



JOSÉ FRANCISCO MOTA OLIVEIRA

PAVIMENTAÇÕES DO PLANO EUCLIDIANO

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

JOSÉ FRANCISCO MOTA OLIVEIRA

PAVIMENTAÇÕES DO PLANO EUCLIDIANO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: : Prof^a. Dr^a. Anamaria Gomide.

Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Celia Picinin de Mello.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO JOSÉ FRANCISCO MOTA OLIVEIRA, ORIENTADA PELA PROF^A. DR^A. ANAMARIA GOMIDE.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Anamaria Gomide", is written over a horizontal line.

Assinatura do Coorientador

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Celia Picinin de Mello", is written over a horizontal line.

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

OL4p Oliveira, José Francisco Mota, 1968-
Pavimentações do plano euclidiano / José Francisco Mota Oliveira. –
Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Anamaria Gomide.
Coorientador: Celia Picinin de Mello.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Mosaicos (Matemática). I. Gomide, Anamaria, 1949-. II. Mello, Celia Picinin
de, 1950-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Tessellation in the euclidean plane

Palavras-chave em inglês:

Tessellations (Mathematics)

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Anamaria Gomide [Orientador]

Claudina Izepe Rodrigues

Jorge Stolfi


Data de defesa: 21-01-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 21 de janeiro de 2015 e
aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**


Prof.(a). Dr(a). ANAMARIA GOMIDE


Prof.(a). Dr(a). CLAUDINA ZEPE RODRIGUES


Prof.(a). Dr(a). JORGE STOLFI

Abstract

This work was based on an axiomatic study of some tessellation in the plane with both congruent regular polygons and non-congruent ones providing it for the teachers that are interested in developing it during their classroom. Some activities were suggested to be initially carried out as an entertaining way and afterwards having as priority the formalization of some theoretical concepts.

key words: Tessellation, regular polygons.

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo sistemático de algumas pavimentações no plano com polígonos regulares congruentes e não congruentes, propiciando subsídios para o professor que tenha interesse em desenvolvê-lo em sala de aula. Algumas atividades foram sugeridas para serem realizadas inicialmente de forma lúdica e posteriormente objetivando a formalização de alguns conceitos teóricos.

Palavras chave: polígonos regulares, pavimentação do plano.

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xiii
1 Breve relato histórico	2
2 Conceitos Básicos	4
2.1 Axiomas e definições	4
2.1.1 Linha Poligonal	8
2.2 Polígonos	10
2.2.1 Polígonos convexos e não-convexos	10
2.3 Medição de Segmentos de Retas	11
2.4 Ângulo	13
2.4.1 Ângulos Suplementares	14
2.4.2 Ângulos opostos pelo vértice	14
2.5 Congruência	15
2.6 Polígonos Regulares	16
2.6.1 Isometrias no plano	16
2.6.2 Figuras Congruentes	18
2.6.3 Axioma de Paralelas	18
2.6.4 Área	23
3 Pavimentação	27
3.1 Introdução	27
3.2 Pavimentações do plano euclidiano	28
3.2.1 Pavimentação do plano	28
3.2.2 Pavimentações do plano com polígonos regulares congruentes	29
3.2.3 Pavimentações com polígonos regulares não congruentes	30
3.2.4 Outras pavimentações com polígonos regulares	42
4 Outros tipos de pavimentações.	44
4.1 Pavimentações com polígonos não regulares.	44
4.1.1 Pavimentações com quadriláteros não regulares.	44
4.1.2 Pavimentações com pentágonos.	49

4.1.3	Pavimentações de Penrose.	53
4.1.4	Uma pavimentação famosa	54
5	Experimentos em sala de aula	57
5.1	1ª Atividade - Pavimentando o plano com polígonos regulares congruentes	58
5.2	2ª Atividade - Pavimentando o plano com polígonos regulares não congruentes . . .	59
5.3	3ª Atividade - Construindo colméias de abelhas com palitos de fósforo	59
	Referências	62

Ao meu pai Francisco (in memoriam), à minha mãe Shirley e à minha filha Laís.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar sempre ao meu lado, guiando me e fortalecendo em todos os momentos da minha vida.

À minha família, em especial à minha mãe e minha filha, cuja presença é luz e paz em minha vida todos os dias, sempre orando e me dando forças para vencer

À minha companheira Isabel com quem compartilho sentimentos e sonhos.

Agradeço aos meus amigos de trabalho das escolas : EE São Judas Tadeu, EE Ernani Calbucci, Colégio ANGLO de Mogi e de Itapira.

Quero agradecer especialmente às minhas orientadoras Anamaria e Célia, pela incansável presença e colaboração nos trabalhos, norteando essa dissertação de forma tão profissional.

Aos professores do Profmat, a coordenação, meus amigos do curso: Renata, Ana Paula, Adilson, Carla, Míriam, Audino, Cecília, Ariadne, Vicente, Josimilson, Delmo, Janaina, André(s), enfim todos.

Agradeço à Universidade Estadual de Campinas e ao CAPES, pela bolsa de estudo concedida, tornando possível a realização desse mestrado.

Lista de Ilustrações

2.1	Ponto B , reta s e plano α	4
2.2	Segmento de reta \overline{AB}	5
2.3	Semirreta \overrightarrow{AB}	5
2.4	Semirretas.	6
2.5	Ordenação de pontos.	6
2.6	Semiplano.	7
2.7	Semiplanos.	7
2.8	Linhas poligonais	8
2.9	Linha poligonal fechada com três regiões internas.	9
2.10	Linha poligonal fechada simples.	9
2.11	Quadriláteros convexo(a) e não convexo(b).	10
2.12	Alguns polígonos.	11
2.13	Régua graduada.	12
2.14	Ângulo.	13
2.15	Ângulo raso.	13
2.16	Transferidor.	13
2.17	Ângulo α	14
2.18	Ângulos suplementares.	14
2.19	Ângulos opostos pelo vértice.	15
2.20	Segmentos congruentes.	15
2.21	Ângulos congruentes.	16
2.22	Polígonos regulares.	16
2.23	Reflexão.	17
2.24	Rotação de 90° em torno de P	17
2.25	Translação.	18
2.26	As figuras $ABCD$ e $EFHG$ são congruentes.	18
2.27	Ângulo externo \widehat{BAD}	19
2.28	Retas paralelas.	20
2.29	Demonstração de retas paralelas.	20
2.30	Retas paralelas.	21
2.31	Soma dos ângulos internos de um triângulo.	21
2.32	Soma dos ângulos internos de um polígono.	22
2.33	Área de um paralelogramo.	24

2.34	Triângulo equilátero ABC	24
2.35	Triângulo ACD	24
2.36	Hexágono regular $ABCDEF$	25
3.1	Exemplos de pavimentações na natureza: a esquerda epiderme de um réptil e a direita, uma colmeia de abelhas [1].	27
3.2	Pavimentação [1].	28
3.3	A da esquerda não satisfaz a primeira condição e a da direita não satisfaz a segunda	29
3.4	Configuração.	29
3.5	Pavimentações com polígonos regulares congruentes [2]	30
3.6	Configuração impossível para $(3,7,42)$	33
3.7	Configuração impossível para $(4,5,20)$	34
3.8	A configuração $(5, 5, 10)$ não pavimenta o plano.	35
3.9	Configurações que não formam pavimentação [2].	38
3.10	Configurações que pavimentam o plano [2].	41
3.11	42
3.12	Pavimentações do mesmo tipo.	42
3.13	Pavimentações do mesmo tipo.	43
3.14	Pavimentações do mesmo tipo.	43
4.1	Pavimentação com quadrilátero qualquer.	44
4.2	Pavimentação com quadrilátero qualquer.	45
4.3	Pavimentação com quadrilátero qualquer.	45
4.4	Pavimentação com retângulos e paralelogramos.	46
4.5	Construção do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ à partir do quadrilátero $ABCD$	46
4.6	Construção do quadrilátero $A_2B_2C_2D_2$ à partir do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$	47
4.7	Construção do quadrilátero $A_3B_3C_3D_3$ à partir do quadrilátero $A_2B_2C_2D_2$	47
4.8	Pavimentação do plano com um quadrilátero convexo qualquer.	48
4.9	Pavimentação com quadrilátero não convexo.	48
4.10	Tesselação T e sua dual T^*	49
4.11	A Pavimentação T e a dual T^*	50
4.12	A Pavimentação T e a dual T^*	50
4.13	A pavimentação T e a dual T^*	51
4.14	Pavimentação obtida da $(4,4,4,4)$	51
4.15	Pavimentação obtida da configuração $(6, 6, 6)$	52
4.16	Pavimentação obtida da configuração $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$	53
4.17	kite e dart gerados a partir do pentágono regular [3].	53
4.18	Pavimentação aperiódica [3].	54
4.19	Exemplos de base nas figuras de Escher [1].	55
4.20	Xilogravura de Escher: Birds - 1949 [1].	56
5.1	Kit polígonos. [4]	57
5.2	Atividades com polígonos regulares congruentes.	58
5.3	Construção de colméias com palitos de fósforo. [5]	60

Lista de Tabelas

2.1	Nomenclatura de alguns polígonos.	11
3.1	Configurações para $m = 3$ e $n_1 = 3$	32
3.2	Configurações para $m = 3$ e $n_1 = 4$	34
3.3	Configurações para $m = 3$ e $n_1 = 5$	35
3.4	$m = 4$ e $n_1 = 3$	37
3.5	$m = 5$ e $n_1 = 3$	39
3.6	$m = 6$ e $n_1 = 3$	40
5.1	Polígonos regulares.	58

Introdução

Uma das deficiências no ensino da rede pública é geometria, pois quando não é negligenciada é abordada de forma superficial.

O objetivo desse trabalho é abordar pavimentações do plano com polígonos regulares congruentes e polígonos regulares não congruentes, explorando assim conceitos importantes como congruências, ângulos em polígonos e regularidades.

A motivação para a realização desse trabalho se baseia em dois pontos: primeiro a aprendizagem de novos conceitos sobre pavimentações e segundo com o propósito de servir como suporte para professores que queiram desenvolvê-lo em sala de aula.

Evidentemente que esse estudo é apenas um ponto dentro de uma vasta gama de conceitos que são explorados em geometria.

Temos como proposta realizarmos inicialmente um estudo axiomático, que servirá de base para o restante do trabalho. Esse estudo será feito no capítulo 2. No capítulo 1 descreveremos um breve relato histórico da geometria euclidiana.

No capítulo 3 desenvolveremos o tema principal desse trabalho que é a pavimentação do plano com polígonos regulares congruentes e polígonos regulares não congruentes. Nesse capítulo será feita a definição formal de pavimentação e quais condições devem ser obedecidas para a realização da mesma.

No capítulo 4 será feita uma abordagem sobre pavimentações com polígonos não regulares, em especial os quadriláteros e os pentágonos. Mostraremos também as pavimentações de Penrose e algumas das existentes nas obras de *Escher*.

No capítulo 5 apresentaremos algumas sugestões de atividades que deverão ser aplicadas em sala de aula, com o objetivo de explorar alguns conceitos em geometria básica.

Capítulo 1

Breve relato histórico

Os precursores dos recursos e ferramentas que temos hoje, em todos os campos e áreas do conhecimento, surgiram da necessidade do homem em suprir suas ambições em conhecer o meio em que vive, seus recursos, bem como dominá-lo.

Fazendo uma breve descrição histórica da geometria, em ordem cronológica temos que os egípcios se interessaram pelas questões de medidas sem preocupação de demonstrar as fórmulas que utilizavam. Para os antigos egípcios, por exemplo, as fórmulas eram destinadas a dar aos agrimensores e aos fiscais de obras modos apropriados de cálculos. Como a Matemática dessa época não dispunha de notações algébricas, é possível ver em papiros do período de egípcios e babilônios exemplos de cálculos referentes a estas situações particulares. Heródoto, geógrafo e historiador grego que nasceu no século V a.C., admitia que os egípcios teriam “inventado” a Geometria e que tinham ensinado aos geômetras gregos [6]. Na Babilônia, a geometria era essencialmente métrica, isto é, preocupada em calcular áreas, comprimentos e volumes. Para isso eram utilizadas algumas propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, sem que saibamos como chegaram a estes resultados. Para os babilônios as situações de medida abordadas referiam-se às relações de semelhança. Os babilônios perceberam que as relações de semelhança possibilitavam resolver numerosos problemas e entregaram-se a toda espécie de combinações que permitia a aritmética das proporções.

