathbb{R}^+$, de onde segue que $yz < xz$. □

Observação 1.1.5 *A notação $x \leq y$ significa que $x < y$ ou $x = y$.*

Definição 1.1.6 (Intervalos) *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio. Dizemos que I é um intervalo se para quaisquer $a, b \in I$ todos os pontos entre a e b pertencem a I ou, equivalentemente, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$, o ponto $\lambda a + (1 - \lambda)b$ pertence a I.*

Desta forma, dados dois números reais a e b, com $a < b$ tem-se a seguinte classificação dos intervalos:

- fechados: $I = [a, b]$.

- limitados: $I = [a, b)$ ou $I = (a, b]$ ou $I = (a, b)$.
- ilimitados: $I = (a, +\infty)$ ou $I = (-\infty, b)$ ou $I = [a, +\infty)$ ou $I = (-\infty, b]$.

Médias de números reais. Um conceito muito importante na matemática é o conceito de média. Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica. Se essa característica é a soma dos elementos da lista, obtém-se a mais simples de todas as médias: a média aritmética.

A média aritmética simples da lista de n números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é um valor A tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A + A + \cdots + A = nA$. Portanto tem-se a seguinte definição:

Definição 1.1.7 (Média Aritmética Simples) *A média aritmética simples A dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é dada por:*

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Exemplo 1.1.8 *Calcule a média aritmética simples dos números 9, - 15 e 48.*

Solução. Como tem-se 3 números reais, segue que:

$$A = \frac{9 + (-15) + 48}{3} = \frac{42}{3} = 14.$$

□

Se a característica a ser considerada for o produto dos elementos da lista de números, obtém-se a média geométrica.

A média geométrica dos n números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é um valor positivo G tal que $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = G \cdot G \cdot \ldots \cdot G = G^n$. Desta forma, tem-se a seguinte definição:

Definição 1.1.9 (Média Geométrica Simples) *A média geométrica simples G dos números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é dada por:*

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Exemplo 1.1.10 *Calcule a média geométrica simples dos números 3, 36 e 54.*

Solução. Como tem-se 3 números reais positivos, segue que:

$$G = \sqrt[3]{3 \cdot 36 \cdot 54} = \sqrt[3]{5832} = 18.$$

□

Observação 1.1.11 *Note que só define-se a média geométrica para números reais positivos pois evita-se a possibilidade da média não existir (por exemplo, qual seria a média geométrica entre os números 3 e -3?).*

E agora vamos definir médias ponderadas.

A média aritmética ponderada A_p dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ com pesos iguais a $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ é dada por:

$$A_p = \frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Em muitos casos, é bastante útil utilizar *pesos relativos* e considerar a média aritmética ponderada dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ com pesos relativos iguais a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\lambda_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \lambda_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \cdots, \lambda_n = \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Assim, uma média aritmética ponderada dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma expressão da forma $\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \ldots + \lambda_na_n$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Desta forma, tem-se a seguinte definição:

Definição 1.1.12 (Média Aritmética Ponderada) *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. A média aritmética ponderada A_p dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é dada por:*

$$A_p = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \ldots + \lambda_na_n.$$

Exemplo 1.1.13 *Em um grupo de estudantes,* 60% *deles são adultos e* 40% *são crianças. O peso médio dos adultos é 80 kg e o peso médio das crianças é de 50 kg. Qual é o peso médio do grupo?*

Solução. A média aritmética ponderada dos dois subgrupos de estudantes indica o peso médio do grupo. Neste caso, os pesos relativos são $\lambda_1 = \frac{60}{100} = 0,6$ e $\lambda_2 = \frac{40}{100} = 0,4$. Desta forma, tem-se:

$$A_p = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0,6 \cdot 80 + 0,4 \cdot 50 = 48 + 20 = 68.$$

Portanto o peso médio do grupo é 68 kg. □

Definição 1.1.14 (Média Geométrica Ponderada) *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *e* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ *com* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. *A média geométrica ponderada* G_p *dos números reais positivos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *é dada por:*

$$G_p = {a_1}^{\lambda_1} {a_2}^{\lambda_2} \ldots {a_n}^{\lambda_n}.$$

Exemplo 1.1.15 *Considerando os dados do exemplo 1.1.13, determine a média geométrica ponderada do peso médio do grupo de estudantes.*

Solução.

$$G_p = {a_1}^{\lambda_1} \cdot {a_2}^{\lambda_2} = 80^{0,6} \cdot 50^{0,4} \cong 13,86 \cdot 4,78 \cong 66,25.$$

Portanto, neste caso, o peso médio do grupo é 66,25 kg. □

Capítulo 2

Funções Convexas

Neste capítulo vamos apresentar o conceito de função convexa e caracterizá-la fazendo o uso da segunda derivada. Maiores detalhes sobre derivadas de primeira e segunda ordem como também derivadas laterais recomendamos ao leitor consultar as referências [8], [14], [15] e [16].

2.1 Funções Convexas

Definição 2.1.1 (Conjunto Convexo) *Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ não vazio. O conjunto C é convexo se para todos $a, b \in C$ tem-se $\lambda a + (1-\lambda)b \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$.*

Segue da definição acima que C é um conjunto convexo quando o segmento de reta que une dois quaisquer de seus pontos está inteiramente contido em C.

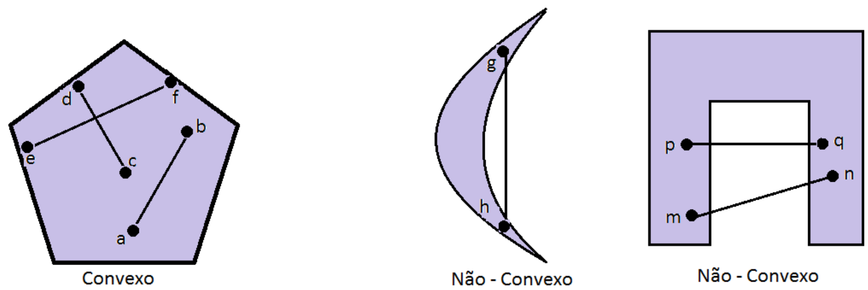

Figura 2.1: Conjunto convexo e não-convexo.

Exemplo 2.1.2 *Seja* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 3\}$*. O conjunto* $C \subset \mathbb{R}^2$ *é convexo.*

Solução. De fato, dados $a = (x_1, y_1)$ e $b = (x_2, y_2) \in C$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda a + (1-\lambda)b &= \lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \\
&= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \\
&= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda(2x_1 + 3) + (1-\lambda)(2x_2 + 3)) \\
&= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + 3) \in C.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.1.3 *Seja* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant x^2\}$*. O conjunto* $C \subset \mathbb{R}^2$ *não é convexo.*

Solução. De fato, existem $a = (-1, 1) \in C$ e $b = (1, 1) \in C$ mas

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(-1, 1) + \frac{1}{2}(1, 1) = (0, 1) \notin C.$$

□

Definição 2.1.4 *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função.*
(i) *A função* f *é convexa se*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b),$$

para todos $a, b \in I$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *com* $0 \leq \lambda \leq 1$*.*
(ii) *A função* f *é estritamente convexa se*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b),$$

para todos $a, b \in I$ *e todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *com* $0 \leq \lambda \leq 1$*.*

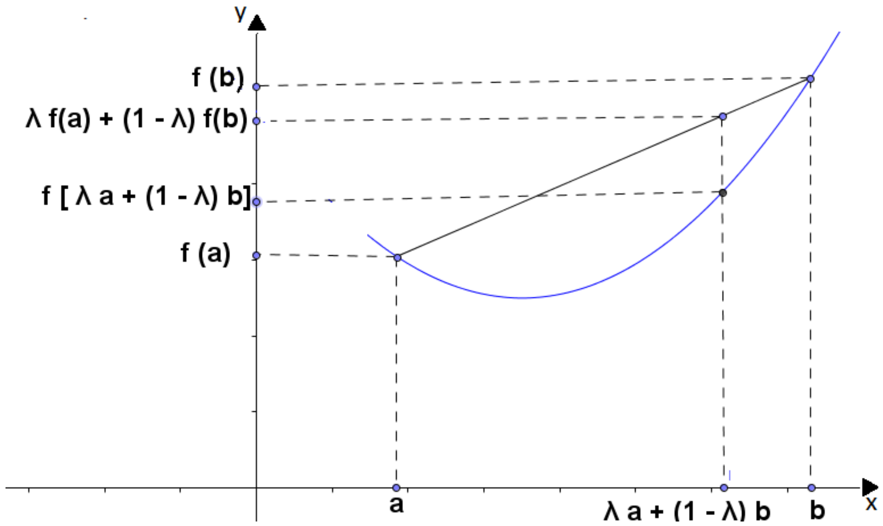

Figura 2.2: Interpretação geométrica de convexidade.

A figura 2.2 mostra o significado geométrico de convexidade:

A corda com os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ fica acima do gráfico de f.

Exemplo 2.1.5 *Sejam $m, n \in \mathbb{R}$ com $m \neq 0$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = mx + n$ é convexa.*

Solução. De fato, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda)b) &= m(\lambda a + (1-\lambda)b) + n \\ &= ma\lambda + mb - mb\lambda + n \\ &= ma\lambda + \lambda n + mb - mb\lambda + n - \lambda n \\ &= \lambda(ma+n) + (1-\lambda)mb + (1-\lambda)n \\ &= \lambda(ma+n) + (1-\lambda)(mb+n) \\ &= \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b). \end{aligned}$$

Portanto f é convexa. □

Exemplo 2.1.6 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Mostre que f é convexa.*

Solução. Mostremos a princípio que $(\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \leq \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 - [\lambda a + (1-\lambda)b]^2 &\geq 0 \\
\lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 - [\lambda^2 a^2 + 2\lambda a(1-\lambda)b + (1-\lambda)^2 b^2] &\geq 0 \\
\lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 - \lambda^2 a^2 - 2\lambda a(1-\lambda)b - (1-\lambda)^2 b^2 &\geq 0 \\
(\lambda - \lambda^2)a^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab + (\lambda - \lambda^2)b^2 &\geq 0 \\
\lambda(1-\lambda)(a-b)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Desta forma, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se:

$$\begin{aligned}
f(\lambda a + (1-\lambda)b) &= (\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \\
&\leq \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 \\
&= \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).
\end{aligned}$$

Portanto f é convexa. $\square$

Exemplo 2.1.7 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ é convexa.*

Solução. De fato, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 \leq \lambda \leq 1$ tem-se:

$$\begin{aligned}
f(\lambda a + (1-\lambda)b) &= e^{\lambda a + (1-\lambda)b} \\
&= e^{\lambda a} \cdot e^{(1-\lambda)b} \\
&= e^{\lambda a} \cdot e^{(b-\lambda b)} \\
&= e^{\lambda a} \cdot e^{b} \cdot e^{(-\lambda b)} \\
&= e^{\lambda(a-b)} \cdot e^{b} \\
&\leq \lambda(e^a - e^b) + e^b \\
&= \lambda e^a + e^b - \lambda e^b \\
&= \lambda e^a + (1-\lambda)e^b \\
&= \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).
\end{aligned}$$

Portanto f é convexa. $\square$

Definição 2.1.8 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.*

- *A função f é côncava se*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

para todos $a, b \in I$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$.

