UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FÁBIO COSTA DE OLIVEIRA NEVES

ENSINO DE PROBABILIDADE: TIPOS DE EVENTOS

BELÉM – PARÁ
2015

FÁBIO COSTA DE OLIVEIRA NEVES

ENSINO DE PROBABILIDADE: TIPOS DE EVENTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Irene Castro Pereira..

BELÉM – PARÁ
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Neves,Fábio Costa de Oliveira, 1979 -
Ensino de probabilidade: Tipos de Eventos / Fábio Costa de Oliveira Neves. - 2015

Orientadora: Irene Castro Pereira
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2015.

1.Matemática-Estudo e ensino(Ensino Médio) - Escolas Públicas. 2.Probabilidade-Estudo e ensino-Metodologia. 3.Probabilidade-Educação e base-Metodologia. I.Título

CDD 22 ed. 372.7

FÁBIO COSTA DE OLIVEIRA NEVES

ENSINO DE PROBABILIDADE: TIPOS DE EVENTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 08 / 05 / 2015

Banca Examinadora

____

Prof. Dra. Irene Castro Pereira. – Orientadora
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA

____

Prof. Dr. João Claudio Brandemberg – Membro
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA

____

Prof. Dr. Pedro Franco de Sá – Membro
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ - UEPA

Aos meus pais, José Joaquim de Oliveira Neves e Dilma Costa de Oliveira Neves, que tanto fizeram por mim e me incentivaram a ingressar neste curso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as bênçãos que me concedeu nesta vida.

Aos meus pais e amigos que me ajudaram no que puderam.

A minha esposa e filhos, pela compreensão no tempo que estive ausente durante o curso.

A Profa. Dra. Irene Castro Pereira, pelas orientações e apoio.

Aos membros da banca, Prof. Dr. João Claudio Brandemberg e Prof. Dr. Pedro Franco de Sá, pelas observações, questionamentos e observações.

Ao Prof. Dr. Valcyr , hoje coordenador do curso e em nome do qual agradeço a todos os professores e coordenadores pelo excelente trabalho desenvolvido.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por oportunizar o PROFMAT.

A Universidade Federal do Pará (UFPA), por nos proporcionar sua estrutura física e intelectual.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo reconhecimento e investimento que viabilizaram este trabalho.

Aos colegas do PROFMAT, pelo companheirismo e união, pelos estudos e discussões em classe.

E em especial aos colegas Bosco Silveira Brito, Marcos Oliveira de Oliveira(Murakami) e Ulysses Coelho Júnior que me ajudaram diretamente na produção deste trabalho.

Aos professores das escolas que cederam tempo para aplicação dos questionários junto aos alunos.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível".

(Charles Chaplin)

RESUMO

Este trabalho se propôs a investigar alunos concluintes do ensino médio, na rede pública, quanto ao que aprenderam sobre probabilidade, aplicou-se um questionário e percebeu-se um enorme déficit. Observando os livros didáticos utilizados por muitos deles percebeu-se que não estão adaptados as realidades cotidianas dos alunos, e tanto os livros quanto os professores desses alunos utilizam a mesma metodologia enfadonha tradicional. Este trabalho propõe uma sequência metodológica dinâmica contextualizada para o ensino de probabilidade na educação básica, mais precisamente no que concerne a probabilidade dos diversos tipos de eventos, incluindo experimentação e exercícios propostos.

Palavras-chave: Ensino. Metodologia. Probabilidade.

ABSTRACT

This study aimed to investigate graduating high school students in network public, as to what learned about probability, applied a questionnaire and noticed a huge deficit. Noting the textbooks used by many of them realized that they are not adapted to the daily realities of the students, and both books as teachers of these students use the same traditional boring method. This paper proposes a contextualized dynamic methodological sequence for teaching probability in basic education, specifically regarding the likelihood of various types of events, including experimentation and proposed exercises.

Key-words: Education. Methodology. Probability.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Segundo GNERI(2014) há mais de cinco séculos a probabilidade é estudada, discutida e apreciada pela humanidade em seus diversos aspectos. Os primórdios da probabilidade estão relacionados com as idéias ligadas as chances de vitória ou derrota em jogos de azar. Mas seus usos vão além dos jogos de azar até tomadas de decisões cruciais para a vida de algumas pessoas, nos casos de probabilidade e expectativa de vida para realização de uma operação cirúrgica, por exemplo.

Hoje em dia nota-se facilmente a utilização das teorias da probabilidade aplicadas na economia, na administração, na biologia, nas telecomunicações e até mesmo na medicina, onde as tomadas de decisões só são feitas após minuciosos estudos probabilísticos.

Com isso a probabilidade passou a ser assunto de conhecimento importante e por isso passou a integrar o currículo do ensino médio das escolas. Neste trabalho verificamos o conhecimento deste assunto por parte dos alunos concluintes do ensino médio em algumas escolas públicas do estado do Pará. Para isso aplicou-se um questionário (APÊNDICE A) em 156 alunos e os resultados não foram os melhores mas também não foram distantes da expectativa pois é de conhecimento público e notório que as escolas públicas possuem enormes dificuldades técnicas e estruturais para oferecer um ensino de excelência ao alunado, com raras exceções.

Este trabalho, em especial, está dividido em três partes sequenciais, todas com a mesma metodologia e propósito final, a primeira trata da noção de experimentos determinísticos e aleatórios, espaço amostral e evento, finalizando com a definição de probabilidade, esta primeira parte foi elaborada por Bosco Silveira Brito. A segunda trata dos tipos de eventos e suas probabilidades, tais como evento certo, evento impossível, eventos complementares, eventos mutuamente exclusivos e eventos independentes, esta parte foi elaborada por Fábio Costa de Oliveira Neves. E a terceira e última parte, elaborada por Marcos Oliveira de Oliveira, trata da probabilidade da união de eventos e da probabilidade condicional.

Cada autor na sua produção baseou-se no mesmo questionário porém analisando as questões propostas associadas aos assuntos mencionados acima. A sequência metodológica é a mesma em todas as produções: análise do questionário, análise de livros e proposta de material para melhorar o ensino de probabilidade.

Neste trabalho, em específico, está a segunda parte, onde trato sobre os tipos de eventos e suas probabilidades.

Começamos pela importância histórica da probabilidade que merece destaque e para posicionar e ambientar o leitor quanto a evolução dos estudos das teorias da probabilidade. Em seguida é apresentada a pesquisa com os alunos, através do questionário, que observou os aspectos familiares, sociais, educacionais e a opinião deles em relação aos processos de ensino-aprendizagem que os rodearam ao longo do ensino médio. Numa segunda parte este mesmo questionário coloca 13 (treze) questões problema sobre tópicos de probabilidade para o aluno responder, tais como: espaço amostral, evento, definição de probabilidade, probabilidade de eventos certos e de eventos impossíveis, probabilidade de evento complementar e outros. Lembrando que neste trabalho serão analisadas e comentadas apenas as questões correspondentes a probabilidade dos tipos de eventos já mencionados, que são as questões problema 16.3, 16.4 e 16.11.

Em seguida, e já de posse dos resultados da pesquisa, foi feita uma análise no livro didático aprovado no PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) de 2012 que foi utilizado pelos alunos: MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES de Luiz Roberto DANTE,de 2012, vol.2, da editora Ática.

Analisado o livro e de posse das informações prestadas pelos alunos sobre as metodologias usadas pelos professores ficou claro que algo deveria mudar, principalmente na metodologia utilizada em sala de aula.

Após todo esse levantamente este trabalho uma proposta de planos de aula e uma sequência metodológica dinâmica além de um material específico para professores trabalharem a probabilidade e suas teorias com os alunos através de atividades próximas do cotidiano dos alunos. Tomou-se o cuidado ainda para que esta proposta contemplasse o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), que é o foco da maioria dos alunos que desejam ingressar numa universidade pública, este é o diferencial principal em comparação com as propostas dos livros didáticos.

2 NOTAS HISTÓRICAS DE PROBABILIDADE

Para ambientar e contextualizar qualquer assunto ou questão sobre o que se está estudando é necessário ter noção da história, então para que tanto alunos quanto professores possam ter esse conhecimento ao seu dispor segue aqui um breve resumo sobre como a probabilidade se apresentou desde sua criação.

Segundo BOYER(1998) o fato da probabilidade ter começado como uma ciência empírica e só mais tarde se desenvolver associada à Matemática é uma das principais dificuldades que se encontra quando busca-se a origem das probabilidades. Sendo assim é difícil determinar corretamente quando é que se registrou a alteração do empirismo para o formalismo matemático. Porém todos os livros concordam que os "criadores"das probabilidade foram Pascal[1] e Fermat[2] pelos motivos que serão esclarecidos mais adiante.

O estudo das probabilidades começou por se efetuar ao nível do cotidiano, com a observação de fenômenos diários e como explicação para situações que ocorriam no dia-a-dia, em que algumas vezes foram julgadas como desejo de ordem divina. Pinturas em tumbas egípcias feitas em 3500 a.C. mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados feitos de um osso do calcanhar de nome astrágalo e este osso era dotado de 4 faces.

Mas segundo Katz(2010), os primórdios da teoria das probabilidades são proferidas em algumas idéias probabilísticas elementares ligadas aos jogos de dados, onde a preocupação, isso registrado em vários documentos, era o de calcular o número de formas diferentes em que dois ou três dados podem cair, e em alguns documentos, a resposta é 21 formas para dois dados e 56 formas para três dados. Uma análise rápida desses resultados, nos leva a concluir que os resultados estão corretos se levarmos em conta os diferentes conjuntos de pontos, sem considerar a ordem na qual acontecem.

O primeiro comentário conhecido de que as 56 formas de um dado cair não eram equiprováveis aparece em um poema em latim de um anônimo, De Vetula[3], escrito em local desconhecido, datado entre 1200 e 1400 que tem o seguinte conteúdo:*"Se os três dados são iguais, há apenas uma forma para cada número; se dois são iguais e um diferente, há três*

---

[1] Blaise Pascal, nasceu em Clermont-Ferrand em 19 de Junho de 1623 e faleceu em Paris em 19 de Agosto de 1662. Deu várias contribuições a várias áreas do conhecimento humano, foi físico, matemático, filósofo moralista e teólogo francês.

[2] Pierre de Fermat, nascido na primeira década do século XVII Castres, 12 de Janeiro de 1665 foi um matemático e cientista francês.

[3] Um poema que contém cálculos de probabilidade sobre o arremesso de três dados. Foi escrito em meados do século XIII

formas; e se todos são diferentes há seis formas". Analisando a regra afirmada, é possível concluir que o total de formas para três dados é 216. Até aqui podemos perceber que contar as formas como os dados podem cair veio, provavelmente, da utilização mais primordial dos dados que era a adivinhação.

Ainda para BOYER(1998) por volta do século XVI, a idéia de eventos equiprováveis começa a ser compreendida, tornando assim possível fazer cálculos reais de probabilidade. A primeira tentativa sistemática de fazer esses cálculos está no livro escrito por Cardano[4], no ano de 1526, intitulado *Liber de Ludo Aleae*(Livro sobre jogos de azar). Para além de contar o número de formas como dois ou três dados podem cair, ele demonstrava um bom entendimento das noções básicas da probabilidade. A palavra "aleae" refere-se a jogos de dados e tem a mesma raiz de "aleatorius" que significa eventos sujeitos ao acaso, dependentes de fatores incertos, parece ter sido este o primeiro trabalho a desenvolver princípios de probabilidade. Cardano define a probabilidade de um evento como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de possíveis resultados, e dá indicações da importância de métodos combinatórios no desenvolvimento de uma teoria da probabilidade.

De Merè[5] colocou a Pascal o problema de determinar quantos lançamentos devem ser permitidos para fornecer possibilidades iguais de obter dois seis em um par de dados. Esse problema foi popular durante anos, Cardano argumentou que, *"uma vez que há uma possibilidade em 36 de se obter dois seis em um par de dados, em média, um tal resultado deveria ocorrer a cada 36 lançamentos. Desta forma, as possibilidades de que um duplo seis ocorra em metade dos lançamentos, ou seja, 18, são iguais"*. O raciocínio de Cardano implica que em seis lançamentos de um dado, o fato de sair um dois, por exemplo, é certo ou em 36 lançamentos de dois dados um duplo seis é certo. É claro que nesse caso, o que podemos medir é a chance de ocorrência de um evento e não a garantia de que, na realização da experimentação, o evento irá ocorrer, mas Cardano não se apercebeu do erro.

Galileu Galilei[6] foi o primeiro a escrever sobre um método geral de cálculo de pro-

---

4 Girolamo Cardano, nasceu em Pavia, na Itália, em 1501 e faleceu em Roma em 1576, aos 74 anos.Escreveu mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, filosofia, religião e música

5 Antoine Gombaud, denominado Chevalier de Méré (Condado de Poitou, 1607 - 1684), foi um nobre e jogador francês. Seu nome é relacionado ao cálculo matemático de jogos de azar. Em 1654 buscou auxílio de Blaise Pascal, porque já não tinha mais sucesso com seus calculados jogos. Com ajuda de Pierre de Fermat as chances de ganho de dois jogos de dados foram determinadas exatamente.

6 (em italiano: Galileo Galilei; Pisa, 15 de fevereiro de 1564 - Florença, 8 de janeiro de 1642) foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano.

babilidades das faces de um dado, trabalhando na linha dos resultados de Cardano, dos quais possivelmente tinha conhecimento, fez um estudo completo do número possível de resultados em jogos de dados em seu trabalho. No entanto, mais notável foi sua percepção do comportamento dos erros em observações astronômicas que mais tarde foram descritas pela distribuição normal.

Para EVES(2004) a noção de calcular, de alguma forma, o valor de uma ação particular tornou-se a base para o primeiro tratado sistemático sobre probabilidades, escrito em 1656, por Christian Huygens[7], na época, um aluno de van Schooten [8]. Ele se interessou pela questão das probabilidades durante uma visita a Paris, em 1655 e escreveu um breve livro sobre o tema, intitulado *De ratiociniis in Aleae Ludo*(Sobre os Cálculos em Jogos de Azar), que apareceu impresso, somente, em 1657, que serviu jcomo livro de introdução à Teoria das Probabilidades até o século XVIII.

A obra de Huygens continha apenas 14 proposições e concluia com cinco exercícios para o leitor. As proposições incluiam algum tratamento dos dois problemas de De Merè, mas Huygens também forneceu discussões acerca do raciocínio por trás das soluções, em particular, como calcular em um jogo de azar, isso fica evidenciado no texto escriro por ele: "Embora em um jogo puro de sorte, os resulatdos sejam incertos, a hipótese que um jogador tem de ganhar ou perder depende de um determinado valor". Esse "valor" ao qual se refere Huygens é semelhante a noção dada por Pascal na sua aposta mas, nos casos de jogas de azar, Huygens podia calcular explicitamente. Hoje, esse "valor" de uma hipótese é o chamado valor esperado, ou seja, a quantidade média que uma pessoa ganharia caso jogasse o jogo muitas vezes.

O livro de Huygens possuia a melhor exposição sobre probabilidade até o aparecimento do livro *Ars Conjectandi*, de Jacob Bernoulli, publicado em 1713. Esse livro continha uma reimpressão do livro de Huygens, complementada com vários comentários e técnicas de análise combinatória. Para Jacob Beunoulli, parecia óbvio que quanto maior fosse o número de observação de uma dada situação, mais precisa seria a previsão de ocorrências futuras, a prova científica dessa idéia acabou se evidenciando na chamada Lei dos Grandes números, que estava contida na quarta e última parte do *Ars Conjectandi*. Essas idéias marcaram o início de uma nova era na Teoria das Probabilidades.

---

[7] Christiaan Huygens, nascido em Haia em 14 de Abril de 1629 e falecido e Haia em 8 de julho de 1695, matemático, físico e astrônomo holandês, foi uma das figuras mais importante da Revolução Científica. Foi na Física que o seu trabalho mais se destacou, tanto na Mecânica como na óptica.

[8] Franciscus van Schooten, nasceu em Leiden, 1615 e faleceu em Leiden, 29 de maio de 1660. Foi um matemático holandes e é conhecido por popularizar a geometria analítica de René Descartes.

Neste período, muitos outros matemáticos se destacaram, como por exemplo, Euler. O interesse de Euler[9] pelo estudo das Probabilidades, impulsionado por Daniel (1700-1782) e Nicolaus Bernoulli (1687 - 1759), fez com que o mesmo escrevesse sobre expectativas de vida, o valor de uma anuidade, loterias, entre outros aspectos da vida em sociedade e como seria previsível, contribuiu, também, com algumas notações, uma vez que, muitas das notações utilizadas até hoje, em várias áreas da matemática, são atribuidas a ele.