Assim iniciou-se a Geometria, cuja origem vem do grego Geometrien (geo = terra e metrien = medir). As primeiras ideias geométricas surgiram da necessidade do homem efetuar medidas, dentre elas, a dos comprimentos, ângulo e área.

Na Grécia, a geometria adquiriu seu caráter de ciência. Os gregos emprestaram das civilizações anteriores seus conhecimentos matemáticos, astronômicos e transformaram essa herança cultural em uma ciência dedutiva, na qual as noções de demonstração, teorema, definição, axioma, substituíram a característica empírica da matemática utilizada por seus antecessores. Assim, ao lado da matemática ligada às necessidades da sociedade, nasce uma Matemática com características filosóficas que se inscreve em uma pesquisa mais geral, de explicação do mundo [7]. Os primeiros matemáticos gregos foram Tales de Mileto e Pitágoras, personagens de destaque no desenvolvimento da Geometria dedutiva, sendo a matemática pitagórica o elo de transição entre as épocas de Tales e Euclides [6] e [8].

Neste momento destacamos o trabalho do matemático grego *Euclides* que viveu em torno de

300 a.E.C. e compilou a obra *Os elementos* composta de 13 livros [9]. Esta obra expõe resultados de diversos tipos, organizados sistematicamente. Alguns destes resultados são atribuídos a outros geômetras anteriores a Euclides. Este texto teve na história da humanidade o maior número de traduções depois da Bíblia Sagrada. A Geometria como apresentada por Euclides foi o primeiro sistema de ideias desenvolvido pelo homem, em que umas poucas afirmações são admitidas sem demonstração e utilizadas para provar outras mais complexas. Tal sistema é chamado dedutivo. A beleza da geometria, como um sistema dedutivo inspirou homens das mais diversas áreas a organizarem suas ideias da mesma forma [10]. Podemos citar por exemplo o Principia de Isaac Newton e a Ética do filósofo Spinoza [11].

Os Elementos de Euclides influenciaram durante muitos séculos a matemática. Eles se dividem em 3 grandes partes:

- Geometria plana - Livros I-VI;
- Aritmética - Livros VII-IX;
- Geometria espacial - Livros XI- XII.

As definições de Euclides não eram verdadeiras definições, mas sobretudo descrições de intuições. Somente graças a David Hilbert (1862-1943) e mais recentemente, a Gustave Choquet (1915-2006) é que a Geometria euclidiana tomou uma forma rigorosa.

A geometria ensinada na escola secundária (Ensino Médio) é baseada em 8 ou 9 dos 13 volumes que constituem os Elementos.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Axiomas e definições

Precedem às definições de polígonos conceitos primitivos, postulados e os elementos que os formam. Em geometria euclidiana plana esses conceitos, chamados primitivos, são ponto, reta e plano. Denotamos um ponto por letras maiúsculas do nosso alfabeto A, B, C, \dots, Z , uma reta por letras minúsculas a, b, c, d, \dots, z e um plano por letras do alfabeto grego $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$. A figura 2.1 ilustra esses conceitos.



Figura 2.1: Ponto B , reta s e plano α .

Os conceitos primitivos, postulados ou axiomas são aceitos como verdadeiros sem demonstração e servem de base para o desenvolvimento de uma teoria. A seguir descreveremos os conceitos fundamentais que iremos utilizar neste trabalho.

Axioma 2.1.1. Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

Axioma 2.1.2. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Dizemos que duas retas se *intersectam* se elas têm um ponto em comum.

Proposição 2.1.3. Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

Prova. Sejam r e s duas retas distintas. A interseção destas duas retas não pode conter dois (ou mais) pontos, do contrário, pelo axioma 1.1.2 elas coincidiriam. Logo, a interseção de r e s é vazia ou contém apenas um ponto. \square

Os axiomas anteriores são conhecidos como axiomas de incidência e os a seguir são chamados axiomas de ordem pois estabelecem uma relação de ordem entre os pontos de uma mesma reta.

Axioma 2.1.4. Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

Definição 2.1.5. O conjunto constituído por dois pontos distintos A e B de uma reta e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado *segmento de reta* e denotado por \overline{AB} . Os pontos A e B são os *extremos* ou as *extremidades* de \overline{AB} . A figura 2.2 mostra um segmento de reta com extremos A e B .



Figura 2.2: Segmento de reta \overline{AB} .

Definição 2.1.6. Se A e B são pontos distintos de uma reta, o conjunto constituído pelos pontos do segmento \overline{AB} e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C , é chamado de *semirreta* de *origem* A contendo o ponto B , e é representado por \overrightarrow{AB} . O ponto A é então denominado origem da semirreta. A figura 2.3 exibe uma semirreta.

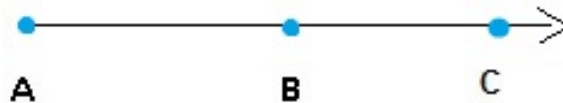


Figura 2.3: Semirreta \overrightarrow{AB} .

Observe que dois pontos A e B determinam duas semirretas, as quais contém o segmento \overline{AB} . Veja a figura 2.4 exibe as semirretas.



Figura 2.4: Semirretas.

Axioma 2.1.7. Dados dois pontos distintos A e B de uma reta, sempre existe um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D . A figura 2.5 exibe este axioma.

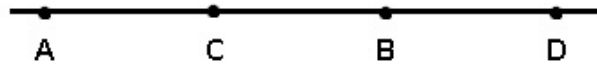


Figura 2.5: Ordenação de pontos.

Uma consequência imediata deste axioma é que entre quaisquer dois pontos de uma reta, existe uma infinidade de pontos. Também é uma consequência dele que uma semirreta \overrightarrow{AB} contém uma infinidade de pontos além daqueles contidos no segmento \overline{AB} .

Considere uma reta r e dois pontos A e B que não pertencem a esta reta. Diremos que A e B estão em um *mesmo lado* da reta r se o segmento \overline{AB} não a intersecta.

Definição 2.1.8. Sejam r uma reta e A um ponto que não pertence a r . O conjunto constituído pelos pontos de r e por todos os pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta r é chamado de *semiplano* determinado por r e contendo A , conforme exhibe a figura 2.6.

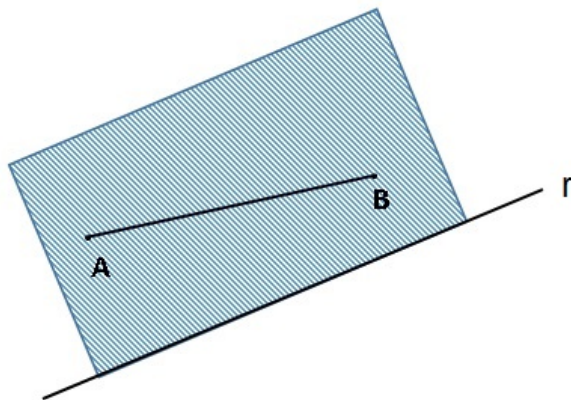


Figura 2.6: Semiplano.

Axioma 2.1.9. Uma reta r determina exatamente dois semiplanos distintos, cuja interseção é a reta r , conforme exhibe a figura 2.7.

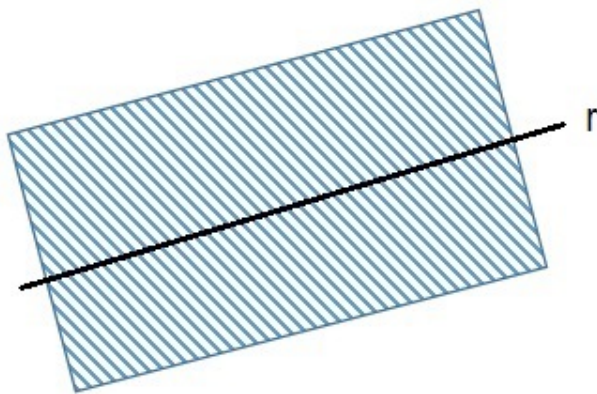


Figura 2.7: Semiplanos.

2.1.1 Linha Poligonal

Linha poligonal é um conceito importante estudado na geometria. São estas linhas que formam os tão conhecidos polígonos que estudamos no ensino fundamental e médio, tais como triângulos, quadrados, pentágonos.

Uma *linha poligonal* (ou poligonal) é uma figura formada por uma sequência de pontos $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$, $n \geq 1$, e pelos segmentos $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$. Os pontos são os vértices da linha poligonal e os segmentos são os seus lados. Observe que uma linha poligonal é formada por um conjunto de segmentos de retas sucessivos. Se $A_0 = A_n$, dizemos que a linha poligonal é *fechada*.

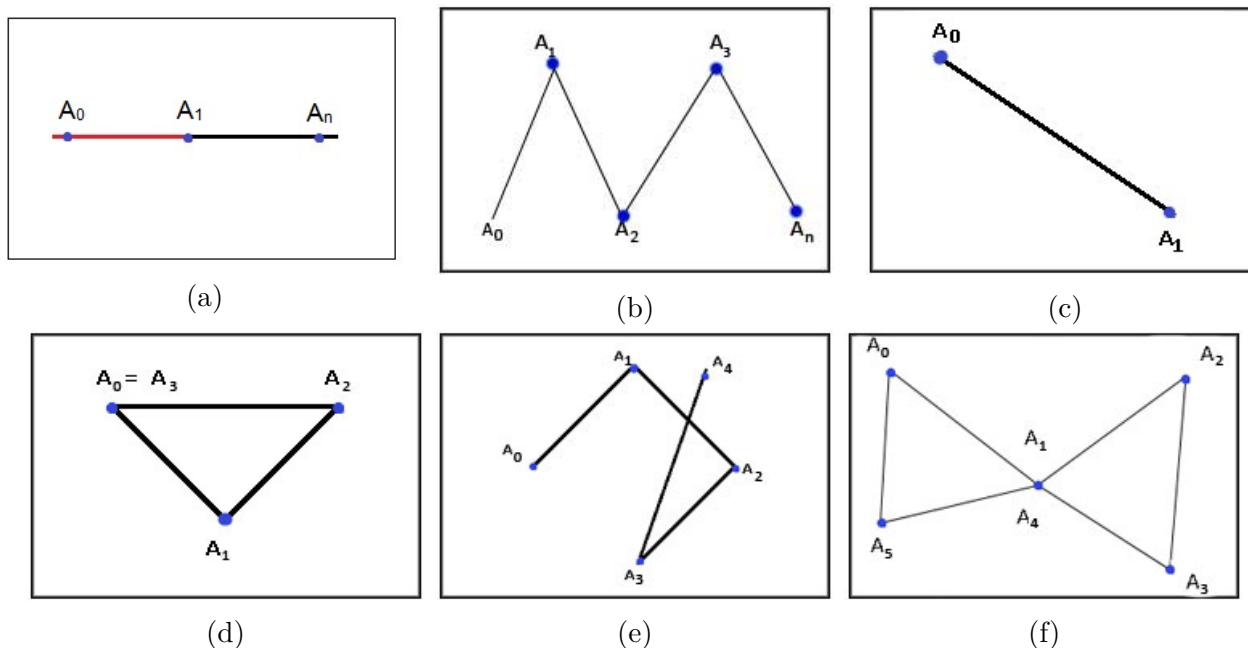


Figura 2.8: Linhas poligonais

Uma linha poligonal é chamada *simples*, se para todo i, j tal que $0 \leq i < j < n$ a interseção dos segmentos A_iA_{i+1} e A_jA_{j+1} é A_j se $j = i + 1$ e \emptyset caso contrário.

As figuras 2.8a, 2.8b, 2.8c exibem linhas poligonais simples abertas, 2.8e, 2.8f linhas poligonais não simples e 2.8d linha poligonal simples fechada.

Observe que os lados de uma linha poligonal simples fechada se intersectam somente em suas extremidades e cada vértice é extremidade de dois lados.

