



CECILIA YUMI KUROKAWA

ÁREAS E VOLUMES
DE EUDOXO E ARQUIMEDES A CAVALIERI E O CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

CECILIA YUMI KUROKAWA

ÁREAS E VOLUMES
DE EUDOXXO E ARQUIMEDES A CAVALIERI E O CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA CECILIA YUMI KUROKAWA, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. MARIA LÚCIA BONTORIM DE QUEIROZ.

Assinatura da Orientadora


Prof.(a). Dr(a). MARIA LÚCIA BONTORIM DE QUEIROZ

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

K966a Kurokawa, Cecilia Yumi, 1965-
Áreas e volumes : de Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o cálculo diferencial e integral / Cecilia Yumi Kurokawa. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Maria Lúcia Bontorim de Queiroz.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo de áreas. 2. Cálculo integral. I. Queiroz, Maria Lúcia Bontorim de, 1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Areas and volumes : from Eudoxo and Arquimedes from Cavalieri and differential and integral calculus

Palavras-chave em inglês:

Areas calculate

Integral calculus

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestra

Banca examinadora:

Maria Lúcia Bontorim de Queiroz [Orientador]

Eliane Queelho Frota Rezende

Yuriko Yamamoto Baldin

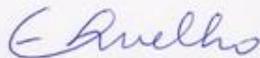
Data de defesa: 26-01-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

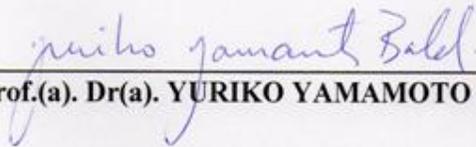
**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 26 de janeiro de 2015 e
aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof.(a). Dr(a). MARIA LÚCIA BONTORIM DE QUEIROZ



Prof.(a). Dr(a). ELIANE QUELHO FROTA REZENDE



Prof.(a). Dr(a). YURIKO YAMAMOTO BALDIN

Abstract

The volume and area calculation were a theme that challenged mathematicians since the first registers that they found out. From rudimental shapes and practices without theoretical support of Babylonians and Egyptians until Differential and Integral Calculus development, a vast number of mathematicians contributed for development and systematization of concepts and forms of areas and volume calculation.

In this paper has as an objective to show formal concepts and historical aspects about area and volume calculation through mathematicians' contributions over the Mathematic history.

Particularly, it will be analyzed Cavalieri' projects who used the indivisible idea. He extended concepts that used exhaustion method and Pappus that contributed about formalization of area and volume calculation of solids of revolution through gravity center. Other aspect pointed in this paper are the contributions of Newton and Leibniz about Differential and Integral Calculus development that to make possible a meaningful advance about area and volume calculation.

To finish this paper, some didactic applications it will be presented with the aim to make students have a clear understanding about the theme.

Keywords: Area, Volume, Integral, Teaching activities.

Resumo

O cálculo de áreas e volumes foi um tema que desafiou os matemáticos desde os primeiros registros encontrados. Desde as formas rudimentares e práticas sem embasamento teóricos dos babilônicos e egípcios até o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, inúmeros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento e formalização dos conceitos e maneiras de cálculo de áreas e volumes.

Neste trabalho apresentaremos conceitos formais e também aspectos históricos no desenvolvimento do cálculo de áreas e volumes, através das contribuições dos matemáticos ao longo da história da Matemática. Em especial, analisaremos os trabalhos de Cavalieri, que utilizou a ideia dos indivisíveis, ampliando conceitos utilizados pelo método da exaustão e Pappus, que contribuiu formalizando o cálculo de áreas e volumes dos sólidos de revolução através do centro de gravidade.

Também destacamos a contribuição das ideias de Newton e Leibniz no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, que permitiu significativo avanço no cálculo de áreas e volumes.

Finalizamos este trabalho com algumas aplicações didáticas, visando um melhor entendimento dos alunos sobre este tema.

Palavras-chave: Área, Volume, Integral, Atividades didáticas.

Sumário

Dedicatória	xiii
Agradecimentos	xv
Introdução	1
1 Áreas e Volumes: Aspectos históricos e conceituais	5
1.1 Área de polígonos	6
1.2 Área do quadrado	6
1.3 Área do retângulo	8
1.4 Área do paralelogramo	9
1.5 Área do triângulo	9
1.6 Área do trapézio	10
1.7 Uma definição mais geral para área	10
1.8 O método de exaustão de Eudoxo	12
1.8.1 Exemplo - Método da exaustão	12
1.9 O método de Arquimedes	15
1.9.1 Exemplo - O cálculo do valor do π por Arquimedes	16
1.10 Equivalências de áreas e quadraturas	18
1.10.1 Exemplo - Quadratura de polígono por Euclides	19
1.10.2 Exemplo - Outra forma de quadratura de polígono	21
1.11 Quadratura do círculo	23
1.12 Algumas aplicações de equivalência de áreas	25
1.12.1 Teorema de Tales	25
1.12.2 Teorema de Ceva	26
1.12.3 Teorema de Pitágoras	28
1.13 Cálculo do volume do cubo	30
1.14 Uma definição mais geral de volume	31
1.14.1 Exemplo - Cálculo do volume da esfera (Arquimedes)	32
2 O Princípio de Cavalieri	37
2.1 Princípio de Cavalieri para áreas	38
2.1.1 Exemplo - Área da elipse	38

2.2	Princípio de Cavalieri para volumes	40
2.2.1	Volume do prisma	41
2.2.2	Volume de pirâmides de mesma base e mesma altura	41
2.2.3	Volume da pirâmide de base triangular	42
2.2.4	Volume de cilindro	43
2.2.5	Volume de cone	44
2.2.6	Volume de esfera	45
2.2.7	Volume do toro	46
2.2.8	Volume da esfera com furo cilíndrico	47
3	A contribuição do Cálculo Diferencial e Integral para o Cálculo de Áreas e Volumes	53
3.1	Newton e Leibniz	54
3.2	A integral de Riemann	55
3.2.1	Exemplo - Cálculo de área pela soma de Riemann	55
3.2.2	Definição de área	58
3.3	Teorema Fundamental do Cálculo	60
3.3.1	Exemplo - Cálculo de área pelo Teorema Fundamental do Cálculo	61
3.3.2	Exemplo - Área limitada pelo gráfico de duas funções	61
3.4	Cálculo de volumes	62
3.4.1	Exemplo - Volume de esfera	63
3.5	Comprimento de arco de uma curva plana	64
3.5.1	Exemplo - Comprimento de curva	65
3.6	Demonstrações dos Princípios de Cavalieri com auxílio do Cálculo Diferencial e Integral	67
3.6.1	Princípio de Cavalieri para áreas	67
3.6.2	Princípio de Cavalieri para volumes	68
3.6.3	Exemplo - Volume da esfera com furo cilíndrico usando integral	69
4	O Teorema de Pappus para o Cálculo de Volumes e Áreas de Superfícies	73
4.1	Centro de gravidade e centro de massa	73
4.1.1	Exemplo. Centro de gravidade de partículas	76
4.2	Centro de gravidade determinado experimentalmente	77
4.3	Centro de gravidade de uma linha poligonal	77
4.3.1	Exemplo. Centro de gravidade de triângulo isósceles	78
4.3.2	Exemplo. Centro de gravidade de semicircunferência	79
4.4	Centro de gravidade de polígonos	80
4.4.1	Exemplo. Centro de gravidade de trapézio	81
4.5	Centro de gravidade de um corpo qualquer	82
4.6	Centro de gravidade de arco	83
4.7	Exemplos	84
4.7.1	Cálculo do centro de gravidade de uma região retangular	84
4.7.2	Cálculo do centro de gravidade do triângulo retângulo	85

4.7.3	Cálculo do centro de gravidade de um triângulo qualquer	86
4.7.4	Cálculo do centro de gravidade do semicírculo	88
4.7.5	Cálculo do centro de gravidade da região plana R	89
4.7.6	Cálculo do centro de gravidade da semicircunferência	90
4.8	Teoremas de Pappus	91
4.8.1	Sólidos de revolução	92
4.8.2	Primeiro Teorema de Pappus	92
4.8.3	Segundo Teorema de Pappus	93
4.9	Exemplos	94
4.9.1	Cálculo do volume do cilindro	94
4.9.2	Cálculo do volume do cone	95
4.9.3	Cálculo do volume da esfera por Pappus	95
4.9.4	Cálculo do volume do sólido formado pela rotação da região plana R	96
4.9.5	Cálculo da área da superfície da esfera	96
4.9.6	Cálculo do volume do sólido obtido pela rotação do trapézio ao redor de sua base maior	97
5	Atividades para sala de aula	101
5.1	Relação entre volumes e o Princípio de Cavalieri	102
5.1.1	Introdução	102
5.1.2	Objetivos	102
5.1.3	Metodologia	103
5.1.4	Material	103
5.1.5	Duração da atividade	103
5.1.6	Roteiro da atividade	103
5.1.7	Avaliação	105
5.1.8	Análise dos resultados	105
5.2	Centro de gravidade e o Teorema de Pappus	106
5.2.1	Introdução	106
5.2.2	Objetivos	106
5.2.3	Metodologia	107
5.2.4	Material	107
5.2.5	Duração da atividade	107
5.2.6	Roteiro da atividade	107
5.2.7	Avaliação	111
5.2.8	Análise dos resultados	111
	Considerações finais	113
	Referências	115

Dedico aos meus familiares e amigos que sempre me incentivaram, sem deixar que o desânimo e o cansaço fossem maiores que a vontade de concluir esse importante passo.

E aos professores do PROFMAT que acreditam e trabalham por uma educação inovadora e aos colegas professores, pela luta diária.

Agradecimentos

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.

A minha família pela colaboração e paciência nos momentos de ausência devido à dedicação a este trabalho.

Aos sempre amigos André Luiz Amâncio Franco, Marli Forão Pontes, Juan Alonso Coronel, Maria Cecília Carvalho, pelo incentivo e colaboração.

A todos os colegas e amigos do PROFMAT-Unicamp que, em diversos momentos me auxiliaram e incentivaram na conclusão desse trabalho, em especial aos amigos Ariadne Vasques Calçada, Audino Castelo Branco e Adilson Pedro Roveram.

Aos alunos, colegas professores e direção da E. E. Francisco Derosa, representada pela diretora Adonai Solange de Campos Oliveira da Silva, pela colaboração e participação nas atividades propostas nesse trabalho.

A Profa. Dra. Maria Lúcia Bontorim de Queiroz, pela enorme dedicação a esse trabalho, pelas horas gastas nas orientações e revisões e pelo apoio e incentivo sempre.

A CAPES pelo financiamento deste projeto e ao IMECC-Unicamp pela oportunidade oferecida.

Lista de Ilustrações

1.1	Área do quadrado	6
1.2	Área do retângulo	8
1.3	Área do paralelogramo	9
1.4	Área do triângulo	9
1.5	Área do trapézio	10
1.6	Área de figura plana qualquer	10
1.7	Método de exaustão	13
1.8	Polígono inscrito	14
1.9	Polígono circunscrito	15
1.10	Hexágonos inscrito e circunscrito	16
1.11	Polígono de n lados	16
1.12	Polígonos de $2n$ lados	17
1.13	Construção de retângulo equivalente ao triângulo	19
1.14	Triângulo e retângulo equivalentes	20
1.15	Quadratura do retângulo	20
1.16	Quadratura de polígono - 1 ^o passo	22
1.17	Quadratura de polígono - 2 ^o passo	22
1.18	Quadratura de polígono - 3 ^o passo	23
1.19	Quadratriz de Hípias	23
1.20	Teorema de Tales	25
1.21	Teorema de Ceva	26
1.22	Unicidade do ponto de concorrência	27
1.23	Triângulo retângulo	28
1.24	Teorema de Pitágoras - Euclides	28
1.25	Unidade de medida de volume	30
1.26	Volume do bloco retangular	31
1.27	Cilindro, esfera e cone	32
1.28	Equilíbrio	34
2.1	Princípio de Cavalieri para áreas	38
2.2	Área de elipse	39
2.3	Princípio de Cavalieri para volumes	40
2.4	Volume do prisma	41
2.5	Razão entre secções paralelas à base da pirâmide	41

2.6	Razão entre áreas de secções paralelas à base da pirâmide	42
2.7	Pirâmide e prisma de mesma base e mesma altura	42
2.8	Volume da pirâmide	43
2.9	Volume do cilindro	44
2.10	Volume do cone	44
2.11	Volume da esfera	45
2.12	Rotação do círculo	46
2.13	Toro e cilindro	46
2.14	Esfera com furo cilíndrico	47
2.15	Cálculo do volume	48
3.1	Área sob a curva cuja altura é o maior valor de f	55
3.2	Área sob a curva cuja altura é o menor valor de f	56
3.3	Partição da função no intervalo $[a, b]$	58
3.4	Retângulos com valor mínimo como altura em cada subintervalo	59
3.5	Retângulos com valor máximo como altura em cada subintervalo	59
3.6	Área entre gráficos de função	61
3.7	Volume de sólido	62
3.8	Volume de sólido de revolução	62
3.9	Volume da esfera	63
3.10	Arco de extremidades A e B	64
3.11	Partição do arco	64
3.12	Comprimento do segmento	65
3.13	Teorema de Cavalieri para áreas	67
3.14	Esfera com furo cilíndrico	69
4.1	Equilíbrio de forças	74
4.2	Sentido da alavanca	74
4.3	Somatória de forças	74
4.4	Partículas no plano cartesiano	75
4.5	Centro de gravidade	77
4.6	Centro de gravidade do contorno triangular	78
4.7	Cálculo da altura do triângulo	78
4.8	Apótema do segmento AB	79
4.9	Centro de gravidade da semicircunferência	80
4.10	Centro de gravidade do trapézio	81
4.11	Momento da placa homogênea	82
4.12	Centro de gravidade de arco	83
4.13	Centro de gravidade de retângulo	84
4.14	Centro de gravidade de triângulo retângulo	85
4.15	Centro de gravidade de um triângulo qualquer	86
4.16	Centro de gravidade do semicírculo	88
4.17	Função $y = \sqrt{x}$	89

4.18	Centro de gravidade da semicircunferência	90
4.19	Sólido de revolução	92
4.20	Cilindro, cone e esfera	92
4.21	Volume do cilindro	94
4.22	Volume do cone	95
4.23	Volume da esfera	95
4.24	Volume do sólido gerado pela região R	96
5.1	Polígonos bases dos prismas	103
5.2	Tabela de resultados	104
5.3	Confecção da pirâmide	104
5.4	Figuras planas - determinação de centro de gravidade	107
5.5	Equilíbrio de figuras planas	108
5.6	Centro de gravidade do triângulo	108
5.7	Fio de prumo	108
5.8	Confecção do modelo de toro	109
5.9	Modelo de toro	110

Introdução

É difícil fazer afirmações precisas sobre as origens da Geometria, mas seu início se deu em tempos remotos da antiguidade.

A simples observação cotidiana levou o homem às descobertas geométricas. A noção de distância podia ser observada no seu dia a dia e os padrões das formas geométricas eram presentes nos objetos ao seu redor. A circunferência podia ser encontrada no contorno do sol e da lua, no corte de troncos e na água quando arremessada uma pedra na superfície de um lago. Nas construções utilizavam conceitos de paralelismo e perpendicularismo de modo intuitivo. Nas confecções de utensílios formavam padrões geométricos utilizando noções de simetria.[8]

Embora o homem tenha se mostrado capaz de fazer registros de seus pensamentos em forma escrita nos últimos seis milênios, há registros de congruência e simetria em trabalhos feitos pelos homens do período neolítico.

Heródoto acreditava que a Geometria tinha surgido no Egito, da necessidade de fazer novas medidas das terras após a inundação anual no vale às margens do rio Nilo, dando à Geometria o sentido de "medida da terra". Já Aristóteles achava que havia uma classe sacerdotal que conduziu o estudo da Geometria por lazer. Há exemplos nos tabletas encontrados em sítios arqueológicos na Mesopotâmia de problemas de geometria.[6]

A Geometria desenvolvida pelos babilônios e egípcios era essencialmente aplicada em problemas de cálculo de comprimentos, áreas e volumes. Para isso, utilizavam maneiras de desenvolver esses cálculos sem se preocuparem com demonstrações e conceitos teóricos.

As primeiras demonstrações matemáticas são devidas a Tales, iniciando assim, o desenvolvimento da geometria pelos gregos, que organizaram dedutivamente, com axiomas, teoremas, entre outros, o modelo matemático cuja estrutura é utilizada até hoje.

Euclides, autor de "Elementos", reúne de modo sistematizado, as principais descobertas geométricas de seus precursores. Em sua obra, começa pelas noções mais elementares e somente a partir daí insere definições gerais, axiomas e postulados. Começa pela noção de ponto, "o que não tem partes", seguindo-se a caracterização da linha como uma longitude, "extensão" sem largura; a superfície como aquilo que só tem largura e extensão, e o corpo o que tem largura, extensão e profundidade.

O desenvolvimento do conhecimento sobre o cálculo de áreas e volumes foi feito através dos trabalhos e contribuições de vários matemáticos no decorrer da história.

Este texto tem como objetivo apresentar os estudos de alguns desses matemáticos, analisar como suas ideias levaram à evolução dos conceitos do cálculo de áreas e volumes e à formalização desses conceitos, que serão abordados no capítulo 1. Também nesse capítulo, mostramos aplicações

sobre o tema, tanto no seu contexto histórico como em aplicações através de conceitos utilizados atualmente. Entre os matemáticos que contribuíram significadamente com a evolução das ideias de áreas e volumes, destacamos o trabalho de Cavalieri e suas ideias sobre os indivisíveis, cujo princípio norteia todo o cálculo de volumes desenvolvido no ensino médio, no capítulo 2. Também destacamos Newton, Leibniz e Riemann cujas ideias levaram ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial Integral, no capítulo 3. Abordamos também as ideias não tão usuais no ensino médio para o cálculo de volumes de sólidos de revolução utilizados por Pappus através do centro de gravidade das figuras planas geradoras desses sólidos, no capítulo 4.

Finalizamos este texto com sugestões de atividades onde o aluno se torna protagonista de seu conhecimento, construindo os sólidos e verificando a validade de conceitos na prática. Em oposição às atividades teóricas, através da manipulação de material concreto o aluno demonstra maior interesse, sentindo-se desafiado e estimulado na aquisição do conhecimento.

Capítulo 1

Áreas e Volumes: Aspectos históricos e conceituais

Na antiguidade, a observação cotidiana levou o homem às descobertas geométricas. A Geometria desenvolvida pelos babilônios e egípcios era essencialmente aplicada em problemas de cálculo de comprimentos, áreas e volumes sendo desenvolvidos sem a preocupação com demonstrações e conceitos teóricos.

Os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. conheciam o cálculo da área do retângulo, do triângulo retângulo isósceles e do trapézio retângulo, também o volume de um paralelepípedo, entre outros cálculos. Os egípcios desenvolveram fórmulas de mensuração para cálculo de áreas de terras e volume de grãos.[8]

As primeiras demonstrações matemáticas são devidas a Tales, iniciando-se assim, o desenvolvimento da geometria pelos gregos, que organizaram dedutivamente, com axiomas, teoremas, entre outros, o modelo matemático cuja estrutura é utilizada até hoje.

Euclides destacou-se nessa época como autor de *Elementos*, obra composta por treze livros contemplando conceitos de geometria, aritmética e álgebra.

Para desenvolvermos um conteúdo em Geometria devemos começar com a apresentação de conceitos primitivos e uma lista de proposições primitivas que enunciem, sem demonstração, fatos relacionados a esses conceitos. A partir daí, introduzir os teoremas que são demonstrados, e que fazem afirmações referentes às proposições e aos conceitos definidos.

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos de área e volume. Apresentaremos formas de se obter a área para algumas regiões planas conhecidas. Também analisaremos as contribuições dos matemáticos na evolução das ideias sobre o infinito e o método da exaustão que levaram ao estudo de áreas e volumes através do cálculo diferencial e integral.

Estão incluídas neste capítulo algumas aplicações onde o conceito de áreas será utilizado como facilitador na demonstração de alguns resultados importantes.

Áreas

A área de uma região plana é um número positivo associado a essa região que quantifica o espaço ocupado por ela. Para medir a porção do plano ocupada por uma figura F , devemos estabelecer uma unidade de medida de área e comparar F com essa unidade. O resultado é um número que expressa quantas vezes a figura contém a unidade de área.[12]

1.1 Área de polígonos

Para cada polígono P associamos um número real não negativo, chamado área de P , que possui as propriedades:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se P é um quadrado com lado unitário, então área de $P = 1$.
3. Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos P_1, \dots, P_n tais que dois quaisquer têm em comum no máximo alguns lados, a área de P é a soma das áreas dos polígonos P_i , com $i = 1, 2, \dots, n$.
4. Se o polígono P está contido no polígono Q então a área de P é menor ou igual à área de Q .

No que segue, vamos adotar como unidade de medida de área o quadrado unitário, isto é, um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Apresentaremos algumas áreas de figuras planas conhecidas, iniciando com os cálculos das áreas de alguns polígonos.

Denotaremos a área do polígono P por $A(P)$.

Começaremos pelo quadrado, onde a ideia de compararmos sua área com a unidade de medida para verificar quantas vezes o quadrado a contém é mais intuitiva, passando para área do retângulo e do paralelogramo, e finalmente, as áreas do triângulo e do trapézio.

1.2 Área do quadrado

Consideremos o quadrado Q , de lado n , com n inteiro positivo, como mostra a figura 1.1.

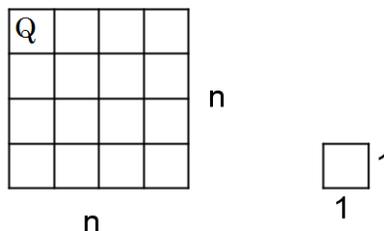


Figura 1.1: Área do quadrado

Esse quadrado pode ser decomposto por meio de retas paralelas aos seus lados, em um número inteiro n^2 de quadrados unitários conforme a figura. Sua área será então igual a n^2 .

Se o lado do quadrado Q tem por medida $\frac{1}{n}$, com n inteiro positivo, então podemos decompor o quadrado unitário em n^2 quadrados congruentes a Q . Todos esses n^2 quadrados juntos compõem o quadrado unitário. Logo, pela propriedade 3, temos:

$$n^2 \cdot A(Q) = 1$$

Assim,

$$A(Q) = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Generalizando, se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional $\frac{m}{n}$, podemos decompor cada lado desse quadrado em m segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$. Assim, o quadrado Q será decomposto em m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$ cuja área é $\frac{1}{n^2}$.

Então, temos:

$$A(Q) = m^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ou seja

$$A(Q) = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Assim, podemos concluir que se um quadrado cuja medida do lado é um número racional $a = \frac{m}{n}$, então sua área é dada pela expressão:

$$\text{Área do quadrado} = a^2$$

Quando a medida a do lado do quadrado Q for um número irracional, ainda assim podemos mostrar que a área continua sendo a^2 . [15]

Para isso, consideramos dois números racionais b_k e c_k tais que

$$b_k < a < c_k \text{ e } c_k - b_k < \frac{1}{k}$$

Consideramos os quadrados de lados b_k e c_k , tais que, o quadrado de lado b_k está contido no quadrado Q e o quadrado de lado c_k contém o quadrado Q .

Sendo b_k e c_k números racionais, sabemos calcular as áreas desses dois quadrados e temos a seguinte desigualdade:

$$(b_k)^2 < A(Q) < (c_k)^2$$

Mas sabemos que

$$b_k < a < c_k \text{ e } (b_k)^2 < a^2 < (c_k)^2.$$

Concluimos então que $A(Q)$ e a^2 devem pertencer ao intervalo (b_k^2, c_k^2) , de maneira que temos:

$$|A(Q) - a^2| < c_k^2 - b_k^2 = (c_k - b_k)(c_k + b_k)$$

$$|A(Q) - a^2| < \frac{1}{k} \cdot (c_k + b_k)$$

$$|A(Q) - a^2| < \frac{1}{k} \cdot [(c_k - b_k) + (b_k + b_k)]$$

$$|A(Q) - a^2| < \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{k} + 2a\right)$$

Essa desigualdade vale para todo $k \in \mathbb{N}$, logo, como podemos aumentar o valor de k sucessivamente, teremos $|A(Q) - a^2| = 0$, ou seja,

$$A(Q) = a^2$$

Assim, podemos concluir que para qualquer medida a do lado do quadrado, a sua área será:

$$A(Q) = a^2$$

1.3 Área do retângulo

O retângulo é um quadrilátero que possui os quatro ângulos retos.

Com um raciocínio análogo ao utilizado anteriormente, podemos mostrar que um retângulo de lados m e n tem área igual a $m \cdot n$, para quaisquer números reais m e n . Porém, aqui vamos chegar à área do retângulo utilizando a área do quadrado. Assim, para calcular a área de um retângulo R de lados m e n , reais, construímos o quadrado Q de lado $m + n$, formado por dois retângulos R e mais dois quadrados, um de lado m e outro de lado n , como mostra a figura.

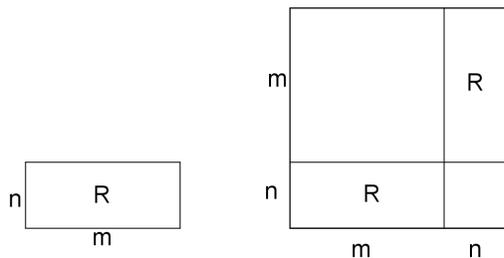


Figura 1.2: Área do retângulo

Temos área de $Q = (m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$.

Mas temos também, área de $Q = m^2 + n^2 + 2 \cdot A(R)$, o que nos leva a concluir que:

$$A(R) = mn$$

1.4 Área do paralelogramo

Da área do retângulo, passamos para a área do paralelogramo mais geral, definido como um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Considerando o paralelogramo P , com base de comprimento b e altura a , podemos inscrevê-lo em um retângulo de base $b + c$ e altura a , onde c é o segmento obtido pelo prolongamento da base b até a perpendicular que passa pelo vértice superior do paralelogramo.

A área desse retângulo é $(b + c)a = ba + ca$. Por outro lado, o retângulo é formado pelo paralelogramo unido com dois triângulos que, juntos formam um retângulo de área ca . Notamos que os triângulos são congruentes.

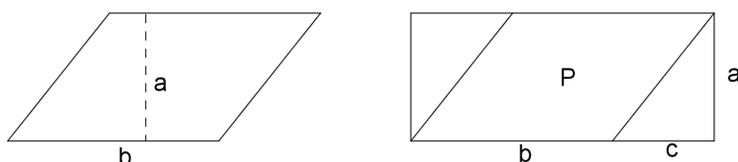


Figura 1.3: Área do paralelogramo

Assim, $b.a + c.a = A(P) + c.a$.

Então,

$$A(P) = b.a$$

1.5 Área do triângulo

Para calcular a área de um triângulo T notamos que a partir dele podemos construir um paralelogramo de mesma base e mesma altura que ele. Esse paralelogramo pode ser dividido por uma de suas diagonais, em dois triângulos congruentes. Então, pela propriedade 1, eles têm a mesma área.