Outro nome, que é importante destacar desse período, é o de Pierre Simon Laplace [10] que embora conduzisse bastante pesquisa sobre física, tinha como outro tema principal dos esforços de sua vida a teoria das probabilidades. Em seu *Essai philosophique sur les probabilités*, publicado em 1814, fez uma exposição introdutória para o leitor comum, escrevendo que *"no fundo a teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números"*, nessa obra, Laplace projetou um sistema matemático de raciocínio indutivo baseado em probabilidades, que hoje coincidem com as ideias Bayesianas. Mas é em sua obra *Théorie analytique des probabilytés* de 1812 que ele mostra ser um mestre de análise que conhece seu cálculo avançado. Essa obra está cheia de integrais envolvendo funções beta e gama e além disso, Laplace foi um dos primeiros a mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, a área sob a curva de probabilidade, é $\sqrt{\pi}$. Os fundamentos da Teoria das Probabilidades foram colocados por Laplace de tal maneira que se mantiveram inalterados até o inicio do século XX.

CARM(2014) destaca que a teoria dos conjuntos e a teoria da medida, durante o século XX, invadiram partes cada vez maiores da matemática e poucos ramos foram tão influenciados por essa tendência quanto a teoria das probabilidades. O primeiro ano do novo século foram esperançosos para os estudos em probabilidades, tanto na física quanto na genética, quando em 1901, Gibbs [11] publicou seus *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (Princípios Elementares de Mecânica Estatística) e nesse mesmo ano de 1901 foi fundada a *Biometrika*, um jornal que apartir de 1930 passou a ser referência em metodologia e teoria

[9] Leonhard Paul Euler nasceu na Basileia em 15 de abril de 1707 e faleceu em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783. É considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em campos variados em cálculo e grafo e também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática.

[10] Pierre Simon Marquis de Laplace (23 de março de 1749 Paris, 5 de março de 1827)foi um matemático, astrônomo e físico francês que organizou a astronomia matemática

[11] Josiah Willard Gibbs (New Haven, 11 de fevereiro de 1839 – New Haven, 28 de abril de 1903) foi um físico, químico teórico e matemático estadunidense.

estatística, por Karl Pearson [12] (1857-1936).

Só para se ter uma idéia de quanto o interesse pela probabilidade crescia, um dos títulos de Poincaré [13] tinha sido *Professor do Cálculo de Probabilidades*.

Na atualidade, são inumeras as aplicações do conhecimento das probabilidades como, por exemplo, na economia, na administração, na medicina, na biologia, nas telecomunicações, na confiabilidade de um fenômeno, enfim, o limite dessas aplicações, só o futuro poderá nos revelar.

[12] Karl Pearson (Londres, 27 de Março de 1857 – 27 de Abril de 1936) foi um grande contribuidor para o desenvolvimento da estatística como uma disciplina científica séria e independente. Foi o fundador do Departamento de Estatística Aplicada na University College London em 1911; foi o primeiro departamento universitário dedicado à estatística em todo o mundo.

[13] Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 de abril de 1854 Paris, 17 de julho de 19121) foi um matemático, físico e filósofo da ciência francês.

3 ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS

Para nossa investigação sobre os conhecimentos e habilidades já concebidas pelos alunos foi aplicado um questionário (APÊNDICE A) que observou informações de cunho tanto social quanto educacional.

O questionário foi composto por 16 (dezesseis) itens sendo o último subdividido em 13 (treze) questões. As informações observadas foram referentes a idade, gênero, ano ou série, se a escola em que estuda é da rede pública ou privada, escolaridade do pai e da mãe, profissão do pai e da mãe, se o aluno gosta de matemática, se o aluno costuma estudar matemática fora da escola, se alguém o ajuda nas tarefas de matemática.

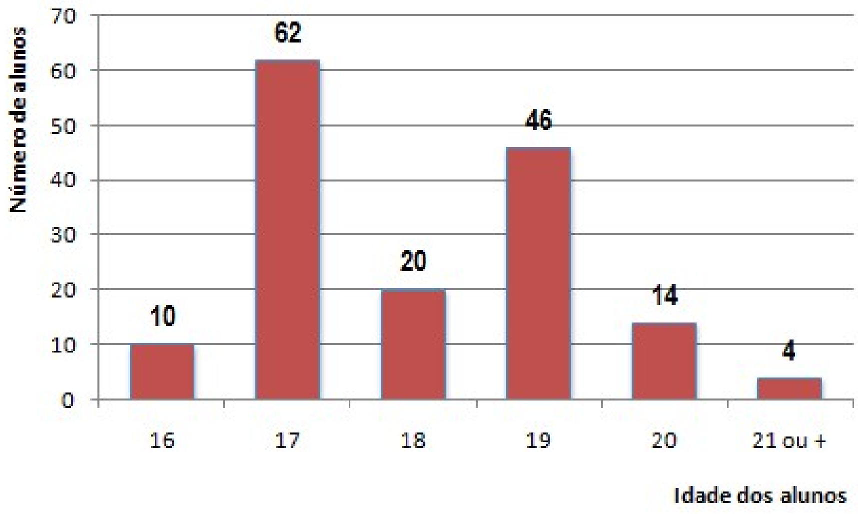
Também são feitos questionamentos a cerca de como os assuntos de matemática foram ministrados pelos professores, perguntando sobre qual metodologia foi usada nas aulas de matemática de sua escola e sobre como o professor trabalhou para que o aluno compreendesse melhor o assunto ministrado. A partir de então os questionamentos se aplicam exclusivamente a probabilidade, perguntando-se como o aluno se sente em relação ao conteúdo e, após isso, o discente é convidado a preencher um quadro (vide APÊNDICE A), classificando os tópicos de probabilidade em: muito fácil, fácil, regular, difícil ou muito difícil. A partir daí, foram propostos 13 problemas para que os discentes respondessem, referente ao tema de probabilidade.

Este questionário foi aplicado em 156 alunos concluintes do ensino médio de duas escolas públicas estaduais do bairro do Marco da cidade de Belém-PA. Os resultados da aplicação dos questionários foram avaliados e expostos nos comentários abaixo.

3.1 PERFIL DOS ALUNOS

Baseado nas respostas às questões de 01 a 14 do questionário aplicado a 156 (cento e cinquenta e seis) alunos da 3ª serie do ensino médio, obtivemos o seguinte resultado: Em relação a questão 01 sobre a idade dos alunos, obtivemos a distribuição mostrada no gráfico da figura 1 a seguir.

Figura 1 – Número de alunos por idade que participaram da pesquisa

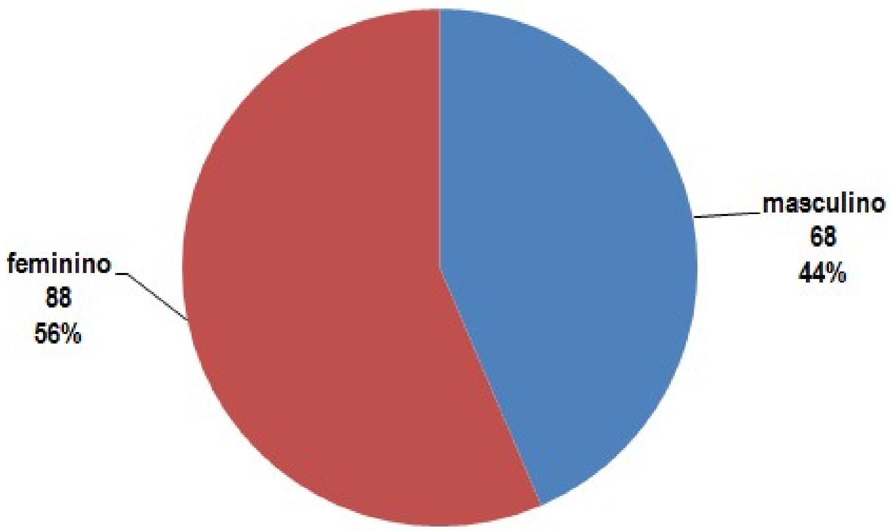


Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

A idade padrão para concluir o ensino médio, considerando o início dos estudos no ensino fundamental com 7 anos, é entre 17 e 19 anos. Dos 156 discentes pesquisados, é possível concluir que 128 (cento e vinte e oito) discentes estão na idade certa para completar o ensino médio, ou seja, quase 82% da amostra, enquanto isso, temos cerca de 6,5% de alunos com um ano de antecedência e apenas, cerca de, 11,5% de alunos com um ou mais anos de atraso em relação a idade ideal.

Da questão 02, a distribuição de gênero está mostrada no gráfico da figura 2 a seguir.

Figura 2 – Número de alunos por gênero que participaram da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Do gráfico, aproximadamente $43,6\%$ são do sexo masculino, contra, aproximadamente $56,4\%$ do sexo feminino. Todos os alunos são concluintes do ensino médio de escolas públicas localizadas em Belém-PA no bairro do Marco, freqüentam a escola nos turnos da manhã ou da tarde, pois esta pesquisa não discriminou o turno de estudo dos alunos. Quanto a escolarização do pai e da mãe, de acordo com nossos 156 alunos, temos a distribuição identificada na tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Comparativo entre a escolaridade do Pai e da Mãe dos alunos

Descritivo	Pai		Mãe	
	Quant.	Porcent.	Quant.	Porcent.
Não estudou	**8**	**5,13**	**6**	**3,85**
Ensino fundamental incompleto	**24**	**15,38**	**8**	**5,13**
Ensino fundamental completo	**28**	**17,95**	**16**	**10,26**
Ensino médio incompleto	**36**	**23,08**	**40**	**25,64**
Ensino médio completo	**38**	**24,36**	**56**	**35,90**
Ensino superior incompleto	**16**	**10,26**	**20**	**12,82**
Ensino superior completo	**6**	**3,85**	**10**	**6,41**

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Do quadro acima, podemos avaliar que, aproximadamente, 38,47% dos pais (masculinos) possuem nível de médio completo a superior completo enquanto que 55,13% das mães possuem nível de médio completo a superior completo, mostrando, a capacidade feminina de suporte a escolarização como preponderante em relação ao gênero masculino.

Em relação a profissão dos pais e das mães, respondidas nas questões 07 e 08 do questionário, obtivemos as mais variadas respostas, desde “não sei” até “funcionário público do tribunal de justiça”.

A partir da questão 09 entramos na relação dos alunos com a matemática, aqui a pergunta é sobre “o quanto gostam de matemática?”, onde podiam escolher entre 4 opções de resposta: nem um pouco, pouco, razoável ou muito. Os dados dos questionários podem ser observados na tabela 2, abaixo:

Tabela 2 – Distribuição de respostas à pergunta “você gosta de matemática”

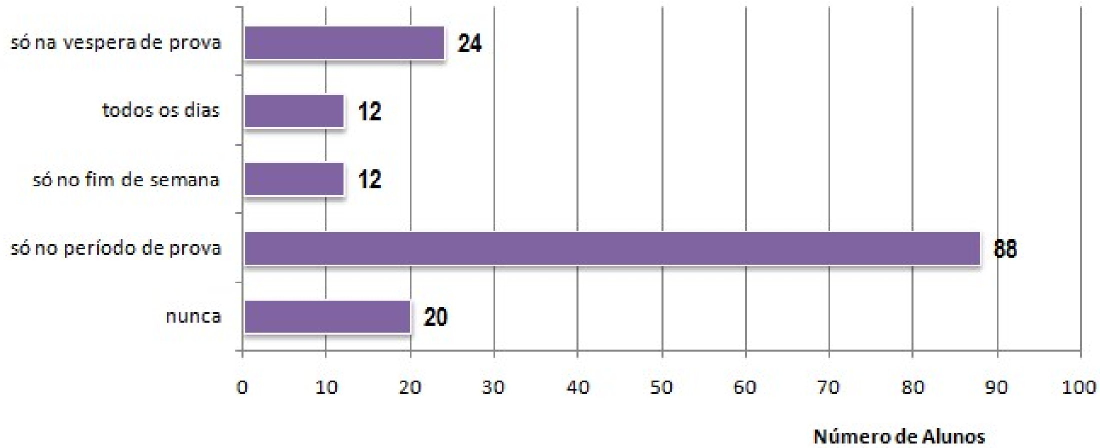
Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Nem um pouco	**50**	**32,05**
Pouco	**50**	**32,05**
Razoável	**46**	**29,49**
Muito	**10**	**6,41**

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Da análise dos questionários, observa-se que 64,1% dos discentes, dizem que não gostam ou que gostam pouco de matemática, apenas dez alunos demonstraram que gostam muito de matemática, ou seja, 6,41% da amostra. Isto deixa claro o quanto o ensino de matemática se torna complicado e a aprendizagem extremamente difícil.

Você costuma estudar matemática fora da escola? essa foi a décima questão proposta por nós no questionário onde demos 5 alternativas: nunca, só no período de prova, só no fim de semana, todos os dias ou só na véspera da prova.

Figura 3 – Distribuição das respostas dos alunos a questão 10.



Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Como visto na questão anterior e mostrado acima na figura 3, não houve surpresa, apenas 12 alunos relataram que estudam todos os dias, mas o que mais nos chamou a atenção foi o fato de 20 alunos disserem que nunca estudam, ou seja, 12,82% da amostra. Se considerarmos que, aqueles alunos que só estudam na véspera da prova e os que estudam somente em período de prova, e sabemos que eles não costumam ter um bom rendimento na disciplina, e isso quem diz é a nossa experiência no magistério, o percentual sobe para quase 72% da amostra, ou seja, mais uma vez esse quadro mostra a lastimável situação educacional disciplinar em relação aos estudos de matemática.

Na questão seguinte perguntamos: “Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática?”, aqueles que anteriormente responderam que nunca estudam foram direcionados a responder que ninguém os ajuda. Além dessa opção havia ainda professor particular, o pai, a mãe, irmão(ã), amigos, tio(a), namorado(a) ou outros. O resultado está exposto na tabela 3 a seguir.

Tabela 3 – Respostas escolhidas pelos alunos na questão 11 do questionário do apêndice A

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Ninguém	**108**	**69,23**
Professor particular	**4**	**2,56**
Pai	**0**	**0.00**
Mãe	**0**	**0,00**
Irmão(ã)	**10**	**6.41**
Amigo(a)	**22**	**14,10**
Tio(a)	**2**	**1,28**
Namorado(a)	**4**	**2,56**
Outro	**6**	**3,85**

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Mais uma vez, a enorme maioria, 69,23% dos alunos, disse que não possuem ajuda no momento de estudar. Esses dados nos fazem concluir que a participação familiar na formação desses alunos é pífia perto da necessidade que se espera ao menos como satisfatória.

As perguntas 12 e 13 tratam de como os alunos perceberam o trabalho do professor ao ministrar as aulas de matemática, sendo que na 12ª questão perguntamos: "Na maioria das aulas de matemática de sua escola, os assuntos são ministrados..." e apresentamos quatro opções para múltipla escolha, são elas: Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios; Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto; Criando um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo e Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos. Não foi surpresa alguma, depois de analisarmos as respostas anteriores, que mais de 97,44% dos 156 alunos responderam a primeira opção, que os professores começam pela definição seguida de exemplos e exercícios, esta é uma metodologia das mais antigas e usadas na rede educacional, talvez por esse motivo, o pouquíssimo ou quase nenhum interesse dos alunos pela matemática, pois o ensino não consegue acompanhar o dinamismo desse aluno.

Na questão seguinte trata-se de como o assunto ensinado é trabalhado para que o aluno entenda melhor o conteúdo de matemática ministrado e, para este item, oferecemos 05 alternativas: Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos; Apresentar jogos envolvendo o assunto; Mandar resolver os exercícios do livro didático; Propõe questões de fixação; e Mandar que você procure questões sobre o assunto para resolver. Mais uma vez assim como na questão anterior não aconteceu nada que já não fosse o esperado, mais de 93,5% dos alunos indicaram a primeira opção também, o professor apresenta uma lista de exercícios para serem resolvidos, assim como na metodologia comentada na questão anterior.

Na última questão desta etapa do questionário que buscou conhecer o ambiente dos alunos perguntamos mais especificamente sobre o conhecimento deles em probabilidade. Perguntamos: “Como você se sente em relação ao assunto Probabilidade?” e apresentamos 5 opções de resposta: Nunca estudei; Estudei e não lembro nada; Estudei e lembro pouco; Estudei e lembro quase tudo e estudei e lembro de tudo. As respostas estão na tabela 4 a seguir:

Tabela 4 – Respostas escolhidas pelos alunos na questão 14 do questionário do apêndice A

Alternativas	Quantidade	Porcentagem
Nunca estudei	**18**	**11,54**
Estudei e não lembro nada	**60**	**38,46**
Estudei e lembro pouco	**62**	**39,74**
Estudei e lembro quase tudo	**14**	**8.97**
Estudei e lembro tudo	**02**	**1.28**

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Temos que 89,74% dos alunos entrevistados se manifestaram como não tendo estudado ou estudaram e não lembram ou lembram pouco sobre o assunto probabilidade. Apenas dois alunos se manifestaram como que se lembra de tudo, estes mesmos disseram nas questões anteriores que gostam muito e estudam todos os dias matemática.

Desta forma, podemos montar um pequeno perfil desses alunos, de maneira geral é um aluno com no máximo 01 ano de atraso em relação a idade escolar ideal, com pais escolarizados a nível médio completo ou incompleto, que não gostam de matemática e nem de estudá-la, sem ajuda de familiares e que pouco sabem sobre probabilidade mesmo sabendo que já foi estudada.