- *A função f é estritamente côncava se*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

para todos $a, b \in I$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definição 2.1.9 (Epígrafo de uma função) *Seja f: $I \to \mathbb{R}$ uma função. Define-se o epígrafo de f como:*

$$E_f = \{(x, r) : x \in \mathbb{R} \text{ e } r \geq f(x)\}.$$

A figura 2.3 ilustra o significado de epígrafo de uma função.

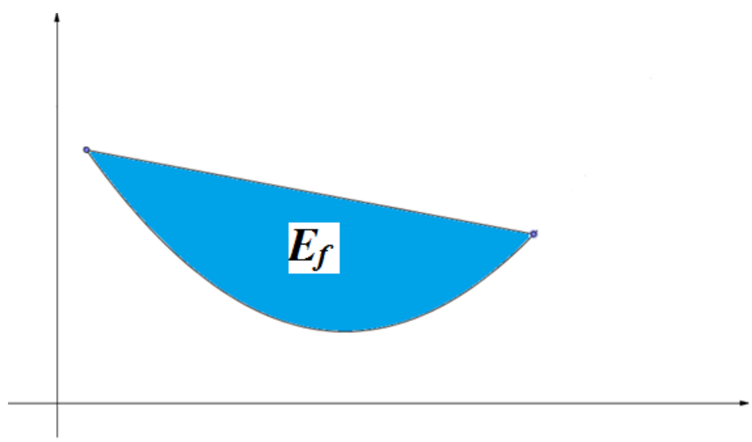

Figura 2.3: Epígrafo de uma função.

Teorema 2.1.10 (Teorema do Epígrafo) *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não vazio. A função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I se e somente se E_f é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja f uma função convexa e (a, r_1) e (b, r_2) dois elementos de E_f. Então $f(a) \leq r_1$ e $f(b) \leq r_2$. Da convexidade de f segue que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, tem-se:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leq \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2. \tag{2.1.1}$$

Por outro lado, observe que o ponto

$$\begin{aligned}\lambda(a, r_1) + (1-\lambda)(b, r_2) &= (\lambda a, \lambda r_1) + ((1-\lambda)b, (1-\lambda)r_2) \\ &= (\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2)\end{aligned}$$

é tal que a ordenada satisfaz (2.1.1), ou seja, $\lambda(a, r_1) + (1-\lambda)(b, r_2) \in E_f$. Portanto E_f é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$.

($\Leftarrow$) Seja E_f um conjunto convexo de $\mathbb{R}^2$, $a, b \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Considere (a, r_1) e (b, r_2) dois elementos de E_f. Sem perda de generalidade, suponhamos $r_1 = f(a)$ e $r_2 = f(b)$. Assim, $(a, f(a))$ e $(b, f(b)) \in E_f$.

Como E_f é convexo tem-se:

$$\begin{aligned}\lambda(a, f(a)) + (1-\lambda)(b, f(b)) &= (\lambda a, \lambda f(a)) + ((1-\lambda)b, (1-\lambda)f(b)) \\ &= (\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)) \in E_f.\end{aligned}$$

Logo, pela definição de epígrafo tem-se:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Portanto f é uma função convexa. $\square$

Além da definição de função convexa, existem outras formas equivalentes para denotar a convexidade de $f : I \to \mathbb{R}$. A primeira delas é:

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{2.1.2}$$

para todos $a, b, x \in I$ com $a < x < b$.

Vamos compreender a origem de (2.1.2).

Os pontos x do intervalo I são escritos de modo único, sob a forma:

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Estabelecendo o valor do parâmetro λ tem-se:

$$\begin{aligned} x &= \lambda a + (1-\lambda)b \\ x &= \lambda a + b - \lambda b \\ \lambda b - \lambda a &= b - x \\ \lambda(b-a) &= b - x \\ \lambda &= \frac{b-x}{b-a}. \end{aligned}$$

E por outro lado:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \\ &= \frac{b-a}{b-a} - \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \\ &= \frac{b-a-b+x}{b-a} \\ &= \frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo os valores acima na definição de função convexa tem-se:

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda)b) &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \\ f(x) &\leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b). \end{aligned}$$

A segunda forma é:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2.1.3}$$

para todos $a, b, x \in I$ com $a < x < b$.

De fato, note que o membro direito da desigualdade (2.1.2) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) &= \frac{(b-x)f(a) + (x-a)f(b)}{b-a} \\
&= \frac{bf(a) - xf(a) + xf(b) - af(b)}{b-a} \\
&= \frac{bf(a) + xf(b) - af(b) - xf(a)}{b-a} \\
&= \frac{bf(a) - af(a) + xf(b) - af(b) - xf(a) + af(a)}{b-a} \\
&= \frac{(b-a)f(a) + (f(b) - f(a))(x-a)}{b-a} \\
&= \frac{(b-a)f(a)}{b-a} + \frac{(f(b) - f(a))(x-a)}{b-a} \\
&= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A terceira forma é:

$$f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b) \tag{2.1.4}$$

para todos $a, b \in I$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0, \mu > 0, \lambda + \mu = 1$.

De fato, basta considerar um novo parâmetro $\mu = 1 - \lambda$ na definição de função convexa e segue-se o resultado.

Propriedades das Funções Convexas.

(**a**) Se f e g são funções convexas então $f + g$ é convexa.

De fato, sejam f e g duas funções convexas. Assim, para todos $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda a+(1-\lambda)b) &= f(\lambda a+(1-\lambda)b)+g(\lambda a+(1-\lambda)b)\\ &\leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)+\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)\\ &= \lambda f(a)+\lambda g(a)+(1-\lambda)f(b)+(1-\lambda)g(b)\\ &= \lambda[f(a)+g(a)]+(1-\lambda)[f(b)+g(b)]\\ &= \lambda(f+g)(a)+(1-\lambda)(f+g)(b).\end{aligned}$$

Portanto $f+g$ é convexa.

(**b**) Se $\alpha \geq 0$ e f é convexa então αf é convexa.

De fato, sejam $\alpha \geq 0$ e f uma função convexa. Assim, para todos $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}(\alpha f)[\lambda a+(1-\lambda)b)] &= \alpha f[\lambda a+(1-\lambda)b)]\\ &\leq \alpha[\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)]\\ &= \lambda(\alpha f)(a)+(1-\lambda)(\alpha f)(b).\end{aligned}$$

Portanto αf é convexa.

(**c**) Se f e g são funções convexas ambas crescentes ou ambas decrescentes então $f \cdot g$ é convexa.

De fato, sejam f e g duas funções convexas. Assim, para todos $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ com $a < b$ tem-se:

$$[f(a)-f(b)][g(b)-g(a)] \leq 0.$$

Logo,

$$f(a)g(b)+f(b)g(a) \leq f(a)g(a)+f(b)g(b).$$

Assim, se $\lambda \in [0,1]$ tem-se:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(\lambda a + (1-\lambda)b) &= f(\lambda a + (1-\lambda)b)g(\lambda a + (1-\lambda)b) \\
&\leq [\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)][\lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)] \\
&= \lambda^2 f(a)g(a) + \lambda(1-\lambda)[f(a)g(b) + f(b)g(a)] \\
&\quad + (1-\lambda)^2 f(b)g(b) \\
&\leq \lambda^2 f(a)g(a) + \lambda(1-\lambda)[f(a)g(a) + f(b)g(b)] \\
&\quad + (1-\lambda)^2 f(b)g(b) \\
&= \lambda f(a)g(a) + (1-\lambda)f(b)g(b) \\
&= \lambda(f \cdot g)(a) + (1-\lambda)(f \cdot g)(b).
\end{aligned}$$

Portanto $f \cdot g$ é convexa.

(d) Se f e g são funções convexas e crescentes então $g \circ f$ é convexa.

De fato, sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções convexas tais que $f(I) \subseteq J$. Assim, para todos $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\lambda a + (1-\lambda)b) &= g[f(\lambda a + (1-\lambda)b)] \\
&\leq g[\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)] \\
&\leq \lambda g[f(a)] + (1-\lambda)g[f(b)] \\
&= \lambda(g \circ f)(a) + (1-\lambda)(g \circ f)(b).
\end{aligned}$$

Portanto $g \circ f$ é convexa.

Teorema 2.1.11 (Teorema das Inclinações) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então:*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \tag{2.1.5}$$

para todos $a, b, x \in I$ com $a < x < b$.

Demonstração. Como f é uma função convexa, tem-se:

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Desta desigualdade obtém-se:

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\
f(x) - f(a) &\leq \frac{b-x}{b-a}f(a) - f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\
f(x) - f(a) &\leq f(a)\Big(\frac{b-x}{b-a} - 1\Big) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\
f(x) - f(a) &\leq f(a)\Big[\frac{b-x}{b-a} - \Big(\frac{b-a}{b-a}\Big)\Big] + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\
f(x) - f(a) &\leq f(a)\Big(\frac{b-x-b+a}{b-a}\Big) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\
f(x) - f(a) &\leq \frac{a-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\
&= \frac{x-a}{b-a}f(b) - \Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)f(a) \\
&= \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)] \\
\frac{f(x) - f(a)}{x-a} &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.
\end{aligned}$$

que prova a primeira desigualdade em (2.1.5). A segunda desigualdade em (2.1.5) pode ser provada de modo análogo e fica a cargo do leitor. □

A figura 2.4 mostra o significado geométrico deste teorema:

Inclinação $\overline{AC} \leq$ Inclinação $\overline{AB} \leq$ Inclinação $\overline{BC}$.

