UNICAMP

Aline de Paula Alves

# Desmistificando o Teorema Fundamental da Álgebra

CAMPINAS
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

ALINE DE PAULA ALVES

# DESMISTIFICANDO O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

**Orientador: Sergio Antonio Tozoni**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA ALINE DE PAULA ALVES, E ORIENTADA PELO PROF. DR. SERGIO ANTONIO TOZONI.

**Assinatura do Orientador**

Sergio Tozoni

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

AL87d

Alves, Aline de Paula, 1985-
Desmistificando o teorema fundamental da álgebra / Aline de Paula Alves. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Álgebra. 2. Números complexos. I. Tozoni, Sergio Antonio,1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Demystifying the fundamental theorem of algebra
**Palavras-chave em inglês:**
Algebra
Complex numbers
**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional
**Titulação:** Mestra
**Banca examinadora:**
Sergio Antonio Tozoni [Orientador]
Maria Sueli Marconi Roversi
Iara Andrea Alvares Fernandes
**Data de defesa:** 25-02-2015
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 25 de fevereiro de 2015 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Sergio Tozoni

______________________________________

**Prof.(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI**

MMRoversi

______________________________________

**Prof.(a). Dr(a). MARIA SUELI MARCONI ROVERSI**

Iaafernandes

______________________________________

**Prof.(a). Dr(a). IARA ANDREA ALVARES FERNANDES**

## Abstract

To enable a context of demystification of the Fundamental Theorem of Algebra, we elaborated this thesis through bibliographic researches, which introduce the cited theorem in the historical path of the mathematical development, specially in the resolution of polynomial equations. We worked in a thorough investigation of definitions, theorems, lemmas, propositions and properties of the complex numbers. In this context, we conducted a study about continuity and infinite limits, formally presenting the most important steps in the demonstration of the Fundamental Theorem of Algebra, using only elements of elementary mathematics. Finally, we present results about the above theorem and a brief overview of how this theme is developed in high school. In this work, our objective was to contribute to make the theorem and its proof more present and take their role of importance in teaching, without afflicting those who need their understanding or who are involved in its transmission.



**Keywords**: Fundamental Theorem of Algebra, historical background, complex numbers, continuity, infinite limits, demonstration.



## Resumo

Para viabilizar um contexto de desmistificação do Teorema Fundamental da Álgebra elaboramos esta dissertação por meio de pesquisas bibliográficas, que apresentam o referido teorema inserido no percurso histórico do desenvolvimento matemático, em especial, na resolução de equações polinomiais. Remetemo-nos, então, a uma investigação e comprovação minuciosa das definições, teoremas, lemas, proposições e propriedades sobre os números complexos. Neste quadro, caminhamos para uma abordagem sobre continuidade e limites infinitos, destacando formalmente os itens essenciais para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, utilizando basicamente elementos de matemática elementar. Por fim, apresentamos resultados provenientes do teorema supracitado e uma breve perspectiva de como este tema é desenvolvido no ensino médio. Enfim, visamos colaborar para que o enunciado do teorema e sua demonstração sejam mais presentes e assumam seu papel de importância no ensino, sem afligir aqueles que dele necessitem de sua compreensão ou que estejam envolvidos em sua transmissão.



**Palavras-chave**: Teorema Fundamental da Álgebra, percurso histórico, números complexos, continuidade, limites infinitos, demonstração.

# Sumário

*Dedico esta dissertação a Deus, que me acompanhou em todas as viagens, nos momentos de desespero e em especial por providenciar aquilo que era necessário há seu tempo.*

# Agradecimentos

Quero agradecer as pessoas que estiveram comigo nesta caminhada...

À Deus, em primeiro lugar, por me dar o fôlego de vida, pois se hoje cheguei ao pódio foi porque Ele me concedeu esse momento. Obrigado Senhor, por me dar fé, força e ânimo para continuar e prosseguir sem desistir e alcançar mais um sonho em minha vida. O seu amparo foi fundamental e essencial para abafar minhas angústias nos momentos difíceis.

Ao meu orientador Dr. Sérgio Tozoni, pela eficiente e dedicada orientação no transcorrer deste trabalho, pela amizade, apoio e atenção constante, a minha sincera gratidão.

Ao Ms. Júnior pelo incentivo e apoio na realização desse estudo, além das importantes sugestões e observações feitas ao trabalho.

Ao meu futuro esposo Daniel Augusto dos Santos, pela paciência, companheirismo, incentivo, abnegação e acima de tudo pelo seu amor.

À minha mãe Helena Maria, que me trouxe ao mundo e me deu o bem mais precioso de todos: minha vida. E constitui o lugar onde a cada dia tenho a oportunidade de aprender as lições de valorização da vida e do ser humano.

Aos meus irmãos Carlos Henrique e irmã Emília, agradeço, pois sei o quanto torceram para que eu chegasse até o fim; nunca vamos deixar de ser parte um do outro.

Meus cunhados Alexandre, Elisangela e Gabriela, e finalmente aos meus sogros Anésio e Zélia por proporcionarem momentos maravilhosos em família.

A equipe gestora da Escola Estadual Mendes de Oliveira, Kátia, Rosicler, Waldete, Márcia Helena, Edmara, Eidimara e Rosilene que soube entender os atrasos e me incentivaram no decorrer desta longa caminhada.

Aos professores, funcionários e alunos da Escola Estadual Mendes de Oliveira pelo incentivo, colaboração e compreensão nos anos dedicados a este mestrado. Aos meus amigos, que sempre me proporcionam momentos de alegrias e souberam compreender minhas ausências. De forma especial Sheila, Rafael, Lívia, Jéssica, Welington, Andréia, Taís e João.

À Equipe Arquidiocesana da Pastoral da Juventude e todos os membros dos grupos de jovens pelo exemplo de vivência comunitária e compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus amigos do Mestrado Profissional de Matemática pelo companheirismo, pela solidariedade e pelas horas de convivência em que trocamos ideias durante todo este curso.

Ao CAPES pela concessão de bolsa de estudos, sem a qual se tornaria impossível realizar este sonho.

Enfim, a todos que de alguma forma, diretamente ou indiretamente contribuíram para que este estudo se realizasse.

A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade,
mas também a suprema beleza.
(Bertrand Russel)

# Introdução

A Matemática é uma ciência que está em constante evolução. Sua aplicabilidade vai além das exigências educacionais, sendo esta disciplina de grande relevância para o mundo que nos cerca.

"A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar" (ver [4]).

Já a Álgebra, considerada atualmente como um dos ramos da Matemática, do mesmo modo possui esta importância no contexto mundial, já que é uma ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio, para a resolução de problemas, para o incremento de abstrações, entre outras habilidades tão importantes na modernidade.

Em um número considerável de situações, o uso da Álgebra torna-se imprescindível, partindo das mais simples como comparar preços, trabalhar em construções, calcular descontos; até aquelas consideradas por muitos desafiadoras, tais como elaborar um programa computacional, manipular dados de uma empresa e até desenvolver novas tecnologias.

Tendo a visão das extensas dimensões da relevância da Matemática e consequentemente da Álgebra, nos restringiremos a um tópico específico deste ramo matemático, afim de que possamos atingir com eficácia nosso objetivo.

Esta vertente que será desenvolvida trata-se do Teorema Fundamental da Álgebra, que pode ser grosseiramente proferido da seguinte forma: Toda função polinomial complexa não nula de grau n maior do que ou igual a 1, possui pelo menos uma raiz complexa.

Este teorema não pode ser aplicado aos outros conjuntos numéricos. Podemos citar como exemplo a função polinomial $p(x) = x^2 + 1$ que não possui raiz dentro do conjunto dos números reais. Outra característica importante é que este teorema só abrange as funções polinomiais em seu enunciado. Assim não podemos aplicá-lo, por exemplo, à função exponencial $p(x) = a^x$, $a > 1$, que não apresenta raiz em qualquer que seja o conjunto numérico.

No período de formação no ensino médio, graduação e especialização ao qual tivemos acesso, o tópico Teorema Fundamental da Álgebra foi sempre relegado ao segundo plano. Os responsáveis por apresentá-lo o enunciavam, mas afirmavam que a demonstração era complexa, criando um misticismo sobre ele.

Outro ponto que consideramos essencial é que apesar de ser um tópico indispensável no ensino médio, um número considerável de professores não tiveram contato com a sua demonstração.

Sendo assim, optamos por elaborar nossa dissertação de mestrado profissional em Matemática sob o objetivo geral de contribuir para a desmistificação do Teorema Fundamental da Álgebra.

Determinamos como objetivo específico fornecer ferramentas para que o corpo discente e docente, guardadas suas devidas proporções, se interessem, compreendam e transmitam o Teorema Fundamental da Álgebra de modo mais amplo e formal.

Consideramos por desmistificar a retirada da "aura de divindade", do caráter enigmático e inexplicável que é atribuído a este importante teorema por uma parcela dos docentes.

Desta forma, exibimos um enredo histórico, pré-requisitos e uma demonstração relativamente simples do resultado em questão, a fim de atingir professores do ensino médio, alunos de licenciatura e até alunos de ensino médio, conforme seu nível de aprendizagem.

Esta dissertação ampara-se em uma análise factual, apresentando os fatos que favoreceram a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, além de compreender uma abordagem conceitual, com a apresentação de várias definições, lemas, teoremas, propriedades e finalmente realizamos várias demonstrações.

Historicamente o Teorema Fundamental da Álgebra tornou-se necessário, mesmo que de modo implícito, assim que a resolução de equações polinomiais se tornou essencial.

O caminho trilhado até sua enunciação e demonstração perfeita se esbarra na aceitação, compreensão e formalização da Teoria dos Números Complexos.

Ao enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra muitas bibliografias enaltecem como seu articulador o famoso matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), por publicar em sua tese de doutorado de 1799 a primeira demonstração plausível para a comunidade matemática.

Entretanto, muitos o antecederam e, provavelmente, abriram possibilidades matemáticas para que seu trabalho fosse concluído.

Com a formalização do Teorema Fundamental da Álgebra vários resultados recorrentes puderam ser comprovados, alguns deles utilizados até mesmo no ensino médio.

Atualmente, ele é muito relevante no meio matemático, uma vez que é essencial para o estudo de muitos tópicos da Matemática Avançada. A fim de progredirmos quanto ao nosso objetivo, apresentamos esta dissertação de mestrado elencada em capítulos, conforme proposto a seguir.

No Capítulo 1 damos uma perspectiva do “Teorema Fundamental da Álgebra no contexto geral da Matemática”, argumentando sobre a importância da Matemática, da Álgebra, do Teorema Fundamental da Álgebra e encerramos com uma breve análise sobre a presença deste teorema no ensino médio.

Em seguida, no Capítulo 2, abordamos o “contexto histórico” com ênfase no caminho trilhado para o desenvolvimento dos Números Complexos e do Teorema Fundamental da Álgebra.

Em continuidade, explanamos, no Capítulo 3, o “conjunto dos Números Complexos” onde apresentamos as propriedades, teoremas e operações básicas destes números, com a finalidade de garantir a compreensão e manipulação destes, para o desenvolvimento da pesquisa.

Estudamos “continuidade e limites infinitos”, no Capítulo 4, uma vez que estes são ferramentas essenciais para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

No Capitulo 5 desenvolvemos a “demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra” que se inicia salientando a importância das demonstrações no ensino, abrange um balanço das demonstrações fornecidas para este teorema e resultados preliminares, posteriormente apresenta-se, cuidadosamente uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e encerra-se com as decorrências deste resultado.

Expomos no Capitulo 6 “o Teorema Fundamental da Álgebra nas Instituições de Ensino”, tratando o modo como este é apresentado no ensino médio, precedido de uma sucinta análise desta presença e concluímos com uma proposta de sequência didática.

Concluimos com as nossas considerações finais, quando, argumentamos com maior segurança sobre o tema proposto, uma vez que ao longo desta pesquisa fomos adquirindo uma ampla bagagem de conceitos, técnicas, fatos e manipulações proporcionadas pela investigação em literatura correlata e pelos momentos de partilha com o orientador.

*Capítulo 1*

# O Teorema Fundamental da Álgebra no Contexto Geral da Matemática

As referências principais para este capítulo são Boyer [3] e Eves [9].

O ponto primordial dessa dissertação é o Teorema Fundamental da Álgebra, para o qual poderemos utilizar a abreviatura T.F.A. Esta sigla também é utilizada para expressar o Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma que *Todo número inteiro maior que* 1 *pode se expressar como produto de números primos e, salvo quanto à ordem dos fatores, de uma só maneira* (ver [9]). Entretanto, nesta obra, a abreviação T.F.A. será utilizada exclusivamente para o Teorema Fundamental da Álgebra.

O Teorema Fundamental da Álgebra diz que toda função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

na variálvel $x$, com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$.

De modo menos formal, o teorema garante que toda função polinomial complexa e não constante, possui ao menos uma raiz complexa. O T.F.A. é um assunto pertencente à Álgebra, que por sua vez é um ramo da Matemática. Assim sendo, vamos ao longo deste capítulo expor uma visão do macro para atingir com eficácia a percepção do micro. Esta estrutura fará com que possamos, ao fim deste trabalho, refletir sobre nossas práticas educacionais, nosso desenvolvimento profissional e principalmente sobre o saber adquirido a respeito do tema para nossas interlocuções futuras.

## 1.1 A Importância da Matemática

A Matemática é uma ciência que está em constante evolução, sua aplicabilidade vai além das exigências educacionais, sendo de grande relevância para o mundo que nos cerca. Entretanto, em diversas situações a Matemática é qualificada de forma pejorativa como podemos identificar nas palavras de Hermann Weyl quando este afirma que esta área do conhecimento possui:

> A qualidade não humana de luz estelar, brilhante e nítida, porém fria. É também abstrata. Trata-se de conceitos mentais embora alguns, como geométricos, possam ser visualizados. Dadas ambas as recomendações de qualidade fria e caráter abstrato, muito poucos são os estudantes que se sentem atraídos por esta matéria de ensino (ver [16]).

O autor Vasconcelos ainda alega que:

> Para muitos alunos fica da Matemática uma imagem de disciplina de insucesso, de inacessibilidade, de disciplina Sá para alguns. Para outros alunos (com sucesso na disciplina) fica uma ideia de que a Matemática é um puro mecanismo, uma arquitetura perfeita à qual nada haverá de acrescentar (ver [28]).

Diante destas palavras nos sentimos incomodados e inconformados, uma vez que sendo professores que lecionam Matemática, somos os principais protagonistas desta trama enraizada em nossos estudantes, tendo muitas vezes em nossas mãos a capacidade de alimentá-la ou modificá-la. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (ver PCN da Matemática [4]) ela é tida como *componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos dos quais os cidadãos devem se apropriar*. Assim, percebemos que a Matemática não é e não pode ser apresentada como uma parte do conhecimento desligada do desenvolvimento da sociedade.

## 1.2 A Importância da Álgebra

A Matemática é constituída por três áreas principais: Geometria, Análise e Álgebra. A Álgebra possui grande importância no contexto mundial pois é ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio, para a resolução de problemas, para o incremento de abstrações, para a evolução das tecnologias, entre outras habilidades tão importantes na modernidade.

No desenvolvimento da Matemática adotaremos por Álgebra a definição dada por Fabiane Mondini em sua dissertação de mestrado:

> Hoje dizemos que a Álgebra é o campo da Matemática que estuda, além das estruturas da Matemática, as relações existentes entre essas estruturas. Sua função para a Matemática é a generalização de conceitos por meio de simbolismo matemático e das operações usuais da aritmética (ver [22]).

Convém ainda citar o que afirma João Pedro da Ponte em uma de suas publicações:

> Quais são os objectos fundamentais da Álgebra? Há 300 anos a resposta seria certamente *Expressões e Equações*. Hoje em dia, essa resposta já não satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções, como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos (ver [25]).

Exporemos agora, ainda que de modo resumido, aspectos importantes da História da Álgebra no ensino brasileiro.

Como já sabemos, a introdução do ensino em terras brasileiras deve-se aos jesuítas. Inicialmente a Álgebra foi deixada à parte, e só atingiu os currículos brasileiros por volta de 1772 com as aulas régias, onde as disciplinas eram ensinadas separadamente, em lugares distintos e sem estruturação. Neste período eram ensinadas nesta ordem: Geometria, Trigonometria, Aritmética e por fim Álgebra. A Álgebra introduzida em nosso país acompanhou aquela ensinada nos países desenvolvidos da época (Estados Unidos, França, Inglaterra e Portugal) (ver [21]).

Apenas em 1929 foi realizada uma modificação significativa no que concerne ao ensino da Álgebra. Nesta nova fase foi proposto um currículo em que os quatro temas matemáticos deveriam ser ensinados em diversos momentos. Dois anos após a introdução do ensino destas quatro áreas, elas foram compiladas como ensino da Matemática, afim de haver interação entre elas. Na década de 60 foram elencados os temas que deveriam ser ensinados em todas as disciplinas. Este novo método é muito similar ao adotado nos dias de hoje (ver [21]).

## 1.3 A Importância do Teorema Fundamental da Álgebra

As referências para esta seção são Oliveira [23], Milies [20] e Ponte [25].

Assim como a Matemática é fundamental para a compreensão dos mecanismos de sobrevivência da sociedade atual e a Álgebra é essencial para se deslocar pelos caminhos da Matemática e para seu aprimoramento, o Teorema Fundamental da Álgebra é de extrema necessidade para as manipulações matemáticas com equações polinomiais e para o entendimento das estruturas algébricas e suas propriedades.

O tema Teorema Fundamental da Álgebra é desenvolvido dentro do tópico Polinômios e Equações Algébricas no Ensino Médio. Este tópico possui um papel de suma importância no processo atual de desenvolvimento da Matemática.

Os conhecimentos relativos aos polinômios estão associados às mais variadas situações, como a formação de sons, pois todos os aparelhos sonoros possuem códigos para eliminar os ruídos que não fazem parte do conjunto sonoro; em ajustes de curvas para projetar situações que envolvem crescimento e decrescimento de populações; no lançamento de projéteis; em física para representar movimentos dos corpos; na economia para maximização de lucro; em química para determinar a quantidade de compostos; em estatística para determinar fluxo de caixas e em outras áreas do conhecimento.