Uma linha poligonal fechada divide o plano em regiões: interna e externa. Se a linha poligonal fechada é simples, a região interna é única. A figura 2.9 exhibe uma linha poligonal fechada não simples com três regiões internas e a figura 2.10 uma linha poligonal fechada simples com exatamente uma região interna.

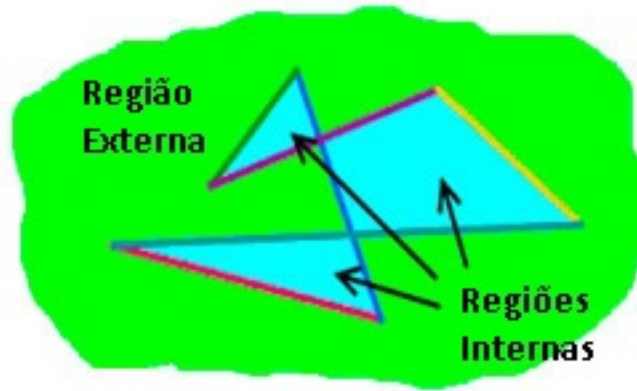


Figura 2.9: Linha poligonal fechada com três regiões internas.

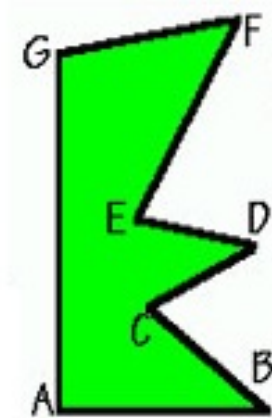


Figura 2.10: Linha poligonal fechada simples.

2.2 Polígonos

A palavra polígono vem do grego onde “poli” significa muitos e “gono” significa ângulo. Os polígonos são muito estudados nos ensinos fundamental e médio e neste trabalho esses conceitos serão essenciais para o estudo das pavimentações.

Um *polígono* é uma linha poligonal em que as seguintes condições são satisfeitas:

1. o primeiro ponto é igual ao último ponto;
2. os lados da linha poligonal se intersectam somente em suas extremidades;
3. cada vértice é extremidade de dois lados;
4. dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Em outras palavras, um polígono é uma linha poligonal simples fechada tal que dois lados consecutivos não pertencem a uma mesma reta. Portanto o mesmo divide o plano em exatamente duas regiões, uma interna e outra externa. O polígono é o *contorno* e a região interna limitada pela linha poligonal é chamada *região poligonal*. Quando nos referirmos a polígonos, no capítulo de pavimentação, faremos abuso de linguagem pois estaremos falando do contorno e da região poligonal.

2.2.1 Polígonos convexos e não-convexos

Dizemos que um polígono é *convexo* se para quaisquer dois vértices consecutivos, A e B , um dos dois semiplanos definidos pela reta AB contém todos os outros vértices do polígono. Caso contrário será chamado não convexo (côncavo). A figura 2.11 exibe um polígono convexo e um polígono não convexo.

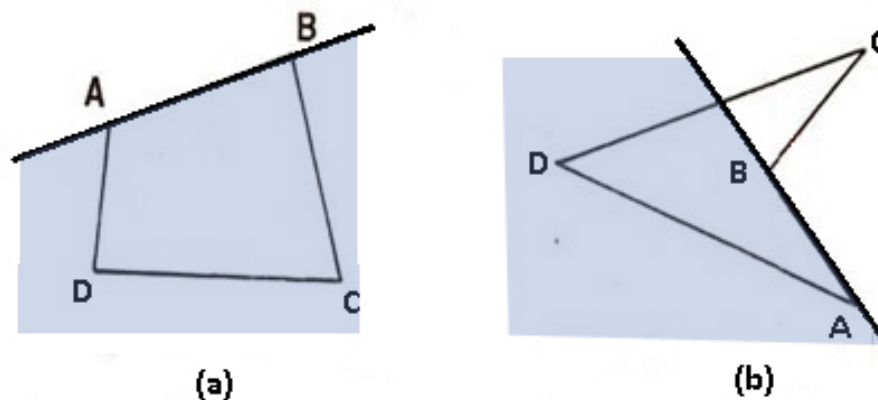


Figura 2.11: Quadriláteros convexo(a) e não convexo(b).

Na tabela 2.1 mostramos a nomenclatura, em relação ao número de lados, de alguns polígonos usualmente explorados no ensino fundamental e médio.

Nome	Número de Lados	Nome	Número de Lados
triângulo	3	quadrilátero	4
pentágono	5	hexágono	6
heptágono	7	octógono	8
eneágono	9	decágono	10
undecágono	11	dodecágono	12
tridecágono	13	tetradecágono	14
pentadecágono	15	hexadecágono	16
heptadecágono	17	octodecágono	18
eneadecágono	19	icoságono	20

Tabela 2.1: Nomenclatura de alguns polígonos.

Alguns polígonos como triângulo, quadrilátero e pentágono são exibidos na figura 2.12.

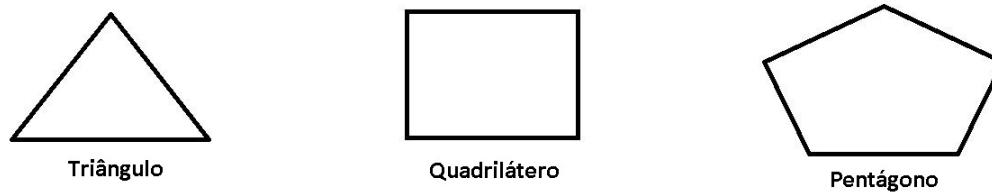


Figura 2.12: Alguns polígonos.

2.3 Medição de Segmentos de Retas

Observando o tamanho de um lápis, a largura de uma folha, ou um determinado objeto, o instrumento que usamos para efetuar a medição dos comprimentos dos segmentos de retas que representam esses objetos é a régua graduada. Na figura 2.13 o segmento \overline{AB} mede 3 cm, o segmento \overline{AC} mede 8 cm, e o segmento \overline{BC} mede 5 cm.

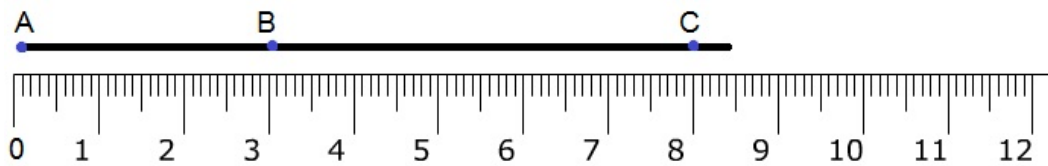


Figura 2.13: Régua graduada.

A cada ponto do segmento \overline{AC} corresponde um número na régua, assim ao ponto A corresponde o número 0, ao B o 3 e ao C o 8. A medida do segmento \overline{BC} é obtida pela diferença $8 - 3 = 5$. A régua poderia ter sido colocada em muitas outras posições e números diferentes corresponderiam aos pontos B e C , no entanto, a diferença entre B e C seria sempre 5, que é a medida do segmento \overline{BC} . Em geometria essas idéias de posição de um ponto em relação a uma régua graduada e comprimento de segmentos são embasadas através de axiomas.

Axioma 2.3.1. A todo par de pontos do plano corresponde um número maior do que ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.

O número a que se refere este axioma é chamado de *distância* entre dois pontos ou é referido como o *comprimento* do segmento determinado pelos dois pontos. Está implícito no enunciado do axioma a escolha de uma unidade de medida que será fixada de agora em diante ao longo destas notas.

Axioma 2.3.2. Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre esses números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Ao aplicarmos este axioma, o número que corresponde a cada ponto é denominado *coordenada* desse ponto. Pelo axioma 1.3.1, representando as coordenadas dos pontos A e B por a e b respectivamente, denotaremos por $|\overline{AB}|$ comprimento do segmento \overline{AB} cujo valor é dado pelo valor absoluto da diferença entre a e b . Portanto

$$|\overline{AB}| = |b - a|.$$

Axioma 2.3.3. Se o ponto C encontra-se entre A e B então

$$|\overline{AC}| + |\overline{CB}| = |\overline{AB}|.$$

Com a introdução dos axiomas 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 podemos relacionar a ordenação de pontos de uma reta, introduzida através dos axiomas 2.1.4 e 2.1.7, com a ordem dos números reais.

2.4 Ângulo

Chamamos de *ângulo* a figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são chamadas de *lados* e a origem comum de *vértice* do ângulo. Podemos representar um ângulo de várias maneiras distintas. O ângulo da figura 2.14 por exemplo pode ser designado por $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$. Ao utilizarmos esta notação a letra indicativa do vértice deve sempre aparecer entre as outras duas, as quais representam pontos das semirretas que formam o ângulo.

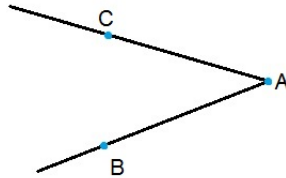


Figura 2.14: Ângulo.

Um ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta é chamado de *ângulo raso*, conforme mostra a figura 2.15.

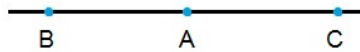


Figura 2.15: Ângulo raso.

Quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice, podemos usar apenas a letra designativa do vértice para representar o ângulo. Na figura 2.14 o ângulo pode ser representado por \hat{A} . Em qualquer dos dois casos considerados a letra designativa do vértice sempre levará um acento circunflexo.

Os ângulos são medidos em graus com o auxílio de um transferidor. Na figura 2.16, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 40° , isto é $|A\hat{B}C| = 40^\circ$.

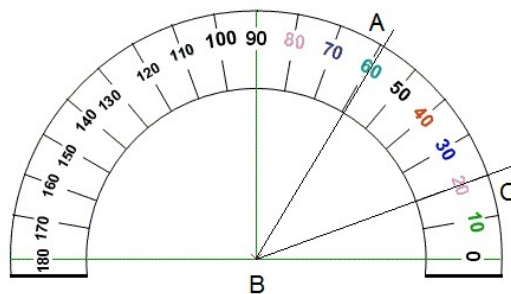


Figura 2.16: Transferidor.

Também é comum a utilização de letras gregas para representação de ângulos. Neste caso é conveniente escrever a letra designativa do ângulo próxima do seu vértice como indicado na figura 2.17.

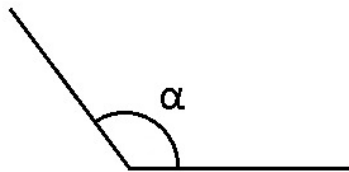


Figura 2.17: Ângulo α .

2.4.1 Ângulos Suplementares

Dois ângulos são chamados de *suplementares* se a soma das suas medidas é 180° . O *suplemento* de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados. A figura 2.18 mostra dois ângulos suplementares $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$, isto é $|A\hat{O}B| + |A\hat{O}C| = 180^\circ$.

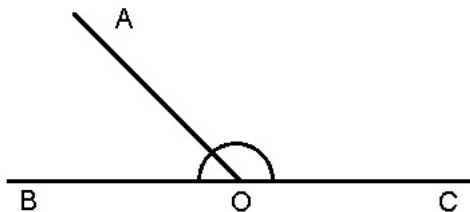


Figura 2.18: Ângulos suplementares.

2.4.2 Ângulos opostos pelo vértice

Quando duas retas distintas se intersectam, formam-se quatro ângulos, como indicado na figura 2.19. Os ângulos $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são *opostos pelo vértice*, da mesma forma os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$.

Proposição 2.4.1. Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

Prova. De fato, se $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ são opostos pelo vértice, então eles têm o mesmo suplemento $A\hat{O}D$. Logo $|A\hat{O}B| + |A\hat{O}D| = 180^\circ$ e $|D\hat{O}C| + |A\hat{O}D| = 180^\circ$. Portanto

$$|A\hat{O}B| = 180^\circ - |A\hat{O}D| = |D\hat{O}C|.$$

□

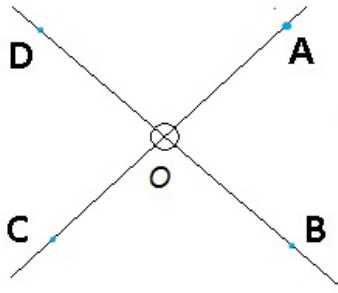


Figura 2.19: Ângulos opostos pelo vértice.