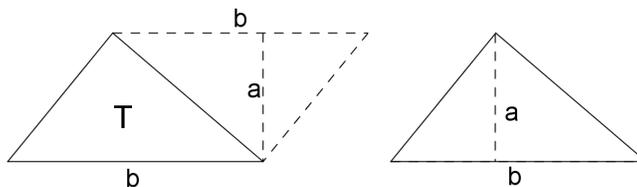


Figura 1.4: Área do triângulo

Então, pela propriedade 3, podemos concluir que:

$$A(T) = \frac{1}{2}.b.a$$

1.6 Área do trapézio

Trapézio é um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos.

A área do trapézio Z , pode ser obtida através da decomposição em dois triângulo, como mostra a figura 1.5, onde a é a altura do trapézio.

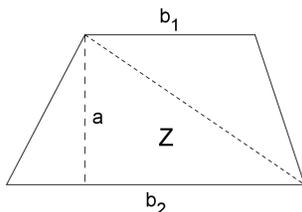


Figura 1.5: Área do trapézio

$$A(Z) = \frac{ab_1}{2} + \frac{ab_2}{2} = \frac{(ab_1 + ab_2)}{2} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot a}{2}$$

Estas figuras estudadas apresentam características que as definem e que possibilitam o cálculo de suas áreas através dos conceitos vistos. Agora, como encontrar a área de uma figura plana qualquer?

1.7 Uma definição mais geral para área

Para uma figura plana F arbitrária, a área, indicada por $A(F)$, ficará determinada à medida em que aproximamos o seu valor, por falta ou por excesso. Escolhemos como valores aproximados por falta, as áreas dos polígonos P contidos em F e como valores aproximados por excesso, as áreas dos polígonos P' que contêm F .

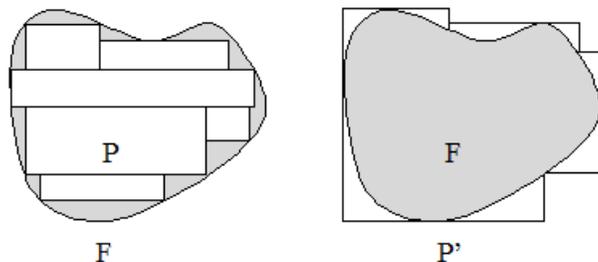


Figura 1.6: Área de figura plana qualquer

À medida em que o contorno do polígono se aproxima do contorno da figura F , a sua área se aproxima de $A(F)$.

Considerando os valores aproximados por falta, se $A(P)$ é a área de um dos polígonos P contido em F , temos:

$$A(P) \leq A(F)$$

E, para qualquer número $k < A(F)$, podemos encontrar um polígono P , contido em F , onde

$$k < A(P) \leq A(F)$$

De maneira análoga, com as aproximações por excesso, se P' é um polígono que contém F , temos $A(F) \leq A(P')$. E para qualquer número $d > A(F)$ existe uma região retangular P' que contém F , tal que:

$$A(F) \leq A(P') < d$$

Assim, podemos escolher polígonos cujas áreas se aproximem cada vez mais da área da figura, tanto por falta como por excesso, tornando a diferença entre as áreas tão pequena quanto se deseje, determinando finalmente, a área da figura F .

As ideias aqui apresentadas, refletem o pensamento elaborado por vários matemáticos envolvendo a ideia de infinito e o método da exaustão, e que culminaram no desenvolvimento de um novo ramo da matemática: o Cálculo Diferencial e Integral.

Embora a formalização do cálculo tenha se dado no século XVII, questões relacionadas ao seu domínio já eram possíveis de serem encontradas em várias situações anteriores.

Os babilônios já sabiam como calcular a raiz quadrada de um número por aproximação e aplicando o método várias vezes conseguiam valores aproximados tão próximos quanto desejassem.

Os matemáticos gregos sabiam demonstrar que a diagonal de um quadrado de lado 1 não podia ser escrita de forma finita, ou em nossa linguagem atual, que $\sqrt{2}$ não era um número racional. [5]

A descoberta da impossibilidade de representar a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado em termos de um número racional, levou os matemáticos gregos à ideia da incomensurabilidade e do infinito. Para os gregos foi difícil aceitar o fato de usar um número com infinitos algarismos para representar um segmento de reta tão bem determinado como a diagonal de um quadrado.

A dificuldade em tratar dessa questão gerou uma crise entre os matemáticos gregos, levando-os a concluir que seria melhor evitar os processos infinitos.

Embora não considerassem os incomensuráveis como números, a teoria das proporções de Eudoxo permitiu definir os irracionais, recorrendo ao finito. Esse processo é a base do método da exaustão.

Em relação a esse processo, segundo Isabel Serra "...a ideia básica pode ser facilmente compreendida com auxílio do sistema decimal atualmente usado para escrever um número". [23]

Por exemplo, para definir o número π , que é o perímetro da circunferência de diâmetro 1, podemos dizer que o valor está entre 3,14 e 3,15, representado por:

$$3,14 < \pi < 3,15$$

Se essa aproximação ainda não for suficiente podemos melhorar sua representação fazendo:

$$3,141 < \pi < 3,142$$

Assim, aproximavam o valor de π , que é um número irracional, representando por um número finito de algarismos através desse procedimento.

Embora tenham negado o infinito, os gregos deixaram sementes para as próximas gerações de matemáticos.

Apresentaremos a seguir, as ideias de Eudoxo e Arquimedes para o cálculo da área do círculo e do valor de π .

1.8 O método de exaustão de Eudoxo

Eudoxo viveu aproximadamente em 400 a.C., fundou uma escola em Cízico, ao norte da Ásia Menor. Apresentou sua teoria de proporção como uma maneira de contornar a crise surgida pela descoberta dos incomensuráveis.

O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente:

"Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que a sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie". [7]

Este é um dos mais antigos teoremas sobre limites.

Sejam a e b , com $a > b$ as grandezas dadas.

Construiremos a sequência:

$$\begin{aligned} u_n &= a - \frac{a}{2} - \frac{a}{4} - \frac{a}{8} - \dots - \frac{a}{2^n} = a[1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n})] \\ &= a[1 - (1 - \frac{1}{2^n})] = a \cdot \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a}{2^n} \\ \text{e } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= 0 < b \end{aligned}$$

O método de exaustão não é um método de descoberta de um resultado, que na maioria dos casos era descoberto empiricamente. Mas conhecida uma fórmula, tornava-se um elegante instrumento para prová-la.

1.8.1 Exemplo - Método da exaustão

Usaremos esse método para mostrar que:

"Um círculo tem a mesma área de um triângulo retângulo no qual um dos lados do ângulo reto é igual ao raio do círculo e o outro igual ao comprimento da sua circunferência."

Apresentaremos a demonstração utilizando a linguagem moderna. [4]

Representaremos com A , a área do círculo, e com T , a área do triângulo. Existem apenas três possibilidades: $A > T$, $A < T$, $A = T$.

1) Vamos supor inicialmente que $A > T$.

Notamos que $A - T$ corresponde a uma área e aplicaremos o princípio da exaustão às grandezas A e $A - T$.

Retiraremos da área A do círculo, a área de um quadrado inscrito que representaremos por L_4 , que é maior que a metade da área do círculo. Sobrará $A - L_4$.

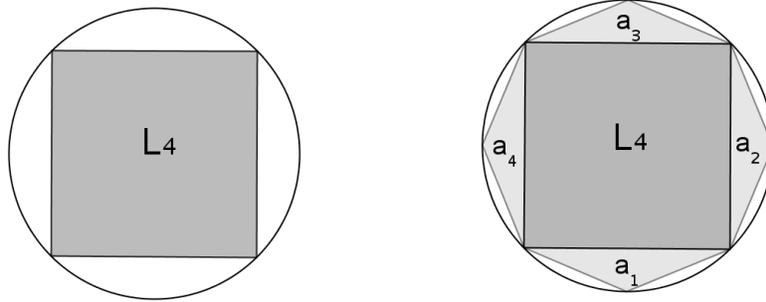


Figura 1.7: Método de exaustão

Tomando como base cada lado do quadrado, traçamos os triângulos isósceles com vértices na circunferência, cujas áreas representaremos por a_1, a_2, a_3, a_4 .

Retiramos essas áreas da parte $A - L_4$.

Sobrará

$(A - L_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = A - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + L_4) = A - L_8$, onde L_8 é a área do polígono regular inscrito de 8 lados.

Traçando novamente triângulos isósceles tendo como base os lados do octógono e retirando as áreas desses triângulos da parte que havia sobrado anteriormente, sobrará $A - L_{16}$, onde L_{16} é o polígono regular de 16 lados, inscrito na circunferência.

Após um número finito de etapas obteremos um polígono regular de área L_n tal que $A - L_n$ é menor que as grandezas A e $A - T$, consideradas inicialmente.

Ou seja,

$A - L_n < A - T$, o que nos leva a concluir que $T < L_n$.

Por outro lado, consideremos um polígono regular de n lados, de área L_n , inscrito no círculo de área A .

Nele, o apótema OP é menor que o raio R e o perímetro $2p$ é menor que o comprimento C da circunferência.

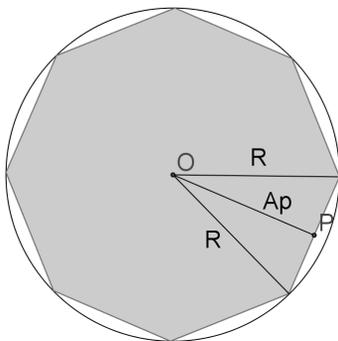


Figura 1.8: Polígono inscrito

Então,

$$OP \cdot 2p < R \cdot C \Rightarrow \frac{OP \cdot 2p}{2} < \frac{R \cdot C}{2}$$

Mas

$$\frac{OP \cdot 2p}{2} \text{ é a área } L_n \text{ do polígono e } \frac{R \cdot C}{2} \text{ é a área } T \text{ do triângulo.}$$

Logo, $L_n < T$, o que leva a uma contradição.

2) Vamos supor agora que $A < T$.

Consideremos o quadrado circunscrito ao círculo cuja área representamos por L_4 .

Notamos que $T - A$ corresponde a uma área e aplicaremos o princípio da exaustão às grandezas L_4 e $T - A$.

Vamos retirar do quadrado de área L_4 , uma parte maior que a metade, que é o círculo de área A . Sobra $L_4 - A$.

Em cada canto do quadrado, traçamos os triângulos isósceles cujas bases são tangentes ao círculo. Representaremos suas áreas por a_1, a_2, a_3, a_4 .

Retiramos essas áreas da parte $L_4 - A$.

Sobrará

$(L_4 - A) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = (L_4 - A) - (L_4 - L_8) = L_8 - A$, onde L_8 é a área do polígono regular circunscrito, de 8 lados.

De maneira análoga, retirando da parte que sobra, $L_8 - A$, uma parte maior que sua metade, sobrará $L_{16} - A$.

Após um número finito de etapas obteremos um polígono regular de área L_n tal que $L_n - A$ é menor que $T - A$, considerada inicialmente.

Ou seja

$$L_n - A < T - A$$

o que leva a concluir que $L_n < T$.

Por outro lado, vamos considerar um polígono regular de área L_n circunscrito no círculo de área A .

Na figura a seguir, o apótema OP é igual ao raio R e o perímetro $2p$ é maior que o comprimento C da circunferência.

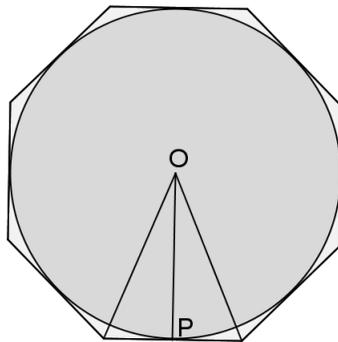


Figura 1.9: Polígono circunscrito

Então,

$$OP \cdot 2p > R \cdot C$$

$$\frac{OP \cdot 2p}{2} > \frac{R \cdot C}{2}$$

Mas

$$\frac{OP \cdot 2p}{2} \text{ é a área } L_n \text{ do polígono e } \frac{R \cdot C}{2} \text{ é a área } T \text{ do triângulo.}$$

Logo, $L_n > T$, o que leva a uma contradição.

Como $A > T$ levou a um absurdo e $A < T$ levou a outro absurdo, podemos concluir que $A = T$

Ou seja, a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo cujos catetos são respectivamente, o raio e o comprimento desse círculo.

1.9 O método de Arquimedes

Arquimedes viveu em Siracusa por volta de 287 a.C. e figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos. É notável a construção de criativos engenhos de defesa que ajudaram Siracusa a

resistir ao sítio de Roma. Arquimedes explorava a Geometria em figuras desenhadas em cinzas de lareiras ou em diagramas traçados na areia.

1.9.1 Exemplo - O cálculo do valor do π por Arquimedes

Através da ideia de uma grandeza "ser suficientemente pequena quanto se queira", Arquimedes calculou a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo e também a quadratura da parábola. Para o cálculo da razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo, Arquimedes inscreveu e circunscreveu, inicialmente, hexágonos regulares em uma circunferência de raio 1.

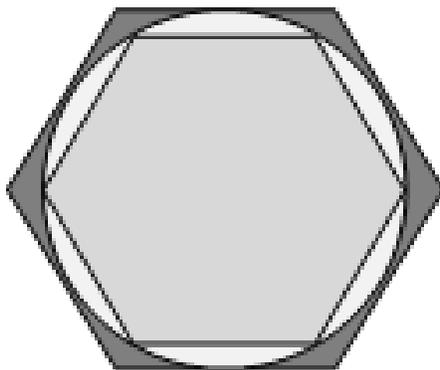


Figura 1.10: Hexágonos inscrito e circunscrito

Em seguida, foi duplicando sucessivamente o número de lados. Assim, inscreveu e circunscreveu polígonos de $3 \cdot 2^n$ lados.

Conhecendo o perímetro de um determinado polígono, podemos calcular o perímetro do polígono com o dobro do número de lados.

Consideremos o polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio R . Representamos o lado do polígono por l_n . Desse polígono vamos destacar o triângulo retângulo formado pela hipotenusa R e os catetos $\frac{l_n}{2}$ e A_n , sendo A_n o apótema do polígono de n lados.

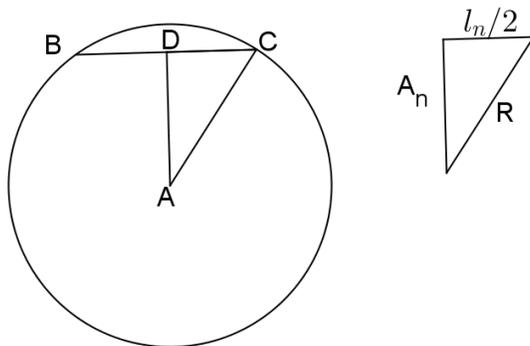


Figura 1.11: Polígono de n lados

Mostraremos uma maneira de se chegar aos resultados propostos por Arquimedes.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$A_n^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = R^2$$

$$A_n^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4}$$

$$A_n^2 = \frac{4R^2 - l_n^2}{4}$$

$$A_n = \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}$$

Agora, consideramos o polígono regular de $2n$ lados inscrito na circunferência, como mostra a figura que segue. Nela destacamos os seguintes elementos:

$CE = l_{2n}$, lado do polígono de $2n$ lados.

$AD = A_n$, apótema do polígono de n lados.

$DE = R - A_n$, diferença entre o raio da circunferência e o apótema.

$EF = 2R$, diâmetro da circunferência.

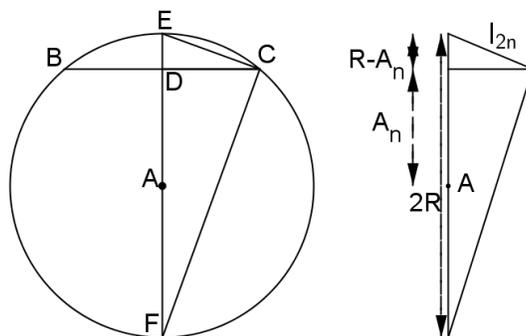


Figura 1.12: Polígonos de $2n$ lados

Do triângulo retângulo ECF da figura temos, pelas relações métricas do triângulo retângulo que o quadrado do cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção, ou seja:

$$(EC)^2 = (EF) \cdot (DE)$$

Assim,

$$(l_{2n})^2 = 2R \cdot (R - A_n)$$

$$(l_{2n})^2 = 2R \cdot \left(R - \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}\right)$$

$$(l_{2n})^2 = 2R^2 - 2R \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}$$

$$(l_{2n})^2 = R(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2})$$

$$l_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2})}$$

Sendo a circunferência de raio $R = 1$ e $l_6 = 1$, temos:

$$l_{12} = \sqrt{1(2 \cdot 1 - \sqrt{4 \cdot 1^2 - 1^2})}$$

$$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Aplicando sucessivamente esse cálculo, Arquimedes calculou o perímetro de polígonos com 12, 24, 48 e 96 lados, inscritos e circunscritos ao círculo, obtendo valores cada vez mais próximos da razão, que conhecemos por π .

Efetuada os cálculos, Arquimedes chegou à conclusão que esse valor está entre 3,1408 e 3,1428, e como citado anteriormente, é uma aproximação bem satisfatória do valor de π , que embora seja um número infinito, pode ser representado por valores finitos aproximados.

1.10 Equivalências de áreas e quadraturas

Os séculos V e IV a.C. constituíram um período extremamente ativo e rico da matemática no mundo grego. Neste período, conhecido por Época Heróica da Matemática, têm início os três problemas clássicos da matemática grega que estimularam o pensamento e descobertas matemáticas ao longo de dois milênios, até se concluir que não podiam ser resolvidos utilizando apenas um compasso e uma régua não graduada. São eles, a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

Em particular, o problema da quadratura do círculo, desafiou matemáticos durante muitas décadas, até que em 1882, Lindemann mostrou a impossibilidade da solução desse problema utilizando apenas régua e compasso. Mas a beleza desse problema reside no fato de ter constituído ao longo dos tempos uma fonte muito rica de ideias e processos matemáticos, que foram sendo inventados nas sucessivas tentativas de resolução.

Hipócrates de Quios, matemático que viveu em aproximadamente 430 a.C., deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma área curvilínea, mostrando métodos para a quadratura das lúnulas.

Euclides viveu em torno de 300 a.C. e apresentou em sua obra, "Elementos", importantes resultados sobre equivalências de áreas ¹ e quadraturas de figuras.

Mostraremos a forma utilizada por Euclides para efetuar a quadratura de qualquer região poligonal, iniciando com algumas proposições utilizadas por ele na quadratura, observando que, para

¹Duas figuras são equivalentes quando tiverem a mesma área.

Euclides, a igualdade entre figuras significa figuras de mesma área. [22]

Notemos que a proposição *P1* corresponde ao conhecido caso lado ângulo lado de congruência de triângulos e afirma que dois triângulos congruentes, por este caso, possuem a mesma área.

- P1 Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais, as bases e os triângulos, e os demais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.
- P2 Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, e as bases também iguais e os ângulos, compreendidos pelos lados iguais, serão também iguais.
- P3 Se em dois triângulos dois ângulos de um forem iguais a dois ângulos do outro, e um lado do primeiro igual a um lado do outro, e forem estes lados ou adjacentes, ou opostos a ângulos iguais, os outros lados dos dois triângulos serão iguais aos outros lados, e também o terceiro ângulo será igual ao terceiro.
- P4 Os lados e os ângulos opostos dos paralelogramos são iguais. O paralelogramo fica dividido pela diagonal em duas partes iguais.
- P5 Os paralelogramos que estão postos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais.
- P6 Os paralelogramos que estão postos sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais.
- P7 Os triângulos que estão postos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais.
- P8 Os triângulos que estão sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais.

1.10.1 Exemplo - Quadratura de polígono por Euclides

Reunindo esses resultados, podemos construir um retângulo com a mesma área de um triângulo dado.

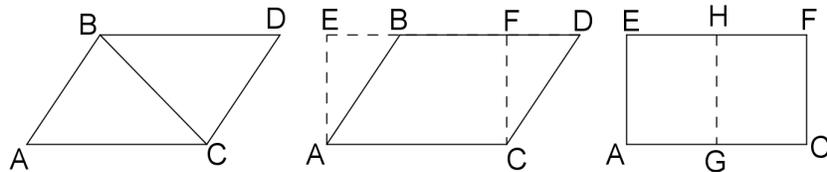


Figura 1.13: Construção de retângulo equivalente ao triângulo

Seguimos os seguintes passos:

1. Dado o triângulo ABC , traçamos segmentos paralelos aos lados AB e AC , obtendo o paralelogramo $ABCD$, cuja área é o dobro da área do triângulo dado.

2. Construimos o retângulo $ACFE$, equivalente ao paralelogramo $ABCD$.
3. Dividimos o segmento AC em duas partes iguais, pelo ponto G , obtendo o retângulo $AGHE$, equivalente ao triângulo ABC dado.

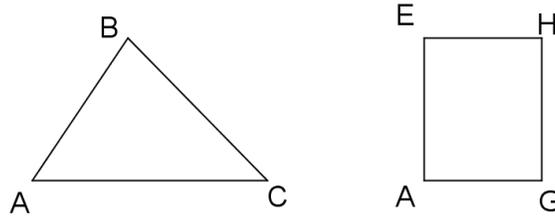


Figura 1.14: Triângulo e retângulo equivalentes

Devemos agora, construir um quadrado cuja área é igual a área do retângulo obtido.

Para isso, utilizaremos as seguintes proposições:

- P9 Em um triângulo retângulo, o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados que formam o mesmo ângulo reto.
- P10 Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e em outras duas partes desiguais, o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas secções, será igual ao quadrado da metade da linha proposta.

Esta proposição corresponde à afirmação de que a diferença entre os quadrados de dois números é igual ao produto da soma pela diferença desses números.

Para construir o quadrado consideremos o retângulo $ACHG$:

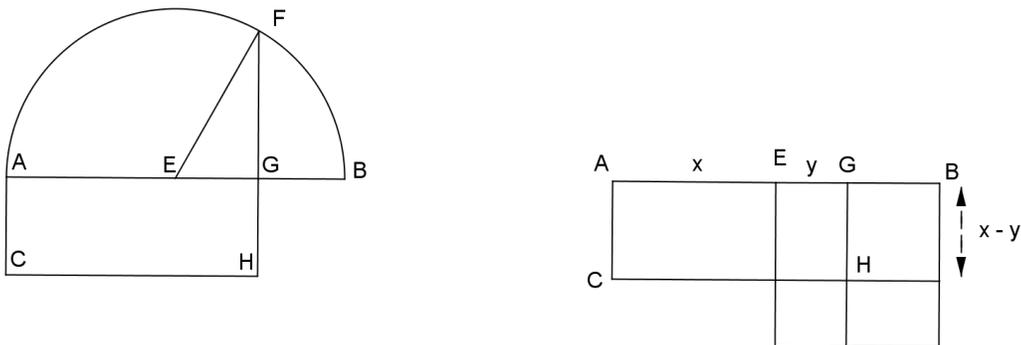


Figura 1.15: Quadratura do retângulo

Se $AC = AG$, estará feito o que se pede. Mas se não forem iguais os lados AC e AG , marcamos o ponto B , sobre o prolongamento de AG , de maneira que seja $GH = GB$, e cortamos o segmento

AB em duas partes iguais no ponto E . Fazendo centro em E , descrevemos a semicircunferência AFB , onde F é o prolongamento do segmento HG na semicircunferência, obtendo o segmento EF .

O segmento AB está dividido em duas partes iguais no ponto E , e em duas desiguais no ponto G . Então, pela proposição $P10$, o retângulo de lados AG e AC juntamente com o quadrado de lado EG é igual ao quadrado de lado EB . Mas EB é igual a EF . Logo, o retângulo de lados AG e AC juntamente com o quadrado de lado EG , é igual ao quadrado de lado EF .

Pela proposição $P9$, os quadrados de lados EG e GF são iguais ao quadrado de lado EF . Logo, o retângulo de lados AG e AC juntamente com o quadrado de lado GE , será igual aos quadrados de EG e GF .

Logo, tirando o quadrado comum de lado GE , ficará o retângulo de lados AG e AC igual ao quadrado de lado GF .

Para a quadratura de qualquer região poligonal, a ideia é inicialmente dividir a região em triângulos e cada triângulo em um retângulo de mesma área. Depois, encontrar um quadrado com a mesma área que o retângulo.

Então, aplicando o Teorema de Pitágoras, transformar cada par de quadrados em um só quadrado cuja área será a soma dos outros dois.

Aplicando sucessivamente esse método, conseguiremos chegar a um quadrado de área equivalente a região poligonal dada.

1.10.2 Exemplo - Outra forma de quadratura de polígono

Outra forma de fazer a quadratura de um polígono seria transformar um polígono qualquer em triângulo, para depois encontrar um quadrado equivalente a esse triângulo.[18]

Para isso, consideramos o seguinte fato:

"Dois triângulos de mesma base e mesma altura relativa a ela são sempre equivalentes".

Este resultado é equivalente a proposição $P7$.

Com isso, podemos transformar qualquer região poligonal convexa de n lados, com $n \geq 4$, em outra equivalente a ela, mas com $n - 1$ lados.

Para ilustrar esse fato, consideramos $n = 5$. Para o pentágono $ABCDE$ da figura, vamos construir um quadrado equivalente.

Para isso, inicialmente, encontramos um quadrilátero equivalente a ele, traçamos uma diagonal, por exemplo EC , e pelo vértice D , traçamos a reta r paralela a essa diagonal.

Seja F o ponto de intersecção da reta r com a reta s , obtida pelo prolongamento do lado BC . Os triângulos CDE e CFE são equivalentes, pois possuem a mesma base e a mesma altura.

Logo o pentágono $ABCDE$ e o quadrilátero $ABFE$ são equivalentes.

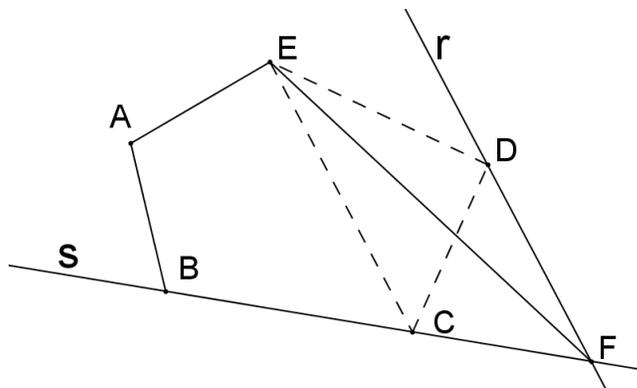


Figura 1.16: Quadratura de polígono - 1º passo

Analogamente, podemos transformar o quadrilátero $ABFE$ em um triângulo equivalente.