Uma das ferramentas essências para equações e funções polinomiais é o T.F.A., pois com ele temos a certeza que existe valor ou valores que anulam a equação ou a função polinomial. Este muitas vezes é o objeto procurado para diversas circunstâncias do cotidiano assim como nas citadas anteriormente. Além da grande importância já destacada, observamos que teoremas de temas avançados que são apresentados em cursos superiores, dependem do T.F.A..

## 1.4 A Presença do Teorema Fundamental da Álgebra no Ensino Básico

Após compreendermos a importância do T.F.A. e apresentarmos sinteticamente o percurso histórico da Álgebra brasileira, vamos nos atentar à presença deste teorema nos currículos escolares nacionais, em especial nas escolas da rede pública estadual, uma vez que este mestrado tem como público alvo, principalmente os professores da rede pública brasileira.

Partindo de referências estaduais, temos que o Teorema Fundamental da Álgebra está presente no ensino da Matemática, de modo particular, no Ensino Médio. Elaboramos uma pesquisa utilizando os sites das Secretarias de Educação de alguns estados brasileiros, e a partir dessa pesquisa realizamos um breve diagnóstico da presença do referido teorema no Ensino Médio. A escolha dos estados deu-se pelo modo de apresentação dos componentes curriculares, inclusive percebemos que alguns estados não possuem um modelo de direcionamento para os professores.

Como esta análise não é o ponto crucial de nossas pesquisas, optamos por elaborar uma tabela informando o estado pesquisado, a série em que este tópico é ensinado, o tema em que o assunto é abordado, o conteúdo especifico que deve ser ensinado e os objetivos/habilidades/competências (aqui considerados grosseiramente como sinônimos) de ensino para o tema proposto.

Tabela 1.1:

| **Estado** | **Série** | **Tema** | **Cont. Específicos** | **Obj./ Hab. / Comp.** |
|---|---|---|---|---|
| AC | 3º | −− | * Identificação do grau e dos coeficientes de um polinômio.<br>* Identificação de polinômios nulos e de polinômios idênticos.<br>* Cálculo do valor numérico de um polinômio.<br>* Cálculo do resultado de adição e de subtração de polinômios.<br>* Cálculo do produto de dois polinômios.<br>* Cálculo do quociente entre dois polinômios não nulos.<br>* Resolução de equações polinomiais por decomposição em fatores do 1º grau.<br>* Identificação de raízes múltiplas.<br>* Identificação de raízes não reais.<br>* Relações entre coeficientes e raízes.<br>* Identificação de raízes racionais. | Identificar polinômios, calcular o valor numérico, operar com polinômios, resolver equações polinomiais, destacando a decomposição de um polinômio em fatores do 1º grau, as raízes múltiplas, complexas, racionais e as relações de Girard. |
| AM | | Álgebra | −− | * Efetuar operações entre polinômios.<br>* Calcular raízes de equações polinomiais. |
| MS | 3º | Polinômios e Equações Algébricas | * Operações com polinômios.<br>* Equações polinomiais. | Relacionar o estudo de polinômios e equações polinomiais com o estudo de funções. |
| PE | 3º | Polinômio e Equações Algébricas | * Função polinomial.<br>* Valor numérico de um polinômio.<br>* Igualdade de Polinômios.<br>* Operações com polinômios. | * Capacidade de relacionar e aplicar o conhecimento desenvolvido acerca de polinômios em situações problema. |

Continua na próxima página

**Tabela 1.1**

| Estado | Série | Tema | Cont. Específicos | Obj./ Hab. / Comp. |
|---|---|---|---|---|
| | | | * Equações polinomiais.<br>* Teorema Fundamental da Álgebra.<br>* Decomposição de fatores de primeiro grau.<br>* Relações de Girard. | * Efetuar operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com polinômios.<br>* Tomar decisões diante de situações - problema, argumentando com base na interpretação das informações e nos conhecimentos sobre polinômios.<br>* Determinar o conjunto solução de equações polinomiais. |
| PR | −− | Número e Álgebra | Polinômios. | * Identificar e realizar operações com polinômios.<br>* Identificar e resolver equações, sistemas de equações e inequações - inclusive as exponenciais, logarítmicas e modulares. |
| RJ | 3º | Campo Algébrico-Simbólico | Números complexos, Polinômios e Equações Algébricas. | * Realizar operações e divisão de polinômios de uma variável por x - a.<br>* Compreender a regra de Briot-Ruffini.<br>* Resolver equações algébricas, utilizando o Teorema Fundamental da Álgebra e calculando raízes múltiplas e número de raízes.<br>* Compreender raízes racionais e complexas.<br>* Se possível, aprender a utilizar algum software para resolução de equações.<br>* Caso possível, desenvolver o entendimento de que problemas corriqueiros da matemática financeira podem levar a equações algébricas de grau bastante elevado, articulando os assuntos |

Continua na próxima página

**Tabela 1.1**

| Estado | Série | Tema | Cont. Específicos | Obj./ Hab. / Comp. |
|---|---|---|---|---|
| | | | | entre si e com a vida atual. |
| RR | $3^{\underline{o}}$ | Polinômios | * Função polinomial: valor numérico de um polinômio, polinômio de identidade nula, princípio de identidade de polinômios, grau de um polinômio.<br>* Operações com polinômios: adição, subtração, multiplicação, divisão de polinômios, teorema do resto, teorema de D'Alembert, algoritmo de Briot-Ruffini, potenciação de polinômios.<br>* Equações polinomiais: Teorema Fundamental da Álgebra; multiplicidade de uma raiz; relações de Girard; raízes racionais; raízes complexas. | —— |
| RS | $3^{\underline{o}}$ | —— | * Polinômios, classificação e grau de polinômio.<br>* Notação e linguagem algébrica.<br>* Operações com polinômios: adição, subtração, multiplicação e divisão.<br>* Grau de polinômio resultante das operações.<br>* Divisão de um polinômio por $(x-a)$.<br>* Regra de Briot-Ruffini.<br>* Divisibilidade por $(x-a)$.<br>* Raízes de um polinômio. | * Ler e interpretar a linguagem algébrica, utilizando diferentes situações.<br>* Reconhecer um polinômio de grau qualquer.<br>* Operar com polinômios reconhecendo o grau do polinômio resultante.<br>* Reconhecer e utilizar dispositivos práticos que facilitem divisão de polinômios.<br>* Determinar as raízes de um polinômio. |
| SE | $3^{\underline{o}}$ | Equações algébricas | * Polinômios.<br>* Divisão de polinômios.<br>* Redução do grau de uma equação.<br>* Polinômios.<br>* Equações algébricas com coeficientes reais.<br>* Teorema Fundamental da Álgebra. | —— |
| SP | $3^{\underline{o}}$ | Equações algébricas e | * Equações polinomiais.<br>* Números complexos: operações | —— |

Continua na próxima página

**Tabela 1.1**

| Estado | Série | Tema | Cont. Específicos | Obj./ Hab. / Comp. |
|---|---|---|---|---|
| | | números complexos | e representação geométrica.<br>* Propriedades das raízes de uma equação polinomial.<br>* Relações de Girard. | |

Salientamos que não existe um padrão nacional quanto às propostas curriculares, o que nos levou a optar pelos estados que possuem estas informações mais objetivas e acessíveis através dos sites das secretarias de educação.

De forma bem ampla, o assunto *polinômios* é desenvolvido em todos os 10 estados brasileiros pesquisados. Especificamente em relação ao T.F.A., percebemos que este é proposto diretamente em apenas 4 estados. Entretanto, o conteúdo específico de raízes polinomiais carrega diretamente consigo o tema Teorema Fundamental da Álgebra, assim temos sua presença na proposta curricular de mais de 4 estados.

Sendo que o Brasil possui 26 estados e 1 distrito federal, selecionamos 37% dos estados para analisar suas propostas curriculares em matemática no tema Polinômios. Destes percebemos que entre os estados destacados 40% desenvolvem o tema Teorema Fundamental da Álgebra e 40% destacam o tópico raízes polinomiais. Considerando que aqueles que sugerem o trabalho com polinômios também enfocam o T.F.A., embora não apresentem diretamente em sua proposta, podemos afirmar que todos os estados pesquisados têm em suas diretrizes o ensino do teorema em questão.

Diante desta percepção qualitativa, mas não quantitativa, concluímos que os organizadores dos currículos estaduais também atribuem grande importância à exposição do T.F.A. no Ensino Básico.

*Capítulo 2*

# Contexto Histórico

## 2.1 A Importância da História

O estudo da Ciência Matemática torna-se um grande contributo para a análise e compreensão dos fatos que marcam fortemente essa ciência neste período contemporâneo. Desta forma optamos por introduzir neste trabalho uma breve retrospectiva histórica do tema em questão, tendo em vista que *a aquisição e a elaboração do conhecimento se dão no presente, como resultado do passado, com vistas às estratégias de uma ação no presente, projetando-se no futuro* (ver [6]).

Para os professores Wilian e Fernando do Colby College, em Watervile, é essencial conhecer a história da ciência, assim sendo eles enfatizam que: *A Matemática é o esforço humano continuado, como a Literatura, a Física, a Arte, a Economia e a Música. A Matemática que aprendemos e usamos hoje, difere de muitos modos da Matemática de mil, quinhentos ou mesmo cem anos atrás. A Matemática do século XXI, certamente evoluirá para algo diferente da do século XX. Aprender sobre Matemática é como começar a conhecer outra pessoa. Quanto mais você sabe de seu passado, melhor pode entendê-la e interagir com ela, agora e no futuro* (ver [2]).

Nesta perspectiva optamos por iniciar esta etapa de nossa pesquisa com uma contextualização histórica, embora de forma reduzida, do tema proposto.

## 2.2 Breve História dos Números Complexos

Em todo o processo evolutivo da Matemática e nas mais diversas civilizações, há vestígios de equações, vindas de situações reais como cálculos de volumes e áreas, ou de forma meramente teórica. Toda esta presença veio a culminar na formulação de diversos teoremas e propriedades que vigoram na matemática contemporânea, entre estes nos atentaremos ao Teorema Fundamental da Álgebra.

Para compreender o desenvolvimento do T.F.A. é de fundamental importância conhecer o percurso histórico dos números complexos. Inicialmente apresentaremos uma definição formal dos números complexos apresentada por Elon Lajes Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado em [17].

Um número complexo é uma expressão da forma $a + bi$, com $a$ e $b$ reais sendo $i = \sqrt{-1}$, e o conjunto dos números complexos é representado pelo símbolo $\mathbb{C}$. Fixando um sistema de coordenadas no plano, o complexo $z = a + bi$ é representado geometricamente pelo ponto $P(a, b)$, chamado de imagem do complexo $z$.

Existem registros da presença dos números complexos, claro que de uma maneira informal, em períodos históricos que datam de 1700 a.C., informação impregnada nas tábuas de argila da Suméria. Em cerca de 75 d.C., Heron (matemático grego de Alexandria) encontrou a raiz quadrada de $81 - 144$, em um trabalho sobre o volume do tronco de um cone. Isso comprova que no desenvolvimento matemático houve a necessidade da criação do conjunto dos números complexos para resolver problemas deste tipo (ver [23]).

Quanto à presença de raízes quadradas de números negativos, temos conhecimento de que:

> Bhaskara Acharya (século XII d.C.), matemático hindu, escreveu que o quadrado de um número positivo, assim como de um número negativo, é positivo. Afirma que a raiz quadrada de um número positivo é positiva ou negativa e que não existe raiz quadrada de um número negativo, pois um número negativo não é um quadrado (ver [23]).

Transcrevemos aqui um trabalho de Diofanto (matemático grego, século III d.C.) em que ele apresenta um problema envolvendo equação do segundo grau com raiz quadrada de um número negativo, mostrando mais uma vez a necessidade de ampliação dos números reais (ver [23]).

> **Problema:** Determinar os lados de um triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 unidades. **Solução:** indicando por $x$ e $y$ os comprimentos dos catetos temos:
>
> $$\frac{xy}{2} = 7 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$
>
> Desenvolvendo a segunda equação temos $12x + 12y = 72 + xy$ e nesta pondo $y = \dfrac{14}{x}$ obtemos
>
> $$6x^2 - 43x + 84 = 0$$
>
> e portanto
>
> $$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$
>
> Aqui, Diofanto observa que só poderia haver solução se tivessemos $\left(\frac{172}{2}\right)^2 > \frac{24}{336}$ e que neste contexto é supérfluo procurar um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

Assim, nos estudos das equações do segundo grau, os pesquisadores, matemáticos e curiosos se depararam com os números complexos, entretanto somente com equações do terceiro grau que estes números começaram a ser aceitos pela comunidade matemática.

Os matemáticos italianos Cardano (1501-1576) e Tartaglia (1500-1557) desenvolveram em 1545 um método algébrico para resolução de equação do terceiro e quarto graus, utilizando a seguinte fórmula para solucionar equações do tipo $x^3 = ax + b$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Um dos problemas apresentados, exposto a seguir, foi denominado por Cardano como *manifestamente impossível*, cuja resolução era *tão sutil quanto inútil*. Acompanhe a resolução para compreender por que ele emprega estes termos (ver [23]).

**Problema:** Encontrar dois números cuja soma é 10 e cujo produto é 40.
**Solução:** Sejam $x$ e $y$ esses números. Então devemos ter

$$x + y = 10. \tag{2.2.1}$$

e

$$xy = 40. \tag{2.2.2}$$

Isolando a variável $x$ na equação (2.2.1) temos $x = 10 - y$. Substituindo este valor na equação (2.2.2) obtemos $(10 - y)y = 40$ e assim $y^2 - 10y + 40 = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2.1} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2} \\ &= \frac{10 \pm 2\sqrt{-15}}{2} \\ &= 5 \pm \sqrt{-15}. \end{aligned}$$

Logo $y_1 = 5 + \sqrt{-15}$ e $y_2 = 5 - \sqrt{-15}$ são as duas soluções para $y$.

Cardano expressa uma raiz quadrada de um número negativo e a despreza sem ao menos perceber que contribuiu significativamente para a construção do conjunto dos números complexos. Utilizando a fórmula de Cardano (ou Cardano-Tartaglia), Bombelli (matemático e engenheiro francês, 1526-1572) resolve a equação $x^3 = 15x + 4$ e encontra

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

como raiz. Desta forma, observando a raiz $\sqrt{-121}$, ele percebe que a raiz par de um número negativo tem um sentido, uma vez que, a equação proposta também apresenta 4 como raiz (ver [23]).

A denominação *Números Complexos* pode ser atribuída a C. Wessel (agrimensor norueguês, 1745-1818) em 1799, a J. R. Argand (guarda-livros suíço, 1768-1822) em 1806 e C. F. Gauss (matemático alemão, 1777-1855) em 1831. Também se deve a eles as primeiras associações entre números complexos e pontos no plano. Apenas com a representação geométrica os números complexos se tornaram concretos e aceitáveis pela comunidade matemática. O primeiro matemático a propor esta representação geométrica formal foi J. Wallis (matemático britânico, 1616-1703) em 1673. Esta visão mais sólida foi proposta pelo pesquisador supracitado na tentativa de encontrar uma representação geométrica para as raízes complexas de uma equação de 2º grau (ver [23]).

Com este ponta pé inicial outros também se enveredaram nesta busca, entre eles os franceses J. D'Alembert (físico, matemático e filósofo francês, 1717-1783) em 1746 e A. de Moivre (matemático francês, 1667-1754). Este último, em suas investigações, a partir da chamada forma trigonométrica $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta)$ do número complexo $z$, desenvolveu a fórmula

$$z^n = p^n[\cos(n\theta) + i\text{sen}\,(n\theta)],$$

onde $n$ é um inteiro positivo, que leva seu nome e é muito importante para os estudos de números complexos. Também encontram-se entre os interessados pela apresentação geométrica o inglês R. Cotes (professor inglês, 1682-1716) em 1714 e o suíço Euler (1707-1783). Euler em 1742 utilizava a notação $i = \sqrt{-1}$, que só se tornou popular após ser adotada por Gauss que afirmou: *um polinômio com coeficientes reais pode ser fatorado como um produto de fatores lineares e fatores quadráticos.* Em contrapartida Euler não conseguiu uma representação rigorosa deste fato. (ver [23]).

Euler, apesar de utilizar e manipular os números complexos, também possuía uma visão grosseira sobre eles. Podemos perceber este fato em suas palavras transcritas na obra Vollstandige Anleitung Zur Algebra (Guia Completo para a Álgebra) datada de 1770:

> Uma vez que todos os números concebíveis são maiores do que 0 ou menores do que 0 ou iguais 0, é claro que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser incluída entre os números possíveis. Consequentemente, devemos dizer que estes números são impossíveis. A raiz quadrada de um número negativo nos conduz a tais números, que por sua natureza são impossíveis, e que são chamados costumeiramente de imaginários, pois eles só existem na imaginação (ver [29]).

A fundamentação conhecida dos números complexos nos dias de hoje, formulada por Hamilton (irlandês, 1805-1865) em 1833, que ao perceber que a soma $a + bi$ não se tratava de uma soma corriqueira, constatou que qualquer número complexo $a + bi$ pode ser expresso como um par ordenado de números reais $(a, b)$ (ver [20]).

## 2.3 Abordagem Histórica do Teorema Fundamental da Álgebra

Nesta seção, apresentaremos a história do Teorema Fundamental da Álgebra. Segundo Felix Klein (alemão, 1849-1925), *O professor que ensina Matemática desligada da parte histórica, comete verdadeiro atentado contra as ciências e contra a cultura em geral* (ver [27]).

No ano de 1608, o alemão Peter Rothe (?-1617) afirmou que toda equação polinomial real de grau $n$ pode ter exatamente $n$ soluções. Alguns anos após, Girard (francês, 1595-1632) afirmou que uma equação polinomial com coeficientes diferentes de zero e grau $n$ tem $n$ raízes. Entretanto, não chegou a demonstrar tal afirmativa.