Os ângulos também podem ser expressos nas unidades radianos e graus, porém para o desenvolvimento deste trabalho nos limitaremos ao uso do grau. Segundo [11], o grau é uma invenção dos babilônios. Para este povo que utilizava um sistema de numeração de base 60, foi muito natural dividir o círculo em 360 partes (grau), e cada uma destas 60 partes (minuto) e repetir o processo para essas subpartes. Para Euclides “um ângulo plano é a inclinação recíproca de duas retas que num plano tem um extremo comum e não estão em prolongamento”. Euclides admitia um ângulo raso, definido como retilíneo, como sendo o ângulo cujos lados estão na mesma linha reta. Filósofos gregos discutiam se o conceito de ângulo seria considerado uma quantidade, uma qualidade ou uma relação, categorias criadas por Aristóteles. Proclus, citando seu mestre Sirianus, diz que é uma combinação dos três pois “ necessita da quantidade envolvida na magnitude, necessita da qualidade que lhe é dada por sua forma, e da relação que subsiste entre as retas e os planos que os limitam” [12].

2.5 Congruência

Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são *congruentes* se $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$. Analogamente dois ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes se $|\hat{A}| = |\hat{B}|$. O símbolo de congruente é dado por “ \cong ”, porém para facilitar nossa notação usaremos “ $=$ ” para congruente. Na figura 2.20 temos que $\overline{AB} = \overline{CD}$, pois ambos medem 5 cm e na figura 2.21 $\hat{A} = \hat{E}$ pois ambos medem 40° .

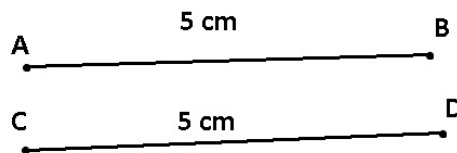


Figura 2.20: Segmentos congruentes.

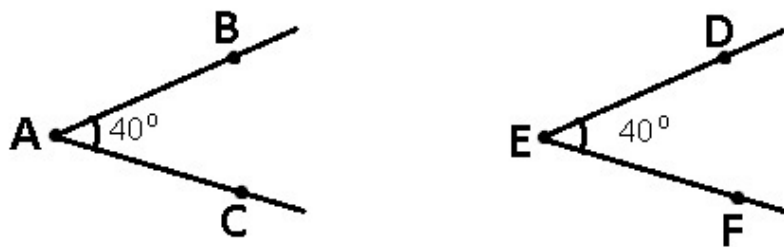


Figura 2.21: Ângulos congruentes.

2.6 Polígonos Regulares

Um polígono é *regular* se seus ângulos internos são congruentes e se seus lados são congruentes. Para $n \geq 5$ acrescentamos a palavra regular ao nome do polígono, por exemplo um pentágono será chamado de *pentágono regular*, um hexágono de *hexágono regular*. O triângulo e o quadrilátero recebem os nomes especiais de triângulo equilátero e quadrado, respectivamente. A figura 2.22 exibe alguns polígonos regulares.

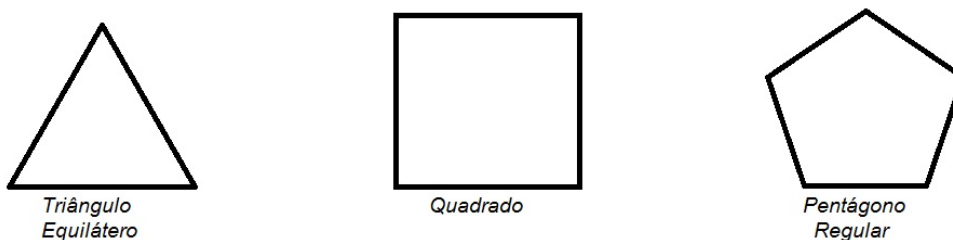


Figura 2.22: Polígonos regulares.

2.6.1 Isometrias no plano

Isometria é uma palavra de origem grega, onde “iso” significa igual e “metria” medida. *Isometria* é uma transformação geométrica¹ de uma figura em outra, em que são conservadas as distâncias entre pontos. No caso em que as figuras são polígonos, as medidas dos ângulos e os comprimentos dos lados são conservados. Essas transformações no plano são reflexões, translações, rotações e composição de uma reflexão e uma translação com deslocamento paralelo à reta da reflexão, ou sejam, reflexões deslizantes.

Dada uma reta r , uma *reflexão* é uma transformação geométrica que a cada ponto C não pertencente a r corresponde um ponto C' , tal que $\overline{CC'}$ é perpendicular a r e a distância de C a r , é igual a distância de C' a r , e se C pertence a r , $C=C'$ conforme exibido na figura 2.23.

Rotação é o movimento de uma figura por um ângulo dado, em torno de um ponto central, chamado de centro de rotação. A figura final é obtida através de uma figura inicial onde é mantido

¹Uma transformação geométrica de uma figura em outra é uma correspondência 1-1 entre seus pontos.

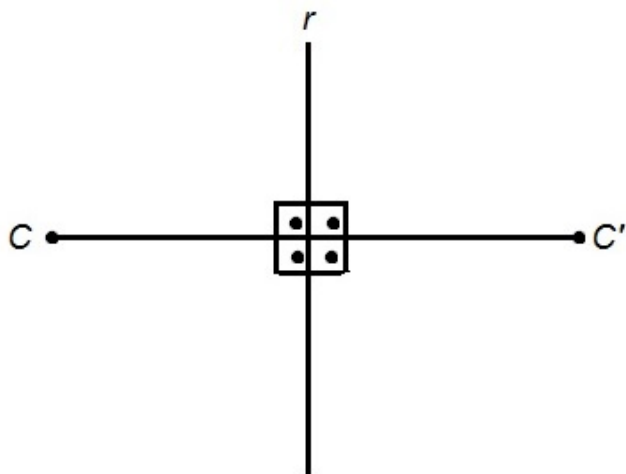


Figura 2.23: Reflexão.

fixo um ponto (o centro de rotação) e todos os outros sofrem deslocações ao longo do ângulo de uma certa amplitude, veja figura 2.24.

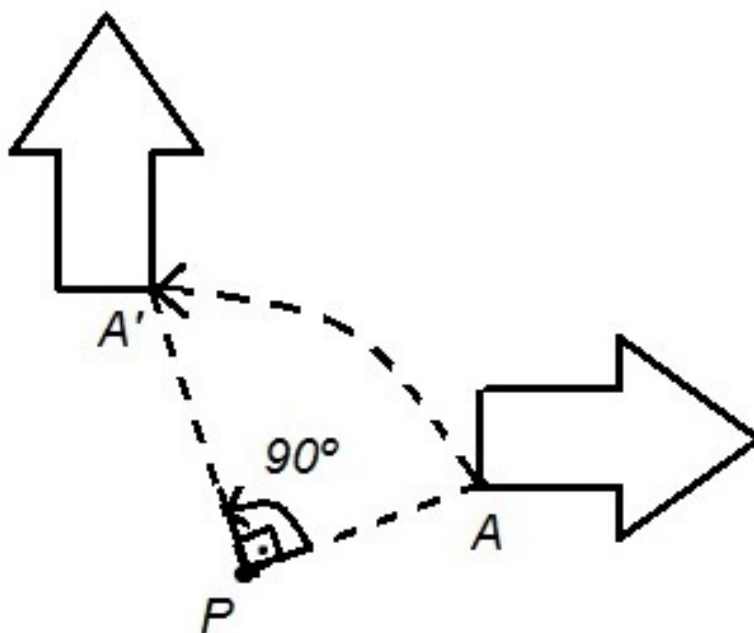


Figura 2.24: Rotação de 90° em torno de P .

Translação é uma transformação geométrica que desloca a figura , segundo uma direção, um sentido e um comprimento. A translação leva uma figura em outra, congruente a ela. Tal isometria é exibida pela figura 2.25, onde P e P' são pontos simétricos por isometria translacional na direção de r e comprimento u .

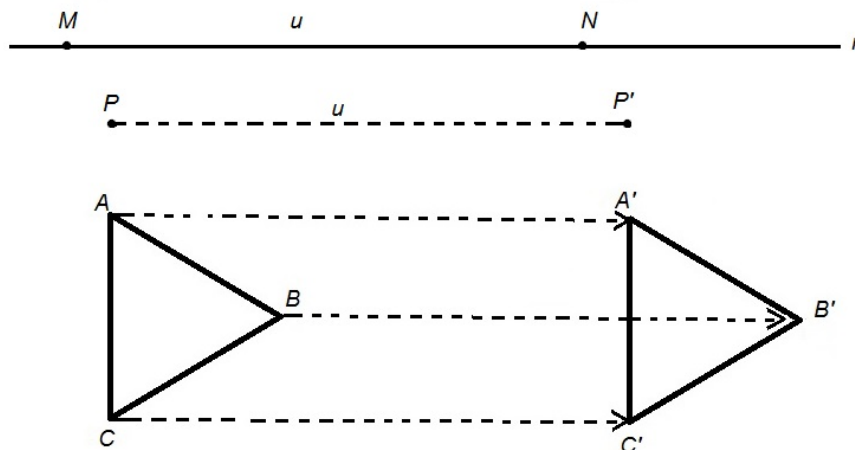


Figura 2.25: Translação.

2.6.2 Figuras Congruentes

Como já foi definido anteriormente temos que dois **segmentos** são **congruentes** se possuem a mesma medida ou comprimento e dois **ângulos** são **congruentes** se possuem a mesma medida. reflexão deslizante Duas figuras planas são congruentes se uma delas pode ser obtida da outra por movimentos que preservam a forma e as medidas da figura. Esses movimentos são rotação, translação, reflexão e reflexão deslizante. Considerando os polígonos da figura 2.26 podemos deslocar o quadrilátero $EFHG$ fazendo-o coincidir com o quadrilátero $ABCD$, através de reflexões e translações exibidos também na figura 2.26. Portanto $ABCD$ é congruente a $EFHG$, e será denotado por $ABCD \cong EFHG$. Observe que os ângulos correspondentes são congruentes ($\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$, $\hat{C} = \hat{H}$, $\hat{D} = \hat{G}$) e os lados correspondentes são congruentes ($\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FH}$, $\overline{CD} = \overline{HG}$, $\overline{AD} = \overline{EG}$).

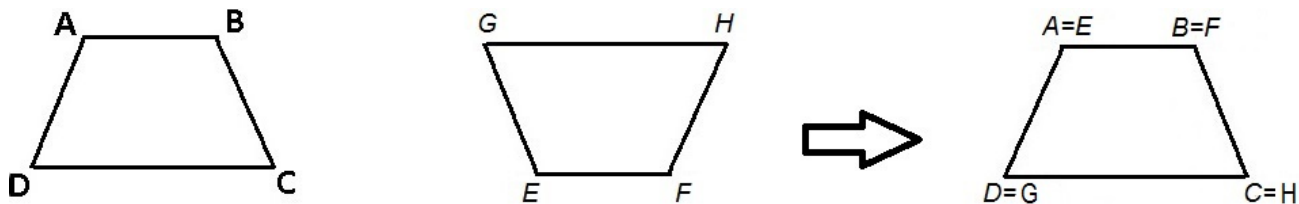


Figura 2.26: As figuras $ABCD$ e $EFHG$ são congruentes.

2.6.3 Axioma de Paralelas

Com a inclusão do axioma de paralelas, provaremos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Axioma 2.6.1. Por um ponto fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela a r .

Como consequência imediata desse axioma tem-se:

Proposição 2.6.2. Se a reta r é paralela às retas s e t então s e t são paralelas ou coincidentes.

Prova. Suponhamos que s e t não são paralelas. Logo existe um ponto P , pertencente às retas s e t , que não pertence a r , pois s e t são paralelas a r . Então $s = t$, pois pelo axioma 2.6.1 existe uma única reta passando por P e paralela à r . Portanto r e s são paralelas ou coincidentes. \square

Corolário 2.6.3. Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.

Prova. Sejam s e t retas paralelas. Se uma reta r cortasse s e não cortasse t , então r e t seriam paralelas. Assim t seria paralela a r e s . Como r e s não são paralelas entre si e nem coincidentes, temos uma contradição com a proposição anterior. Logo r corta também t . \square

Para a demonstração da proposição a seguir necessitamos definir ângulo interno, ângulo externo e enunciar o teorema do ângulo externo.