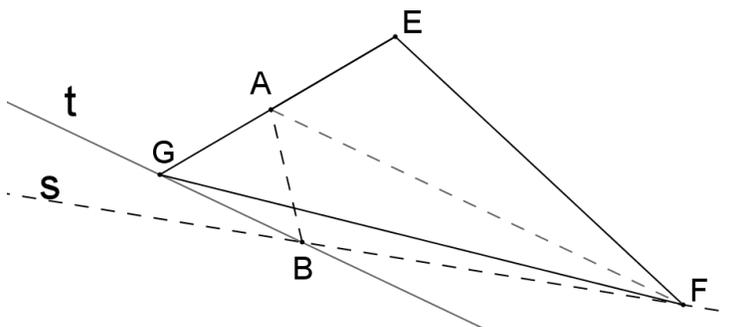


Figura 1.17: Quadratura de polígono - 2º passo

A seguir, faremos a quadratura de um triângulo.

Assim, devemos encontrar um quadrado de área igual à área de um triângulo com base b e altura h dadas.

Construiremos um quadrado cujo lado mede $l = \sqrt{\frac{bh}{2}}$, ou seja, devemos encontrar a média geométrica entre os segmentos de medida $\frac{b}{2}$ e h .

Para isso, transportamos os segmentos $\frac{b}{2}$ e h sobre uma mesma reta, formando o segmento NK , como mostra a figura 1.18.

Construiremos o triângulo INK , retângulo em I , cujo vértice I está na perpendicular à hipotenusa NK , pelo ponto J . O segmento JI é a média geométrica entre os segmentos $\frac{b}{2}$ e h , pois em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos

que determina sobre a hipotenusa.

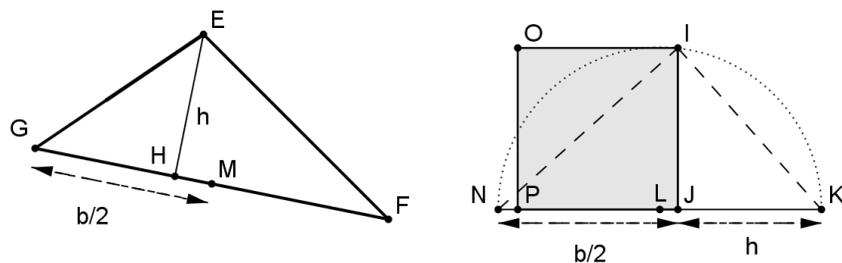


Figura 1.18: Quadratura de polígono - 3º passo

Na figura temos $NJ = \frac{b}{2}$ e $JK = h$

Assim, o quadrado $PJIO$ é equivalente ao triângulo EGF .

Finalmente obtemos:

Área do quadrado $PJIO$ = área do pentágono $ABCDE$.

1.11 Quadratura do círculo

Embora seja impossível obter a quadratura do círculo usando apenas régua e compasso com operações usuais, a tentativa de resolver esse problema, talvez tenha sido um dos desafios mais fascinantes para muitos matemáticos, que acabaram por criar outras formas de solucioná-lo.

Hípias, matemático nascido em Elis, no século V a.C., inventou uma curva que se tornou conhecida como quadratriz. Através dessa curva podemos resolver o problema de trisseção de ângulos e também o da quadratura do círculo. É possível que Hípias a tivesse usado para trisseccionar ângulos e posteriormente, Dinóstrato, matemático que viveu por volta de 350 a.C. a tivesse aplicado no problema da quadratura do círculo. [6]

A curva é traçada da seguinte maneira:

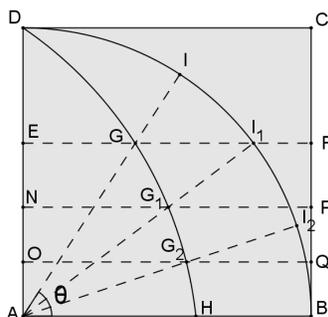


Figura 1.19: Quadratriz de Hípias

Considere o quadrado $ABCD$ da figura 1.19. Seja o lado DC transladado verticalmente com movimento uniforme a partir de sua posição até coincidir com AB . No mesmo tempo que CD inicia o seu movimento, a reta AD gira uniformemente e em sentido horário em torno do ponto A até coincidir também com a reta AB chegando ao mesmo tempo que a reta CD no seu movimento vertical.

Em um instante qualquer, seja EF a posição do segmento CD e AI a posição do segmento AD . O lugar descrito pelo ponto G considerando todas as intersecções possíveis das retas durante seus movimentos é a curva de Hípias.

A mais importante propriedade dessa curva é a proporcionalidade direta do segmento DE com o ângulo $D\hat{A}I$.

Para demonstrar essa propriedade, consideramos o fato de que o movimento do segmento DC e do segmento AD são uniformes. Sendo v_1 a velocidade linear de DC e v_2 a velocidade angular de AD , considerando o segmento DE e o ângulo $D\hat{A}I$, podemos escrever $DE = v_1 t$ e $D\hat{A}I = v_2 t$. Assim:

$$\frac{DE}{D\hat{A}I} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2} = k(\text{constante})$$

Conseqüentemente, o segmento AE e o ângulo $I\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - D\hat{A}I$ estão na mesma razão k .

Então, para fazer a trisseção do ângulo IAB , por exemplo, basta trissectar o segmento EA nos pontos N e O e o segmento FB nos pontos P e Q . Os segmentos NP e OQ , cortam a curva nos pontos G_1 e G_2 , respectivamente. Os segmentos AI_1 e AI_2 , dividirão o ângulo IAB em três partes iguais.

Para fazer a quadratura do círculo, Dinóstrato observou uma notável propriedade da extremidade H da curva de Hípias.

A equação polar da curva é dada por $\pi r \text{sen}\theta = 2a\theta$, onde a é o lado do quadrado $ABCD$. [6]

Utilizando o fato de que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$, temos:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \frac{2a}{\pi}.$$

O teorema de Dinóstrato diz que o lado a é a média proporcional entre os segmentos AH e o comprimento DB do arco do quarto de círculo, isto é:

$$\frac{\widehat{DB}}{AB} = \frac{AB}{AH}$$

A demonstração é dada por Pappus e provavelmente devida a Dinóstrato, que utiliza uma prova indireta, estabelecendo o teorema por destruição das alternativas.

Dado o ponto H de intersecção da curva com o lado AB , temos uma proporção envolvendo três segmentos retilíneos e o arco circular \widehat{DB} . Mas podemos obter, pela construção geométrica da terceira proporcional, um segmento de reta medindo b , de comprimento igual a DB . O retângulo que tem lados $2b$ e a tem área igual à área de círculo de raio a . Então, a partir do retângulo, podemos construir um quadrado de área igual, encontrando uma forma de se fazer a quadratura

do círculo, mas utilizando outros meios que não sejam apenas o uso da régua não graduada e o compasso.

Assim, destacamos que este procedimento não faz parte das construções permissíveis, como os gregos chamavam as construções feitas utilizando apenas esses dois instrumentos.

1.12 Algumas aplicações de equivalência de áreas

Utilizando o conceito de equivalência de áreas, faremos as demonstrações de alguns teoremas e resultados importantes.

1.12.1 Teorema de Tales

"Se duas retas são transversais a um conjunto de três ou mais retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer determinados sobre uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre a outra".

Demonstração: Considerando as paralelas que cortam as transversais r e s e determinam sobre elas os pontos A, A', B, B', C e C' , queremos mostrar que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

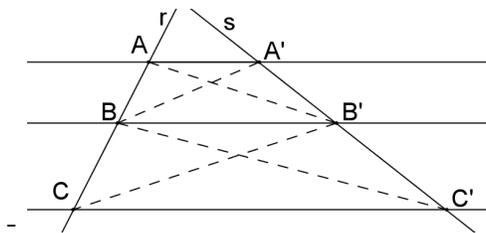


Figura 1.20: Teorema de Tales

Considerando que as áreas de triângulos quaisquer de mesma altura são proporcionais às suas respectivas bases, tomamos os triângulos ABB' e BCB' , tendo como base os segmentos AB e BC , respectivamente. Tomando a altura relativa ao vértice B' , os dois triângulos possuem a mesma altura. Representaremos a área de um triângulo MNP qualquer por $A(MNP)$. Assim, teremos:

$$\frac{A(ABB')}{A(BCB')} = \frac{AB}{BC}$$

De mesma forma, considerando os triângulos $A'B'B$ e $B'C'B$, tendo como base os segmentos $A'B'$ e $B'C'$ e a altura relativa ao vértice B , comum, teremos:

$$\frac{A(A'B'B)}{A(B'C'B)} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Os triângulos ABB' e $A'B'B$ possuem a mesma base BB' , e alturas congruentes, pois as retas AA' e BB' são paralelas. Logo:

$$A(ABB') = A(A'B'B)$$

Também os triângulos BCB' e $B'C'B$ possuem a mesma base BB' , e alturas congruentes, pois as retas CC' e BB' são paralelas. Então:

$$A(BCB') = A(B'C'B)$$

Assim, podemos concluir que: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, como queríamos.

Em relação ao Teorema de Tales, a demonstração feita usualmente no ensino fundamental e médio supõe todos os segmentos comensuráveis² desconsiderando o caso dos segmentos serem incomensuráveis, visto que nesse caso haveria necessidade de conceitos que não são explorados nesse nível de ensino. Assim, a demonstração sugerida neste trabalho utiliza meios que não dependem da comensurabilidade dos segmentos, demonstração esta que é recomendada pelas orientações da Proposta Curricular do Estado de São Paulo. [14]

1.12.2 Teorema de Ceva

Seja ABC um triângulo qualquer e D , E e F pontos sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Os segmentos AD , BE e CF são concorrentes em um mesmo ponto se, e somente se, $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$.

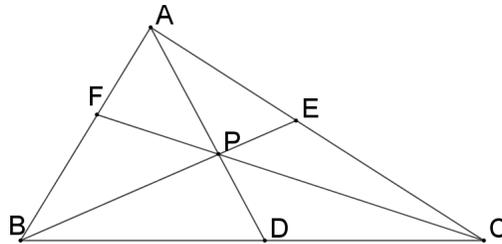


Figura 1.21: Teorema de Ceva

Demonstração: Lembrando, as áreas de triângulos quaisquer de mesma altura são proporcionais às suas respectivas bases.

Vamos mostrar inicialmente que se os segmentos AD , BE e CF são concorrentes em um mesmo ponto então $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$

²O que equivale a dizer que a razão entre os comprimentos dos segmentos é um número racional

Considerando os triângulos AFP e FBP com bases AF e FB , eles têm a mesma altura, logo suas áreas são proporcionais às suas bases. O mesmo acontece com os triângulos AFC e FBC . Então, podemos escrever:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{A(AFP)}{A(FBP)} = \frac{A(AFC)}{A(FBC)}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{A(AFC) - A(AFP)}{A(FBC) - A(FBP)} = \frac{A(APC)}{A(BPC)}$$

De modo análogo, temos as seguintes proporções:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{A(BPA)}{A(CPA)}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{A(CPB)}{A(APB)}$$

Assim

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{A(BPA)}{A(CPA)} \cdot \frac{A(CPB)}{A(APB)} \cdot \frac{A(APC)}{A(BPC)} = 1$$

Agora mostraremos que se $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$, então os segmentos AD , BE e CF são concorrentes em um mesmo ponto.

Sejam D , E e F pontos sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente, tais que

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Seja o ponto F' sobre AB , tal que AD , BE e CF' são concorrentes. Pela primeira parte, já provada:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = 1$$

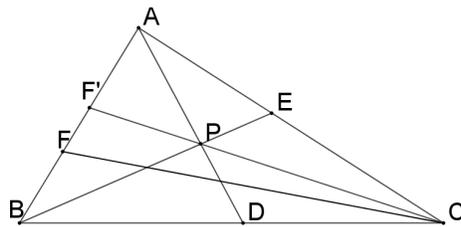


Figura 1.22: Unicidade do ponto de concorrência

Dessa maneira, temos:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF'}{F'B}$$

Isso equivale a dizer que:

$$\frac{AF}{FB} + 1 = \frac{AF'}{F'B} + 1$$

$$\frac{AF}{FB} + \frac{FB}{FB} = \frac{AF'}{F'B} + \frac{F'B}{F'B}$$

$$\frac{AF + FB}{FB} = \frac{AF' + F'B}{F'B}$$

$$\frac{AB}{FB} = \frac{AB}{F'B}. \text{ Então, } FB = F'B, \text{ ou seja } F = F'$$

Vamos apresentar uma demonstração do Teorema de Pitágoras devida a Euclides, lembrando que esse resultado está apresentado na propriedade P_9 da seção 1.9.

1.12.3 Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

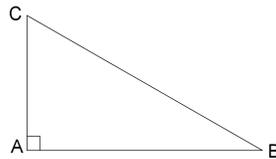


Figura 1.23: Triângulo retângulo

Ou em outras palavras, em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos.

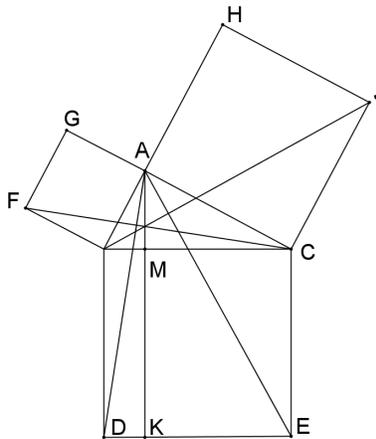


Figura 1.24: Teorema de Pitágoras - Euclides

Demonstração:

Existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras. Mostraremos a demonstração feita por Euclides.

Queremos mostrar que dado o triângulo ABC da figura 1.24, retângulo em A , a área do quadrado construído sobre o lado BC é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados BA e AC , que formam o ângulo reto BAC .

Construímos sobre o lado BC o quadrado $BDEC$, e sobre os lados BA e AC , os quadrados $ABFG$ e $ACJH$ respectivamente. Pelo ponto A traçamos o segmento AK , paralelo ao lado BD ou CE do quadrado $BCDE$.

Consideramos os triângulos ABD e FBC . Eles são congruentes pois, $AB \equiv FB$, pois são lados do quadrado $ABFG$;

$\hat{A}BD \equiv \hat{F}BC$; pois $\hat{A}BF$ e $\hat{D}BC$ são ângulos dos quadrados $ABFG$ e $BDEC$, logo são retos; juntando com o ângulo comum $\hat{A}BC$, eles são congruentes; $BD \equiv BC$, pois são lados do quadrado $BDEC$.

Logo, pela proposição $P1$ os triângulos ABD e FBC possuem a mesma área.

Mas a área do retângulo $BDKM$ é o dobro da área do triângulo ABD , porque tem a mesma base BD e estão entre as mesmas paralelas BD e AK .

Do mesmo modo a área do quadrado $ABFG$ é o dobro da área do triângulo FBC , porque tem a base comum FB e estão entre as mesmas paralelas FB e GC .

Assim, sendo a área do retângulo $BDKM$ o dobro da área do triângulo ABD , a área do quadrado $ABFG$ o dobro da área do triângulo FBC e as áreas dos triângulos ABD e FBC iguais, podemos concluir que:

$$A(BDKM) = A(ABFG)$$

Analogamente, traçando os segmentos AE e BJ , mostramos que a área do retângulo $MKEC$ é igual à área do quadrado $ACJH$.

Logo, a área do quadrado inteiro $BDEC$ é igual à soma das áreas dos quadrados $ABFG$ e $ACJH$.

Volumes

Intuitivamente, calcular o volume de um objeto significa quantificar o espaço ocupado por ele.

Através dessa ideia, como comparar o volume de dois objetos. Entre duas caixas, qual a que possui maior volume? Qual o volume de concreto de um muro?

Para responder essas questões, necessitamos de um método que permita o cálculo desses volumes, que consiste em adotar uma unidade de medida, e verificar quantas vezes essa unidade "cabe" no objeto.

Utilizaremos o fato que se dois sólidos possuem em comum, no máximo pontos de suas superfícies, então o volume da união dos dois sólidos é a soma dos volumes de cada um.

Para algumas figuras esse processo é suficiente, mas é necessário desenvolver métodos que possam ser aplicados no cálculo de volume de qualquer tipo de sólidos, inclusive para figuras mais complexas.

Então, iniciaremos pela figura onde essa ideia é cabível: o bloco retangular. Ele é formado por seis faces retangulares. Um bloco retangular fica bem determinado ao conhecermos três de suas arestas que concorrem em um ponto.

Quando todas as arestas do bloco retangular têm a mesma medida, temos o cubo, cujas faces são quadrados iguais.

Tradicionalmente adotamos o cubo de lado unitário como unidade de medida de volume. Representaremos o volume do cubo unitário por $V(1, 1, 1) = 1$

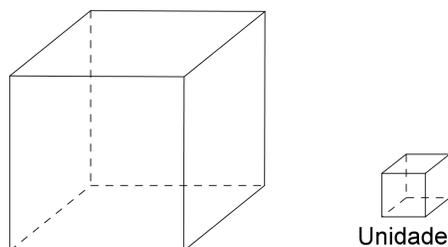


Figura 1.25: Unidade de medida de volume

1.13 Cálculo do volume do cubo

Com um raciocínio análogo àquele utilizado para encontrar a área de um quadrado, um cubo C cuja aresta mede n , com n inteiro, pode ser decomposto, por planos paralelos às suas faces, em n^3 cubos unitários, logo o seu volume é dado por $V = n^3$.

Também podemos decompor o cubo unitário em q^3 cubos de aresta $\frac{1}{q}$. Ou seja, um cubo de aresta $\frac{1}{q}$, tem volume dado por $V = (\frac{1}{q})^3$.

Generalizando, um cubo de aresta $\frac{p}{q}$ terá volume $V = (\frac{p}{q})^3$. Ou seja, sendo a aresta a do cubo um número inteiro ou racional teremos $V = a^3$.

Quando a aresta do cubo C for um número irracional a , assim como no caso do cálculo da área do quadrado, fazendo uso da ideia do método da exaustão, é possível concluir que $V(C) = a^3$.

Ou seja, para qualquer valor a da aresta do cubo temos:

$$V(C) = a^3$$

No bloco retangular de arestas a, b, c , também chamado de paralelepípedo retângulo, representaremos seu volume por $V(a, b, c)$.

Para valores de a, b, c naturais, o cálculo do volume consiste em expressar quantos cubos unitários "cabem" no bloco retangular. Note que o volume do mesmo é proporcional a cada uma de

suas dimensões, ou seja, se multiplicarmos uma de suas dimensões por um número natural n , o volume também ficará multiplicado por n .

$$V(na, b, c) = nV(a, b, c)$$

O Teorema da Fundamental da Proporcionalidade[13], afirma que, se x e y são duas grandezas positivas, relacionadas por um função crescente f , tal que para todo natural n tem-se que $f(nx) = nf(x)$, então, para todo real m vale $f(mx) = mf(x)$. Aplicando este teorema no cálculo de volume do bloco retangular, podemos manter constantes duas dimensões e seu volume será proporcional à terceira dimensão, ou seja:

$$V(a, b, c) = aV(1, b, c) = abV(1, 1, c) = abcV(1, 1, 1) = abc$$

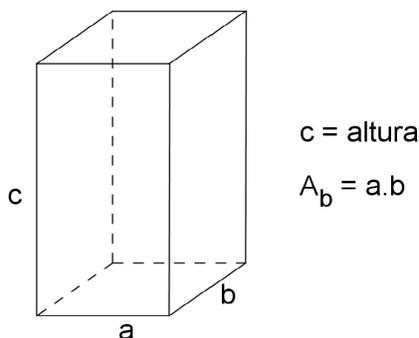


Figura 1.26: Volume do bloco retangular

Supondo a e b dimensões da base e c como sendo a altura o volume do bloco retangular fica:

$$V(a, b, c) = (ab)c = A_b \cdot h$$

1.14 Uma definição mais geral de volume

Definimos inicialmente como poliedro retangular P todo sólido formado por uma união finita de blocos retangulares justapostos. O volume de P é obtido pela soma dos volumes dos blocos.

Dado um sólido S , definimos seu volume como o número de vezes que o cubo unitário cabe nesse sólido. Esse valor ficará bem determinado se conhecermos seu valor aproximado por falta e por excesso. Para isso, devemos aproximar essa medida através de poliedros retangulares contidos ou que contenham o sólido S .

À medida em que a superfície do poliedro se aproxima da superfície do sólido, o seu volume se aproxima de $V(S)$. Considerando os valores aproximados por falta, se P é qualquer poliedro retangular contido no sólido, então temos $V(P) \leq V(S)$. E para qualquer número $k < V(S)$, podemos encontrar um poliedro retangular P , contido em S , onde

$$k < V(P) \leq V(S)$$

De maneira análoga, com as aproximações por excesso, se P' é um poliedro retangular que contém S , temos $V(S) \leq V(P')$.

E para qualquer número $d > V(S)$ existe um poliedro retangular P' que contém S , tal que:

$$V(S) \leq V(P') < d$$

Assim, podemos escolher poliedros retangulares cujos volumes se aproximem cada vez mais do volume do sólido, tanto por falta como por excesso, tornando a diferença entre os volumes tão pequena quanto se deseje, determinando o volume de S .

Encontrar esse número que representa o seu volume pode ser simples para algumas figuras, como vimos para o cubo e bloco retangular. Mas para podermos estabelecer fórmulas para outros sólidos conhecidos precisamos de outros artifícios.

Destacamos aqui, o método desenvolvido por Arquimedes para o cálculo do volume da esfera. Nos próximos capítulos analisaremos o método dos indivisíveis de Cavalieri e também o conceito de volumes e áreas de superfície de sólidos de revolução, estudados por Pappus.

1.14.1 Exemplo - Cálculo do volume da esfera (Arquimedes)

Em seu livro "O Método", Arquimedes explica várias de suas descobertas, das quais destacamos o cálculo do volume da esfera.

Utilizando uma engenhosa condição de equilíbrio entre as secções circulares de uma esfera e de um cone de um lado, e os elementos circulares correspondentes de um cilindro de outro, mostrou que o volume da esfera é igual a quatro vezes o volume de um cone com base igual ao círculo maior da esfera e altura igual ao raio.[2]

Para entender o raciocínio de Arquimedes, consideramos o círculo que passa pelos pontos C, E, A, D , com diâmetros perpendiculares CA e ED , o triângulo retângulo isósceles CFG de base FG e altura AC e o retângulo $IFGH$, como mostra a figura.

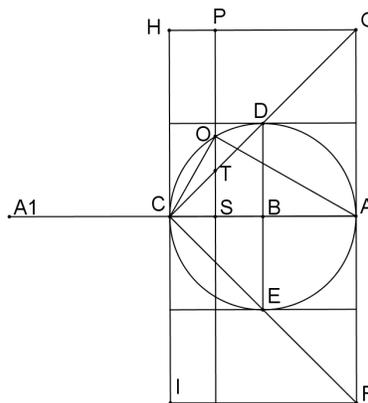


Figura 1.27: Cilindro, esfera e cone

Prolongando o segmento AC , tomamos o ponto A_1 , tal que A_1C e AC sejam iguais.

Girando esta figura em torno do eixo AA_1 obtemos uma esfera, um cone e um cilindro, obtidos a partir do círculo, do triângulo e do retângulo definidos, respectivamente.

Sendo S um ponto qualquer do eixo AC , traçamos por ele um segmento perpendicular a esse eixo. Esse segmento intersecta o triângulo no ponto T , o círculo no ponto O e o retângulo no ponto P na parte superior.

Note que o triângulo CSO é retângulo em S . Também o triângulo CST formado é retângulo e isósceles, com $CS = ST$. A partir dessas informações podemos escrever:

$$\begin{aligned} CS^2 + SO^2 &= CO^2 \\ ST^2 + SO^2 &= CO^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Também o triângulo OCA é retângulo em O e os segmentos OS e CA são perpendiculares, portanto temos que:

$$CO^2 = CS \cdot CA \quad (2)$$

Então, de (1) e (2)

$$ST^2 + SO^2 = CS \cdot CA$$

Notando que $SP = CA$ e $CA_1 = CA$, podemos escrever

$$\frac{ST^2 + SO^2}{SP^2} = \frac{CS \cdot CA}{SP^2} = \frac{CS \cdot CA}{CA^2} = \frac{CS}{CA} = \frac{CS}{CA_1}$$

Multiplicando os elementos do primeiro termo da igualdade por $\frac{\pi}{\pi}$, temos:

$$\frac{\pi}{\pi} \cdot \frac{ST^2 + SO^2}{SP^2} = \frac{\pi ST^2 + \pi SO^2}{\pi SP^2} = \frac{CS}{CA_1}$$

ou

$$(\pi ST^2 + \pi SO^2) \cdot CA_1 = \pi SP^2 \cdot CS$$

Interpretando esse resultado como o equilíbrio de pesos numa alavanca SA_1 com fulcro em C , a relação acima nos afirma que os círculos de raios ST e SO , do cone e da esfera, respectivamente quando transferidos para A_1 equilibram o círculo de raio SP , do cilindro localizado em S .

Essa relação de equilíbrio vale para todos os pontos S do diâmetro CA cortados pela reta SP e que formam os círculos de raios ST , SO e SP .

Arquimedes considerava o cilindro como a união dos círculos de raio SP , com S variando de C a A , assim como o cone, de raio ST e a esfera, de raio SO .

Assim, colocando o cone e a esfera no ponto A_1 da alavanca, Arquimedes concluiu que esses sólidos equilibram o cilindro pelo centro no ponto B da alavanca, onde $CB = \frac{1}{2}CA$.

Sendo o volume dos sólidos proporcionais aos seus pesos, temos a seguinte razão.

$$\frac{\text{volume do cone } (C_o) + \text{volume da esfera } (E_s)}{\text{volume do cilindro } (C_i)} = \frac{CB}{CA} = \frac{1}{2}$$

ou seja

$$C_i = 2.(C_o + E_s)$$

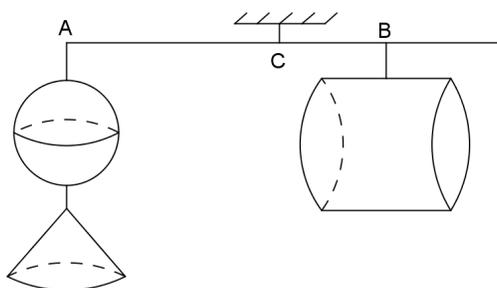


Figura 1.28: Equilíbrio

Arquimedes já sabia que $C_i = 3 C_o$. Então, $C_o = 2 E_s$.

Como podemos ver na figura, $AG = 2 BD$ e $CA = 2 CB$. Segue que o C_o é 8 vezes maior que o cone obtido pela rotação do triângulo CED , ou seja:

$$C_o = 8 \cdot \frac{\pi R^3}{3}$$

sendo R o raio da esfera.

Deste fato e como $C_o = 2 E_s$, temos:

$$E_s = \frac{4\pi R^3}{3}$$

que é a expressão que dá o volume da esfera.

Neste capítulo, mostramos aplicações de equivalência de áreas e como essas aplicações ajudam na demonstração de alguns resultados. No próximo capítulo, onde falaremos sobre as contribuições de Cavalieri no cálculo de áreas e volumes, trabalharemos com o conceito de equivalência de volumes e também retomaremos a equivalência de áreas.

