



Universidade Federal de Mato Grosso  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra  
Departamento de Matemática



---

# O estudo de alguns aspectos da geometria fractal

**Sandro Adir Swiderski**

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientadora: **Prof<sup>ª</sup>. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Junho de 2015

# O estudo de alguns aspectos da geometria fractal

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Sandro Adir Swiderski e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 12 de junho de 2015.

Prof<sup>a</sup>. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues  
Orientadora

## **Banca examinadora:**

Prof<sup>a</sup>. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues

Prof. Dr. Décio Braga Santos

Prof. Dr. Magno Alves de Oliveira

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

### **Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.**

S976e Swiderski, Sandro Adir.  
O estudo de alguns aspectos da geometria fractal / Sandro Adir Swiderski. -- 2015  
xiv, 56 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientadora: Eunice Cândida Pereira Rodrigues.  
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso,  
Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática,  
Cuiabá, 2015.  
Inclui bibliografia.

1. Casos patológicos matemáticos. 2. Dimensão. 3. Fractais. 4. Geometria. 5.  
Monstros matemáticos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

**Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.**

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de maio de 2015 e aprovada pela  
banca examinadora composta pelos Professores Doutores

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Eunice Cândida Pereira Rodrigues

---

Prof. Dr. Décio Braga Santos

---

Prof. Dr. Magno Alves de Oliveira

*À todos que agem por um mundo  
melhor.*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer à Deus por me proteger durante todo este curso. Agradeço aos meus pais Alexandre Swiderski e Sibilina Olga Lemainski Swiderski por todo o incentivo e por todas as orações, sei que o “muito” que estudei não chega nem perto do muito que rezaram por mim, à minha esposa Luciana Regina Egewarth Swiderski e minha filha Clara Egewarth Swiderski.

Agradeço ao colega do curso e de percurso de viagem Marcionei, ao colega Fábio por todos os cafés compartilhados, ao colega Jackson por nos acolher várias vezes em seu lar, ao colega Marcos pelas piadas, ao colega Teblas e Adilson pelas caronas, ao colega Paulo pelas rizadas contagiantes, ao Joãozinho pela vontade que ajudar, aos colegas Willian e João pela experiência transmitida, aos colegas Ricardo e Luciano como exemplos de dedicação ao estudo.

Por fim, gostaria de agradecer à professora Eunice, por todas as orientações dadas, correções e alterações sugeridas e pela paciência e tolerância com minhas limitações. Muito obrigado a todos.

Aos que aqui chegaram,  
vale lembrar:

*Humildade,*  
*é uma questão de inteligência.*

Ditado popular.

# Resumo

Neste trabalho, faz-se um estudo sobre alguns aspectos da geometria fractal, que é uma nova maneira de ver e conceber o conhecimento geométrico. Especificamente, apresenta-se uma abordagem sobre os fractais desde o estudo das primeiras figuras fractais, o emprego da terminologia fractal até a atualidade, exaltando suas propriedades, características e aplicações. Mostra-se alguns dos fractais mais conhecidos como o Conjunto de Cantor, Floco de Neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski. Além disso, levando em consideração que esta nova geometria auxilia o homem na compreensão do meio em que vive e que a escola não está isolada deste meio, busca-se a aplicação da geometria fractal nos conceitos matemáticos relacionados com perímetro, áreas, conjuntos, exponenciação, logaritmos, sequências e progressões geométricas. Com isso, aborda-se o tema não apenas como uma curiosidade geométrica, mas visando a elaboração de um material de apoio aos docentes do ensino médio. O nosso suporte teórico foi alicerçado em autores como Janos (2008), Barbosa (2002), Mandelbrot (1998).

**Palavras chave:** Casos patológicos matemáticos, dimensão, fractais, geometria, monstros matemáticos.



# Abstract

In this paper it is made a study about some fractal geometry aspects, that is a new way of seeing and conceive the geometric knowledge. Specifically it is presented an approach on the fractals since the study of the first fractal shapes, the usage of the fractal terminology till present days, highlighting its properties, technical features and applicability. It is shown some of the more known fractals as the Cantor Set, Koch Snow Flake and the Sierpinski Triangle. Furthermore taking in account that this new geometry helps human being into comprehend the place where he lives and that the school is not isolated from that, we seek the fractal geometry application in mathematics concepts related to perimeter, area, sets, exponentiation, logarithms, sequences and arithmetic progressions. Therewith we discuss the topic not just a geometric curiosity but aiming to formulate a Medium Degree teacher's support material. The theoretic support is based on the authors Janos (2008), Barbosa (2002), Mandelbrot (1998).

**Keywords:** Mathematics pathologic cases, dimension, fractals, geometry, mathematic monsters.

# Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xiii
Lista de tabelas	xiv
Introdução	1
<b>1 Geometria na atualidade: contextualização e abordagens sobre os livros didáticos e as leis de diretrizes e bases</b>	<b>4</b>
<b>2 Aspectos históricos da geometria fractal</b>	<b>8</b>
<b>3 Introdução aos Fractais</b>	<b>12</b>
3.1 Os fractais e o nosso universo . . . . .	13
3.2 O uso de Geometria Fractal em outras ciências . . . . .	14
3.3 Características básicas dos Fractais . . . . .	16
3.3.1 Autossemelhança e Complexidade infinita . . . . .	16
3.3.2 Dimensão fractal . . . . .	17
<b>4 Alguns fractais, propriedades e características</b>	<b>20</b>
4.1 Sobre o Conjunto de Cantor . . . . .	20
4.1.1 Construção algébrica . . . . .	21
4.1.2 Número de intervalos a cada iteração . . . . .	22
4.1.3 Comprimento de cada intervalo . . . . .	23

4.1.4	Dimensão do Conjunto de Cantor . . . . .	23
4.2	Sobre o Floco de Neve de Koch . . . . .	24
4.2.1	Número de lados a cada iteração . . . . .	25
4.2.2	Perímetro do Floco de Neve . . . . .	26
4.2.3	Número de novos triângulos a cada iteração . . . . .	26
4.2.4	Área do Floco de Neve . . . . .	27
4.2.5	Dimensão do Floco de Neve . . . . .	28
4.3	Sobre o Triângulo de Sierpinski . . . . .	28
4.3.1	Número de triângulos a cada iteração . . . . .	28
4.3.2	Perímetro de cada triângulo . . . . .	29
4.3.3	Área do Triângulo de Sierpinski . . . . .	30
4.3.4	Dimensão do Triângulo de Sierpinski . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Características topológicas do Conjunto de Cantor</b>	<b>31</b>
5.1	Sequência de números reais . . . . .	31
5.1.1	Limite de uma sequência . . . . .	31
5.1.2	Subsequência . . . . .	32
5.2	Topologia . . . . .	32
5.3	Espaços Topológicos . . . . .	32
5.3.1	Topologia Métrica . . . . .	33
5.3.2	Compacidade . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Trabalhando com fractais em sala de aula</b>	<b>37</b>
6.1	Construindo o Triângulo de Sierpinski . . . . .	37
6.1.1	Explorando alguns elementos da geometria plana no Triângulo de Sierpinski . . . . .	44
6.2	Construindo um fractal a partir de um quadrado . . . . .	44
6.2.1	Explorando alguns elementos da geometria plana no fractal construído . . . . .	47
6.3	Construindo um fractal através do triminó . . . . .	47
6.4	Construindo fractais com espelhos . . . . .	51
6.4.1	Brincando também se aprende . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>54</b>



# Lista de Figuras

1.1	Geometria e outras Áreas . . . . .	6
2.1	Benoit Mandelbrot. . . . .	10
2.2	Conjunto de Mandelbrot. . . . .	11
3.1	Pulmão, fractal humano. . . . .	13
3.2	A arte fractal moderna. . . . .	13
3.3	A magia dos fractais. . . . .	14
3.4	A natureza fractal. . . . .	14
3.5	Segmentos de reta dividido em $N$ partes iguais, com $N = 1, 2$ e $3$ . . . . .	18
3.6	Quadrados divididos em $N^2$ partes iguais, com $N = 1, 2$ e $3$ . . . . .	18
3.7	Cubos divididos em $N^3$ partes iguais, com $N = 1, 2$ e $3$ . . . . .	19
4.1	Exemplo de quatro iterações do processo que resulta no fractal Conjunto de Cantor. . . . .	21
4.2	Processo de construção do Floco de Neve de Koch com cinco iterações. . . . .	25
4.3	Processo de construção do Triângulo de Sierpinski com cinco iterações. . . . .	28
6.1	Mediana. . . . .	38
6.2	Marcação de um lado. . . . .	39
6.3	Marcação do outro lado. . . . .	39
6.4	Iteração 0. . . . .	39
6.5	Marcação ponto médio. . . . .	40
6.6	Unindo os pontos médios através de segmentos de reta. . . . .	40
6.7	Triângulos recortados. . . . .	41
6.8	Iteração 1. . . . .	41
6.9	Primeira Iteração. . . . .	48

6.10 Segunda Iteração. . . . .	49
6.11 Terceira Iteração. . . . .	49
6.12 Quarta Iteração. . . . .	50
6.13 Fractais com espelhos. . . . .	52
6.14 Fractais com espelhos. . . . .	53

# Lista de Tabelas

6.1	Resultados do Triângulo de Sierpinski . . . . .	44
6.2	Resultados do fractal construído . . . . .	47
6.3	Encontrando o número de quadrados . . . . .	50

# Introdução

É arriscado assegurar sobre as origens da geometria, pois os primórdios desse conhecimento são mais antigos que a própria escrita. Acredita-se que a geometria tenha surgido no Egito pelas necessidades práticas de medir terras após enchentes anuais do rio Nilo. Tais medidas eram determinadas para regular as posses e estabelecer as cobranças de impostos (Boyer, 1974), p.4).

A Geometria é um campo importante do conhecimento pela qual o homem foi capaz de gerar e transmitir conhecimentos. Igualmente, esses conhecimentos foram de grande relevância, tanto para a sobrevivência física como também de suas civilizações. D'Ambrosio (1996), p.27, afirma que:

Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos teóricos e, associados a esses, técnicas, habilidades para explicar, entender, conhecer, aprender, para saber e fazer como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência, em ambientes naturais, sociais e culturais mais diversos.

Parece-nos paradoxal que neste início do século, momento histórico de acesso rápido à informação e ao conhecimento, estes conhecimentos referentes à geometria sejam tão pouco valorizados.

No ensino da geometria atual, o que se percebe, na maioria das vezes, é uma orientação “tradicional”: o professor passa conceitos já definidos como ponto, reta, polígonos, sólidos, etc, e exige-se sua repetição pelo aluno. Os citados conceitos fazem parte da Geometria Euclidiana. Durante séculos, os objetos e conceitos da referida geometria foram considerados como os que melhor descreviam o mundo. Euclides (325-265 a.C) desenvolveu vários estudos sobre formas de objetos planos, porém os objetos complexos como árvores, por exemplo, não tinham definição de forma e dimensão. Na tentativa de descre-



ver alguns objetos complexos como o exemplificado anteriormente é que desenvolveu-se o estudo dos fractais, que nada mais são do que objetos e fenômenos da natureza que possuem formas irregulares, mas se observadas em diferentes escalas não perdem sua definição inicial, como por exemplo: os batimentos do coração, emaranhado de vasos sanguíneos do pulmão, bacias hidrográficas e formações montanhosas.

Os fractais fazem parte da Teoria do Caos que estuda fenômenos complexos que não são possíveis de se prever. Estes objetos e formas muito presentes na natureza não tinham valor científico até que Benoit Mandelbrot (1974) com o auxílio de computadores, desenvolveu e aperfeiçoou técnicas para o seu estudo e aplicações.

Nos últimos anos, diferentes definições de fractais têm surgidos. No entanto, a noção que serviu de fio condutor a todas as definições foi introduzida por Benoit Mandelbrot. De acordo com Sallum (2005):

Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma representação do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro. (Ibidem, p.1)

Entendemos que os alunos do ensino médio precisam compreender que o estudo da geometria vai além de cálculos de áreas e volumes. Precisamos valorizar esse aluno como um organismo que produz conhecimento, fortalecendo os vínculos do mesmo com o seu grupo social de origem no sentido de tornar significativo o conteúdo trabalhado no ensino da geometria. Desta forma, fizemos um estudo sobre alguns aspectos da geometria fractal visando a elaboração de um material de apoio aos docentes do ensino médio. Este estudo foi dividido em capítulos, os quais seguem:

O Capítulo 1 trata do atual contexto do ensino da geometria, sua interdisciplinaridade, sua relevância para formação do aluno.

No capítulo 2, abordamos a história dos fractais desde a antiguidade, os primeiros desenhos e estudos, destacando o trabalho desenvolvido por Benoit Mandelbrot considerado pai dos fractais.

O capítulo 3, detalha o surgimento da terminologia fractal, seus precursores, suas características e propriedades.

No capítulo 4, falamos sobre alguns fractais clássicos como o Conjunto de Can-

tor, o Floco de Neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski, enfatizando algumas de suas características, como por exemplo: perímetro, área e dimensão.

O capítulo 5, refere-se a algumas propriedades topológicas do Conjunto de Cantor. Antes de apresentá-las, fizemos uma abordagem sobre sequências de números reais, limite de uma sequência, subsequências, espaços topológicos, topologia métrica e compacidade.

No capítulo 6 apresentamos algumas propostas de trabalho com fractais em sala de aula envolvendo conceitos geométricos tradicionais como ponto, reta, plano e área e também conceitos mais aprofundados, como exponenciação e progressão geométrica.

# Capítulo 1

## Geometria na atualidade: contextualização e abordagens sobre os livros didáticos e as leis de diretrizes e bases

A Geometria como ramo da matemática tem no seu sentido prático, uma aplicação dominante em todos os ramos da atividade humana. Começando pelos aspectos pedagógicos, permite desenvolver o verdadeiro raciocínio lógico. Arquitetos, engenheiros, etc, todos projetam os espaços humanizados, onde são desenvolvidas as diferentes atividades.

Sobre a citada Geometria seguem algumas abordagens pautadas nas referências, Eves (1993), Luz (2005), MEC (2002), Brasil (1971), Brasil (1996).

Sobre as as imagens geométricas, Eves (1993), p.28, diz:

... as imagens geométricas sugeridas frequentemente levam a resultados e estudos adicionais, dotando-nos de um instrumento poderoso de raciocínio indutivo e criativo.