Teorema 2.1.12 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então f tem derivada à direita e à esquerda em cada ponto do $int(I)$ e f'_- e f'_+ são não decrescentes no $int(I)$. Se $c \in int(I)$ tem-se: $f'_-(c) \leq f'_+(c)$ e*

$$f(x) \geq f(c) + f'_-(c)(x-c), \ \forall x \in I$$

$$f(x) \geq f(c) + f'_+(c)(x-c), \ \forall x \in I.$$

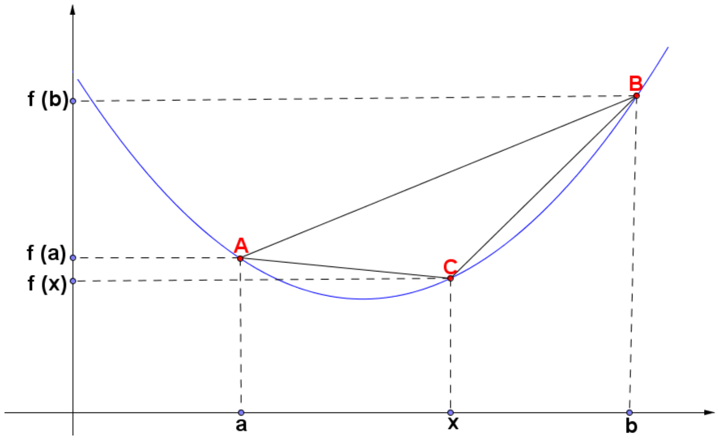

Figura 2.4: Significado geométrico do teorema das inclinações.

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $c \in int(I)$. Considere $[a, b] \subset I$ tal que $a < c < b$. Pelo teorema 2.1.11 tem-se:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \text{ para } x \in (c, b].$$

Também segue do teorema 2.1.11 que a função $x \to \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ é não decrescente em $(c, b]$. Logo, pelo teorema da função monótona do Cálculo[1], as derivadas laterais existem e portanto a derivada à direita existe

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

De modo análogo é possível provar que a derivada à esquerda $f'_-(c)$ também existe.

Se $a < c < d < b$ então para h suficientemente pequeno e positivo tem-se:

$$\frac{f(c) - f(c - h)}{h} \leq \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq \frac{f(d) - f(d - h)}{h}.$$

Passando o limite para $h \to 0$ tem-se:

$$f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq f'_-(d).$$

[1]Para maiores detalhes recomendamos ao leitor consultar a referência [14], pág. 95

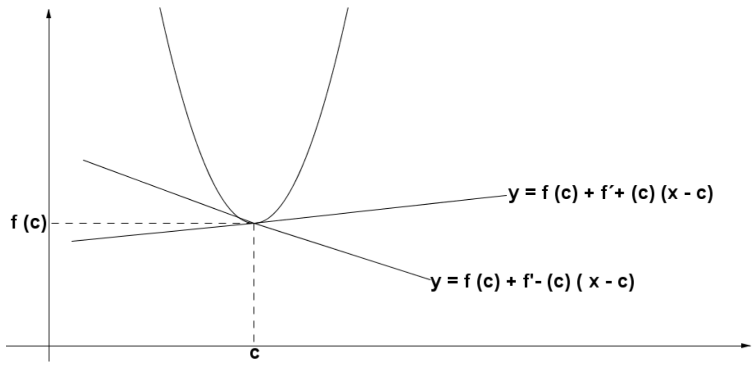

Figura 2.5: Interpretação geométrica do teorema 2.1.12.

□

Definição 2.1.13 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita Lipschitiziana relativa a $I_0 \subset I$ se existe $K > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo $x, y \in I_0$.*

Teorema 2.1.14 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $[a, b] \subset int(I)$. Então:*
(**a**) *f é Lipschitiziana relativa a $[a, b]$;*
(**b**) *f é contínua no $int(I)$.*

Demonstração. (**a**) Sejam $c, d \in I$ tais que $c < a < b < d$. Pelo teorema 2.1.12 tem-se:

$$f_+^{'}(a) \leq f_+^{'}(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f_-^{'}(y) \leq f_-^{'}(b),$$

para todos $a \leq x < y \leq b$.

Logo $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ onde $K := \max\{|f_+^{'}(a)|, |f_-^{'}(b)|\}$. Portanto f é Lipschitiziana relativa a $[a, b]$.
(**b**)f contínua no $int(I)$ é uma consequência imediata do que é demonstrado em (**a**). □

Observação 2.1.15 *Uma função que é Lipschitiziana relativa a um intervalo $[a, b] \subset int(I)$ é absolutamente contínua em $[a, b]$. É um fato bem conhecido que tal função é derivável em quase todos os pontos de $[a, b]$. Isto mostra que toda função convexa é derivável em quase todos os pontos de seu domínio $[a, b]$.*

Em seguida, vamos mostrar uma propriedade de derivabilidade de funções convexas sem usar o conceito de continuidade absoluta.

Teorema 2.1.16 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então:*
(**a**) *No $int(I), f'_-$ é contínua à esquerda e f'_+ é contínua à direita;*
(**b**) *Existe um número contável de pontos onde f não é derivável em I.*

Demonstração. (**a**) Em virtude da continuidade de f no $int(I)$, tem-se para todos x, y, z no $int(I)$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{z \to x} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq \lim_{z \to x} f'_+(z),$$

para $x < z < y$.

Passando o limite para $y \to x$ obtém-se:

$$f'_+(x) \geq \lim_{z \to x} f'_+(z).$$

Como $f'_+(c)$ é não-decrescente, tem-se:

$$f'_+(x) \leq \lim_{z \to x} f'_+(z).$$

Logo,

$$f'_+(x) = \lim_{z \to x} f'_+(z),$$

que prova a continuidade à direita de f'_+. A continuidade à esquerda de f'_- é provada de modo análogo.
(**b**) Do teorema 2.1.12 tem-se:

$$f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(z),$$

para todos $x, y, z \in int(I)$ com $x < y < z$.

Se f'_+ é contínua em y, tem-se:

$$f'_+(y) = \lim_{x \to y} f'_+(x) = \lim_{z \to y} f'_+(z) = f'_-(y)$$

o que significa que f é derivável em y. Isto mostra que os pontos no $int(I)$ onde f não é derivável são aqueles onde a função não - decrescente f'_+ tem um salto. $\square$

2.2 Convexidade Ponto Médio

Definição 2.2.1 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é chamada convexa ponto médio se para todos $a, b \in I$,*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big).$$

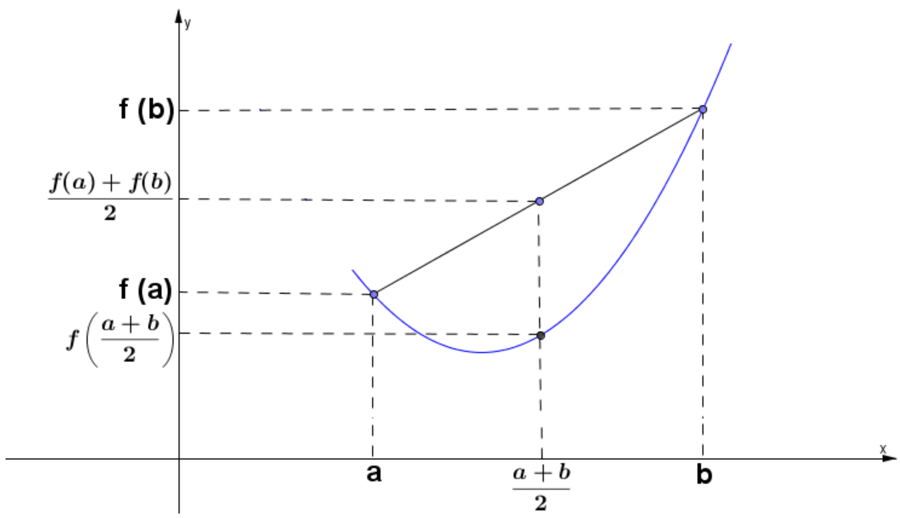

Figura 2.6: Interpretação geométrica da convexidade ponto médio.

A figura 2.6 mostra o significado geométrico da convexidade ponto médio: O ponto médio da corda que une dois pontos do gráfico de f não se localiza abaixo do ponto correspondente no gráfico.

Exemplo 2.2.2 *A função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ é convexa ponto médio.*

Solução. De fato, para quaisquer $a, b \in I \subset \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = \Big|\frac{a+b}{2}\Big| = \Big|\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\Big| &\leq \Big|\frac{a}{2}\Big| + \Big|\frac{b}{2}\Big| \\ &= \frac{1}{2}(|a| + |b|) \\ &= \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

Portanto f é convexa ponto médio. □

Teorema 2.2.3 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ convexa ponto médio e contínua. Então f é convexa.*

Demonstração. Seja $\{a_k\} \subset I$ uma sequência. Da convexidade ponto médio segue que:

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\Big) &= f\Big(\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2}\Big) \\ &\leq \frac{1}{2} f\Big(\frac{a_1+a_2}{2}\Big) + \frac{1}{2} f\Big(\frac{a_3+a_4}{2}\Big) \\ &\leq \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{a_1+a_2}{2}\Big) + f\Big(\frac{a_3+a_4}{2}\Big)\Big] \\ &\leq \frac{1}{4}[f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4)]. \end{aligned}$$

Usando indução matemática, mostra-se que:

$$f\Big(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\Big) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i), \tag{2.2.1}$$

para todo n da forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

Suponha que a desigualdade (2.2.1) vale para $n = N$. Definindo a_N por

$$a_N := \frac{1}{N-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}),$$

segue que

$$a_N = \frac{1}{N}(a_1 + a_2 + \cdots + a_N).$$

Assim,

$$f(a_N) = f\Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N}\Big) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} f(a_i) + \frac{1}{N} f(a_N).$$

Disto segue que $f(a_N) \leq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1} f(a_i)$, ou seja, a desigualdade também vale para $n = N-1$. Consequentemente vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sejam $a, b \in I$ e $k, n \in \mathbb{N}$ com $k < n$. De (2.2.1) segue que,

$$f\Big(\frac{k}{n}a + \frac{n-k}{n}b\Big) \leq \frac{1}{n}[kf(a) + (n-k)f(b)]. \tag{2.2.2}$$

Tomando $\lambda = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$, a desigualdade (2.2.2) torna-se:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

com $\lambda \in \mathbb{Q}$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda \leq 1$, existe $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{Q}$ com $0 \leq \lambda_n \leq 1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Como f é contínua então a desigualdade acima também é válida para $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. $\square$

2.3 Funções Convexas Deriváveis

Teorema 2.3.1 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável. Então f é convexa se e somente se $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Pelo teorema 2.1.12 tem-se que f tem derivada em cada ponto no $int(I)$ e f' é não-decrescente. Assim $f'(x) > 0, \forall x \in I$. Como f é duas vezes derivável, então $f''(x) \geq 0$.