Definição 2.6.4. Se ABC é um triângulo, os seus ângulos \widehat{ABC} , \widehat{BCA} e \widehat{CAB} são chamados de ângulos internos ou simplesmente de ângulos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo.

Na figura 2.27 o ângulo \widehat{BAD} é um ângulo externo do triângulo ABC adjacente ao ângulo interno \widehat{CAB} .

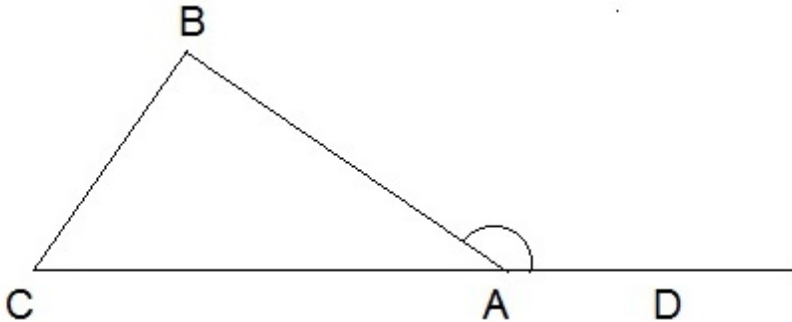


Figura 2.27: Ângulo externo \widehat{BAD} .

Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Proposição 2.6.5. Sejam r , s , α e β como na figura 2.28. Se $\alpha = \beta$, então as retas r e s são paralelas.

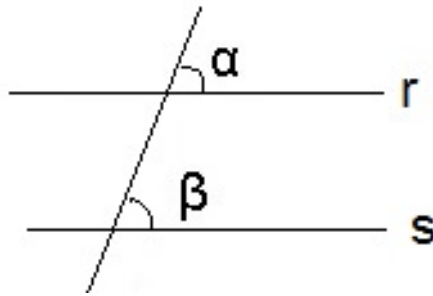


Figura 2.28: Retas paralelas.

Prova. De fato, se r intersectasse s em algum ponto P , como representado na figura 2.29 formar-se-ia um triângulo ABP . Neste triângulo α é um ângulo externo e β é um ângulo interno não adjacente a α , ou vice-versa. Assim pelo teorema do ângulo externo teríamos $\alpha \neq \beta$ o que contradiz nossa hipótese. Portanto r e s não se intersectam. \square

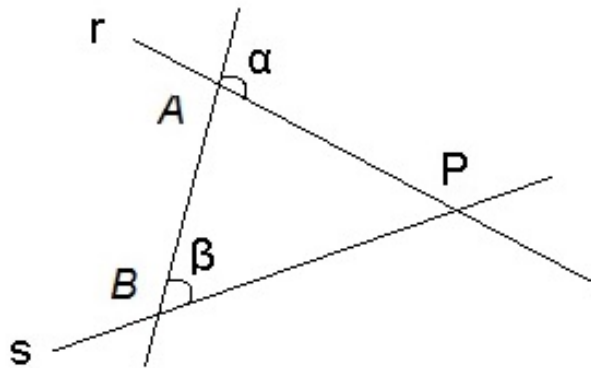


Figura 2.29: Demonstração de retas paralelas.

A partir desse resultado observamos que quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal formam-se ângulos chamados *correspondentes*. Na figura 2.30, os ângulos correspondentes são a e e , d e h , b e f e c e g . Observe que $a = c$, $b = d$, $e = g$ e $f = h$ por serem ângulos opostos pelo vértice. Como consequência se $a = e$ então todos os outros pares de ângulos correspondentes são congruentes. Além disso, temos que $|d| + |e| = 180^\circ$. Inversamente se $|d| + |e| = 180^\circ$, então $a = e$.

Pelo axioma 2.6.1 podemos também mostrar que a inversa dessa proposição é verdadeira. Isto é, se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são iguais.

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.6.6. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Prova. Seja ABC um triângulo. Pelo vértice C traçamos uma reta r paralela ao lado \overline{AB} . Nomeamos os ângulos formados no vértice C , como indicado na figura 2.31 :

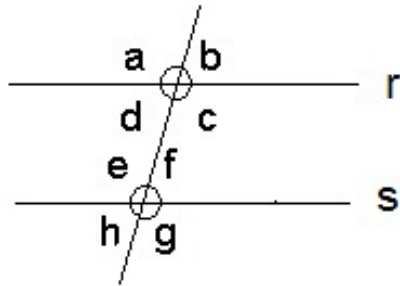


Figura 2.30: Retas paralelas.

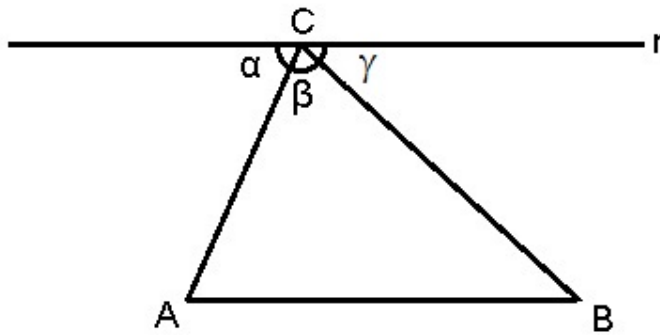


Figura 2.31: Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Temos que $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 180^\circ$. Como \overline{AC} é transversal às duas paralelas, temos que $\alpha = \hat{A}$ pois é uma consequência da proposição anterior. Da mesma forma como \overline{BC} é transversal às paralelas temos $\hat{B} = \gamma$. Portanto

$$|\hat{A}| + |\hat{B}| + |\beta| = 180^\circ.$$

□

A seguir discutiremos a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

Proposição 2.6.7. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por

$$S = (n - 2)180^\circ$$

onde S é a soma dos ângulos internos e n representa o número de lados do polígono.

Prova. Considere o polígono $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ na figura 2.32.

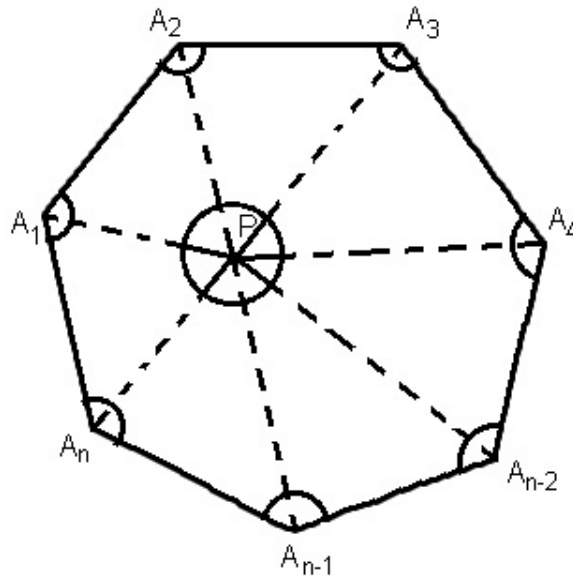


Figura 2.32: Soma dos ângulos internos de um polígono.

Vamos escolher um ponto P no interior do polígono. Ligando P a todos os vértices do polígono obtemos n triângulos, conforme exibido na figura 2.32. A soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos, menos os do vértice P nos dá a soma das medidas dos ângulos internos deste polígono de n lados. Temos então

$$S = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$$

ou seja

$$S = (n - 2).180^\circ.$$

□

Os ângulos internos de um polígono regular são congruentes. Como consequência da proposição 2.6.7 temos que a medida de um ângulo interno de um polígono regular é dada por:

$$\alpha_n = \frac{(n - 2).180^\circ}{n}. \quad (2.6.1)$$

2.6.4 Área

Introduzimos e definimos o conceito de área de regiões poligonais, através dos seguintes axiomas:

Axioma 2.6.8. A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.

Este número é chamado *área* da região poligonal.

Axioma 2.6.9. Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

Axioma 2.6.10. Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes tem áreas iguais.

Axioma 2.6.11. Se ABCD é um retângulo, então sua área é dada pelo produto $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$

Vamos determinar agora as áreas de algumas regiões poligonais simples, a partir destes axiomas. Considere o paralelogramo ABCD. O comprimento de \overline{AB} será denotado por b , e o comprimento de um segmento ligando as retas que contém \overline{AB} e \overline{CD} e que é perpendicular a ambas será denotado por h . Esse segmento é chamado *altura* do paralelogramo relativo ao lado \overline{AB} . Veja a figura 2.33.

Proposição 2.6.12. A área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.

Prova. Provaremos que a área de um paralelogramo é $b \cdot h$. Na figura 2.33 trace, a partir dos pontos A e B , dois segmentos \overline{AE} e \overline{BF} , perpendiculares à reta que contém \overline{CD} . O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $|\overline{AB}| \cdot |\overline{BF}|$, a qual pode ser denotada por $b \cdot h$. Como os triângulos ADE e CBF são congruentes, suas áreas são iguais pelo axioma 2.6.10. □

Pelo axioma 2.6.9 temos

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(ADE) \\ &= \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(CBF) \\ &= \text{Área}(ABFE) \\ &= b \cdot h \end{aligned}$$

□

A seguir demonstraremos a fórmula da área do triângulo equilátero e do hexágono regular. Apesar de não deduzirmos axiomáticamente estas fórmulas, precisamos destes resultados para as atividades que descreveremos no capítulo 5.

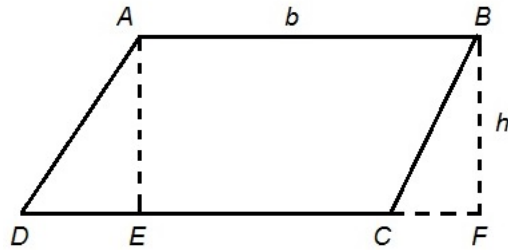


Figura 2.33: Área de um paralelogramo.

Proposição 2.6.13. A área de um triângulo equilátero é dada por $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, sendo l a medida do comprimento do seu lado.

Prova. Seja um triângulo equilátero ABC de lado l conforme a figura 2.34. Pelo vértice A traçamos uma reta r paralela ao lado \overline{BC} e sobre o lado \overline{BC} traçamos a reta s paralela à reta r . A partir dos pontos A e C traçamos segmentos perpendiculares às retas r e s , obtendo os pontos M e D respectivamente. Os segmentos \overline{AM} e \overline{CD} são as alturas dos triângulos ABC e ADC respectivamente. Observe que esses triângulos são congruentes, conforme mostra a figura 2.35.

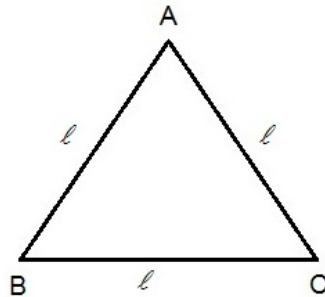


Figura 2.34: Triângulo equilátero ABC .

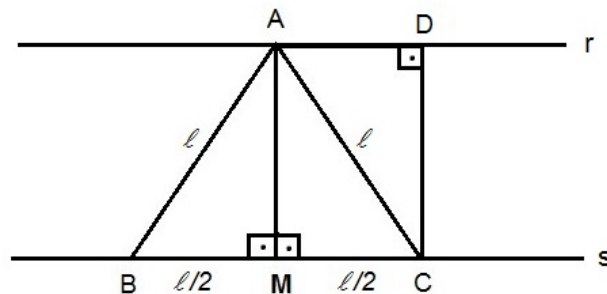


Figura 2.35: Triângulo ACD .

Pelo Teorema de pitágoras temos

$$|\overline{AM}|^2 + |\overline{MC}|^2 = |\overline{AC}|^2.$$

Como $|\overline{MC}| = \frac{l}{2}$ e $|\overline{AC}| = l$ segue

$$|\overline{AM}|^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$|\overline{AM}|^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$|\overline{AM}| = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Portanto a área do triângulo equilátero ABC é

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(AMCD)$$

$$\text{Área}(ABC) = |\overline{MC}| |\overline{AM}|$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

□

Proposição 2.6.14. A área de um hexágono regular é dada por $\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$, sendo l a medida do comprimento do seu lado.

Prova. Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de l lados, exibido na figura 2.36.