Acredita-se que o ensino da geometria na educação matemática, se bem direcionado, contribuirá relevantemente para formação do aluno do ensino médio. Sobre o ensino da geometria, Luz (2005), p.24, afirma que:

... se comprova como um formador do pensamento, facilitando sua representação. Nele, conhecer um objeto ou determinado problema, é agir sobre ele e transformá-lo, aprendendo os mecanismos dessa transformação e vinculando-os às ações transformadoras. Podemos assim associá-lo a um método dialético que começa no abstrato e se transforma em concreto pensado.

O ensino da geometria no Brasil, baseado principalmente na geometria euclidiana, foi historicamente sub julgada por questões políticas, econômicas e teórico-metodológicas. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, lei 5692/71, por exemplo, colaborou para que os professores deixassem de ensinar geometria sob qualquer enfoque, passando a trabalhar quase que unicamente com a álgebra, pois a referida lei permitia que cada professor tivesse seu próprio programa de acordo com as prioridades que o mesmo julgasse necessário e o desenho geométrico que passou a ser optativo, sendo, assim, excluído do currículo de muitas escolas.

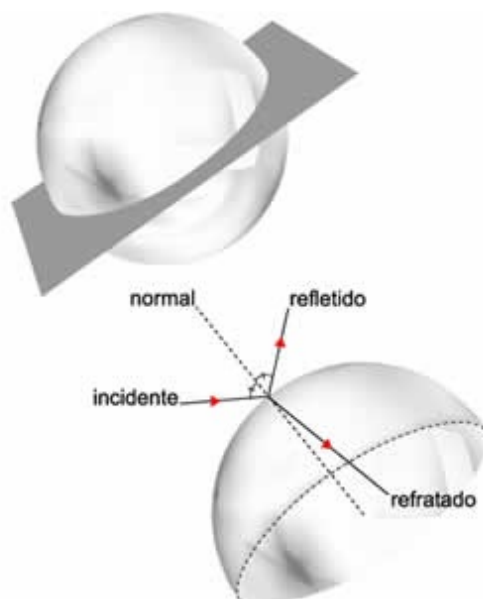
Tradicionalmente, os livros didáticos e os currículos escolares enfatizam inicialmente a geometria plana e na sequência, a geometria espacial. Isto é razoável, já que os conceitos básicos da geometria plana se fazem necessários para um estudo aprofundado de figuras espaciais mais elaboradas. Entretanto por inúmeras razões, os conteúdos da geometria espacial acabam não sendo desenvolvidos em uma frequência significativa. A precariedade ou inexistência de laboratório é uma dessas razões. Na atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, lei 9394/96, percebe-se uma mudança quanto ao estudo da geometria. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a geometria vem reconquistando seu espaço pois nele consta um volume especialmente dedicado ao ensino da geometria visando as construções geométricas. A valorização da aprendizagem de geometria é reforçada em diversas partes dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Quanto à importância da geometria no desenvolvimento cognitivo temos, de acordo com os PCN, MEC (2002):

O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números.

A relação da geometria com as outras áreas do conhecimento é claramente perceptível. Uma evidência está no uso de figuras geométricas ilustrativas que auxiliam no processo ensino-aprendizagem de conteúdos de outras áreas. Abaixo, seguem alguns exemplos.



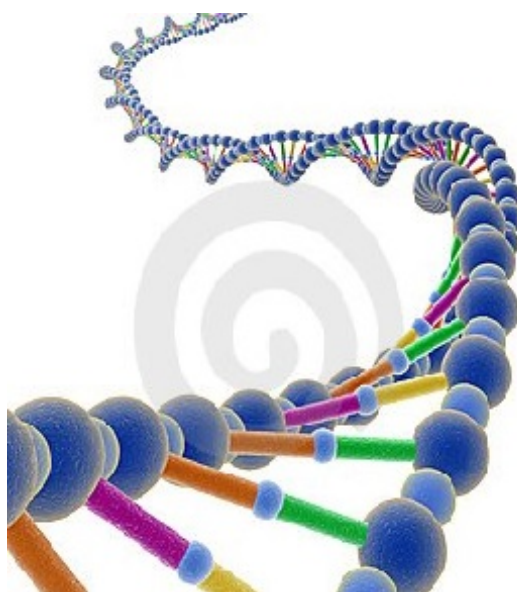
(a) Geometria na Química



(b) Geometria na Física



(c) Geometria na Geografia



(d) Geometria na Biologia

Figura 1.1: Geometria e outras Áreas

A interdisciplinaridade da geometria garante a ela ser uma ferramenta de leitura do mundo, sendo um equipamento de investigação e exploração de imagens e objetos. Contudo, um admirável poder de representar as formas materiais de maneira abstrata e transformar formas abstratas em objetos manipuláveis. Com isto, ajuda a desenvolver as capacidades cognitivas dos alunos em diferentes abordagens de ensino.

A seguir, faremos uma abordagem da geometria dos fractais que pode ser trabalhada conjuntamente com alguns conteúdos do ensino médio.

## Capítulo 2

# Aspectos históricos da geometria fractal

Neste capítulo iremos descrever, de maneira sucinta, alguns aspectos históricos relevantes da geometria fractal, os quais podem ser encontrados em Mandelbrot (1998), Barbosa (2002), Resende (2004), Francisco (2015).

As raízes dos fractais<sup>1</sup>, que serão melhor conceituados e caracterizados no terceiro capítulo, remontam à tentativa de medir o tamanho de objetos para os quais as definições tradicionais baseadas na geometria euclidiana falham. Existem vestígios de algumas formas que lembram fractais na antiguidade. Os egípcios utilizavam padrões fractais simples<sup>2</sup>, na Índia encontram-se arquiteturas antigas com o mesmo padrão mostrando o uso e estudo inconsciente de estruturas fractais bem antes da teoria ser consolidada e apresentada formalmente ao mundo.

Segundo Resende (2004) os primeiros estudos dos fractais são dados como se seguem:

Helge von Koch que conseguiu descrever matematicamente os flocos de neve, Giuseppe Peano desenvolveu técnicas de curvas de preenchimento espacial, utilizando para estudar nuvens, Albert Einstein chegou a conclusão que o movimento browniano é causado por movimentos térmicos irregulares das moléculas de um líquido e Gaston Julia estudou funções iterativas que estão diretamente relacionadas aos fractais.

Precisamente em 1872 surge o primeiro estudioso a dar um exemplo de uma

---

<sup>1</sup>Fractal: do latim quebrado, fragmentado. Mandelbrot (1998).

<sup>2</sup>Processo recursivo geométrico fixo. Barbosa (2002).

construção analítica<sup>3</sup> de uma função que é contínua, mas em parte alguma diferenciável<sup>4</sup> que foi Karl Weierstass. O gráfico desta função é chamada atualmente de fractal. Em 1883, George Cantor publicou exemplos de subconjuntos da reta real que tinha propriedades incomuns e hoje são reconhecidas como fractais. Também no final desse século Felix Klein e Henri Poincaré desenvolveram alguns fractais.

Em 1904, Helge von Koch, deu uma definição geométrica de uma curva similar ao gráfico da função de Karl Weierstass, atualmente conhecida como Floco de Neve de Koch, que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial.

Outro marco veio em 1915, quando Waclaw Sierpinski construiu o triângulo de Sierpinski e um ano mais tarde o tapete de Sierpinski. Em 1918, dois matemáticos franceses, Pierre Fatou e Gaston Julia descreveram de forma independente, comportamento fractal associados aos números complexos e funções que se tornaram importante no estudo dos fractais.

Também em 1918, Felix Hausdorff definiu a medida dimensional que contribuiu de forma significativa para a evolução da definição dos fractais. Outro marco foi dado por Paul Levy que desenvolveu um dos primeiros fractais em curva, chamada de Curva de Levy.

Em 1954 Charles Francis Richter, conhecido mundialmente pela elaboração da “Escala Richter”<sup>5</sup>, concluiu que as frequências de magnitude estatística de terremotos é equivalente a uma relação fractal entre o número de terremotos e o tamanho característico de ruptura.

Houve muitos outros trabalhos relacionados aos fractais, mas somente a partir de 1960, com auxílio da computação que esta ciência conseguiu se desenvolver plenamente. Isto devido o poder de cálculo e as possibilidades de representações gráficas que os computadores conseguem executar. Um dos pioneiros a usar a computação gráfica no estudo dos fractais foi o matemático Benoit Mandelbrot que já vinha estudando tais figuras.

---

<sup>3</sup>Uma abordagem sobre, veja em Guidorizzi (1998).

<sup>4</sup>Uma abordagem sobre, veja em Guidorizzi (1998).

<sup>5</sup>Escala que mede o nível de energia liberada por um abalo sísmico. Francisco (2015).





Figura 2.1: Benoit Mandelbrot.

Benoit Mandelbrot (Varsóvia, 20 de Novembro 1924 - Cambridge, 14 Outubro de 2010) foi um matemático de origem polonesa que contribuiu de maneira notável para o desenvolvimento da geometria fractal, descobrindo o Conjunto de Mandelbrot de Intrincados. Em 1936, sua família migrou para a França e após a segunda guerra mundial estudou matemática graduando-se na universidade de Paris e concluiu seu mestrado nos Estados Unidos onde passou a maior parte de sua carreira.

Mandelbrot foi um dos primeiros a usar computação gráfica para criar imagens geométricas fractais e ao fazer isso foi capaz de mostrar como a complexabilidade visual pode ser criado a partir de regras simples. O mesmo mostrou que fenômenos aparentemente desordenados tinham na verdade um certo grau de ordem, isso a partir de 1958, quando iniciou os seus trabalhos na International Business Machines (IBM), encontrando lá um ambiente que lhe permitia explorar uma grande variedade de novas ideias. Com a ajuda dos trabalhos deixados por Lewis Fry Richardson, Mandelbrot avança para a caracterização das costas marinhas através da dimensão fractal e de outras propriedades com a de autossemelhança. Desenvolveu ainda temas como o Acaso na aplicação à construção de alguns tipos de fractais, forneceu teorias matemáticas para métodos de autossemelhança em probabilidade e também estudou a distorções das galáxias. Em 1945 foi apresentado ao trabalho de Julia de 1918, trabalho enunciado por Resende (2004),

mas resolveu tomar outros caminhos que acabaram levando aos mesmos resultados de Julia. Com a ajuda dos computadores, conseguiu mostrar que o trabalho de Julia, é a fonte de alguns dos mais belos Fractais hoje conhecidos e para isso desenvolveu alguns dos primeiros programas de computador para desenhar gráficos. Em 1980 introduziu o Conjunto de Mandelbrot, figura (2.2) e mostrou que os fenômenos complexos podem ser descritos por simples iterações.

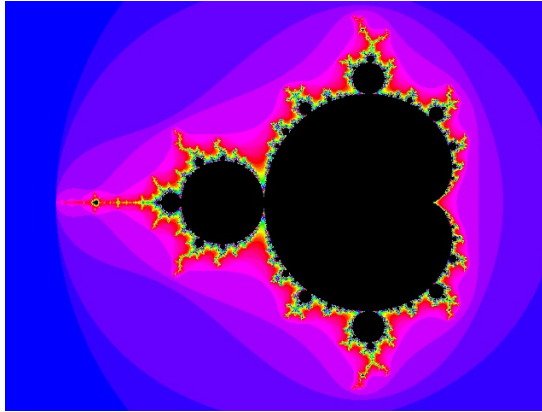


Figura 2.2: Conjunto de Mandelbrot.

Mandelbrot terminou sua carreira como professor de Ciências Matemáticas na Universidade de Yale. O seu trabalho foi primeiramente publicado em 1975 no livro *Les objets fractals, form, hasard et dimension* e mais tarde, de maneira mais completa, em 1982, no livro *The fractal geometry of nature*. Sua autobiografia, *The Fractalist*, foi publicado em 2012.

# Capítulo 3

## Introdução aos Fractais

Neste capítulo faremos uma abordagem sobre os fractais no que diz respeito à sua definição e algumas das suas características. Além disso, faremos uma abordagem sobre o uso da geometria fractal em outras ciências. As abordagens supracitadas podem ser encontradas em Mandelbrot (1998), Silva (2007), Assis (2008), Silva (2010) e Siqueira (1995).

A ciência dos fractais apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e beleza ligadas às formas da natureza, ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. As imagens de objetos fractais possuem a característica de aspectos do todo poderem ser percebidos em cada parte.

A geometria dos fractais tem raízes remontando ao século XIX e algumas indicações neste sentido vêm de muito antes na Grécia Homérica, Índia, Chima, entre outros. Porém, somente há poucos anos vem se consolidando com o desenvolvimento dos computadores e o auxílio de novas teorias nas áreas da física, biologia, astronomia e matemática. O termo “fractal” foi criado em 1975 pelo pesquisador Benoit Mandelbrot, o “pai dos fractais”.

No processo de aprimoramento da geometria fractal surgiram diferentes definições. A noção que serve de fio condutor foi introduzida por Benoit Mandelbrot através do neologismo “Fractal” que surgiu do adjetivo latino *fractus*, que significa “irregular” ou “quebrado”.

### 3.1 Os fractais e o nosso universo

Para quem acha que geometria é apenas aquela parte da matemática sobre linhas, retas, curvas, triângulo, retângulos, etc, precisa conhecer os fractais. Na realidade somos todos fractais, completamente imperfeitos e geometricamente perfeitos. Um exemplo são os nossos pulmões.

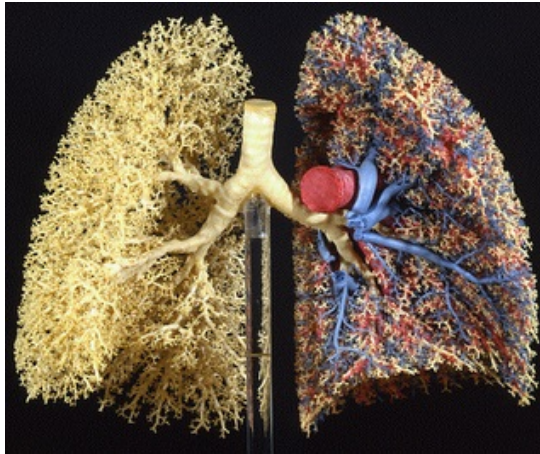


Figura 3.1: Pulmão, fractal humano.