Oito anos à frente, Descartes (francês, 1596-1650) afirmou que se $a$ é uma raiz de um polinômio, então $(x - a)$ é um divisor deste polinômio.

Leibniz (filósofo, matemático e diplomata alemão, 1646-1716) em 1702 e Nicolaus II Bernoulli (suíço, 1695-1726) anos mais tarde, apresentaram, respectivamente, os seguintes contraexemplos para a afirmação de René Descartes:

$$x^4 + a^4 \quad \text{e} \quad x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4.$$

Posteriormente, Euler em 1742 os corrigiu mostrando que os polinômios poderiam ser decompostos da seguinte forma:

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a\sqrt{2}x + a^2)(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2)$$

e

$$x^4-4x^3+2x^2+4x+4=(x^2-(2+\alpha)x+1+\sqrt{7}+\alpha)(x^2-(2-\alpha)x+1+\sqrt{7}-\alpha),$$

onde $\alpha$ é um número real qualquer. Também se deve a Descartes a utilização dos termos Real e Imaginário.

Historicamente, a primeira demonstração do T.F.A. realizada em 1746 se deve a D'Alembert, que a encontrou ao procurar uma maneira para integrar utilizando Frações Parciais. Essa demonstração continha um erro que foi corrigido em 1851 por V. Puiseux (matemático e astrônomo francês, 1820-1883). Mesmo não sendo matematicamente perfeita esta descoberta foi tão importante que na França este resultado é conhecido como Teorema de D'Alembert. Apesar de D'Alembert ter demonstrado o T.F.A., a busca por uma demonstração mais simples, completa e perfeita aguçou os matemáticos. Nesta procura se aventurou Lagrange (matemático italiano, 1736-1813) em 1772 que melhorou o trabalho de D'Alembert, mas ainda deixou algumas partes incompletas (ver [23]).

Em 1795 Laplace (matemático, astrônomo e físico francês, 1749-1827) propôs outra prova considerada muito elegante, mas com algumas imperfeições. Outra demonstração inacabada foi proposta pelo inglês James Wood (1760-1839) no ano de 1798. Todas estas produções matemáticas foram reformuladas e já é possível encontrá-las de forma rigorosa, completa e correta (ver [23]).

Finalmente, a primeira demonstração correta do T.F.A., apesar de algumas imperfeições para a comunidade científica, foi apresentada por Carl Gauss no ano de 1799 em sua tese de doutorado intitulada *Nova demonstração do teorema que toda função racional inteira de uma variável pode ser decomposta em fatores reais do primeiro ou segundo graus*(ver [23]).

Alguns anos após o matemático publicou outras novas demonstrações deste teorema. Em 1816 a segunda demonstração era bastante algébrica e baseava-se no Teorema do Anulamento que afirma que uma função contínua, num intervalo fechado, que é maior que zero em um ponto e menor que zero em outro ponto se anulara num terceiro ponto, e que ainda não havia sido demonstrado. A terceira formulação publicada no mesmo ano utilizava integração. Finalmente em 1849 divulgou sua quarta demonstração para polinômios com coeficientes e variáveis complexas (ver [23]).

No ano de 1814, Argand publicou uma demonstração considerada uma das mais simples, utilizando o Teorema de Weierstrass, somente demonstrado em 1870. Desta forma sua obra não foi reconhecida de imediato. Quando aceita pelo meio acadêmico, foi introduzida em muitos livros do século XIX. Somente a partir do século XX foi substituída pela demonstração de J. Liouville (matemático francês, 1809-1882) que se baseava no teorema que leva seu nome e afirma que uma função inteira e limitada é constante. Esta demonstração foi produzida por contradição. Até aquele momento, nenhuma das demonstrações tinha tido um caráter construtivista. Apenas em 1940 Hellmuth Kneser (alemão, 1898-1973) atingiu tal proeza que foi aprimorada por Martim Kneser (alemão, 1928-2004), seu filho, no ano de 1981 (ver [8]).

O holandês Theo de Jong recentemente, em 2009, apresentou uma nova demonstração a partir da primeira demonstração defendida por Gauss para o T.F.A., no entanto, esta inovação envolve elementos nada elementares da Matemática (ver [23]).

O conhecimento do Teorema Fundamental da Álgebra abriu caminho para o desenvolvimento dos números complexos, como podemos vislumbrar, no processo histórico destes tão importantes temas da Ciência Matemática.

*Capítulo 3*

# Conjunto dos Números Complexos

Mediante o contexto histórico, os números complexos têm sua origem na dificuldade encontrada em resolver equações algébricas. Apresentaremos neste capítulo as propriedades, teoremas e operações básicas destes números, a fim de garantir a compreensão e manipulação destes no desenvolvimento da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e resultados auxiliares. O desenvolvimento deste capítulo é baseado nas referências [1] e [5].

## 3.1 Definições e Propriedades

Nesta seção apresentamos definições e propriedades básicas dos números complexos.

**Definição 3.1.1.** Um número complexo $z$ é definido como um par ordenado $(a, b)$ de números reais $a$ e $b$.

O conjunto $\{(a, b); a, b \in \mathbb{R}\}$ dos números complexos será denotado por $\mathbb{C}$.

**Definição 3.1.2.** Os números complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ são definidos como idênticos se $a = c$ e $b = d$.

**Definição 3.1.3.** Sejam $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ dois números complexos. A soma de $z_1$ com $z_2$ e o produto de $z_1$ por $z_2$ são definidos respectivamente por:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c, b + d), \\ z_1 z_2 &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

**Observação 3.1.4.** Seja $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Temos que

$$(0, 0) + z = (0 + a, 0 + b) = z$$

e assim $(0, 0)$ é um elemento neutro para a soma definida em $\mathbb{C}$. Denotando $-z = (-a, -b)$ temos que

$$z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

e assim $-z$ é um elemento inverso de $z$ em relação à operação de adição definida em $\mathbb{C}$. Dados $z_1$, $z_2 \in \mathbb{C}$, denotaremos o elemento $z_1 + (-z_2)$ por $z_1 - z_2$, isto é,

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Verificamos que

$$(1,0)z = (1,0)(a,b) = (a,b),$$

e portanto $(1,0)$ é um elemento neutro para o produto definido em $\mathbb{C}$. Se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, denotamos por $z^{-1}$ o número complexo,

$$z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right).$$

Verificamos facilmente que

$$zz^{-1} = (1,0)$$

e logo podemos concluir que $z^{-1}$ é um elemento inverso de z em relação à operação de multiplicação considerada em $\mathbb{C}$. Dados $z_1$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$, denotaremos o elemento $z_1 z_2^{-1}$ por $z_1/z_2$, isto é,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}.$$

Não o faremos aqui, mas pode ser demonstrada, sem grande dificuldade, a unicidade dos elementos neutros e dos elementos inversos aditivo e multiplicativo de um dado elemento $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq 0$ para a multiplicação).

Em seguida listamos as propriedades básicas referentes às operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$. O elemento $(0,0) \in \mathbb{C}$ será denotado por 0 e o elemento $(1,0)$ por 1.

**Proposição 3.1.5.** Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. As seguintes propriedades são verificadas:

(a) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$,

(b) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,

(c) $0 + z_1 = z_1 + 0 = z_1$,

(d) $z_1 + (-z_1) = -z_1 + z_1 = 0$,

(e) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$,

(f) $z_1 z_2 = z_2 z_1$,

(g) $1 z_1 = z_1 1 = z_1$,

(h) $z_1 z_1^{-1} = z_1^{-1} z_1 = 1$,

(i) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

**Observação 3.1.6.** Seja $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. O número complexo $(a,0)$ será identificado como o número real $a$. Esta regra permite configurar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como um subconjunto do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. O número complexo $(0,1)$ será denotado por $i$ e chamado de unidade imaginária. Pela definição de multiplicação em $\mathbb{C}$ temos

$$(0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0).$$

Assim, pelas identificações já definidas temos

$$i^2 = -1,$$

isto é, $i$ é a raiz quadrada de $-1$. Pela definição de produto

$$bi = (b, 0)(0, 1) = (0, b),$$

portanto $(0, b)$ é identificado como $bi$. Logo para todo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ podemos escrever

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

Dizemos que a é a parte real de $z$ e $b$ é a parte imaginária de $z$ e escrevemos $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$.

De agora em diante os números complexos serão escritos na forma $z = a + bi$ onde $a$, $b \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

**Observação 3.1.7.** A representação geométrica de um número complexo é dada no plano complexo (plano cartesiano) onde o eixo das abscissas é o eixo real ($Re$) e o eixo das ordenadas é o eixo imaginário ($Im$). O número complexo é representado neste plano como um ponto ou um vetor que une a origem a este ponto. Veja a representação para o número $z = a + bi$.

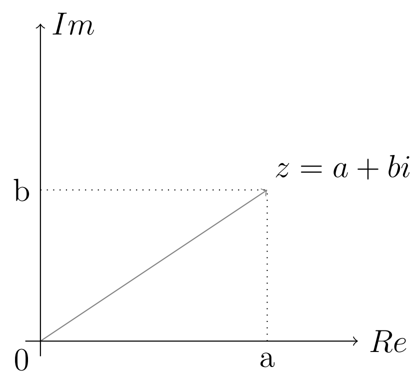



Figura 3.1: Plano complexo

**Definição 3.1.8.** Denomina-se conjugado de um número complexo $z = a+bi$ ao número complexo $\overline{z} = a - bi$.

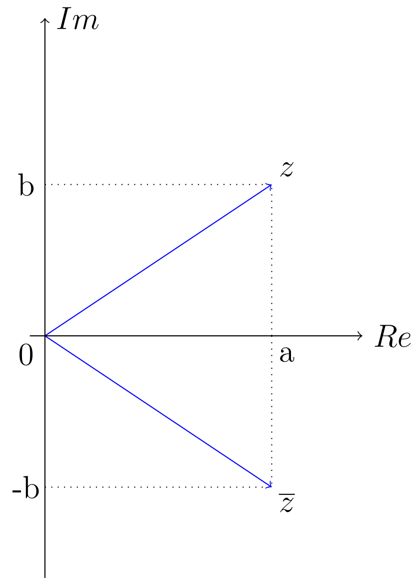



Figura 3.2: Número complexo $z$ e o seu conjugado $\overline{z}$

**Definição 3.1.9.** O módulo de um número complexo $z = a + bi$ é definido como sendo o número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

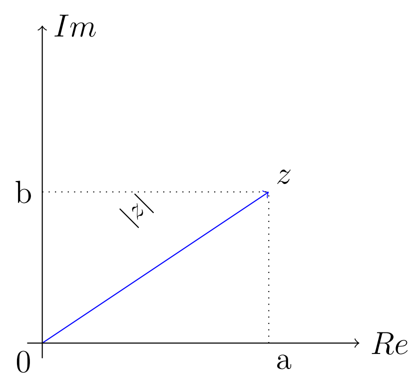



Figura 3.3: Módulo de um número complexo $z$

**Proposição 3.1.10.** Sejam $z$, $w \in \mathbb{C}$. Então:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,

(c) $z\overline{z} = |z|^2$,

(d) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$, $\;w \neq 0$,

(e) $|zw| = |z|\,|w|$.

*Demonstração.* As propriedades ($a$), ($b$) e ($c$) são imediatas. Se $z_1 = z/w$, então $z_1 w = z$. Por ($b$) temos

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{\overline{z_1 w}}{\overline{w}} = \frac{\overline{z_1}\,\overline{w}}{\overline{w}} = \overline{z_1} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)},$$

o que demonstra ($d$).

Passemos agora à demonstração de ($e$). Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Temos

$$\begin{aligned}
|zw| &= |(a+bi)(c+di)| \\
&= |(ac-bd) + (ad+bc)i| \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
&= |a+bi|\,|c+di| \\
&= |z|\,|w|\,.
\end{aligned}$$

Completamos assim a demonstração da proposição. □

**Observação 3.1.11.** Seja $z = a + bi$ um número complexo não nulo e $\theta$ o ângulo formado pelo vetor $z$ e o semieixo real positivo no sentido anti-horário como mostra a Figura 3.4. Verificamos que $a = |z|\cos\theta$, $b = |z|\operatorname{sen}\theta$ e assim

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

Esta representação do número complexo $z$ é chamada de representação polar de $z$. O ângulo $\theta$ é chamado de argumento de $z$.

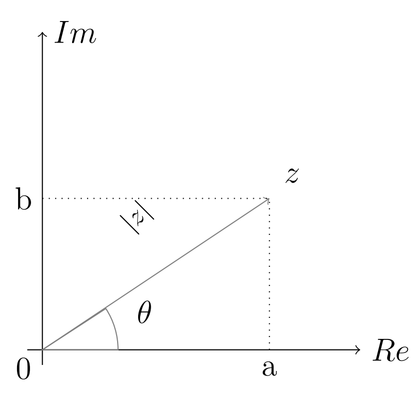



Figura 3.4: Número complexo $z$ e seu argumento $\theta$

**Proposição 3.1.12.** Sejam $z_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$ e para cada $1 \leq k \leq n$ seja $\theta_k$ o argumento do número complexo $z_k$. Então

$$z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n = |z_1|\,|z_2| \cdots |z_n| \left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n\right) + i \operatorname{sen}\,\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n\right)\right].$$

*Demonstração.* Sejam $z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ números complexos na forma polar. Temos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\,(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)\,|z_2|\,(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= |z_1|\,|z_2|\,\left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i\,(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1)\right] \\ &= |z_1|\,|z_2|\,\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)\right], \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado para $n = 2$.

Suponhamos agora que a fórmula seja válida para $n - 1$, ou seja,

$$z_1 z_2 \cdots z_{n-1} = |z_1|\,|z_2| \cdots |z_{n-1}| \left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-1}\right) + i \operatorname{sen}\,\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-1}\right)\right].$$

Utilizando a hipótese de indução obtemos

$$\begin{aligned} &z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n \\ &= |z_1| \cdots |z_{n-1}| \left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-1}\right) + i \operatorname{sen}\,\left(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{n-1}\right)\right] |z_n| \left[\cos\theta_n + i \operatorname{sen}\theta_n\right] \\ &= |z_1| \cdots |z_n|\,(\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}) \cos\theta_n - \operatorname{sen}\,(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}) \operatorname{sen}\theta_n) \\ &+ i\,|z_1| \cdots |z_n|\,(\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}) \operatorname{sen}\theta_n + \operatorname{sen}\,(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}) \cos\theta_n) \end{aligned}$$

e utilizando as fórmulas de soma de arcos, temos

$$z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n = |z_1| \cdots |z_n| \left[\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1} + \theta_n) + i \operatorname{sen}\,(\theta_1 + \cdots + \theta_{n-1} + \theta_n)\right].$$

Portanto concluimos a demonstração pelo Princípio de Indução finita. □

**Proposição 3.1.13.** Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com $z_2 \neq 0$ e sejam $\theta_1$ e $\theta_2$ os argumentos de $z_1$ e $z_2$ respectivamente. Então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)\right]. \tag{3.1.1}$$

*Demonstração.* Temos

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|\,(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)}{|z_2|\,(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\,\frac{1}{\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\,\frac{\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2}{(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)\,(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\,\frac{\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\,(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i\,(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1)] \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]\,,
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração. □

**Proposição 3.1.14** (Fórmula de De Moivre)**.** Seja $z$ um número complexo na forma polar e seja $\theta$ o seu argumento, ou seja, $z = |z|\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ temos

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))\,.$$

*Demonstração.* A demonstração segue imediatamente da Proposição 3.1.12, bastando tomar $|z_k| = |z|$ e $\theta_k = \theta$ para $1 \leq k \leq n$. □

**Definição 3.1.15.** Dados um número complexo $w$ e um número natural $n \geq 1$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz $n$-ésima de $w$ se $z^n = w$.

**Teorema 3.1.16.** Sejam $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, $\alpha$ o argumento de $w$ e $n \in N^*$. Então $w$ possui $n$ raízes complexas distintas, $w_0, \ldots, w_{n-1}$, a saber

$$w_k = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

isto é, $(w_k)^n = w$ para $0 \leq k \leq n-1$.

*Demonstração.* Considere os números complexos $z$ e $w$ na fórmula polar:

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \text{ e } w = |w|\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)\,, \tag{3.1.2}$$

e suponhamos que $z$ seja uma raiz $n$-ésima de $w$. Como pela Definição 3.1.15 devemos ter

$$z^n = w,$$

usando a fórmula de Moivre obtemos

$$|z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = |w| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha).$$

Pela igualdade de números complexos temos $|z|^n = |w|$, o que implica que $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ e ainda temos $n\theta = \alpha + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}.$$

Assim,

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Observamos que basta considerar $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $0 \leq k \leq n-1$, pois se $k \geq n$, existem $p, r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq r \leq n-1$ e $k = np + r$, e assim,

$$\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\alpha + 2r\pi}{n} + 2p\pi\right) = \cos\left(\frac{\alpha + 2r\pi}{n}\right).$$

Como o mesmo vale para a função $\operatorname{sen} x$, concluimos assim a demonstração do teorema. □

## 3.2 Desigualdade Triangular

A desigualdade triangular garante que, em um triângulo ABC qualquer, o comprimento de um dos lados é sempre menor do que ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados. Em analogia com a geometria plana há uma versão da desigualdade triangular para números complexos. Os resultados desta seção serão utilizados em seções e capítulos posteriores.

**Lema 3.2.1.** Se $z, w \in \mathbb{C}$, então

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\overline{w})$$

*Demonstração.* Temos,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + (z\overline{w} + \overline{z}w) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + (z\overline{w} + \overline{z}w). \end{aligned}$$

Observamos que $\overline{z}w$ é o conjugado de $z\overline{w}$ e portanto

$$z\overline{w} + \overline{z}w = 2Re(z\overline{w}),$$

o que completa a demonstração. □

**Teorema 3.2.2** (Desigualdade Triangular)**.** Se $z, w \in \mathbb{C}$, então

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

*Demonstração.* Utilizando o resultado do Lema 3.2.1, temos

$$|z+w|^2 - (|z|+|w|)^2 = -2\,|z|\,|w| + 2Re(z\overline{w}).$$

Pela Proposição 3.1.10 temos $Re(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z|\,|w|$ e logo,

$$|z+w|^2 - (|z|+|w|)^2 \leq 0,$$

o que completa a demonstração. □

**Proposição 3.2.3.** Sejam $z$ e $w$ dois números complexos. Então,

$$|\,|z| - |w|\,| \leq |z-w|\,.$$

*Demonstração.* Utilizando a desigualdade triangular temos

$$|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|$$

e assim

$$|z| - |w| \leq |z-w|\,.$$

De forma análoga

$$|w| = |(-z+w)+z| \leq |-z+w| + |z| = |z-w| + |z|$$

e assim

$$|w| - |z| \leq |z-w|\,.$$

Logo podemos concluir que $|\,|z| - |w|\,| \leq |z-w|$. □

A figura abaixo ilustra geometricamente o Teorema 3.2.2 e a Proposição 3.2.3.