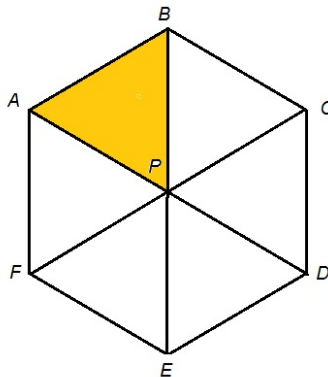


Figura 2.36: Hexágono regular $ABCDEF$.

Traçando as diagonais que passam pelo centro do polígono, elas se encontram num ponto P , dividindo o hexágono em seis triângulos equiláteros congruentes. Desta forma a área do hexágono pode ser escrita como

$$\text{Área}(ABCDEF) = 6 \cdot \text{Área}(ABP)$$

$$\text{Área}(ABCDEF) = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Área}(ABCDEF) = 3 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{2}$$

□

Capítulo 3

Pavimentação

3.1 Introdução

Pavimentar é uma técnica para cobrir superfícies planas com figuras, sejam elas regulares ou não, colocando-as lado a lado sem deixar regiões descobertas. No século VI a.C. os pitagóricos conheciam o valor da soma dos ângulos internos de um polígono regular e a partir daí concluíram que só era possível pavimentar o plano com três polígonos regulares, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Embora essa técnica já exista há séculos é associada a Johannes Kepler, matemático e físico alemão por volta de 1600, os primeiros registros sobre a teoria das pavimentações. No século XX, matemáticos, não matemáticos, cristalógrafos publicaram um grande número de trabalhos científicos, havendo um maior interesse e desta forma ampliando a investigação e divulgação da importância da pavimentação no ensino. Dentre os principais divulgadores do assunto destaca-se o matemático Martin Gardner em sua coluna “Jogos Matemáticos”, na “Scientific American”. Observando elementos na natureza podemos associar uma colmeia de abelhas, uma epiderme de réptil como alguns exemplos de pavimentações, conforme exibido na figura 3.1.



Figura 3.1: Exemplos de pavimentações na natureza: a esquerda epiderme de um réptil e a direita, uma colmeia de abelhas [1].

A beleza desses padrões existentes pela regularidade, simetria e harmonia, já encantava e despertava o homem desde os tempos mais remotos, seja na decoração de objetos como cerâmica, tecidos, em vitrais e paredes de templos. Diversas civilizações, como a inca, a egípcia e islâmica, e povos indígenas já empregavam essa técnica em artesanato, utensílios domésticos e até pinturas no próprio corpo. Nos dias atuais observamos exemplos de pavimentação em pisos, azulejos nas paredes, determinados forros no teto, fachadas de prédio, etc.

Alguns conceitos básicos são importantes no desenvolvimento de pavimentação, como linha poligonal, interior e exterior de uma linha poligonal fechada, polígonos convexo e não convexo, isometrias. Tais conceitos já foram abordados e definidos no capítulo 2, desta forma, podemos prosseguir para definir algumas tesselações no plano euclidiano.

3.2 Pavimentações do plano euclidiano

3.2.1 Pavimentação do plano

É chamada pavimentação do plano euclidiano, a divisão do plano em uma quantidade enumerável de polígonos de modo que a união de todos esses polígonos constitui todo o plano, e a interseção de dois desses polígonos ou é vazia ou é um vértice ou está contida em uma linha poligonal. Verificamos tal pavimentação na figura 3.2.



Figura 3.2: Pavimentação [1].

O objetivo deste trabalho é abordar e desenvolver as pavimentações do plano com polígonos regulares. Se a pavimentação utiliza polígonos regulares congruentes temos uma *pavimentação regular* e se os polígonos regulares são não congruentes temos uma *pavimentação quase regular ou arquimediana*. Ambas as pavimentações devem obedecer as seguintes condições: a) a interseção entre dois desses polígonos é sempre um lado ou um vértice, ou é vazia; b) a distribuição de polígonos ao redor de um vértice é sempre a mesma. Essas restrições eliminam pavimentações exibidas pela figura 3.3.

Definimos uma *configuração* como uma sequência do tipo (l_1, l_2, \dots, l_m) para indicar uma pavimentação onde cada vértice tem m polígonos e cada um com l_i lados, sendo $l_i \geq 3$ e $1 \leq i \leq m$. Por exemplo uma sequência do tipo $(6,6,6)$ indica 3 polígonos em torno de um vértice, cada um com 6 lados. Podemos também ter uma configuração com polígonos regulares, não necessariamente congruentes, como $(3,6,3,6)$ que indica dois polígonos de 3 lados e dois polígonos de 6 lados em torno de um vértice. A figura 3.4 exhibe essas duas configurações. Observe que $(3,6,3,6) = (6,3,6,3)$ (permutações cíclicas não alteram), mas $(4, 4, 3, 6) \neq (4, 4, 6, 3)$.

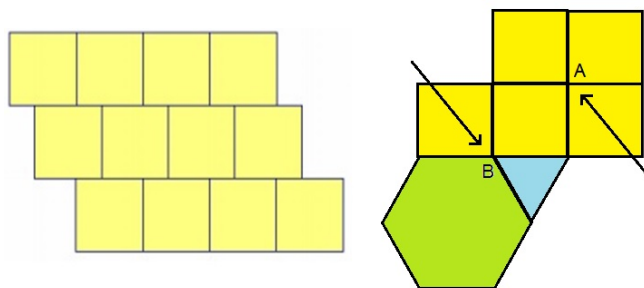


Figura 3.3: A da esquerda não satisfaz a primeira condição e a da direita não satisfaz a segunda

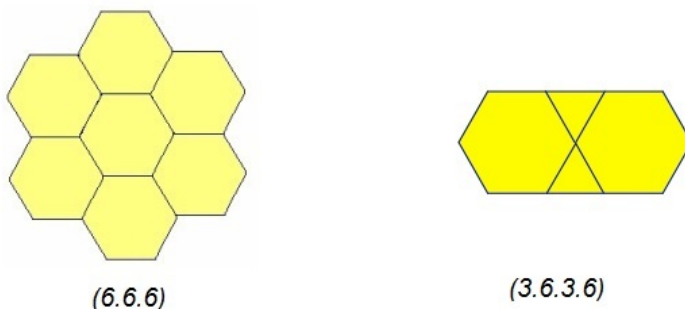


Figura 3.4: Configuração.

3.2.2 Pavimentações do plano com polígonos regulares congruentes

Uma questão que surge naturalmente é: será que, para todo $n \geq 3$, é possível pavimentar o plano utilizando apenas polígonos regulares congruentes de n lados? Observamos que no revestimento de pisos é mais comum a utilização de pisos quadrados, que são polígonos regulares. Será que é possível a utilização de outros polígonos regulares congruentes para cobrir todo o plano, e se existem quais são?

Em torno de um vértice a soma dos ângulos dos polígonos posicionados lado a lado devem perfazer 360° . Como vimos no capítulo 2 a medida de um ângulo interno de um polígono regular de n lados é:

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

Suponha que sejam posicionados m , $m \geq 3$, polígonos regulares congruentes de n lados, $n \geq 3$, ao redor de um vértice. Logo,

$$m \frac{[180^\circ(n-2)]}{n} = 360^\circ. \quad (3.2.1)$$

Simplificando a equação, temos:

$$m = \frac{2n}{n-2}. \quad (3.2.2)$$

Desde que $m \geq 3$, temos a desigualdade:

$$\frac{2n}{n-2} \geq 3 \quad (3.2.3)$$

que resulta em $n \leq 6$. Como $n \geq 3$, temos $3 \leq n \leq 6$. Com isso concluímos que os possíveis polígonos regulares são: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular.

Observe que substituindo n por 3, 4, 5 e 6 na equação 3.2.2 obtemos respectivamente $m = 6, 4, \frac{10}{3}$ e 3 polígonos em cada vértice. Observe que não é possível pavimentar utilizando o pentágono regular, pois ele é o único polígono regular, dentre os citados, que não utiliza uma quantidade inteira ao redor de um vértice. A figura 3.5 exibe as configurações possíveis.

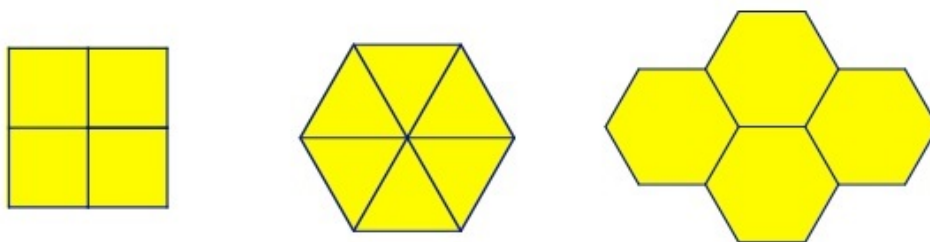


Figura 3.5: Pavimentações com polígonos regulares congruentes [2]

3.2.3 Pavimentações com polígonos regulares não congruentes

Vamos analisar agora a pavimentação em torno de um vértice com polígonos regulares não congruentes. Denotaremos por α_i o ângulo interno de um polígono regular de i lados, $i \geq 3$. Consideraremos aleatoriamente a pavimentação do plano com três polígonos regulares quaisquer, por exemplo um pentágono, um hexágono e um eneágono.

$$\alpha_5 = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

$$\alpha_6 = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ.$$

$$\alpha_9 = \frac{(9-2) \cdot 180^\circ}{9} = 140^\circ.$$

Fazendo a soma dos ângulos internos desses polígonos obtemos 368° , que não satisfaz a condição para uma pavimentação que é 360° . Se continuássemos tentando com outros valores talvez encontrássemos uma pavimentação. Porém vamos lançar mão de alguns cálculos para solucionar sistematicamente o problema da pavimentação. Vamos estudar separadamente cada uma das quatro possibilidades: três, quatro, cinco ou seis polígonos regulares em torno de cada vértice.

A análise que faremos a seguir determina quais e quantos polígonos são necessários ao redor de cada vértice. Entretanto para cada configuração será verificada dentre as suas permutações quais representam pavimentação.

- **1º Caso:** $m = 3$, isto é, três polígonos regulares em cada vértice. Seja n_i o número de lados de cada um dos polígonos em cada vértice, para $i = 1, 2, 3$. A soma das medidas dos ângulos internos desses polígonos em torno de um vértice satisfaz a equação

$$\frac{180^\circ(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{180^\circ(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{180^\circ(n_3 - 2)}{n_3} = 360^\circ.$$

Simplificando temos:

$$\begin{aligned} \frac{(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{(n_3 - 2)}{n_3} &= 2, \text{ e} \\ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Sem perda de generalidade seja $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, o que equivale a $\frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3}$. Logo

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{n_1} \Rightarrow n_1 \leq 6.$$

Então $3 \leq n_1 \leq 6$. Portanto iremos analisar separadamente todas as possibilidades, isto é, se ao redor de um vértice tivermos pelo menos um triângulo equilátero, ou um quadrado, ou um pentágono ou um hexágono.

- Triângulo equilátero, $n_1 = 3$. Substituindo-se $n_1 = 3$ em 3.2.4, temos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6}.$$

Como $\frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3}$ temos que

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{n_2}.$$

Portanto

$$n_2 \leq 12. \tag{3.2.5}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{n_2} = \frac{n_2 - 6}{6n_2}.$$

Como $\frac{1}{n_3} > 0$ temos que $n_2 - 6 > 0$, ou seja,

$$n_2 \geq 7. \tag{3.2.6}$$

Como consequência de 3.2.5 e 3.2.6 segue-se que $7 \leq n_2 \leq 12$.

Substituindo-se n_2 por 7,8,9,10,11 e 12, na equação 3.2.4 tem-se $n_2 = 7 \Rightarrow n_3 = 42$, $n_2 = 8 \Rightarrow n_3 = 24$, $n_2 = 9 \Rightarrow n_3 = 18$, $n_2 = 10 \Rightarrow n_3 = 15$, $n_2 = 11 \Rightarrow n_3 = \frac{66}{5}$, $n_2 = 12 \Rightarrow n_3 = 12$.

Porém para $n_2 = 11$ tem-se $n_3 = \frac{66}{5}$, que não satisfaz, pois não representa um número inteiro de polígonos. Na tabela 3.1 temos os possíveis valores para $n_1 = 3$.