Capítulo 2

O Princípio de Cavalieri

A retomada das descobertas matemáticas e dos conceitos de infinito e dos incomensuráveis, assim como das ideias que levaram ao estudo do cálculo, se deu no século XVII. O interesse pelas obras de Arquimedes levou à busca de caminhos que culminaram no cálculo diferencial e integral como conhecemos atualmente. [6]

Entre outros matemáticos que se dedicaram a esse estudo podemos destacar Bonaventura Cavalieri, que nasceu em Milão, em 1598, deixou vasta obra abrangendo matemática, ótica e astronomia. Mas sua grande contribuição é o tratado "Geometria indivisibilibus", onde mostra seu método dos indivisíveis, que aplicou em problemas de cálculos de áreas e volumes.

O indivisível de uma figura plana pode ser entendido como um segmento dessa figura e o indivisível de um sólido como uma secção plana desse sólido. Cavalieri considerava que a figura plana fosse formada por uma infinidade de segmentos de reta paralelos e que o sólido fosse formado por uma infinidade de secções planas paralelas.

Fazendo deslizar cada um dos segmentos de sua figura plana de modo a formar outra figura plana, a área dessa nova figura é igual a área da figura original. Analogamente, procedendo de mesma forma com as secções planas do sólido, pode-se obter um novo sólido com volume igual ao primeiro.[7]

Cavalieri utilizava expressões como "todas as linhas da superfície" ou "todos os planos de um sólido", correspondendo-os com os indivisíveis. Porém, não estava efetuando as somas infinitas dessas linhas ou planos, pois declarava que "o conjunto de um número indefinido (infinito) de elementos é indefinido por si próprio e não pode relacionar-se entre si"[17]

Evitando os raciocínios infinitesimais, seu método consiste em estabelecer uma correspondência unívoca e recíproca entre os elementos homólogos dos objetos estudados.

Seu método sobre os indivisíveis foi muito criticado na época, pois não apresentava o rigor matemático desejado. Cavalieri então, em 1647, publicou a obra "Exercitationes geometricae sex"(Seis Exercícios Geométricos), na qual apresentou de maneira mais clara sua teoria. Tal livro transformou-se em fonte importante para os matemáticos do século XVII.

Apesar das críticas, seu postulado permanece praticamente intacto até os dias de hoje.

Mostraremos algumas aplicações do Princípio de Cavalieri, inicialmente considerando como postulado, no cálculo de áreas de figuras planas e de volumes.

Posteriormente, poderemos considerá-lo como um teorema e vamos apresentar uma demonstração desse princípio, através dos conceitos desenvolvidos no cálculo diferencial e integral.

2.1 Princípio de Cavalieri para áreas

Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponhamos que, para toda reta s paralela a r , as interseções de R e S com s sejam vazias, pontos de suas fronteiras ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas de R e S é essa constante.

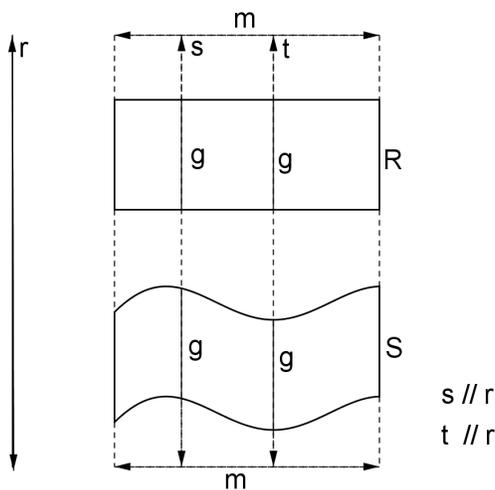


Figura 2.1: Princípio de Cavalieri para áreas

Cavalieri aplicou engenhosamente a ideia de indivisíveis em vários problemas. Um resultado importante proposto por Cavalieri foi o equivalente a

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{(n+1)}}{(n+1)}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

cujos enunciado e demonstração descritos em [6] eram muito diferentes da linguagem atual do cálculo diferencial e integral.

Apresentaremos a seguir um exemplo de aplicação deste Princípio para as áreas.

2.1.1 Exemplo - Área da elipse

Escolhendo convenientemente um sistema de coordenadas Oxy , consideramos a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vamos comparar a elipse com a circunferência de equação $x^2 + y^2 = a^2$.

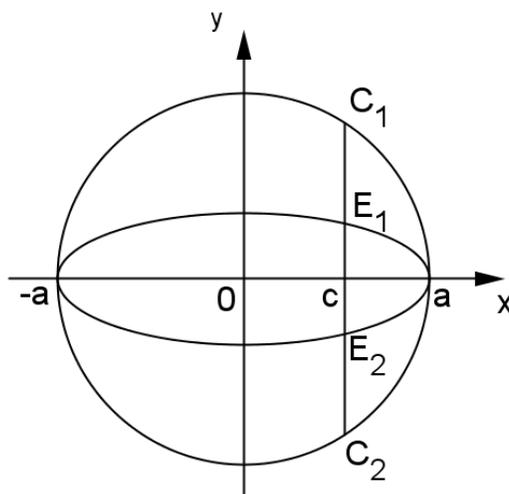


Figura 2.2: Área de elipse

Considerando a figura 2.2, tomamos retas paralelas ao eixo Oy , de equação $x = c$, com $-a < c < a$. Essas retas intersectam a elipse nos pontos E_1 e E_2 e a circunferência nos pontos C_1 e C_2 .

Como E_1 pertence à elipse, a sua ordenada y_E satisfaz a equação:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1$$

$$y_E^2 = b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$y_E^2 = b^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)$$

$$y_E = \frac{b}{a} (a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$$

Como C_1 pertence à circunferência, a coordenada y_C satisfaz a equação:

$$c^2 + y_C^2 = a^2$$

$$y_C^2 = a^2 - c^2$$

$$y_C = (a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$$

Como os pontos E_1 e E_2 são simétricos em relação ao eixo Ox , o segmento E_1E_2 mede $2y_E$. Analogamente C_1C_2 mede $2y_C$.

Assim a razão entre os comprimentos dos segmentos da elipse e da circunferência fica:

$$\frac{E_1 E_2}{C_1 C_2} = \frac{2y_E}{2y_C} = \frac{\frac{b}{a}(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ou seja,

$$\frac{E_1 E_2}{C_1 C_2} = \frac{b}{a}$$

Essa relação vale para qualquer ponto c , com $-a < c < a$. Então, pelo Princípio de Cavalieri, podemos concluir que:

$$\frac{A(E)}{A(C)} = \frac{b}{a},$$

onde $A(E)$ e $A(C)$ são as áreas da elipse e do círculo, respectivamente. Assim,

$$\frac{A(E)}{\pi a^2} = \frac{b}{a}$$

$$A(E) = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2$$

$$A(E) = \pi ab$$

2.2 Princípio de Cavalieri para volumes

"Consideremos os sólidos P e Q , e seja α um plano. Suponhamos que, para todo plano β paralelo a α , as interseções de P e Q com β sejam vazias, pontos da fronteira ou regiões planas tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de P e Q é essa constante".

Em particular, podemos dizer que dois sólidos com a mesma altura têm o mesmo volume se, quando seccionados por um plano paralelo ao plano onde estão suas bases, geram áreas iguais.

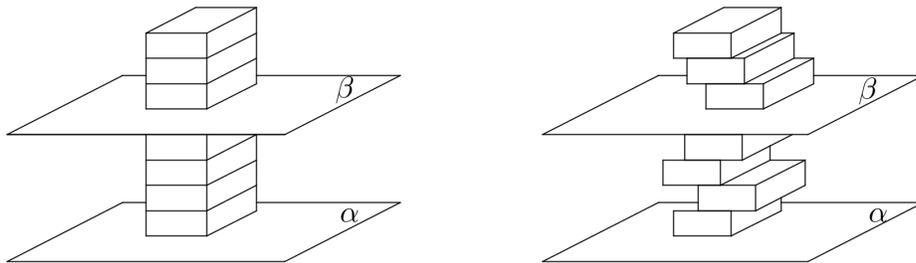


Figura 2.3: Princípio de Cavalieri para volumes

Aplicaremos o Princípio de Cavalieri no cálculo de volumes de alguns sólidos.

2.2.1 Volume do prisma

Consideremos o prisma de altura h com base poligonal de área A e o paralelepípedo de altura h de forma que sua base seja um retângulo de área A , apoiados em um mesmo plano horizontal. Esses sólidos quando cortados por planos paralelos às bases, produzem secções de áreas A_1 e A_2 , no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Mas toda secção paralela à base é congruente a ela. Logo, obteremos $A_1 = A_2 = A$.

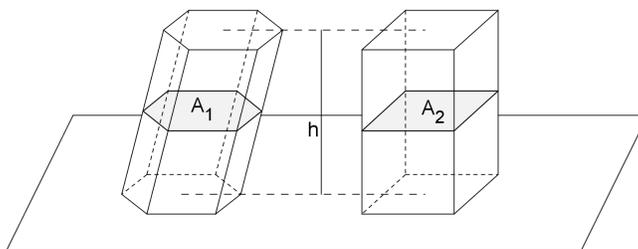


Figura 2.4: Volume do prisma

Pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que os dois sólidos possuem o mesmo volume. Ou seja, como o paralelepípedo, o volume do prisma é dado por:

$$V = A_b \cdot h$$

2.2.2 Volume de pirâmides de mesma base e mesma altura

Consideremos a pirâmide a seguir. Seccionando essa pirâmide por um plano paralelo à base, a intersecção do plano com a pirâmide será uma figura semelhante à base.

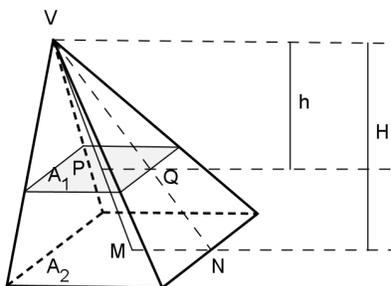


Figura 2.5: Razão entre secções paralelas à base da pirâmide

Pela semelhança dos triângulos VPQ e VMN temos:

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{VP}{VM} = \frac{VQ}{VN} = \frac{h}{H}$$

Logo, a razão entre suas áreas será $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$.

Agora vamos considerar duas pirâmides cujas áreas das bases sejam iguais e ambas tenham a mesma altura. Traçando um plano paralelo às bases dessas pirâmides obtemos secções situadas a uma mesma distância do vértice das pirâmides, respectivamente.

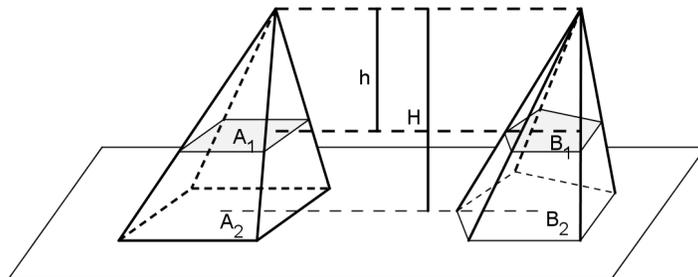


Figura 2.6: Razão entre áreas de secções paralelas à base da pirâmide

Como vimos, a razão entre as áreas das secções A_1 e B_1 das pirâmides com as correspondentes bases A_2 e B_2 é dada por $(\frac{h}{H})^2$.

Logo podemos escrever

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{B_1}{B_2}$$

Como consideramos inicialmente que as áreas das bases das pirâmides eram iguais, podemos concluir que $A_1 = B_1$, para qualquer plano paralelo à base.

Pelo Princípio de Cavalieri, os volumes das pirâmides são iguais, ou seja, pirâmides de bases equivalentes e mesma altura têm volumes iguais.

2.2.3 Volume da pirâmide de base triangular

Consideremos uma pirâmide $DABC$ de base triangular ABC . A partir dela, consideramos o prisma de mesma base e mesma altura da pirâmide.

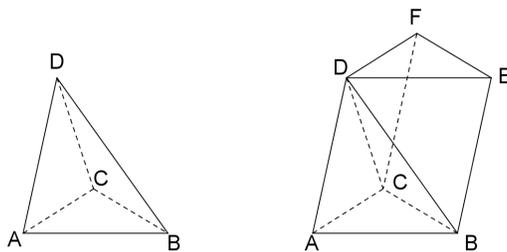


Figura 2.7: Pirâmide e prisma de mesma base e mesma altura

Tomando o prisma de base triangular podemos decompô-lo em três pirâmides $ABCD$, $CEFD$ e $BCDE$ tais que as duas primeiras têm mesma altura e bases ABC e DEF , congruentes; e as

duas últimas também possuem base congruentes CFE e EBC e a mesma altura, conforme a figura 2.8.

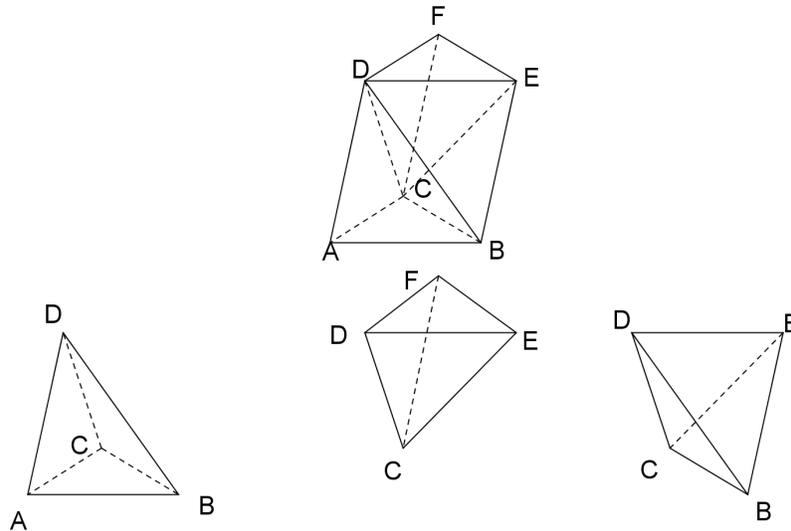


Figura 2.8: Volume da pirâmide

Sabemos que:

$$\text{Volume do prisma} = A_b \cdot h$$

Então podemos concluir que:

$$\text{Volume da pirâmide triangular} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Mas o Princípio de Cavalieri nos garante que pirâmides com áreas das bases iguais e com alturas iguais possuem volumes iguais. Assim, podemos dizer que o volume de uma pirâmide qualquer é igual ao volume de uma pirâmide de base triangular que possua a mesma área da base e mesma altura. Então podemos generalizar esse resultado.

Ou seja, para qualquer pirâmide:

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

2.2.4 Volume de cilindro

No cilindro toda seção paralela à base é congruente a ela.

Dado um cilindro de altura h e considerando um prisma qualquer de mesma altura cuja área da base seja igual a área da base do cilindro, qualquer plano paralelo à base corta o cilindro e o prisma formando figuras de mesma área.

Podemos concluir pelo Princípio de Cavalieri, que os volumes do prisma e do cilindro são iguais.

Assim,

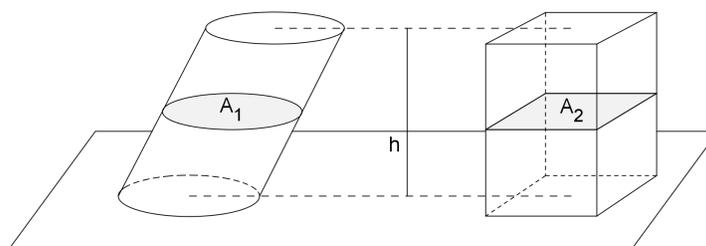


Figura 2.9: Volume do cilindro

$$\text{Volume do cilindro} = A_b \cdot h$$

No caso particular do cilindro circular, o volume do cilindro é dado por:

$$V = \pi r^2 h$$

2.2.5 Volume de cone

Para o cálculo do volume do cone, seguimos o mesmo caminho que traçamos para o cálculo do volume do cilindro, mas agora comparando o cone com uma pirâmide. Dado o cone, tomamos uma pirâmide de mesma altura que ele, e com base equivalente em área, ao círculo da base do cone.

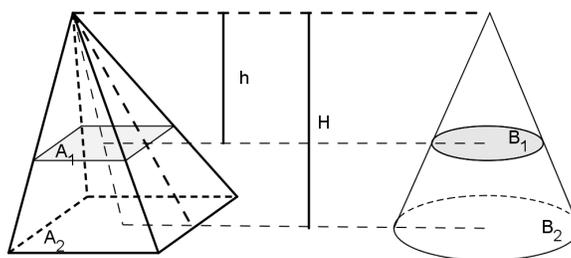


Figura 2.10: Volume do cone

Notemos que

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{B_1}{B_2}$$

Ou seja, as duas secções possuem a mesma área qualquer que seja o plano paralelo à base que as seccione. Assim, podemos concluir que:

$$\text{Volume do cone} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

2.2.6 Volume de esfera

Consideremos uma esfera de raio R e um cilindro equilátero de altura $2R$ mostrados na figura. É possível construir dois cones de raio R e altura R contidos no cilindro, com as bases coincidindo com as bases do cilindro. Assim, do cilindro retiramos esses cones, obtendo o sólido que denotaremos por S .

Estando a esfera e o cilindro apoiados em um mesmo plano, mostraremos que as secções dos dois sólidos, S e a esfera, produzidas por um plano paralelo à base do cilindro, distante h do centro da esfera, possuem a mesma área.

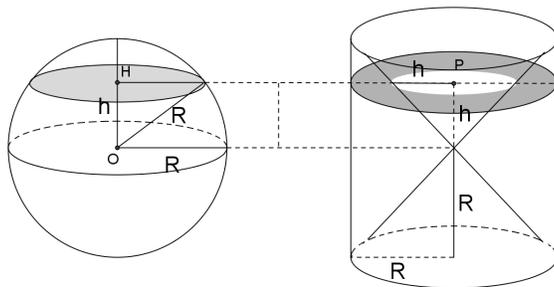


Figura 2.11: Volume da esfera

Na esfera, o plano determina um círculo cujo raio r' é dado, pelo Teorema de Pitágoras, por:

$$r'^2 = R^2 - h^2$$

A área do círculo será:

$$A_c = \pi(R^2 - h^2)$$

No sólido S , o plano determina uma coroa circular, onde o raio maior é R , e o raio menor é h pois a geratriz do cone forma um ângulo de 45° com o plano que contém a base.

A área da coroa será:

$$A_{co} = \pi R^2 - \pi h^2$$

$$A_{co} = \pi(R^2 - h^2)$$

Então, como a secção de qualquer plano fornece figuras de mesma área e como os dois sólidos possuem a mesma altura, pelo Princípio de Cavalieri, eles possuem o mesmo volume, ou seja

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - V_{cone}$$

$$V_{esfera} = \pi R^2(2R) - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2(R)$$

E finalmente,

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2.2.7 Volume do toro

O toro é o sólido gerado pela rotação de um círculo de raio a , em torno de um eixo situado no plano do círculo, a uma distância $b > a$ do seu centro.

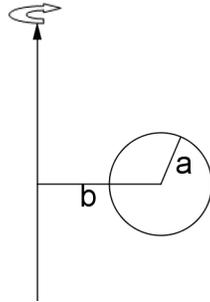


Figura 2.12: Rotação do círculo

Vamos comparar as secções horizontais do toro com as secções também horizontais de um cilindro de raio a e altura $2\pi b$.

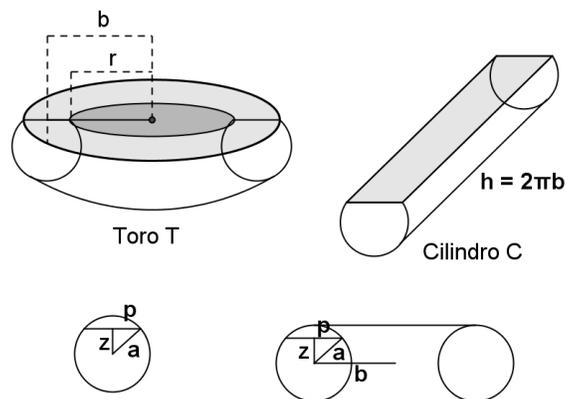


Figura 2.13: Toro e cilindro

Considerando um plano horizontal a uma distância z do centro dos círculos que geram o toro e o cilindro, esse plano seccionará o toro T formando um anel circular de raio interno r e raio externo R . Para calcular o valor desses raios, temos o triângulo retângulo formado pelos catetos z e p e a hipotenusa a .

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$p = \sqrt{a^2 - z^2}$$

Assim

$$r = b - \sqrt{a^2 - z^2} \text{ e } R = b + \sqrt{a^2 - z^2}$$

Então, a área A_1 do anel é:

$$A_1 = \pi(R^2 - r^2) = \pi[(b + \sqrt{a^2 - z^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - z^2})^2]$$

$$A_1 = \pi(b + \sqrt{a^2 - z^2} - b + \sqrt{a^2 - z^2})(b + \sqrt{a^2 - z^2} + b - \sqrt{a^2 - z^2})$$

$$A_1 = 2\pi\sqrt{a^2 - z^2} \cdot 2b = 4\pi b\sqrt{a^2 - z^2}$$

O mesmo plano horizontal secciona o cilindro C formando o retângulo de base $2p$ e altura $2\pi b$, cuja área A_2 é:

$$A_2 = 2\sqrt{a^2 - z^2} \cdot 2\pi b = 4\pi b\sqrt{a^2 - z^2}$$

Ou seja, as duas seções horizontais têm as mesmas áreas para qualquer valor de z . Pelo Princípio de Cavalieri, os volumes também serão iguais.

O volume do cilindro é dado por

$$V = A_b \cdot h = \pi a^2 \cdot 2\pi \cdot b = 2\pi^2 a^2 b$$

Assim, também o volume do toro é

$$V = 2\pi^2 a^2 b$$

2.2.8 Volume da esfera com furo cilíndrico

Consideremos uma esfera de raio R . Nessa esfera, faremos um buraco cilíndrico cuja base é um círculo de raio $r < R$. Denotaremos por S , o sólido formado .

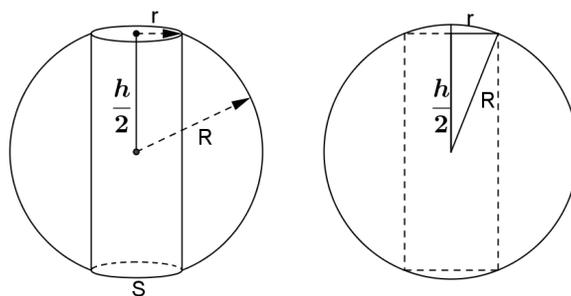


Figura 2.14: Esfera com furo cilíndrico

A altura h do cilindro, como mostra a figura 2.14, é calculada pelo triângulo retângulo de catetos r e $\frac{h}{2}$ e hipotenusa R . Assim, temos:

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Para calcular o volume do sólido S , consideremos uma esfera E cujo raio mede a metade da altura do cilindro, ou seja $r' = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Consideremos o sólido S e a esfera E apoiados em um plano horizontal, seccionados por um plano paralelo também horizontal a uma distância z dos centros dos dois sólidos. Esse plano determinará no sólido S , um anel circular de raio interno r e raio externo p . Para calcular p , utilizamos o triângulo retângulo da figura 2.15, e assim obtemos:

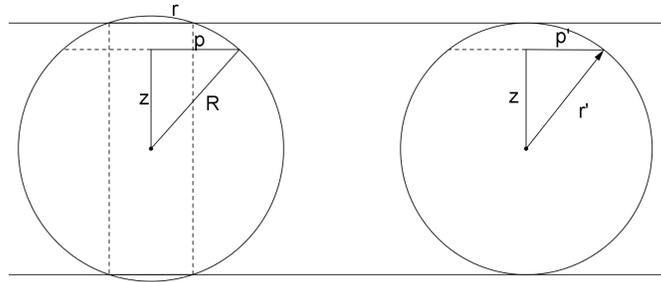


Figura 2.15: Cálculo do volume

$$p = \sqrt{R^2 - z^2}$$

A área A_1 desse anel é:

$$A_1 = \pi(p^2 - r^2)$$

$$A_1 = \pi(R^2 - z^2 - r^2)$$

Por outro lado, o plano secciona a esfera E determinando um círculo de raio p' , onde temos:

$$p' = \sqrt{r'^2 - z^2}$$

$$p' = \sqrt{R^2 - r^2 - z^2}$$

Então, a área A_2 do círculo é:

$$A_2 = \pi.p'^2$$

$$A_2 = \pi(R^2 - r^2 - z^2)$$

Ou seja, para qualquer valor de z , $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$, as áreas do anel e do círculo são iguais. Assim, pelo princípio de Cavalieri, os volumes também são iguais.

O volume da esfera é:

$$V = \frac{4}{3}\pi r'^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2 - r^2})^3$$

Assim, também o volume do sólido S é:

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2 - r^2})^3$$

Nesse capítulo, vimos como a ideia de Cavalieri contribuiu significativamente para o cálculo de volumes e áreas. Vimos também sugestões de caminhos que levaram ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

No próximo capítulo, analisaremos a evolução do Cálculo Diferencial e Integral, principalmente quando aplicado em problemas de áreas e volumes.

Capítulo 3

A contribuição do Cálculo Diferencial e Integral para o Cálculo de Áreas e Volumes

No século XVII, na Europa acontecia um amadurecimento das ideias analíticas. Descartes (1596 - 1650) foi um importante filósofo, matemático e físico, nascido na cidade de La Haye, na França. "Descartes viu como objetivo de seu trabalho a cooperação entre álgebra e geometria, visando fazer com que a matemática viesse a ter os melhores aspectos de cada uma".[5]

Contudo, com isso, a geometria pura foi deixada de lado e o cálculo infinitesimal tomou um aspecto mais aritmético.

Também dessa época, podemos destacar o trabalho de Fermat (1601 - 1665) que viveu na França. Foi advogado e oficial do governo em Toulouse pela maior parte de sua vida e matemática era o seu passatempo.

Seu método de integrar x^n era próximo da integral de Riemann, que formando retângulos e diminuindo as larguras desses retângulos, aproximava a área sob a curva.[6]

Seguindo esse raciocínio Fermat mostrou para todo valor racional de n , sendo $n \geq 1$, o mesmo resultado proposto por Cavalieri, ou seja:

$$\int_0^T x^n dx = \frac{T^{(n+1)}}{(n+1)}$$

Mas sua grande contribuição foi a descoberta de um método de achar máximos e mínimos de funções polinomiais, método que é, em essência, o que se utiliza até hoje.

Na Inglaterra, podemos destacar os trabalhos de John Wallis (1616 - 1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677).

Wallis foi professor em Oxford e fez uso de séries em análise, contribuindo para a origem do cálculo desenvolvido por Newton. Em seu livro "Arithmetica Infinitorum", sistematizou e estendeu os métodos de Descartes e Cavalieri. Deve-se a ele a introdução do símbolo ∞ .

Barrow foi professor de Isaac Newton (1642 - 1727) e publicou uma regra para se calcular a inclinação da reta tangente a uma curva. Considera-se que foi o primeiro a perceber que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra, de acordo com [6].