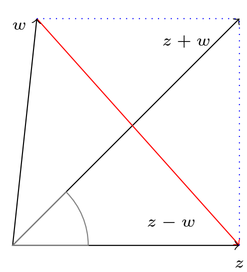



Figura 3.5: Ilustrando $|z| - |w| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$.

**Proposição 3.2.4.** Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complexos. Então

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$$

e

$$|z_1 - z_2 - \cdots - z_n| \geq |z_1| - |z_2| - |z_3| - \cdots - |z_n|\,.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.2.2 sabemos que

$$|(z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}) + z_n| \leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}| + |z_n|.$$

Por indução podemos comprovar que,

$$\begin{aligned} |(z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-2}) + z_{n-1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-2}| + |z_{n-1}| \\ |(z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-3}) + z_{n-2}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-3}| + |z_{n-2}| \\ &\vdots \\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|.$$

De forma análoga podemos demonstrar a segunda parte. □

**Proposição 3.2.5.** Se $w$ e $c$ são números complexos tais que $|w + c| < |c|$ e $t$ é um número real, tal que $0 < t < 1$, então $|tw + c| < |c|$.

*Demonstração.* Com efeito, como $|w + c| < |c|$, segue que $|w + c|^2 < |c|^2$. Logo,

$$(w + c)\overline{(w + c)} < |c|^2,$$

o que implica que $|w|^2 + 2Re(w\overline{c}) < 0$. Como $0 < t < 1$, então

$$t(|w|^2 + 2Re(w\overline{c})) < 0$$

e assim $t|w|^2 + 2tRe(w\overline{c}) < 0$. Notemos que

$$t^2|w|^2 + 2tRe(w\overline{c}) < t|w|^2 + 2tRe(w\overline{c}),$$

uma vez que, $t^2 < t$. Portanto,

$$t^2|w|^2 + 2tRe(w\overline{c}) < 0,$$

ou seja,

$$|tw + c|^2 < |c|^2,$$

o que demonstra a desigualdade desejada. □

*Capítulo 4*

# Continuidade e Limites Infinitos

Neste capítulo estudaremos resultados que serão aplicados na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, tais como funções contínuas, Teorema de Weierstrass e limites infinitos. Os únicos resultados que assumiremos em nossas demonstrações são o Princípio do Supremo para os números reais e o Teorema de Bolzano-Weierstrass para sequências de números reais. As referências para este capítulo são [1], [5], [11] e [19].

## 4.1 Máximo, Mínimo, Supremo e Ínfimo

Nesta seção estudamos conceitos que serão usados em seções posteriores. As referências para esta seção são [11] e [19].

**Definição 4.1.1.** Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(a) Se $M \in A$ e $M \geq x$, para todo $x \in A$, dizemos que $M$ é o *máximo de* $A$ e denotamos $M = \max A$.

(b) Se $m \in A$ e $m \leq x$, para todo $x \in A$, dizemos que $m$ é o *mínimo de* $A$ e denotamos $m = \min A$.

**Exemplo 4.1.2.** Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $3 = \max A$ e $1 = \min A$.

**Exemplo 4.1.3.** Seja $A = [1, 2)$. Temos que $1 = \min A$. Agora, não existe $M \in A$ tal que $M \geq x$ para todo $x \in A$, uma vez que $2 \notin A$. Logo $A$ não possui máximo.

**Definição 4.1.4.** Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e seja $m \in \mathbb{R}$.

(a) Se $m \geq x$ para todo $x \in A$, dizemos que $m$ é uma *cota superior de* $A$.

(b) Se $m \leq x$ para todo $x \in A$, dizemos que $m$ é uma *cota inferior de* $A$.

**Exemplo 4.1.5.** Seja $A = [1, 2)$. Então $B = [2, +\infty)$ é o conjunto das cotas superiores de $A$ e $D = (-\infty, 1]$ é o conjunto das cotas inferiores de $A$.

**Definição 4.1.6.** Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(a) A menor cota superior de $A$, caso exista, é denominada *supremo de* $A$ e é denotada por $\sup A$.

(b) A maior cota inferior de $A$, caso exista, é denominada *ínfimo de* $A$ e é denotada por $\inf A$.

**Exemplo 4.1.7.** Seja $A = [1, 2)$. Segue pelo Exemplo 4.1.5 que $\sup A = \min B = 2$ e $\inf A = \max D = 1$. Observe que $\sup A$ existe mas $\max A$ não existe pelo Exemplo 4.1.3.

**Definição 4.1.8.** Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(a) Se $A$ possui uma cota superior, dizemos que $A$ é limitado superiormente.

(b) Se $A$ possui uma cota inferior, dizemos que $A$ é limitado inferiormente.

(c) Dizemos que $A$ é limitado se $A$ é limitado superiormente e inferiormente, isto é, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x \leq M$ para qualquer $x \in A$.

**Exemplo 4.1.9.** O conjunto $A = [1, 2)$ é limitado pois $1 \leq x \leq 2$ para todo $x \in A$.

**Exemplo 4.1.10.** O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado inferiormente pois $0 \leq n$ para todo $n \in N$, mas não é limitado superiormente.

Admitiremos a seguinte propriedade dos números reais.

**Proposição 4.1.11** (Propriedade do Supremo)**.** Todo subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, que é limitado superiormente, admite supremo.

**Observação 4.1.12.** Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, um conjunto limitado inferiormente e seja $B = \{-x : x \in A\}$. É fácil verificar que $B$ é limitado superiormente e assim pela Propriedade 4.1.11 existe $M = \sup B$. Temos $-x \leq M$ para todo $x \in A$ pois $M$ é uma cota superior de $B$ e portanto $x \geq -M$ para todo $x \in A$, isto é, $-M$ é uma cota inferior de $A$. Se a é uma cota inferior de $A$, então $x \geq a$ para todo $x \in A$ e assim $-x \leq -a$. Portanto $-a$ é uma cota superior de $B$. Como $M$ é a menor cota superior de $B$ então $-a \geq M$, isto é, $a \leq -M$ e assim $-M$ é a maior cota inferior de $A$. Podemos então afirmar que $A$ admite ínfimo e que $\inf A = -M = -\sup B$.

## 4.2 Noções sobre Topologia no Plano Complexo

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e exemplos da topologia no plano complexo que serão usados nas seções seguintes. As referências para esta seção são [11] e [19].

**Definição 4.2.1.** Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

(a) O disco aberto de centro em $z_0$ e raio $r$, é definido como sendo o subconjunto $D(z_0, r)$ de $\mathbb{C}$ dado por
$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

(b) O disco fechado de centro em $z_0$ e raio $r$, é definido como sendo o subconjunto $\overline{D}(z_0, r)$ de $\mathbb{C}$ dado por
$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

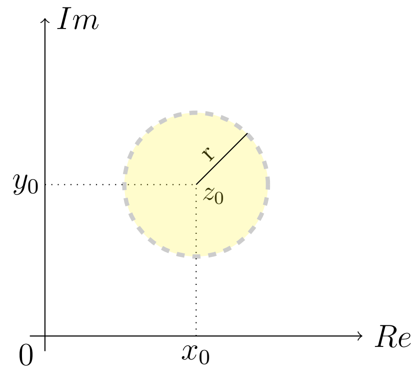



Figura 4.1: Disco aberto $D(z_0, r)$

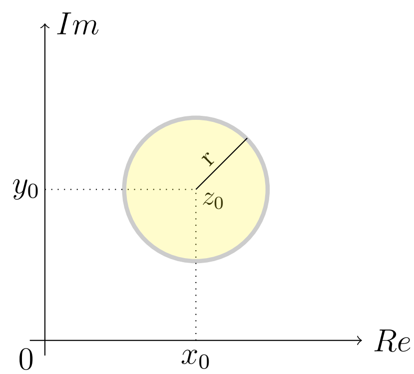



Figura 4.2: Disco fechado $\overline{D}(z_0, r)$

**Definição 4.2.2.** Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Se para qualquer $r > 0$ temos que $D(z_0, r) \cap A \neq \emptyset$, dizemos que $z_0$ é um ponto aderente do conjunto $A$. O fecho do conjunto $A$, denotado por $\overline{A}$, é definido como sendo o conjunto formado por todos os pontos aderentes de $A$.

**Definição 4.2.3.** Seja $A \subset \mathbb{C}$. Se $A = \overline{A}$, dizemos que o conjunto $A$ é fechado.

**Observação 4.2.4.** Temos sempre que $A \subset \overline{A}$ e que $\mathbb{C}$ é fechado. Se $A = \emptyset$, então por definição $\overline{A} = \emptyset$ e portanto $\emptyset$ é um conjunto fechado.

**Exemplo 4.2.5.** Vamos mostrar que se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, então o disco fechado $\overline{D}(z_0, r)$ é um conjunto fechado.

Suponhamos por contradição que $\overline{D}(z_0, r)$ não seja fechado. Portanto existe um ponto aderente $z_1$ de $\overline{D}(z_0, r)$ que não pertence a $\overline{D}(z_0, r)$, isto é, $|z_1 - z_0| > r$. Seja $r_1 = |z_1 - z_0| - r > 0$. Se $z \in D(z_1, r_1)$, então $|z - z_1| < r_1$ e assim pela Proposição 3.2.3

$$\begin{array}{rcl} |z - z_0| & = & |(z - z_1) + (z_1 - z_0)| \\ & \geq & |z_1 - z_0| - |z - z_1| \\ & > & |z_1 - z_0| - r_1 = r. \end{array}$$

Portanto $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ e logo $\overline{D}(z_0, r) \cap D(z_1, r_1) = \emptyset$, o que contradiz $z_1$ ser um ponto aderente de $\overline{D}(z_0, r)$. Podemos então concluir que $\overline{D}(z_0, r)$ é um conjunto fechado.

**Definição 4.2.6.** Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é denominado limitado se existir $r > 0$ tal que $|z| \leq r$ para todo $z \in A$, isto é, se $A \subset \overline{D}(0, r)$.

**Definição 4.2.7.** Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é denominado compacto se ele for limitado e fechado.

**Exemplo 4.2.8.** Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Se $|z - z_0| \leq r$, então pela desigualdade triangular,

$$|z| = |(z - z_0) + z_0| \leq |z - z_0| + |z_0| \leq r + |z_0|.$$

Assim $\overline{D}(z_0, r) \subset D(0, r + |z_0|)$ e portanto $\overline{D}(z_0, r)$ é limitado. Segue pelo Exemplo 4.2.5 que o disco fechado $\overline{D}(z_0, r)$ é um conjunto compacto.

## 4.3 Sequências

Nesta seção apresentamos os conceitos de sequência e limite de sequência de números complexos, juntamente com algumas propriedades. O resultado mais importante desta seção é o Teorema de Bolzano-Weierstrass. As referências para esta seção são [11] e [19].

**Definição 4.3.1.** Uma sequência em $\mathbb{C}$ é uma função $z : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ do conjunto dos números naturais não nulos $\mathbb{N}^*$ no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Se $z(n) \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, dizemos que $z$ é uma sequência em $\mathbb{R}$.

**Notação 4.3.2.** Seja $z : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ uma sequência em $\mathbb{C}$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ escrevemos $z(n) = z_n$. A sequência $z$ será denotada por $(z_n)$.

**Definição 4.3.3.** Dizemos que a sequência $(z_n)$ de números complexos converge para $w \in \mathbb{C}$, ou que tem limite $w$, e escrevemos $z_n \to w$ ou $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ se, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq n_0$ então $|z_n - w| < \epsilon$.

**Proposição 4.3.4.** Seja $(z_n)$ uma sequência de números complexos. Então

(a) $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ se, e só se, $\lim_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(w)$ e $\lim_{n\to\infty} Im(z_n) = Im(w)$;

(b) Se $z_n \to w$ então $|z_n| \to |w|$;

(c) $z_n \to 0$ se, e só se, $|z_n| \to 0$.

*Demonstração.* $(a)$: Notemos que

$$\begin{aligned} &|z_n - w| = |(Re(z_n) - Re(w)) + i(Im(z_n) - Im(w))| \\ &= \left[(Re(z_n) - Re(w))^2 + (Im(z_n) - Im(w))^2\right]^{1/2} \geq |Re(z_n) - Re(w)|, \end{aligned}$$

e analogamente

$$|z_n - w| \geq |Im(z_n) - Im(w)|.$$

Suponhamos que $z_n \to w$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|z_n - w| < \epsilon$ para $n \geq n_0$. Segue pelas desigualdades precedentes que $|Re(z_n) - Re(w)| < \epsilon$ e $|Im(z_n) - Im(w)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $Re(z_n) \to Re(w)$ e $Im(z_n) \to Im(w)$.

Agora pela desigualdade triangular temos

$$|z_n - w| \leq |Re(z_n) - Re(w)| + |Im(z_n) - Im(w)|.$$

Suponhamos que $Re(z_n) \to Re(w)$ e $Im(z_n) \to Im(w)$. Então dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tais que $|Re(z_n) - Re(w)| < \epsilon/2$ se $n \geq n_1$ e $|Im(z_n) - Im(w)| < \epsilon/2$ se $n \geq n_2$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e temos pela desigualdade anterior $|z_n - w| < \epsilon$ se $n \geq n_0$. Podemos assim concluir que $z_n \to w$.

$(b)$: Suponhamos que $z_n \to w$ e seja $\epsilon > 0$ dado. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$, então $|z_n - w| < \epsilon$. Mas pela Proposição 3.2.3,

$$||z_n| - |w|| \leq |z_n - w|$$

e assim se $n \geq n_0$,

$$||z_n| - |w|| < \epsilon,$$

ou seja, $|z_n| \to |w|$.

$(c)$: Segue como consequência de $(b)$ que se $z_n \to 0$, então $|z_n| \to 0$.

Suponhamos que $|z_n| \to 0$ e seja $\epsilon > 0$ dado. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq n_0$ então $|z_n| < \epsilon$. Como $|Re(z_n)| \leq |z_n|$ e $|Im(z_n)| \leq |z_n|$ obtemos $|Re(z_n)| < \epsilon$ e $|Im(z_n)| < \epsilon$ se $n \geq n_0$, e assim $Re(z_n) \to 0$ e $Im(z_n) \to 0$. Por $(a)$ podemos concluir que $z_n \to 0$. $\square$

**Definição 4.3.5.** Uma sequência $(z_n)$ é denominada limitada quando $\{z_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ for um conjunto limitado.

**Definição 4.3.6.** Seja $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}^*$ tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ e seja $z : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ uma sequência. A restrição $z|\mathbb{N}'$, da função $z$ ao conjunto $\mathbb{N}'$, é chamada uma subsequência da sequência $z$.

**Observação 4.3.7.** Sejam $z$ e $\mathbb{N}'$ como na Definição 4.3.6. A subsequência $z' = z|\mathbb{N}'$ de $z$ também é uma sequência pois $z' : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, $z'(k) = z(n_k) = z_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Escrevemos $z' = (z_{n_k})$.

Vamos admitir sem demonstração, o seguinte teorema, conhecido como Teorema de Bolzano-Weierstrass.

**Teorema 4.3.8** (Teorema de Bolzano-Weierstrass, caso real, ver "Análise I, Djairo G. de Figueiredo")**.** Toda sequência real limitada admite uma subsequência convergente.

**Teorema 4.3.9** (Teorema de Bolzano-Weierstrass, caso complexo)**.** Toda sequência complexa limitada admite uma subsequência convergente.

*Demonstração.* Seja $(z_n)$ uma sequência complexa limitada e sejam $x_n = Re(z_n)$, $y_n = Im(z_n)$. É claro que $(x_n)$ e $(y_n)$ são sequências reais limitadas. Pelo Teorema 4.3.8, $(x_n)$ contém uma subsequência $(x_{n_k})$ convergente. Mas $(y_{n_k})$ é uma sequência limitada e assim, novamente pelo

Teorema 4.3.8, $(y_{n_k})$ contém uma subsequência convergente $(y_{n_{k_j}})$. Como $(x_{n_{k_j}})$ é uma subsequência da sequência convergente $(x_{n_k})$, segue que $(x_{n_{k_j}})$ também converge. Então $(x_{n_{k_j}})$ e $(y_{n_{k_j}})$ são sequências reais convergentes, $x_{n_{k_j}} = Re(z_{n_{k_j}})$ e $y_{n_{k_j}} = Im(z_{n_{k_j}})$ e assim, pelo item $(a)$ da Proposição 4.3.4, temos que $(z_{n_{k_j}})$ é convergente e subsequência de $(z_n)$. $\square$

## 4.4 Funções Contínuas

Nesta seção definimos, demonstramos propriedades e apresentamos exemplos de funções contínuas definidas em subconjuntos de $\mathbb{C}$ e com valores em $\mathbb{C}$. O principal resultado desta seção é o Teorema de Weierstrass que será usado como uma ferramenta importante na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. As referências para esta seção são [1], [5], [11] e [19].

**Definição 4.4.1.** Sejam $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \emptyset$, $f : K \to \mathbb{C}$ uma função definida em $K$ e com valores em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in K$. Dizemos que $f$ é contínua em $z_0$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

**Proposição 4.4.2.** Sejam $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \emptyset$, $f : K \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in K$. São equivalentes:

(a) f é contínua em $z_0$;

(b) se $(z_n)$ é uma sequência, $z_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $z_n \to z_0$, então $f(z_n) \to f(z_0)$.