$m = 3$	n_1	n_2	n_3
	3	7	42
	3	8	24
	3	9	18
	3	10	15
*	3	12	12

Tabela 3.1: Configurações para $m = 3$ e $n_1 = 3$.

Apenas a configuração indicada com * define tesselação para $n_1 = 3$. Vamos mostrar porque as demais configurações, da tabela 3.1, não representam pavimentações. Considere a configuração (3,7,42). Na figura 3.6 essa configuração está representada ao redor dos vértices P_1 e P_2 . Logo a região A é um polígono de 7 lados e a região B é um polígono de 42 lados. Se (3,7,42) origina uma pavimentação, então no vértice P_3 a região C deve ser um polígono de 42 lados e no vértice P_4 a região C deve ter 7 lados, o que é uma contradição. Portanto, essa pavimentação é impossível. De maneira análoga observa-se que as configurações (3,8,24), (3,9,18) e (3,10,15) também não são possíveis.

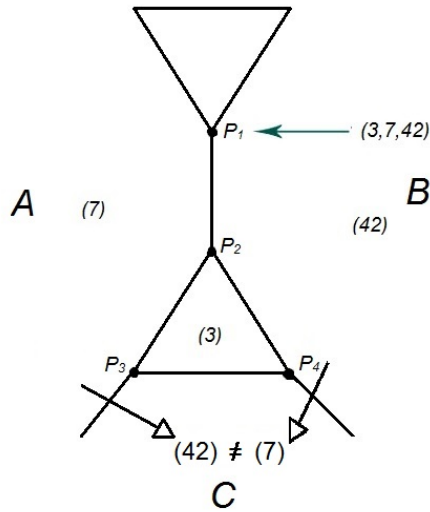


Figura 3.6: Configuração impossível para (3,7,42)

- Quadrado, $n_1 = 4$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4}$$

Como $\frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3}$ temos que

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{n_2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{2}{n_2}.$$

Portanto

$$n_2 \leq 8.$$

Por outro lado

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n_2} = \frac{n_2 - 4}{4n_2}.$$

Como $\frac{1}{n_3} > 0$, temos que $n_2 - 4 > 0$, ou seja $n_2 \geq 5$. Como consequência segue-se que $5 \leq n_2 \leq 8$.

Substituindo-se n_2 por 5,6,7 e 8, na equação 3.2.4 tem-se $n_2 = 5 \Rightarrow n_3 = 20$, $n_2 = 6 \Rightarrow n_3 = 12$, $n_2 = 7 \Rightarrow n_3 = \frac{28}{3}$, $n_2 = 8 \Rightarrow n_3 = 8$.

Porém para $n_2 = 7$ tem-se $n_3 = \frac{28}{3}$, que não satisfaz pois não representa um número inteiro de polígonos. Na tabela 3.2 temos os possíveis valores para $n_1 = 4$.

Apenas a configuração (4,5,20) não define tesselação conforme exibido pela figura 3.7.

$m = 3$	n_1	n_2	n_3
	4	5	20
*	4	6	12
*	4	8	8

Tabela 3.2: Configurações para $m = 3$ e $n_1 = 4$.

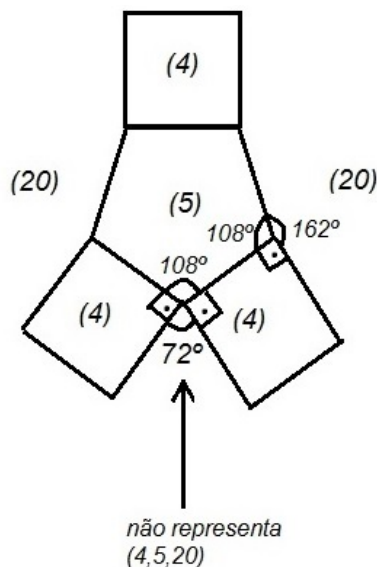


Figura 3.7: Configuração impossível para $(4,5,20)$

- Pentágono regular, $n_1 = 5$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{3}{10}.$$

Como $\frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3}$ temos que

$$\frac{3}{10} \leq \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{n_2} \Rightarrow \frac{3}{10} \leq \frac{2}{n_2}.$$

Portanto

$$n_2 \leq 6.$$

Por outro lado

$$\frac{1}{n_3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{n_2} = \frac{3n_2 - 10}{10n_2}$$

Como $\frac{1}{n_3} > 0$, temos que $3n_2 - 10 > 0$, ou seja $n_2 \geq 4$ e pelo fato de $n_1 \leq n_2$, concluímos que $n_2 \geq 5$. Como consequência segue-se que $5 \leq n_2 \leq 6$. Substituindo-se n_2 por 5 e 6 na equação 3.2.4 tem-se $n_2 = 5 \Rightarrow n_3 = 10$, $n_2 = 6 \Rightarrow n_3 = \frac{15}{7}$.

Porém para $n_2 = 6$ tem-se $n_3 = \frac{15}{7}$, não satisfaz pois não representa um número inteiro de polígonos. Desta forma, a única configuração possível é $(5,5,10)$, mostrada na tabela 3.3, mas ela não representa uma pavimentação conforme exibida pela figura 3.8.

$m = 3$	n_1	n_2	n_3
	5	5	10

Tabela 3.3: Configurações para $m = 3$ e $n_1 = 5$.

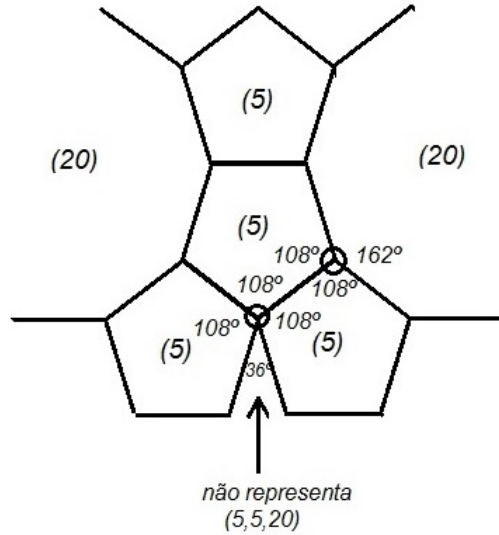


Figura 3.8: A configuração $(5, 5, 10)$ não pavimenta o plano.

- $n_1 = 6$ Substituindo

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{3} \leq \frac{2}{n_2} \Rightarrow n_2 \leq 6.$$

Como $n_1 \leq n_2$ e $n_1 = 6$, temos $n_1 = n_2 = 6$. Como consequência, e pelo fato de que $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$, segue-se que $n_1 = n_2 = n_3 = 6$, que é uma pavimentação com hexágonos regulares conforme já comentado no seção 3.2.2. Veja figura 3.5.

- **2º Caso:** $m = 4$, isto é, quatro polígonos regulares em cada vértice. Seja n_i o número de lados de cada um dos polígonos em cada vértice, para $i = 1, 2, 3, 4$. Vamos determinar a soma das medidas dos ângulos internos desses polígonos na equação

$$\frac{180^\circ(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{180^\circ(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{180^\circ(n_3 - 2)}{n_3} + \frac{180^\circ(n_4 - 2)}{n_4} = 360^\circ.$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1. \quad (3.2.7)$$

Sem perda de generalidade seja $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$, o que equivale a $\frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4}$. Logo

$$1 \leq \frac{4}{n_1} \Rightarrow n_1 \leq 4.$$

Então $3 \leq n_1 \leq 4$.

Iremos analisar separadamente todas as possibilidades, isto é, se ao redor dos vértices pelo menos um polígono for um triângulo equilátero, ou um quadrado.

- $n_1 = 3$

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{3}{n_2} \Rightarrow n_2 \leq 4.$$

Logo $3 \leq n_2 \leq 4$.

A seguir analisaremos os casos $n_2 = 3$ e $n_2 = 4$.

- $n_2 = 3$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3}$$

Como $\frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4}$ temos

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2}{n_3}$$

Portanto,

$$n_3 \leq 6.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n_3} = \frac{n_3 - 3}{3n_3}$$

Como $\frac{1}{n_4} > 0$, temos $n_3 - 3 > 0$, ou seja $n_3 \geq 4$. Como consequência segue-se que $4 \leq n_3 \leq 6$.

Substituindo-se n_3 por 4, 5 ou 6 na equação 3.2.7 tem-se $n_3 = 4 \Rightarrow n_4 = 12$; $n_3 = 5 \Rightarrow n_4 = \frac{15}{2}$; $n_3 = 6 \Rightarrow n_4 = 6$, porém $n_3 = 5$, não satisfaz pois não representa um número inteiro de polígonos.

- $n_2 = 4$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{5}{12}$$

Como $\frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4}$ temos que

$$\frac{5}{12} \leq \frac{2}{n_3}.$$

Logo $n_3 \leq 4$.
 Por outro lado

$$\frac{1}{n_4} = \frac{5}{12} - \frac{1}{n_3} = \frac{5n_3 - 12}{12n_3}$$

Como consequência segue-se que $3 \leq n_3 \leq 4$. Substituindo-se n_3 por 3 na equação 3.2.7 tem-se $n_3 = 3 \Rightarrow n_4 = 12$. Substituindo-se n_3 por 4 na equação 3.2.7 tem-se $n_3 = 4 \Rightarrow n_4 = 6$.

- $n_1 = 4$
- $n_2 = 4$

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{n_3} \Rightarrow n_3 = n_4 = 4.$$

Resumindo, na tabela 3.4 temos as possíveis combinações para 4 polígonos num vértice. Porém apenas os indicados com * definem tesselação com polígonos regulares não congruentes.

$m = 4$	n_1	n_2	n_3	n_4
	3	3	4	12
	3	3	6	6
*	3	6	3	6
	3	4	3	12
*	3	4	6	4
	3	4	4	6
*	4	4	4	4

Tabela 3.4: $m = 4$ e $n_1 = 3$

Na tabela 3.4, as configurações $(3,3,4,12)$, $(3,4,3,12)$, $(3,3,6,6)$ e $(3,4,4,6)$ não podem formar uma pavimentação, pois em $(3,3,4,12)$ e $(3,3,6,6)$ é necessário ter outro vértice contendo $(.,3,3,3,.)$; em $(3,4,3,12)$ é necessário ter outro vértice contendo $(3,4,12,4)$ e em $(3,4,4,6)$ precisa de um vértice contendo $(3,4,6,4)$, desta forma não obedecem à condição de ao redor de um vértice se ter sempre a mesma configuração. A figura 3.9 exhibe tais configurações.