3.2 RESPOSTAS DOS ALUNOS ÀS QUESTÕES-PROBLEMA PROPOSTAS NO QUESTIONÁRIO

As questões que seguem tratam dos conteúdos relacionados a probabilidade (questão 15) e problemas práticos relacionados a esses assuntos (questão 16). Na questão 15 foi solicitado aos alunos que julgassem o que acharam quanto ao grau de dificuldade de aprendizado dos conteúdos relacionados ao ensino de probabilidade, para isto vamos ver o quantitativo apresentado na tabela 5 a seguir.

Tabela 5 – Respostas dos alunos a questão 15 do questionário do apêndice A

Alunos	O que você achou				
	Muito Fácil	Fácil	Regular	Difícil	Muito Difícil
Espaço amostral e evento	02	12	22	28	92
Definição de probabilidade	00	18	54	38	46
Probabilidade de um evento certo	00	14	36	46	60
Probabilidade de um evento impossível	00	08	36	44	68
Probabilidade de evento complementar	00	10	30	34	82
Probabilidade da união de eventos	00	10	30	46	70
Probabilidade condicional	02	10	38	46	60
Probabilidade de eventos independentes	00	12	42	48	54

Fonte: Elaborado pelo autor baseado nos questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Podemos observar que a maioria dos alunos julgou todos os assuntos como muito difíceis com exceção da definição de probabilidade que foi julgado como sendo de grau de dificuldade regular.

Menos de 1% dos alunos, em média, julgaram algum assunto como muito fácil e isto unido com a informação anterior mostra o quanto o ensino de matemática e, especificamente, de probabilidade está muito aquém do necessário.

No item 16, que foi dividido em 13 problemas sobre os conteúdos citados de probabilidade, analisamos as respostas dos alunos na ordem de cada questão, por questão de padronização, será colocada a questão proposta, o conteúdo associado, qual a resposta esperada e, em seguida, os resultados mostrados pelos alunos.

Conforme já adiantado na introdução deste trabalho, as análise das questões foram feitas exclusivamente àquelas que fazem referência a probabilidade de alguns tipos de eventos. As demais questões serão apenas citados os indices de acerto sem maiores comentários. Para informações complementares consultar os trabalhos de Bosco Silveira Brito e de Marcos Oliveira de Oliveira.

Problema 16.1. No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento “sair um número primo”.

Nessa questão esperávamos que os alunos demonstrassem conhecer a definição de espaço amostral e a definição de evento (definição de número primo). As respostas esperadas eram, para o espaço amostral, o conjunto $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e, para o evento, o conjunto $E = \{2,3,5\}$.

Esta questão proposta, foi colocada como sendo a primeira pois entendemos que é a mais simples e direta entre todas as questões propostas mas, obteve apenas 10 acertos para o espaço amostral e 12 acertos para o evento, ou seja, 6,41% e 7,69% de acertos, respectivamente.

Problema 16.2. Numa urna existem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Retirando-se 1 bola ao acaso, qual a probabilidade de que seu número seja múltiplo de 5?

Para esta questão, desejávamos observar o conhecimento dos alunos quanto a definição de evento e definição de probabilidade, cujas respostas esperadas eram: Evento $E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ e probabilidade de ocorrência $P(E) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, ou em percentual igual a 20%.

Como não era explícito no problema a identificação separada da quantificação do evento então não consideramos esta especificidade até porque nenhum aluno fez o registro dela em separado. E para nossa satisfação 50 alunos acertaram a probabilidade, ou seja, quase 32,05% de acerto, porém apenas 3 alunos escreveram de forma simplificada a fração e nenhum na forma de porcentagem.

Problema 16.3.Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número:

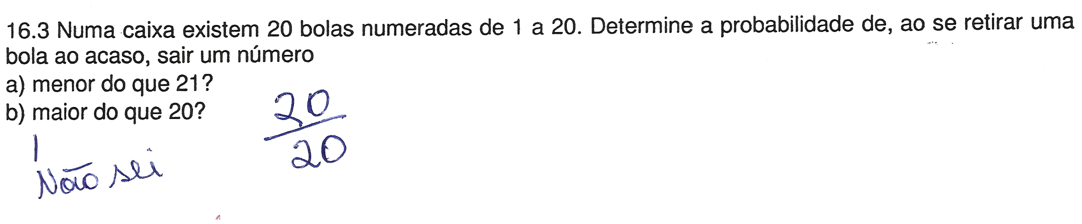
a) menor do que 21?

b) maior do que 20?

Para este problema esperávamos observar os conhecimentos dos alunos acerca de probabilidade de evento certo e probabilidade de evento impossível, cujas respostas esperadas eram 1 e 0, ou, 100% e 0%, respectivamente.

Assim como no problema 16.1 (ver questionário no APÊNDICE A) temos dois itens para avaliar, de maneira geral o acerto ou erro ocorreu em conjunto, mas houve vários casos, exemplificados nas figuras 4 e 5, o aluno acertou o item ***a*** mas errou o item ***b*** e o outro aluno errou o item ***a*** e acertou o item ***b***.

Figura 4 – Exemplo de resposta ao problema 16.3 com item a correto mas item b errado.


16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número

a) menor do que 21?

b) maior do que 20?

$\frac{20}{20}$

1

Não sei

Fonte: Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Como mostrado na figura 4, além de não responder corretamente ao item b, temos no item, a definição de probabilidade, sem o cuidado com a simplificação da fração ou, até

Figura 5 – Exemplo de resposta ao problema 16.3 com item a incorreto e item b correto.

16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número
a) menor do que 21? 20
b) maior do que 20? 0

Fonte: Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

mesmo, a divisão fácil de executar, onde o aluno poderia demonstrar conhecer melhor o conceito de probabilidade de evento certo. Da forma mostrada, ficamos sem essa certeza de o aluno conhecer tal conceito.

Já na figura 5, mostra-se que o aluno aparentemente sabe o conceito de probabilidade de evento impossível acertando o item b, mas no item a, demonstrou alguma dificuldade de compreensão.

Dos 156 alunos, tivemos 50 alunos, ou seja, 32,05% que acertaram ao item a, enquanto que 56 alunos, ou, 35,90% acertaram ao item b. Mesmo com valores superiores aos 30% esperávamos mais, pois era um problema que exigia conhecer um conceito simples e sem, necessariamente, envolver qualquer tipo de cálculo para responder esses itens, ainda nessa questão, nos chamou a atenção a resposta mostrada na figura 6, mostrando que o aluno requer cuidados especiais, ou simplesmente não respondeu de forma responsável.

Figura 6 – Exemplo de resposta incoerente com o solicitado no problema 16.3.

16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número
a) menor do que 21?
b) maior do que 20?

Fonte: Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Os eventos certo e impossível apesar de suas previsibilidades não são vistos como experimentos determinísticos, isto será retomado no material proposto ao final deste trabalho, mas sim como eventos que dentro da teoria dos conjuntos absorvida pela teoria das probabilidades nós temos para o evento impossível como o conjunto vazio, que pela teoria dos conjuntos é um subconjunto de qualquer conjunto, e por tanto faz parte do espaço amostral mesmo que indiretamente; já para o evento certo temos um subconjunto idêntico ao conjunto formado pelo espaço amostral, ou seja, um subconjunto próprio e portanto ele incorpora todas as possibilidades ao contrário do impossível que não tem possibilidade alguma de ocorrer.

De qualquer forma como isto foi tratado com os alunos? Eles realmente aprenderam? pelos resultados encontrados podemos inferir que não aprenderam de forma concisa este assunto.

Entre outras preocupações, a figura 6 mostrou ainda que no corpo discente existem alunos com necessidades especiais, não físicas mas de atenção na leitura, interpretação e compreensão, não necessariamente o autor daquela resposta. Ainda assim ele nos faz repensar a importância que os alunos podem ter dado a pesquisa.

Problema 16.4. Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de 1/5. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

Nesta questão, esperávamos que os alunos demonstrassem conhecer a probabilidade do evento complementar, cuja resposta aguardada era $\frac{4}{5}$ ou até mesmo 80%, no entanto, mesmo sendo este problema de simples solução, tivemos apenas 22 acertos, ou seja, 14,10% dos alunos acertaram esta questão.

Essa questão e esse assunto estão muito mais relacionados ao raciocínio lógico do que a qualquer formalização de conteúdo ou fórmulas meramente decorativas. Pois como podemos perceber a questão é proposta de forma simples, clara e direta, sem nenhuma distração que pudesse atrapalhar a interpretação dos alunos.

Problema 16.5. Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo? Esse problema exigia dos alunos conhecerem a definição de evento e a probabilidade da união de eventos, cuja resposta esperada era: Espaço amostral:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}, \text{ ou seja, } n(S) = 6.$$

Evento A, sair um número par:

$$A = \{2,4,6\}, \text{ ou seja, } n(A) = 3.$$

Evento B, sair um número primo:

$$B = \{2,3,5\}, \text{ ou seja, } n(B) = 3.$$

Evento sair um número par e primo:

$$A \cap B = \{2\}, \text{ ou seja, } n(A \cap B) = 1.$$

Probabilidade de sair um número par ou primo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Resposta: 5/6

Outra possibilidade de resolução é, entender diretamente que, o evento sair um número par ou primo no lançamento de um dado, significa excluir apenas a face com o número 1, assim E = {2, 3, 4, 5, 6} e o espaço amostral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, assim $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{6}$.

Como em questões bem mais simples tivemos os resultados parecidos, observamos que apenas 4 alunos acertaram essa questão, mesmo que sem a devida demonstração do cálculo, simplesmente colocaram a resposta correta, ou seja, menos de 2,56% dos alunos demonstraram saber, de alguma forma, do que se tratava a questão. Alguns alunos chegaram a esboçar calcular a probabilidade dos eventos separadamente, mesmo que, de forma incorreta, mas sem fazer o devido cálculo da intersecção ou mesmo da resposta final correta que era da união.

Problema 16.6. Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

Nessa questão, os alunos deveriam demonstrar conhecimento a respeito de definição de evento e definição de espaço amostral e ainda de probabilidade condicional, com a resposta aguardada como sendo de $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 50%, tivemos a grata surpresa quando 52 alunos, ou seja, 33,33% da amostra, responderam corretamente a questão que, efetivamente, necessitava mais de cuidado na interpretação do que qualquer cálculo.

Problema 16.7. De um baralho de 52 cartas extraem-se duas cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade se obter um ás e um valete nessa ordem?

Nesse problema, esperávamos que os alunos mostrassem seus conhecimentos acerca da definição de evento, definição de espaço amostral e de probabilidade condicional, uma solução possível seria:

Considere os eventos A e B como sendo ´´probabilidade da primeira carta retirada, ser um As” e ´´probabilidade da segunda carta retirada ser um valete”.

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad e \quad P(B/A) = \frac{4}{51}$$

Assim, a probabilidade de A e B ocorrerem, será:

$$P(A \cap B) = P(A)xP(B/A) = \frac{1}{13}x\frac{4}{51} = \frac{4}{663}$$

Portanto, a probabilidade de se retirar duas cartas, sucessivamente e sem reposição, e se obter primeiramente um ás e depois um valete é de $\frac{4}{663}$.

Este problema, em função do cálculo envolvido, mesmo que uma multiplicação simples de frações resolvesse, tinha como resposta um valor elevado para ser respondido sem calculadora, então seriam aceitas respostas indicadas pelo cálculo mesmo que este não fosse concluído, mas mesmo assim apenas um (1,28%) aluno acertou a questão de forma mais intuitiva sem usar o conhecimento de probabilidade condicional.

Problema 16.8. Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma dos pontos nos dois dados foi 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles.

Nessa questão, o esperado é que o aluno demonstre conhecimento sobre a definição de evento, definição de espaço amostral e definição de probabilidade condicional, e uma possível solução seria o aluno construir o espaço amostral e verificar desse espaço, quantos pares a soma seria 8 e desses pares, em quantos aparecem a face 5.

Uma possível solução, seria:

Considere que os resultados do lançamento de um par de dados sejam representados por pares ordenados (D1, D2), na qual, D1 representa o resultado obtido do primeiro e D2 representa o resultado obtido no segundo dado, desse modo o espaço amostral seria da seguinte maneira:

(1, 1)	**(1, 2)**	**(1, 3)**	**(1, 4)**	**(1, 5)**	**(1, 6)**
(2, 1)	**(2, 2)**	**(2, 3)**	**(2, 4)**	**(2, 5)**	**(2, 6)**
(3, 1)	**(3, 2)**	**(3, 3)**	**(3, 4)**	**(3, 5)**	**(3, 6)**
(4, 1)	**(4, 2)**	**(4, 3)**	**(4, 4)**	**(4, 5)**	**(4, 6)**
(5, 1)	**(5, 2)**	**(5, 3)**	**(5, 4)**	**(5, 5)**	**(5, 6)**
(6, 1)	**(6, 2)**	**(6, 3)**	**(6, 4)**	**(6, 5)**	**(6, 6)**

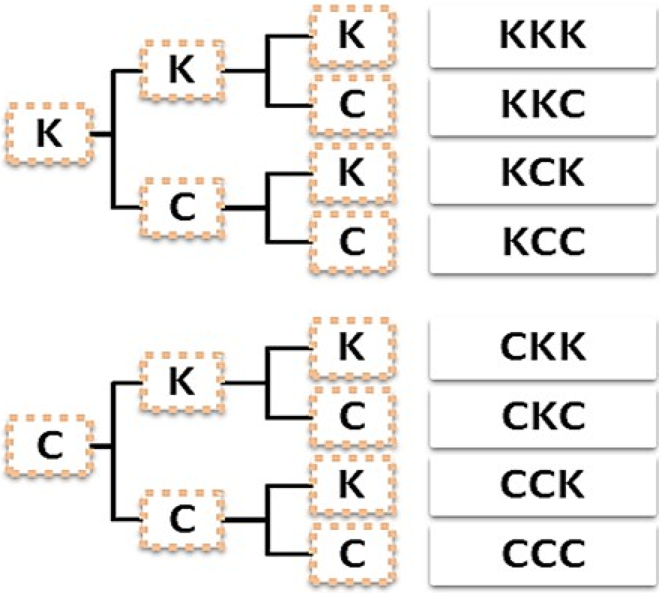
Do espaço amostral acima, os pares ordenados destacados, indicam os pares cujas somas são oito, assim, podemos observar que existem cinco pares satisfazendo essa condição e que, desses pares, em apenas 2 deles, aparecem o número 5, portanto, a probabilidade de se obter uma face 5, sabendo-se que a soma das faces é 8 é de $\frac{2}{5}$ ou 40%.

Infelizmente, desta vez, nenhum aluno obteve êxito neste problema, a grande maioria das respostas indicava que o aluno não sabia como desenvolver o problema.

Problema 16.9. Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente.

Aqui queríamos ver se os alunos eram capazes de determinar o espaço amostral e não de quantificá-lo. Uma possibilidade de resposta seria construir a árvore de possibilidades.

Considerando que K representa o resultado cara e que C o resultado coroa, temos:



Nesse caso, temos 8 possibilidades de ocorrência para o espaço amostral: KKK, KKC, KCK, KCC, CKK, CKC, CCK e CCC.

Neste problema encontramos 8 questionários que apresentaram a resposta correta, ou seja, 5,13% dos alunos acertaram esta questão que tem o mesmo conteúdo associado da 1ª questão, mas lá o índice de acerto foi melhor, mostrando que conhecer e entender o evento é fundamental.

Problema 16.10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podemos formar números de 2 dígitos com repetição. Qual a probabilidade de, sorteando um desses números, que ele seja par?

Neste problema, aguardávamos que os alunos mostrassem conhecer a definição de evento, a definição de espaço amostral e a definição de probabilidade, o cálculo poderia ser feito de duas maneiras distintas, a primeira maneira é aquela que lembra o fato de que é o último algarismo que determina se um número é par e com isso temos, de forma direta, a probabilidade esperada de $\frac{3}{7}$, ou seja, três números pares de um total de sete possíveis para a última casa ou, da segunda maneira, utilizando o princípio fundamental da contagem ou outra técnica de análise combinatória, que não é nosso foco neste trabalho, mas o aluno poderia calcular quantos números pares de dois algarismos poderiam ser formados, bastando para isso executar o produto 7x3 = 21 e o total de números possíveis que é 7x7 = 49, calculando então a probabilidade de $\frac{21}{49}$ que simplificando, resulta em $\frac{3}{7}$, da mesma forma.

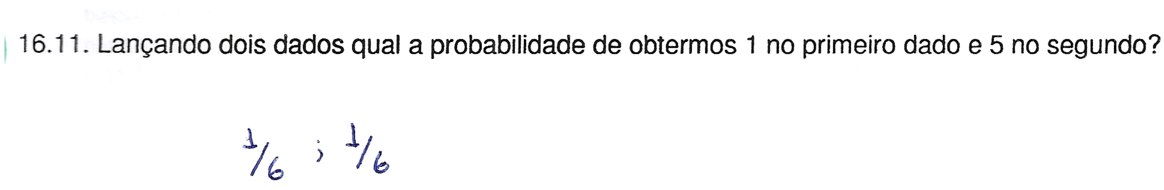
Para este problema tivemos 38 alunos, ou seja, pouco mais de 24,36%, que acertaram, ainda estamos aquém do esperado, pois a questão não necessitava de cálculo mais elaborado ou refinado, mesmo assim teve aluno que resolveu, ou aparentemente o fez em algum rascunho ou borrão, e colocou a resposta $\frac{24}{56}$ de tal forma que representa uma fração equivalente aquela da resposta correta e como tal consideramos como correta.