Hoje em dia a Arte Fractal (AF) libertou-se da simples geração de imagens fractais em computadores para dividir o espaço com pintores e outros artistas plásticos, conforme figura abaixo:



Figura 3.2: A arte fractal moderna.

Um fractal pode ser apenas uma figura da geometria não euclidiana, mas não é por isso que deixará de ser misterioso, tremendamente belo, hipotético e até hipnótico. A

figura abaixo ilustra esta situação.



Figura 3.3: A magia dos fractais.

A geometria fractal reflete nosso entendimento da natureza sob uma nova ótica. Muitas formas encontradas nos animais e plantas chamam a atenção por apresentarem um padrão aparentemente aleatório que na verdade seguem perfeitos padrões fractais.



Figura 3.4: A natureza fractal.

## 3.2 O uso de Geometria Fractal em outras ciências

Nos últimos anos, a geometria fractal tem se tornado uma ferramenta importante em várias ciências.

Na computação gráfica, os fractais são muito utilizados para criação de efeitos especiais em filmes tornando formas artificiais mais realistas e também para representar elementos da natureza como planetas satélites, superfícies, plantas e nuvens. Além disso, percebe-se sua utilização na criação de softwares, criptografia, áudios e vídeos.

Nas ciências biológicas são utilizados no estudo das superfícies de proteínas e nas interações das moléculas. A ordem nas interfaces entre sistemas biológicos pode ser explicada por terem padrões fractais vista sua autossemelhança, característica fractal que veremos no próximo subcapítulo. A disposição das copas das árvores apresentam um padrão fractal, e isto potencializa a exposição de suas folhas ao sol permitindo maior capacidade de absorção da luz solar bem como permite que elas lancem novos ramos durante seu crescimento sem que aumente o seu perímetro, ou seja, o máximo aproveitamento com o mínimo de ocupação.

Na geografia, os fractais são utilizados para caracterizar falhas sísmicas, estudar a estrutura fractal de terremotos e maremotos e também modelar crescimento demográfico.

Na medicina, principalmente a cardíaca, sabe-se que taquicardia e fibrilação estão ligadas à regularidade das batidas do coração e esta regularidade pode ser representada por modelos fractais. A observação da anatomia humana mostra que os pulmões, mencionado anteriormente, o sistema circulatório, a superfície dos tecidos entre outros seguem padrões fractais e mais microscopicamente, temos a sequência do DNA apresenta a propriedade de autossemelhança.

Os fractais também são utilizados para examinar os diferentes padrões de crescimento de células sadias e cancerígenas, visto que a forma como os tumores crescem e se ramificam seguem tais padrões e experiências evidenciam que tumores cancerígenos têm dimensão maior se comparada ao de células normais.

Além de diagnosticar doenças, cientistas utilizam fractais também no estudo de novas terapias tanto para o corpo como para a mente.

Ferrara e Prado, apud Silva (2007) diz:

O corpo humano é um dos exemplos mais surpreendentes da realidade fractal. Na maioria dos tecidos, nenhuma célula está a uma distância de mais de três ou quatro células de um vaso sanguíneo. Mesmo assim, vasos e sangue ocupam pouco espaço, não indo além de 5% do corpo. O aparelho digestivo revela ondulações de tecidos. Os alvéolos do pulmão são admiravelmente fractais: concentram uma superfície maior do que uma quadra de tênis.

Na engenharia e arquitetura, além da estilização com padrões fractais são utilizadas repetições de figuras básicas que em conjunto formam grandiosas estruturas urbanas. Além disso a beleza inspiradora e a capacidade de produzir paisagens belíssimas de grande impacto visual fazem dos fractais ferramenta indispensável para criação de obras de artes arquitetônicas.

A geometria fractal, especificamente os fractais, são caracterizados por algumas propriedades, que detalharemos a seguir.

### **3.3 Características básicas dos Fractais**

As principais propriedades que caracterizam os fractais são a autossemelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão.

#### **3.3.1 Autossemelhança e Complexidade infinita**

A autossemelhança, também chamada por Mandelbrot de homotetia interna, consiste em se poder obter réplicas menores da figura através de sua divisão ou de sua ampliação. Quando as réplicas são sempre idênticas e obtidas através do mesmo fator de redução, diz-se que a figura possui autossemelhança estrita. Algumas figuras geométricas tradicionais, como um quadrado, por exemplo, também possuem essa característica. É possível dividir um quadrado em certo número de réplicas menores dele mesmo.

A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura, definida como sendo um fractal, é recursivo. Isto significa que, quando se executa um determinado procedimento, no decorrer do mesmo encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado.

### 3.3.2 Dimensão fractal

Num primeiro momento, a noção de uma dimensão não-inteira, como por exemplo 0,63, parece absurda. Isto porque, no senso comum estamos acostumados a considerar objetos como tendo uma, duas ou três dimensões.

A dimensão fractal, juntamente com a autossimilaridade e a complexidade infinita, são características básicas que um objeto necessita para ser considerado um fractal. Ela representa o nível de complexidade e ocupação espacial que um certo fractal apresenta que tem a ver com seu grau de irregularidade. Dito de uma outra forma, a dimensão de uma curva fractal é um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento do arco entre os dois pontos aumenta à medida que a escala diminui.

Para definir fractal, Mandelbrot retomou a ideia de Hausdorff e desenvolvida por Besicovitch, a qual avançou o conceito de dimensões fracionárias, tornando possível a existência de objetos com dimensões desde zero a infinito. Mandelbrot, definiu fractal como sendo um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica. Esta definição é formalmente complicada e transcende o objetivo desta dissertação. Maiores detalhes podem ser encontrados em Mandelbrot (1998).

Na sequência apresentaremos um modo de medirmos a dimensão fractal.

O método de cálculo da dimensão Hausdorff-Besicovitch permite calcular a dimensão de objetos ditos “perfeitos” e dos fractais naturais. De maneira intuitiva, usando a geometria euclidiana, vamos fazer alguns exemplos até chegar à fórmula para se calcular a dimensão fractal, como segue.

**Dimensão 1:** Considere um segmento de reta. Divida em 3 partes geometricamente iguais, conforme figura 3.5. Cada parte obtida na divisão tem comprimento igual ao do segmento original multiplicado por um fator  $\frac{1}{3}$ .



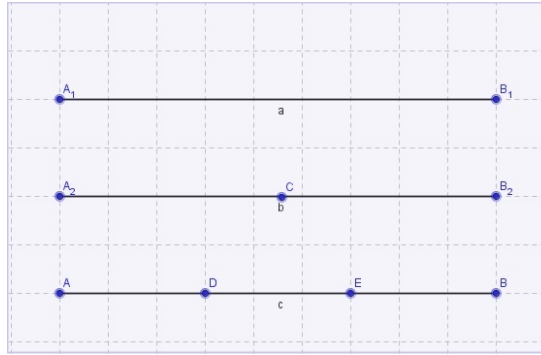


Figura 3.5: Segmentos de reta dividido em  $N$  partes iguais, com  $N = 1, 2$  e  $3$ .

**Dimensão 2:** Considere um quadrado e divida cada um dos seus lados em 3 partes iguais, conforme figura 3.6. Cada parte obtida na divisão tem comprimento igual ao do segmento original multiplicado por um fator  $\frac{1}{3}$ . O quadrado ficará assim dividido em  $3^2$  partes iguais.

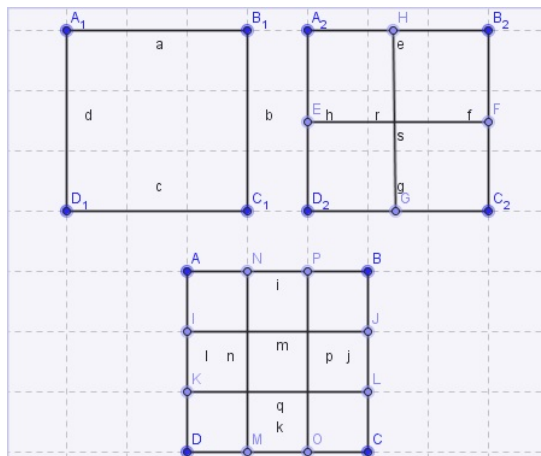


Figura 3.6: Quadrados divididos em  $N^2$  partes iguais, com  $N = 1, 2$  e  $3$ .

**Dimensão 3:** Procedendo de igual forma para um cubo, obteremos  $3^3$  partes iguais, conforme terceiro cubo da figura 3.7.

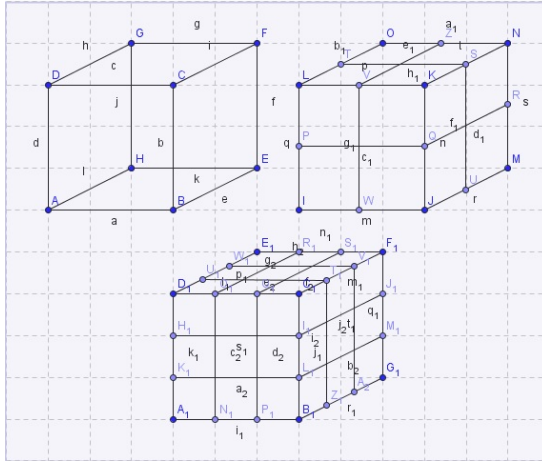


Figura 3.7: Cubos divididos em  $N^3$  partes iguais, com  $N = 1, 2$  e  $3$ .

Poderíamos ter escolhido qualquer outro coeficiente de redução, variando o número de partes em que o objeto inicial é dividido. Assim designando por  $N$  o número de partes e por  $r$  o coeficiente de redução, obtém-se as seguintes igualdades em que a dimensão é o expoente que aparece no denominador da fração  $N = \frac{1}{r^D}$  para o segmento de reta: dimensão 1,  $N = \frac{1}{r^1}$ , para o quadrado: dimensão 2 e  $N = \frac{1}{r^2}$ , para o cubo: dimensão 3. Assim, sendo  $D$  a dimensão do objeto,  $N$  o número de partes iguais obtidas e  $r$  o coeficiente de redução, tem-se:

$$N = \frac{1}{r^D} = \left(\frac{1}{r}\right)^D \quad (3.1)$$

Aplicando logaritmo em 3.1, obtemos:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} \quad (3.2)$$

Concluimos então que a dimensão  $D$  de objetos autossemelhantes é dada pela fórmula 3.2 com  $N$  e  $r$  definidos como anteriormente. Usaremos a citada fórmula para cálculo da dimensão de alguns fractais que serão abordados no próximo capítulo, conhecidos como “Fractais Clássicos”.

# Capítulo 4

## Alguns fractais, propriedades e características

No final do século XIX e início do século XX, matemáticos como Cantor, Hilbert, Kock, Peano e Sierpinski estudaram objetos que não eram totalmente conceituados pela geometria daquela época, (Resende, 2004). Tais objetos foram considerados “monstros matemáticos” ou “casos patológicos” que no final do século XX passaram a ser chamados de fractais pelo estudioso Benoit B. Mandelbrot.

Os fractais determinísticos, também conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, possuindo uma regra fixa de substituição geométrica aplicada a cada iteração, como por exemplo, o Conjunto de Cantor, o Floco de Neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski, os quais estudaremos suas estruturas a seguir.

### 4.1 Sobre o Conjunto de Cantor

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, nasceu em São Petersburgo, 1845 graduou-se Doutor em matemática na Universidade de Berlin em 1867. Foi professor na Universidade de Halle-Wittenberg. É conhecido por ter elaborado a moderna Teoria dos Conjuntos. Provou que os conjuntos infinitos não têm todos a mesma potência e provou também que o conjunto dos números racionais é enumerável e o conjunto dos reais é contínuo.

Cantor criou o fractal Conjunto de Cantor, cuja construção descrevemos na

sequência.

Descrição do processo de construção do Conjunto de Cantor: tal conjunto consiste que a partir de um segmento de reta compreendido entre os valores 0 e 1, é retirado o terço médio do segmento, restando dois segmentos de comprimento  $\frac{1}{3}$  cada. Retira-se novamente o terço médio destes segmentos residuais, restando agora quatro segmentos de  $\frac{1}{9}$ , cada passo é chamado de iteração, o processo é repetido indefinidamente. O limite resultante deste processo é uma sucessão de pontos que é conhecido como a poeira de Cantor.

Segue abaixo uma ilustração das 4 primeiras iterações do conjunto de iterações que resulta no Conjunto de Cantor.

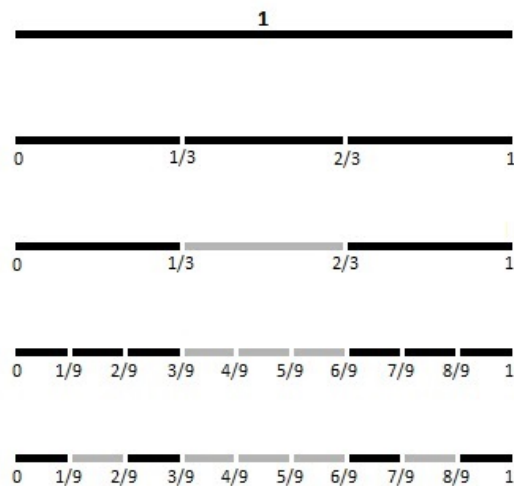


Figura 4.1: Exemplo de quatro iterações do processo que resulta no fractal Conjunto de Cantor.

#### 4.1.1 Construção algébrica

Representaremos aqui o Conjunto de Cantor por “ $K$ ”. Seja  $F_0$  o intervalo  $[0, 1]$ . Conforme vimos na secção 4.1, o processo iterativo da construção do conjunto “ $K$ ” faz-se retirando, a cada etapa, o terço médio dos segmentos residuais da etapa anterior, assim:

Na primeira iteração, retiramos o intervalo aberto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  de  $F_0$  e ficamos com:  
 $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ .

Na segunda iteração, retiramos os intervalos abertos  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  de  $F_1$  e ficamos

com:  $F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ .

Na terceira iteração, retiramos os intervalos abertos  $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}), (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}), (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}), (\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$  de  $F_2$  e ficamos com:

$$F_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1].$$

Continuando o processo iterativo obteremos uma sequência de conjuntos  $F_n$  onde:

$F_n$  é a reunião dos  $F_{n-1}$  conjuntos, retirados seus terços médios. Assim, o Conjunto de Cantor  $K$  é definido pela intersecção de seus intervalos:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \quad (4.1)$$

### 4.1.2 Número de intervalos a cada iteração

Na construção algébrica mencionada na subsecção 4.1.1, intuitivamente verificamos que a cada iteração dobramos o número de intervalos obtidos na iteração anterior. Considere  $I_n$  como o número de intervalos a cada iteração,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Utilizando o princípio de indução<sup>1</sup> simples, mostraremos que  $I_n$  tem exatamente  $2^n$  intervalos.