($\Leftarrow$) Sejam $x, y \in I$ com $x < y$ e $0 < \lambda < 1$. Pelo teorema do Valor Médio do Cálculo existem ξ_1, ξ_2 tal que $x < \xi_1 < \lambda x + (1-\lambda)y < \xi_2 < y$ e ξ_3 com

$\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$ de modo que:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) &= \\
\lambda[f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)] + (1-\lambda)[f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(y)] &= \\
\lambda(1-\lambda)(y-x)f^{'}(\xi_1) + (1-\lambda)\lambda(x-y)f^{'}(\xi_2) &= \\
\lambda(1-\lambda)(y-x)(\xi_1 - \xi_2)f^{''}(\xi_3) &\leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto f é convexa. □

Observação 2.3.2 *Podemos concluir do teorema acima que f é estritamente convexa se $f^{''}(x) > 0$ para todo $x \in I$ mas o inverso não é verdadeiro como por exemplo, a função dada por $f(x) = x^4$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ e no entanto $f^{''}(0) = 0$.*

Teorema 2.3.3 (da Minimização Convexa) *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então todo ponto de mínimo local é também ponto de mínimo global e o conjunto de pontos de mínimo é convexo. Se f é estritamente convexa não há mais de um ponto de mínimo.*

Demonstração. Seja $a \in I$ um ponto de mínimo local que não é global. Então existe $b \in I$ tal que $f(b) < f(a)$.

Da convexidade de I, tem-se $x = \lambda b + (1-\lambda)a \in I, 0 \leq \lambda \leq 1$. Por outro lado como f é convexa segue que:

$$\begin{aligned}
f(x) = f(\lambda b + (1-\lambda)a) &\leq \lambda f(b) + (1-\lambda)f(a) \\
&= \lambda f(b) + f(a) - \lambda f(a) \\
&= f(a) + \lambda(f(b) - f(a)) \\
&< f(a).
\end{aligned}$$

Agora se $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, segue que x está próximo de a e como $f(x) < f(a)$ e $x \in I$ tem-se uma contradição na hipótese de a ser ponto de mínimo local que não seja global. Logo a é um ponto de mínimo global de f.

Mostremos que o conjunto de pontos de mínimo é convexo .

Seja $T \subset I$ o conjunto dos pontos de mínimo globais e $z \in \mathbb{R}$ o valor mínimo da função, ou seja, $f(y) = z, \forall y \in T$.

Para quaisquer $y, a \in T$ e $\lambda \in [0,1]$ segue que:

$$f(\lambda y + (1-\lambda)a) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(a) = \lambda z + (1-\lambda)z = z.$$

Disto conclui-se que T é convexo pois $f(\lambda y + (1-\lambda)a) = z$.

E agora mostremos que o ponto de mínimo global é único.

Suponha que f seja estritamente convexa e que existam $y, a \in T$ com $y \neq a$ e $y \in (0,1)$. Como y e a são pontos de mínimo globais e $\lambda y + (1-\lambda)a \in I$, por I ser convexo, tem-se:

$$f(\lambda y + (1-\lambda)a) \geq f(y) = f(a) = z.$$

Mas pela convexidade estrita de f,

$$\begin{aligned} f(\lambda y + (1-\lambda)a) &< \lambda f(y) + (1-\lambda)f(a) \\ &= \lambda z + (1-\lambda)z \\ &= z. \end{aligned}$$

o que é uma contradição!

Portanto o ponto de mínimo é único. $\square$

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo vamos inicialmente mostrar que a partir de funções convexas (ou côncavas) é possível obter desigualdades não tão fáceis de determinar num primeiro momento. Em seguida veremos outras aplicações em problemas provenientes de olimpíadas nacionais e internacionais de matemática e alguns casos de otimização.

3.1 Desigualdade de Jensen

Johan Valdemar Jensen era um engenheiro de telecomunicações dinamarquês que nas horas vagas trabalhava como um matemático amador. Apesar de não ser tão conhecido, Jensen produziu algumas contribuições importantes na matemática, a mais conhecida delas é sua desigualdade, publicada em um trabalho em 1906, na Acta Mathematica. Esta desigualdade é uma generalização da definição de função convexa.

Teorema 3.1.1 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Então:*

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n) \leq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n).$$

Demonstração. Vamos utilizar o Princípio de Indução Matemática sobre n.

A desigualdade é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos que ela é verdadeira para $n = k$ (H.I.) e mostremos que também é verdadeira para $n = k + 1$.

De fato. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \in I$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \geq 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{k+1} = 1$. Pelo menos um dos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ deve ser menor que 1(caso contrário a desigualdade é trivial). Sem perda de generalidade, seja $\lambda_{k+1} < 1$ e $u = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}} a_1 + \ldots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}} a_k$. Por outro lado tem-se que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} + \ldots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = 1$$

e também

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} = (1 - \lambda_{k+1}) u + \lambda_{k+1} a_{k+1}.$$

Como f é convexa:

$$f(1 - \lambda_{k+1}) u + \lambda_{k+1} a_{k+1} \leq (1 - \lambda_{k+1}) f(u) + \lambda_{k+1} f(a_{k+1})$$

e pela hipótese de indução

$$f(u) \leq \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} f(a_1) + \ldots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} f(a_k).$$

Assim, combinando as duas desigualdades acima tem-se:

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{k+1} a_{k+1}) \leq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_{k+1} f(a_{k+1}).$$

Desta forma, a desigualdade é verdadeira para $n = k + 1$. Portanto pelo Princípio de Indução Matemática tem-se que a desigualdade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Observação 3.1.2 **(1)***Para as funções estritamente convexas, a desigualdade de Jensen é satisfeita se e somente se* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

(**2**)*Se* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ *então a desigualdade de Jensen torna-se:*

$$f\Big(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\Big) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n}.$$

(**3**)*Se* f *é uma função côncava então a desigualdade de Jensen é escrita como:*

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n) \geq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n).$$

Exemplo 3.1.3 *Sejam* $a, b \geq 0$ *e* $a + b = 2$*. Mostre que:*

$$(1 + \sqrt[5]{a})^5 + (1 + \sqrt[5]{b})^5 \leq 2^6.$$

Solução. Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1 + \sqrt[5]{x})^5$. Observe que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 + \sqrt[5]{x})^4}{\sqrt[5]{x^4}} \\ f''(x) &= -\frac{4(1 + \sqrt[5]{x})^3}{5\sqrt[5]{x^9}}. \end{aligned}$$

Como $f''(x) < 0$ para todo $x > 0$, segue que f é estritamente côncava em $(0, +\infty)$.

Utilizando a desigualdade de Jensen com $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ tem-se:

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a + b}{2}\Big) &\geq \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ \Big(1 + \sqrt[5]{\frac{a + b}{2}}\Big)^5 &\geq \frac{(1 + \sqrt[5]{a})^5 + (1 + \sqrt[5]{b})^5}{2} \\ 2\Big(1 + \sqrt[5]{\frac{a + b}{2}}\Big)^5 &\geq (1 + \sqrt[5]{a})^5 + (1 + \sqrt[5]{b})^5. \end{aligned}$$

Como a + b = 2 tem-se:

$$
\begin{aligned}
2\Big(1+\sqrt[5]{\frac{2}{2}}\Big)^5 &\geq (1+\sqrt[5]{a})^5+(1+\sqrt[5]{b})^5\\
2(1+\sqrt[5]{1})^5 &\geq (1+\sqrt[5]{a})^5+(1+\sqrt[5]{b})^5\\
2.2^5 &\geq (1+\sqrt[5]{a})^5+(1+\sqrt[5]{b})^5\\
2^6 &\geq (1+\sqrt[5]{a})^5+(1+\sqrt[5]{b})^5.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$(1+\sqrt[5]{a})^5+(1+\sqrt[5]{b})^5 \leq 2^6.$$

□

Exemplo 3.1.4 *Sejam $a, b, c > 0$. Mostre que:*

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

Solução. A desigualdade acima é equivalente a:

$$
\begin{aligned}
\ln(a^a \cdot b^b \cdot c^c) &\geq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\\
\ln a^a + \ln b^b + \ln c^c &\geq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\\
a\ln a + b\ln b + c\ln c &\geq (a+b+c)\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\ln(x)$. Observe que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1+\ln(x)\\
f''(x) &= \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Como $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ então f é estritamente convexa em $(0, +\infty)$.