*Demonstração.* $(a) \Rightarrow (b)$: Suponhamos que $f$ seja contínua em $z_0$ e seja $(z_n)$ uma sequência tal que $z_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $z_n \to z_0$. Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade de $f$ em $z_0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Como $z_n \to z_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que,

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \geq n_0, \text{ então } |z_n - z_0| < \delta.$$

Portanto se $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq n_0$ temos $z_n \in K$ e $|z_n - z_0| < \delta$, e assim $|f(z_n) - f(z_0)| < \epsilon$. Logo $f(z_n) \to f(z_0)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Suponhamos que $f$ não seja contínua em $z_0$ mas que a condição $(b)$ é verdadeira. Como $f$ não é contínua em $z_0$, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $z \in K$ tal que $|z - z_0| < \delta$ e $|f(z) - f(z_0)| \geq \epsilon$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e $\delta = 1/n$, existe $z_n \in K$ tal que $|z_n - z_0| < 1/n$ e $|f(z_n) - f(z_0)| \geq \epsilon$.

Como $|z_n - z_0| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, é fácil verificar que $z_n \to z_0$. Mas $|f(z_n) - f(z_0)| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e assim a sequência $(f(z_n))$ não converge para $f(z_0)$. Portanto a condição $(b)$ não pode ser verdadeira, isto é, temos uma contradição. Podemos então concluir que $(b)$ implica $(a)$. $\square$

**Lema 4.4.3.** Se $f : K \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0 \in K$, então existem constantes positivas $\delta, M \in \mathbb{R}$ tais que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z)| \leq M$.

*Demonstração.* Como $f$ é contínua em $z_0$, para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < 1$ . Portanto se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |(f(z) - f(z_0)) + f(z_0)| \\ &\leq |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)| \\ &< 1 + |f(z_0)| = M \end{aligned}$$

e assim concluimos a demonstração. □

**Lema 4.4.4.** Se $f : K \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0 \in K$ e $f(z_0) \neq 0$, então existem constantes positivas $\delta, M \in \mathbb{R}$ tais que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z)| \geq M$.

*Demonstração.* Tomamos $\epsilon = |f(z_0)|/2 > 0$. Como $f$ é contínua em $z_0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Logo se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, pela Proposição 3.2.3,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z_0) + (f(z) - f(z_0))| \\ &\geq |f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)| \\ &> |f(z_0)| - \epsilon = \frac{|f(z_0)|}{2} = M, \end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração. □

**Proposição 4.4.5.** Sejam $f, g : K \to \mathbb{C}$ duas funções contínuas em $z_0 \in K$ e seja $c$ uma constante complexa. Então:

(a) $f + g$ é contínua em $z_0$,

(b) $cf$ é contínua em $z_0$,

(c) $fg$ é contínua em $z_0$,

(d) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $z_0$ se $g(z_0) \neq 0$.

*Demonstração.* (*a*): Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $f$ e $g$ são contínuas em $z_0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_1$ então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon/2$, e se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta_2$ então $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon/2$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e temos que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|z - z_0| < \delta_1$ e $|z - z_0| < \delta_2$ e assim pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |(f(z) + g(z)) - (f(z_0) - g(z_0))| &= |(f(z) - f(z_0)) + (g(z) - g(z_0))| \\ &\leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $f + g$ é contínua em $z_0$.

$(b)$: Suponhamos $c \neq 0$ e seja $\epsilon > 0$ dado. Como $f$ é contínua em $z_0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta$, então $|f(z) - f(z_0)|< \epsilon/|c|$. Então se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta$,

$$|cf(z) - cf(z_0)|= |c||f(z) - f(z_0)|< |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

Logo $cf$ é contínua em $z_0$. Se $c = 0$, então $cf = 0$ é trivialmente contínua em $z_0$.

$(c)$: Como $f$ é contínua em $z_0$, pelo Lema 4.4.3, existem constantes $\delta_1, M > 0$ tais que, se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta_1$, então $|f(z)|\leq M$. Assim se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta_1$, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &= |(f(z)g(z) - f(z)g(z_0)) + (f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0))| \\ &\leq |f(z)||g(z) - g(z_0)|+|g(z_0)||f(z) - f(z_0)| \\ &\leq M|g(z) - g(z_0)|+|g(z_0)||f(z) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $f$ é contínua em $z_0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta_2$ então $|f(z) - f(z_0)|< \epsilon/(2|g(z_0)|)$ se $g(z_0) \neq 0$ ou $|f(z) - f(z_0)|< \epsilon$ se $g(z_0) = 0$. Como $g$ é contínua em $z_0$, existe $\delta_3 > 0$ tal que se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta_3$ então $|g(z) - g(z_0)|< \epsilon/(2M)$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ e temos que se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta$, pela desigualdade anterior,

$$|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)|< M\frac{\epsilon}{2M} + |g(z_0)|\frac{\epsilon}{2|g(z_0)|} = \epsilon$$

se $g(z_0) \neq 0$ ou

$$|f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)|< M\frac{\epsilon}{2M} + 0\epsilon = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

se $g(z_0) = 0$. Logo $fg$ é contínua em $z_0$.

$(d)$: Se demonstrarmos que a função $1/g$ é contínua em $z_0$, usando $(c)$ obteremos que $f/g = f\,(1/g)$ é contínua em $z_0$. Logo basta demonstrar que $1/g$ é contínua em $z_0$.

Suponhamos que $g$ seja contínua em $z_0$ e que $g(z_0) \neq 0$. Pelo Lema 4.4.4, existem $\delta_1, M > 0$ tais que se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta_1$, então $|g(z)|\geq M$. Assim se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta_1$ temos

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}\right| = \frac{|g(z) - g(z_0)|}{|g(z)||g(z_0)|} \leq \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|}.$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $g$ é contínua em $z_0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta_2$, então $|g(z) - g(z_0)|< \epsilon M|g(z_0)|$. Tomamos $\delta = \min\{\delta_2, \delta_1\}$ e temos pela desigualdade anterior que se $z \in K$ e $|z - z_0|< \delta$,

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}\right| \leq \frac{|g(z) - g(z_0)|}{M|g(z_0)|} < \frac{\epsilon M|g(z_0)|}{M|g(z_0)|} = \epsilon.$$

Podemos assim concluir que $1/g$ é contínua em $z_0$. □

**Definição 4.4.6.** Sejam $f : K \to \mathbb{C}$ e $A \subset K$. Se $f$ é contínua em todos os pontos de $A$, dizemos que $f$ é contínua em $A$.

**Exemplo 4.4.7.** Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $f,\ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ as funções definidas por $f(z) = \alpha$ e $g(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\epsilon > 0$ dados. Tomamos $\delta = \epsilon$ e temos que se $|z - z_0| < \delta$, então

$$|f(z) - f(z_0)| = |\alpha - \alpha| = 0 < \delta = \epsilon$$

e

$$|g(z) - g(z_0)| = |z - z_0| < \delta = \epsilon.$$

Portanto $f$ e $g$ são contínuas em $\mathbb{C}$.

**Exemplo 4.4.8.** Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e seja $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função definida por $f_n(z) = z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para $n = 1$, vimos no Exemplo 4.4.7 que $f_1$ é contínua em $\mathbb{C}$.

Suponhamos que $f_{n-1}$ seja contínua em $\mathbb{C}$. Como $f_1$ é contínua em $\mathbb{C}$ e $f_n(z) = f_1(z)f_{n-1}(z)$, segue pelo item $(c)$ da Proposição 4.4.5 que $f_n$ é contínua em $\mathbb{C}$. Podemos assim concluir, pelo Princípio da Indução Finita que $f_n$ é contínua em $\mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

**Exemplo 4.4.9.** Considere uma função polinomial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

onde $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_0 \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

Pelo Exemplo 4.4.8 temos que, para cada $1 \leq k \leq n$, a função $z \mapsto z^k$ é contínua em $\mathbb{C}$. Pelo item $(b)$ da Proposição 4.4.5 segue que as funções $z \mapsto a_k z^k$, $1 \leq k \leq n$, são contínuas em $\mathbb{C}$ e pelo Exemplo 4.4.7 toda função constante é contínua em $\mathbb{C}$. Portanto pelo item $(a)$ da Proposição 4.4.5 segue que $f$ é contínua em $\mathbb{C}$.

**Exemplo 4.4.10.** Sejam $p(z)$ e $q(z)$ duas funções polinomiais e seja $f(z) = p(z)/q(z)$ a função racional definida para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $q(z) \neq 0$. Como $p(z)$ e $q(z)$ são contínuas em $\mathbb{C}$, temos como consequência do item $(d)$ da Proposição 4.4.5 que $f$ é contínua em todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $q(z) \neq 0$.

**Exemplo 4.4.11.** Seja $f : K \to \mathbb{C}$ uma função contínua em $z_0 \in K$ e seja $g : K \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(z) = |f(z)|$. Dado $\epsilon > 0$, como $f$ é contínua em $z_0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in K$ e $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Assim pela Proposição 3.2.3,

$$|g(z) - g(z_0)| = ||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

e portanto $g$ é contínua em $z_0$.

**Lema 4.4.12.** Seja $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \emptyset$, um conjunto compacto e seja $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f$ é limitada.

*Demonstração.* Vamos mostrar que f é limitada superiormente.

Suponhamos por contradição que $f$ não seja limitada superiormente. Então para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $z_n \in K$ tal que $f(z_n) > n$. Como $K$ é limitado então a sequência $(z_n)$ é limitada e portanto pelo Teorema 4.3.9, $(z_n)$ contém uma subsequência convergente $(z_{n_k})$. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_{n_k} \to z_0$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que se $k \geq k_0$ então $|z_{n_k} - z_0|< \epsilon$, isto é, $z_{n_k} \in D(z_0, \epsilon)$. Mas $z_{n_k} \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ e assim $z_{n_k} \in D(z_0, \epsilon) \cap K$. Portanto temos que $z_0$ é um ponto aderente de $K$, isto é, $z_0$ pertence ao fecho $\overline{K}$ de $K$. Como $\overline{K} = K$ pois $K$ é fechado, segue que $z_0 \in K$.

Como $z_{n_k} \to z_0$ e $f$ é contínua em $z_0$, pela Proposição 4.4.2 temos que $f(z_{n_k}) \to f(z_0)$. Assim, para $\epsilon = 1$, segue pela definição de limite de sequência, que existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|f(z_{n_k}) - f(z_0)|< 1$ se $k \geq k_0$. Logo $f(z_0) - 1 < f(z_{n_k}) < f(z_0) + 1$ se $k \geq k_0$, em particular $f(z_{n_k}) < f(z_0) + 1$ se $k \geq k_0$.

Para $k \geq k_0$ temos então $f(z_{n_k}) < f(z_0) + 1$ e $f(z_{n_k}) > n_k$ e assim $n_k < f(z_0) + 1$ para qualquer $k \geq k_0$. Como a aplicação $k \mapsto n_k$, de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{N}^*$ deve ser injetora, devemos ter $n_k \geq k$. Portanto $k < f(z_0) + 1$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq k_0$, o que é um absurdo. De forma análoga podemos mostrar que f é limitada inferiormente. □

**Teorema 4.4.13** (Teorema de Weierstrass)**.** Seja $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \emptyset$, um conjunto compacto e seja $f : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $z_1, z_2 \in \mathbb{K}$, tais que $f(z_1) \leq f(z) \leq f(z_2)$ para todo $z \in K$.

*Demonstração.* Seja $A = \{f(z) : z \in K\}$. Pelo Lema 4.4.12 $A$ é um subconjunto limitado de números reais e assim pela Propriedade do Supremo (Proposição 4.1.11) e Observação 4.1.12, existem $M = \sup A$ e $m = \inf A$. Por definição de supremo e ínfimo, $m \leq f(z) \leq M$, para todo $z \in K$.

Suponhamos por contradição que não existe $z \in K$ tal que $f(z) = M$, isto é, suponhamos que $f(z) < M$ para todo $z \in K$. Consideremos a função $g : K \to R$ definida por

$$g(z) = \frac{1}{M - f(z)}, z \in K.$$

Pelo item $(d)$ da Proposição 4.4.5, $g$ é contínua em $K$ e pelo Lema 4.4.12, $g$ é limitada. Seja então $\beta > 0$ tal que $g(z) < \beta$ para todo $z \in K$. Assim

$$g(z) = \frac{1}{M - f(z)} < \beta$$

para todo $z \in K$ e portanto

$$f(z) < M - \frac{1}{\beta}$$

para todo $z \in K$. Então $M - 1/\beta$ é uma cota superior de $A$, menor que $M$, o que contradiz o fato de $M$ ser o supremo de $A$. Logo deve existir $z_2 \in K$ tal que $M = f(z_2)$.

Usando um procedimento análogo, demonstramos que existe $z_1 \in K$ tal que $m = f(z_1)$. □

## 4.5 Limites Infinitos no Infinito

Nesta seção apresentamos o conceito de limite infinito no infinito para funções complexas e a aplicação às funções polinomiais. Este resultado é uma das ferramentas que serão usadas na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

**Definição 4.5.1.** Seja $K \subset \mathbb{C}$ tal que, existe $r > 0$ com $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, r) \subset K$ e considere uma função $f : K \to \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de $f(z)$ quando $|z| \to +\infty$ é $+\infty$ (mais infinito) e escrevemos

$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = +\infty,$$

se, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > r$, tal que se $|z| > \delta$ então $f(z) > \epsilon$.

**Proposição 4.5.2.** Seja $p(z)$ uma função polinomial de grau $n \geq 1$. Então

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty.$$

*Demonstração.* Seja $p(z)$ uma função polinomial dada por

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

onde $n \geq 1$, $a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_0 \in \mathbb{C}$, e $a_n \neq 0$. Usando a Proposição 3.2.4 obtemos para $z \neq 0$,

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&= |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \\
&\geq |z|^n \left( |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right).
\end{aligned}$$

Agora, se $|z| > 1$ temos $|z|^k > |z|$ para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ e assim $1/|z|^k < 1/|z|$. Portanto da desigualdade anterior segue que

$$\begin{aligned}
|p(z)| &\geq |z|^n \left( |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \\
&\geq |z|^n \left( |a_n| - \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{|z|} \right) \\
&= |z|^n \left( |a_n| - \frac{C}{|z|} \right)
\end{aligned}$$

onde

$$C = |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

Tomamos $\delta_1 = 2(C+1)/|a_n|$ e temos que se $|z| > \delta_1$ então $1/|z| < |a_n|/2(C+1)$. Assim

$$\frac{C}{|z|} < \frac{C+1}{|z|} < \frac{|a_n|}{2}$$

e portanto

$$|a_n| - \frac{C}{|z|} > |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2}.$$

Logo segue da última estimativa obtida para $|p(z)|$ que

$$|p(z)| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2}$$

se $|z| > 1$ e $|z| > \delta_1$.

Seja $\epsilon > 0$ dado. Tomamos $\delta_2 = \sqrt[n]{2\epsilon/|a_n|}$ e temos que se $|z| > \delta_2$, então

$$|z|^n \frac{|a_n|}{2} > \left(\sqrt[n]{\frac{2\epsilon}{|a_n|}}\right)^n \frac{|a_n|}{2} = \epsilon.$$

Tomamos $\delta = \max\{1, \delta_1, \delta_2\}$ e obtemos para $|z| > \delta$,

$$|p(z)| \geq |z|^n \frac{|a_n|}{2} > \epsilon.$$

Podemos concluir assim que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$$

e portanto demonstramos o resultado desejado. $\square$

*Capítulo 5*

# Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Neste capítulo apresentaremos a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Vamos apresentar uma das demonstrações mais elementares que utiliza apenas conceitos do Ensino Básico e alguns tópicos iniciais do Ensino Superior.

A principal referência para este capítulo é [10].

## 5.1 A Importância da Demonstração

Cabe ressaltar que para a grande maioria dos autores, prova e demonstração são sinônimos enquanto que, para Balacheff as provas são justificativas que servem para um grupo social em um período determinado e as demonstrações se referem em específico àquelas atribuídas à Matemática (ver [15]). Nesta dissertação, utilizaremos o termo demonstração, sendo este a formulação de um pensamento lógico matemático, a fim de analisar se uma dada afirmação é verdadeira.

Uma definição muito bem transcrita e de forma simples é a elaborada por Domingues e Iezzi em seu livro Álgebra Moderna, onde afirmam que demonstração é *uma sucessão articulada de raciocínios lógicos que permitem mostrar que um resultado proposto é consequência de princípios previamente fixados e de proposições já estabelecidas* (ver [26]).

Além da forte presença em congressos, encontros e seminários, as demonstrações já foram incluídas nos currículos do Ensino Básico de alguns países, tais como, Estados Unidos, Inglaterra e Canadá, o que constata a importância que este tema tem adquirido para o conhecimento contemporâneo (ver [26]).

Uma das características na qual difere a Ciência Matemática de outras Ciências de modo veemente é que a Matemática baseia-se em afirmações comprovadas, enquanto que a maioria das outras se amparam na observação.

Nota-se que apesar de atribuirmos, juntamente com outros autores, enorme importância às demonstrações, os matemáticos devem se utilizar de outras ferramentas com o propósito de tornar esta área do conhecimento perfeita, eficaz e prazerosa. Elon Lages Lima, um renomado matemático, assim se expressa em uma de suas publicações:

> A fim de familiarizar gradativamente os alunos com o método matemático, dotá-los de habilidades para lidar desembaraçadamente com os mecanismos do cálculo e dar-lhes condições para mais tarde saberem utilizar seus conhecimentos em situações da vida real, o ensino da Matemática deve abranger três componentes fundamentais que chamaremos de Conceituação, Manipulação e Aplicações (ver [18]).

Ainda para o mesmo autor, a demonstração pertence à componente Conceituação a qual é definida da seguinte forma:

> A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de idéias e fatos sob diferentes formas e termos (ver [18]).