Problema 16.11. Lançando dois dados, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

Aguardávamos que os alunos soubessem a definição de evento, a definição de espaço amostral e probabilidade de eventos independentes, cuja resposta seria $\frac{1}{36}$.

Desta vez, infelizmente, apenas 4 alunos alcançaram a resposta correta, pouco mais de 2,56%. Alguns fizeram as probabilidades em separado mas, não souberam ou não perceberam o conectivo e no problema indicando a probabilidade de eventos independentes, conforme a figura 7 a seguir.

Figura 7 – Exemplo de resposta dada ao problema 16.11


16.11. Lançando dois dados qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

1/6 ; 1/6

Fonte: Questionários (APÊNDICE A) respondidos pelos alunos

Alguns alunos até tentaram usar o princípio aditivo ao invés do multiplicativo, estes princípios serão tratados também no material proposto.

Problema 16.12. Um árbitro de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é amarelo de um lado e vermelho do outro. Num determinado lance, o árbitro retira do bolso, ao acaso, um cartão e mostra ao jogador. Qual é a probabilidade de a face que o árbitro vê ser vermelha e de que a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela?

Neste problema esperávamos que os alunos demonstrassem conhecer a definição de evento, a definição de espaço amostral e a probabilidade condicional, cuja resposta aguardada era de $\frac{1}{6}$ que poderia ser determinada de várias formas e entre elas a árvore de possibilidades com indicação das probabilidades. Nesta questão encontramos 2 alunos que entenderam e resolveram corretamente a questão, pouco mais de 1,28%. Mas o pior é que os demais nem esboçaram qualquer tipo de rascunho ou tentativa próxima da resposta esperada e muitos simplesmente escreveram “não sei” ou “não entendi” ou algo similar. Essas respostas também apareceram no problema seguinte.

Problema 16.13. Num único lance de um par de dados honestos, qual é a probabilidade de saírem as somas “múltipla de 4” ou “primo”? Nessa questão, esperávamos que os alunos soubessem sobre definição de evento, definição de espaço amostral e probabilidade da união de eventos, com resposta de $\frac{2}{3}$, pois, as somas que correspondem a números múltiplos de quatro temos 4, 8 e 12 e somas que correspondem a números primos, 2, 3, 5, 7 e 11, esses pares estão destacados na figura abaixo:

(1, 1)	**(1, 2)**	**(1, 3)**	**(1, 4)**	**(1, 5)**	**(1, 6)**
(2, 1)	**(2, 2)**	**(2, 3)**	**(2, 4)**	**(2, 5)**	**(2, 6)**
(3, 1)	**(3, 2)**	**(3, 3)**	**(3, 4)**	**(3, 5)**	**(3, 6)**
(4, 1)	**(4, 2)**	**(4, 3)**	**(4, 4)**	**(4, 5)**	**(4, 6)**
(5, 1)	**(5, 2)**	**(5, 3)**	**(5, 4)**	**(5, 5)**	**(5, 6)**
(6, 1)	**(6, 2)**	**(6, 3)**	**(6, 4)**	**(6, 5)**	**(6, 6)**

Nesse caso, é possível perceber que dos 36 pares, 24 deles atende a, pelo menos, uma das condições, resultando assim em $\frac{24}{36}$, que simplificando, obtemos $\frac{2}{3}$.

Esse cálculo também poderia ser feito em separado, calculando a probabilidade de se obter soma múltipla de 4 que totalizam 9 pares e portanto $\frac{9}{36}$ e, depois, calculando a probabilidade de se obter soma que represente número primo, totalizando 15 pares e assim, chega-se a probabilidade de $\frac{15}{36}$. Como as duas situações, geram conjuntos disjuntos, então a probabilidade de ocorrência de um evento ou de outro é dado pela soma das probabilidades, chegando-se assim em $\frac{9}{36} + \frac{15}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

Nesse exercício, apenas 2 alunos acertaram a questão, ou seja, pouco mais de 1% da amostra.

3.3 CONSIDERAÇÕES

De maneira geral, inclusive com os resultados das outras questões, chegamos a um índice inferior a 15% de acertos, em média, para as questões propostas na forma de problemas, o que demonstra, claramente, que os problemas de aprendizagem, em relação ao assunto de probabilidade, são enormes e que novas técnicas e novas maneiras de se trabalhar o conteúdo, com esses educandos, devem ser experimentados, com o intuito de melhorar o entendimento desses conceitos, que são tão importantes para o dia a dia dos cidadãos.

Para buscar mais informações sobre os possíveis problemas de apredizagem foi feita também uma análise no livro didático utilizado nas escolas pesquisadas, conforme pode ser visto a seguir.

4 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

O ensino da probabilidade pode se constituir em um instrumento social, na medida em que pode permitir ao estudante uma melhor compreensão das estatísticas oficiais, tornando-o capacitado a exercer mais conscientemente sua cidadania.

Em qualquer nível de aprendizagem, promove a oportunidade de discussão no ramo da matemática de algumas das características mais pertinentes do mundo em que vivemos e, por sua vez, são essas características que alimentam o desenvolvimento do tema. Assim, apresentamos considerações sobre o livro didático que aborda o conteúdo de probabilidade, em nível de Ensino Médio, e que foi aprovado no PNLD 2012 (Plano Nacional do Livro Didático) que se estendeu até o ano de 2014, ano no qual alguns alunos foram instigados a responder um questionário proposto neste trabalho, conforme foi visto anteriormente.

No PNLD 2012 foram aprovados e indicados pelo governo federal através do MEC (Ministério da Educação) sete coleções, das quais analisamos apenas duas obras, que verificamos que são utilizadas nas escolas públicas do estado do Pará, em especial, na capital Belém.

A maioria dos livros do Ensino Médio que abordam o conteúdo de matemática, focam mais as questões voltadas para os jogos de azar, no entanto só alguns fazem um elo entre esses jogos e a teoria da probabilidade; poucos falam do valor histórico deste estudo, uma vez que esta teoria surgiu a partir destes jogos. Estes trabalham muito com exercícios que praticamente só exigem que o aluno decore uma fórmula e aplique, ou seja, exercícios meramente mecânicos. Nas coleções analisadas, o conteúdo é mostrado no volume 2, correspondente, aqui no estado do Pará, a grade curricular do 2º ano do ensino médio.

4.1 ANÁLISE DO LIVRO MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES

O livro analisado foi MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES do autor Luiz Roberto DANTE, de 2012, vol.2, da editora Ática, o conteúdo aparece no capítulo 14, último do volume, com 35 páginas.

A figura 8 a seguir mostra a contra capa do livro que traz um resumo do curriculum vitae do autor.

Figura 8 – Imagem do livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES, com pequeno currículo do autor.

LUIZ ROBERTO DANTE

- Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP
- Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC – São Paulo
- Mestre em Matemática pela USP
- Pesquisador em ensino e aprendizagem da Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP
- Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio – São Paulo
- Autor de vários livros, entre os quais: *Didática da resolução de problemas de Matemática; Didática da Matemática na pré-escola*; *Coleção Aprendendo Sempre* (1º ao 5º ano); *Tudo é Matemática* (6º ao 9º ano); *Matemática Contexto & Aplicações* (Volume único), por esta editora.

Fonte: Livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES de Luiz Roberto DANTE

De maneira geral, observa-se uma boa conexão entre os diversos campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento. Também verifica-se a preocupação em articular os conhecimentos novos e os já abordados.

Mas também há exagero em procedimentos e no uso de terminologias, o que exige do docente um cuidadoso trabalho e do discente bastante atenção e experiência com outros assuntos tanto da matemática como de outras áreas, devido a enorme interdisciplinaridade trazida pelo autor.

Grande parte das atividades e situações-problema propostas no livro do aluno são, imediatamente, seguidas de uma abordagem técnica ou teórica. Essa opção pode tornar o desenvolvimento dos conteúdos desinteressante ou de difícil compreensão.

Este é o livro mais adotado nas escolas onde os alunos foram entrevistados. Voltando-se especificamente a abordagem do tema o autor inicia o capitulo citando exemplos de expressões que lembram ou dão ideia de chance ou probabilidade de ocorrência de algo, com muitas imagens de dados que indicam vários jogos de azar. Faz alguns comentários de cunho histórico.

Um exemplo de como o autor tenta contextualizar o conteúdo para o leitor está na forma como ele introduz o assunto, como se vê na figura 9.

Figura 9 – Imagem do livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES, com a introdução ao assunto.

CAPÍTULO 14

PROBABILIDADE

É muito comum, no tratamento da informação, aparecerem frases que indiquem a chance ou a probabilidade de algo ocorrer, como:

- Quem possui pelo menos três amigos no trabalho tem *46% mais chance* de estar extremamente satisfeito com o seu emprego.
- A *probabilidade* de uma mulher ter um filho com síndrome de Down *aumenta* conforme a idade. (http://guiadobebe.uol.com.br/planej/um_bebe_aos35_anos_de_idade.htm. Acesso em 17/8/2009.)
- A *probabilidade* de uma pessoa ultrapassar 115 anos de idade é de *1 em 2 bilhões*. (http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993, ECT1004237-1719,00.html. Acesso em 17/8/2009.)
- A *possibilidade* de sobreviver a uma queda livre de um avião a 5 mil metros de altura é *a mesma* que a de cair do quinquagésimo andar de um edifício a cerca de 150 metros de altura e sobreviver. (www.sabiask.com/sabiasque/ciencia/probabilidades-sobreviver-caida.html. Acesso em 8/5/2007.)

A Matemática aplicada, mesmo tendo alcançado um nível de aprofundamento teórico inimaginável, também abrange assuntos como os mencionados acima, conferindo à sua imagem uma visão mais prática e por isso mais acessível ao pensamento comum. O estudo das probabilidades, cujas ferramentas dão suporte a uma extensa área do conhecimento, teve sua origem na necessidade de quantificar os riscos dos seguros e de avaliar as chances de ganhar em jogos de azar. O surgimento dos seguros se deu associado à perda de carga dos navios há mais de 5 mil anos. A partir de estimativas empíricas de probabilidades de acidentes, estipulavam-se as taxas e os prêmios correspondentes. Os primeiros estudos matemáticos sobre seguros aparecem no início do século XVI, ligados a seguros de vida, popularizados pelo crescimento dos centros urbanos, embora ainda apoiando-se nas milenares técnicas empíricas. Iniciados por Gerônimo Cardano (1501-1576) em 1570, não ganharam repercussão; em 1693, Edmund Halley (1656-1742) propôs um cálculo do valor da anuidade do seguro em termos da expectativa de vida e da probabilidade de sobrevida por um ou mais anos e,

Coleção de dados antigos da Ásia. Os jogos de dados são um dos mais praticados ao longo da História. Hoje em dia, são comumente utilizados em jogos de tabuleiro tradicionais e jogos de RPG. Têm a função de gerar um resultado aleatório (ao acaso).

Fonte: Livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES de Luiz Roberto DANTE

Em seguida, e no decorrer dos assuntos, traz em sequência definição, exemplos e questões resolvidas, para depois trazer exercícios propostos conforme mostra a figura 10.

Podemos ver que o autor não menciona experimento determinístico e não o diferencia do experimento aleatório.

Figura 10 – Imagem do livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES, mostrando a forma de iniciar os tópicos em probabilidade.

1. Introdução*

Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Não sabemos se sairá cara ou coroa. Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de *fenômenos aleatórios* (ou *casuais*).

Por exemplo, são aleatórios os fenômenos:

- lançamento de um dado "não viciado";
- número de peças defeituosas fabricadas por uma máquina;
- resultado de um jogo de roleta;
- número de pessoas que ganharão na loteria;
- número de chamadas telefônicas que serão efetuadas numa cidade no dia das mães.

Para refletir

Qual é o significado de expressões como "moeda perfeita" ou dado "não viciado"?

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório é que buscamos os resultados prováveis, as chances, as *probabilidades* de determinado resultado ocorrer. A *teoria das probabilidades* é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

2. Espaço amostral e evento

Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado *espaço amostral* (Ω). Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de *evento*. Neste capítulo tudo se refere a conjuntos finitos.

Fonte: Livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES de Luiz Roberto DANTE

Figura 11 – Imagem do livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES, mostrando a forma de trabalhar alguns conteúdos.

3. Eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos

No experimento aleatório "lançar um dado e registrar o resultado", temos:

- espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- evento **A**: "ocorrência de um número menor do que 7" $\rightarrow A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  Portanto, $A = \Omega$.
- evento **B**: "ocorrência de número maior do que 6" $\rightarrow$ no dado não existe número maior do que 6
  Portanto, $B = \varnothing$.

Dizemos que:

> Quando um evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado **evento certo**.
> Quando um evento é vazio, ele é chamado **evento impossível**.

No exemplo acima, **A** é um evento certo e **B** é um evento impossível.

União de eventos, intersecção de eventos e complementar de um evento

Consideremos, no exemplo do lançamento de um dado, os eventos:

- **C**: ocorrência de número par $\rightarrow C = \{2, 4, 6\}$
- **D**: ocorrência de múltiplo de 3 $\rightarrow D = \{3, 6\}$
- **E**: ocorrência de número par **ou** número múltiplo de 3 $\rightarrow E = C \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$ (união de eventos)
- **F**: ocorrência de número par **e** múltiplo de 3 $\rightarrow F = C \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$ (intersecção de eventos)
- **H**: ocorrência de número ímpar $\rightarrow H = \{1, 3, 5\}$

Indicamos assim: $H = \overline{C} = \complement_{\Omega}^{C}$ (complementar de **C** em relação a Ω)

C e **H** são chamados *eventos complementares*. Observe que $C \cap H = \varnothing$ e $C \cup H = \Omega$.

Quando a intersecção de dois eventos é o conjunto vazio, eles são chamados *eventos mutuamente exclusivos*.

Fonte: Livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES de Luiz Roberto DANTE

Na figura 11, percebe-se o rebuscamento no linguajar distanciando o aluno da compreensão mais simples do conteúdo.

Ainda na figura 11 vemos que os tipos de eventos são mostrados de forma simples e direta, com exemplos abstrados e sem contexto. Podemos ter aqui um possível motivo para tantos erros nas questões propostas no questionário que vimos anteriormente.

No final do capitulo o autor trata de várias aplicações da probabilidade no cotidiano, indo da genética até jogos de azar como mostra a figura 12.

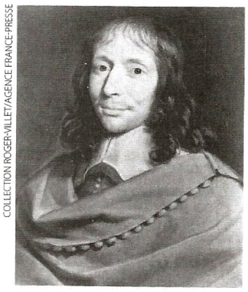
Figura 12 – Imagem do livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES, mostrando um exemplo de interdisciplinaridade no final do capítulo.

>Leitura

Um pouco mais sobre probabilidades

Na abertura deste capítulo vimos que a teoria das probabilidades, como conhecemos hoje, teve seu início nos jogos de azar. Gerônimo Cardano (1501-1576) e Galileu Galilei (1564-1642) estão entre os primeiros matemáticos a analisar, matematicamente, o jogo de dados.

Depois disso, Blaise Pascal (1623-1662), consultado pelo amigo e jogador fanático Chevalier de Méré sobre questões do jogo de dados, manteve correspondência com Pierre de Fermat (1601-1665). Dessa correspondência e de observações de Pascal realizadas em várias situações de jogos de azar é que evoluiu a teoria das probabilidades.



Outros matemáticos que se dedicaram, direta ou indiretamente, ao estudo das probabilidades foram: o holandês Christian Huygens (1629-1695), ao qual é atribuído o primeiro livro sobre probabilidades; Abraham de Moivre (1667-1754), francês que viveu na Inglaterra na época de Newton e Halley e escreveu, em 1718, *Doutrina das probabilidades*; e Jacob Bernoulli (1654-1705).

Fonte: Livro MATEMÁTICA, CONTEXTO & APLICAÇÕES de Luiz Roberto DANTE

Dentre os exercícios propostos estão questões dos mais diferentes vestibulares e concursos do país e também questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e assim sendo estão entre elas questões de nível elevadíssimo e totalmente fora da realidade dos nossos alunos na questão da contextualização, pois nem todos da região norte possuem a mesma experiência ou cotidiano daqueles das regiões sul e sudeste, por exemplo.

Temos nessa coleção uma abordagem técnica mas com o elevado grau de dificuldade aos nossos alunos. Tem uma amplitude de abordagem interdisciplinar mas de tal forma que, devido a distância da realidade dos nossos alunos, torna-se cansativa, enfadonha e desinteressante se o professor, gestor de sua aula, não souber como melhor adaptar o uso do livro a sua metodologia.

4.2 CONSIDERAÇÕES

Da análise feita, a obra de autoria de Luiz Roberto DANTE, é completa, instiga o aluno a procurar se desenvolver matematicamente, saindo de sua simples realidade para avançar.