**Demonstração:** Para  $n = 1$  vimos na secção 4.1, especificamente na descrição do processo da construção do Conjunto de Cantor, que  $I_1$  possui 2 intervalos, isto é:

$$I_1 = 2^1$$

Suponhamos agora que  $I_n$  tenha  $2^n$  intervalos,  $\forall n \in \mathbb{N}$

Provaremos que  $I_{n+1}$  tem exatamente  $2^{n+1}$  intervalos.

De fato:

Como a cada iteração dobramos o número de intervalos e ainda considerando que, por hipótese de indução,  $I_n = 2^n$ , então temos que  $I_{n+1} = 2I_n = 2^{n+1}$

Portanto,

$$I_n = 2^n \quad (4.2)$$

■

---

<sup>1</sup>Uma abordagem sobre indução, veja em Hefez (2011)

Como o número de iterações é ilimitado, então o número de intervalos também será, uma vez que, se  $I_n = 2^n$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ .

### 4.1.3 Comprimento de cada intervalo

Na secção 4.1, na descrição do processo de construção do Conjunto de Cantor, vimos que o comprimento dos intervalos obtidos a cada iteração fica dividido por 3 quando comparado ao comprimento do intervalo do passo anterior. Considerando  $G_n$  o comprimento de cada intervalo que constitui o conjunto  $F_n$ , mostraremos que  $G_n = \frac{1}{3^n}$ .

Novamente faremos a prova por indução simples.

**Demonstração:** Se  $n = 1$ , então, por meio da secção 4.1 tem-se que  $F_1$  tem dois intervalos de comprimentos  $\frac{1}{3}$ , ou seja;

$$G_1 = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

Suponhamos que  $G_n = \frac{1}{3^n}$  seja válido para algum  $n$ .

Através de indução simples, mostraremos que  $G_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}}$ .

Vejamos:

Levando em consideração as considerações iniciais desta subsecção e ainda que, por hipótese de indução,  $G_n = \frac{1}{3^n}$ , então temos que

$$G_{n+1} = \frac{1}{3}G_n = \frac{1}{3^{n+1}}. \text{ Logo:}$$

$$G_n = \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

■

Vimos na secção 4.1 que o número de iteração é ilimitado, então o comprimento de cada  $F_n$  tende a ser cada vez menor. Este fato pode ser visto através do cálculo do limite, o qual segue.

$$\text{Como } G_n = \frac{1}{3^n} \text{ então, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0.$$

### 4.1.4 Dimensão do Conjunto de Cantor

Faremos uma analogia à discussão iniciada na subsecção 3.3.2 sobre dimensão para deduzirmos a dimensão do Conjunto de Cantor. No processo iterativo de construção visto na secção 4.1, vimos que a cada iteração, um segmento é trisseccionado, gerando

$n = 2$  novos segmentos residuais. Cada uma dessas partes é homotítica<sup>2</sup> ao segmento original a uma razão de semelhança igual a  $(\frac{1}{3})^n$ , onde  $n$  representa a  $n$ -ésima iteração. Assim, comparando com a iteração anterior, a razão de semelhança é  $r = \frac{1}{3}$ . Portanto, pela equação (3.2), temos:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \cong 0,63$$

Em outras palavras, o Conjunto de Cantor tem dimensão 0,63.

## 4.2 Sobre o Floco de Neve de Koch

Niels Fabian Helge von Koch nasceu em Estocolmo em 1870, graduou-se doutor na Universidade de Estocolmo em 1892. Foi professor na Universidades de Estocolmo. Trabalhou com Teoria dos Números e Equações Diferenciais.

Criou a Curva de Koch ou Floco de Neve de Koch, um dos primeiros fractais em curva. A Curva de Koch é um dos primeiros fractais a serem descritos. O Floco de Neve corresponde à mesma curva mas que se inicia a partir de um triângulo equilátero.

Sua construção dá-se a partir de um segmento de reta da seguinte forma: divide-se o segmento em três partes iguais, desenha-se um triângulo equilátero onde a base é o segmento central resultante da divisão e, logo após, apaga-se o segmento central. Isto completa a primeira iteração. A segunda iteração consiste em repetir esse procedimento em cada um dos quatro segmentos resultantes da primeira iteração. O processo é repetido indefinidamente.

---

<sup>2</sup>Uma abordagem sobre homotítica, veja em Gonçalves (2015)

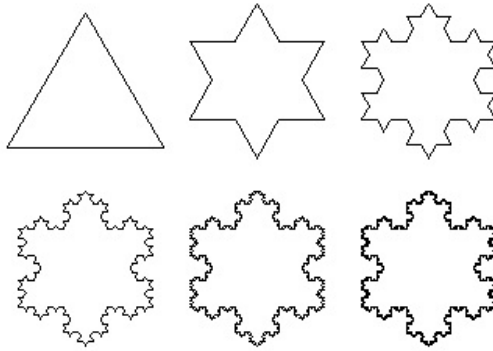


Figura 4.2: Processo de construção do Floco de Neve de Koch com cinco iterações.

### 4.2.1 Número de lados a cada iteração

Na figura 4.2 observamos que a cada iteração, quadruplicamos o número de lados obtidos na iteração anterior. A seguir mostraremos, por meio do princípio de indução simples, que se  $n$  é o número de iterações e  $L_n$  o número de lados para  $n$  iterações, então  $L_n = 3 \cdot 4^n$ .

**Demonstração:** Para  $n = 1$ , vimos na figura 4.2 que  $L_1$  possui 12 lados, isto é,  $L_1 = 3 \cdot 4^1 = 12$ .

Suponhamos agora que seja válido para  $n, n \in \mathbb{N}$ , isto é, que  $L_n = 3 \cdot 4^n$ .

Mostraremos que  $L_{n+1} = 3 \cdot 4^{n+1}$ .

De fato:

Considerando as observações dadas no primeiro parágrafo desta subsecção e ainda que, por hipótese de indução,  $L_n = 3 \cdot 4^n$ , então temos que:

$$L_{n+1} = 4L_n = 3 \cdot 4^{n+1}$$

Desta forma,

$$L_n = 3 \cdot 4^n, \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

■

Como o número de iteração é ilimitado, logo o número de lados também será. Em outras palavras, sendo  $L_n = 3 \cdot 4^n$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 4^n = \infty$ .



## 4.2.2 Perímetro do Floco de Neve

O processo iterativo observado na figura 4.2 mostra que o comprimento do lado obtidos a cada iteração fica multiplicado por  $\frac{4}{3}$ , assim, sendo, considerando o comprimento do lado igual a  $L$  e  $2P_n$  o perímetro, temos então:

$$2P_n = 3L\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

**Demonstração:** Novamente usando o princípio de indução simples. Para  $n = 1$ , vimos na secção 4.2 que o perímetro tem  $4L$ , ou seja:  $2P_1 = 3L\left(\frac{4}{3}\right) = 4L$

Suponhamos agora que  $2P_n = 3L\left(\frac{4}{3}\right)^n$  verdadeiro para algum  $n, n \in N$ . Provaremos para  $n + 1$ , ou seja, que  $2P_{n+1} = 3L\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$ .

Pautado nas considerações iniciais desta subsecção, segue que:  $2P_{n+1} = \frac{4}{3}2P_n$ . Mas por hipótese de indução,  $2P_n = 3L\left(\frac{4}{3}\right)^n$  e portanto  $2P_{n+1} = 3L\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$

Assim:

$$2P_n = 3L\left(\frac{4}{3}\right)^n \tag{4.5}$$

■

Como o número de iteração é ilimitado, então o perímetro tende a ser cada vez maior e aqui também podemos provar calculando o limite de  $2P_n$ .

Como  $2P_n = 3L\left(\frac{4}{3}\right)^n$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3L\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$ .

## 4.2.3 Número de novos triângulos a cada iteração

Na figura 4.2 observamos que na primeira iteração obtivemos 3 novos triângulos, na segunda 12 novos triângulos e na terceira 48 novos triângulos. A seguir mostraremos, por meio do principio de indução simples, que se  $n$  é o número de iterações e  $T_n$  o número de novos triângulos para  $n$  iterações, então  $T_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ .

**Demonstração:** Para  $n = 1$ , vimos na figura 4.2 que  $T_1$  possui 3 novos triângulos, isto é,  $T_1 = 3 \cdot 4^0 = 3$ .

Suponhamos agora que seja válido para  $n, n \in N$ , isto é, que  $T_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ .

Mostraremos que  $T_{n+1} = 3 \cdot 4^n$ .

De fato:

Considerando as observações dadas no primeiro parágrafo desta subsecção e ainda que, por hipótese de indução,  $T_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ , então temos que:

$$T_{n+1} = 4T_n = 3 \cdot 4^n$$

Desta forma,

$$T_n = 3 \cdot 4^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

■

Como o número de iteração é ilimitado, logo o número de novos triângulos também será. Em outras palavras, sendo  $T_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 4^{n-1} = \infty$ .

#### 4.2.4 Área do Floco de Neve

Uma interessante propriedade do Floco de Neve de Koch que veremos a seguir é que apesar do perímetro do Floco aumentar a cada iteração, a área tende a uma constante.

**Demonstração:** Considerando  $A$  a área inicial, na primeira iteração, vista na secção 4.2, acrescenta-se um novo triângulo equilátero de lado  $\frac{1}{3}$  do anterior, logo este triângulo terá área  $\frac{1}{9}$  do anterior. Assim temos,  $A_n = 3 \cdot 4^{n-1} \frac{A}{9^n}$ .

Manipulando a equação acima, a área acrescida será a soma de uma progressão geométrica, cujo termo geral será dado por:

$$A_n = 3 \cdot 4^{n-1} \frac{A}{9^n} = 3A \frac{4^{n-1}}{9 \cdot 9^{n-1}} = \frac{A}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \quad (4.7)$$

onde o primeiro termo é  $\frac{A}{3}$  e a razão é  $\frac{4}{9}$ . Portanto, calculando a soma das áreas, temos:

$$S_\infty = \frac{\frac{A}{3}}{1 - \frac{4}{9}} \Rightarrow S_\infty = \frac{3A}{5} = 0,6A \quad (4.8)$$

Verificamos acima que por mais iterações que possamos fazer a área total sofrerá no máximo um acréscimo de 60% da área original, ou seja, a área total do Floco de Neve é igual a  $1,6A$ . ■

## 4.2.5 Dimensão do Floco de Neve

Notamos que, pela secção 4.2, a cada nível de iteração um segmento forma 4 novos segmentos que serão novamente seccionados. Logo para  $N = 4$  e a razão de semelhança desses segmentos com os segmentos anteriores  $r = \frac{1}{3}$ , pela equação 3.2 temos:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \cong 1,26$$

## 4.3 Sobre o Triângulo de Sierpinski

Waclam Sierpinski, nasceu em Varsóvia em 1882, iniciou seus estudos na Universidade de Varsóvia em 1899. Foi professor nas Universidades de Lyov e Varsóvia. Dentre seus trabalhos criou o Triângulo de Sierpinski, seu mais famoso fractal.

A construção do Triângulo de Sierpinski se dá por meio de um processo iterativo sobre um triângulo equilátero cuja primeira iteração consiste na divisão do triângulo em quatro outros semelhantes, por meio dos segmentos que unem os pontos médios dos seus lados e na retirada do triângulo central.

A figura resultante tem, portanto, área correspondente à  $\frac{3}{4}$  da área do triângulo original. A segunda iteração consiste em repetir o processo para cada 1 dos 3 triângulos resultantes, o processo é repetido indefinidamente.

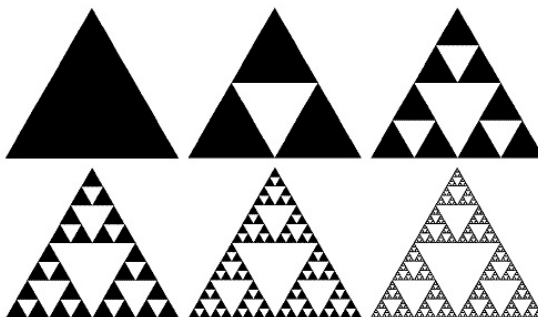


Figura 4.3: Processo de construção do Triângulo de Sierpinski com cinco iterações.

### 4.3.1 Número de triângulos a cada iteração

Verificamos acima que a cada iteração, triplicamos o número de triângulos obtidos na iteração anterior. Assim, considere  $T_n$  como o número de triângulos formados a cada

iteração,  $\forall n \in N$ . Utilizando o principio de indução simples, mostraremos que  $T_n$  tem exatamente  $3^n$  triângulos.

**Demonstração:** Para  $n = 1$  vimos na secção 4.3 que  $T_1$  possui 3 triângulos, isto é,  $T_1 = 3^1 = 3$ .

Suponhamos agora que seja válido para  $n$ ,  $\forall n \in N$ , isto é,  $T_n = 3^n$ .

Mostraremos que  $T_{n+1} = 3^{n+1}$ .

De fato:

Considerando as observações dadas no primeiro parágrafo desta subsecção e ainda que, por hipótese de indução,  $T_n = 3^n$ , então temos que:

$$T_{n+1} = 3T_n 3^{n+1}$$

Desta forma,

$$T_n = 3^n, \forall n \in N. \quad (4.9)$$

■

Como o número de iteração é ilimitado, então o número de triângulos também será. Com isso podemos calcular o limite de  $T_n$ , ou seja, sendo  $T_n = 3^n$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty$

### 4.3.2 Perímetro de cada triângulo

O processo iterativo da secção 4.3 nos mostra que o comprimento do lado obtido a cada novo triângulo obtidos fica multiplicado por  $\frac{1}{2}$ , assim, considerando o comprimento do lado igual a  $L$  e  $2P_n$  o perímetro, temos então:

$$2P_n = 3L\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

**Demonstração:** Para  $n = 1$ , vimos na secção 4.3 que o perímetro tem  $3L\left(\frac{1}{2}\right)$ , ou seja:  $2P_1 = \left(\frac{3L}{2}\right)$ .