Utilizando a desigualdade de Jensen com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} &\geq f\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big) \\
\frac{a\ln a + b\ln b + c\ln c}{3} &\geq \frac{a+b+c}{3}\ln\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big) \\
a\ln a + b\ln b + c\ln c &\geq (a+b+c)\ln\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big) \\
\ln a^a + \ln b^b + \ln c^c &\geq \ln\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^{a+b+c} \\
\ln(a^a \cdot b^b \cdot c^c) &\geq \ln\Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^{a+b+c} \\
a^a \cdot b^b \cdot c^c &\geq \Big(\frac{a+b+c}{3}\Big)^{a+b+c}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.1.5 *Sejam $a, b, c > 0$. Mostre que:*

$$\frac{a}{a+3b+3c} + \frac{b}{3a+b+3c} + \frac{c}{3a+3b+c} \geq \frac{3}{7}.$$

Solução. Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{t-x} = \dfrac{t}{t-x} - 1$ com $x \in (0, t)$ e $t \in \mathbb{R}^+$. Observe que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{t}{(t-x)^2} \\
f''(x) &= \frac{2t}{(t-x)^3}.
\end{aligned}$$

Como $f''(x) = \dfrac{2t}{(t-x)^3} > 0$ então f é estritamente convexa em $(0, +\infty)$.

Utilizando a desigualdade de Jensen com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{f(2a)+f(2b)+f(2c)}{3} &\geq f\Big(\frac{2a+2b+2c}{3}\Big)\\
\frac{\frac{2a}{t-2a}+\frac{2b}{t-2b}+\frac{2c}{t-2c}}{3} &\geq \frac{\frac{2a+2b+2c}{3}}{t-\frac{2a+2b+2c}{3}}\\
\frac{\frac{2a}{t-2a}+\frac{2b}{t-2b}+\frac{2c}{t-2c}}{3} &\geq \frac{\frac{2a+2b+2c}{3}}{\frac{3t-(2a+2b+2c)}{3}}\\
\frac{2a}{t-2a}+\frac{2b}{t-2b}+\frac{2c}{t-2c} &\geq 3\Big[\frac{2a+2b+2c}{3t-(2a+2b+2c)}\Big]\\
2\cdot\Big(\frac{a}{t-2a}+\frac{b}{t-2b}+\frac{c}{t-2c}\Big) &\geq \frac{6a+6b+6c}{3t-(2a+2b+2c)}\\
2\cdot\Big(\frac{a}{t-2a}+\frac{b}{t-2b}+\frac{c}{t-2c}\Big) &\geq 2\cdot\Big(\frac{3a+3b+3c}{3t-2(a+b+c)}\Big)\\
\frac{a}{t-2a}+\frac{b}{t-2b}+\frac{c}{t-2c} &\geq \frac{3(a+b+c)}{3t-2(a+b+c)}.
\end{aligned}$$

Tomando $t = 3(a+b+c)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{3(a+b+c)-2a}+\frac{b}{3(a+b+c)-2b}+\frac{c}{3(a+b+c)-2c} &\geq\\
\frac{3(a+b+c)}{3.3(a+b+c)-2(a+b+c)}&\\
\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c} &\geq \frac{3a+3b+3c}{7a+7b+7c}\\
\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c} &\geq \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.1.6 *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$. Mostre que:*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}.$$

Solução. Considere a função $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

Observe que:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}.$$

Como $f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} > 0$ então f é estritamente convexa em $(0, +\infty)$.

Aplicando a desigualdade de Jensen com $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ tem-se:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq f\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+e^{x_k}} \geq \frac{1}{1+e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+e^{x_k}} \geq \frac{n}{1+e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}}.$$

Tomando $x_k = \ln a_k$, com $k = 1, 2, \ldots, n$ tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+e^{\ln a_k}} \geq \frac{n}{1+e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{n}{1+e^{\frac{1}{n}\ln(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k)}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{n}{1+(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}.$$

$\square$

3.2 Desigualdades das Médias

Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica simples.

Teorema 3.2.1 *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, *com* $n \in \mathbb{N}$. *Então:*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Demonstração. Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$. Observe que:

$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x.$$

Como $f''(x) = e^x > 0$ então f é estritamente convexa em $\mathbb{R}$.

Logo,

$\forall b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ tem-se:

$$f(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n) \leq \lambda_1 f(b_1) + \lambda_2 f(b_2) + \ldots + \lambda_n f(b_n)$$
$$e^{(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n)} \leq \lambda_1 e^{b_1} + \lambda_2 e^{b_2} + \ldots + \lambda_n e^{b_n}.$$

Para $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ considere $b_j = \ln a_j$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Assim:

$$e^{(\frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + \ldots + \frac{1}{n}\ln a_n)} \leq \frac{1}{n}e^{\ln a_1} + \frac{1}{n}e^{\ln a_2} + \ldots + \frac{1}{n}e^{\ln a_n}$$
$$e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n)} \leq \frac{1}{n}(e^{\ln a_1} + e^{\ln a_2} + \ldots + e^{\ln a_n})$$
$$e^{\frac{1}{n}[\ln(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)]} \leq \frac{e^{\ln a_1} + e^{\ln a_2} + \ldots + e^{\ln a_n}}{n}.$$

Logo,

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Portanto,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

$\square$

Exemplo 3.2.2 (Olimpíada Israelense) *Sejam k, n inteiros positivos, $n > 1$. Prove que:*

$$\frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \ldots + \frac{1}{kn+n-1} > n\left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}} - 1\right). \tag{3.2.1}$$

Solução. Mostrar a desigualdade (3.2.1) é equivalente a mostrar a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \ldots + \frac{1}{kn+n-1} + n > n\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}}. \tag{3.2.2}$$

Como $n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} 1$, o membro esquerdo da desigualdade (3.2.2) pode ser escrito da forma:

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{kn+j}\right) + n = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{kn+j} + 1\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j}.$$

Utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se:

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{kn+j}\right) + n > n\sqrt[n]{\prod_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j}}.$$

Por outro lado, observe que:

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{n-1} \frac{kn+j+1}{kn+j} &= \frac{kn+1}{kn} \cdot \frac{kn+1+1}{kn+1} \cdot \frac{kn+2+1}{kn+2} \cdot \ldots \cdot \frac{kn+n-1+1}{kn+n-1} \\ &= \frac{kn+n}{kn} = \frac{k+1}{k}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{kn+j}\Big) + n > n\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \ldots + \frac{1}{kn+n-1} > n\Big(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}} - 1\Big).$$

$\square$

Exemplo 3.2.3 (PIC-OBMEP) *Prove que num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual que a metade da hipotenusa. Mostre ainda que a igualdade só ocorre se o triângulo retângulo é isósceles.*

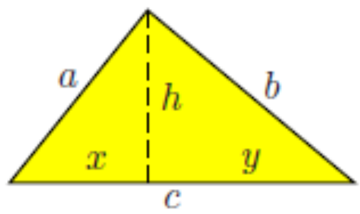

Figura 3.1: Interpretação geométrica.

Solução. Sejam a, b as medidas dos catetos, c a medida da hipotenusa, x, y as medidas das projeções relativas à hipotenusa e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Assim tem-se: $c = x+y$ e $h^2 = xy$. Logo $h = \sqrt{xy}$. Utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se:

$$h = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{c}{2}.$$

Portanto a altura relativa à hipotenusa h é metade da medida da hipotenusa c.

Além disso, utilizando o teorema de Pitágoras tem-se:

$$a^2 = x^2 + h^2$$
$$b^2 = y^2 + h^2.$$

Como a igualdade entre as médias aritmética e geométrica só ocorre se $x = y$, então:

$$a^2 = x^2 + h^2$$
$$b^2 = x^2 + h^2.$$

Logo,

$$a^2 = b^2$$
$$a = b.$$

Portanto os catetos a e b são iguais e o triângulo retângulo é isósceles. $\square$

Exemplo 3.2.4 *Mostre que de todos os retângulos de perímetro p dado, o quadrado é o que tem maior área.*

Solução. Sejam a e b os lados de um retângulo qualquer e p o perímetro. Sabe-se que $p = 2a + 2b = 2(a + b)$ e a área do retângulo, denotada por A, é dada por: $A = a \cdot b$. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, segue que:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Logo,

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{\frac{p}{2}}{2} = \frac{p}{4}$$
$$a \cdot b \leq \frac{p^2}{16}.$$

Então segue que a área do retângulo de perímetro p dado é limitada superiormente pela constante $\frac{p^2}{16}$ e ocorre o máximo com a igualdade da expressão acima. Assim,

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= \frac{p^2}{16} \\
a \cdot b &= \frac{[2(a+b)]^2}{16} \\
a \cdot b &= \frac{4 \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2)}{16} \\
a \cdot b &= \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{4} \\
4 \cdot a \cdot b &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\
a^2 + 2 \cdot a \cdot b - 4 \cdot a \cdot b + b^2 &= 0 \\
a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= 0 \\
(a-b)^2 &= 0 \\
a - b &= 0 \\
a &= b.
\end{aligned}$$

Portanto entre todos os retângulos de perímetro p, o que tem maior área é o quadrado. □

Exemplo 3.2.5 *Prove que de todos os retângulos de área A, o de menor perímetro é o quadrado.*

Solução. Sejam a e b as medidas dos lados de um retângulo qualquer e p o perímetro. Sabe-se que o perímetro p é dado por: $p = 2a + 2b = 2(a+b)$ e a área A é dada por: $A = a \cdot b$. Novamente utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sqrt{a\cdot b} &\leq \frac{\frac{p}{2}}{2}\\
\sqrt{a\cdot b} &\leq \frac{p}{4}\\
4\cdot\sqrt{a\cdot b} &\leq p.
\end{aligned}$$

Então segue que o perímetro mínimo de todos os retângulos de área A ocorre com a igualdade da expressão acima. Assim,

$$\begin{aligned}
4\cdot\sqrt{a\cdot b} &= p\\
4\cdot\sqrt{a\cdot b} &= 2\cdot(a+b)\\
\sqrt{a\cdot b} &= \frac{a+b}{2}\\
a\cdot b &= \frac{(a+b)^2}{4}\\
4\cdot a\cdot b &= a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\\
a^2+2\cdot a\cdot b-4\cdot a\cdot b+b^2 &= 0\\
a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 &= 0\\
(a-b)^2 &= 0\\
a-b &= 0\\
a &= b.
\end{aligned}$$

Portanto entre todos os retângulos de área A, o de menor perímetro é o quadrado. $\square$

Exemplo 3.2.6 *Mostre que*

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

para todo $n \geq 2$.