Uma demonstração é um raciocínio pelo qual se chega a uma verdade do que foi proposto. Sobre demonstração o matemático Elon Lages Lima salienta que:

> Elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo. No nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade. Por esse motivo, não se deve demonstrar o que é intuitivamente evidente, o que todos aceitam sem hesitação. (Exemplo: que uma reta tem no máximo dois pontos em comum com uma circunferência dada.) Se demonstrar é uma forma de convencer por meio da razão, para que perder tempo demonstrando algo de que todos já estão convencidos? Também não se deve demonstrar resultados que, embora não sejam de forma alguma óbvios, necessitam, para serem demonstrados, de argumentos e técnicas difíceis, fora do alcance dos alunos, como o Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual todo polinômio de grau n possui n raízes complexas. Por outro lado, determinados fatos matemáticos importantes não são intuitivamente evidentes mas possuem demonstrações fáceis e elegantes (ver [18]).

Amparados por Elon Lages, podemos afirmar que apesar de não ser conveniente para alunos do Ensino Básico, a demonstração do T.F.A. é de suma relevância aos professores que apresentarão este tema para seus alunos.

Talvez possa ser apresentada a alguns estudantes do Ensino Médio que façam iniciação científica, observando o nível matemático de cada classe, série, escola e até do sistema educacional em vigência, uma vez que há uma grande diversidade de currículos e objetivos educacionais nas diversas instituições de ensino.

Mas de maneira especial temos como foco os professores atuantes no Ensino Médio, e alunos nos primeiros anos do Ensino Superior que utilizam de forma considerável a Álgebra, a fim de que adquiram uma bagagem mais abrangente e adequada para ministrar este tema matemático de forma eficaz, prazerosa e rigorosa.

Ao replicar e analisar as diferentes referências às demonstrações, buscamos contribuir para a compreensão do processo que a envolve e de sua presença marcante da experiência matemática.

## 5.2 Balanço das Demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra

Foram muitas as tentativas para demonstrar o T.F.A. e estas utilizaram as mais diversas ferramentas matemáticas; algumas demonstrações estavam corretíssimas, outras incompletas e outras ainda incoerentes. Tais demonstrações podem ser classificadas em analíticas, topológicas ou algébricas, que utilizam conhecimentos da análise, topologia ou álgebra, respectivamente.

Nesta seção faremos um balanço das demonstrações mais famosas do T.F.A. A formulação de argumentos a fim de convencer o próximo está presente na vida do ser humano desde a infância, como quando tentamos persuadir nossos pais, irmãos ou colegas nos primeiros anos de vida. O processo argumentativo informal vai se intensificando na escola e este culmina no desenvolvimento de argumentos formais exigidos pela matemática, em especial quando os professores demonstram certos resultados dessa disciplina (ver [12]).

No decorrer da história da Matemática a demonstração não possui data nem local que marcam sua origem. Entretanto podemos afirmar que sua presença na sociedade perpassa os dois mil anos.

A falta de informações concretas é aceitável, uma vez que uma demonstração não é algo acabado, e sim passa por uma série de processos para que seja exposta em seu formato final. Mas vale ressaltar que mesmo que seja considerada correta e com rigor necessário em certo período, ela pode ser considerada imperfeita para comunidades matemáticas posteriores. Atualmente, para os matemáticos existe controversa em relação à forma definitiva para a aceitação das demonstrações (ver [12]).

As demonstrações se apoiam em definições e teoremas que de alguma forma já foram estabelecidos. Assim para se demonstrar algo, muitas vezes é necessário que outros argumentos matemáticos sejam demonstrados anteriormente, caso essas demonstrações não existam.

Agora apresentamos, de maneira simplificada, no âmbito matemático, como as demonstrações podem ser classificadas:

- Demonstração por Exaustão: Quando a conjectura se dá sob um conjunto finito e se verifica todos os possíveis casos.

- Demonstração por Construção: Apoia-se no fato de chegar à veracidade através de construções geométricas.

- Demonstração Direta: Usa argumentos ou teoremas já demonstrados, num encadeamento lógico para deduzir a conclusão desejada.

- Demonstração por Absurdo: Quando se assume o contrário da conclusão anunciada e deduz-se uma condição contraditória.

- Demonstração por Indução: Demonstra-se que o enunciado é verdadeiro para um valor inicial, e então demonstrar-se que o processo usado para ir de um valor para o próximo é válido. É particular para enunciados somente com números naturais.

Considerando o contexto histórico da argumentação a respeito da aceitação de uma demonstração e da classificação desta, fizemos um balanço das demonstrações mais clássicas do Teorema

Fundamental da Álgebra. Aqui salientamos que para produção de tal análise nos baseamos no referencial teórico [14], [23] e [29].

Tabela 5.1:

| **Autor** | **Ano** | **Nacionalidade** | **Forma** |
|---|---|---|---|
| D'Alembert | 1746 | Francês | Direta e por construção |
| Euler | 1749 | Suíço | Direta |
| Lagrange | 1772 | Italiano | Direta |
| Laplace | 1795 | Francês | Direta |
| 1º Gauss | 1799 | Alemão | Direta |
| Argand | 1814 | Suíço | Por contradição |
| 2º Gauss | 1816 | Alemão | Direta |
| 3º Gauss | 1816 | Alemão | Por contradição |
| 4º Gauss | 1849 | Alemão | Direta |

Tabela 5.2:

| **Autor** | **Ferramenta** | **Erro** | **Tipo** |
|---|---|---|---|
| D'Alembert | Séries e Coordenadas geométricas | Utilizou o Teorema de Puiseux que ainda não havia sido demonstrado. | Analítica |
| Euler | Decomposição de polinômios mônicos de grau $2^n$ | Falta da demonstração de existência de raízes, isto é, Euler estuda casos particulares mas ao generalizar não demonstra a existência. | Algébrica |
| Lagrange | Permutação de raízes de equações | Assumiu a existência de raiz sem demonstrar. | Analítica |
| Laplace | Discriminante de polinômio | Assumiu a existência de raiz sem demonstrar. | Algébrica |
| 1º Gauss | Supôs um polinômio não constante de coeficientes reais e propôs demonstrar que fatores lineares ou quadráticos do polinômio existiam. | Não introduziu os números complexos. Suposições a cerca dos ramos das curvas algébricas não estavam totalmente demonstradas. | Topológica |
| Argand | O teorema de existência de mínimo de uma função real contínua. | Utilizou o Teorema de Weierstrass que ainda não havia sido demonstrado. | Analítica |

Continua na próxima página

**Tabela 5.2**

| Autor | Ferramenta | Erro | Tipo |
|---|---|---|---|
| 2º Gauss | Toda equação real de grau ímpar tem uma raiz real. Toda equação quadrática com coeficientes complexos tem duas raízes complexas. | Não há registros. | Algébrica |
| 3º Gauss | Utilizou a fórmula de Moivre, derivadas, integrais e noções básicas de topologia. | Não há registros. | Topológica |
| 4º Gauss | Seguiu as ideias da primeira demonstração, embora com abrangência de polinômios complexos. | Não há registros. | Algébrica |

A fim de atingir nossos objetivos optamos pela demonstração de Argand, desta forma fizemos apenas um estudo preliminar das outras demonstrações supracitadas.

Com esta análise, pretendemos dar uma visão ampla das mais significativas demonstrações dadas para o Teorema Fundamental da Álgebra, para finalmente expormos uma demonstração atual, amparada sobre os vestígios destas apresentadas.

## 5.3 Resultados Preliminares

Nesta seção demonstraremos dois resultados que serão usados nas seções seguintes. Tomaremos como base a referência [10].

**Proposição 5.3.1.** Consideremos uma função polinomial

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

onde $n \geq 1$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ com $a_n \neq 0$, e seja $z_0 \in \mathbb{C}$ uma raiz de $p(z)$. Então existe uma função polinomial $g(z)$ de grau $n-1$ tal que $p(z) = (z - z_0)g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

*Demonstração.* Sendo $z_0$ raiz de $p(z)$, temos

$$0 = p(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0$$

e portanto

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z) - p(z_0) \\ &= (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0) - (a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0) \\ &= a_n(z^n - z_0^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \cdots + a_1(z - z_0). \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Podemos escrever

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}). \tag{5.3.2}$$

Substituindo (5.3.2) em (5.3.1), temos

$$p(z) = (z - z_0)[a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) + \cdots + a_2(z + z_0) + a_1].$$

Tomamos

$$g(z) = a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) + \cdots + a_2(z + z_0) + a_1$$

e temos

$$p(z) = (z - z_0)g(z),$$

o que conclui a demonstração. □

**Proposição 5.3.2.** Consideremos uma função polinomial

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

onde $n \geq 1$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$ com $a_n \neq 0$. Fixemos $z_0 \in \mathbb{C}$ e seja $q(z) = p(z + z_0)$, $z \in \mathbb{C}$. Então existe $1 \leq k \leq n$ tal que

$$q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)],$$

onde $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ e $r(z)$ é uma função polinomial satisfazendo $r(0) = 0$.

*Demonstração.* Como

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

desenvolvendo os binômios obtemos

$$\begin{aligned}
q(z) &= a_n\left[\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} z^{n-p}z_0^p\right] + a_{n-1}\left[\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} z^{n-1-p}z_0^p\right] \\
&+ \cdots + a_1\left[\sum_{p=0}^{1}\binom{1}{p} z^{1-p}z_0^p\right] + a_0 \\
&= \left[a_n z^n + \binom{n}{1} a_n z^{n-1}z_0 + \cdots + \binom{n}{n-1} a_n z z_0^{n-1} + a_n z_0^n\right] \\
&+ \left[a_{n-1}z^{n-1} + \binom{n-1}{1} a_{n-1}z^{n-2}z_0 + \cdots + \binom{n-1}{n-2} a_{n-1} z z_0^{n-2} + a_{n-1}z_0^{n-1}\right] \\
&+ \cdots + (a_1 z + a_1 z_0) + a_0.
\end{aligned}$$

Agora agrupando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned} p(z) &= (a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \cdots + a_n z_0^n) + (a_1 + 2a_2 z_0 + \cdots + n a_n z_0^{n-1}) z \\ &+ (a_2 + 3a_3 z_0 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} a_n z_0^{n-2}) z^2 + \cdots + a_n z^n. \end{aligned}$$

Assim podemos escrever

$$q(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n,$$

onde

$$A_i = \sum_{p=i}^{n} \begin{pmatrix} p \\ p-i \end{pmatrix} a_p z_0^{p-i}, \ 1 \le i \le n.$$

Como $p(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \cdots + a_n z_0^n = A_0$, temos

$$q(z) = p(z_0) + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n.$$

Se $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$ então $q(z)$ é uma função constante e o mesmo ocorre com $p(z)$, o que contradiz a hipótese. Logo $A_1 \neq 0$ ou existe $2 \le k \le n$ tal que $A_j = 0$ se $1 \le j \le k-1$ e $A_k \neq 0$. Assim existe $1 \le k \le n$, tal que $A_k \neq 0$ e

$$\begin{aligned} q(z) &= p(z_0) + A_k z^k + A_{k+1} z^{k+1} + \cdots + A_n z^n \\ &= p(z_0) + z^k [A_k + A_{k+1} z + \cdots + A_n z^{n-k}]. \end{aligned}$$

Portanto tomando $a = A_k$ e $r(z) = A_{k+1} z + \cdots + A_n z^{n-k}$, obtemos

$$q(z) = p(z_0) + z^k [a + r(z)],$$

com $a \neq 0$ e $r(0) = 0$. □

## 5.4 Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Nesta seção apresentamos a tão comentada demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Desenvolveremos a demonstração tendo como referência o artigo publicado por Argand no ano de 1814. Optamos por tal referência, uma vez que esta utiliza conceitos matemáticos mais elementares e assim atingimos de forma mais eficaz nosso público alvo. Em nosso desenvolvimento dividiremos a demonstração em duas partes, com a finalidade de simplificar a compreensão da mesma. A nossa demonstração é baseada em [10].

**Teorema 5.4.1** (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** Toda função polinomial

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, $n \ge 1$ e $a_n \neq 0$, possui uma raiz em $\mathbb{C}$.

*Demonstração.* Seja

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau $n \ge 1$, isto é, com $a_n \neq 0$. Se $a_0 = 0$, então $p(0) = 0$ e assim 0 é uma raiz de $p(z)$.

Vamos supor a partir deste momento que $a_0 = p(0) \neq 0$ .

## $1^{\underline{o}}$ Passo

Vamos demonstrar que a função $g : \mathbb{C} \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $g(z) = |p(z)|\,,\ z \in \mathbb{C}$, admite um valor mínimo absoluto em um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, isto é, $g(z_0) \leq g(z)$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Pela Proposição 4.5.2 temos

$$\lim_{|z| \to +\infty} g(z) = \lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty.$$

Portanto, segue pela definição de limite que existe $r \in \mathbb{R},\ r > 0$, tal que $g(z) = |p(z)| > |a_0|$ se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| > r$. Logo temos

$$g(z) > |a_0|,\ \text{se } |z| > r. \tag{5.4.1}$$

Denotamos por $\overline{g}$ a restrição da função $g$ ao disco fechado $\overline{D}(0, r)$, isto é, $\overline{g}$ é a função $\overline{g} : \overline{D}(0, r) \longrightarrow [\,0, +\infty\,)$ definida por $\overline{g}(z) = g(z) = |p(z)|$ para todo $z \in \overline{D}(0, r)$. Como $p(z)$ é uma função polinomial e portanto contínua pelo Exemplo 4.4.9, então a função composta $g(z) = |p(z)|\,, z \in \mathbb{C}$ é contínua pelo Exemplo 4.4.11. Segue imediatamente que $\overline{g} : \overline{D}\,(0, r) \longrightarrow [0, +\infty)$ é contínua. Como $\overline{D}(0, r)$ é um conjunto compacto (ver Exemplo 4.2.8), o Teorema de Weierstrass (Teorema 4.4.13) diz que existe $z_0 \in \overline{D}(0, r)$, tal que

$$g(z_0) \leq g(z),\ \text{se } |z| \leq r. \tag{5.4.2}$$

Mas $0 \in \overline{D}(0, r)$ e assim $g(z_0) \leq g(0) = |a_0|$. Portanto segue por (5.4.1) e (5.4.2) que
$g(z_0) \leq g(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

## $2^{\underline{o}}$ Passo

Vamos demonstrar que $p(z_0) = 0$. Suponhamos então por absurdo que $p(z_0) \neq 0$ . Tomamos $q(z) = p(z + z_0),\ z \in \mathbb{C}$, e temos que $q(0) = p(z_0) = c \neq 0$. Pela Proposição 5.3.2 existem $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n, a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ e uma função polinomial $r(z)$ satisfazendo $r(0) = 0$ tal que

$$q(z) = c + z^k\,[a + r(z)]\,, z \in \mathbb{C}. \tag{5.4.3}$$

Seja $w$ uma raiz $k$-ésima do número complexo $-c/a$, ou seja, $w^k = -c/a$ (ver Teorema 3.1.16). Então $aw^k + c = 0$ e assim $aw^k \in D(-c, |c|)$.

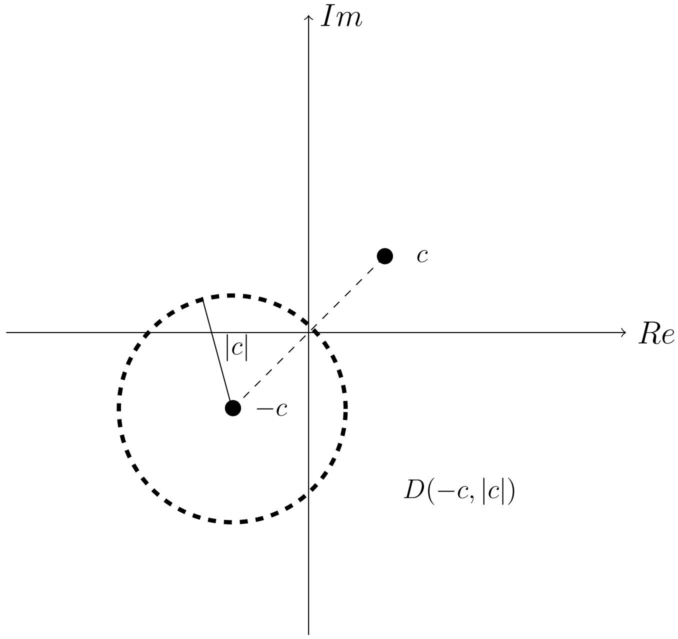



Figura 5.1: Disco aberto

Considere a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = zw^k, z \in \mathbb{C}$. Como $f$ é contínua pelo Exemplo 4.4.9 pois é um polinômio de grau 1 e $f(a) = aw^k = -c$, então tomando $\epsilon = |c|$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in \mathbb{C}$ e $|z - a| < \delta$ temos

$$\left|zw^k + c\right| = |f(z) - f(a)| < \epsilon = |c| . \tag{5.4.4}$$

Seja agora $r_1 : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ a função polinomial $r_1(z) = a + r(z), z \in \mathbb{C}$. Sabemos que $a \neq 0$ e que $r(0) = 0$. Como $r_1$ é contínua em 0, existe $\mu > 0$ tal que se $z \in \mathbb{C}$ e $|z|= |z - 0|< \mu$, então

$$|r_1(z) - a| = |r_1(z) - r_1(0)| < \delta. \tag{5.4.5}$$

Usando (5.4.4) e (5.4.5), obtemos que se $|z| < \mu$ então,

$$\left|r_1(z)w^k + c\right| = |f(r_1(z)) - f(a)|< |c| . \tag{5.4.6}$$

Seja agora $0 < t < 1$ tal que $|tw| < \mu$. Por (5.4.6) segue que

$$\left|w^k(a + r(tw)) + c\right| = \left|r_1(tw)w^k + c\right| < |c| .$$

Como $0 < t < 1$, então $0 < t^k < 1$ e assim pela Proposição 3.2.5, obtemos que

$$|q(tw)| = \left|(tw)^k(a + r(tw)) + c\right| = \left|t^k[w^k(a + r(tw))] + c\right| < |c| .$$

Tomamos $z_1 = z_0 + tw$ e temos $q(tw) = p(z_1)$. Logo,

$$|p(z_1)| = |q(tw)| < |c| = |p(z_0)|$$

o que contradiz o fato de que $|p(z_0)| = g(z_0)$ é o valor mínimo absoluto da função $g(z) = |p(z)|$. Portanto devemos ter $p(z_0) = c = 0$, isto é, $z_0$ é uma raiz de $p(z)$. □

## 5.5 Decorrências do Teorema Fundamental da Álgebra

Apresentamos nesta seção alguns resultados que são consequências do Teorema Fundamental da Álgebra. Todos os teoremas expostos a seguir fazem parte de tópicos abordados no Ensino Médio, embora alguns resultados possam estar diretamente relacionados com o Teorema da Decomposição, este também é decorrente do Teorema Fundamental da Álgebra.