Suponhamos agora que  $2P_n = 3L\left(\frac{1}{2}\right)^n$  verdadeiro para algum  $n$ ,  $\forall n \in N$ . Provaremos para  $n + 1$ .

Pautado nas considerações iniciais desta subsecção, tem-se que:

$$2P_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)2P_n. \text{ Mas por hipótese, } 2P_n = 3L\left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ e portanto } 2P_{n+1} = 3L\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Da subsecção 4.3.1, temos  $3^n$  novos triângulos a cada iteração, logo a soma de todos os perímetro é igual a:

$$2P_n = 3^n \cdot 3L \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad 2P_n = 3L \left(\frac{3}{2}\right)^n. \text{ Assim:}$$

$$2P_n = 3L \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{4.10}$$

■

A expressão  $2P_n = 3L \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , é uma progressão geométrica onde o primeiro termo é  $3L$  e a razão  $\frac{1}{2}$  e sendo a razão menor que 1 e como o número de iterações tende ao infinito, o perímetro de cada novo triângulo formado tende a ser cada vez menor tendendo a zero.

### 4.3.3 Área do Triângulo de Sierpinski

Neste fractal, como veremos a seguir, temos outra interessante propriedade, aqui apesar do perímetro ser infinito, como vimos anteriormente, a área é 0.

**Demonstração:** No processo de construção do Triângulo de Sierpinski, seja  $A$  a área do triângulo equilátero inicial. Podemos ver na figura 4.3 que na primeira iteração, dividimos o triângulo por 4 e retiramos 1 deles, logo ficaremos com uma área igual a  $\frac{3}{4}A$ . Temos aqui que a cada iteração ficaremos com uma área 25% menor que a anterior, então iterando infinitamente a área do fractal se degenera à 0. ■

### 4.3.4 Dimensão do Triângulo de Sierpinski

Notamos na secção 4.3 que a cada nível de iteração um segmento forma 3 novos seguimentos e assim sucessivamente. Logo  $N = 3$  e a razão de semelhança desses segmentos com o anterior é  $\frac{1}{2}$ . Logo,  $r = 1/2$ . Da equação 3.2, temos:

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \cong 1,59$$

# Capítulo 5

## Características topológicas do Conjunto de Cantor

Objetivamos neste capítulo mostrar que o Conjunto de Cantor é fechado e também que o mesmo é compacto.

Para cumprir com os objetivos supracitados vamos enunciar e demonstrar alguns resultados, os quais podem ser encontrados em Seymour (1971), Lima (2004), Lima (2012) e Ávila (2003) que serão importantes no entendimento das referidas demonstrações.

### 5.1 Sequência de números reais

**Definição 1** : *Uma sequência de números reais é uma função  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada número natural  $n$  associa um número real  $x_n = x(n)$ , chamado o  $n$ -ésimo termo da sequência.*

**Exemplo 1** : *A sequência  $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ . Corresponde à função  $x(n) = 1$  se  $n$  é ímpar e  $x(n) = 2$  se  $n$  é par.*

#### 5.1.1 Limite de uma sequência

**Definição 2** : *Sejam  $(x_n)$  uma sequência de números reais e  $L$  um número real. Dizemos que  $(x_n)$  converge para  $l$ , ou é convergente, e escreve-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ , quando para qualquer intervalo aberto  $I$  contendo  $L$  (por menor que ele seja) é possível encontrar um inteiro  $n_0 \geq 1$ , de modo que  $x_n \in I$  para todo  $n > n_0$ .*

O intervalo  $I$ , contendo o número real  $L$ , pode ser tomado da forma  $(L - r, L + r)$ , onde  $r$  é um número real positivo. Portanto, dizer que  $x_n$  converge para  $L$ , isto é, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ , é o mesmo que dizer que:

Para todo número real  $r > 0$  tem-se que  $x_n \in (L - r, L + r)$ .

**Exemplo 2** : A sequência:  $(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$  converge para 0. Logo  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

### 5.1.2 Subsequência

**Definição 3** Uma subsequência de uma sequência  $(x_n)_{n \in N}$  é uma função  $s : N' \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $N' \subset N$  e  $N'$  é infinito.

**Exemplo 3** : Na sequência dada no exemplo 2, uma subsequência é:  $(x_{2n}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots)$ .

**Teorema 1** : Se  $\lim x_n = a$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  converge para o limite de  $a$ .

**Demonstração:** Seja  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$  uma subsequência de  $(x_n)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in N$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ . Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um  $n_{i_0} > n_0$ . Então  $n_i > n_{i_0} \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow |x_{n_i} - a| < \varepsilon$ . Logo  $\lim x_n = a$ . ■

## 5.2 Topologia

A palavra topologia vem do grego, isto é, “topos” (lugar) + “logos” (estudo).

Uma definição comum diz que a Topologia é o estudo matemático das propriedades que são preservadas quando se deforma, torce ou estica um objeto sem romper. Um dos objetos de estudo da Topologia são os Espaços Topológicos.

## 5.3 Espaços Topológicos

Um espaço topológico consiste de um conjunto  $A$  e uma coleção  $T$  de partes de  $A$ , denominados abertos, que satisfaz:

(i)  $\emptyset$  e  $A$  pertencem a  $T$ ;

- (ii) a intersecção de quaisquer dois abertos é um aberto pertencente a  $T$ ; e
- (iii) a reunião de quaisquer abertos, podendo ser infinitos abertos, é um aberto pertencente a  $T$ .

$T$  é denominada a topologia do espaço topológico  $(A, T)$ , ou simplesmente  $A$ .

### 5.3.1 Topologia Métrica

**Definição 4** : Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma função real  $d$  definida em  $X \times X$ , isto é, pares ordenados de elementos em  $X$ , é chamada uma métrica ou função distância em  $X$  se, e somente se, satisfaz, para todo  $a, b, c \in X$ , aos seguintes axiomas:

- (i)  $d(a, b) \geq 0$  e  $d(a, b) = 0$ ;
- (ii) (Simetria)  $d(a, b) = d(b, a)$ ;
- (iii) (Desigualdade triangular)  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ ;
- (iv) Se  $a \neq b$ , então  $d(a, b) > 0$ .

**Exemplo 4** : A função  $d$  definida por  $d(a, b) = |a - b|$ , com  $a$  e  $b$  reais, é uma métrica, chamada a métrica usual na reta real  $\mathbb{R}$ . Além disso, a função  $d$  definida por:

$$d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

onde  $p = (a_1, a_2)$  e  $q = (b_1, b_2)$  são pontos do plano  $\mathbb{R}^2$ , é uma métrica, chamada métrica usual no  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 5** : Seja  $d$  uma métrica num conjunto  $X$ . Para um ponto  $p \in X$  e um real  $\delta > 0$ ,  $S_d(p, \delta)$  ou, simplesmente,  $S(p, \delta)$ , denotará o conjunto de pontos à distância  $\delta$  de  $p$ :

$$S(p, \delta) = \{x : d(p, x) < \delta\}$$

$S(p, \delta)$  é a esfera aberta ou, simplesmente, esfera de centro  $p$  e raio  $\delta$ . Chama-se também vizinhança esférica ou bola.

**Exemplo 5** : Sejam o ponto  $p = (0, 0)$  do  $\mathbb{R}^2$  e o real  $\delta = 1$ . Se  $d$  é a métrica usual em  $\mathbb{R}^2$ , então  $S_d(p, \delta)$  é o disco unitário aberto.

**Definição 6** : Seja  $d$  uma métrica num conjunto não-vazio  $X$ . A topologia  $F$  em  $X$ , gerada pelas classes de esferas abertas de  $X$  é chamada **topologia métrica** (ou topologia induzida pela métrica  $d$ ). Além disso, o conjunto  $X$ , juntamente com a topologia  $F$  induzida pela métrica  $d$ , é chamado **espaço métrico** e representa-se por  $(X, d)$ .



Portanto um espaço métrico é um espaço topológico em que a topologia é induzida por uma métrica. Consequentemente, todos os conceitos definidos para espaços topológicos valem também para espaços métricos. Por exemplo, podemos falar de conjuntos abertos, conjuntos fechados, etc. para espaços métricos.

**Exemplo 6** : Se  $d$  é a métrica em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $d(a, b) = |a - b|$ , então as esferas abertas em  $\mathbb{R}$  são precisamente os intervalos abertos finitos. Então, a métrica usual em  $\mathbb{R}$  induz à topologia usual em  $\mathbb{R}$ .

O conjunto dos números reais é o espaço topológico mais frequentemente utilizado.

Nas abordagens que seguem nos restringiremos, em alguns momentos, ao citado espaço em virtude de estarmos interessados nas demonstrações de resultados restritos à Topologia da Reta.

**Definição 7** : Seja  $A$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Diz-se que  $A$  é aberto se todo ponto  $p \in A$  é o centro de uma bola aberta inteiramente contida em  $A$ .

**Exemplo 7** : A reta real  $\mathbb{R}$  é um conjunto aberto, pois qualquer intervalo aberto  $S_p$  deve ser subconjunto de  $\mathbb{R}$ , isto é,  $p \in S_p \subset \mathbb{R}$ .

**Definição 8** : Um ponto aderente de um conjunto  $X$  é definido como todo ponto  $a$  que é limite de uma sequência de pontos  $x_n \in X \subseteq \mathbb{R}$ .

**Exemplo 8** : Todo ponto  $a \in X$  é aderente a  $X$ : basta tomar a sequência de pontos  $x_n = a$ . Mas pode-se ter um ponto aderente a  $X$  sem que este ponto pertença ao conjunto  $X$ .

**Definição 9** : Um fecho do conjunto  $X$  é o conjunto  $\bar{X}$  formado pelos pontos aderentes a  $X$ .

**Definição 10** : Um conjunto  $X$  é dito fechado se, e somente se ele é igual ao seu fecho:  $X = \bar{X}$ .

Em outras palavras, para que  $X$  seja fechado é necessário e suficiente que cumpra a seguinte condição: se  $x_n \in X$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $\lim x_n = a$ , então  $a \in X$ .

**Exemplo 9** : Como exemplo temos o conjunto dos reais,  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 2 :** *Seja  $F$  um subconjunto de um espaço métrico  $M$ . Diz-se que  $F$  é fechado se, e somente se seu complementar  $A$  é aberto.*

**Demonstração:** Seja  $F$  fechado e  $a \in A \Rightarrow a \notin F$ . Assim, existe alguma vizinhança  $V$  tal que  $a \in V$  e que contém pontos de  $F$ , ou seja,  $V \subset A$ . Daí, todo ponto  $a \in A$  é interior de  $A$ , logo  $A$  é aberto. Reciprocamente, se  $A$  é aberto e o ponto  $a$  é aderente a  $F$ , então toda vizinhança de  $a$  contém pontos de  $F$ , logo  $a$  não é interior a  $A$ . Sendo  $A$  aberto, temos  $a \notin A \Rightarrow a \in F$ . Então todo ponto  $a$  aderente a  $F \in F$ , logo  $F$  é fechado. ■

**Teorema 3 :** *A reunião de um número finito de conjuntos fechados é fechada:*

**Demonstração:** Sejam  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , conjuntos fechados e  $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ . Pela Lei de Morgan<sup>1</sup>,  $F^c = (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n)^c = F_1^c \cap F_2^c \cap \dots \cap F_n^c$ .

Mas, pelo teorema (1), cada  $F_i^c, i = 1, 2, \dots, n$  é aberto. Portanto,  $F^c$  é a intersecção de um número finito de abertos,  $F_i^c$ , e assim  $F^c$  também é aberto e novamente pelo teorema (1),  $(F^c)^c = F$  é fechado. ■

**Teorema 4 :** *A intersecção de um número qualquer de conjuntos fechados é fechada:*

**Demonstração:** Seja  $[F_i]$  a classe de conjuntos fechados e  $\bigcap_i F_i = F$ . Pela Lei de Morgan  $F^c = (\bigcap_i F_i)^c = \bigcup_i F_i^c$ . Assim,  $F^c$  é aberto e pelo teorema (1),  $(F^c)^c = F$  é fechado. ■

**Proposição 5 :** *O conjunto de Cantor é fechado:*

**Demonstração:** Veja que  $F_n$  é a reunião de  $2^n$  intervalos fechados (conforme 4.1.2). Assim, (pelo teorema 2),  $F_n$  é fechado. Logo o Conjunto de Cantor,  $K = \bigcap F_n; n \in \mathbb{N}$ , também é fechado (pelo teorema 3), o que encerra a demonstração. ■

### 5.3.2 Compacidade

O resultado a seguir nos fornece uma maneira de averiguarmos se um conjunto é compacto ou não.

---

<sup>1</sup>O complementar da reunião de  $n$  conjuntos é a intersecção dos complementares desses conjuntos;  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Lima (2013)

**Teorema 6** : *Um subconjunto  $C$  contido num espaço métrico  $\mathbb{R}$  é compacto se, e somente se, for fechado e limitado:*

**Demonstração:** Todo compacto é fechado e limitado. Suponha que  $C$  não seja um conjunto fechado, então, por definição, existe uma sequência que converge para um número real  $x \notin C$ . Como é convergente, todas as suas subsequências convergem para o mesmo limite  $x$ , portanto, nenhuma subsequência converge para um ponto de  $C$ , logo  $C$  não pode ser compacto<sup>2</sup>. Todo conjunto fechado e limitado é compacto. Suponha que  $C$  é fechado e limitado e seja uma sequência contida em  $C$ . A sequência é limitada, portanto, possui uma subsequência que converge para um limite  $x \in C$ , que é um conjunto fechado. Com isso encerra-se a demonstração. ■

**Proposição 7** : *O conjunto de Cantor é compacto:*

**Demonstração:** Pela proposição 5, temos que  $K$  é fechado. Além disso,  $K$  é limitado e pelo teorema (6)  $K$  é compacto, isto é, o Conjunto de Cantor é compacto. ■

---

<sup>2</sup>Um conjunto  $K \subset \mathbb{R}$  é compacto se toda sequência de pontos de  $K$  possui uma subsequência que converge para um ponto  $K$ . Seymour (1971)

## Capítulo 6

# Trabalhando com fractais em sala de aula

Há um movimento de alguns educadores para que as aulas e os conteúdos aplicados em sala de aula sejam cada vez mais interativos, visando uma aprendizagem do aluno para a vida e não apenas por um período acadêmico.