Além deles, outros matemáticos também ajudaram a desenvolver as ideias que levariam ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral através da análise infinitesimal até os conceitos utilizados atualmente.

O cenário estava pronto e o que faltava era um senso de universalidade das regras e um rigor nos fundamentos.

Surgem então, os trabalhos de Newton e Leibniz, considerados os criadores do Cálculo Diferencial e Integral.

3.1 Newton e Leibniz

Newton e Leibniz tinham uma visão diferenciada sobre os infinitesimais. Newton os relacionava com o estudo de quantidades variáveis com o tempo, enquanto Leibniz considerava quantidades que variavam em uma sequência de valores infinitamente próximos um do outro.[22]

Isaac Newton foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo.

Para Newton, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. A abscissa e a ordenada de um ponto eram quantidades variáveis e eram chamadas *fluentes* e a taxa de variação era denominada *fluxo* do fluente. E o *momento* do fluente era o incremento infinitamente pequeno sofrido pelo fluente, num intervalo de tempo também infinitamente pequeno. Estabelecendo relações envolvendo fluentes e fluxos estudou problemas relacionados ao processo de diferenciação.

Newton fez numerosas aplicações de seu método, utilizando na determinação de máximos e mínimos, tangentes a curvas, pontos de inflexão e concavidade de curvas. Também quadraturas e retificação de curvas.[7]

Leibniz (1646 - 1716), nasceu em Leipzig, Alemanha. Ingressou na Universidade aos quinze anos de idade e, aos dezessete, já havia adquirido o seu diploma de bacharel. Estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática na Universidade. Utilizou os infinitésimos como "instrumentos úteis", embora fictícios, introduzindo, através da notação dx , a noção de diferencial para designar uma "quantidade infinitamente pequena", associada a uma variável x . Essas diferenciais são, na verdade, tratadas como segmentos, dos quais são obtidos os quocientes diferenciais dy/dx . A "diferencial" e o "quociente diferencial" de Leibniz correspondem, respectivamente, ao "momento" e à "fluxão" de Newton.

Leibniz deduziu muitas das regras de diferenciação utilizadas atualmente e foi o primeiro matemático a utilizar o símbolo \int para integrais.

Depois de Newton e Leibniz, outros matemáticos dedicaram-se ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Bernoulli (1700 - 1782), matemático holandês, criou processos para determinar integrais de função racional e o nome de Cálculo Diferencial e Integral.

Euler (1707 - 1783), foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha, publicou os conteúdos sobre cálculo desenvolvidos até aquela época.

Deve-se a Cauchy (1789 - 1857), matemático francês, a definição moderna de limites, bem como o da integral como sendo o limite da soma das áreas dos retângulos sob o gráfico de uma função. Porém, Cauchy não conseguiu demonstrar corretamente o resultado para todas as funções contínuas.

Riemann (1826 - 1866) generalizou a definição da Integral de Cauchy para funções arbitrárias em um intervalo fechado $[a, b]$ como o limite das somas de Riemann.

3.2 A integral de Riemann

Como calcular a área de uma região no plano, quando limitada superiormente pelo gráfico de uma função contínua $y = f(x)$?

Consideramos uma região R do plano, limitada pelo eixo x , as retas $x = a$ e $x = b$ e a curva cuja equação é dada por $y = f(x)$, sendo f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Consideraremos $f(x) > 0$. Queremos encontrar um número A que represente a área da região R .

A ideia é utilizar o método da exaustão e dividir a região R por retas paralelas ao eixo y e tomar retângulos de altura $f(x)$ em algum ponto x de cada subintervalo de $[a, b]$ determinados por essa partição. À medida que aumentamos o número de retângulos e fazendo a largura do maior retângulo tender a zero, tomando o limite das somas das áreas desses retângulos, essa soma se aproximará da área da região R .

3.2.1 Exemplo - Cálculo de área pela soma de Riemann

Para ilustrar essa situação tomaremos a área da região R limitada inferiormente pelo eixo x , a reta $x = 2$ e superiormente pelo gráfico da função $f(x) = x^2$.

Dividimos o intervalo $[0, 2]$ em quatro partes iguais e aproximamos a área sob a curva por retângulos cuja base mede $\frac{1}{2}$ e a altura é igual ao maior valor de f em cada subintervalo.

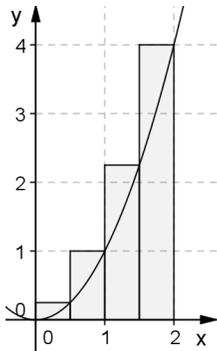


Figura 3.1: Área sob a curva cuja altura é o maior valor de f

Temos então como soma das áreas desses retângulos:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 = 3,75$$

Também podemos considerar a altura do retângulo como sendo o menor valor de f em cada intervalo, como mostra a figura .

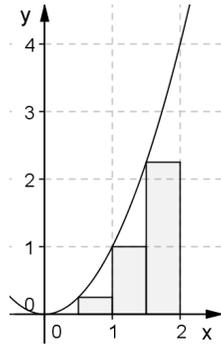


Figura 3.2: Área sob a curva cuja altura é o menor valor de f

Temos então

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1,75$$

Assim, podemos escrever

$$S_1 < A < S_2$$

Ou seja $1,75 < A < 3,75$

Dividindo sucessivamente o intervalo $[0, 2]$ em quantidades maiores de partes iguais, aproximamos cada vez mais a soma das áreas dos retângulos no valor da área A da região R . A tabela que segue retrata o caso de divisões em 10 partes iguais e depois em 20 partes iguais.

n	S_1	S_2
10	2,28	3,08
20	2,47	2,87

Aumentando sucessivamente o número de retângulos de mesma base, ou seja, quando n tende ao infinito, chegamos ao valor de $A = \frac{8}{3}$.

De um modo geral, podemos mostrar que no intervalo $[0, b]$ a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ é dada por $\frac{b^3}{3}$.

Inicialmente, mostraremos por indução que, para qualquer número natural n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(a) Passo base: é verdadeiro pois para $n = 1$,

$$1^2 = 1 \text{ e } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$ então devemos provar que é válida para $n = k + 1$.

Isto é:

$$\text{Hipótese indutiva: } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\text{Devemos mostrar que: } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que: } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Então,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Passaremos a calcular a área da região abaixo do gráfico da função $f(x) = x^2$.

Para isso, consideremos o intervalo $[0, b]$ dividido em n subintervalos iguais de comprimento $\frac{b}{n}$. Utilizando somas superiores, as alturas dos retângulos serão dadas por:

$$f(x_1) = \left(\frac{b}{n}\right)^2; f(x_2) = \left(\frac{2b}{n}\right)^2; \dots f(x_n) = \left(\frac{nb}{n}\right)^2.$$

A soma será dada por

$$S_n = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \left(\frac{b}{n}\right) + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 \left(\frac{b}{n}\right) + \dots + \left(\frac{nb}{n}\right)^2 \left(\frac{b}{n}\right)$$

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$S_n = \frac{b^3 n(n+1)(2n+1)}{n^3 \cdot 6}$$

$$S_n = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}$$

$$S_n = \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Quando n for suficientemente grande, ou seja quando $n \rightarrow \infty$, temos:

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b^3}{3}$$

Dado esse exemplo, passaremos a generalizar os resultados obtidos.

3.2.2 Definição de área

Consideraremos uma região R sob uma curva dada pelo gráfico de uma função contínua $y = f(x)$ qualquer, as retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo x . Para simplificar, tomaremos $f(x) > 0$ no intervalo $[a, b]$.

Queremos encontrar um número A que represente a área da região R .

Inicialmente, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, que inicialmente consideraremos que tenham o mesmo comprimento Δx . Assim, cada intervalo terá comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

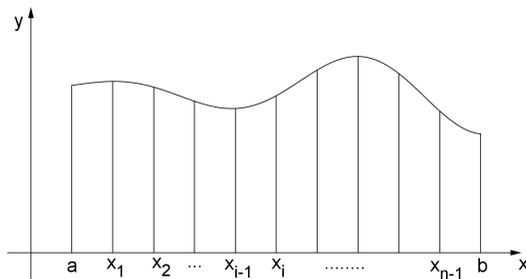


Figura 3.3: Partição da função no intervalo $[a, b]$

Denotamos as extremidades dos subintervalos por $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n$,

onde $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \dots, x_i = a + i \cdot \Delta x, \dots, x_n = b$.

Como $y = f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, ela é contínua em cada subintervalo fechado, então existe em cada subintervalo um valor c_i para o qual a função tem valor mínimo e um valor d_i para o qual a função tem valor máximo.

Considerando o valor mínimo, seja c_i o número do i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para o qual $f(c_i)$ é o valor mínimo absoluto de f nesse intervalo.

Assim, a soma das áreas dos n retângulos de largura Δx e altura $f(c_i)$ é um valor aproximado por falta para a área da região.

Quando n cresce, os valores sucessivos do acréscimo tornam-se cada vez menores e a soma se torna cada vez mais próxima da área da região.

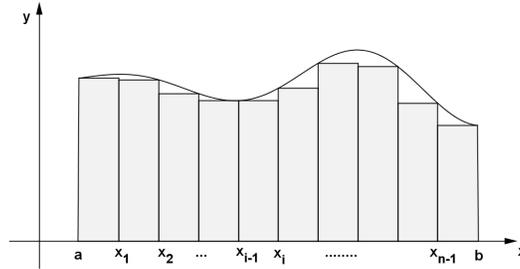


Figura 3.4: Retângulos com valor mínimo como altura em cada subintervalo

Assim, podemos definir:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x$$

Essa soma é chamada soma inferior, porque ela usa retângulos inscritos, e aproxima a área da região por falta.

Também podemos considerar o valor máximo da função em cada subintervalo. Seja d_i o número do i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para o qual $f(d_i)$ é o valor máximo absoluto da função nesse subintervalo.

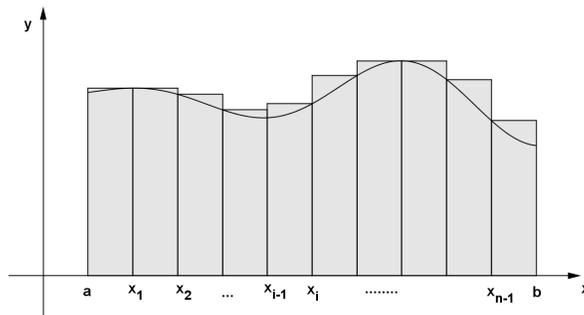


Figura 3.5: Retângulos com valor máximo como altura em cada subintervalo

Definimos então

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(d_1) \cdot \Delta x + f(d_2) \cdot \Delta x + \dots + f(d_n) \cdot \Delta x]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(d_i) \cdot \Delta x$$

Essa é chamada soma superior, porque usa retângulos circunscritos e aproxima a área da região por excesso.

Na realidade, não é necessário que os subintervalos sejam de comprimentos iguais e assim todos os incrementos podem ser diferentes entre si. Assim, além do fato de que n tende a infinito, devemos ter que o comprimento do maior intervalo tenda a zero.

Além disso, não é necessário tomar x para o qual a função é o mínimo ou o máximo. Podemos escolher qualquer valor \bar{x}_i , no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Assim teremos:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i$$

Esse limite é representado pela notação padrão de Leibniz

$$\int_a^b f(x) dx$$

que se lê a integral definida de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Então, temos:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Como a função f é contínua, esse limite existe e dizemos que a função f é integrável no intervalo $[a, b]$.

3.3 Teorema Fundamental do Cálculo

Calcular integrais utilizando as somas de Riemann pode tornar-se uma tarefa muito trabalhosa e muitas vezes muito difícil. O próximo teorema mostra uma maneira eficiente e prática para se calcular integrais de maneira mais simples. Ele estabelece uma conexão entre derivadas e integrais, mostrando que são processos inversos.

Teorema: Seja f uma função integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e seja $F(x)$ uma primitiva de f em $[a, b]$, ou seja, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. Temos:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Aplicando este Teorema Fundamental, calcularemos algumas áreas.

Para demonstração desse teorema, pode se consultar [11].

3.3.1 Exemplo - Cálculo de área pelo Teorema Fundamental do Cálculo

Retomando o exemplo apresentado anteriormente, vamos calcular a área limitada pelo eixo x , a reta $x = 2$ e a função $f(x) = x^2$.

Uma primitiva da função $f(x) = x^2$ é $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Então temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{8}{3}$, confirmando o resultado apresentado no exemplo 3.2.1, sendo nesse caso $a = 0$ e $b = 2$.

3.3.2 Exemplo - Área limitada pelos gráfico de duas funções

Seja A o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ limitado pelas retas $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Segue que

$$\text{Área (A)} = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Como um exemplo, vamos calcular a área limitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$.

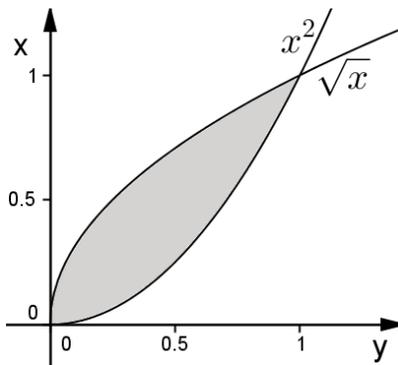


Figura 3.6: Área entre gráficos de função

As curvas dadas se interseccionam em $x_0 = 0$ e em $x_1 = 1$. Para $0 \leq x \leq 1$, temos $f(x) \geq g(x)$. Temos então:

$$\text{Área } A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2) dx$$

$$\text{Área } A = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

3.4 Cálculo de volumes

Dado um sólido qualquer, como calcular o seu volume?

A figura que segue mostra um sólido e para cada x , com $a \leq x \leq b$, um plano perpendicular ao eixo horizontal corta o sólido em uma secção transversal cuja área representaremos por $A(x)$. Tomando todos os valores de x no intervalo $[a, b]$, teremos todas as secções transversais do sólido cujo comprimento é $b - a$.

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = \frac{b - a}{n}$.

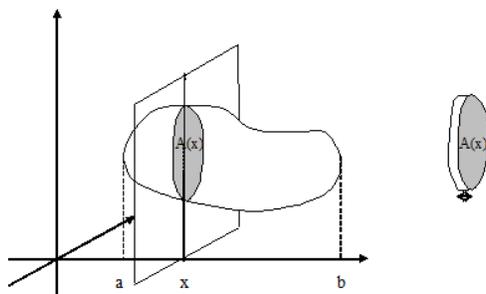


Figura 3.7: Volume de sólido

Determinamos então, para um valor de x_c , em cada um dos subintervalos, o volume ΔV_c de uma fatia cilíndrica cuja base tem área $A(x)$ e a altura é Δx . Assim:

$$\Delta V_c = A(x_c) \cdot \Delta x$$

Somando os volumes de todas as fatias desse sólido teremos uma aproximação do seu volume.

$$V_c \cong \sum \Delta V = \sum A(x_c) \cdot \Delta x$$

Quanto maior for o número de subintervalos e mais finas forem as fatias consideradas, mais próximo o somatório estará do volume do sólido. Assim,

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta V_c = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum A(x_c) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Podemos considerar os conceitos acima no cálculo do volume de um sólido de revolução.

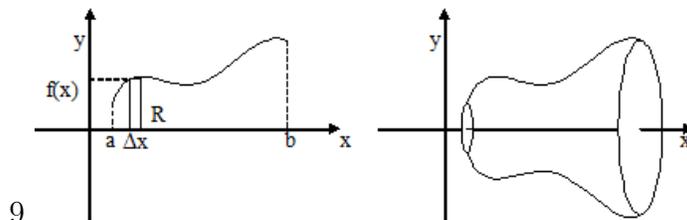


Figura 3.8: Volume de sólido de revolução

Sendo a curva o gráfico da função contínua $f(x)$, girando em torno do eixo x , temos o sólido onde cada fatia é um cilindro circular reto.

Lembrando que o volume do cilindro é dado por $V = A_b \cdot h$, temos:

$$A_b = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot [f(x)]^2$$

$$h = \Delta x$$

Portanto:

$$\Delta V = \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot \Delta x$$

$$V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx$$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$

3.4.1 Exemplo - Volume de esfera

Vamos calcular o volume da esfera obtida pela rotação da região plana limitada pelo eixo x e pelo gráfico da função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo x , como mostra a figura.

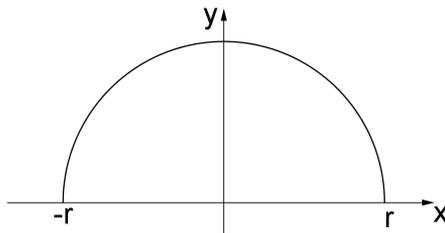


Figura 3.9: Volume da esfera

Temos

$$V = \pi \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$V = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r$$

$$V = \pi \left[\left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) - \left(\frac{-3r^3 + r^3}{3} \right) \right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}(2r^3 + 2r^3)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3.5 Comprimento de arco de uma curva plana

Consideremos uma função contínua f , definida em um intervalo fechado $[a, b]$ com derivada contínua, cujo gráfico está na figura que segue.

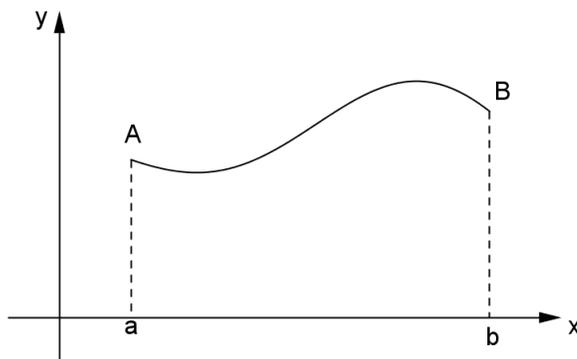


Figura 3.10: Arco de extremidades A e B

A porção da curva compreendida entre dois de seus pontos será chamada de arco.

Consideremos uma partição no intervalo $[a, b]$, em subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento Δx . A cada ponto x_i dessa partição corresponde um ponto $P_i = (x_i, f(x_i))$, na curva que ficará subdividida em n partes, pelos pontos $P_0 = (a, f(a)), P_1 = (x_1, f(x_1)), \dots, P_i = (x_i, f(x_i)), \dots, P_n = (b, f(b))$, determinando os segmentos $P_0P_1, \dots, P_{i-1}P_i, \dots, P_{n-1}P_n$.

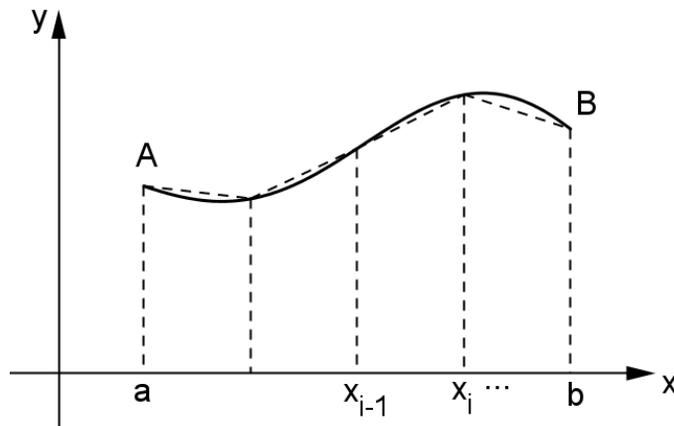


Figura 3.11: Partição do arco

O comprimento do i -ésimo segmento $P_{i-1}P_i$ será dado por

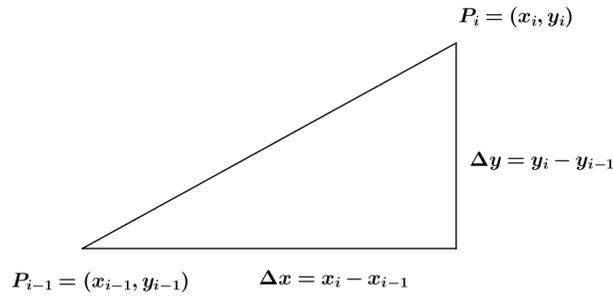


Figura 3.12: Comprimento do segmento

Temos:

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Ou seja,

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x, \text{ onde } x_{i-1} < c_i < x_i, \text{ pelo Teorema do Valor Médio.}$$

A soma dos comprimentos dos n segmentos $P_{i-1}P_i$, determinados por estes n pontos da curva de equação $y = f(x)$ será dada por

$$P_0P_1 + P_1P_2 + \dots + P_{n-1}P_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x$$

Considerando Δx cada vez menor e passando ao limite obtemos o comprimento do arco:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

3.5.1 Exemplo - Comprimento de curva

Vamos calcular o comprimento da curva dada pela função $y = x^{\frac{3}{2}}$, no intervalo $[1, 3]$.

Temos que $f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$

Assim

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx$$

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

Para calcular essa integral , faremos a seguinte substituição:

$$u = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$\text{E } du = \frac{9}{4} dx, \text{ ou seja } dx = \frac{4}{9} du$$

Então, a integral fica

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{u} \frac{4}{9} du \\ &= \frac{4}{9} \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \end{aligned}$$

Substituindo, teremos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \Big|_1^3 \\ S &= \frac{8}{27} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{9 \cdot 3}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(1 + \frac{9 \cdot 1}{4}\right)^3} \right) \\ S &= \frac{8}{27} \left(\sqrt{\frac{29791}{64}} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right) \\ S &= \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{8} (\sqrt{29791} - \sqrt{2197}) \\ S &= \frac{(\sqrt{29791} - \sqrt{2197})}{27} \end{aligned}$$

$$S \approx 4,66$$

Observemos que se a curva for dada por equações paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, definida e contínua, com derivadas contínuas em algum intervalo $[a, b]$, o comprimento do arco será dado por:

$$S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad [9]$$

Faremos no próximo capítulo o cálculo de comprimento de arco onde utilizaremos este resultado acima.

3.6 Demonstrações dos Princípios de Cavalieri com auxílio do Cálculo Diferencial e Integral

Vamos retomar os Princípios de Cavalieri para demonstrá-los através dos conceitos desenvolvidos no cálculo diferencial e integral. A demonstração se torna possível desde que as regiões consideradas não sejam muito complicadas e sejam delimitadas por gráficos de funções ou retas, ou planos adequadamente escolhidos.

3.6.1 Princípio de Cavalieri para áreas

Relembrando

"Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r , as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas de R e S é essa constante".

A ideia da demonstração é dividir as regiões em fatias. Se cada fatia de uma região tiver comprimento sempre na mesma razão que a fatia correspondente da outra região, então as áreas das duas regiões estão na mesma razão. A dificuldade surge quando Cavalieri considera essas fatias como segmentos, que não possuem área. Portanto, para obter a soma desses segmentos foi necessário uma técnica que não existia em sua época. São as teorias de integração que permitem a demonstração desse teorema.[16]

Para tanto, devemos enunciar o princípio na forma que segue, definindo condições sobre as fronteiras das regiões.

Teorema 1 - Teorema de Cavalieri para áreas - Consideramos no plano cartesiano Oxy , a região R delimitada pelas retas $x = a$, $x = b$, com $b > a$ e pelos gráficos das funções contínuas $f_1(x)$ e $f_2(x)$, no intervalo fechado $[a, b]$, com $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo x nesse intervalo. Seja S a região delimitada por $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $g_1(x)$ e $g_2(x)$, $a \leq x \leq b$, com $g_1(x) \leq g_2(x)$ para todo x nesse intervalo. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $f_2(x) - f_1(x) = k[g_2(x) - g_1(x)]$ para todo x em $[a, b]$. Então $A(R) = kA(S)$.

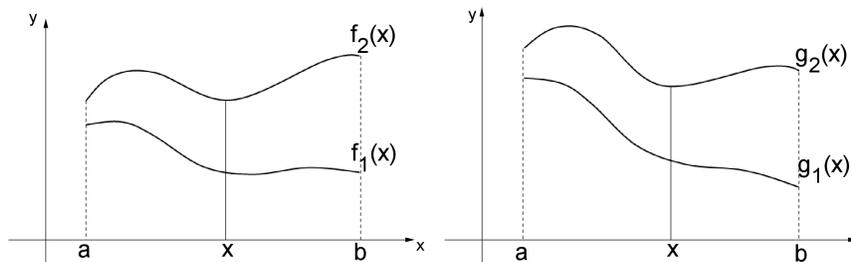


Figura 3.13: Teorema de Cavalieri para áreas

Demonstração: Pela teoria de integração de funções, temos que

$$A(R) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

$$A(R) = \int_a^b k[g_2(x) - g_1(x)]dx$$

$$A(R) = k \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]dx = kA(S)$$

Ou seja,

$$A(R) = kA(S), \text{ como queríamos.}$$

3.6.2 Princípio de Cavalieri para volumes

Relembrando

"Consideremos os sólidos P e Q , e seja α um plano. Suponhamos que, para todo plano β paralelo a α , as interseções de P e Q com β sejam vazias, pontos da fronteira ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de P e Q é essa constante".

Enunciando como teorema:

Teorema 2 - Teorema de Cavalieri para volumes - Consideramos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$. Seja P um sólido delimitado por $z = a$, $z = b$, com $b > a$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $a \leq t \leq b$, seja P_t a intersecção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido delimitado por $z = a$, $z = b$, e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $a \leq t \leq b$, seja Q_t a intersecção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $A(P_t) = kA(Q_t)$ para todo t . Então $V(P) = kV(Q)$.

Demonstração: Da teoria de integração de função, temos:

$$A(P_z) = \int \int_{P_z} dx dy$$

Destacando que utilizaremos esse resultado, sem aprofundar o conceito de integral dupla, pois não é pertinente a esse trabalho. Caso seja de interesse, pode-se consultar [25] e [24]. Então, podemos escrever:

$$V(P) = \int_a^b A(P_t) dt$$

$$V(P) = \int_a^b kA(Q_t) dt$$

$$V(P) = k \int_a^b A(Q_t) dt = kV(Q)$$

Ou seja,

$$V(P) = kV(Q), \text{ como queríamos.}$$

No capítulo anterior, foi calculado o volume da esfera com furo cilíndrico utilizando o princípio de Cavalieri. Para comparar faremos o mesmo cálculo utilizando a integral.

3.6.3 Exemplo - Volume da esfera com furo cilíndrico usando integral

A esfera de raio R é obtida pela rotação da função $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ e o cilindro é obtido pela rotação do segmento de reta $y = r$ no intervalo $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, como mostra a figura.