Não há sugestões do tipo faça você mesmo ou atividades experimentais para casa e nem atividades em grupo. Não há nada que faça referência a uso em sala de materiais concretos. Uns poucos exemplos citados poderiam ser reproduzidos em sala com alguma dificuldade.

Mesmo a obra de Luiz Roberto Dante sendo bem detalhada e tendo sido apresentada de forma quase completa, ficou faltando as definições de experimentos determinísticos e aleatórios. Mas ainda assim cita experimento aleatório em vários momentos deixando a cargo do aluno a compreensão intuitiva do conceito. Esta obra possui vários exercícios de fixação de alto grau de complexidade para o alunado, não por culpa do livro mas sim das dificuldades que os alunos carregam consigo desde as séries iniciais. As definições dos conteúdos são simples e diretas com poucos exemplos e estes sempre voltados aos jogos de azar. O único apelo histórico ocorreu no início do capítulo.

Enfim, o livro tem poucos problemas mas precisa de complementos que podem e devem ser feitos pelos professores.

5 PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Apresentação

Este material é fruto de um trabalho em conjunto com os professores BOSCO SILVEIRA BRITO e MARCOS OLIVEIRA DE OLIVEIRA, os quais produziram em particular partes complementares a esta proposta conforme já mencionado na introdução deste trabalho.

A primeira parte, de responsabilidade do professor Bosco, já definiu e conceituou Experimentos Determinísticos, Experimentos Aleatórios, Espaço Amostral, Evento e definiiu o cálculo de probabilidade.

O que explicita-se a seguir é a continuação a esta parte, conforme pode ser visto tem-se em continuação as definições dos tipos de eventos e suas probabilidades.

Com este instrumento pretende-se ajudar o trabalho do professor na sala de aula, através de sugestões, direcionamentos e enfoques nos objetivos traçados no momento da preparação do seu material a ser utilizado. Além disso, queremos também compartilhar um pouco da nossa experiência com o ensino de Probabilidade, para que, somando a sua vivência, possamos tentar atingir nosso principal objetivo: buscar a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, não somente de probabilidade, mas na matemática como um todo.

Acreditamos que no cotidiano da sala de aula podemos, a partir de cada problema proposto, buscar o máximo de estratégias e soluções possíveis apresentadas pelos próprios estudantes, escrevê-las, inclusive, no quadro e através delas mostrar para a turma onde estão os erros e acertos de cada solução, para que eles não venham a cometer novamente os mesmos erros e, na verdade, possam aprender com eles. Isto é o que esperamos.

O propósito desta proposta é conceituar e distinguir os eventos certos, impossíveis, complementares, independentes, dependentes e mutuamente exclusivos (ou disjuntos) e eventos não exclusivos (ou conjuntos). Usaremos materiais manipuláveis (dados, moedas e caixas com fichas numeradas e bolas coloridas) para executar os experimentos.

Esta proposta esta subdividida em 5 aulas, todas estruturadas de acordo com os planejamentos a seguir que contém todo o material necessário, a metodologia e uma proposta de formalização dos conteúdos além de vários exercícios resolvidos, atividades propostas e questões do ENEM.

Para ambientar o leitor e enriquecer o assunto começamos com um texto sobre o baralho e o dado, dois dos principais elementos utilizados como exemplos no ensino de probabilidade.

5.1 O USO DO BARALHO E DO DADO NO ENSINO DA PROBABILIDADE

A probabilidade é uma área da Matemática que estuda as chances de algo ou algum fenômeno acontecer ou se repetir. Os estudos sobre probabilidade iniciaram-se por meio dos jogos de cartas, dados e roleta, atualmente chamados de jogos de azar.

Para o melhor entendimento sobre probabilidades por parte dos alunos, devemos relacionar as aulas com aplicações cotidianas. Podemos demonstrar ao estudante as chances reais de uma pessoa ganhar na loteria: quina, sena, loto-fácil. O uso de materiais concretos deixa a aula mais dinâmica e envolvente. Um material importante no estudo de espaço amostral e eventos é o dado. O dado é um sólido geométrico de seis faces congruentes, denominado "cubo", cujas faces são enumeradas de 1 a 6.

Dizemos que o espaço amostral do dado é: 1, 2, 3, 4, 5, 6. As chances de se obter um número escolhido anteriormente é de 1 em 6, o que corresponde a uma probabilidade de 16,6%. Podemos pedir para o aluno calcular a probabilidade de sair um número par ou um número ímpar, vejamos

Número par: 2,4 e 6.

Número ímpar: 1, 3, 5.

Nas duas situações temos a chance igual de 3 em 6, isto é, 50% de chance de sair um número par e 50% de chance de sair um número ímpar. Várias outras situações podem ser propostas com uso de dados, como o lançamento de dois dados ou mais.

O baralho também é um importante material concreto que pode ser usado em sala de aula para a melhor apreensão e compreensão de espaço amostral e eventos na probabilidade.

O baralho é constituído por 52 cartas (espaço amostral), sendo 26 vermelhas e 26 pretas. Possui 4 naipes: copas, ouro, paus e espadas. Observe a tabela com as informações detalhadas de um baralho:

Figura 13 – Esquema das cartas de um baralho convencional

Fonte:www.educador.brasilescola.com

Podemos ter vários eventos no baralho, ao retirarmos ao acaso uma carta do baralho temos 50% de chance da carta ser preta ou vermelha, pois são 26 cartas pretas ou 26 cartas vermelhas entre as 52 cartas.

Outro tipo de evento que ocorre no baralho é a chance de tirarmos ao acaso uma carta e obtermos um determinado naipe, a probabilidade verificada é de 13 em 52, isto é 25% de chance.

Se optarmos por retirar, por exemplo, o três de ouro, as chances se tornam bem pequenas, pois teremos 1 em 52, que resulta em 1,9% de chance de o evento ocorrer.

O professor deve buscar sempre a utilização de materiais concretos, essa atitude faz a diferença na formação continuada do educando.

5.2 PLANO DE ENSINO 1: EVENTOS SIMPLES, CERTO E IMPOSSÍVEL.

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 2 h/a

TEMA: Tipos de eventos.

Conteúdo Programático:

- Evento impossível;
- Evento certo;
- Eventos mutuamente exclusivos; e
- Evento complementar.

Objetivo Geral:

- Conceituar e diferenciar os tipos de eventos.

Objetivos Específicos:

- Exemplificar um evento impossível;
- Exemplificar um evento certo;
- Exemplificar um evento simples; e
- Diferenciar os tipos de eventos.

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;
- 1 dado numerado de 1 a 6;
- 1 caixa opaca (qualquer);
- 1 moeda;
- 10 bolas de isopor brancas;
- 5 bolas de isopor azuis;
- 5 bolas de isopor vermelhas; e
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

- **Diâmica 1:**
  - Coloque todas as bolas de isopor na caixa.
  - Passe a caixa de aluno em aluno, pedindo para que cada um, sem olhar, tire uma bola e veja a sua cor, e reponha a bola na caixa passando para o próximo aluno fazer o mesmo, até que todos tenham manipulado e de posse da caixa aos olhos dos alunos, solicite: "Escrevam o conjunto formado pelos possíveis resultados da cor de uma bola retirada da caixa?"

    Espera-se que os alunos escrevam o conjunto A = branca, azul, vermelha

- **Dinâmica 2:**
  - Lance simultaneamente um dado e uma moeda comuns três vezes e observe as faces voltadas para cima e solicite aos alunos para descrever.
    - O conjunto A formado por todos os resultados possíveis escritos na forma de par ordenado (x, y) onde x representa a face voltada para cima do dado e y representa a face da moeda voltada para cima.

      Espera-se que os alunos escrevam o conjunto $A = \{(1; cara); (2; cara); (3; cara); (4; cara); (5; cara); (6; cara); (1; coroa); (2; coroa); (3; coroa); (4; coroa); (5; coroa); (6; coroa)\}$
    - Os subconjuntos "E"do conjunto "A"que satisfaçam as condições a seguir:

      a) Ocorrência de número par no dado.

      Espera-se que os alunos escrevam:

      E = (2; cara); (2; coroa); (4; cara); (4; coroa); (6; cara); (6; coroa)

      b) Ocorrência de um número primo par no dado e cara na moeda.

      Espera-se que os alunos escrevam: E = (2; cara)

      c) Ocorrência de um número maior que 7 no dado e coroa na moeda.

      Espera-se que os alunos escrevam:

      $S = \emptyset$

      d) Ocorrência de um número inteiro no dado e qualquer face na moeda.

      Espera-se que os alunos escrevam:

      E = (1; cara); (2; cara); (3; cara); (4; cara); (5; cara);
      (6; cara); (1; coroa); (2; coroa); (3; coroa); (4; coroa);
      (5; coroa); (6; coroa)

FORMALIZANDO

Para um espaço amostral A, representado pelo conjunto de possíveis resultados de um determinado experimento e um evento E, subconjunto de A, temos:

- Se $E = \emptyset$; E é chamado de evento impossível.
- Se E = A; E é chamado de evento certo.
- Se E é um conjunto unitário será denominado de evento elementar ou evento simples.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: $http : www.professores.uff.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf$).

5.3 PLANO DE ENSINO 2: EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS E EVENTOS COMPLEMENTARES.

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano − Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 2 h/a

TEMA: Tipos de Eventos.

Conteúdo Programático:

- Eventos mutuamente exclusivos; e
- Evento complementar

Objetivo Geral:

- Conceituar e diferenciar os tipos de eventos

Objetivos Específicos:

- Exemplificar e conceituar eventos mutuamente exclusivos;
- Exemplificar e conceituar eventos complementares; e
- Diferenciar os tipos de eventos.

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;
- 1 caixa opaca (que caibam 10 fichas);
- 10 fichas numeradas de 1 a 10; e
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

- **Dinâmica 3:**
  - Mostre aos alunos as fichas e coloque-as na caixa, em seguida retire aleatoriamente uma ficha e mostre-a aos alunos, devolva a ficha para dentro da caixa e solicite aos alunos para descrever:
    - O conjunto A formado por todos os resultados possíveis para o número da ficha a ser retirado.

      Espera-se que os alunos escrevam o conjunto $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$
    - Os subconjuntos, do conjunto "A", que satisfaçam as condições a seguir:

      a) B : Ocorrência de número divisor de quatro.

      Espera-se que os alunos escrevam:

      $B = \{1;2;4\}$

      b) C : Ocorrência de um número múltiplo de 6.

      Espera-se que os alunos escrevam:

      $C = 6$

      c) D : tal que $D = B \cap C$, ou seja, obter um número que seja divisor de 4 e múltiplo de 6, simultaneamente.

      Espera-se que os alunos escrevam:

      $D = \emptyset$

Nesse momento o professor deve discutir com os alunos a idéia de eventos mutuamente exclusivos observando que os eventos B e C, do item c acima, não possuem elementos comuns e que, por esse motivo, tais eventos são denominados Mutuamente Exclusivos.

d) E : ocorrência de número par.

$E = \{2;4;6;8;10\}$

e) F : ocorrência de número ímpar.

$F = \{1;3;5;7;9\}$

f) O conjunto $E \cup F$.

$E \cup F = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

g) O conjunto $E \cap F$.

$E \cap F = \emptyset$

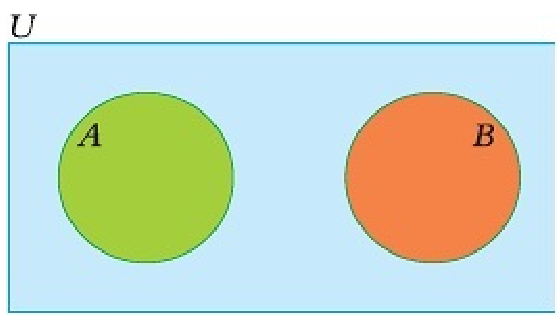
Neste momento o professor deve ressaltar que os conjuntos E e F não possuem elementos comuns: a intersecção é um conjunto vazio. Mas, a união de E e F resultou no espaço amostral. Esses eventos são chamados de Eventos Complementares.

FORMALIZANDO

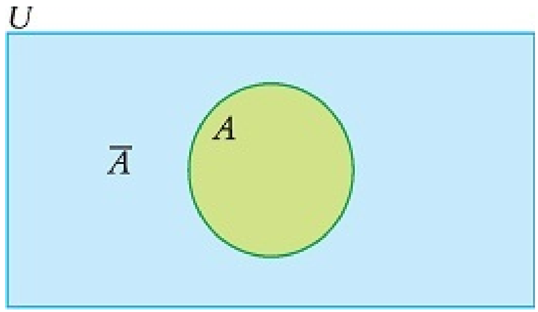
Dois eventos A e B de um espaço amostral são chamados Eventos mutuamente exclusivos (excludentes) se não puderem ocorrer juntos (ao mesmo tempo).

Se A e B são mutuamente exclusivos quando a intersecção é o conjunto vazio, ou seja:

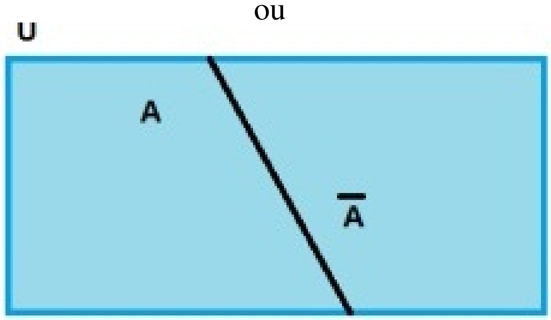
$$A \cap B = \emptyset$$



Chamamos de evento complementar de A, relativamente ao espaço amostral U, ao evento E que unido ao A forma o espaço amostral U e a intersecção entre A e E é vazio, e representa-se o complementar de um evento A por $\overline{A}$ ou por A^c.



ou



Um bom exemplo de eventos mutuamente exclusivos corresponde a verificar as possibilidades de resultado de um time em uma partida de vôlei, como não há empate, só existem duas possibilidades, ou o time ganha ou o time perde, não havendo outro resultado possível, ou seja, vitória e derrota são dois eventos que esgotam as possibilidades e, se o mesmo ganha, é porque não perdeu e se perdeu, é porque não ganhou, ou seja, não podem ocorrer simultaneamente, portanto, em uma partida de vôlei, vitória e derrota são eventos complementares.

Em uma partida de futebol, derrota e vitória são eventos complementares? Por que?

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Lançam-se dois dados. Enumerar o espaço amostral e depois os seguintes eventos:
   A : saída de faces iguais
   B : saída de faces cuja soma seja igual a 2
   C : saída de faces cuja soma seja menor que 2
   D : saída de faces cuja soma seja menor que 15
   E : saída de faces onde uma face é o dobro da outra
   Solução:
   O espaço amostral desses eventos (todos os resultados possíveis de serem obtidos no lançamento dos dois dados) está descrito na tabela a seguir:

Ω	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Espaço Amostral (Ω) no lançamento de dois dados

Eventos:

$\mathbf{A} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$\mathbf{B} = \{(1,1)\}$ (evento elementar)

$\mathbf{C} = \{\ \}$ (evento impossível)

$\mathbf{D} = \Omega$ (evento certo)

$\mathbf{E} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(2,1),(4,2),(6,3)\}$

2. Em um cesto há 6 bolas de vôlei, sendo 3 brancas e 3 vermelhas. Desse cesto são retiradas sucessivamente 3 bolas. Calcular o número de elementos dos seguintes eventos:

   A : As três bolas são da mesma cor.

   B : Duas bolas são brancas

   C : As três bolas são vermelhas

   D : O número de bolas brancas é igual ao número de bolas vermelhas

   E : O número de bolas brancas é maior do que de bolas vermelhas

   Solução:

   Espaço amostral do experimento:

   $\{BBB, BBV, BVB, VBB, BVV, VBV, VVB, VVV\}; n(\Omega) = 8$

   $A = \{VVV, BBB\}; n(A) = 2$

   $B = \{BBV, BVB, VBB\}; n(B) = 3$

   $C = \{VVV\}; n(C) = 1$

   $D = \emptyset; n(D) = 0$

   $E = \{BBB, BBV, BVB, VBB\}; n(E) = 4$

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: $http : www.professores.uff.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob - 0.pdf$).

5.4 PLANO DE ENSINO 3: PROBABILIDADE DO EVENTO CERTO, IMPOSSÍVEL E COMPLEMENTAR.

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 2 h/a

TEMA: Probabilidade de eventos impossíveis e certos.

Conteúdo Programático:

- Probabilidade do evento impossível;
- Probabilidade do evento certo; e
- Probabilidade de eventos complementares.

Objetivo Geral:

- Conceituar e diferenciar as probabilidades dos tipos de eventos.

Objetivos Específicos:

- Conceituar a probabilidade de evento impossível;
- Conceituar a probabilidade de evento certo;
- Conceituar a probabilidade de eventos complementares; e
- Aplicar o conceito em situações do dia a dia.