Gadotti (1987) diz:

... eu diria que Pedro Demo se aproxima da filosofia educacional de Rubens Alves que, ao invés de avaliar suas aulas em termos de rendimento escolar, se pergunta, ao final delas, se seus alunos conseguiram viver mais felizes, se o conhecimento aprendido lhes trouxe alguma nova alegria de viver, se eles sentiram sabor em saber mais.

Nas seções a seguir, apresentaremos alguns roteiros de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula na perspectiva de se produzir uma aprendizagem mais significativa aos estudantes.

### 6.1 Construindo o Triângulo de Sierpinski

#### Público

Alunos do ensino médio.

#### Material

Caneta, lápis, borracha, régua, cartolina e tesoura.

## Tempo previsto

Duas aulas de 50 minutos cada.

## Objetivos

- Entender alguns conceitos da geometria plana por meio de materiais concretos.
- Explorar o conceito de sequência, especificamente de progressão geométrica, nas construções realizadas.

## Roteiro da atividade

O professor deve iniciar a proposta dividindo a sala de aula em grupos onde cada grupo será responsável por uma iteração na construção do Triângulo de Sierpinski.

Iniciamos o processo entregando ao Grupo 1 uma folha e solicitando que com ela façam um triângulo equilátero. Aqui seria interessante recordar sobre algumas propriedades geométricas euclidianas do triângulo equilátero no que se refere aos seus lados, altura, perímetro e área.

Cabe aqui o professor sugerir a construção com a régua seguindo os seguintes passos:

Grupo 1 (Etapa 1) - Traçar uma reta dividindo a folha em duas partes iguais.

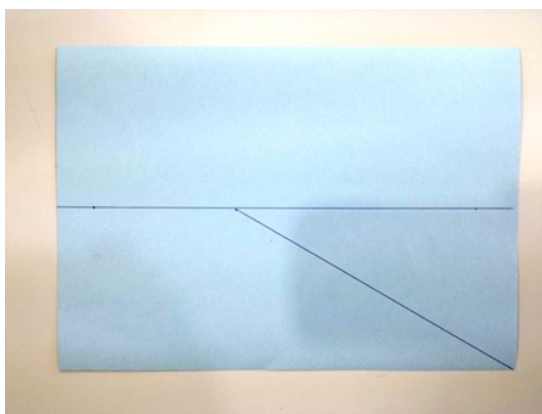


Figura 6.1: Mediana.

Grupo 1 (Etapa 2) - Transferir a medida do lado maior onde a ponta da régua esteja num vértice e o outro ponto de igual medida da base esteja sobre a mediana.

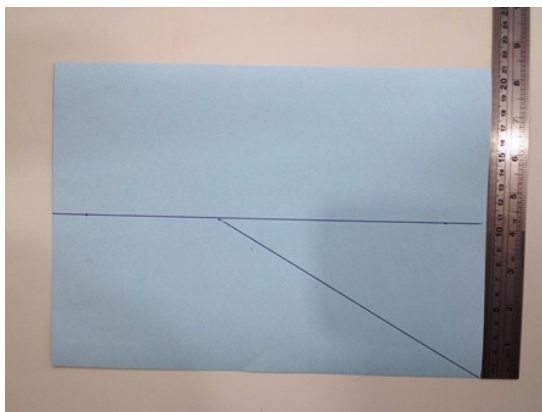


Figura 6.2: Marcação de um lado.

Grupo 1 (Etapa 3) - Efetuar o mesmo procedimento da etapa 2, só que agora com o outro vértice.

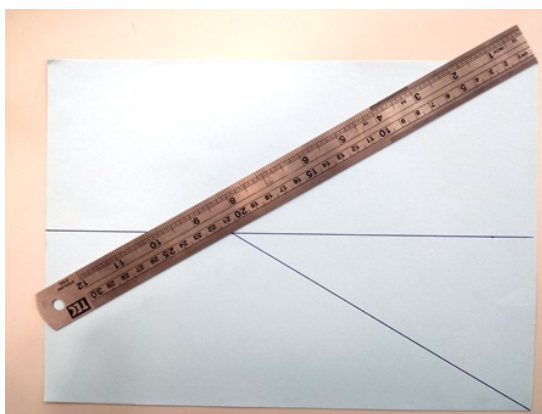


Figura 6.3: Marcação do outro lado.

Grupo 1 (Etapa 4) - Por último recortar o triângulo.

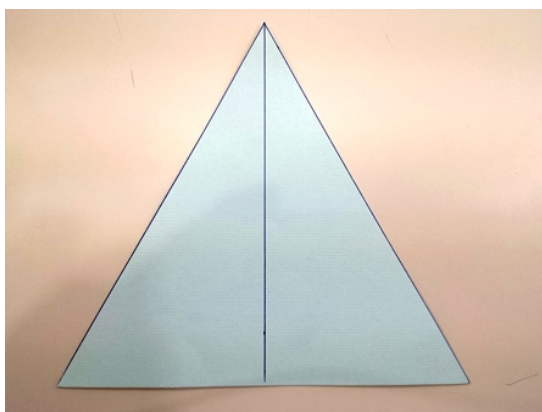


Figura 6.4: Iteração 0.

Para o Grupo 2 será entregue o triângulo feito pelo primeiro grupo, no caso

iteração 0. Para este grupo, iteração 1, caberá dividir o triângulo em 4 novos triângulos equiláteros por meio dos segmentos que unem os pontos médios dos lados do triângulo da iteração 0.

Grupo 2 (Etapa 1) - Marcar os pontos médios do triângulo.

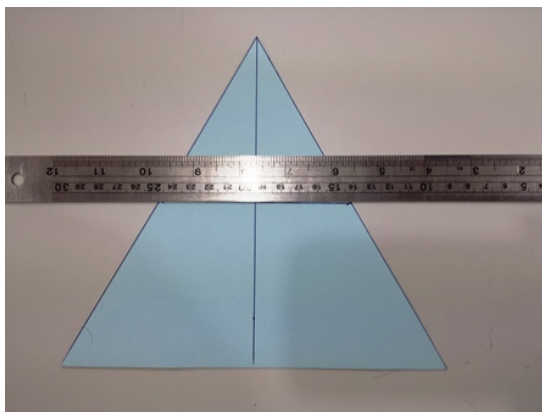


Figura 6.5: Marcação ponto médio.

Grupo 2 (Etapa 2) - Unir os 3 pontos com segmentos de reta.

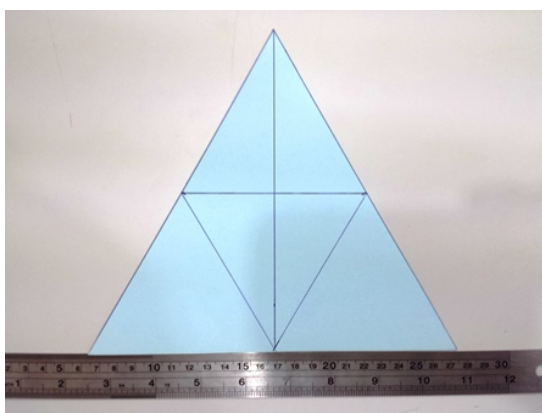


Figura 6.6: Unindo os pontos médios através de segmentos de reta.

Grupo 2 (Etapa 3) - Recortar os 4 triângulos equiláteros formados.

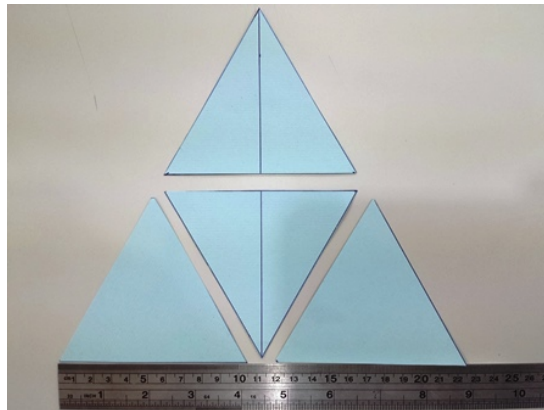


Figura 6.7: Triângulos recortados.

Grupo 2 (Etapa 4) - Separar  $\frac{3}{4}$  dos triângulos que serão utilizados nas próximas etapas.

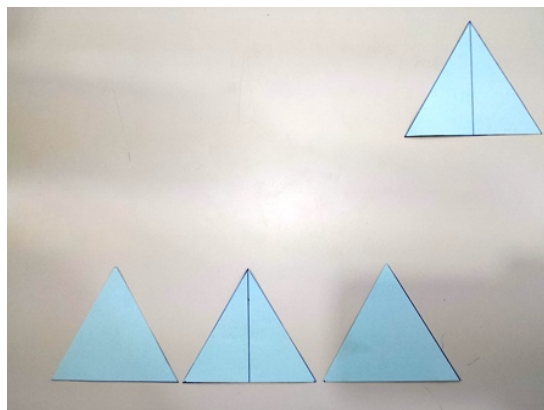
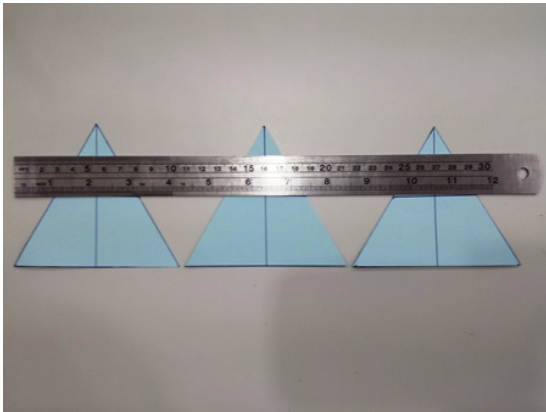


Figura 6.8: Iteração 1.

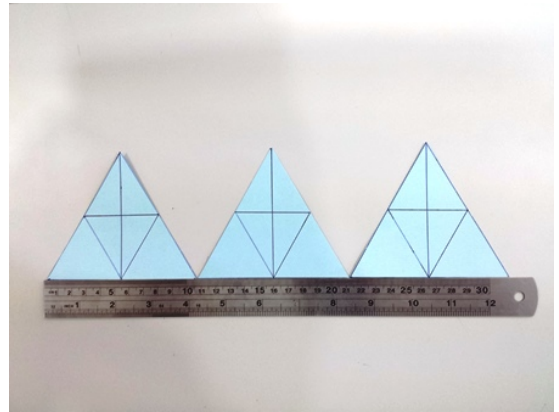
Para o Grupo 3, responsável pela iteração 2, será entregue os triângulos separados na etapa anterior e solicitado que novamente dividam cada triângulo recebido em 4 novos triângulos equiláteros e após, retirem  $\frac{1}{4}$  dos triângulos resultantes.

Grupo 3 (Etapa 1) - Deverão ser seguidos os passos dos grupos anteriores, conforme descrito nos itens abaixo:

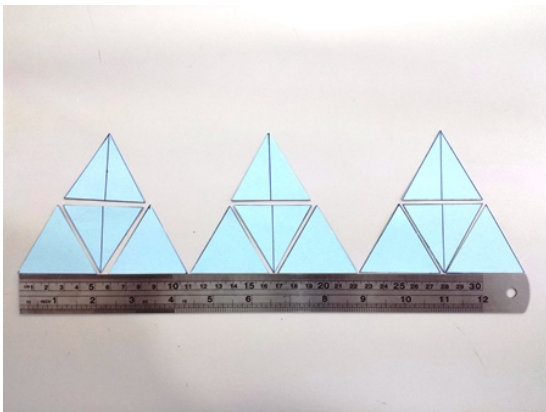




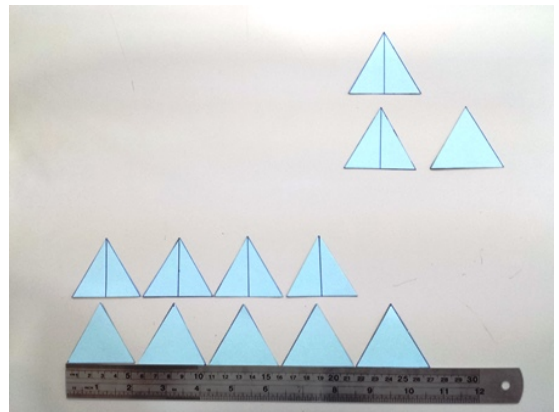
(a) Marcação dos pontos médios.



(b) Unindo os pontos médios.



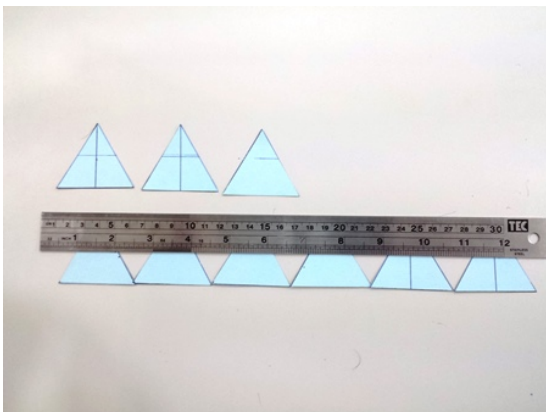
(c) Triângulos recortados.



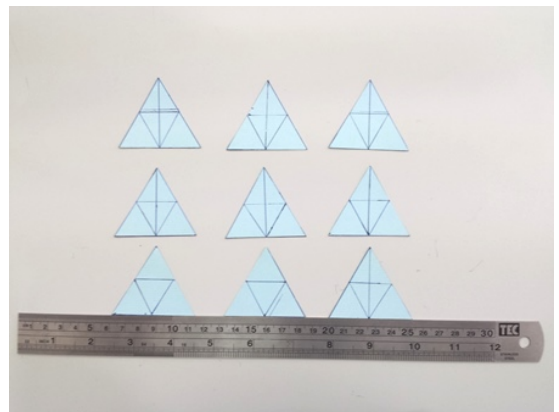
(d) Iteração 2.

Para o Grupo 4, responsável pela iteração 3, será entregue os triângulos remanescentes e solicitado que novamente dividam cada triângulo recebido em 4 novos triângulos equiláteros e após, retirem  $1/4$  dos triângulos resultantes.