Solução. Como $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, podemos escrever $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$. Logo, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica obtém-se:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} < \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n}{1}} = \frac{n+1}{2}.$$

Elevando ambos os membros da desigualdade à potência n, tem-se:

$$\begin{aligned}(\sqrt[n]{n!})^n &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \\ n! &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Portanto $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ para todo $n \geq 2$. $\square$

Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ponderada.

Teorema 3.2.7 *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Então:*

$${a_1}^{\lambda_1}{a_2}^{\lambda_2}\ldots{a_n}^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x)$. Observe que:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

Como $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ então f é estritamente côncava em $(0, +\infty)$.

Assim, utilizando a desigualdade de Jensen tem-se:

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n) \geq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n)$$

ou de forma equivalente,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_n f(a_n) &\leq f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n) \\
\lambda_1 \ln a_1 + \lambda_2 \ln a_2 + \ldots + \lambda_n \ln a_n &\leq \ln(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n) \\
\ln {a_1}^{\lambda_1} + \ln {a_2}^{\lambda_2} + \ldots + \ln {a_n}^{\lambda_n} &\leq \ln(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n) \\
\ln({a_1}^{\lambda_1} {a_2}^{\lambda_2} \ldots {a_n}^{\lambda_n}) &\leq \ln(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n).
\end{aligned}$$

Como a função $f(x) = e^x$ é crescente e $e^{\ln x} = x$ tem-se:

$$e^{\ln({a_1}^{\lambda_1} {a_2}^{\lambda_2} \ldots {a_n}^{\lambda_n})} \leq e^{\ln(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n)}.$$

Portanto,

$${a_1}^{\lambda_1} {a_2}^{\lambda_2} \ldots {a_n}^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

□

Exemplo 3.2.8 *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *e* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ *tal que* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. *Se* $a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} = 1$ *então*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1} \ldots \lambda_n^{\lambda_n}}.$$

Solução. Utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ponderada tem-se:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= \lambda_1(\frac{a_1}{\lambda_1}) + \ldots + \lambda_n(\frac{a_n}{\lambda_n}) \geq (\frac{a_1}{\lambda_1})^{\lambda_1} \ldots (\frac{a_n}{\lambda_n})^{\lambda_n} \\
&= \frac{{a_1}^{\lambda_1}}{{\lambda_1}^{\lambda_1}} \ldots \frac{{a_n}^{\lambda_n}}{{\lambda_n}^{\lambda_n}} = \frac{{a_1}^{\lambda_1} \ldots {a_n}^{\lambda_n}}{\lambda_1^{\lambda_1} \ldots \lambda_n^{\lambda_n}} = \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1} \ldots \lambda_n^{\lambda_n}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1} \ldots \lambda_n^{\lambda_n}}.$$

□

3.3 Desigualdade de Young

Teorema 3.3.1 *Sejam $a, b > 0$ e $p, q \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Observe que:

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} \\ &= e^{\ln(a^p)^{\frac{1}{p}} + \ln(b^q)^{\frac{1}{q}}} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q}. \end{aligned}$$

Considere a função convexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Utilizando a desigualdade de Jensen com $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ pois $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tem-se:

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \leq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} &\leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} \\ ab &\leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3.2 *Mostre que se $a \geq b > 0$ e $a + b = 1$ então:*

$$a^a b^b \geq \frac{1}{2}.$$

Solução. Observe que $\dfrac{1}{a^a b^b} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^a \left(\dfrac{1}{b}\right)^b$ e tomando $p = \dfrac{1}{a}$ e $q = \dfrac{1}{b}$ tem-se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Pela desigualdade de Young tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^a b^b} &= \left(\frac{1}{a}\right)^a \left(\frac{1}{b}\right)^b \\
&\leq \frac{\left[\left(\frac{1}{a}\right)^a\right]^{\frac{1}{a}}}{1/a} + \frac{\left[\left(\frac{1}{b}\right)^b\right]^{\frac{1}{b}}}{1/b} = a\left(\frac{1}{a}\right) + b\left(\frac{1}{b}\right) \\
&= 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{a^a b^b} \leq 2$. Portanto, $a^a b^b \geq \frac{1}{2}$. □

3.4 Desigualdade de Hölder

Teorema 3.4.1 *Sejam $p, q > 1$ números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ então:*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^q$. Observe que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= qx^{q-1} \\
f''(x) &= q(q-1)x^{q-2}.
\end{aligned}$$

Como $f''(x) = q(q-1)x^{q-2} > 0$ então f é estritamente convexa em $(0, +\infty)$.

Utilizando a desigualdade de Jensen tem-se:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)^q \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^q$$

onde $x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n > 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Seja $A = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p$. Escolhendo $\lambda_k = \frac{1}{A}|a_k|^p$ e $x_k = \frac{1}{\lambda_k}|a_k||b_k|$ e substituindo na desigualdade acima obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k|\Big)^q &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}|a_k|^p \frac{1}{\lambda_k}|a_k||b_k|\Big)^q \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}|a_k|^p \Big(\frac{1}{\lambda_k}|a_k||b_k|\Big)^q \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}|a_k|^{p+q}\Big(\frac{1}{\lambda_k^q}|b_k|^q\Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}(|a_k|^p)^q\Big(\frac{1}{\lambda_k^q}|b_k|^q\Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A}(\lambda_k A)^q\Big(\frac{1}{\lambda_k^q}|b_k|^q\Big) \\
&\leq A^{q-1}\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \\
&\leq A^{\frac{q}{p}}\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leqslant A^{\frac{1}{p}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$. □

Observação 3.4.2 **1**) *A igualdade ocorre se e somente se* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ *ou seja* $\frac{|a_1|^p}{|b_1|^p} = \frac{|a_2|^p}{|b_2|^p} = \cdots = \frac{|a_n|^p}{|b_n|^p}$.

As igualdades indicam o seguinte: Se um certo $b_k = 0$ *então devemos ter* $a_k = 0$.

2) *Se* $p = q = 2$ *então a desigualdade de Hölder torna-se a desigualdade de Cauchy:*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k|\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\Big).$$

A igualdade ocorre quando $\frac{|a_1|}{|b_1|} = \frac{|a_2|}{|b_2|} = \cdots = \frac{|a_n|}{|b_n|}$.

Exemplo 3.4.3 (África do Sul - 95) *Sejam* a, b, c, d *números reais positivos. Prove que:*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Solução. Sejam

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}; \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}; \quad a_3 = \frac{2}{\sqrt{c}}; \quad a_4 = \frac{4}{\sqrt{d}}$$
$$b_1 = \sqrt{a}; \quad b_2 = \sqrt{b}; \quad b_3 = \sqrt{c}; \quad b_4 = \sqrt{d}.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com $p = q = 2$ e $n = 4$ tem-se:

$$\Big(\sum_{k=1}^{4} |a_k||b_k|\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{4} |a_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{4} |b_k|^2\Big)$$

ou de forma equivalente,

$$\Big(\sum_{k=1}^{4} |a_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{4} |b_k|^2\Big) \geq \Big(\sum_{k=1}^{4} |a_k||b_k|\Big)^2.$$

Logo,

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2$$

é equivalente a:

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}) \cdot (a + b + c + d) &\geq (1 + 1 + 2 + 4)^2 \\
(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}) \cdot (a + b + c + d) &\geq 8^2 \\
(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}) \cdot (a + b + c + d) &\geq 64 \\
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} &\geq \frac{64}{a + b + c + d}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.4.4 *Se a, b, c são números reais tais que*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

então qual é o valor máximo de $ab + bc + ac$?

Solução. Utilizando a desigualdade de Hölder com $p = q = 2$ e $n = 3$ nas ternas ordenadas de números reais (a, b, a) e (b, c, c) tem-se:

$$\Big(\sum_{k=1}^{3} |a_k||b_k|\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{3} |a_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{3} |b_k|^2\Big)$$
$$(ab + bc + ac)^2 \leq (a^2 + b^2 + a^2) \cdot (b^2 + c^2 + c^2).$$

Como $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ segue que $a^2 + b^2 = 1 - c^2$. Logo,

$$a^2 + b^2 + a^2 = 1 - c^2 + a^2.$$

Por outro lado, de modo análogo, tem-se: $b^2 + c^2 = 1 - a^2$. Assim,

$$b^2 + c^2 + c^2 = 1 - a^2 + c^2.$$

Portanto,

$$(ab + bc + ac)^2 \leq (a^2 + b^2 + a^2) \cdot (b^2 + c^2 + c^2) = (1 - c^2 + a^2) \cdot (1 - a^2 + c^2).$$

Tomando $x = a^2 - c^2$ tem-se:

$$(ab + bc + ac)^2 \leq (1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 \leq 1.$$

Portanto o maior valor da expressão $ab + bc + ac$ é 1 e ele ocorre quando $a = b = c = \sqrt{\frac{1}{3}}$. $\square$

Exemplo 3.4.5 (Teste de seleção da Romênia para IMO) *Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ números reais positivos tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_{n+1}$. Prove que:*

$$\sqrt{x_1(x_{n+1} - x_1)} + \cdots + \sqrt{x_n(x_{n+1} - x_n)}$$
$$\leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + \cdots + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}.$$

Solução. Para $1 \leq j \leq n$, seja $y_j = x_{n+1} - x_j$. Aplicando a desigualdade de Hölder com $p = q = 2$ e $a_k = x_k$ e $b_k = y_k$ tem-se:

$$\begin{aligned}(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 &\leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + \cdots + y_n^2)\\ x_1y_1 + \cdots + x_ny_n &\leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.\end{aligned}$$