**Teorema 5.5.1** (Teorema da Decomposição)**.** Toda função polinomial

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, pode ser fatorada na forma

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

onde $\alpha_i$, $1 \leq i \leq n$, são as raizes de $p(z)$, distintas ou não.

*Demonstração.* Seja $n = 1$ e $p(z) = a_1 z + a_0$ com $a_1 \neq 0$. Então

$$p(z) = a_1 (z - \alpha_1),$$

onde $\alpha_1 = a_0/a_1$.

Seja agora $n \geq 2$ e suponhamos que o teorema seja verdadeiro para toda função polinomial $q(z)$ de grau $n - 1$. Seja $p(z)$ uma função polinomial de grau $n$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra (Teorema 5.4.1) $p(z)$ possui uma raiz $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ e assim pela Proposição 5.3.1 existe uma função polinomial $q(z)$ de grau $n - 1$ tal que

$$p(z) = (z - \alpha_1) q(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como $q(z)$ tem grau $n - 1$, segue pela hipótese de indução que

$$q(z) = b_n (z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

onde $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são as raizes de $q(z)$, distintas ou não, e assim

$$p(z) = b_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n).$$

Mas

$$p(z) = b_n z^n - b_n (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) z^{n-1} + \cdots + (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

e logo devemos ter $b_n = a_n$.

Podemos assim concluir que o teorema é verdadeiro pelo Princípio de Indução Finita. $\square$

**Teorema 5.5.2** (Número de Raízes)**.** Toda equação polinomial de grau $n$, com $n \geq 1$, admite exatamente $n$ raízes complexas.

*Demonstração.* Consideremos uma equação polinomial

$$p(z) = 0,$$

onde

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Segue pelo Teorema 5.5.1 que

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

onde $\alpha_i$, $1 \leq i \leq n$, são as raizes de $p(z)$, distintas ou não. Logo podemos concluir que a equação $p(z) = 0$ possui $n$ raizes complexas, distintas ou não. □

**Notação 5.5.3.** Consideremos uma função polinomial

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ as raízes de $p(z)$, distintas ou não.

Para $1 \leq k \leq n$, denotaremos por $S_k^n$ a soma de todos os produtos de $k$ raízes de $p(z)$, isto é,

$$S_k^n = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}$$

e denotaremos $S_0^n = 1$. Em particular, a soma das raízes e o produto das raízes, escreveremos respectivamente por $S_n = S_1^n$ e $P_n = S_n^n$. Assim

$$\begin{aligned}
S_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\
S_2^n &= \alpha_1 (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + \alpha_2 (\alpha_3 + \cdots + \alpha_n) + \cdots + \alpha_{n-2} (\alpha_{n-1} + \alpha_n) + \alpha_{n-1} \alpha_n, \\
&\vdots \\
P_n &= \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.
\end{aligned}$$

**Teorema 5.5.4** (Relações entre Coeficientes e Raízes)**.** Seja

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ as raízes de $p(z)$, distintas ou não. Então a soma de todos os produtos de $k$ raízes de $p(z)$ é dada por

$$S_k^n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Em particular, para a soma das raízes e o produto das raízes de $p(z)$ temos

$$S_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad P_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

*Demonstração.* Suponhamos que a seguinte afirmação seja verdadeira (ver Notação 5.5.3):

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{a_n} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k^n z^{n-k} \\ &= z^n - S_1^n z^{n-1} + S_2^n z^{n-2} + \cdots + (-1)^k S_k^n z^{n-k} + \cdots + (-1)^n S_n^n. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Como também temos

$$\frac{p(z)}{a_n} = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}z^{n-2} + \cdots + \frac{a_{n-k}}{a_n}z^{n-k} + \cdots + \frac{a_0}{a_n},$$

por igualdade de polinômios segue que

$$\begin{aligned} -S_1^n &= \frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ S_2^n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ (-1)^k S_k^n &= \frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ &\vdots \\ (-1)^n S_n^n &= \frac{a_0}{a_n}, \end{aligned}$$

e portanto obtemos o resultado desejado. Logo basta demonstrar (5.5.1).

Pelo Teorema 5.5.1 temos

$$p(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n).$$

Assim, para $n = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{a_2} &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) = z^2 - (\alpha_1+\alpha_2)z + \alpha_1\alpha_2 \\ &= z^2 - S_1^2 z + S_2^2, \end{aligned}$$

e para $n = 3$,

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{a_3} &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3) \\ &= z^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z^2 + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)z + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &= z^3 - S_1^3 z^2 + S_2^3 z - S_3^3. \end{aligned}$$

Suponhamos que (5.5.1) seja verdadeira para funções polinomiais de grau $n$. Seja

$$p(z) = a_{n+1}z^{n+1} + a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

uma função polinomial de grau $n+1$ com raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$. Tomamos

$$q(z) = a_{n+1}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$

e temos

$$p(z) = q(z)(z-\alpha_{n+1}).$$

Pela hipótese de indução temos

$$\frac{q(z)}{a_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k^n z^{n-k}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\frac{p(z)}{a_{n+1}} &= \frac{q(z)}{a_{n+1}}(z-\alpha_{n+1}) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k^n z^{n-k}\right)(z-\alpha_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k^n z^{(n+1)-k} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1} S_k^n \alpha_{n+1} z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k^n z^{(n+1)-k} + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k} S_{k-1}^n \alpha_{n+1} z^{(n+1)-k} \\
&= z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \left(S_k^n + S_{k-1}^n\alpha_{n+1}\right) z^{(n+1)-k} + (-1)^{n+1} S_n^n \alpha_{n+1}.
\end{aligned}$$

É claro que $S_n^n \alpha_{n+1} = S_{n+1}^{n+1}$ e logo basta mostrar que para $1 \leq k \leq n$,

$$S_k^{n+1} = S_k^n + S_{k-1}^n \alpha_{n+1}.$$

Para $k=1$,

$$S_1^{n+1} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + \alpha_{n+1} = S_1^n + S_0^n \alpha_{n+1}.$$

Para o caso geral temos

$$\begin{aligned}
S_k^{n+1} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n+1} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k} + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \leq n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{k-1}}\right)\alpha_{n+1} \\
&= S_k^n + S_{k-1}^n \alpha_{n+1}.
\end{aligned}$$

Assim o teorema fica demonstrado $\square$

**Exemplo 5.5.5.** Considere a função polinomial $p(z) = 2z^3 - 4z^2 + 6z + 7$ e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ as três raízes, distintas ou não de $p(z)$. Então pelo teorema anterior devemos ter:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = S_1^3 = S_3 = -\frac{-4}{2} = 2,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = S_2^3 = (-1)^2\frac{6}{2} = 3$$

e

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = S_3^3 = P_3 = (-1)^3\frac{7}{2} = -\frac{7}{2}.$$

**Exemplo 5.5.6.** Considere a função polinomial $p(z) = 2z^4 - 3z^3 - z^2 + 3z - 1$ e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ as quatro raízes, distintas ou não de $p(z)$. Então pelo teorema anterior devemos ter:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = S_1^4 = S_4 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = S_2^4 = (-1)^2\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = S_3^4 = (-1)^3\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

e

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = S_4^4 = P_4 = (-1)^4\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

**Teorema 5.5.7.** Seja $p(x)$ uma função polinomial de grau $n$ com coeficientes reais, isto é,

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Então $p(x)$ pode ser fatorada como produto de funções polinomiais com coeficientes reais de grau 1 e grau 2.

*Demonstração.* Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ as raizes distintas de $p(x)$ e suponhamos que a raiz $\alpha_j$ tenha multiplicidade $n_j$, $1 \leq j \leq k$. Então pelo Teorema 5.5.1,

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \cdots (x - \alpha_k)^{n_k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tomando o conjugado de $p(x)$ para $x$ real obtemos

$$\overline{p(x)} = \overline{a_nx^n} + \overline{a_{n-1}x^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1x} + \overline{a_0} = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = p(x)$$

e

$$\overline{p(x)} = a_n(x - \overline{\alpha_1})^{n_1}(x - \overline{\alpha_2})^{n_2} \cdots (x - \overline{\alpha_k})^{n_k},$$

isto é,

$$p(x) = a_n(x - \overline{\alpha_1})^{n_1}(x - \overline{\alpha_2})^{n_2} \cdots (x - \overline{\alpha_k})^{n_k}.$$

Portanto $\overline{\alpha_j}$ é raiz de $p(x)$ com multiplicidade $n_j$, $1 \leq j \leq k$. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ as raizes complexas de $p(x)$ e $\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k$ as raizes reais. Como $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\} = \{\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_i}\}$, $i$ deve ser par, $i = 2s$, e a menos de uma mudança na reordenação das raizes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}$ podemos escrever,

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\} = \{\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \ldots, \alpha_s, \overline{\alpha_s}\}.$$

Assim

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \overline{\alpha_1})^{n_1} \cdots (x - \alpha_s)^{n_s}(x - \overline{\alpha_s})^{n_s}(x - \alpha_{i+1})^{n_{i+1}} \cdots\cdots (x - \alpha_k)^{n_k}.$$

Se $\alpha_j = a_j + ib_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $b_j \neq 0$, então

$$(x-\alpha_j)^{n_j}(x-\overline{\alpha_j})^{n_j} = [(x-\alpha_j)(x-\overline{\alpha_j})]^{n_j} = [x^2 - 2a_jx + (a_j^2+b_j^2)]^{n_j}$$

e logo

$$p(x) = a_n[x^2 - 2a_1x + (a_1^2+b_1^2)]^{n_1}\cdots[x^2 - 2a_sx + (a_s^2+b_s^2)]^{n_s}(x-\alpha_{i+1})^{n_{i+1}}\cdots\cdots(x-\alpha_k)^{n_k}.$$

Concluimos assim a demonstração do teorema. $\square$

**Exemplo 5.5.8.** Considere a função polinomial $p(x) = x^2 - 3x - 4$. Podemos verificar que as raizes de $p(x)$ são $x_1 = -1$ e $x_2 = 4$ e assim $p(x)$ pode ser fatorada na forma

$$p(x) = (x+1)(x-4).$$

**Exemplo 5.5.9.** Considere a função polinomial $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 14x - 8$. Podemos verificar que $x_1 = -1$ é uma raiz de $p(x)$ com multiplicidade 2 e que e $x_2 = 4$ é uma raiz de $p(x)$ com multiplicidade 1. Portanto $p(x)$ pode ser fatorada na forma

$$p(x) = 2(x+1)^2(x-4).$$

**Exemplo 5.5.10.** Considere a função polinomial $p(x) = x^5 - x^4 - x + 1$. Podemos verificar que $x_1 = i$, $x_2 = -i$ e $x_3 = -1$ são raízes de $p(x)$ com multiplicidade 1 e que $x_4 = 1$ é uma raiz de $p(x)$ com multiplicidade 2. Portanto $p(x)$ pode ser fatorada na forma

$$p(x) = (x-i)(x+i)(x-1)^2(x+1) = (x^2+1)(x-1)^2(x+1).$$

*Capítulo 6*

# O Teorema Fundamental da Álgebra nas Instituições de Ensino

## 6.1 Como o T.F.A. é Apresentado no Ensino Básico

O Teorema Fundamental da Álgebra é exposto pela primeira vez ao estudante no 3º ano do Ensino Médio, quando são iniciados no tema polinômios. Entretanto este importante teorema é apresentado sem demonstração, uma vez que o aluno não possui os pré-requisitos necessários para compreendê-la. É essencial ressaltar que em alguns casos, nem mesmo os professores do Ensino Básico tiveram contato com uma das demonstrações do T.F.A..

Agora faremos uma análise simples de como o teorema em questão é apresentado para alunos do 3º ano do Ensino Médio. A escolha dos livros didáticos analisados se deu de modo a utilizar editoras e autores diferentes. Optamos por cinco livros, os quatro primeiros utilizados em períodos diferentes por uma escola estadual de Minas Gerais.

No livro para o Ensino Médio que tem como título *Matemática: aula por aula* [13], de autoria de Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier Silva, em volume único, é exposto o T.F.A. e em seguida utiliza-se este teorema para demonstrar a decomposição de um polinômio em fatores do 1º grau. A apresentação é completa e de fácil compreensão para os alunos, entretanto não há nenhuma referência histórica (ver Figura 6.1).

Os autores Antônio Nicolau Youssef, Elizabeth Soares e Vicente Paz Fernandez, no livro para o Ensino Médio cujo título é *Matemática* [30], em volume único, apresentam o T.F.A. e em seguida a decomposição de um polinômio em fatores do 1º grau. A apresentação é breve e a demonstração do Teorema da Decomposição é de fácil compreensão para os alunos, entretanto não há nenhuma referência histórica.

Nesta obra os autores apresentam o enunciado do T.F.A. como no caso anterior, mas são mais diretos na demonstração da decomposição, o que dificulta para muitos alunos a compreensão do resultado (ver Figura 6.2).

# Teorema fundamental da Álgebra

Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau $n \geqslant 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa.

## Decomposição em fatores do 1º grau

Com o auxílio do teorema fundamental da Álgebra, mostraremos que um polinômio de grau $n \geqslant 1$ pode ser decomposto em um produto de fatores do 1º grau.

Vejamos:

Seja a equação polinomial de grau $n \geqslant 1$:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

Pelo teorema fundamental da Álgebra, existe um número $x_1$, tal que $P(x_1) = 0$. Assim:

$$\boxed{P(x) = (x - x_1) \cdot Q_1(x) = 0} \qquad \text{I}$$

Concluímos que $x - x_1 = 0$ ou $Q_1(x) = 0$. Sendo $n > 1$, $Q_1(x)$ não é um polinômio constante. Logo, ele admite uma raiz $x_2$, tal que:

$$\boxed{Q_1(x) = (x - x_2) \cdot Q_2(x)} \qquad \text{II}$$

Substituindo II em I, temos:

$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot Q_2(x) = 0$

Procedendo do mesmo modo, podemos escrever:

$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot Q_n$

Sendo $Q_n$ uma constante e $a_n$ o coeficiente de $x^n$, pela identidade de polinômios temos $Q_n = a_n$. Logo:

$$\boxed{P(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}$$

Figura 6.1:

**Teorema fundamental da Álgebra**

O teorema fundamental da Álgebra é uma proposição que pode ser enunciada da seguinte forma: Toda equação polinomial de grau $n$, com $n \geqslant 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Com base nesse teorema, podemos mostrar que toda equação polinomial de grau $n$, com $n \geqslant 1$, possui exatamente $n$ raízes complexas.

Além disso, podemos mostrar que todo polinômio de grau $n$, com $n \geqslant 1$, pode ser decomposto em fatores do 1º grau da seguinte maneira:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são as raízes de $p(x)$.

Figura 6.2:

No livro com o título *Matemática* [7], volume único, para o Ensino Médio, de Luiz Roberto Dante, também é utilizado o mesmo tipo de estrutura que encontramos nos dois livros já citados. Aqui o enunciado do Teorema da Decomposição é muito parecido com os anteriores e a sua demonstração muito superficial. A distinção entre os anteriores é que neste livro é citado o ano e o idealizador da primeira demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra (ver Figuras 6.3 e 6.4).

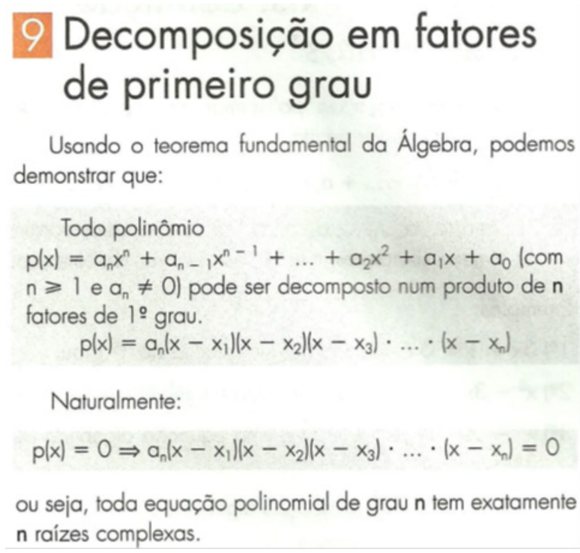
**8 Teorema fundamental da Álgebra**

O *teorema fundamental da Álgebra*, que admitiremos sem demonstração, diz que:

Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau $n$ $(n \geqslant 1)$ possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

**Observação:** Em 1799 o matemático Gauss demonstrou o teorema fundamental da Álgebra.

Figura 6.3:



## 9 Decomposição em fatores de primeiro grau

Usando o teorema fundamental da Álgebra, podemos demonstrar que:

Todo polinômio
$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto num produto de **n** fatores de 1º grau.

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

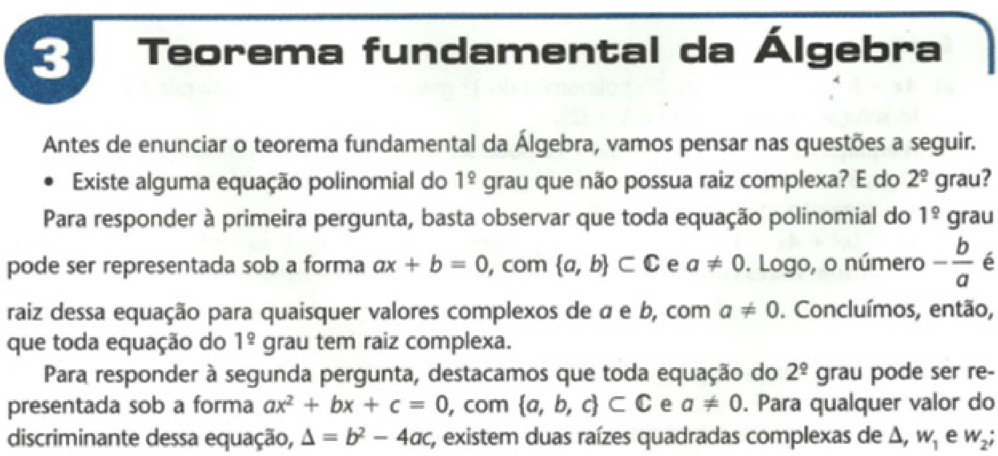
Naturalmente:

$$p(x) = 0 \Rightarrow a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = 0$$

ou seja, toda equação polinomial de grau **n** tem exatamente **n** raízes complexas.