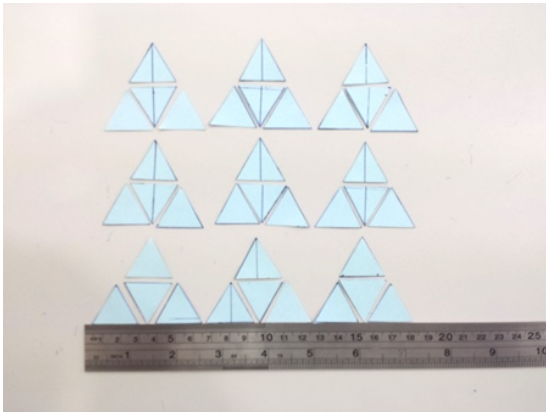
Grupo 4 (Etapa 1) - Deverão seguir os passos dos grupos anteriores, os quais podem ser observados nos itens a seguir:



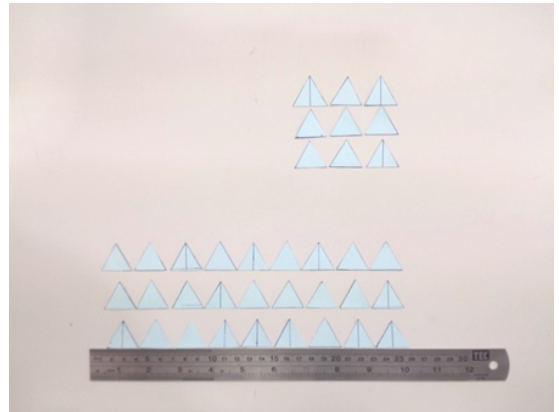
(e) Marcação dos pontos médios.



(f) Unindo os pontos médios.

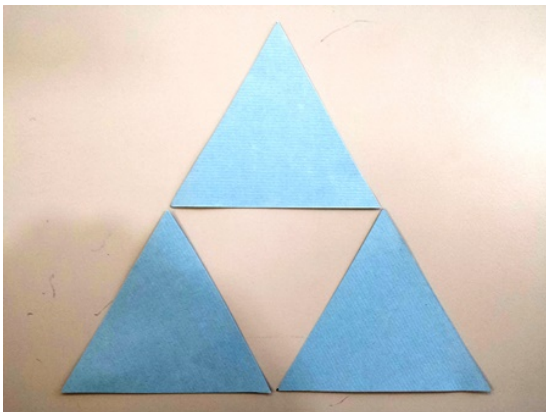


(g) Triângulos recortados.

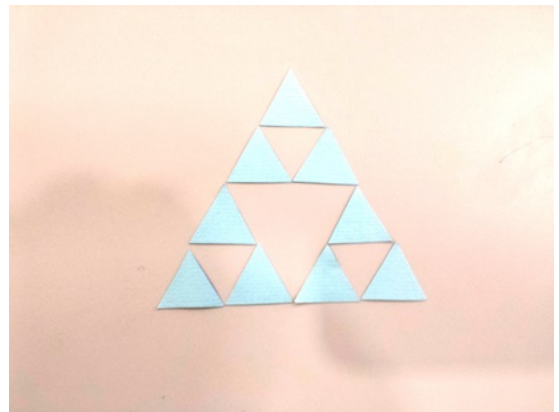


(h) Iteração 3.

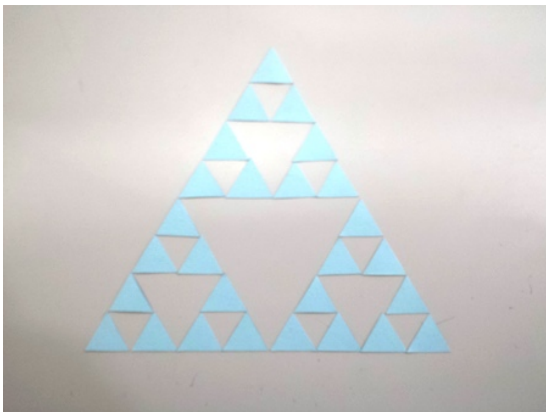
Finalizamos com a participação de todos os grupos onde utilizaremos os triângulos para a construção do Triângulo de Sierpinski, sendo que os triângulos retirados nas iterações serão utilizados para nortear a construção.



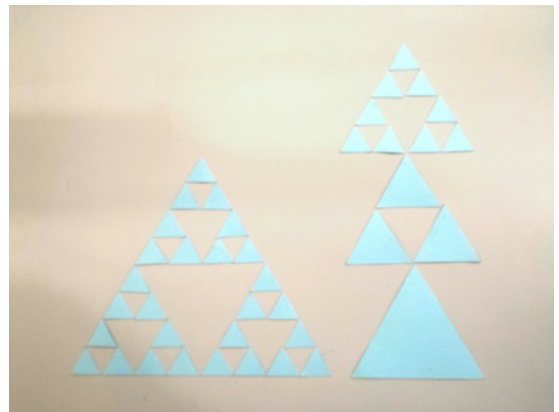
(i) Sierpinski com 1 iteração.



(j) Sierpinski com 2 iterações.



(k) Sierpinski com 3 iterações.



(l) Todas iterações.

### 6.1.1 Explorando alguns elementos da geometria plana no Triângulo de Sierpinski

Aqui, após os alunos realizarem a proposta 6.1, o professor poderá lançar o seguinte desafio: completar a tabela abaixo calculando os valores das 3 iterações realizadas pelos grupos 1, 2 e 3.

Concluída a tabela, o professor poderá fazer algumas considerações e novamente questionar se os alunos seriam capazes de calcular quais valores encontraríamos na iteração 4 sem fazer novos recortes e também questionar se é possível generalizarem uma fórmula para  $n$  iterações.

Nível	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
Número de triângulos	1	3	9	27
Comprimento de cada lado	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Área de cada triângulo	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{\sqrt{3}}{64}$	$\frac{\sqrt{3}}{256}$
Soma das áreas dos triângulos	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3}{16}\sqrt{3}$	$\frac{9}{64}\sqrt{3}$	$\frac{27}{256}\sqrt{3}$
Perímetro de cada triângulo	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$
Perímetro total	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{81}{2}$

Tabela 6.1: Resultados do Triângulo de Sierpinski

## 6.2 Construindo um fractal a partir de um quadrado

### Público

Alunos do ensino médio.

### Material

Caneta, lápis, borracha, régua, cartolina e tesoura.

## Tempo previsto

Duas aulas de 50 minutos cada.

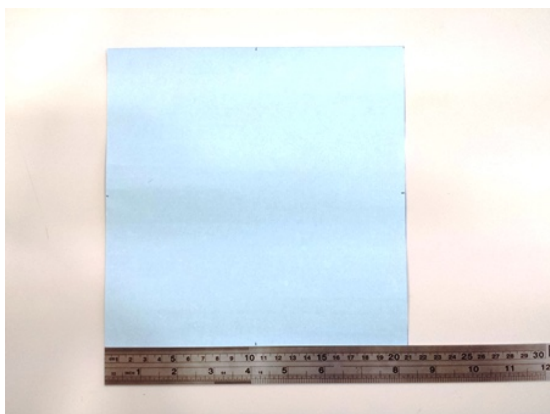
## Objetivos

- Realizar a interação dos alunos em grupo.
- Desenvolver com os alunos a construção de um fractal a partir de um quadrado, com o intuito de averiguarmos algumas características do fractal, evidenciando, por exemplo, o conteúdo de seqüências no ensino médio, a saber: progressão geométrica.

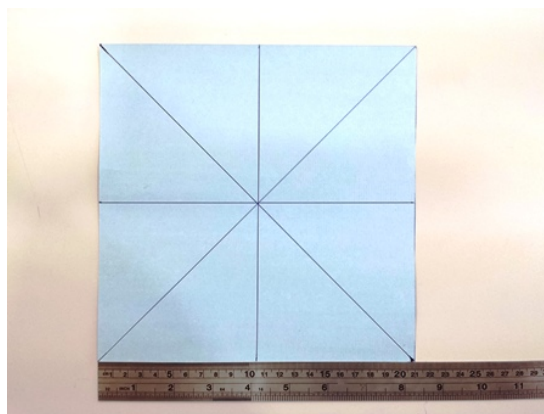
## Roteiro da atividade

Todos os alunos formarão um único grupo, e compartilharão os conhecimentos adquiridos na proposta 6.1. A ideia é partir de um quadrado feito de papel ou cartolina, marcar seu pontos médios, traçar semirretas unindo tais pontos formando um quadrado menor, recortar o quadrado menor e repetir sucessivamente este processo por 4 ou 5 vezes e após solicitar aos alunos que tentem construir algum tipo de fractal.

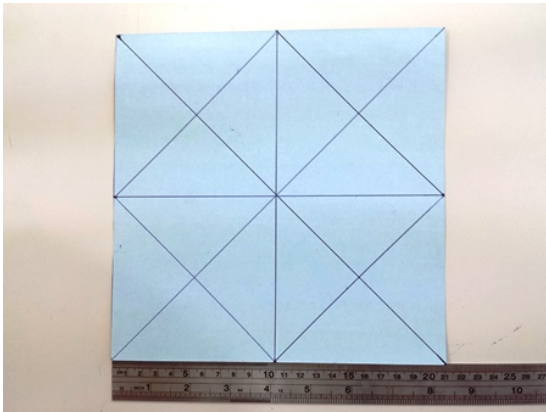
Um fractal que esperamos que surja, segue abaixo.



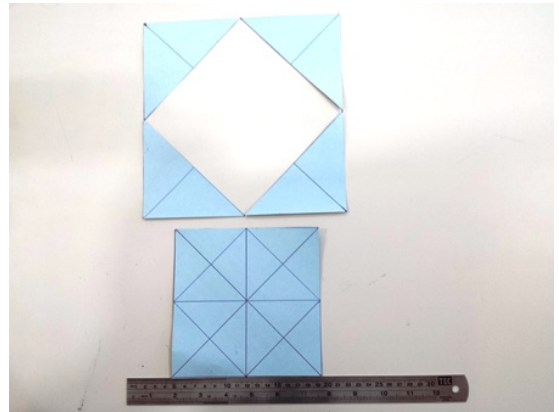
(m) Quadrado inicial.



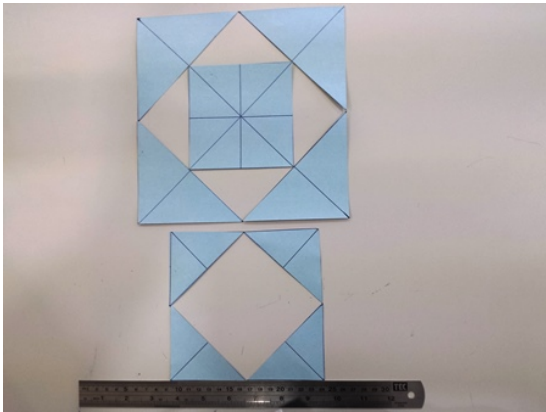
(n) Primeiras marcações.



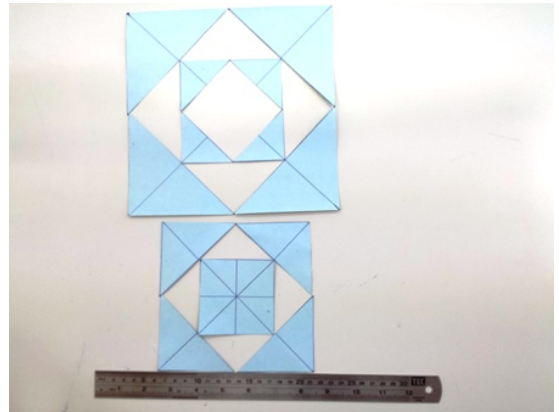
(o) Unindo pontos médios.



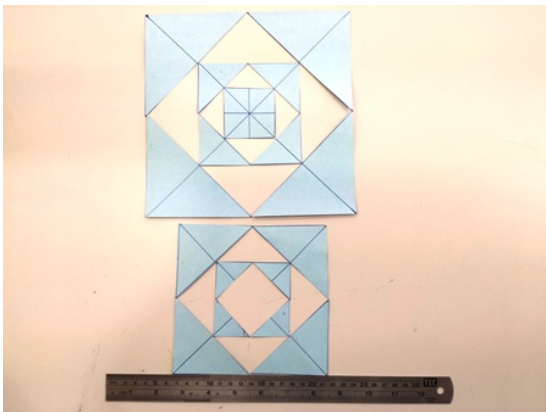
(p) Recorte do primeiro quadrado.



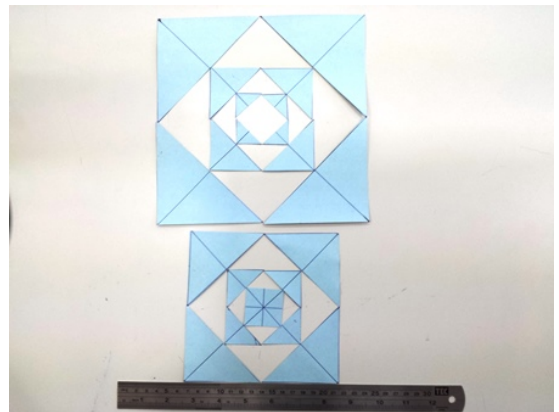
(q) Recorte do segundo quadrado.



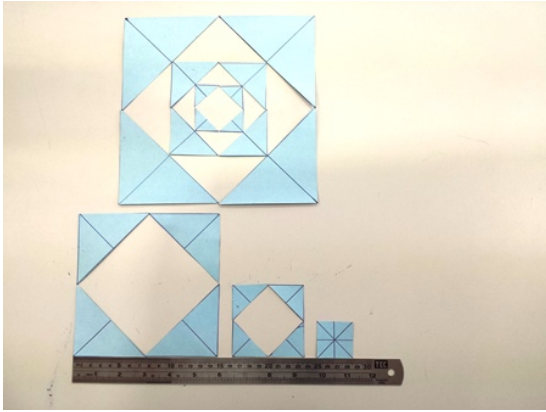
(r) Recorte do terceiro quadrado.



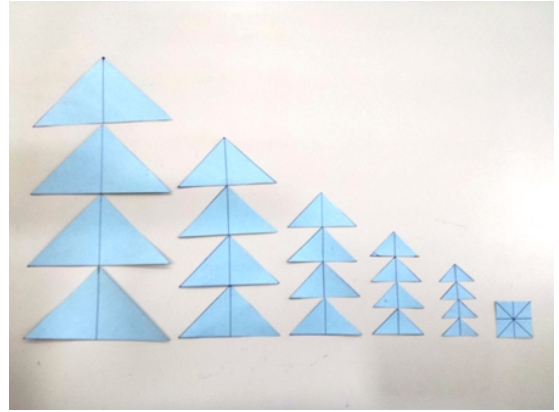
(s) Recorte do quarto quadrado



(t) Recorte do quinto quadrado.