Como $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ são números reais positivos, então existem $\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n}$ e $\sqrt{y_1}, \ldots, \sqrt{y_n}$. Logo,

$$\begin{aligned}&\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{y_1} + \cdots + \sqrt{x_n} \cdot \sqrt{y_n}\\ &\leq \sqrt{(\sqrt{x_1})^2 + \cdots + (\sqrt{x_n})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{y_1})^2 + \cdots + (\sqrt{y_n})^2}\\ &\sqrt{x_1y_1} + \cdots + \sqrt{x_ny_n}\\ &\leq \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \cdot \sqrt{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}\\ &\sqrt{x_1(x_{n+1} - x_1)} + \cdots + \sqrt{x_n(x_{n+1} - x_n)}\\ &\leq \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \cdot \sqrt{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}\\ &= \sqrt{x_{n+1}} \cdot \sqrt{(x_{n+1} - x_1) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)}\\ &= \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + \cdots + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.4.6 *Sejam $a, b, c, x, y, z, n > 0$ tais que $(a^n + b^n + c^n)^{n+1} = x^n + y^n + z^n$. Mostre que:*

$$\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z} \geq 1. \tag{3.4.1}$$

Solução. Observe que:

$$a^n + b^n + c^n = [\frac{a^{n+1}}{x}]^{\frac{n}{n+1}} \cdot x^{\frac{n}{n+1}} + [\frac{b^{n+1}}{y}]^{\frac{n}{n+1}} \cdot y^{\frac{n}{n+1}} + [\frac{c^{n+1}}{z}]^{\frac{n}{n+1}} \cdot z^{\frac{n}{n+1}}. \tag{3.4.2}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder com $p = \frac{n+1}{n}$ e $q = \frac{p}{p-1} = n+1$ tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{n+1}{n}}\Big)^{\frac{1}{\frac{n+1}{n}}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{n+1}\Big)^{\frac{1}{n+1}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{n+1}{n}}\Big)^{\frac{n}{n+1}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{n+1}\Big)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Agora, de (3.4.2) obtém-se:

$$a^n + b^n + c^n \leq \Big(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\Big)^{\frac{n}{n+1}} (x^n + y^n + z^n)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Por hipótese $(a^n + b^n + c^n)^{n+1} = x^n + y^n + z^n$. Logo,

$$\Big(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\Big)^{\frac{n}{n+1}} \geq 1.$$

Disto segue (3.4.1). □

Exemplo 3.4.7 *Sejam* $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \cdots, n$, *tais que* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n, b_1 + b_2 + \cdots + b_n > 0$. *Demonstre que:*

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{n+1}}{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^n} \leq \frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \cdots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}.$$

Solução. Observe que:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left[\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n}\right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot b_1^{\frac{n}{n+1}} + \cdots + \left[\frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot b_n^{\frac{n}{n+1}} \qquad (3.4.3)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com $p = n+1$ e $q = \frac{n+1}{n}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| &\leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| &\leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{n+1}\Big)^{\frac{1}{n+1}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{\frac{n+1}{n}}\Big)^{\frac{1}{\frac{n+1}{n}}} \\
\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| &\leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{n+1}\Big)^{\frac{1}{n+1}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{\frac{n+1}{n}}\Big)^{\frac{n}{n+1}}.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando (3.4.3) obtém-se:

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \left[\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n}\right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot b_1^{\frac{n}{n+1}} + \cdots + \left[\frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot b_n^{\frac{n}{n+1}} \\
&\leq \left[\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \cdots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^{\frac{n}{n+1}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{n+1} \leq \Big(\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \cdots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\Big)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^n.$$

Portanto,

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{n+1}}{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^n} \leq \frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \cdots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}.$$

□

Exemplo 3.4.8 *Mostre que entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c, o que tem maior soma dos catetos $s = a + b$ é o triângulo isósceles.*

Solução. Utilizando a desigualdade de Hölder com $p = q = 2$ e $n = 2$ tem-se:

$$\Big(\sum_{k=1}^{2} |a_k||b_k|\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{2} |a_k|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{2} |b_k|^2\Big).$$

Logo,

$$a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1 \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{1^2 + 1^2} = c\sqrt{2}.$$

Assim,

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

O valor máximo ocorre com a igualdade da expressão acima. Desta forma:

$$a + b = c\sqrt{2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= (c\sqrt{2})^2 \\
(a + b)^2 &= c^2 \cdot 2 \\
a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= 2c^2 \\
a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= 2 \cdot (a^2 + b^2) \\
a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= 2a^2 + 2b^2 \\
2a^2 - a^2 + 2b^2 - b^2 - 2 \cdot a \cdot b &= 0 \\
a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= 0 \\
(a - b)^2 &= 0 \\
a - b &= 0 \\
a &= b.
\end{aligned}$$

Portanto o triângulo retângulo que tem a maior soma dos catetos é o triângulo retângulo isósceles. □

3.5 Desigualdade de Minkowski

Teorema 3.5.1 *Seja* $p > 1$ *e* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$ *então:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1 + x^{\frac{1}{p}})^p$.

Observe que:

$$f'(x) = x^{\frac{1}{p}-1}(1 + x^{\frac{1}{p}})^{p-1}$$
$$f''(x) = \frac{1-p}{p}(1 + x^{\frac{1}{p}})^{p-2} \cdot x^{\frac{1}{p}-2}.$$

Como $f''(x) = \frac{1-p}{p}(1 + x^{\frac{1}{p}})^{p-2} \cdot x^{\frac{1}{p}-2} < 0$ então f é estritamente côncava em $(0, +\infty)$.

Utilizando a desigualdade de Jensen tem-se:

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) = \Big[1 + \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Big(1 + x_k^{\frac{1}{p}}\Big)^p$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Sejam $a_k > 0$ e $A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p$. Escolhendo $\lambda_k = \frac{a_k^p}{A}$ e $x_k = \frac{b_k^p}{a_k^p}$ com $k = 1, 2, \ldots, n$ e substituindo na desigualdade acima tem-se:

$$\Big[1 + \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{A} \frac{b_k^p}{a_k^p}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{A} \Big[1 + \Big(\frac{b_k^p}{a_k^p}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p$$
$$\Big[1 + \frac{1}{A^{\frac{1}{p}}} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{A} \Big[1 + \Big(\frac{b_k}{a_k}\Big)\Big]^p$$
$$\frac{1}{A}\Big[A^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p \geq \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n} a_k^p \Big(\frac{a_k + b_k}{a_k}\Big)^p$$
$$\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]^p \geq \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^p.$$

Desta última desigualdade segue que:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Observação 3.5.2 **1**) *A igualdade ocorre se e somente se* $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$.
2) *Se* $p = 2$ *então a desigualdade de Minkowski torna-se a desigualdade triangular:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Exemplo 3.5.3 *Duas torres de alturas* h_1 *e* h_2 *são amarradas por uma corda* APB *que vai do topo de* A *da primeira torre para um ponto* P *no chão, entre as torres, e então até o topo* B *da segunda torre. Qual a posição do ponto* P *que nos dá o comprimento mínimo da corda a ser utilizada?*

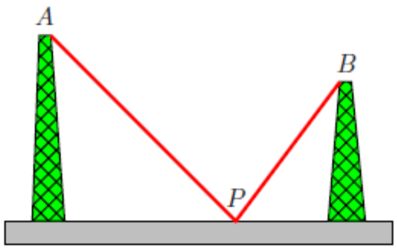

Figura 3.2: Interpretação geométrica do problema das torres.

Solução. Imagine que a superfície do chão é como um espelho e que reflete o ponto P através deste, obtendo o ponto B' como mostra a figura 3.3

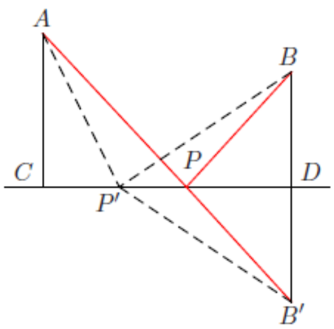

Figura 3.3: O ponto B' é simétrico ao ponto P.

Considere o segmento AB' que intersecta o chão no ponto P e note que este é o ponto que nos dá o comprimento mínimo da corda. Para isso, suponha que existe outro ponto P' entre as torres que indica um comprimento menor para a corda. Assim, os triângulos BPD e $B'PD$ são congruentes e os triângulos $BP'D$ e $B'P'D$ também são congruentes. Logo, $BP = B'P$ e $BP' = B'P'$.

Utilizando a desigualdade de Minkowski com $p = 2$ tem-se:

$$AP' + P'B = AP' + P'B' \geq AB' = AP + PB' = AP + PB.$$

Portanto $AP + PB$ é o comprimento mínimo desejado para a corda. $\square$

Capítulo 4

Considerações Finais e Perspectivas

Após apresentar o conceito e as aplicações das funções convexas de uma variável real, espera-se que o leitor tenha à disposição uma poderosa ferramenta matemática a ser utilizada na demonstração de famosas desigualdades e na resolução de diversas situações-problema.

Como pode ser observado, o principal diferencial desta dissertação é o *detalhamento* das demonstrações e soluções dos exercícios, proporcionando ao leitor maior compreensão do tema e sua aplicação em diversos problemas que envolvem desigualdades.

Embora muitos currículos de matemática do ensino médio em nosso país não contemplem o estudo do cálculo diferencial, sugere-se que o critério a ser utilizado para verificar a convexidade de uma função seja o seguinte:

Se f for contínua, utilize:

f é convexa se $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ para todos $x, y \in I \subset \mathbb{R}$.

Se f não for contínua, utilize a definição de função convexa.

Atualmente está em debate a reformulação do currículo do ensino médio em nosso país. Muitos estudiosos da área da Educação afirmam que os alunos necessitam desenvolver habilidades de modo que saibam utilizar de modo significativo o que estudam no decorrer de sua vida escolar.

Especificamente na área de Matemática, alguns estudiosos há anos vem defendendo o retorno do cálculo diferencial nos currículos do ensino médio. Em especial, o professor Geraldo Ávila afirma: "O conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções."(ÁVILA, 1996).

Para ele, o ensino de derivada é de grande importância, pela forma que ajuda no tratamento de inúmeras propriedades das funções, de maneira mais natural e contextualizada. Além disso, pode se integrar harmoniosamente com a Física no estudo do movimento e em outras aplicações científicas.

Em Portugal, alguns conceitos de cálculo diferencial são introduzidos no 10º ano de escolaridade e são ampliados no 12º ano quando utiliza-se a 2ª derivada em problemas práticos da vida real.

Veja a seguir, como exemplo, os benefícios da utilização de funções convexas e derivadas em casos de otimização se o seu estudo ocorresse já no ensino médio.