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Recursos Didáticos:

- Data show;
- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;
- 1 dado numerado de 1 a 6; e
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

- **Dinâmica 4:**
  - Esta dinâmica funciona como um jogo bem simples, utilizando um dado de 6 faces numeradas de 1 a 6.
  - O jogador escolhe um número entre 0 e 6 e se lançar o dado e a face voltada para cima for um número maior que o escolhido ele vence o jogo.
  - Fazer cada aluno escolher seu número e anotá-lo numa folha qualquer. Após essa escolha lança-se o dado uma única vez.
  - Fazer os alunos responderem os seguintes questionamentos:

    a) Antes de jogar o dado qual o número que tem a maior probabilidade de sair?
    Solução:
    Sendo: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e E um evento elementar.
    Temos: $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \dfrac{n(E)}{n(\omega)} = \dfrac{1}{6}$
    Logo todos os números têm a mesma probabilidade de sair.

    b) Qual o número que você escolheu? Solução: Resposta pessoal

    c) Qual a probabilidade de sair um número maior do que você escolheu? Solução:
    Observe que o espaço amostral no lançamento de um dado comum é: $\omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Suponha que escolhido pela pessoa fosse 2:
    Teremos o seguinte evento: $A = \{3,4,5,6\}$
    A probabilidade de sair um número maior 2 será:

P (A) = número elementos de (A)/ número elementos de $(S) = 4/6 = 2/3$

d) Se você quiser perder, deve escolher qual número e por que? Solução 6.

Como não temos em um dado comum um número maior 6, temos o seguinte evento: $A = \emptyset$

A probabilidade de sair um maior número maior 6 será:

$P(A)$ = número elementos de (A)/ número elementos de $(S) = 0/6 = 0$

e) Se você quiser vencer, com certeza, deve escolher qual número e porque?

Solução 0.

Observe agora que todos os números nas faces em um dado comum são maiores que zero, portanto o evento em questão será o próprio espaço amostral: A = ω

A probabilidade de sair um maior número maior 0 será:

$P(A)$ = número de elementos de (A) / número elementos de (S) = $\dfrac{6}{6} = 1$

FORMALIZANDO

De todo o exposto é muito importante deixar claro aos alunos que o fato de um evento ser impossível indica que o subconjunto do espaço amostral que ele representa é um conjunto vazio, e como tal não deixa de ser um evento do espaço amostral e mais deve-se ter em mente que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto de acordo com toda a teoria dos conjuntos a qual da extremo suporte a teoria das probabilidades.

Por outro lado o fato de um evento ser denominado de certo indica que de maneira geral o subconjunto do espaço amostral que ele representa é um conjunto idêntico ao espaço amostral ou seja não é um subconjunto próprio do espaço amostral mas que mesmo assim não deixa de ser um subconjunto, neste caso o evento não é simples.

E podemos concluir por essa sessão as propriedades:

$1^\circ) 0 < P(A) < 1, \forall A$

$2^\circ) P(\Omega) = 1$(**evento certo**)

$3^\circ) P(\emptyset) = 0$(**evento impossível**)

Como os eventos complementares possuem intersecção vazia e união igual ao espaço amostral, podemos dizer que a probabilidade da intersecção deles é 0 , ou seja, impossível, e a probabilidade da união é 1, ou seja, evento certo.

Aproveitando-se da teoria dos conjuntos temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Sabendo que B é o complementar de A, temos que:

$$n(A \cup \overline{A}) = n(A) + n(\overline{A}) - n(A \cap \overline{A})$$

Para a probabilidade aplicada na expressão anterior temos:

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A})$$

Como $P(A \cup \overline{A}) = 1$ e $P(A \cap \overline{A}) = 0$ então,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. (ENEM) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00. A probabilidade de o **participante** não ganhar qualquer prêmio é igual a:

   a) 0
   b) $\frac{1}{3}$
   c) $\frac{1}{4}$
   d) $\frac{1}{2}$
   e) $\frac{1}{6}$

   Solução:

   O espaço amostral é composto por:

   $$\Omega = \{TVE, TEV, VET, VTE, ETV, EVT\}, \text{logo } n(\Omega) = 6.$$

   Seja A o evento não ganhar qualquer prêmio: $A = \{VET, ETV\}$logo $n(A) = 2$.
   Assim, $P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. (ENEM) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de $R\$400,00$ é igual a:

   a) 0
   b) $\frac{1}{3}$
   c) $\frac{1}{2}$
   d) $\frac{2}{3}$
   e) $\frac{1}{6}$

   Solução:

   Seja B o evento ganhar exatamente R$ 400,00. Para ganhar exatamente R$ 400,00, o concorrente deverá acertar duas e somente duas letras na posição correta; acontece que isso é impossível, pois, se existirem duas, fatalmente as três lá estarão.

   Assim, a probabilidade pedida é a do evento impossível, ou seja, zero.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Em um programa de auditório, o apresentador explica a um participante que três etiquetas, numeradas de 1 a 3, foram distribuídas em três envelopes, sendo que cada envelope contém uma única etiqueta e está largado. O participante deve colocar os envelopes para a direita, a sequência crescer: $1, 2$ e 3.

   a) Calcule a probabilidade de que os três envelopes sejam colocados nas posições corretas, isto é, o primeiro da esquerda com o número 1, o segundo com o número 2 e o terceiro com o número 3. $\frac{1}{6}$
   b) Calcule a probabilidade de que sejam colocados apenas dois envelopes nas posições corretas. 0

2. Sorteando uma das n pessoas de uma sala, a probabilidade de que essa pessoa seja mulher é $\frac{n-8}{20}$. Qual é o maior número possível de pessoas que podem estar nessa sala? 28

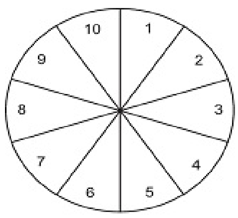
3. Ao atirar num alvo, a probabilidade de uma pessoa acertá-lo é $\frac{3}{5}$. Qual é a probabilidade de ela erras? $\frac{2}{5}$

4. A probabilidade de um piloto vencer uma corrida é o triplo da probabilidade de perder. Qual é a probabilidade de que esse piloto vença a corrida, se não pode haver empate? $\frac{3}{4}$

5. Em uma eleição em que não pode haver empate, a probabilidade de um candidato vencer é $\frac{x+3}{4}$ e a de perder é $\frac{x}{6}$. Essa informação permite concluir que a probabilidade de esse candidato vencer a eleição é:

   a) 20%
   b) 50%
   c) 10%
   d) 15%
   e) 90%

6. (UNESP) Um jogo consiste num dispositivo eletrônico na forma de um círculo dividido em 10 setores iguais numerados, como mostra a figura. Em cada jogada, um único setor do círculo se ilumina. Todos os setores com números pares têm a mesma probabilidade de ocorrer, o mesmo acontecendo com os setores com números ímpares. Além disso, a probabilidade de ocorrer o número 3 é o dobro da probabilidade de ocorrer o número 4. Denotando por $p(i)$ a probabilidade de, numa jogada, ocorrer o número i, determine:



   a) $p(3)$ e $p(4)$. $p(3) = \frac{2}{15}$ e $p(4) = \frac{4}{15}$
   b) a probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo maior ou igual a 2. $\frac{7}{15}$

7. Um dado de 6 faces apresenta a seguinte irregularidade: a probabilidade de sair a face dois é o dobro da probabilidade de sair a face um. As probabilidades de saírem as demais faces são iguais a $\frac{1}{6}$. Então:

   a) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{1}{3}$.

   b) a probabilidade de sair a face dois é igual a $\frac{2}{3}$.

   c) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{1}{9}$.

   d) a probabilidade de sair a face dois é igual a $\frac{2}{12}$.

   e) a probabilidade de sair a face um é igual a $\frac{2}{9}$.

8. (AFA) Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. Os estudantes A e B têm a mesma probabilidade de vencer e cada um tem o dobro da probabilidade de vencer que o estudante C.
   Admitindo-se que não haja empate na competição, é FALSO afirmar que a probabilidade de

   a) A ou B vencer é igual a $0,8$

   b) A vencer é igual a $0,4$

   c) C vencer é maior que $0,2$

   d) B ou C vencer é igual $0,1$

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: $http: www.professores.uff.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf$).

5.5 PLANO DE ENSINO 4: PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES.

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 2 h/a

TEMA: Probabilidade de eventos independentes

Conteúdo Programático:

- Probabilidade de eventos independentes.

Objetivo Geral:

- Conceituar a probabilidade de eventos independentes.

Objetivos Específicos:

- Conceituar a probabilidade de eventos independentes;
- Rediscutir os princípios aditivo e multiplicativo da probabilidade;e
- Aplicar o conceito em situações do dia a dia.

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Recursos Didáticos:

- Data show;

- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

- **Dinâmica 5:**
  - Utilizando dois dados numerados de 1 a 6, e jogando-os sucessivamente faça o que se pede:
    * Considerando os pares ordenados (x, y) com x sendo o resultado da face voltada para cima no primeiro dado e y o resultado da face voltada para cima no segundo dado.

      Escreva o Espaço Amostral A dos possíveis pares ordenados formados pelos resultados do lançamento dos dois dados.

      Espera-se que de alguma forma os alunos possam escrever o espaço amostral de forma equivalente ao descrito na tabela a seguir:

Ω	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Espaço Amostral (Ω) no lançamento de dois dados

      · Qual o número de elementos do espaço amostral?

        Espera-se que os alunos respondam $n(A) = 36$

      · Qual a probabilidade de sair a face 3 no primeiro dado?

        Espera-se que os alunos respondam $P(3) = 1/6$

      · Qual a probabilidade de sair a face 4 no segundo dado?

        Espera-se que os alunos respondam P(4) = 1/6

      · Qual a probabilidade de, com os resultados dos dados, formarmos o par $(3;4)$? Espera-se que os alunos respondam $P(3;4) = 1/36$

· Que relação podemos estabelecer entre as probabilidades individuais dos eventos 3 no primeiro dado e 4 no segundo dado com a probabilidade do par $(3;4)$?

Espera-se que os alunos percebam que a $P(3;4) = P(3)xP(4)$

FORMALIZANDO

De forma intuitiva é fácil entender os eventos independentes como sendo aqueles que não influenciam nas possibilidades um do outro, como no exemplo da dinâmica anterior o resultado do primeiro dado em nada influencia o resultado do segundo dado.

A probabilidade de eventos independentes satisfaz o princípio multiplicativo e de acordo com a dinâmica anterior podemos escrever o seguinte:

$P(A \cap B) = P(A)xP(B)$

A probabilidade da ocorrência de eventos independentes simultaneamente é o produto das probabilidades dos eventos isoladamente. Inclusive este conceito vale para mais de dois eventos.

Outro exemplo está mostrado na questão do ENEM resolvida a seguir:

(ENEM, cancelado de 2009) Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos para a amarela e 70 segundos para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-lo na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa. Suponha que um motorista passa por um semáforo duas 68 vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra. Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

a) $\frac{1}{25}$

b) $\frac{1}{16}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2}$

Solução: Observe o tempo de cada luz:

Verde: 25 s

Amarelo: 5 s

Vermelho: 70 s

Total: 100 s

A probabilidade de o motorista encontrar o semáforo com a luz verde é:

$$P = \frac{\text{resultados favoráveis}}{\text{resultados possiveis}} = \frac{25s}{(25+5+70)s} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Como o motorista deve encontrar o semáforo com a luz verde nas duas vezes de maneira aleatória e independente uma da outra, a probabilidade do evento ocorrer será

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

1. Dos 30 funcionários de uma empresa, 10 são canhotos e 25 vão de ônibus para o trabalho. Escolhendo ao acaso um desses empregados, qual a probabilidade de que ele seja canhoto e vá de ônibus para o trabalho?

Solução: Considere os eventos: A: ser canhoto e B: ir de Ônibus para o trabalho. Observe que A e B são eventos independentes, portanto um não depende em nada do outro. A probabilidade de os dois eventos (A e B) ocorrerem simultaneamente é calculada por $P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)$. Calculando: $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

2. Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R não ser escalado é $0,2$ e a probabilidade de o jogador S ser escalado é $0,7$. Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:

a) $0,72$

b) $0,56$

c) $0,24$

d) $0,14$

Solução: Como a probabilidade do jogador R não ser escalado é $0,2$, então a probabilidade do jogador R ser escalado será $0,8$.

Pelo enunciado, sabemos que os eventos R e S são independentes, então:

A probabilidade de os dois jogadores serem escalados é $0,8 \cdot 0,7 = 0,56$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Dois eventos independentes, A e B, são tais que $P(A) = \dfrac{3}{5}$ e $P(B) = \dfrac{2}{3}$. Calcule a probabilidade dos eventos A e B ocorrerem simultaneamente. 2/5

2. Um dado é lançado duas vezes, considerando como resultado o par ordenado (x, y), em que x é o número de pontos obtidos na face voltada para cima no primeiro lançamento e y é o número de pontos obtidos na face voltada para cima no segundo lançamento:

a) Calcule o número de elementos do espaço amostral E desse experimento.

36

b) Determine o evento A formado pelos pares ordenados de E cujo primeiro elemento é 3. Calcule P(A).

$1/6$

c) Determine o evento B formado pelos pares ordenados de E cujo segundo elemento é 2. Calcule P(B).

$1/6$

d) Calcule a probabilidade de obter a face com 2 pontos no segundo lançamento do dado sabendo que no primeiro lançamento obteve-se a face com 3 pontos.

$1/6$

e) Os eventos A e B são independentes? Qual a probabilidadede obter 2 no primeiro dado e 3 no segundo dado?

Sim, pois $P(A/B) = P(A).\dfrac{1}{36}$

3. De uma urna com 4 bolas de cores diferentes, azul, vermelha, marrom e branca, serão retiradas 2 bolas, sucessivamente e com reposição. Considera-se como resultado desse experimento o par orde-nado (x, y) em que x é a cor da primeira bola retirada e y é a cor da segunda bola retirada.

a) Indicando por A, V, M e B as bolas azul, vermelha, marrom e branca, respectivamente, construa o espaço amostral E desse experimento e determine n(E).
16

b) Determine os elementos do evento S, formado pelos pares ordenados de E cuja segunda bola retirada é vermelha, e calcule P(S).
$1/4$

c) Determine os elementos do evento T, formado pelos pares ordenados de E cuja primeira bola retirada é azul, e calcule P(T).
$1/4$

d) Calcule a probabilidade de a segunda bola ser vermelha sabendo que a primeira foi azul.
$1/4$

e) Os eventos S e T são independentes? Sim.

4. Uma urna contém 4 bolas, numeradas de 1 a 4. Um experimento consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, 2 bolas dessa urna, considerando como resultado o par ordenado (x, y), em que x é o número de bola da primeira retirada e y é o número de bola da segunda retirada.

a) Calcule o número de elementos do espaço amostral E desse experimento. 12

b) Determine o evento A formado pelos pares ordenados de E cujo primeiro elemento é 3. Calcule P(A). $1/4$

c) Determine o evento B formado pelos pares ordenados de E cujo segundo elemento é 2. Calcule P(B). $1/4$

d) Calcule a probabilidade de obter o número 2 na segunda bola retirada sabendo que na primeira retirada obteve-se a bola com o número 3. 1/3

e) Os eventos A e B são independentes? Não

5. (Fuvest-SP) Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado perfeito (todas as seis faces têm probabilidade iguais). Com relação a essa experimento considere os seguintes eventos:

I O resultado do lançamento é par.

II O resultado do lançamento é estritamente maior que 4.

III O resultado é múltiplo de 3.

a) I e II são eventos independentes? Sim

b) II e III são eventos independentes? Não

Justifique suas respostas.

6. (UFPA) No Estado do Pará, 94% dos estudantes do Ensino Médio estão matriculados em escolas públicas. Se a probabilidade de esses estudantes serem negros (pretos + pardos) é de 75%, então a probabilidade de o estudante do Ensino Médio estar matriculado em escola pública e ser negro é de

a) $23,5\%$

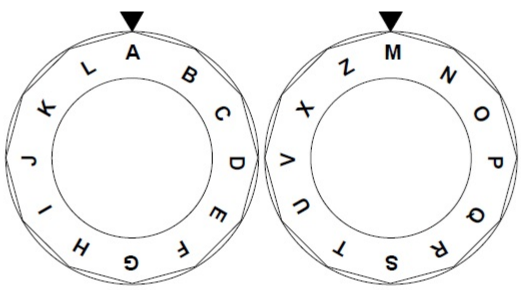
b) $55,5\%$

c) $70,5\%$

d) $45,5\%$

e) $67,5\%$

7. Um cofre tem duas rodas com as letras indicadas na figura ao lado. O código que permite abrir o cofre é obtido selecionando uma letra da primeira roda e uma letra de segunda roda. Uma pessoa tenta abrir o cofre possuindo a informação de que a primeira letra do código de abertura, isto é da roda da esquerda, é vogal.