Figura 6.4:

A exposição do tema por Manoel Paiva, em seu livro *Matemática* [24] é apresentada nas Figuras 6.5 e 6.6. A apresentação é bem propícia iniciando-se com questionamentos da presença de números complexos como raízes de equações do 1º e 2º graus, levando o aluno de maneira dedutiva ao Teorema Fundamental da Álgebra. Em seguida apresenta uma nota histórica (apesar de apresentar datas controversas) e segue com o Teorema da Decomposição e sua respectiva demonstração.



## 3 Teorema fundamental da Álgebra

Antes de enunciar o teorema fundamental da Álgebra, vamos pensar nas questões a seguir.

- Existe alguma equação polinomial do 1º grau que não possua raiz complexa? E do 2º grau?

Para responder à primeira pergunta, basta observar que toda equação polinomial do 1º grau pode ser representada sob a forma $ax + b = 0$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Logo, o número $-\frac{b}{a}$ é raiz dessa equação para quaisquer valores complexos de $a$ e $b$, com $a \neq 0$. Concluímos, então, que toda equação do 1º grau tem raiz complexa.

Para responder à segunda pergunta, destacamos que toda equação do 2º grau pode ser representada sob a forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Para qualquer valor do discriminante dessa equação, $\Delta = b^2 - 4ac$, existem duas raízes quadradas complexas de $\Delta$, $w_1$ e $w_2$;

Figura 6.5:

portanto, existem, em $\mathbb{C}$, os números $\frac{-b+w_1}{2a}$ e $\frac{-b+w_2}{2a}$, que são raízes da equação do 2º grau.

Concluímos, então, que toda equação do 2º grau possui raiz complexa.

Uma nova questão que surge naturalmente nesse momento é:

- Existe alguma equação polinomial, de determinado grau, que não possua raiz complexa?

A resposta a essa pergunta é dada pelo **teorema fundamental da Álgebra**, cujo enunciado é:

> Toda equação polinomial admite pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema foi a tese de doutoramento do matemático alemão Carl Friedrich Gauss, apresentada na universidade de Helmstädt no ano de 1798. Embora outros matemáticos já tivessem tentado fazer essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição.

Gauss deu quatro demonstrações diferentes para o teorema fundamental da Álgebra, a última em 1850. Como todas elas exigem conhecimentos de Matemática superior, não faremos a demonstração desse teorema.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão cujo talento revelou-se precocemente. Doutorou-se aos 21 anos de idade.

## 4 Teorema da decomposição

Uma consequência imediata do teorema fundamental da Álgebra é o **teorema da decomposição**, apresentado a seguir.

> Todo polinômio de grau $n$, com $n \geq 1$, $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ pode ser fatorado sob a forma $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$, em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

**Demonstração**

Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ um polinômio de grau $n$, com $n \geq 1$.

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $P(x)$ admite uma raiz complexa $r_1$. Logo, $P(x)$ é divisível por $x - r_1$ e, portanto,

$$P(x) = (x - r_1) \cdot Q_1(x) \qquad \text{(I)}$$

em que $Q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Se $n - 1 \geq 1$ temos, novamente pelo teorema fundamental da Álgebra, que $Q_1(x)$ tem uma raiz complexa $r_2$ e, portanto,

$$Q_1(x) = (x - r_2) \cdot Q_2(x) \qquad \text{(II)}$$

em que $Q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$.

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdot Q_2(x)$$

Aplicando $n$ vezes esse procedimento, obtemos:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) \cdot Q_n(x)$$

Por definição de identidade de polinômios, deduzimos que o coeficiente dominante $a_n$ de $P(x)$ deve ser igual a $Q_n(x)$. Logo:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

Figura 6.6:

Finalmente Elon Lages de Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, na publicação *A Matemática do Ensino Médio* [17], Volume 3, também tratam desse tópico mas não apresentam o desenvolvimento histórico do T.F.A.. O material é excelente quanto à formalização e ao rigor matemático, entretanto não comum nem compreensível à maioria dos alunos do Ensino Médio. Este livro pode ser utilizado no nível Médio em escolas mais exigentes e Superior para ensino de conceitos elementares de Matemática.

Os autores iniciam expondo que um polinômio pode ser expresso através de suas raízes e afirmam que *no conjunto dos números complexos, não há polinômios de grau maior do que ou igual a* 1 *que não possuam raízes* e em seguida enunciam o T.F.A. Na sequência o Teorema da Decomposição é exposto com sua respectiva demonstração, também é apresentada a demonstração e exemplos das relações entre coeficientes e raízes. Em outra seção é realizada a demonstração do T.F.A. utilizando conceitos de continuidade. Os autores ainda afirmam que *a rigor, ele é apresentado nos livros como se fosse um axioma, sem quaisquer razões para pelo menos mostrar que se trata de um resultado plausível. Isso se justifica pelo fato de que sua demonstração requer argumentos que não podem ser feitos de modo preciso no Ensino Médio*, palavras que foram destacadas pois captam exatamente o objetivo desta dissertação.

De modo geral os livros didáticos das escolas enunciam o Teorema Fundamental da Álgebra sem demonstrá-lo, o que é justificável já que não há pré-requisitos suficientes na Matemática do Ensino Básico ensinado na maioria das escolas, em especial nas públicas, para assimilação desta demonstração.

Esta singela apresentação fez-se necessária a fim de que seja visível a presença do T.F.A. no Ensino Básico e consequentemente a necessidade da compreensão profunda deste teorema por parte dos professores que ministram este tópico matemático.

## 6.2 Análise das Apresentações do Teorema Fundamental da Álgebra

Nossa análise consta de um quadro comparativo das apresentações do Teorema Fundamental da Álgebra no Ensino Básico, a fim de direcionar um olhar e reflexão mais objetivos quanto à disposição e qualidade do tema que é exposto para os alunos.

Nesta proposta identificamos o livro escolhido, seu respectivo autor, o ano de sua publicação, se há registro histórico e se este é satisfatório ou não, se há demonstração do T.F.A., se são apresentados exemplos decorrentes desse teorema, como é apresentado o Teorema da Decomposição, se ele é demonstrado, se possui exemplos ilustrativos deste resultado e finalmente o número de atividades propostas utilizando o T.F.A e o Teorema de Decomposição.

Iremos considerar os cinco livros seguintes comentados na seção anterior:

Tabela 6.1: Livros analisados

| | **Livro** |
|---|---|
| **I** | *Matemática: aula por aula*, volume único, Filho [13] |
| **II** | *Matemática*, volume único, Youssef-Soares [30] |
| **III** | *Matemática*, volume único, Dante [7] |
| **IV** | *Matemática*, Volume 3, Paiva [24] |
| **V** | *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 3, Lima-Carvalho-Wagner-Morgado [17] |

Faremos uma análise da apresentação do Teorema Fundamental da Álgebra nos livros I, II, III, IV e V.

1. **Autor:**

   (**I**) Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier Silva.

   (**II**) Antônio Nicolau Youssef, Elizabeth Soares e Vicente Paz Fernandez.

   (**III**) Luiz Roberto Dante.

   (**IV**) Manoel Paiva.

   (**V**) Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.

2. **Data da publicação:**

   (**I**) 2000.

   (**II**) 2005.

   (**III**) 2005.

   (**IV**) 2009.

   (**V**) 2006.

3. **Parte histórica:**

   (**I**) Não consta.

   (**II**) Não consta.

   (**III**) Reduzida.

   (**IV**) Satisfatória.

   (**V**) Não consta.

4. **Enunciado apresentado para o T.F.A.:**

   (**I**) Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau $n \geq 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa.

   (**II**) Toda equação polinomial de grau $n$, com $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

   (**III**) Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau $n$ $(n \geq 1)$, possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

   (**IV**) Toda equação polinomial admite pelo menos uma raiz complexa.

   (**V**) Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

5. **Há demonstração?**

   (**I**) Não.

(**II**) Não.

(**III**) Não.

(**IV**) Não.

(**V**) Sim.

**6. Possui exemplos decorrentes do T.F.A.?**

(**I**) Não.

(**II**) Não.

(**III**) Não.

(**IV**) Não.

(**V**) Não.

**7. Enunciado do Teorema da Decomposição:**

(**I**) Um polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em um produto de fatores do 1º grau.

(**II**) Todo polinômio de grau $n$, com $n \geq 1$, pode ser decomposto em fatores do 1º grau da seguinte maneira: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$ em que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são as raizes de $p(x)$.

(**III**) Todo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) pode ser decomposto num produto de $n$ fatores de 1º grau: $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)$.

(**IV**) Todo polinômio de grau $n$, com $n \geq 1$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, pode ser fatorado sob a forma $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\cdots(x - r_n)$ em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raizes de $P(x)$.

(**V**) Todo polinômio complexo $p(x)$ de grau $n$ pode ser fatorado na forma $p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$, onde $c$ é um número complexo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são raizes complexas de $p(x)$ (possivelmente repetidas). Além disso, esta fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.

**8. Possui exemplos decorrentes do Teorema da Decomposição?**

(**I**) Um exemplo.

(**II**) Não.

(**III**) Três exemplos.

(**IV**) Dois exemplos.

(**V**) Não.

Podemos perceber que há uma diversidade de exposições e esta característica atinge a matemática como um todo. Em relação a este pensamento podemos transcrever algumas palavras do matemático Ubiratan D'Ambrosio que, em [6], sabiamente afirma:

> Hoje, a matemática vem passando por uma grande transformação. Isso é absolutamente natural. Os meios de observação, de coleta de dados e de processamento desses dados, que são essenciais na criação matemática, mudaram profundamente. Não que se tenha relaxado o rigor, mas, sem dúvida, o rigor científico hoje é de outra natureza.
> Outro grande fator de mudança é o reconhecimento do fato de a matemática ser muito afetada pela diversidade cultural. Não apenas a matemática elementar, reconhecendo as etnomatemáticas e procurando incorporá-las no currículo, mas também se reconhece diversidade naquilo que chamamos matemática avançada ou matemática universitária e a pesquisa em matemática pura e aplicada. Essas são afetadas pelo que poderíamos chamar uma diversidade cultural na pesquisa, a inter e mesmo a transdisciplinaridade. Um exame rápido do Mathematical Reviews e do Zentralblatt für mathematik, que são publicações que fazem a resenha de praticamente tudo o que se publica em pesquisa matemática no mundo, revela inúmeras áreas novas de pesquisa e um grande número de pesquisadores, com publicações importantes, que não são profissionalmente matemáticos. Poderíamos dizer que a matemática é o estilo de pensamento dos dias de hoje, a linguagem adequada para expressar as reflexões sobre a natureza e as maneiras de explicação.

Esta breve reflexão fez-se necessária para que compreendêssemos que ainda há muitas mudanças que acontecerão tanto no ensino, quanto nas pesquisas de tópicos matemáticos, como é o caso do Teorema Fundamental da Álgebra que é muito recente no meio acadêmico.

Por fim, salientamos que com a evolução da matemática, das tecnologias, dos currículos nacionais, das propostas didáticas, das exigências profissionais e das particularidades de cada estado brasileiro, grandes modificações ocorrerão na esfera nacional e internacional dos conteúdos matemáticos, bem como da sua propagação no meio acadêmico e científico.

# Considerações Finais

Em virtude dos aspectos mencionados no decorrer desta dissertação é imprescindível que percebamos o quão presente e relevante é a Matemática, assim como a Álgebra, no contexto da evolução da sociedade.

Partindo de referências curriculares estaduais constatamos sua forte presença no ensino médio e sua apresentação desprovida de contextos, explicações e aplicações.

Amparados nesta realidade, selecionamos o Teorema Fundamental da Álgebra como norteador de nossa pesquisa no imenso universo matemático.

Diante de toda literatura estudada, ficou evidente que o desenvolvimento do Teorema Fundamental da Álgebra teve início com a busca de soluções para as equações polinomiais.

Do mesmo modo, o processo investigativo do Teorema Fundamental da Álgebra se deu intimamente ligado com a descoberta, compreensão e formalização da Teoria do conjunto dos Números Complexos.

Na procura por uma demonstração elementar, que não utilizasse técnicas usuais da análise complexa, do referido teorema, vimos a necessidade de apresentar minuciosamente cada definição, teorema ou propriedade necessária a tal processo.

Um grande aparato sobre os Números Complexos, continuidade e limites infinitos foi utilizado a fim de esgotar qualquer pré-requisito para a demonstração formal do Teorema Fundamental da Álgebra.

Assim resultou perceptível como é fundamental que tanto o aluno quanto o professor em sua formação escolar/acadêmica tenha oportunidade de trafegar pelo campo das demonstrações, uma vez que tal ato abre um leque de possibilidades e constatações que, embora simples, muitas vezes não tenham sido vislumbradas.

Dado o exposto, fomos levados a concluir que é necessário incorporar as demonstrações ao ensino básico, guardadas as devidas restrições, para que os educandos se familiarizem com o rigor matemático e, principalmente percebam a necessidade da confirmação dos dados e informações apresentados.

Pela observação dos aspectos analisados no decorrer desta obra concluímos que é importante e ousamos dizer urgente uma reflexão acerca do ensino do Teorema Fundamental da Álgebra tanto no ensino médio quanto nos cursos de licenciatura.

Acreditamos que esta dissertação seja um pequeno contributo, assim deixamos como proposta a novos pesquisadores que apresentem outra demonstração para o Teorema Fundamental da Álgebra com ênfase em conceitos da Matemática Elementar, afim de que este tema seja mais presente nas discussões matemáticas e educacionais.

# Referências Bibliográficas


[1] Ávila, G. S. S., *Funções de uma Variável Complexa*. Coleção Elementos de Matemática, IMPA, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1974.

[2] Berlinghoff, W. P., Gouvêa, F. Q., *A Matemática Através dos Tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. Tradução de Elza Gomide e Helena Castro, Editora Blucher, São Paulo, 2010.

[3] Boyer, C. B., *História da Matemática*. Edgard Blücher Ltda, segunda edição, São Paulo, 1988.

[4] Brasil, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental, segunda edição, Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

[5] Churchill, R. V., *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1975.

[6] D'Ambrosio, U., *Desafios da Educação Matemática no Novo Milenio*. Educação Matemática em Revista, n. 11, p. 14-17, São Paulo, dezembro de 2001.

[7] Dante, L. R., *Matemática*. Volume único, Editora Ática, São Paulo, 2005.

[8] Delboni, R. R., *Teorema Fundamental da Álgebra*. Monografia, IMECC/UNICAMP, Campinas, 2006.

[9] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, quinta edição, Campinas, 2011.

[10] Fernandez, C. S., Santos, R. A., *Uma Nota sobre o Teorema Fundamental da Álgebra*. Revista Matemática Universitária, n. 45, SBM, dezembro de 2008.

[11] Figueiredo, D. G. de, *Análise I*. Coleção Elementos de Matemática, IMPA, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1975.

[12] Filho, I. F. B., *Alguns Aspectos da Demonstração em Matemática: uma discussão sobre os métodos empregados no desenvolvimento do raciocínio matemático*. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM), Montevideo, setembro de 2013.

[13] Filho, B. B., Silva, C. X., *Matemática: aula por aula*. Volume único, Editora FTD, São Paulo, 2000.

[14] Fine, B., Rosenberger, G., *The Fundamental Theorem of Algebra*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[15] Kirnev, D. C. B. X., Savioli, A. M. P. D., *Um Estudo sobre Lógica e Demonstrações em Matemática*. XIII Conferência Internacional de Educação Matemática, Recife, junho de 2011.

[16] Kline, M., *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford University Press, New York, 1980.

[17] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 3, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[18] Lima, E. L., *Conceituação, Manipulação e Aplicações: os três componentes do ensino de matemática*. Revista do Professor de Matemática n. 41, p. 1-6, 1999.

[19] Lima, E. L., *Análise Real*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[20] Milies, C. P., *Breve História da Álgebra Abstrata*. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf, UFBA, 2004.

[21] Miorim, M. A., *O Ensino da Matemática: evolução e modernização*. Tese de Doutorado em Metodologia do Ensino, FE/UNICAMP, 1995, 251 páginas.

[22] Mondini, F., *Modos de Conceber a Álgebra em Cursos de Formação de Professores de Matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 168 páginas, Rio Claro, 2009.

[23] Oliveira, O. R. B.,*The Fundamental Theorem of Algebra: from the four basic operations*. American Mathematical Monthly, **119** (2012), p. 753-758.

[24] Paiva, M., *Matemática*. Volume 3, Editora Moderna, São Paulo, 2009.

[25] Ponte, J. P., Branco, N., Matos, A., *Álgebra no Ensino Básico*. Editora DGIDC, Lisboa, 2009.

[26] Sousa, E. K. V., Fossa, J. A., Sousa, G. C., *Demonstrações Matemáticas: Uma Experiência com a Aplicação de um Módulo de Ensino no Curso de Matemátivca*. Em *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, p. 1-9, Salvador, julho de 2010.

[27] Tahan, M., *As Maravilhas da Matemática*. Editora Bloch, Rio de Janeiro, 1972.

[28] Vasconcelos, C. C., *Ensino - Aprendizagem da Matemática: velhos problemas, novos desafios*. Revista Millenium, no. 20, São Paulo, 2000.

[29] Vieira, L. H. S., *Epistemologia dos Números Complexos*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

[30] Youssef, A. N., Soares, E., Fernandez, V. P., *Matemática*. Volume único, Editora Scipione, São Paulo, 2005.