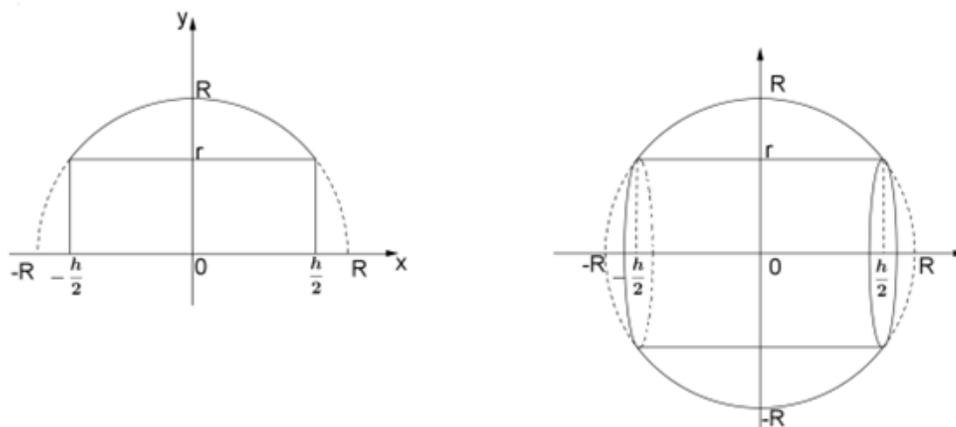


Figura 3.14: Esfera com furo cilíndrico

Obtemos o volume do sólido calculando primeiramente o volume da parte da esfera limitada pelo gráfico no intervalo fechado $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$:

$$V_e = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi[\sqrt{R^2 - x^2}]^2 dx$$

$$V_e = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (R^2 - x^2) dx$$

$$V_e = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$V_e = \pi \left[\left(R^2 \cdot \frac{h}{2} - \frac{(\frac{h}{2})^3}{3} \right) - \left(R^2 \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{(-\frac{h}{2})^3}{3} \right) \right]$$

$$V_e = \pi \left[\left(2R^2 \cdot \frac{h}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right) \right]$$

Calculando o volume do cilindro:

$$V_c = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi r^2 dx$$

$$V_c = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r^2 dx$$

$$V_c = \pi r^2 x \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$V_c = \pi \left[r^2 \cdot \frac{h}{2} - r^2 \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) \right]$$

$$V_c = \pi \left[2 \cdot r^2 \cdot \frac{h}{2} \right]$$

Sendo $R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$, temos que:

$$\frac{h}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Assim, podemos escrever:

$$V_e = \pi \left[(2R^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{R^2 - r^2})^3) \right]$$

$$V_c = \pi [2 \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}]$$

Então o volume do sólido é dado pela diferença:

$$V = V_e - V_c$$

$$V = \pi \left[(2R^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{R^2 - r^2})^3) \right] - \pi [2 \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}]$$

$$V = \frac{2\pi}{3} [3 \cdot R^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} - (\sqrt{R^2 - r^2})^3 - 3 \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}]$$

$$V = \frac{2\pi}{3} [3 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} (R^2 - r^2) - (\sqrt{R^2 - r^2})^3]$$

$$V = \frac{2\pi}{3} [3(\sqrt{R^2 - r^2})^3 - (\sqrt{R^2 - r^2})^3]$$

$$V = \frac{2\pi}{3} 2(\sqrt{R^2 - r^2})^3$$

$$V = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{R^2 - r^2})^3$$

Obtendo assim, resultado análogo ao calculado anteriormente.

No próximo capítulo, veremos outras formas de calcular áreas e volumes, em especial para os sólidos de revolução.

Capítulo 4

O Teorema de Pappus para o Cálculo de Volumes e Áreas de Superfícies

Pappus foi um matemático que viveu em Alexandria por volta de 300 d.C.. Compôs uma obra com o título de "Coleção Matemática". Essa obra é uma combinação de guia da geometria da época, acompanhado de comentários, com proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. Era composta por oito livros, sendo que o primeiro e parte do segundo se perderam.

Entre vários temas tratados nos livros, podemos encontrar o método desenvolvido por Apolônio para a escrita de números grandes, que expressava números como potências de uma miríade, isto é, como potências de 10 000 e operar com eles, teoria das médias, extensão ao Teorema de Pitágoras, comparação de áreas de figuras com perímetros iguais e o problema de máximos e mínimos e dos alvéolos dos favos de mel. Também abordou tópicos de geometria e mecânica, onde foi o primeiro a definir o conceito de centro de gravidade. No final do Livro 7 descreveu sem verificar, duas fórmulas que relacionam os centros de gravidade a volumes de sólidos de revolução e suas áreas de superfície, que são os teoremas que apresentaremos adiante.[7]

Enfim, a Coleção Matemática é um importante acervo do conhecimento matemático da Antiguidade, onde há citações de mais de 30 matemáticos dessa época.

Para desenvolver os Teoremas de Pappus, inicialmente apresentaremos os conceitos de centro de massa e centro de gravidade.

4.1 Centro de gravidade e centro de massa

"Dêem-me um ponto de apoio e eu levantarei o mundo".

Com essa frase, Arquimedes enalteceu o princípio da alavanca. [1]

Com uma força P_1 aplicada no braço maior (d_1) é possível equilibrar uma força maior, P_2 , que esteja na ponta do braço menor (d_2), tal que o produto $P_1 \cdot d_1$ é igual ao produto $P_2 \cdot d_2$, conforme

a figura a seguir.

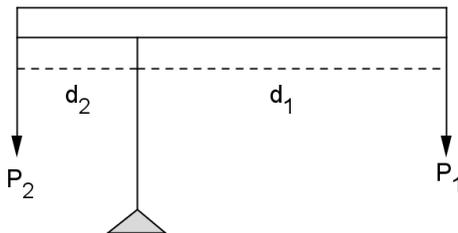


Figura 4.1: Equilíbrio de forças

Estabelecendo um eixo horizontal com centro em um ponto de apoio e sentido para a direita, podemos escrever:

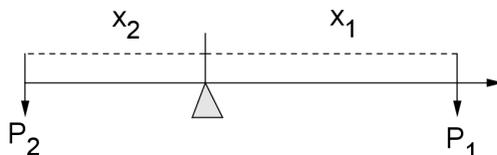


Figura 4.2: Sentido da alavanca

$$P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 = 0, \text{ com } x_1 = d_1 \text{ e } x_2 = -d_2$$

ou seja, $\sum_{i=1}^2 P_i \cdot x_i = 0$

Podemos estender essa ideia para várias forças aplicadas em uma barra horizontal apoiada em um ponto T .

Sendo x_1, x_2, \dots, x_n , as coordenadas das forças P_1, \dots, P_n , calculamos a soma:

$$S = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - T)$$

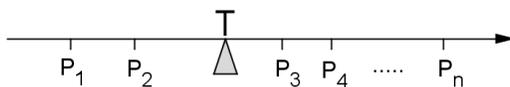


Figura 4.3: Somatória de forças

De um modo geral, a soma S dá uma medida da tendência de aquele sistema de forças provocar rotação em torno do ponto T . Essa medida recebe o nome de torque ou momento. Quando o sistema se encontra em equilíbrio o momento é igual a zero. Assim, podemos encontrar uma posição x_c para o ponto T onde o sistema está em equilíbrio e o momento é nulo. Esse ponto é o centro de gravidade desse sistema.

Encontramos a coordenada x_c do ponto T , onde o momento é nulo, como:

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_c = 0$$

$$\sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n P_i \cdot x_c$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

Uma vez que a força gravitacional é dada por $P_i = m_i g$, onde m_i é a massa correspondente a P_i , podemos substituir na expressão anterior e obter:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot g \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot g} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Escrita dessa forma, x_c passa a ser designada como centro de massa do sistema.

Podemos estender essas ideias para a determinação do centro de massa de um sistema constituído por partículas contidas num plano cartesiano. É suficiente sabermos a massa de cada partícula, m_i , e as suas coordenadas, x_i e y_i .

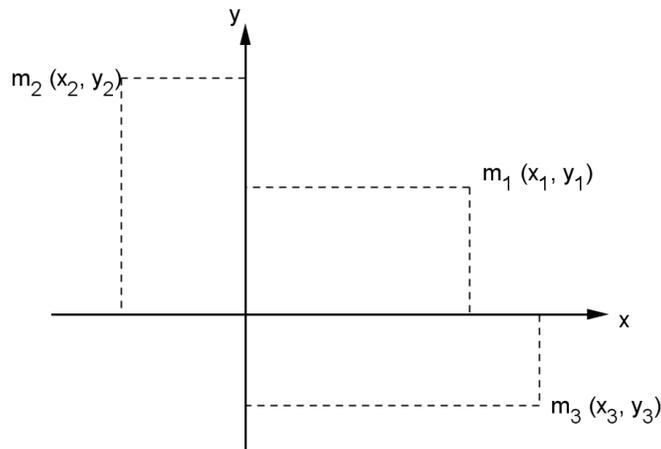


Figura 4.4: Partículas no plano cartesiano

Nesse caso, o momento desse sistema será:

Em relação ao eixo y:

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i$$

Em relação ao eixo x:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i$$

As coordenadas do centro de massa do sistema estão, então, localizadas num ponto cujas coordenadas cartesianas são obtidas pelas expressões:

$$(*) \quad x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_y}{m} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_x}{m}, \quad \text{onde} \quad m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

4.1.1 Exemplo. Centro de gravidade de partículas

Aplicando esses conceitos, vamos encontrar o centro de massa de um conjunto formado por quatro partículas localizadas no plano cartesiano, sendo $A(4, 4)$, $B(1, 0)$, $C(-3, 2)$ e $D(-2, -2)$, com massas $m_A = 7$, $m_B = 5$, $m_C = 2$ e $m_D = 6$, dadas em kg.

Temos

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i = 7 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 6 \cdot (-2) = 15$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i = 7 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) = 20$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i = 7 + 5 + 2 + 6 = 20$$

Portanto,

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{20}{20} = 1$$

Assim, o centro de massa está em $(\frac{3}{4}, 1)$.

Essas equações (*) indicam as coordenadas do ponto em que podemos apoiar o sistema para que ele fique em equilíbrio, como também podemos imaginar toda massa concentrada nesse ponto para se obter o mesmo valor para o cálculo do momento do sistema.

Analisadas as distribuições discretas de partículas podemos estender esses conceitos para uma distribuição contínua. Faremos inicialmente algumas considerações sobre centro de massa e centro de gravidade de um corpo.

Podemos resumir os conceitos de centro de massa e centro de gravidade da maneira que segue.

O centro de massa de um corpo é um ponto no qual se poderia concentrar toda a massa desse corpo. Centro de gravidade é o ponto onde aplicando uma força, o corpo permanece em equilíbrio. [13]

Quando o corpo for homogêneo, o centro de massa e o centro de gravidade são os mesmos.

4.2 Centro de gravidade determinado experimentalmente

Um processo experimental para se determinar o centro de gravidade de uma figura bidimensional consiste em pendurar o objeto por um fio em um ponto A e determinar a reta que prolonga o fio sobre o objeto. A seguir, penduramos por outro ponto B e traçamos a reta que também prolonga o fio sobre o objeto. A intersecção das retas é o centro de gravidade G desse objeto.

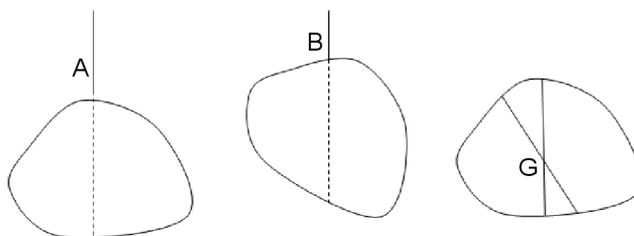


Figura 4.5: Centro de gravidade

Ao determinar o centro de gravidade, temos os seguintes fatos:

1. O centro de gravidade de um segmento é o seu ponto médio;
2. Se a figura possui um eixo de simetria então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo.

Devemos notar que o centro de gravidade de uma figura formada apenas pelas linhas de contorno e outra em que se considera o seu interior podem possuir centros de gravidades diferentes, como exemplificaremos mais adiante.

Vamos agora exemplificar algumas situações de cálculo de centro de gravidade.

4.3 Centro de gravidade de uma linha poligonal

Consideramos os pontos $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ e os n segmentos $A_1A_2, A_2A_3, A_nA_{n+1}$ de comprimentos a_1, a_2, a_n , respectivamente, determinados por estes pontos, e que formam uma linha poligonal.

O centro de gravidade de cada um desses segmentos é o seu ponto médio (x_i, y_i) , para $i = 1, \dots, n$. Então, o ponto $G = (x, y)$ que é o centro de gravidade da linha poligonal é dado por:

$$x = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \text{ e } y = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Aplicaremos essas ideias na seguinte situação:

4.3.1 Exemplo. Centro de gravidade de triângulo isósceles

Consideremos o triângulo isósceles ABC de lados $AB = 10\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$ e $BC = 16\text{cm}$.

Sejam I , M e H , respectivamente, os pontos médios desses segmentos, como mostra a figura.

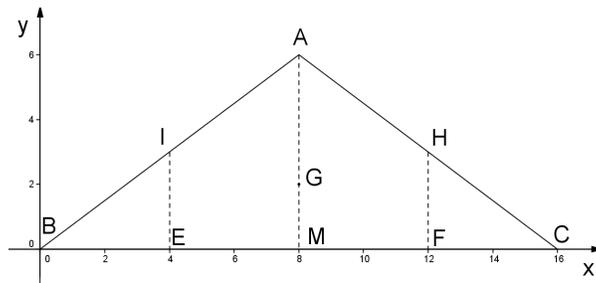


Figura 4.6: Centro de gravidade do contorno triangular

Como o triângulo ABC é isósceles, ele possui um eixo de simetria, que é a reta AM , que contém a altura relativa ao lado BC . O centro de gravidade pertence à AM , logo basta calcular a coordenada y desse ponto.

Observando que a altura divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos cuja hipotenusa mede 10cm e um cateto mede 8cm , aplicando o Teorema de Pitágoras podemos calcular a medida do outro cateto, que é a altura relativa ao lado BC do triângulo ABC .

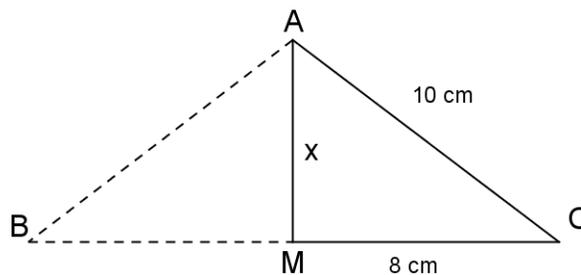


Figura 4.7: Cálculo da altura do triângulo

Temos:

$$8^2 + x^2 = 10^2$$

$$x = 6$$

$$AM = 6\text{cm}$$

Consequentemente, as distâncias dos pontos médios dos segmentos AB e AC ao eixo x , valem 3cm .

Assim, podemos calcular a coordenada y do centro de gravidade que é dada por:

$$y = \frac{10.3 + 10.3 + 16.0}{10 + 10 + 16} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3}, \text{ e o centro de gravidade do triângulo está no ponto } G = \left(8, \frac{5}{3}\right).$$

Observamos que esse cálculo é válido quando consideramos o triângulo formado apenas pelos segmentos que formam a linha poligonal. Pois sabemos que se considerarmos a superfície de um triângulo, o seu centro de gravidade, ou seja, o seu baricentro, se localiza no encontro de suas medianas, que nesse caso, estaria a uma distância de $1/3$ da mediana relativa ao lado BC , onde obteríamos $y = 2$, resultado que mostraremos nos exemplos dados posteriormente.

4.3.2 Exemplo. Centro de gravidade de semicircunferência

Vamos calcular as coordenadas do centro de gravidade de uma semicircunferência.

Consideremos inicialmente o seguinte resultado, onde E é uma reta e AB é um segmento no mesmo plano, como mostra a figura a seguir.[13]

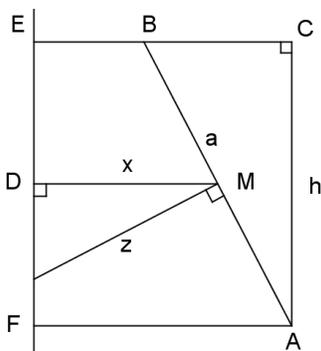


Figura 4.8: Apótema do segmento AB

Sejam a o comprimento do segmento AB , x a distância do ponto médio de AB à reta E , h o comprimento da projeção de AB sobre E e z o comprimento do segmento da mediatriz de AB compreendido entre AB e E , que chamaremos de apótema de AB . Pela semelhança dos triângulos retângulos ABC e MFD , podemos concluir a relação:

$$\frac{h}{a} = \frac{x}{z} \text{ ou seja, } ax = zh$$

Utilizando esse resultado, calcularemos o centro de gravidade de uma semicircunferência. Consideremos então a semicircunferência de raio R , e um eixo E que contém o seu diâmetro. Dividiremos a semicircunferência em N partes iguais formando uma linha poligonal regular inscrita nessa semicircunferência, como mostra a figura 4.9.

Consideramos os lados l_1, l_2, \dots, l_n de mesmo comprimento a e denotamos por h_k o comprimento da projeção ortogonal do lado l_k sobre E . Como todos os lados têm a mesma medida, todos os

lados tem o mesmo apótema cuja medida denotaremos por z .

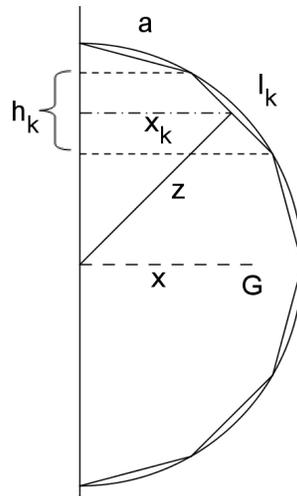


Figura 4.9: Centro de gravidade da semicircunferência

Então, calcularemos a distância x do centro de gravidade da poligonal ao eixo. Considerando x_k , com $k = 1, 2, \dots, n$, como a distância do ponto médio do lado l_k ao eixo e a relação $ax = zh$, temos:

$$x = \frac{ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n}{a + a + \dots + a} = \frac{zh_1 + zh_2 + \dots + zh_n}{na}$$

$$x = \frac{z}{na} 2R$$

Quando o número de lados da poligonal aumenta, na tende ao comprimento da semicircunferência, que é dada por πR e o apótema z , tende para R . Então, temos:

$$x = \frac{R}{\pi R} 2R = \frac{2R}{\pi}$$

4.4 Centro de gravidade de polígonos

Considerando a superfície formada de um polígono, vamos calcular o seu centro de gravidade.

Sabemos que o centro de gravidade de um triângulo é o encontro de suas medianas. Assim, podemos dividir o polígono em triângulos e, considerando um sistema de coordenadas conveniente, considerar as coordenadas do baricentro de cada triângulo.

Então, o polígono P pode ser dividido nos triângulos T_1, T_2, \dots, T_n , com áreas A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente. Consideremos que para o triângulo T_i , o seu baricentro seja dado pelas coordenadas $G_i = (x_i, y_i)$.

As coordenadas do centro de gravidade $G = (x, y)$ do polígono serão dadas por:

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

$$y = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \dots + A_ny_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

Além do triângulo, também podemos usar figuras que tenham o centro de gravidade em pontos determinados facilmente, como o quadrado e o retângulo.

Aplicaremos essa definição no seguinte exemplo:

4.4.1 Exemplo. Centro de gravidade de trapézio

Vamos calcular o centro de gravidade da superfície de um trapézio. Consideremos o trapézio desenhado no plano cartesiano onde os vértices são dados pelas coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (12, 0)$, $C = (6, 6)$ e $D = (0, 6)$.

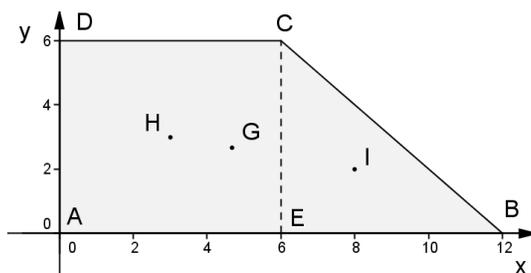


Figura 4.10: Centro de gravidade do trapézio

Dividimos o trapézio em duas figuras: um quadrado $AECD$ e um triângulo EBC .

Temos:

Área do quadrado $AECD$: $A_1 = 36$

Área do triângulo EBC : $A_2 = 18$

O baricentro do quadrado é o ponto $H = (3, 3)$, que é o encontro de suas diagonais e o baricentro do triângulo é o ponto $I = (8, 2)$.

Considerando o ponto $G = (x, y)$ como centro de gravidade do trapézio $ABCD$, temos:

$$x = \frac{36 \cdot 3 + 18 \cdot 8}{36 + 18} = \frac{252}{54} = \frac{14}{3}$$

$$y = \frac{36 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{36 + 18} = \frac{144}{54} = \frac{8}{3}$$

Assim, o centro de gravidade da superfície do trapézio é o ponto $G = \left(\frac{14}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Podemos afirmar que o ponto G pertence ao segmento HI . Essa afirmação segue do resultado da Geometria Analítica, que segue:

"Dado dois pontos P e Q , um ponto X está no segmento PQ se, e somente se, $X = aP + bQ$, com $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $a + b = 1$.

4.5 Centro de gravidade de um corpo qualquer

Um corpo qualquer, limitado numa região plana R , pode ser considerado como um conjunto de partículas infinitesimais localizado num plano.

Vamos considerar uma placa plana homogênea, delgada, com densidade superficial constante α , a qual está representada na figura 4.11, como uma região plana abaixo do gráfico da função $f(x)$, positiva no intervalo $[a, b]$ e limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo das abscissas.

Queremos definir o momento dessa placa em relação ao eixo x . Para isso, consideramos uma partição do intervalo $[a, b]$, em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, \dots, n$ de comprimento Δx . Consideremos o i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Seja c_i o ponto médio desse subintervalo. Vamos considerar a faixa retangular vertical de comprimento $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$. O centro de gravidade desse retângulo está no ponto cuja ordenada vale $\frac{1}{2}f(c_i)$.

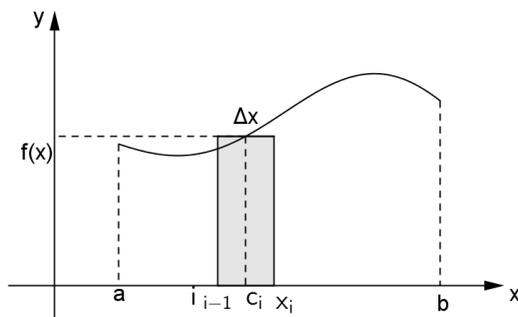


Figura 4.11: Momento da placa homogênea

O momento de massa em relação ao eixo x dessa i -ésima faixa retangular é então,

$$\Delta M_x = \frac{1}{2} f(c_i) \cdot \alpha \cdot f(c_i) \Delta x$$

A soma das medidas dos momentos em relação a x , nas n faixas será dada pela soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f(c_i) \cdot \alpha \cdot f(c_i) \Delta x$$

Considerando Δx cada vez menor e considerando o limite da soma dos momentos nessas pequenas faixas, temos:

$$M_x = \frac{1}{2} \alpha \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Procedendo de maneira similar, obtemos o momento da placa, em relação ao eixo y , como sendo:

$$M_y = \alpha \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

O centro de massa (x_c, y_c) é então definido como:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\alpha \cdot \int_a^b x \cdot f(x) dx}{\alpha \int_a^b f(x) dx}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \alpha \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\alpha \int_a^b f(x) dx}$$

Considerando que a densidade é constante, podemos escrever as expressões para as coordenadas x_c e y_c do centro de massa como sendo:

$$x_c = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \text{ e } y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

4.6 Centro de gravidade de arco

Considerando uma função contínua f , com derivada contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$ como mostra a figura 4.12, a porção compreendida entre dois de seus pontos forma um arco.

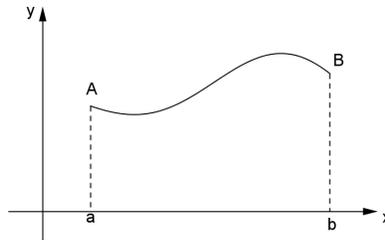


Figura 4.12: Centro de gravidade de arco

O centro de gravidade do arco de extremidades $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ é dado por:

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx} \quad [10]$$

Observamos que a integral $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ é o comprimento do arco AB.

Aplicaremos agora os conceitos obtidos no cálculo do centro de gravidade de algumas figuras.

4.7 Exemplos

4.7.1 Cálculo do centro de gravidade de uma região retangular

Consideremos a região retangular de base b e altura h e a função $f(x) = h$, em um sistema de coordenadas conveniente, como mostra a figura 4.13.

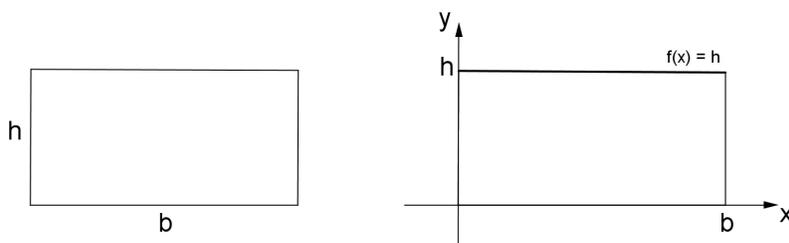


Figura 4.13: Centro de gravidade de retângulo

Aplicando os conceitos de integral, calculamos:

$$A = \int_0^b h \, dx = h x \Big|_0^b = h(b - 0) = hb$$

$$\int_0^b h x \, dx = h \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^b = \frac{b^2 h}{2}$$

Então temos:

$$x_c = \frac{\int_0^b h x \, dx}{A} = \frac{\frac{b^2 h}{2}}{hb} = \frac{b}{2}.$$

Para o cálculo de y_c , temos:

$$\frac{1}{2} \int_0^b h^2 \, dx = \frac{1}{2} h^2 x \Big|_0^b = \frac{h^2 b}{2}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_0^b h^2 \, dx}{A} = \frac{\frac{h^2 b}{2}}{bh} = \frac{h}{2}.$$

Ou seja, o centro de gravidade do retângulo é o ponto: $G = \left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right)$.

Concluimos que o centro de gravidade do retângulo está na intersecção dos eixos de simetria. Em particular, ela está no encontro de suas diagonais. Resultado que usamos no exemplo 4.4.1.

4.7.2 Cálculo do centro de gravidade do triângulo retângulo

Consideremos o triângulo retângulo de base b e altura h . Considerando um sistema de coordenadas conveniente, a reta que passa pelos pontos $(0, h)$ e $(b, 0)$, no intervalo $[0, b]$ representa a função $f(x) = \frac{-hx}{b} + h$.