(u) Fractal e figuras restantes.



(v) Todas figuras.

### 6.2.1 Explorando alguns elementos da geometria plana no fractal construído

Aqui, após os alunos realizarem a proposta 6.2, o professor poderá lançar o seguinte desafio: completar a tabela abaixo calculando os valores das 5 iteração realizadas na prática.

Para isso, os alunos devem perceber que há dois tipos de quadrados formados, podendo-se considerar os do tipo 1, aqueles formados pelo próprio material da construção e os do tipo 2, aqueles formados pelas bordas dos material utilizado.

Nível	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
Número de quadrados formados	2	3	4	5	6
Área de cada quadrado retirado	$21^2\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$21^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$21^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$21^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$21^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

Tabela 6.2: Resultados do fractal construído

## 6.3 Construindo um fractal através do triminó

### Público

Alunos do ensino médio.

## Material

Caneta, lápis, borracha, régua e folha milimetrada.

## Tempo previsto

Duas aulas de 50 minutos cada.

## Objetivos

- Promover a interação dos alunos em grupo.
- Realizar a construção de um fractal com os alunos do ensino médio a partir do triminó, evidenciando, após a construção, a interpretação geométrica de uma progressão geométrica crescente.

## Roteiro da atividade

A proposta é dividir os alunos em grupos, aqui dividido em quatro grupos, e a cada fase da atividades os alunos substituirão cada quadrado da figura formada por um novo triminó. Para demonstrar este processo, usamos um programa<sup>1</sup> de computador que imita folhas quadriculadas.

Grupo 1 - Este grupo inicia a construção com um quadrado, substituindo este, por três novos quadrados (triminó), que será a primeira iteração.

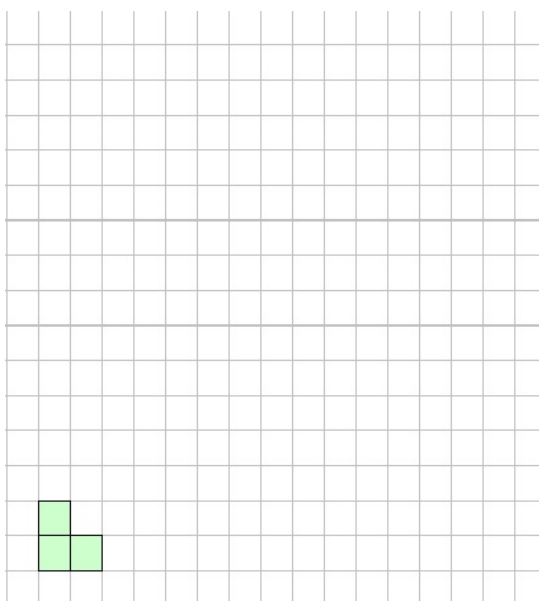


Figura 6.9: Primeira Iteração.

---

<sup>1</sup>Microsoft Excel

Grupo 2 - Este grupo continua a construção substituindo cada quadrado por três novos quadrados (triminó), que será a segunda iteração.

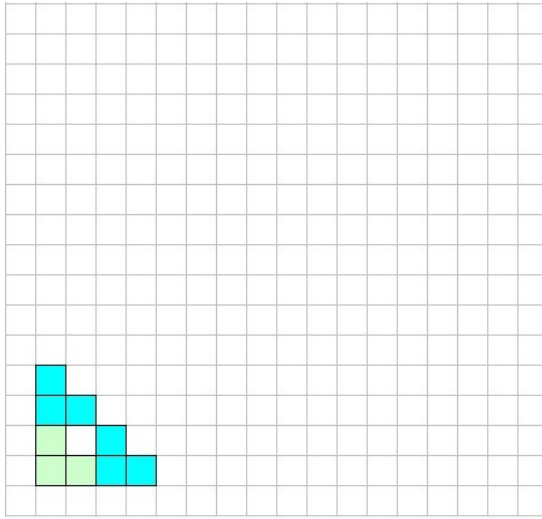


Figura 6.10: Segunda Iteração.

Grupo 3 - Este grupo continua a construção substituindo cada quadrado por três novos quadrados (triminó), que será a terceira iteração.

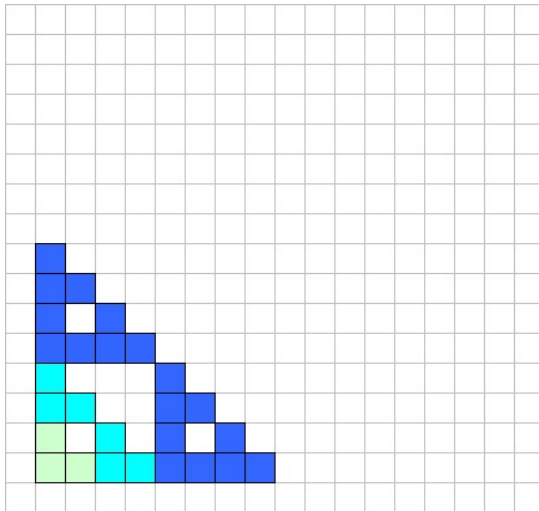


Figura 6.11: Terceira Iteração.

Grupo 4 - Este grupo continua a construção substituindo cada quadrado por três novos quadrados (triminó), que será a quarta iteração.



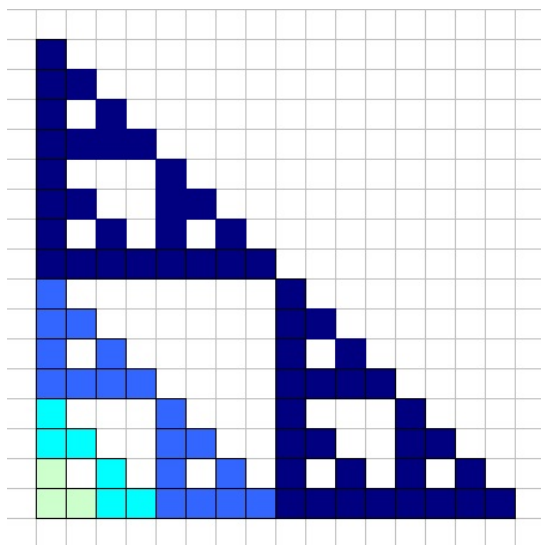


Figura 6.12: Quarta Iteração.

Durante a prática, o professor deve parar na terceira ou quarta iteração, conforme o número de grupos formado pois, caso substituíssemos sucessivamente (e infinitamente) cada quadrado do triminó por um novo triminó, obteríamos a cada iteração três vezes a figuras anterior, necessitando de um número infinito de peças.

Após esta construção analisaremos as propriedades matemáticas envolvidas e podemos, por exemplos, completar a tabela abaixo.

Nível	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
Número de quadrados	$3^1$	$3^2$	$3^3$	$3^4$
Total	3	9	27	81

Tabela 6.3: Encontrando o número de quadrados

As considerações que seguem referem-se às propostas 6.2 e 6.3.

Na maioria dos livros matemáticos para o ensino médio encontramos a fórmula  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  para progressões geométricas, sendo  $a_1$  o primeiro termo,  $a_n$  o n-ésimo termo e  $q$  a razão.

O conhecimento da citada fórmula e a manipulação da mesma por meio de atividades repetitivas, por exemplo, encontrar a razão ou o n-ésimo termo de um P.G. dada, não é suficiente para promover o aprendizado do aluno.

É preciso inovar, planejar situações que favoreçam a expansão do significado de P.G. para esse aluno. Neste sentido, a nossa proposta é que o professor faça um discussão com os alunos a fim de que eles percebam o significado geométrico das sequências

$a_n = (\frac{1}{2})^n$  e  $b_n = 3^n$ . Especificamente, de 6.2.1, espera-se que os alunos percebam pelo menos intuitivamente que a área do quadrado retirado a cada iteração diminui à metade, ou seja, seguindo uma P.G. decrescente de razão  $q = \frac{1}{2}$  e também, pela tabela 6.3, percebam que o número de quadrados triplicam a cada iteração, ou seja, seguindo uma P.G. crescente de razão  $q = 3$ . Está é uma maneira concreta de apresentarmos um sequência fazendo com que o aluno entenda o porquê de uma P.G. ser crescente quando temos uma razão  $q > 1$  e ser decrescente quando temos uma razão  $0 < q < 1$ .

## 6.4 Construindo fractais com espelhos

### Público

Alunos do ensino médio.

### Material

Dois espelhos planos e objetos geométricos tridimensionais.

### Tempo previsto

Uma aula de 50 minutos.

### Objetivos

- Construir fractais exclusivos.
- Contribuir para a interação dos alunos do ensino médio com os fractais.

### Roteiro da atividade

Para esta proposta é importante que os alunos já tenham feito as propostas 6.1, 6.2 e 6.3, pois elas servirão de base para que os alunos possam trabalhar com mais autonomia. As propriedades e os conceitos precisam estar bem sedimentados no intuito do professor intervir o menos possível.

Assim, o professor de posse de dois espelhos, colocará eles paralelamente um ao outro mantendo um espaço considerável entre eles e nesse espaço o professor colocará objetos geométricos tridimensionais. Um exemplo pode ser visto por meio da figura abaixo.



Figura 6.13: Fractais com espelhos.

### 6.4.1 Brincando também se aprende

Segundo Alves (2001):

... os jogos e brincadeiras propiciam condições agradáveis e favoráveis para o ensino da matemática, uma vez que, com esse tipo de material, o indivíduo é motivado para trabalhar e pensar tendo por base o material concreto, descobrindo, reinventando e não só recebendo informações.

Neste contexto e buscando manter a matemática dos fractais inserida no cotidiano dos alunos, podemos sugerir que cada aluno do ensino médio faça seu autorretrato, o popular “selfie”, possibilitando assim, o aprimoramento teórico dos fractais aplicado na prática, o que permite uma visão lúdica dos termos abordados na geometria fractal, inicialmente complexos, porém importantes à aprendizagem do aluno do ensino médio.



Figura 6.14: Fractais com espelhos.

# Capítulo 7

## Considerações finais

Devemos levar em consideração que a matemática está presente praticamente em todas as áreas do conhecimento bem como na grande maioria das atividades do cotidiano, sendo fator essencial para a desenvolvimento intelectual e humano.

Um dos ramos da matemática é a geometria fractal que nos permite trabalhar com atividades lúdicas como a utilização de materiais concretos, dobraduras e também com recursos computacionais, cativando, despertando a criatividade e interesse pela disciplina. Através da citada geometria podemos explorar, principalmente, progressões aritméticas e geométricas, transmitir breve conceito de limites e obviamente fractais que é o objeto do nosso estudo.

Assim, a geometria dos fractais não é apenas um capítulo da matemática, mas também uma forma de ajudar os homens a verem o mesmo velho mundo diferentemente.

Entendemos que a geometria fractal, que não apenas descreve uma figura geométrica não euclidiana e que não está isolada do cotidiano de nossos alunos, principalmente do ensino médio, precisa ser apresentada a eles, de forma que contribua para sua formação acadêmica.

# Referências Bibliográficas

- Assis, T. A. (2008). Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 30:2304.
- Ávila, G. (2003). *Cálculo das Funções de uma Variável*. LTC, São Paulo.
- Barbosa, R. M. (2002). *Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Autêntica, Belo Horizonte.
- Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide*. Edgard Blicher, São Paulo.
- Brasil (1971). *Ministério da Educação. Lei n.5692. Lei de Diretrizes e Bases da Educação*. Brasília.
- Brasil (1996). *Ministério da Educação. Lei n.9394. Lei de Diretrizes e Bases da Educação*. Brasília.
- D'Ambrosio, U. (1996). *Educação matemática: da Teoria à Prática*. Papirus, Campinas, 4 edição.
- Eves, H. (1993). *Tópicos de História da Matemática. Para uso em sala de aula. Geometria*. Atual, São Paulo.
- Francisco, W. C. (2015). Escala richter. Disponível em /url [http: www.brasilecola.com](http://www.brasilecola.com) Acesso em: 15/04/2015.
- Gadotti, M. (1987). *Pensamento Pedagógico Brasileiro*. Atica, São Paulo.
- Gonçalves, A. (2015). Homotetia. Disponível em /url [http: www.brasilecola.com](http://www.brasilecola.com) Acesso em: 10/05/2015.

- Guidorizzi, H. L. (1998). *Um curso de Cálculo*. LTC, Rio de Janeiro.
- Hefez, A. (2011). *Elementos da aritmética*. SBM, Rio de Janeiro.
- Janos, M. (2008). *Geometria Fractal*. Ciência Moderna, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2004). *Curso de análise volume 1*. SBM, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2012). *Análise Real. Funções de Uma Variável*. SBM, Rio de Janeiro.
- Lima, E. L. (2013). *A Matemática do Ensino Médio*. Mangava, Rio de Janeiro.
- Luz, A. A. B. S. (2005). Uma abordagem filosófica para o ensino da geometria na disciplina de matemática nas escolas da rede pública. *Revista Educação Gráfica*, 9.
- Mandelbrot, B. B. (1998). *Objectos Fractais. Forma, acaso e dimensão*. Gradiva, Lisboa.
- MEC (2002). PCNs. Parâmetros Curriculares Nacionais: do Ensino Médio. Terceiro e quarto ciclo. Ministério da Educação.
- Resende, A. I. (2004). Geometria fractal e teoria do caos. Disponível em /url [http: www.mat.uc.pt](http://www.mat.uc.pt) Acesso em: 19/05/2015.
- Sallum, E. M. (2005). Fractais no ensino médio. *Revista do professor de Matemática*, 57.
- Seymour, L. (1971). *Topologia Geral*. Mcgraw-Hill do Brasil Ltda, Rio de Janeiro.
- Silva, L. B. (2007). Teoria do caos. Disponível em /url [http: www.espacodasophia.com.br](http://www.espacodasophia.com.br) Acesso em: 10/12/2014.
- Silva, M. M. (2010). Dimensão fractal. Disponível em /url [http:www2.jatai.ufg.br](http://www2.jatai.ufg.br) Acesso em: 18/03/2015.
- Siqueira, R. (1995). Janelas para o infinito. Disponível em /url [http:www.fractarte.com.br](http://www.fractarte.com.br) Acesso em: 19/08/2014.