Otimização na Biologia e Física

Exemplo 4.0.4 *O número de bactérias, em milhões de unidades, de uma certa cultura é dado por:*

$$N(t) = N_0 e^{kt}, t \geq 0,$$

onde N_0 é o número inicial de bactérias, t é o tempo em minutos desde o início do experimento e k uma constante positiva. Considere que no décimo minuto decidiu-se aplicar um medicamento à população de bactérias para interromper seu crescimento. A partir deste momento, o seu número passou a ser dado por:

$$D(t) = 2(t-10)^2.e^{-t+10} + 4, t \geq 10.$$

Qual o instante que a taxa de crescimento é máxima? Indique o resultado em minutos e segundos.

Solução. Inicialmente é necessário determinar a segunda derivada da função $D(t)$. Assim:

$$D''(t) = e^{-t+10}(2t^2 - 48t + 284).$$

Em seguida é preciso calcular as raízes de $D''(t)$ e verificar qual é o ponto em que a taxa de crescimento é máxima. Logo:

$$D''(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-t+10} = 0}_{impossivel} \vee 2t^2 - 48t + 284 = 0 \Leftrightarrow t = 12 \pm \sqrt{2}.$$

Elaborando o quadro de sinais tem-se:

t	10		12 - $\sqrt{2}$		12 + $\sqrt{2}$	$+\infty$
D''	+	+	0	-	0	+
D		$\cup$	ponto de inflexão	$\cap$	ponto de inflexão	$\cup$

Analisando o quadro acima verifica-se que o ponto onde a taxa de crescimento é máxima é $12 - \sqrt{2}$.

Logo,

$12 - \sqrt{2} \cong 10,5858 \cong 10$ minutos e 35 segundos.

Portanto para $t \cong 10$ minutos e 35 segundos a taxa de crescimento atinge o valor máximo. □

Exemplo 4.0.5 *Uma partícula move-se durante 2 segundos de acordo com as equações:*

$$x = 2 - tey = 5 + 4t - 3,5t^2.$$

Em que instante, $t = 0,3$ ou $t = 1,6$ segundos o raio de curvatura da trajetória é maior? Justifique.

Observação 4.0.6 *Numa trajetória circular, o raio de curvatura coincide com o raio da circunferência. Em outras curvas, existe em cada ponto um raio de curvatura que é calculado por:*

$$R = \frac{v^2}{a_n}$$

onde v é o módulo da velocidade e a_n é a aceleração normal.

Solução. Primeiramente é necessário determinar a equação da trajetória da partícula. Assim:

$$y = 5+4t-3,5t^2 \Leftrightarrow y = 5+4(2-x)-3,5(2-x)^2 \Leftrightarrow y = -3,5x^2+10x-1, x \in [0,2].$$

A partícula descreve uma trajetória parabólica como representa o gráfico abaixo.

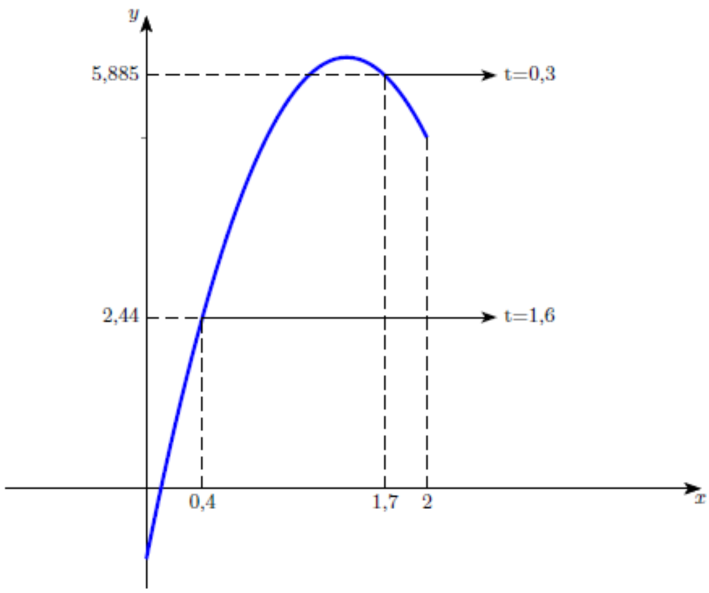

Figura 4.1: Gráfico da trajetória da partícula.

Observando o gráfico nota-se que em $t = 0,3$ segundos a curvatura é mais acentuada que em $t = 1,6$ pois seu formato é côncavo. Desta forma, espera-se que o raio de curvatura em $t = 0,3$ seja inferior ao raio de curvatura em $t = 1,6$ segundos.

Para demonstrar esta hipótese é preciso calcular os raios de curvatura. Assim iniciando pelas equações das velocidades tem-se:

$$v_x = x' = (2-t)' = -1$$

$$v_y = y^{'} = (5 + 4t - 3,5t^2)^{'} = 4 - 7t.$$

O módulo da velocidade é:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (4 - 7t)^2} = \sqrt{17 - 56t + 49t^2}.$$

Para $t = 0,3$ tem-se:

$$v = \sqrt{17 - 56.(0,3) + 49(0,3)^2} = 2,15$$

e para $t = 1,6$:

$$v = \sqrt{17 - 56.(1,6) + 49(1,6)^2} = 7,27$$

É possível verificar que o movimento da partícula é inicialmente retardado e depois acelerado. O módulo da velocidade varia mais rapidamente quando a aceleração tangencial a_t é maior. Assim, como $a_t = v^{'}$ tem-se:

$$a_t = v^{'} = (\sqrt{17 - 56t + 49t^2})^{'} = \frac{98t - 56}{2(\sqrt{17 - 56t + 49t^2})}.$$

A seguir é preciso estabelecer o módulo da aceleração (a). Logo:

$$a_x = v_x^{'} = (-1)^{'} = 0$$

$$a_y = v_y^{'} = (4 - 7t)^{'} = -7.$$

O módulo da aceleração é dado por:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + (-7)^2} = 7$$

e o módulo da aceleração normal é:

Para $t = 0,3$:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{7^2 - (6,19)^2} \cong 3,27.$$

Para $t = 1,6$:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{7^2 - (6,93)^2} \cong 0,99.$$

E finalmente calculando o raio R da curvatura:

Para $t = 0,3$:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2,15^2}{3,27} \cong 1,41$$

e para $t = 1,6$:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{7,27^2}{0,99} \cong 53,39.$$

Logo o raio de curvatura é 1,41 metros em $t = 0,3$ e 53,39 metros em $t = 1,6$ segundos.

Portanto o raio de curvatura é maior em $t = 1,6$ segundos. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] AMORIM, Ronan Gomes de. **Introdução à análise convexa:** Conjuntos e Funções Convexas. 2013. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

[2] BARATA, João Carlos Alves. **Curso de física-matemática**. São Paulo: Ed. USP, 2014.

[3] BUSSE, Ronaldo da Silva; SOARES, Flávia dos Santos. **O Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio**. 2007. p.8. Trabalho Científico (In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM), Belo Horizonte, 2007. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/PO02944174789T.doc>. Acesso em: 29 nov. 2014.

[4] CAMPELO, Alexandre Francisco. **A desigualdade triangular e a desigualdade de Jensen**. 2013. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

[5] CARVALHO, Valessa Zaigla Faustino Sousa. **Funções Convexas com aplicações em problemas de olimpíadas de matemática**. 2013. 50 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

[6] FREIRE, Benedito Tadeu; GOMES, José Maria. **Uma desigualdade muito útil: a de Cauchy-Schwars**. Olimpíada de matemática do estado do Rio Grande do Norte. Aula 2. 2010. Disponível em: <http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/AULA-N2-OLIMPIADA-DE-MATEMATICA-SUPER-CORRIGIDA.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2014.

[7] GUEDES, Anderson Guimarães; ASSIS, Márcia Maria Alves. **Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN**. 2009. p.13. Trabalho Científico (In: II Encontro Regional de Educação Matemática-II EREM), Natal, 2009. Disponível em: <http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica3.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2014.

[8] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

[9] HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP, Rio de Janeiro , v. 4, n. 4, p. 73 - 82, Jun. 2010. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/prog_ic_2010/apostila2010.html>. Acesso em: 29 nov. 2014.

[10] HLENKA, Vanessa. **Principais propriedades das funções convexas**. 2006. 36 f. Trabalho(Iniciação Científica) - Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2006.

[11] HRIUMIUC, Dragos. Inequalities for Convex Functions (Part I) **π in the Sky**, Alberta, Canada, v. 4, n. 4, p. 20 - 24, Dec. 2001. Disponível em: <http://www.pims.math.ca/resources/publications/pi-sky>. Acesso em: 29 nov. 2014.

[12] HUNG, Pham Kim. **Secrets in Inequalities:** Basic Inequalities. 10th. ed. Zalău. Romênia: GIL Publishing House, 2007. v.1.

[13] KOROVKIN, Pavel Petrovich. **Inequalities**. Moscou. URSS: Mir Publishers, 1975.

[14] LIMA, Elon Lages. **Análise Real:** Funções de uma variável. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v. 1.

[15] LIMA, Elon Lages. **Análise Real:** Funções de n variáveis. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v. 2.

[16] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[17] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[18] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Desigualdades Elementares. **Revista Eureka**. Rio de Janeiro. v. 5. P. 34 - 39. SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Coleção do Professor de Matemática. 2012.

[19] NERY, Diego Cunha. **Conjuntos Convexos e suas aplicações no ensino médio**. 2013. 34 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

[20] STEPHEN, Boyd; VANDENBERGHE, Lieven. **Convex optimization**. New York. USA: Cambridge University Press, 2004.

[21] TIEL, Jan Van. **Convex Analysis:** An introductory text. Utrecht. Netherlands: John Wiley and sons, 1984.

[22] VELAME, Gabriel Carvalho. **Uma abordagem sobre desigualdades e suas aplicações**. 2014. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2014.

[23] VICENTE, Hugo Alexandre Rodrigues. **Funções Convexas**. 2011. 43 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Centro de Ciências, Universidade da Beira do Interior, Covilhã, Portugal, 2011.