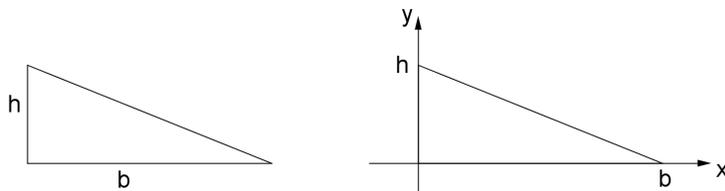


Figura 4.14: Centro de gravidade de triângulo retângulo

Então

$$A = \int_0^b \left(\frac{-hx}{b} + h \right) dx = -\frac{h}{b} \int_0^b x dx + h \int_0^b 1 dx$$

$$A = -\frac{h}{b} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^b + h \cdot x \Big|_0^b = -\frac{bh}{2} + bh = \frac{bh}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^b x \left(\frac{-hx}{b} + h \right) dx &= -\frac{h}{b} \int_0^b x^2 dx + h \int_0^b x dx = \\ &= -\frac{h}{b} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^b + \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = -\frac{hb^2}{3} + \frac{hb^2}{2} = \frac{hb^2}{6} \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$x_c = \frac{\int_0^b x \left(\frac{-hx}{b} + h \right) dx}{A} = \frac{\frac{hb^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{b}{3}$$

Para calcular y_c fazemos:

$$\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{-hx}{b} + h \right)^2 dx = \int_0^b \left(\frac{h^2 x^2}{b^2} - 2\frac{h^2 x}{b} + h^2 \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h^2 x^3}{3b^2} - \frac{h^2 x^2}{b} + h^2 x \right) \Big|_0^b = \frac{h^2 b}{6}$$

Então

$$y_c = \frac{\frac{h^2 b}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

O centro de gravidade do triângulo é dado por: $G = \left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3} \right)$, que é o encontro de suas medianas.

4.7.3 Cálculo do centro de gravidade de um triângulo qualquer

Consideremos o triângulo ABC , colocado convenientemente no plano cartesiano de modo que o vértice B esteja na origem do sistema e o lado BC sobre o eixo das abscissas. Vamos mostrar que nesse caso, também o centro de gravidade é o encontro de suas medianas.

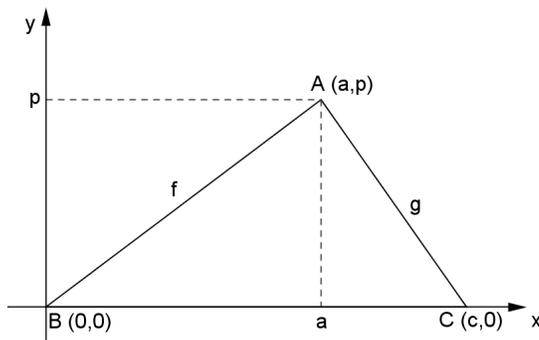


Figura 4.15: Centro de gravidade de um triângulo qualquer

Consideremos as funções f , que representa o segmento AB no intervalo $[0, a]$ e g , que representa o segmento AC , no intervalo $[a, c]$. Representando por h a função que representa os segmentos AB e AC , temos:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{px}{a}, & \text{se } x \in [0, a] \\ \frac{-px}{c-a} + \frac{cp}{c-a}, & \text{se } x \in [a, c] \end{cases}$$

Note que a área do triângulo é $A = \frac{cp}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^c xh(x)dx &= \int_0^a xf(x)dx + \int_a^c xg(x)dx = \\ &= \int_0^a x \frac{p}{a} x dx + \int_a^c x \left(\frac{-p}{c-a} x + \frac{cp}{c-a} \right) dx = \\ &= \frac{p}{a} \int_0^a x^2 dx + \frac{p}{c-a} \int_a^c (-x^2 + cx) dx = \\ &= \frac{p}{a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a + \frac{p}{c-a} \cdot \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{cx^2}{2} \right) \Big|_a^c = \frac{pa^2}{3} + \frac{p}{c-a} \cdot \left(\frac{-c^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{c^3}{2} - \frac{ca^2}{2} \right) = \\ &= \frac{pa^2}{3} + \frac{p}{c-a} \cdot \left(\frac{c^3}{6} + \frac{a^3}{3} - \frac{ca^2}{2} \right) \\ x_c &= \frac{\frac{pa^2}{3} + \frac{p}{c-a} \cdot \left(\frac{c^3}{6} + \frac{a^3}{3} - \frac{ca^2}{2} \right)}{\frac{cp}{2}} = \end{aligned}$$

$$x_c = \left[\frac{a^2}{3} + \frac{1}{c-a} \cdot \left(\frac{c^3}{6} + \frac{a^3}{3} - \frac{ca^2}{2} \right) \right] \frac{2}{c}$$

$$x_c = \frac{2a^2}{3c} + \frac{c^2}{3(c-a)} + \frac{2a^3}{3c(c-a)} - \frac{a^2}{c-a}$$

$$x_c = \frac{2a^2(c-a) + c^3 + 2a^3 - 3ca^2}{3c(c-a)} = \frac{2a^2c - 2a^3 + c^3 + 2a^3 - 3ca^2}{3c(c-a)}$$

$$x_c = \frac{c^3 - ca^2}{3c(c-a)} = \frac{c(c^2 - a^2)}{3c(c-a)}$$

$$x_c = \frac{c+a}{3}$$

Para calcular o valor de y_c fazemos:

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{p}{a}x \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^c \left(\frac{-p}{c-a}x + \frac{cp}{c-a} \right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{p}{a}x \right)^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{P}{c-a} \right)^2 \int_a^c (-x+c)^2 dx =$$

$$\frac{p^2 x^3}{6a^2} \Big|_0^a + \frac{p^2}{2(c-a)^2} \left(\frac{x^3}{3} - cx^2 + c^2x \right) \Big|_a^c =$$

$$\frac{p^2 a^3}{6a^2} + \frac{p^2}{2(c-a)^2} \left(\frac{c^3}{3} - cc^2 + c^2c - \frac{a^3}{3} + ca^2 + c^2a \right) =$$

$$\frac{p^2 a}{6} + \frac{p^2}{2(c-a)^2} \left[\frac{c^3 - a^3}{3} - ca(c-a) \right] =$$

$$\frac{p^2 a}{6} + \frac{p^2}{2(c-a)} \left(\frac{c^2 + ac + a^2}{3} - ca \right) =$$

$$\frac{p^2 a}{6} + \frac{p^2}{6(c-a)} (c^2 + ac + a^2 - 3ca) =$$

$$\frac{p^2 a}{6} + \frac{p^2}{6(c-a)} (c-a)^2 = \frac{p^2 a}{6} + \frac{p^2}{6} (c-a) = \frac{p^2 c}{6}$$

$$y_c = \frac{\frac{cp^2}{6}}{\frac{cp}{2}} = \frac{cp^2}{6} \cdot \frac{2}{cp} = \frac{p}{3}$$

Então, o centro de gravidade de uma região triangular ABC , com $A = (a, p)$ e $B = (0, 0)$ e $C = (a, 0)$ é $G = \left(\frac{c+a}{3}, \frac{p}{3} \right)$, que é o encontro de suas medianas, o que pode ser facilmente obtido.

4.7.4 Cálculo do centro de gravidade do semicírculo

Consideremos o semicírculo de raio r , em um conveniente sistema de coordenadas para este semicírculo, temos:

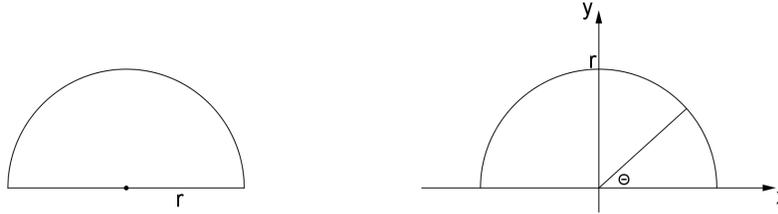


Figura 4.16: Centro de gravidade do semicírculo

Temos:

$$A = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Para calcular essa integral, faremos a substituição

$$x = r \cos \theta$$

$$dx = r(-\text{sen}\theta)d\theta$$

Então a integral fica

$$A = \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \theta} \cdot r \cdot (-\text{sen}\theta) d\theta$$

$$A = \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta)} \cdot r \cdot (-\text{sen}\theta) d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi} r \cdot \text{sen}\theta \cdot r \cdot \text{sen}\theta d\theta$$

$$A = r^2 \cdot \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta d\theta$$

Lembrando que

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 1 - 2\text{sen}^2 \theta$$

$$\text{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

A integral fica:

$$A = r^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$A = \frac{r^2}{2} \left(\int_0^{\pi} 1 d\theta - \int_0^{\pi} \cos 2\theta d\theta \right)$$

$$A = \frac{r^2}{2} \left(\theta \Big|_0^\pi - \frac{\text{sen} 2\theta}{2} \Big|_0^\pi \right)$$

$$A = \frac{r^2}{2} [(\pi - 0) - 0] = \frac{\pi r^2}{2}$$

O centro de gravidade encontra-se na reta de simetria do semicírculo que é o eixo y , ou seja a coordenada x é igual a 0. Portanto, calcularemos somente y_c .

Calculando a integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = (r^2 x - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^r = \\ &= r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2r^3}{3} \end{aligned}$$

Então temos:

$$y_c = \frac{\frac{2r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi}$$

Assim, o centro de gravidade fica: $G = (0, \frac{4r}{3\pi})$.

4.7.5 Cálculo do centro de gravidade da região plana R

Consideremos a região R limitada pelo eixo x , pela reta $x = a$, com $a > 0$ e pela curva $y = \sqrt{x}$.

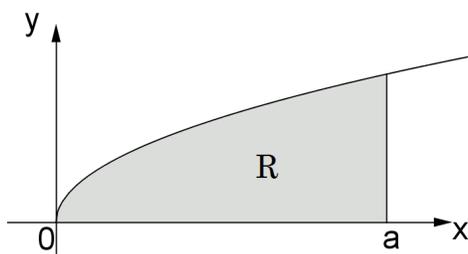


Figura 4.17: Função $y = \sqrt{x}$

Sendo $f(x) = \sqrt{x}$, a área de R é:

$$A = \int_0^a \sqrt{x} dx = \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2}{3} \sqrt{a^3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

E temos:

$$\int_0^a x f(x) dx = \int_0^a x x^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^a = \frac{2a^2 \sqrt{a}}{5}$$

Logo,

$$x_c = \frac{\frac{2a^2 \sqrt{a}}{5}}{\frac{2a\sqrt{a}}{3}} = \frac{3a}{5}$$

Para calcular y_c fazemos:

$$\frac{1}{2} \int_0^a [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a x dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^a = \frac{a^2}{4}$$

$$y_c = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{2a\sqrt{a}}{3}} = \frac{3\sqrt{a}}{8}$$

Então, o centro de gravidade da região é: $G = \left(\frac{3a}{5}, \frac{3\sqrt{a}}{8}\right)$.

4.7.6 Cálculo do centro de gravidade da semicircunferência

Consideremos a semicircunferência dada por $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0\}$.

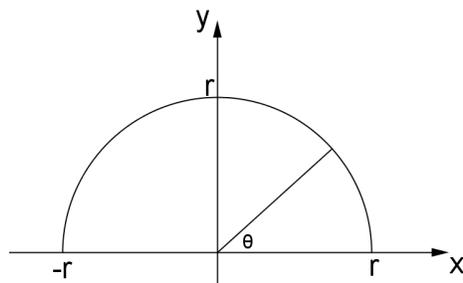


Figura 4.18: Centro de gravidade da semicircunferência

Derivando implicitamente, temos:

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{-x}{y}$$

Considerando $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, temos:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \text{ e } (y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Calculando o comprimento da semicircunferência:

$$s = \int_{-r}^r \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$s = \int_{-r}^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx$$

$$s = r \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Big|_{-r}^r = r[\arcsin(1) - \arcsin(-1)] = r\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi r$$

Calculando o centro de gravidade temos:

$$\int_{-r}^r x \sqrt{1 + (y')^2} dx = r \int_{-r}^r x \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx$$

Substituindo

$$u = r^2 - x^2$$

$$du = -2x dx$$

A integral fica:

$$r \int x \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx = -\frac{r}{2} \int \sqrt{\frac{1}{u}} = -\frac{r}{2} 2\sqrt{u} = -r\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\int_{-r}^r x \sqrt{1 + (y')^2} dx = -r\sqrt{r^2 - x^2} \Big|_{-r}^r = 0$$

Também temos:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r y \sqrt{1 + (y')^2} dx &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2} = \int_{-r}^r r = r x \Big|_{-r}^r = 2r^2 \end{aligned}$$

As coordenadas do centro de gravidade serão então:

$$x_c = \frac{0}{\pi r} = 0 \text{ e } y_c = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}$$

Então o centro de gravidade é: $C = \left(0, \frac{2r}{\pi}\right)$.

4.8 Teoremas de Pappus

Vamos apresentar os Teoremas de Pappus utilizados para calcular volumes e áreas de superfícies de sólidos de revolução. Começaremos pela definição desses sólidos.

4.8.1 Sólidos de revolução

Consideremos em um plano, uma reta r , que será considerado o eixo e uma curva L , que não corta a reta r . Cada ponto dessa curva L , irá descrever uma circunferência perpendicular ao eixo r , e com centro sobre ele. A reunião de todas essas circunferências é chamada superfície de revolução.

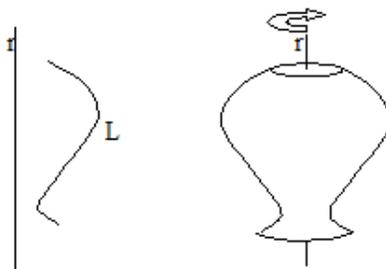


Figura 4.19: Sólido de revolução

Se a curva for fechada ou se seus dois extremos pertencerem ao eixo, a superfície delimita um sólido chamado sólido de revolução.

Sólidos de revolução bastante conhecidos são o cilindro circular reto, obtido pela rotação de um retângulo; o cone circular reto, obtido pela rotação de um triângulo retângulo ou redor de um de seus catetos e a esfera, obtida pela rotação de um semicírculo ao redor de seu diâmetro:

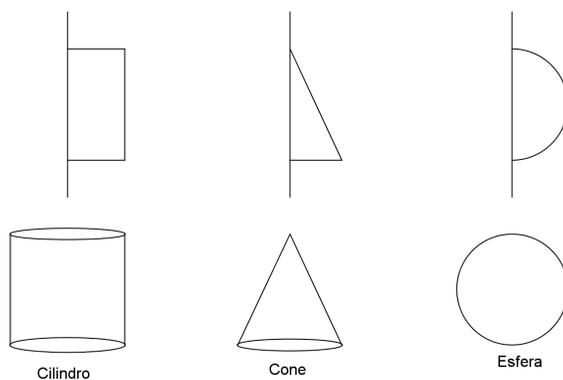


Figura 4.20: Cilindro, cone e esfera

4.8.2 Primeiro Teorema de Pappus

Consideremos uma região plana que está inteiramente de um lado de uma reta do plano. Se essa região é girada ao redor da reta que desempenha a função de eixo, então o volume do sólido gerado dessa maneira é igual ao produto da área da região pela distância percorrida pelo centro de gravidade ao redor do eixo.

Demonstração: Vamos demonstrar considerando uma região plana como em 4.5. Consideraremos o eixo x como o eixo de revolução. Como vimos anteriormente, a distância y_c do centro de gravidade ao eixo x é dada por:

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

que equivale a

$$y_c \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

ou ainda

$$2\pi \cdot y_c \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b 2\pi [f(x)]^2 dx$$

$$2\pi \cdot y_c \cdot A = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

Observemos que $2\pi y_c$ é a distância percorrida pelo centro de gravidade e a integral é o volume do sólido calculado pelo método do disco.[25]

Então, $V = 2\pi \cdot y_c \cdot A$.

4.8.3 Segundo Teorema de Pappus

Consideremos um arco de uma curva plana que está inteiramente num dos lados de uma reta desse plano. Se esse arco é girado ao redor dessa reta, que desempenha a função de eixo, então a área da superfície gerada dessa maneira é igual ao produto do comprimento do arco pela distância percorrida pelo centro de gravidade ao redor do eixo.

Demonstração: Vamos demonstrar para um arco definido como em 4.6. Consideremos o eixo x como o eixo de revolução.

Temos:

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

que equivale a:

$$y_c \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

sendo o comprimento do arco dado por $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ ou ainda

$$s \cdot 2\pi \cdot y_c = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Notamos que novamente $2\pi y_c$ é a distância percorrida pelo centro de gravidade e o segundo membro é a área da superfície de revolução.[9]

Assim, a área da superfície é $A = 2\pi y_c \cdot s$.

Utilizando os resultados obtidos nos exemplos de cálculo do centro de gravidade, calcularemos o volume e a área de superfície de alguns sólidos de revolução.

4.9 Exemplos

4.9.1 Cálculo do volume do cilindro

Consideremos o cilindro obtido pela rotação do retângulo de lados b e r , ao redor do eixo x , que contém o lado b , conforme a figura 4.20.

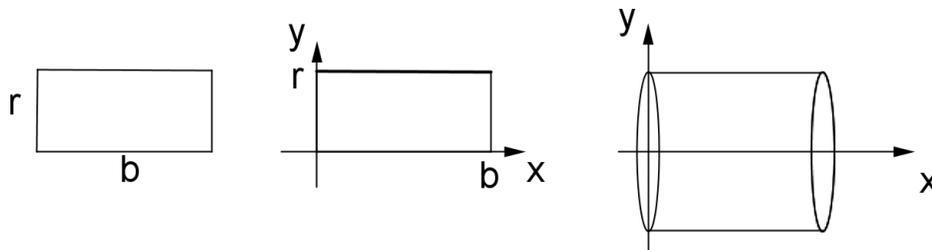


Figura 4.21: Volume do cilindro

Como vimos anteriormente, o centro de gravidade do retângulo é dado por:

$$G = \left(\frac{b}{2}, \frac{r}{2}\right)$$

Então, aplicando o teorema de Pappus temos:

$$V = A \cdot 2\pi \cdot y_c$$

$$V = b \cdot r \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2}$$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot b$, que é o produto da área da base pela altura do cilindro.

4.9.2 Cálculo do volume do cone

Consideremos o cone obtido pela rotação do triângulo retângulo de catetos b e r , ao redor do eixo x , que contém o cateto b , conforme a figura 4.21.

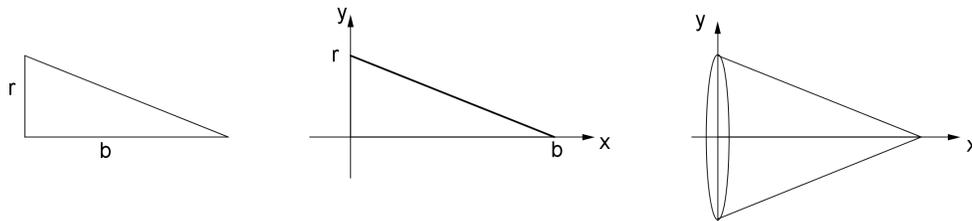


Figura 4.22: Volume do cone

O centro de gravidade do triângulo é dado por:

$G = (\frac{b}{3}, \frac{r}{3})$. Então, pelo Teorema de Pappus, temos:

$$V = A \cdot 2\pi \cdot y_c$$

$$V = \frac{b \cdot r}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot b}{3}, \text{ que é a terça parte do produto da área da base pela altura do cone.}$$

4.9.3 Cálculo do volume da esfera por Pappus

Rotacionando o semicírculo em torno do eixo x , obtemos a esfera.

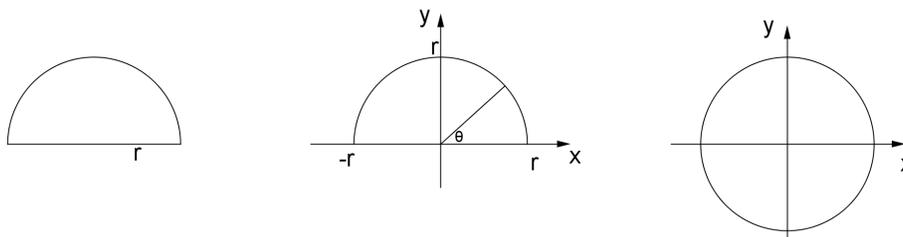


Figura 4.23: Volume da esfera

O centro de gravidade do semicírculo, conforme calculado no exemplo 4.6.4, é dado por:

$$G = (0, \frac{4r}{3\pi})$$

Então, pelo Teorema de Pappus, temos:

$$V = A \cdot 2\pi \cdot y_c$$

$$V = \frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{4r}{3\pi}$$

$$V = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$$

4.9.4 Cálculo do volume do sólido formado pela rotação da região plana R

Consideremos o sólido formado pela rotação da região plana R limitada superiormente pela curva $y = \sqrt{x}$, inferiormente pelo eixo x e pela reta $x = a$, com $a > 0$.

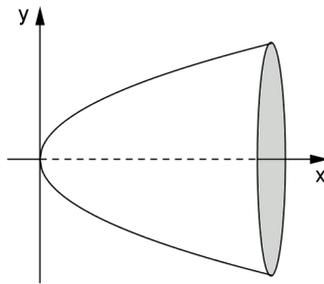


Figura 4.24: Volume do sólido gerado pela região R

Sendo o centro de gravidade da região dado por: $G = \left(\frac{3a}{5}, \frac{3\sqrt{a}}{8}\right)$, conforme calculado no exemplo 4.6.5, e a área dessa figura é igual a $\frac{2a\sqrt{a}}{3}$, então temos, pelos Teorema de Pappus,

$$V = A \cdot 2\pi \cdot y_c$$

$$V = \frac{2a\sqrt{a}}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{3\sqrt{a}}{8}$$

$$V = \frac{\pi a^2}{2}$$

4.9.5 Cálculo da área da superfície da esfera

Conforme calculado exemplo 4.7.6, o centro de gravidade da semicircunferência, é:

$$C = \left(0, \frac{2r}{\pi}\right)$$

Então, pelo segundo Teorema de Pappus, temos:

$$A = s \cdot 2\pi \cdot y_c = \pi r \cdot 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi}$$

$$A = 4\pi r^2$$

4.9.6 Cálculo do volume do sólido obtido pela rotação do trapézio ao redor de sua base maior

Finalizando, vamos calcular o volume do sólido obtido pela rotação do trapézio utilizado no exemplo 4.4.1, tendo como eixo de rotação a sua base maior, cujo centro de gravidade é dado por

$$G = \left(\frac{14}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

A área do trapézio é $A = 54$.

Então, pelo Teorema de Pappus

$$V = A \cdot 2\pi \cdot y_c$$

$$V = 54 \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{3}$$

$$V = 288\pi$$

No próximo capítulo apresentaremos uma sequência didática na qual faremos aplicações das ideias de Pappus no cálculo de volume de sólidos de revolução.

Capítulo 5

Atividades para sala de aula

Nesse capítulo apresentaremos atividades desenvolvidas em sala de aula, com alunos do 2º ano do ensino médio, analisando experimentalmente os resultados da aplicação do Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus e uma sugestão sobre formas de determinar o centro de gravidade de figuras planas.

Segundo orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, "é proposta uma formação geral, em oposição à formação específica, desenvolvendo a capacidade de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização."

Ainda considerando as orientações presentes nesse documento, devemos considerar as premissas apontadas pela UNESCO como eixos estruturais da educação na sociedade contemporânea: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser.

Especificamente na área de Matemática, ao elaborar uma atividade devemos desenvolver as competências e habilidades de:

- Identificar o problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Considerando essas competências, as sequências didáticas foram desenvolvidas com o objetivo de incentivar os alunos a investigar e concluir por si próprios as afirmações do Princípio de Cavalieri para volumes e a determinação experimental do centro de gravidade de algumas figuras planas, com vistas à utilização do teorema de Pappus para obtenção de maneiras diversificadas de calcular volumes e áreas de superfície de sólidos de revolução.

5.1 Relação entre volumes e o Princípio de Cavalieri

Na ocasião da realização da atividade, os alunos já haviam discutido sobre a ideia do conceito de volumes de um sólido como sendo a medida que expressa o espaço ocupado por ele. Também já havia sido desenvolvido o cálculo do volume do cubo e do bloco retangular como o produto de suas dimensões: comprimento, largura e altura.

Para as aplicações do Princípio de Cavalieri, foram analisadas algumas atividades sugeridas pelo portal da coleção M3 Matemática Multimídia, que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp.

A sequência didática que apresentaremos foi desenvolvida tendo como base a atividade "O Experimento - Volume das pirâmides", desenvolvida pelas professoras Claudina Izepe Rodrigues e Sueli Irene Rodrigues Costa[21]. A atividade proposta apresenta o cálculo de volume de pirâmides, sendo que na sequência que trabalhamos com os alunos, foi feita uma adaptação utilizando os mesmos polígonos para a confecção dos prismas e comparação de seus volumes, analisando o seu valor quando os prismas possuem a mesma área de base.

Inicialmente apresentaremos como proposta de atividade e após a aplicação da mesma com os alunos faremos a análise dos resultados obtidos.

5.1.1 Introdução

O plano de aula propôs estimular os alunos a planejar a construção de sólidos geométricos e estabelecer relações entre os volumes de prismas retos de bases de diferentes formatos e também relacionar o volume de uma pirâmide com o volume de um prisma. As atividades propostas visavam promover a investigação de hipóteses e sua validação através de verificação prática, analisando os resultados.

5.1.2 Objetivos

A abordagem utilizada nessa sequência didática visou proporcionar ao aluno a construção de sólidos geométricos, analisando as medidas e formas de modo a utilizar o material disponível com o mínimo de desperdício e melhor aproveitamento. Nesse sentido, foram utilizadas caixas de papelão para a confecção dos prismas e pirâmides, visando a reutilização de material.

As atividades planejadas tiveram como objetivo incentivar os alunos a se tornarem autônomos em relação ao seu aprendizado, investigando e relacionando os volumes de diferentes prismas para a compreensão do Princípio de Cavalieri para volumes. No caso dessa atividade, destacamos que, como os sólidos são prismas, qualquer secção paralela à base produzirá uma figura congruente a ela.

5.1.3 Metodologia

Na atividade com os prismas, inicialmente foi proposta uma investigação sobre volumes de prismas de diferentes bases poligonais, mas com a mesma medida de área. Os alunos foram questionados quanto ao resultado esperado para o volumes dos diferentes prismas. Após esta análise, foi determinado um valor fixo para a altura e confeccionados prismas e em seguida, feita a verificação de seus volumes, comparando-os através da quantidade de areia que cada prisma comporta. Em seguida, os alunos preencheram uma ficha com os dados de cada prisma e posteriormente fizeram um relatório com as conclusões do experimento.

Na atividade com as pirâmides, foram construídos pirâmides com a mesma altura e bases poligonais diferentes, aproveitando as mesmas bases dos prismas anteriores. E a seguir, comparados os volumes das pirâmides entre si. Em outro momento, foi também construído um prisma de mesma altura e, comparando os volumes, determinada a relação existente entre o volume do prisma e o volume da pirâmide.

5.1.4 Material

Para a atividade, foram utilizados:

Folha de sulfite, papelão, régua, tesoura, fita adesiva, canudo, copo de medidas, areia.

5.1.5 Duração da atividade

4 aulas

5.1.6 Roteiro da atividade

A atividade foi desenvolvida em grupos de três ou quatro alunos. Cada grupo recebeu uma folha com as figuras dos polígonos que serviram de base para os prismas e pirâmides. Esses diferentes polígonos possuíam áreas iguais.