Qual a probabilidade de acertar à primeira tentativa

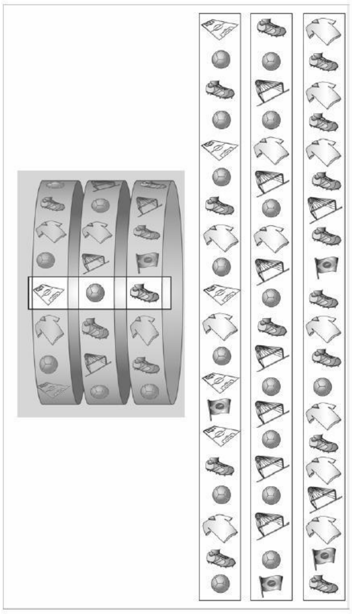
a) $\frac{6}{361}$

b) $\frac{1}{36}$

c) $\frac{36}{144}$

d) $\frac{3}{144}$

8.(UEL) Uma máquina caça-níqueis possui três discos. Cada disco contém um conjunto de símbolos que, na figura estão representados nas três colunas à direita:



Ao se inserir $R\$1,00$ e pressionar um botão, os três discos começam a rodar. O jogador deve, então, pressionar outros 3 botões, ao acaso, para parar cada disco. Os três símbolos que aparecerem na linha horizontal serão iluminados e determinarão o quanto o jogador ganha:

Combinação	**Prêmio(em reais)**
3 bandeiras	1.500
2 bandeiras	750
3 bolas	250
3 camisas	250
3 chuteiras	250

Qual é a probabilidade de uma pessoa, em apenas uma jogada, ganhar $R\$1.500,00$?

a) $\frac{1}{8000}$

b) $\frac{1}{4000}$

c) $\frac{1}{400}$

d) $\frac{1}{80}$

e) $\frac{1}{4}$

9.(UFRN) “Blocos lógicos” é uma coleção de peças utilizada no ensino de Matemática. São 48 peças construídas combinando-se 3 cores (azul, vermelha e amarela), 4 formas (triangular, quadrada, retangu-lar e circular), 2 tamanhos (grande e pequeno) e 2 espessuras (grossa e fina). Cada peça tem apenas uma cor, uma forma, um tamanho e uma espessura. Se uma criança pegar uma peça, aleatoriamente, a probabilidade de essa peça ser amarela e grande é:

a) $\frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

10. (UFSCAR-SP) Gustavo e sua irmã Caroline viajaram de férias para cidades distintas. Os pais recomendam que ambos telefonem quando chegarem ao destino. A experiência em férias anteriores mostra que nem sempre Gustavo e Caroline cumprem esse desejo dos pais. A probabilidade de Gustavo telefonar é $0,6$ e a probabilidade de Caroline telefonar é $0,8$. A probabilidade de pelo menos um dos filhos contatar os pais é:

a) $0,20$

b) $0,48$

c) $0,64$

d) $0,86$

e) $0,92$

11. Em um supermercado, a probabilidade de que um produto da marca A e um produto da marca B estejam a dez dias, ou mais, do vencimento do prazo de validade é de 95% e 98%, respectivamente. Um consumidor escolhe, aleatoriamente, dois produtos, um produto da marca A e outro da marca B. Admitindo eventos independentes, a probabilidade de que ambos os produtos escolhidos estejam a menos de dez dias do vencimento do prazo de validade é

a) $0,001\%$

b) $0,01\%$

c) $0,1\%$

d) 1%

e) 10%

12. Quatro pessoas devem escolher ao acaso, cada uma, um único número entre os quatro seguintes: $1,2,3$ e 4. Nenhuma fica sabendo da escolha da outra. A probabilidade de que escolham quatro números iguais é

a) $\frac{1}{256}$

b) $\frac{1}{128}$

c) $\frac{1}{64}$

d) $\frac{1}{32}$

e) $\frac{1}{16}$

13. Brasil dá vexame nos pênaltis, erra 4 cobranças e é eliminado pelo Paraguai.

Disponível em: http://globoesporte.globo.com/futebol/selecao-brasileira/
noticia/2011/07/brasil-tem-atuacao-desastrosa-nos-penaltis-e-perde-doparaguai.html.>.
Acesso em: 17 jul. 2011.

Considerando-se que a probabilidade de certo jogador de futebol profissional converter, em gol, um pê-nalti seja de 80%, em uma série de cinco cobranças, pode-se concluir que a probabilidade de esse jo-gador errar, exatamente, quatro pênaltis, é de

a) $0,64\%$

b) $0,68\%$

c) $0,72\%$

d) $0,78\%$

e) $0,84\%$

14. Suponha que a probabilidade de um determinado time vencer é de $0,6$, de perder é de $0,3$ e de empatar é de $0,1$. Se o time jogar duas vezes, qual a probabilidade de ele vencer pelo menos uma vez?

a) $0,80$

b) $0,82$

c) $0,84$

d) $0,86$

e) $0,88$

15. (UFRN) Dentre três pessoas identificadas por A, B e C, uma deve ser sorteada pelo líder comunitá-rio, para participar, como convidada, de uma feira agropecuária. O sorteio é feito em duas etapas: na primeira, é sorteado um ganhador entre B e C; na segunda, esse ganhador concorre com A, para se saber quem será o convidado. Se, em cada um dos sorteios, as duas pessoas têm a mesma chance de ganhar, a probabilidade de B ser convidada a participar da feira é de:

a) 15%

b) 75%

c) 50%

d) 25%

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004. MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9aEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006. FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: $http : www.professores.u_.br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf$).

5.6 PLANO DE ENSINO 5: QUESTÕES DE PROBABILIDADE NO ENEM.

Disciplina: Matemática

Professor:

Série: 2º Ano – Ensino Médio

Modalidade: Ensino Regular

Carga horária: 2 h/a

TEMA: QUESTÕES DO ENEM.

Conteúdo Programático:

- Revisão.

Objetivo Geral:

- Relembrar conceitos e discutir a aplicação no dia a dia da teoria das probabilidades.

Objetivos Específicos:

- Rediscutir os conceitos estudados;
- Resolver questões do ENEM sobre probabilidade dos tipos de eventos;
- Aplicar o conceito em situações do dia a dia.

Avaliação:

A avaliação do desempenho do aluno ocorrerá mediante sua participação na dinâmica sugerida assim como na aplicação e discussão dos exercícios contidos no material para uso em sala de aula, no qual o aluno poderá resolver problemas propostos e aplicar os conceitos trabalhados durante a aula.

Recursos Didáticos:

- Data show;

- Quadro branco;
- Pincel para quadro branco;e
- Listas de Exercícios.

Procedimentos Metodológicos:

- Propiciar aula expositiva e dialogada;
- Utilizar o quadro de escrever para sintetizar as ideias geradas;
- Seguir a aula com o material da lista de exercícios que seguem, utilizando o data-show;e
- Avaliar a aula no final;

QUESTÕES DO ENEM DESDE 2009 ATÉ 2014:

1. (Enem 2014) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a) $0,02048$

b) $0,08192$

c) $0,24000$

d) $0,40960$

e) $0,49152$

Solução: Para que o teste termine na quinta pergunta é necessário que o candidato erre apenas uma pergunta das quatro primeiras e errar a quinta.

$$= 0,2 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,2 + 0,8 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,2 + 0,8 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,2$$
$$+ 0,8 \times 0,8 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,2 = 4 \times 0,8^3 \times 0,2^2 = 0,08192$$

2.(Enem 2013) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{100}$, eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{100}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq p < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq p < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq p < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq p < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{00} \leq p \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

a) excelente

b) bom

c) regular

d) ruim

e) péssimo

Solução:

A probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso depende da maquina escolhida,temos duas possibilidades:

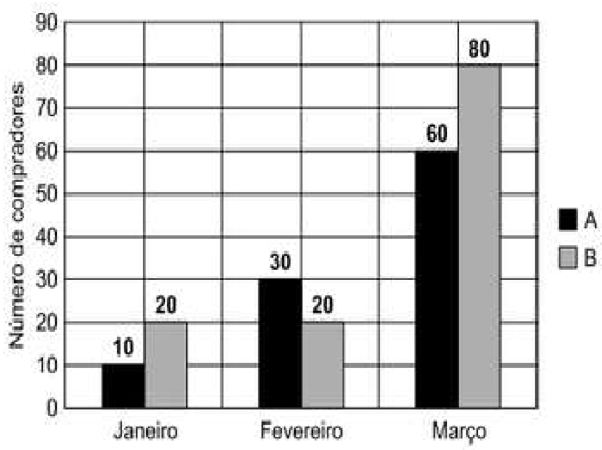
- Escolher a maquina I, cuja probabilidade é $\dfrac{54}{100}$ e o parafuso ter defeito é $\dfrac{25}{1000}$, ou
- Escolher a maquina II, cuja probabilidade é $1 - \dfrac{54}{100} = \dfrac{46}{100}$ e o parafuso ter defeito é $\dfrac{38}{1000}$.

  Portanto, a probabilidade será igual a:

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{54}{100} \cdot \frac{25}{1000} + \frac{46}{100} \cdot \frac{38}{1000} \\
p &= \frac{3,098}{100}
\end{aligned}
$$

Observe que $\frac{2}{100} \leq \frac{3,098}{100} < \frac{4}{100}$, portanto o desempenho conjunto dessas máquinas pode ser classificado como Bom.

3.(Enem 2013) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{3}{242}$

c) $\frac{5}{22}$

d) $\frac{6}{25}$

e) $\frac{7}{15}$

Solução:

Observe que nos 3 meses o número de compradores do produto A foi $10+30+60=100$, é o número de compradores do produto B foi, $20+20+80=120$.

Mas no mês de fevereiro 30 pessoas compraram o produto A e 20 pessoas compraram o produto B.

Portanto, a probabilidade dos dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro é igual a

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} = \frac{1}{20}$$

4.(Enem 2012) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que ha 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Solução:

Os possíveis resultados que darão a vitória a José são $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2)e(6,1)$.

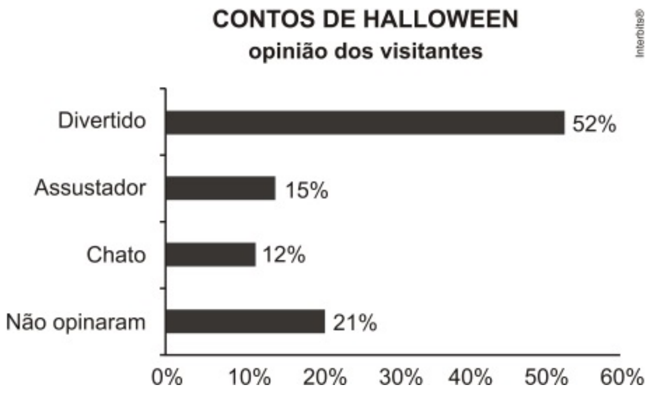
Os possíveis resultados que darão a vitória a Paulo: $(1.3),(2,2)e(3,1)$.

Os possíveis resultados que darão a vitória a Antônio: $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3)$ e$(6,2)$.

Portanto, José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

5.(Enem 2012) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween"?. Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

a) $0,09$

b) $0,12$

c) $0,14$

d) $0,15$

e) $0,18$

Solução

Observe que o espaço amostral foi reduzido para as pessoas que opinaram, ou seja: $100\% - 21\% = 79\%$.

Portanto a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é igual a $p = \dfrac{12\%}{79\%} \cong 15\%$.

6.12.(Enem PPL 2012) Uma coleta de dados em mais de 5 mil sites da internet apresentou os conteúdos de interesse de cada faixa etária. Na tabela a seguir, estão os dados obtidos para a faixa etária de 0 a 17 anos.

Preferências	Porcentagem
Música	22,5
Blogs	15,0
Serviços Web*	10,2
Games	10,0
Horóscopo	9,0
Game on-line	7,4
Educação**	6,5
Teen	4,0
Compras	3,4
Outras	12,0

* Serviços web: aplicativos on-line, emoticons, mensagens para redes sodas, entre outros.

** Sites sobre vestibular, ENEM, páginas com material de pesquisa escolar.

Considere que esses dados refletem os interesses dos brasileiros desta faixa etária.

Disponível em: www.navegg.com. Acesso em: 12 nov. 2012 (adaptado).

Selecionando, ao acaso, uma pessoa desta faixa etária, a probabilidade de que ela não tenha preferência por horóscopo é

a) $0,09$

b) $0,10$

c) $0,11$

d) $0,79$

e) $0,91$

Solução:

Observe pela tabela que a probabilidade de uma pessoa ela não tenha preferência por horóscopo é $100\% - 9\% = 91\%$.

7.(Enem 2010) A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada,

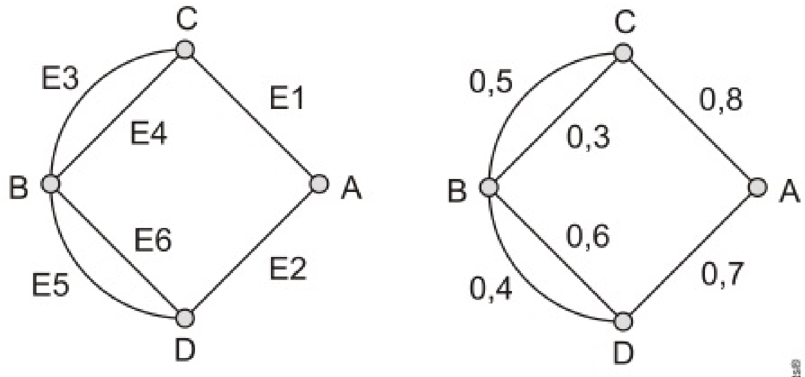


Figura I Figura II

Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada $E4$, e de 50%, quando se passa por $E3$. Essas probabilidades são independentes umas das outras. O melhor trajeto para Paula é

a) E1E3.

b) E1E4.

c) E2E4.

d) E2E5.

e) E2E6.

Solução:

Vamos primeiramente calcular a probabilidade não pegar engarrafamento no 1 e nem no 2 trecho

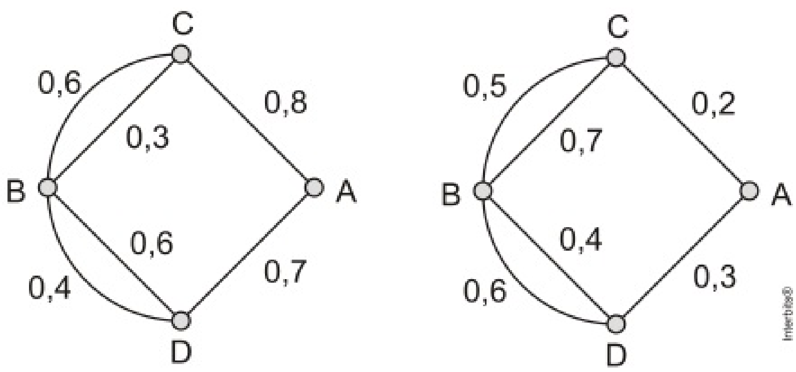


Figura II sem congestionamento

Trajeto E1E3: $(1-0,8)\cdot(1-0,5)=0,1$

Trajeto E1E4:$(1-08)\cdot(1-0,3)=0,14$

Trajeto E2E5:$(1-0,7)\cdot(1-0,4)=0,18$

Trajeto E2E6: $(1-0,7)\cdot(1-0,6)=0,12$

Trajeto E2E4 não existe.

Então a probabilidade de pegar engarrafamento pelo menos um trecho sera:

Trajeto E1E3:$1-0,1=0,90$

Trajeto E1E9: $1-0,14=0,86$

Trajeto E2E5: $1-0,18=0,82$

Trajeto E2E6: $1-0,12=0,88$

O trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível é E2E5.

8.(Enem 2009) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de $0,2\%$. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2\times(0,2\%)^4$.

b) $4\times(0,2\%)^2$.

c) $6\times(0,2\%)^2\times(99,8\%)^2$.

d) $4\times(0,2\%)$.

e) $6\times(0,2\%)\times(99,8\%)$.

Solução: Como cliente tem que sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos, consequentemente, dois aparelhos serão perfeitos, suponha então:

Aparelho 1 com defeito, probabilidade de $0,2\%$

Aparelho 2 com defeito, probabilidade de $0,2\%$

Aparelho 3 sem defeito, probabilidade de $99,8\%$

Aparelho 4 sem defeito, probabilidade de $99,8\%$

Falta agora analisamos que quantos distintos podemos escolher dois aparelhos defeituosos e dois aparelhos serão perfeitos.

Observe as possibilidades: PPDD, PDDP, DDPP, DDPP, DPPD e PPDD.

Como as possibilidades possuem a mesma probabilidade, temos: $6 \cdot (0,2\%)^2 \cdot (99,8\%)^2$

9.(Enem cancelado 2009) Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) revelaram que no biênio 2004/2005, nas rodovias federais, os atropelamentos com morte ocuparam o segundo lugar no ranking de mortalidade por acidente. A cada 34 atropelamentos, ocorreram 10 mortes. Cerca de 4 mil atropelamentos/ano, um a cada duas horas, aproximadamente.

Disponível em: http://www.ipea.gov.br. Acesso em: 6 jan. 2009.

De acordo com os dados, se for escolhido aleatoriamente para investigação mais detalhada um dos atropelamentos ocorridos no biênio 2004/2005, a probabilidade de ter sido um atropelamento sem morte é

a) $\frac{2}{17}$

b) $\frac{5}{17}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{12}{17}$

Solução:

Pelo enunciado temos a informação de 34 atropelamentos, sendo 10 com mortes e 24 sem mortes.

Portanto a probabilidade será igual a razão entre acidentes sem mortes e o número total de acidentes.

$$P = \frac{24}{34} = \frac{12}{17}$$

10.(Enem cancelado 2009) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens.

Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é

a) $66,7\%$, assim ele não precisará fazer um tratamento.

b) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

c) $7,5\%$, assim ele não precisará fazer um tratamento.

d) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

e) $37,5\%$, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

Solução: Como o casal deseja ter exatamente 2 meninos, temos as possibilidades Homem, homem e mulher ou mulher, homem e homem ou homem, mulher e homem, como cada filho tem a mesma probabilidade de nascer, teremos:
A probabilidade igual a $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=0,375=37,5\%$.

11.(Enem 2006) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:
Pedro, camisa 6:– Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de $2(1+1)$ até $12(6+6)$. Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.
Tadeu, camisa 2: - Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...
Ricardo, camisa 12: - Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos... Desse diálogo conclui-se que

a) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.

b) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

c) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.

d) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

e) não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

Solução:

No lançamento de dois dados o espaço amostral é:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

As possibilidades para Pedro vencer são $(5,1),(4,2),(3,3),(2,4)$ e $(1,5)$, então probabilidade de Pedro vencer é $\frac{5}{36}$

As únicas possibilidades para Tadeu ou Ricardo vencerem são $(1,1)$ e $(6,6)$, então probabilidade de Tadeu ou Ricardo vencer é $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}$.

Observe que $\frac{5}{36}>\frac{2}{36}$, Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.

12.(Enem 2006) A tabela a seguir indica a posição relativa de quatro times de futebol na classificação geral de um torneio, em dois anos consecutivos. O símbolo ? significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, à frente do indicado na coluna. O símbolo · significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, à frente do indicado na coluna.

	A	**B**	**C**	**D**
A				?
B	•		•	• ?
C	• ?	?		?
D	•		•	

A probabilidade de que um desses quatro times, escolhido ao acaso, tenha obtido a mesma classificação no torneio, em 2004 e 2005, é igual a

a) $0,00$.

b) $0,25$.

c) $0,50$.

d) $0,75$.

e) $1,00$.

Solucao:

De acordo com as informacoes do enunciado, podemos construir a seguinte tabela:

Analisando a tabela e o enunciado da questao afirma que o simbolo $\cdot$ significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, a frente do indicado na coluna e o simbolo $*$ significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, a frente do indicado na coluna. Entao podemos escrever a seguinte tabela das posicoes de cada time no ano de 2004 e 2005

Posição	2004	2005
1	B	C
2	D	B
3	C	A
4	A	D

Note que nenhum dos times obteve a mesma classificação no torneio em 2004 e 2005, logo temos um evento impossível, então sua probabilidade é igual a zero.

13.(Enem 2005) Um aluno de uma escola será escolhido por sorteio para representá-la em uma certa atividade. A escola tem dois turnos. No diurno há 300 alunos, distribuídos em 10 turmas de 30 alunos. No noturno há 240 alunos, distribuídos em 6 turmas de 40 alunos.

Em vez do sorteio direto envolvendo os 540 alunos, foram propostos dois outros métodos de sorteio:

Método I: escolher ao acaso um dos turnos (por exemplo, lançando uma moeda) e, a seguir, sortear um dos alunos do turno escolhido.

Método II: escolher ao acaso uma das 16 turmas (por exemplo, colocando um papel com o número de cada turma em uma urna e sorteando uma delas) e, a seguir, sortear um dos alunos dessa turma.

Sobre os métodos I e II de sorteio é correto afirmar:

a) em ambos os métodos, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados.

b) no método I, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método II a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.

c) no método II, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método I, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.

d) no método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário.

e) em ambos os métodos, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior do que a de um aluno do noturno.

Solução:

Aplicando o Método I:

A probabilidade de um aluno do turno diurno ser sorteado, utilizando o método I é igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} = \frac{1}{600}.$$

A probabilidade de um aluno do turno da noite ser sorteado, utilizando o método I é igual a

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{240} = \frac{1}{480}$$

Aplicando o Método II:

No método II, a probabilidade de um aluno do turno diurno ser sorteado é

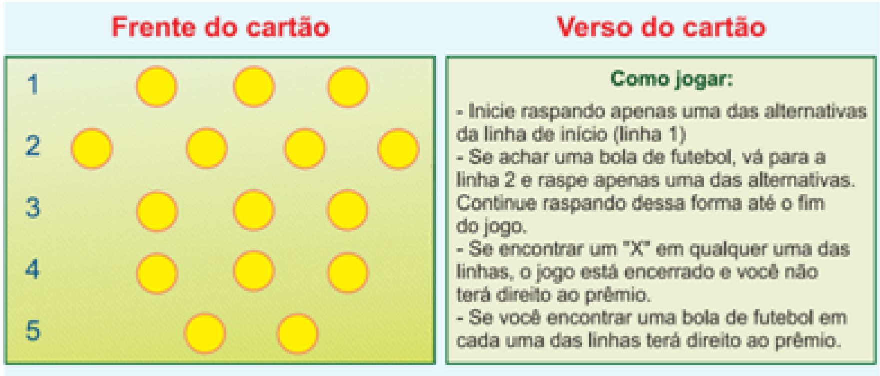
$$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{480}$$

No método II, a probabilidade de um aluno do turno da noite ser sorteado é

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{600}$$

Podemos concluir que no método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário

14.(Enem 2001) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:



Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de ”X” distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é

a) $\frac{1}{27}$

b) $\frac{1}{36}$

c) $\frac{1}{54}$

d) $\frac{1}{72}$

e) $\frac{1}{108}$

Solução: O cliente ganhará o prêmio se encontrar uma bola em cada uma das linhas, mas como existem 2 bolas na linha 4, e 2 bolas na linha 5, a única possibilidade para o cliente ganhar é que haja uma bola em cada uma das 3 primeiras linhas.

Portanto, a probabilidade de ganhar o prêmio será:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{54}$$

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante três fichas voltadas para baixo, estando representadas em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas a seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de $R\$200,00$.

15.(Enem 2000) Escolhendo a 2ł opção, a probabilidade de o apostador NÃO GANHAR em qualquer dos sorteios é igual a:

a) 90%.

b) 81%.

c) 72%.

d) 70%.

e) 65%.

Solução: A probabilidade do apostador não ganhar em qualquer dos sorteios é equivalente a não ganhar no primeiro sorteio e não ganhar no segundo sorteio, então:

$$P = \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} = 72\%(\text{perder nos dois})$$

16.(Enem 2000) Se X, Y, Z representam as probabilidades de o apostador GANHAR ALGUM PRÊMIO, escolhendo, respectivamente, a 1ł, a 2ł ou a 3ł opções, é correto afirmar que:

a) $X < Y < Z$.

b) $X = Y = Z$.

c) $X > Y = Z$.

d) $X = Y > Z$.

e) $X > Y > Z$.

Solução:

Para o apostador ganhar algum prêmio, temos três possibilidades:

Ganhar na primeira opção $= \frac{3}{10} = 30\%$.

Ganhar na segunda opção: $1 - \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10}(\text{perder nos dois sorteios}) = 28\%$.

Ganhar na terceira opção: $1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10}(\text{perder nos três sorteios}) = 27,1\%$

Logo, $X > Y > Z$.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR:

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004. MORGADO, A. C. O. Análise Combinatória e Probabilidade. 9aEd. Rio de Janeiro: SBM, 2006. FARIAS, A. M. L.; Laurencel, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em: $http : www.professores.u_{.}br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf$).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de probabilidade, nos seus momentos iniciais, focou o estudo das tomadas de decisões para se ter vantagens em jogos de azar. Mas com o passar do tempo logo se percebeu sua aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento e junto com isso cresceu a demanda pelo refinamento e pelo aprofundamento no assunto.

Assim os conhecimentos probabilísticos foram disseminados pelo mundo moderno e foi até as salas de aula e hoje consta como um dos tópicos mais importantes do exame de acesso as universidades públicas, o ENEM.

Tendo em vista do exposto, juntamente com nossa experiência no ensino público foi realizada essa pesquisa que investigou o perfil dos alunos concluintes do ensino médio da rede pública e testou-se seus conhecimentos em relação a probabilidade através do questionário constante no apêndice A deste trabalho.

Os resultados encontrados estiveram muito aquém do ideal o que nos mostrou o grande déficit dos alunos a respeito do assunto. E principalmente que os alunos não possuem apoio necessário para ajudá-los, nem em casa nem fora dela.

Após análise dos questionários pode-se perceber que, em média, os alunos obtiveram menos de 15% de índice de acerto para cada questão.

Claramente pode-se notar que os alunos concluintes do ensino médio não estão aptos a enfrentar as questões do ENEM e sofrem muito quando os professores utilizam a metodologia tradicional de aula, com definição seguida de exemplo e exercícios simplesmente, sem qualquer tipo de dinâmica ou práticas com material concreto.

Ainda verificou-se o livro didático afim de buscar explicações para o pífio desempenho dos alunos mas não se pode culpá-lo, são limitados sim, mas no geral podem e deveriam ser bem utilizados pelos professores.

Sendo assim, propomos uma proposta de intervenção, complementar, contendo uma série de atividades, com dinâmicas e materiais concretos, com planos de ensino acompanhado de um material para o professor com conteúdo específico, repleto de exercícios contextualizados, de fixação e questões do ENEM, com aplicações desde jogos de azar até situações problemas do cotidiano dos alunos; todo material com as devidas orientações aos professores.

Espera-se que o conjunto formado pelo material proposto, o livro didático, o empenho dos professores e com o comprometimento dos alunos possamos melhorar o ensino de probabilidade e da matemática como um todo.

REFERÊNCIAS

BAYER, Arno; BITTENCOURT, helio e ROCHA, Josy e ECHEVESTE, Simone. ULBRA. Probabilidade na Escola. 2005.

BOYER, Carl B. Historia da matemática. 2ª Ed. Editora Edgard Blucher ltda – SP, 1998.

BRASIL. Revista Cálculo – Matemática para Todos. Edicao 31 – ano 3 – agosto de 2013.

BRASIL. Currículo Mínimo. Secretaria de Educacao. Rio de Janeiro. $http : //www.conexaoprofessor.rj.gov.br/curriculo_{i}dentificacao.asp$. 2013.

BRASIL. Secretaria da Educacao. Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio – Matemática. Brasilia: MEC, 1998.

BRASIL. Ministerio da Educacao. Secretaria de Educacao Basica. Guia de livros didaticos: PNLD 2012: Matematica. Brasilia, 2011.

CABERLIM, Cristiane Candido Luz; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. O Ensino Atual de Probabilidade na Escola Básica: um Estudo do Guia do PNDL 2012. In: Sociedade Brasileira de Educacao Matematica (SBEM). XI Encontro Nacional de Educacao Matematica. Curitiba – Parana, 18 a 21 de julho de 2013.

CARMO, Anselmo Goncalves do. Teoria e Aplicação da Probabilidade. Disponivel em http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/AnselmoGoncalvesdoCarmo.pdf . Acesso em 17/01/2014.

DANTE, Luis Roberto. Matemática, contexto & aplicações. Vol. 2. Ed. Ática.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. 4a. edicao. Campinas. Editora da UNICAMP, 2004.

FARIAS, A. M. L.; LAURENCEL, L. C. Probabilidade. Apostila. Departamento de Estatística. Niterói: UFF2008 (versão para download em:$http : www.professores.u_{.}br/anafarias/images/stories/meusarquivos/prob-0.pdf$).

GNERI, Mario Antonio. A Evolução Histórica do Conceito de Probabilidade. Instituto de Matematica, Estatistica e Computacao Cientifica (IMECC) da UNICAMP. Disponivel em www.ime.unicamp.br/ cnaber/APOSTIL %20PROBABILIDADE.doc. Acesso em 20/01/2014.

HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: combinatória, probabilidade. Vol. 5, 7a Ed. São Paulo: Atual, 2004.

KATZ, Victor J. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. 2ª Ed, Lisboa. Fundação Calouste Gulbenkian. 2010.

LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio. Vol. 2 - 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

MORGADO, Augusto Cesar; CARVALHO, Joao Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. Colecao do Professor de Matematica. SBM. Editora SBM. 200.

ROQUE, Tatiana. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012. 511p.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, Joao Bosco. Tópicos de História da Matemática. (Material da disciplina MA31) PROFMAT, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO EM ALUNOS.

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Prezado (a) aluno (a),

Neste momento estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem em Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

<table>
<tr><td>1.Idade</td><td>2.Sexo Fem. ☐ Masc.☐</td><td>3.Escolaridade</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. A sua escola é
( ) Pública Municipal ( ) Pública Estadual ( ) Pública Federal ( ) Particular</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Qual é a escolaridade de seu pai? (até que ano ou serie ele estudou?)
( ) Não estudou
( ) Ensino fundamental incompleto
( ) Ensino fundamental completo
( ) Ensino médio incompleto
( ) Ensino médio completo
( ) Ensino superior incompleto
( ) Ensino superior completo</td></tr>
</table>

6. Qual é a escolaridade de sua mãe? (até que ano ou serie ela estudou?) ( ) Não estudou ( ) Ensino médio completo ( ) Ensino fundamental incompleto ( ) Ensino superior incompleto ( ) Ensino fundamental completo ( ) Ensino superior completo ( ) Ensino médio incompleto
7. Qual a profissão ou em que trabalha o seu pai?
8. Qual a profissão ou em que trabalha a sua mãe?
9. Você gosta de matemática? ( ) Nenhum pouco ( ) pouco ( ) Razoável ( ) Muito
10. Você costuma estudar matemática fora da escola? ( ) Nunca ( ) só no período de prova ( ) só no fim de semana ( ) Todos os dias ( ) Só na véspera de prova
11. Quem lhe ajuda nas tarefas de matemática? ( ) Ninguém ( ) Professor Particular ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Irmão (ã) ( ) Amigo(a) ( ) Tio(a) ( ) Namorado(a) ( ) Outro. Quem?
12. Na maioria das aulas de matemática de sua escola, os assuntos são ministrados ( ) Começando pela definição seguida de exemplos e exercícios ( ) Começando com uma situação problema para depois introduzir o assunto ( ) Criando um modelo para a situação e em seguida analisando o modelo ( ) Iniciando com jogos para depois sistematizar os conceitos
13. Para você entender melhor o assunto ensinado, seu professor(a) de matemática costuma: ( ) Apresentar uma lista de exercícios para serem resolvidos ( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto ( ) Mandar resolver os exercícios do livro didático ( ) Propõe questões de fixação ( ) Mandar que você procure questões sobre o assunto para resolver
14. Como você se sente em relação ao assunto Probabilidade? ( ) Nunca estudei ( ) Estudei e não lembro nada ( ) Estudei e lembro pouco ( ) Estudei e lembro de quase tudo ( ) estudei e lembro de tudo

15. Preencha o quadro abaixo,e marque o item que representa o que você achou de cada tópico.

Assunto	O que você achou ?				
	Muito Fácil	**Fácil**	**Regular**	**Dificil**	**Muito Dificil**
Espaço amostral e evento					
Definição de probabilidade					
Probabilidade de um evento certo					
Probabilidade de um evento impossível					
Probabilidade de evento complementar					
Probabilidade da união de eventos.					
Probabilidade condicional					
Probabilidade de eventos independentes					

16. Resolva os problemas a seguir da forma que achar conveniente:

16.1 No lançamento de um dado, determinar o espaço amostral e o evento "sair um número primo".

16.2 Numa urna existem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Retirando-se 1 bola ao acaso, qual a probabilidade de que seu número seja múltiplo de 5?

16.3 Numa caixa existem 20 bolas numeradas de 1 a 20. Determine a probabilidade de, ao se retirar uma bola ao acaso, sair um número

a) menor do que 21?

b) maior do que 20?

16.4. Se a probabilidade de um piloto ganhar uma corrida é de 1/5. Qual a probabilidade desse piloto não ganhar essa corrida?

16.5 Ao se lançar um dado comum, qual é a probabilidade de se obter um número par ou um número primo?

16.6. Em uma caixa existem 30 bolas, sendo 12 brancas, numeradas de 1 a 12, 10 verdes, numeradas de 1 a 10 e 8 pretas, numeradas de 1 a 8. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, qual é a probabilidade de ser um número par, sabendo-se que a bola retirada foi preta?

16.7. De um baralho de 52 cartas extraem-se duas cartas sucessivamente e sem reposição. Qual a probabilidade se obter um ás e um valete nessa ordem?

16.8 Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma dos pontos nos dois dados foi 8, calcule a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles.

16.9. Determinar o espaço amostral relativo ao experimento de lançar três moedas comuns consecutivamente. Definição de espaço amostral

16.10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e 7 podemos formar números de 2 dígitos com repetição. Qual a probabilidade de, sorteando um desses números, que ele seja par?

16.11. Lançando dois dados qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo?

16.12. Um árbitro de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é amarelo de um lado e vermelho do outro. Num determinado lance, o árbitro retira do bolso, ao acaso, um cartão e mostra ao jogador. Qual é a probabilidade de a face que o árbitro vê ser vermelha e de que a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela?

16.13. Num único lance de um par de dados honestos, qual é a probabilidade de saírem as somas “múltipla de 4” ou “primo”?