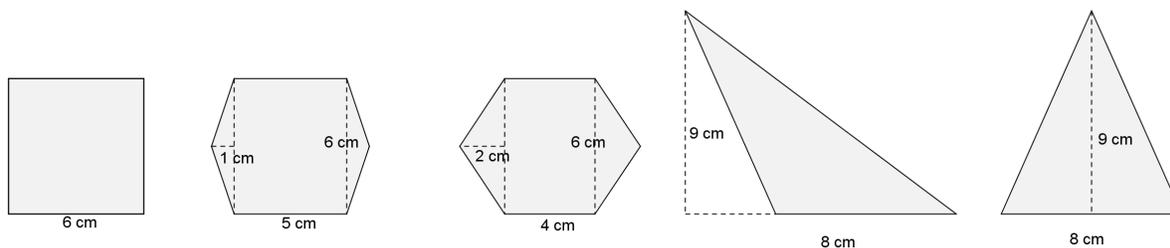


Figura 5.1: Polígonos bases dos prismas

Para os prismas, os alunos escolheram três ou quatro polígonos como base, recortando-os no papelão. Definindo a altura que desejassem, fizeram o modelo planificado na folha de sulfite,

construindo o modelo do prisma em seguida. Para tornar o prisma mais firme, cortaram retângulos no papelão e colaram nas faces laterais.

Finalizando a construção dos prismas, cada grupo fez a medida de sua capacidade enchendo o prisma com areia e verificando o volume marcado no copo de medidas.

Os alunos anotaram os resultados na tabela anexa, fazendo um relatório dos resultados obtidos e embora houvessem algumas diferenças nos valores encontrados, puderam concluir que todos os prismas possuíam o mesmo volume se a área da base e a altura fossem as mesmas, embora possuísem bases de diferentes formas. Também observaram que como as áreas laterais são diferentes, a área total dos prismas não eram iguais.

figura	Sólido	Área da base (cm ²)	Altura do sólido (cm)	Área lateral (cm ²)	Volume medido (ml)	Volume medido (cm ³)
						
						
						
						
						

Figura 5.2: Tabela de resultados

Para a confecção do modelo das pirâmides, os alunos escolheram também três ou quatro polígonos para usarem como base, deixando um deles para a construção do prisma. Lembrando, as bases eram equivalentes em área e conseqüentemente qualquer secção por plano horizontal nas pirâmides também determinavam polígonos de mesma área.

Os alunos definiram a altura da pirâmide, cortando os canudinhos de mesmo tamanho para todas as pirâmides que iriam construir. Tomando o polígono como base, recortaram no papelão e fixando o canudinho com fita adesiva em qualquer lugar da base de modo que ficasse ortogonal a ela.

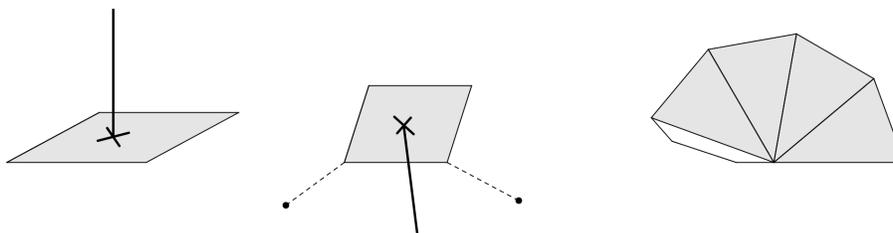


Figura 5.3: Confecção da pirâmide

Para a planificação da pirâmide, marcaram os pontos correspondentes aos vértices da base, mantendo o vértice da pirâmide fixo e girando o polígono da base na folha de sulfite; montando a

partir da planificação, recortaram e colaram papelão nas faces para que a pirâmide tenha maior rigidez.

Utilizando a mesma altura das pirâmide, construíram um prisma com uma das bases escolhidas.

Novamente, enchendo as pirâmides de areia, compararam o volume de cada uma delas entre si, anotando os resultados. Finalmente, mediram o volume do prisma de mesma altura, e relacionaram o volume do prisma com o volume encontrado para as pirâmides.

5.1.7 Avaliação

A avaliação foi feita através do envolvimento dos alunos nas atividades, observando-se o planejamento em relação à construção dos prismas e pirâmides e análise das conclusões obtidas na aferição da capacidade de cada modelo de prisma e pirâmide, considerando a capacidade dos alunos em levantar hipóteses, traçar estratégias validando as conjecturas feitas inicialmente em relação aos volumes dos prismas.

Na atividade proposta, esperava-se que o aluno encontrasse valores próximos para os volumes tanto dos prismas como das pirâmides comparadas entre si, o que ocorreu de forma satisfatória, embora as medidas tivessem uma pequena margem de erro. Uma vez conhecido o volume do paralelepípedo, constatou-se que o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela altura. E na comparação do volume das pirâmides com o prisma de mesma altura, chegaram à conclusão de que o volume do prisma é o triplo do volume da pirâmide.

5.1.8 Análise dos resultados

Após a realização das atividades propostas, podemos destacar algumas observações feitas.

Os alunos se interessam mais sobre um conteúdo quando podemos desenvolvê-lo através de situações práticas, com a manipulação de materiais concretos e não somente através de cálculos e fórmulas, fixando melhor os conceitos envolvidos.

Na confecção dos modelos de prismas e pirâmides, embora as medidas fossem pensadas de modo que os volumes fossem iguais, nas aferições práticas foram encontradas valores diferentes, devido aos erros que sempre podem ocorrer quando transpomos dados teóricos para as construções práticas, sem que esses erros sejam um fator que impeçam os alunos de concluir os resultados esperados, servindo para uma discussão quando a validade dos resultados obtidos e qual a melhor maneira de determinar a medida mais apropriada a ser considerada. Uma sugestão seria considerar a média aritmética das medidas obtidas.

Em geral, após a construção e manipulação de modelos concretos, os alunos fixaram melhor os conceitos envolvidos e apresentaram maior facilidade de compreensão nas aplicações de volumes de prismas e pirâmides em situações teóricas, pois quando apenas apresentamos as fórmulas de cálculo, eles apresentam dificuldades de visualização e compreensão do problema.

Destacamos também a utilização dos vídeos do portal da coleção M3 Matemática Multimídia da série "Matemática na escola" : "3,2,1 - Mistério", cujo conteúdo foi desenvolvido pela professora Sueli Irene Rodrigues Costa, onde é abordado o Princípio de Cavalieri para áreas e volumes e a

relação entre o volume do prisma, cone e esfera[19], e "Um poema e três quebra cabeças", desenvolvido pelas professoras Claudina Izepe Rodrigues e Sueli I. R. Costa, que aborda a relação entre os volumes das pirâmides e do prisma, para que os alunos aprofundem nas aplicações das ideias de Cavalieri[20]. Após o vídeo, sugerir ser apresentado aos alunos, a demonstração do resultado obtido na sequência didática, utilizando o Princípio de Cavalieri.

Apresentaremos a seguir uma sequência didática para a determinação do centro de gravidade para algumas figuras planas e posterior aplicação do Teorema de Pappus.

Destacamos que foi feita com os alunos a cálculo de volume do toro através de modelo construído pelos alunos do 2º ano do ensino médio. Devido ao tempo disponível, a atividade para a determinação de centro de gravidade não foi desenvolvida com estes alunos, sendo apenas feita uma exposição sobre este conceito, focando apenas nas ideias centrais que seriam utilizadas na aplicação dos Teoremas de Pappus. Assim, a atividade sobre o centro de gravidade será proposta como uma sugestão a ser desenvolvida.

5.2 Centro de gravidade e o Teorema de Pappus

5.2.1 Introdução

As atividades para a determinação de centro de gravidade serão desenvolvidas com o intuito de utilizar esses dados no cálculo de volume e áreas de superfícies de sólidos geométricos através do Teorema de Pappus. Para a determinação de centro de gravidade serão sugeridos experimentos utilizando materiais simples e de fácil manuseio, de modo que mesmo sendo desenvolvidos em grupos, cada aluno deverá construir e manipular os materiais individualmente.[1] Para a aplicação do Primeiro Teorema de Pappus, construiremos um modelo para o toro e mediremos seu volume. Também aplicaremos o Segundo Teorema de Pappus para calcular a área de superfície do cilindro, cone e esfera.

5.2.2 Objetivos

O objetivo dessa atividade é apresentar maneiras básicas de se determinar condições de equilíbrio de algumas figuras planas, determinando seu centro de gravidade experimentalmente, auxiliando na compreensão de seu significado.

Através de atividades experimentais realizadas com materiais simples e de baixo custo, o aluno analisará situações envolvendo quedas de corpos, equilíbrio estático e oscilações ao redor de posições de equilíbrio. Com as análises dos resultados dos experimentos devem formular definições sobre centro de gravidade, princípios e leis que descrevem esse fenômeno.

Através da construção com material prático comparar o volume do toro calculado através do Teorema de Pappus e a capacidade medida pela quantidade de água contida em seu interior.

5.2.3 Metodologia

As atividades experimentais serão desenvolvidas propondo maneiras diversificadas para se encontrar o centro de gravidade de figuras planas como paralelogramo, círculo, triângulo e outros polígonos em particular.

Inicialmente, analisaremos o centro de gravidade da figura através do ponto de equilíbrio em um ponto apoiando em um suporte vertical, e a seguir analisaremos através das verticais que podemos traçar na figura quando pendurada por algum ponto.

Para o toro, utilizando conduíte ou mangueira, construiremos um toro, determinando o seu centro de gravidade para a aplicação do Teorema de Pappus e através de um orifício encher de água para comparação de seu volume.

5.2.4 Material

Para a atividade serão utilizados:

Folha de sulfite, papelão, régua, tesoura, compasso, transferidor, palitos de churrasco, massa de modelar, conduíte ou pedaço de mangueira, copo de medidas, água, fita adesiva.

5.2.5 Duração da atividade

Centro de gravidade - 3 aulas

Teorema de Pappus - 4 aulas

5.2.6 Roteiro da atividade

Centro de gravidade

Inicialmente, vamos procurar o centro de gravidade de figuras planas como o círculo e o paralelogramo. Usaremos o retângulo e outro tipo de paralelogramo nesse experimento. Para isso, o aluno deverá desenhar na folha de sulfite essas figuras e para ter maior firmeza nos experimentos, recortar as mesmas figuras no papelão.

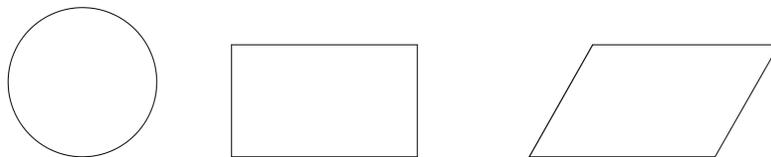


Figura 5.4: Figuras planas - determinação de centro de gravidade

Inicialmente será feito um questionamento sobre a ideia que o aluno tem sobre o assunto, perguntando o que ele acha que é o centro de gravidade, e após a definição, se há várias maneiras de se equilibrar as figuras.

Para procurar o centro de gravidade, será preciso construir um suporte para apoiar as figuras planas recortadas no papelão. Esse suporte será construído usando massa de modelar como base

e fixando um palito de churrasco na vertical, ressaltando que a ponta deve ficar para baixo, para facilitar o equilíbrio das figuras.[1]

Permitir que o aluno faça tentativas procurando encontrar o ponto de cada figura na qual ela fica em equilíbrio no suporte, que no caso dessas figuras será o seu centro.

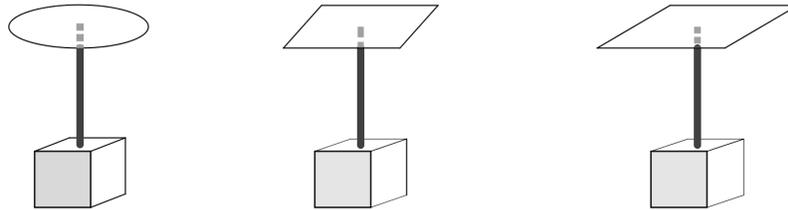


Figura 5.5: Equilíbrio de figuras planas

A seguir fazer o mesmo procedimento para encontrar o centro de gravidade do triângulo. Para facilitar a visualização, construiremos um triângulo isósceles, enfatizando que todas as propriedades verificadas serão válidas para quaisquer tipo de triângulos.

Inicialmente, os alunos deverão identificar os quatro pontos notáveis do triângulo: circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro. A seguir, encontrar experimentalmente o ponto de equilíbrio. No caso do triângulo, identificar esse ponto como sendo o baricentro.

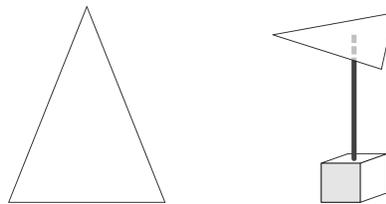


Figura 5.6: Centro de gravidade do triângulo

Uma outra forma de analisarmos o ponto de equilíbrio de uma figura plana será desenvolvida utilizando um fio de prumo que poderá ser pendurado no suporte com o palito de churrasco utilizado na atividade anterior, onde será preso um alfinete.

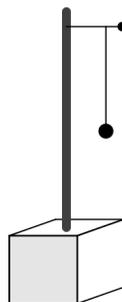


Figura 5.7: Fio de prumo

Utilizando figuras como as do experimento anterior, fazer em cada uma delas, dois ou três furos para pendurar as figuras no alfinete que está preso no palito de churrasco. Os furos devem ser pequenos comparados com as dimensões das figuras, para que não hajam alterações significativas em relação ao peso, mas que sejam suficientes para poder pendurar sem atrito no alfinete. A seguir, colocando junto ao fio de prumo esperar que a figura atinja o equilíbrio, observar a direção em que se encontra o fio de prumo, traçando o segmento de reta vertical com um lápis, conforme apresentado na seção 4.2, do capítulo 4.

Repetindo esse procedimento utilizando outro furo que não deve estar na vertical traçada anteriormente, observar o ponto em que os dois segmentos se cruzam. Repetir o procedimento mais uma vez, para verificar que o terceiro segmento passa pelo mesmo ponto encontrado anteriormente.

O centro de gravidade é ponto de intersecção dos segmentos determinados pelo fio de prumo. Pode se confirmar esse fato, utilizando esse ponto para se equilibrar as figuras no suporte, como feito na atividade anterior.

Teoremas de Pappus

Utilizando o círculo, os alunos aplicaram o conceito de centro de gravidade no cálculo do volume do toro através do Teorema de Pappus.[13]

Como vimos no capítulo anterior, o volume de um sólido de revolução é dado pelo produto da área da região geradora do sólido pela distância percorrida pelo centro de gravidade ao redor do eixo.

Assim foi construído um modelo de um toro e comparado o seu volume medido através da capacidade do interior com os cálculos feitos através do Teorema de Pappus.

Para isso foi utilizado pedaços de mangueira ou conduíte. Inicialmente, os alunos mediram o seu diâmetro interno, cujo raio correspondente representado por r . Depois o conduíte ou mangueira foram moldados e unidos com fita crepe, formando o modelo do toro. Desenhando seu contorno externo e interno em folha de papel, recortaram o molde do contorno do toro para medir a distância do centro do toro até o centro de gravidade do círculo representado por d .



Figura 5.8: Confeção do modelo de toro

Para medir o volume, enchemos o toro com água através de um pequeno orifício na parte de fora do toro e colocando a água em um copo de medidas, verificamos a sua capacidade. Também

foi feito o cálculo do volume do toro pelo Teorema de Pappus, verificando se os valores obtidos nos dois métodos são correspondentes.

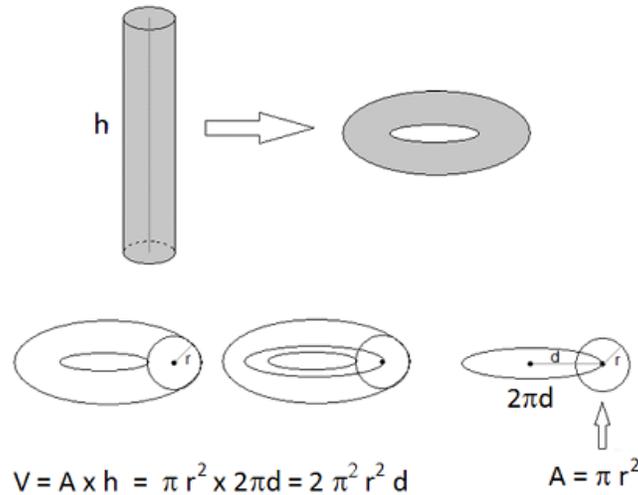


Figura 5.9: Modelo de toro

Após a verificação através do modelo do toro, os alunos aplicaram o Segundo Teorema de Pappus no cálculo de área de superfície do cilindro, cone e esfera.

Lembrando, a área de superfície é dado por $A = 2\pi \cdot y_c \cdot s$.

Cilindro

No caso do cilindro do exemplo 4.9.1 do capítulo 4, temos $s = b$ e $y_c = r$.

Então $A = 2\pi \cdot b \cdot r$, que é a área lateral do cilindro.

Cone

No cone estudado no exemplo 4.9.2 do capítulo 4, temos $s = \sqrt{b^2 + r^2}$ e $y_c = \frac{r}{2}$

Então $A = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{b^2 + r^2} = \pi \cdot h \cdot \sqrt{b^2 + r^2}$

Notando que $\sqrt{b^2 + r^2}$ é a geratriz do cone, representada usualmente por g , a expressão fica $\pi \cdot r \cdot g$, que é a conhecida expressão que dá a área lateral do cone.

Esfera

Do exemplo 4.9.5 do capítulo 4, temos que $s = \pi \cdot r$ e $y_c = \frac{2r}{\pi}$.

Então $A = 2\pi \cdot \frac{2r}{\pi} \cdot \pi \cdot r = 4\pi \cdot r^2$, que é a área da superfície da esfera.

Lembramos que o cálculo do volume do toro aqui feito utilizando o Teorema de Pappus também pode ser feito utilizando o Princípio de Cavalieri, conforme em 2.2.7.

5.2.7 Avaliação

A avaliação foi feita através da participação dos alunos nas atividades propostas e também na condução dos experimentos.

Espera-se que com as atividades de centro de gravidade, os alunos concluam que ele é único para cada corpo, independente da maneira como é determinado. No cálculo do volume do toro, foi analisado um modo alternativo de se calcular o volume de sólidos de revolução, sem ficar dependente das tradicionais fórmulas de cálculo.

5.2.8 Análise dos resultados

Assim como dito na atividade anterior, o envolvimento dos alunos em atividades práticas sempre é maior que nas atividades teóricas.

Foram encontradas diferenças entre o volume calculado e a capacidade do toro, provavelmente pelo material do conduíte, mas que como na atividade anterior não comprometeu as conclusões esperadas.

Também aqui, sugerimos o vídeo "Em equilíbrio", do portal da coleção M3 Matemática Multimídia da série "Matemática na escola", desenvolvido pelo professor Leonardo Barichello, que mostra formas de encontrar centros de gravidade[3].

Considerações finais

O cálculo de áreas e volumes é um tópico da Matemática que apresenta grandes possibilidades de aplicações em sala de aula, mas que muitas vezes se tornam apenas a utilização de fórmulas de cálculo, ensinado de forma mecânica, levando os alunos a apenas memorizar os procedimentos utilizados na resolução de exercícios, sem assimilar os conceitos envolvidos, tornando-se um assunto de difícil compreensão. A utilização de material concreto e atividades que permitam o aluno formular hipóteses e estratégias na resolução de problemas propostos tem sido uma opção de trabalho que apresenta maior aproveitamento.

Este trabalho contém ideias e sugestões para se trabalhar com áreas e volumes. Um aspecto considerado nesse trabalho foi explorar aspectos históricos que contextualizem os temas a serem desenvolvidos, justificando os caminhos trilhados pelos matemáticos ao longo da história, com suas contribuições que levaram ao estudo da Matemática como conhecemos atualmente, e as formas como superaram as dificuldades encontradas.

Nos aspectos históricos, destacamos as ideias pioneiras de matemáticos da Antiguidade, como Eudoxo, com sua teoria da Exaustão, e maneira utilizada em suas demonstrações; Euclides, primeiro matemático a utilizar método axiomático e autor da memorável obra "Elementos", que segundo consta, é o livro mais reproduzido depois da Bíblia, e que contém toda a geometria conhecida na sua época; Arquimedes, com suas ideias criativas e que apresentou muitos resultados importantes no desenvolvimento da Matemática e Pappus, com seu método para o cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução.

Depois, já no século *XVII*, analisamos a enorme contribuição de Bonaventura Cavalieri que, com suas ideias sobre os indivisíveis, abriu caminhos para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, posteriormente desenvolvido por matemáticos como Newton, Leibniz e formalizado tempo depois por Riemann.

Através da análise dos trabalhos desses matemáticos, pretendemos dimensionar as dificuldades enfrentadas por esses precursores da teoria matemática e as exaustivas discussões na busca de resultados e demonstrações que tornaram possíveis as descobertas que desfrutamos hoje.

Mostramos também aplicações de cálculo de áreas e volumes em diferentes contextos, utilizando os recursos disponíveis em cada época.

A intenção desse trabalho é auxiliar o professor do ensino básico no desenvolvimento deste conteúdo, mostrando caminhos alternativos no desenvolvimento do cálculo de áreas e volumes. Acreditando que o conhecimento deste tema não deva restringir apenas aos conteúdos trabalhados com os alunos, apresentamos também uma parte com cálculo de áreas e volumes utilizando os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, para um maior entendimento e aprofundamento por

parte do professor.

Em seguida, mostramos algumas sequências didáticas, aplicadas aos alunos do 2º ano do ensino médio, onde o aluno pode constatar experimentalmente alguns resultados relacionados com o volume de sólidos. No caso do Princípio de Cavalieri, puderam notar que o volume de prismas permanece o mesmo em diferentes modelos, bastando que as áreas das bases sejam iguais, assim como suas alturas, o mesmo acontecendo com as pirâmides. Estas atividades visaram despertar o interesse no aprendizado da geometria espacial, através de situações onde o aluno pudesse manipular material concreto e construindo os prismas e as pirâmides, perceber as relações existentes entre os sólidos. Houve a dificuldade na manipulação do papelão e nem sempre os sólidos ficam bem feitos, e há algumas divergências entre os valores encontrados, mas a análise e a discussão sobre os erros encontrados e a maneira como devem lidar com esses erros, torna o aprendizado mais produtivo e envolvente.

Na atividade do centro de gravidade os alunos poderão verificar diversas maneiras de encontrar o centro de gravidade de algumas figuras, desenvolvendo um assunto que não é comum de ser trabalhado, mas que é envolvente para o aluno.

Na aplicação do Teorema de Pappus, puderam conhecer uma nova forma de calcular áreas de superfície e volumes de sólidos de revolução.

Com as sugestões de atividades didáticas aqui apresentadas pretendemos incentivar os professores a criar situações de aprendizagem que tornem as aulas mais interessantes e envolventes, mas que sejam atividades que possam ser exploradas mesmo com poucos recursos e materias de fácil aquisição.

Ainda enfatizamos o fato de que o contexto histórico e as atividades práticas são fatores importantes para que o aluno saiba as origens dos temas estudados e se envolvam nas discussões em relação aos resultados obtidos. Com isso, ele conseguirá aprender e fixar melhor os conceitos envolvidos, tornando protagonista de seu aprendizado.

Finalizando, fazendo uma análise pessoal, gostaria de compartilhar a compensadora experiência em participar deste programa e destacar a importância de sempre atualizar-se em nosso conhecimento, procurando novos caminhos para melhorar nossa atuação em sala de aula. No desenvolvimento desse trabalho, foram necessárias muitas pesquisas, muito estudo e muita dedicação.

Através das pesquisas, fui aprendendo e aprofundando sobre os trabalhos de grandes matemáticos e dimensionando as dificuldades e os obstáculos enfrentados por eles no desenvolvimento das teorias matemáticas, descobrindo fatos até então desconhecidos para mim.

Enfim, apesar de todas as dificuldades encontradas, principalmente pela falta de tempo quando se tem de conciliar trabalho e estudo, a satisfação do trabalho concluído é muito compensadora e a certeza do crescimento profissional e as novas opções profissionais que ele representa faz valer a pena.

Referências Bibliográficas

- [1] ASSIS, A. K. T. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Montreal, Apeiron, 2008.
- [2] AVILA, G. *Arquimedes, a esfera e o cilindro*. Rio de Janeiro, Revista do Professor de Matemática, volume10, p. 11-20, SBM, 1987.
- [3] BARRICHELO, L. *Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio - Vídeo Em Equilíbrio*. <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1098>. Acesso em 15/12/2014.
- [4] BONGIOVANNI, V. *As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método da exaustão*. Revista UNIÓN - revista iberoamericana de educacion matematica, no 2, p. 91-110, disponível em < <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/historia/textos/> >, 2005 . Acesso em 02/07/2014.
- [5] BOYER, C. B. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Cálculo - Tradução*. São Paulo, Atual Editora, 1992.
- [6] BOYER, C. B. *História da Matemática - Tradução*. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.
- [7] EVES, H. *Introdução à História da Matemática - Tradução*. Campinas, Editora da Unicamp, 2011.
- [8] EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Geometria - Tradução*. São Paulo, Atual Editora, 1992.
- [9] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo, Vol 2*. Rio de Janeiro, Editora LTC, 1986.
- [10] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo, Vol 1*. Rio de Janeiro, Editora LTC, 2014.
- [11] LEITHOLD, L. *O Cálculo Com Geometria Analítica - Vol. 1*. São Paulo, Harbra Ltda., 1987.
- [12] LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro, SBM, 2006.
- [13] LIMA, E. L. E. A. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. Rio de Janeiro, SBM, 2006.
- [14] MACHADO, N. J. *Caderno do Professor*. SEE-SP, 2014.
- [15] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

- [16] PATERLINI, R. R. *Os "teoremas" de Cavalieri*. Rio de Janeiro, Revista do Professor de Matemática - volume 72 p. 43-47 SBM, 2010.
- [17] PINTO, A. *A teoria dos Indivisíveis. Uma contribuição do padre Bonaventura Cavalieri, tese de Mestrado em História da Ciência*. PUC - SP, 2008.
- [18] REZENDE, E. Q. F. E QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Campinas, Editora da Unicamp, 2012.
- [19] RODRIGUES, C. I. E COSTA, S. I. R. *Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio - Vídeo 3, 2, 1 - mistério*. <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040>. Acesso em 15/12/2014.
- [20] RODRIGUES, C. I. E COSTA, S. I. R. *Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio - Vídeo Um poema, três quebra-cabeças*. <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1156>. Acesso em 15/12/2014.
- [21] RODRIGUES, C. I. E COSTA, S. I. R. *Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio - Volume de Pirâmides*. <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1039>. Acesso em 30/10/2013.
- [22] ROQUE, T. E CARVALHO, J. B. P. *Tópicos da História da Matemática*. Rio de Janeiro, SBM, 2012.
- [23] SERRA, I. *Transmutação do infinito. Colóquio Internacional*. Lisboa, < <http://www.triplov.com/coloquio4/iserra.html> >, 2002. Acesso em 23/10/2013.
- [24] SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria, volume I - Tradução*. São Paulo, Editora McGraw-Hill, 1987.
- [25] SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria, volume II - Tradução*. São Paulo, Editora McGraw-Hill, 1987.