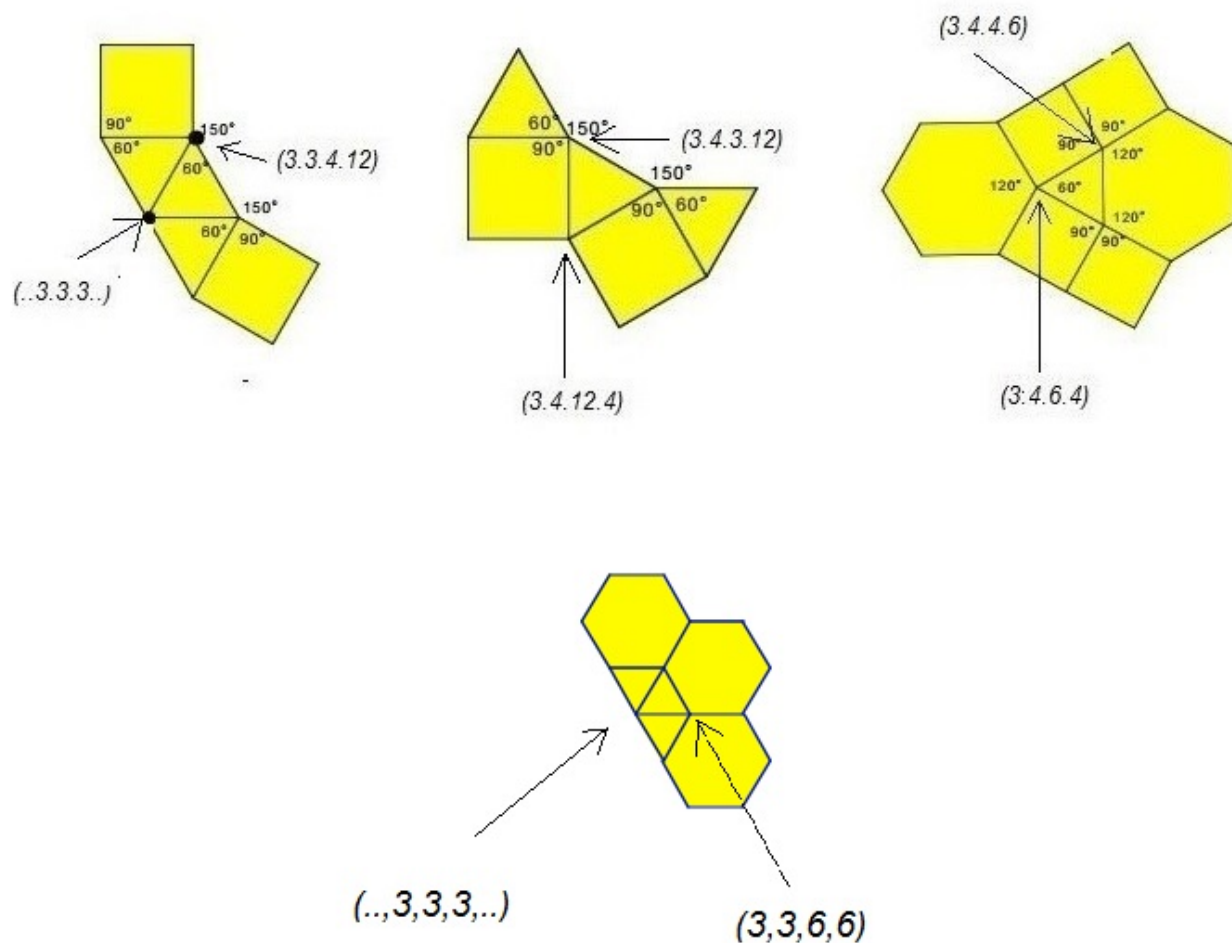


Figura 3.9: Configurações que não formam pavimentação [2].

- **3º Caso:** $m = 5$, isto é, cinco polígonos regulares em cada vértice. Sendo n_i o número de lados de cada um dos polígonos em cada vértice, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Vamos determinar a soma das medidas dos ângulos internos desses polígonos na equação

$$\frac{180^\circ(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{180^\circ(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{180^\circ(n_3 - 2)}{n_3} + \frac{180^\circ(n_4 - 2)}{n_4} + \frac{180^\circ(n_5 - 2)}{n_5} = 360^\circ$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}. \quad (3.2.8)$$

Sem perda de generalidade seja $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, o que equivale a $\frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4} \geq \frac{1}{n_5}$. Logo

$$\frac{3}{2} \leq \frac{5}{n_1} \Rightarrow n_1 = 3.$$

Para $n_1 = 3$, temos

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \leq \frac{4}{n_2} \Rightarrow n_2 = 3.$$

Para $n_2 = 3$, temos

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{3}{n_3} \Rightarrow n_3 = 3$$

Para $n_3 = 3$, temos

$$\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{n_4} \Rightarrow 3 \leq n_4 \leq 4$$

A seguir analisaremos os casos $n_4 = 3$ e $n_4 = 4$. Substituindo-se na equação 3.2.8 $n_4 = 3$ tem-se $n_5 = 6$ e substituindo-se $n_4 = 4$ tem-se $n_5 = 4$.

A tabela 3.5 exhibe esses casos, onde todos os indicados com *, definem tesselação com polígonos regulares não congruentes.

$m = 5$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
*	3	3	3	3	6
*	3	3	3	4	4
*	3	3	4	3	4

Tabela 3.5: $m = 5$ e $n_1 = 3$

A configuração (3,3,4,3,4) não foi encontrada nos cálculos realizados, porém ao se fazer a permutação da configuração (3,3,3,4,4) encontramos outra configuração que também representa pavimentação.

- **4º Caso:** $m = 6$, isto é, seis polígonos regulares em cada vértice. Seja n_i o número de lados de cada um dos polígonos em cada vértice, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Vamos determinar a soma das medidas dos ângulos internos desses polígonos na equação

$$\frac{180^\circ(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{180^\circ(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{180^\circ(n_3 - 2)}{n_3} + \frac{180^\circ(n_4 - 2)}{n_4} + \frac{180^\circ(n_5 - 2)}{n_5} = 360^\circ$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_5} = 2$$

Como consequência tem-se $n_i = 3$, para todo $i = 1, 2, 3, \dots, 6$, portanto o único tipo possível é $(3,3,3,3,3,3)$ que é uma pavimentação com triângulos equiláteros já comentado no seção 3.2.2. Esta configuração é exibida na tabela 3.6.

$m = 6$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
*	3	3	3	3	3	3

Tabela 3.6: $m = 6$ e $n_1 = 3$

A figura 3.10 exibe as onze configurações que realmente pavimentam o plano dentre as vinte e uma configurações encontradas com polígonos regulares congruentes e não congruentes.

A primeira pessoa a exibir as pavimentações com polígonos regulares não congruentes, que também são chamadas de semi-regulares foi Joahannes Kepler, em um trabalho publicado em 1619, denominado *Harmonice Mundi* no qual está o seguinte resultado, que resume esse capítulo:

Teorema de Kepler - Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições: a) a interseção entre dois desses polígonos é sempre um lado ou um vértice, ou é vazia; b) a distribuição de polígonos ao redor de um vértice é sempre a mesma [13].

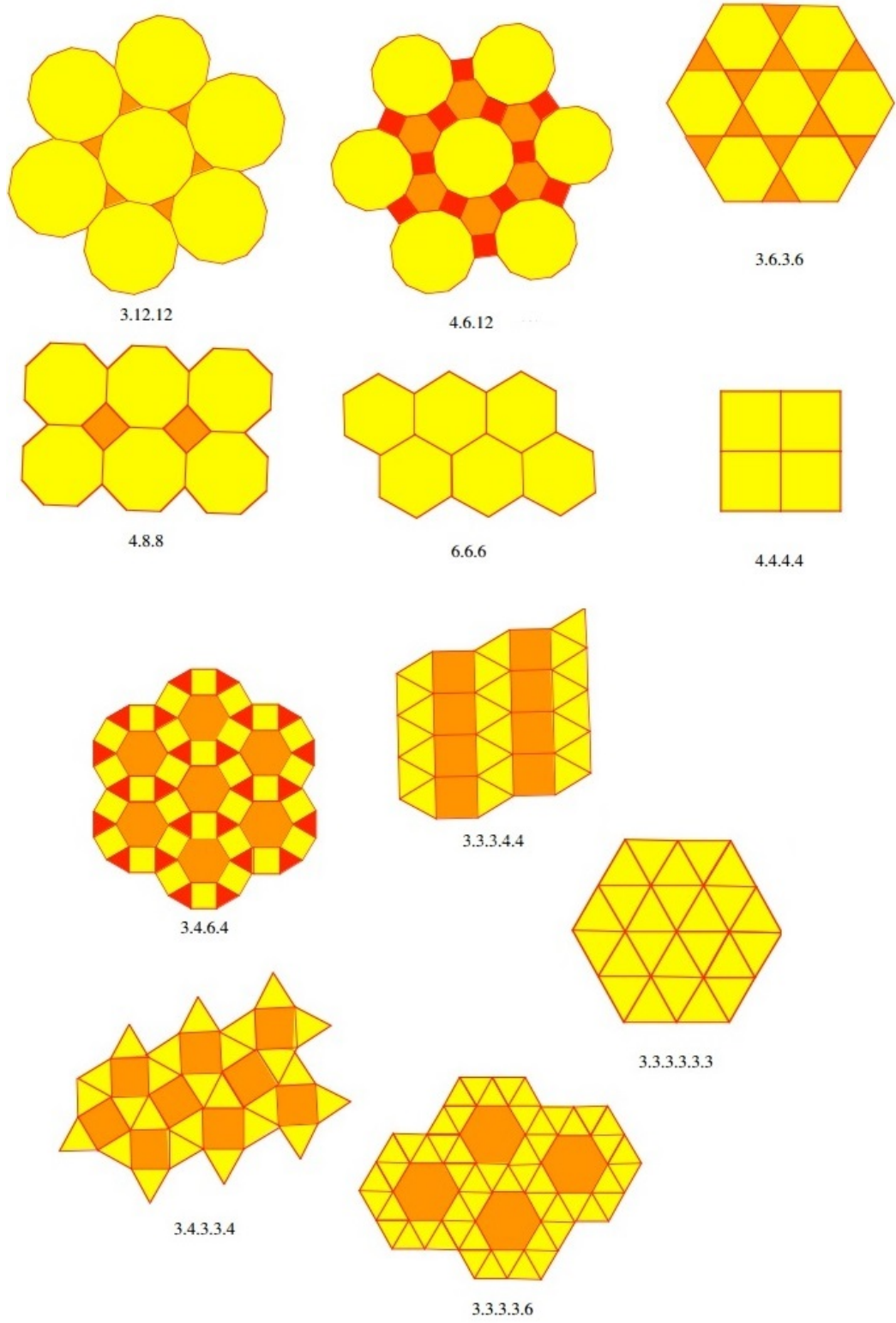


Figura 3.10: Configurações que pavimentam o plano [2].

3.2.4 Outras pavimentações com polígonos regulares

Dizemos que duas pavimentações são do *mesmo tipo* se elas coincidem por um movimento rígido do plano composto com mudança de escala. Desta forma, chamaremos de iguais duas pavimentações do mesmo tipo.

A seguir relaxaremos a condição de que ao redor de cada vértice tenha sempre os mesmos polígonos, mas não necessariamente na mesma ordem. Nestas condições algumas pavimentações podem se alterar, por exemplo:

- (3,4,3,3,4) cortando ao longo de um zig-zag e juntando as duas metades, conforme exhibe a figura 3.11.

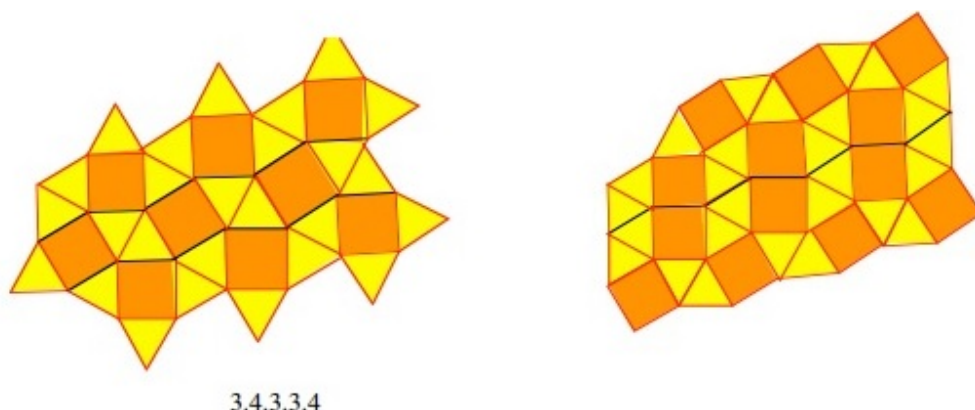


Figura 3.11

- (3,6,3,6) fazendo uma translação em uma faixa horizontal independente das outras, conforme exibido na figura 3.12.

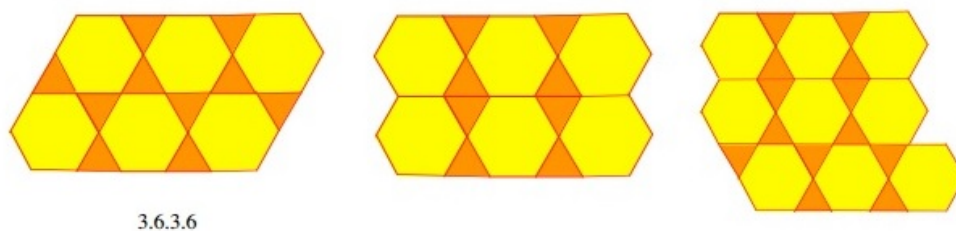
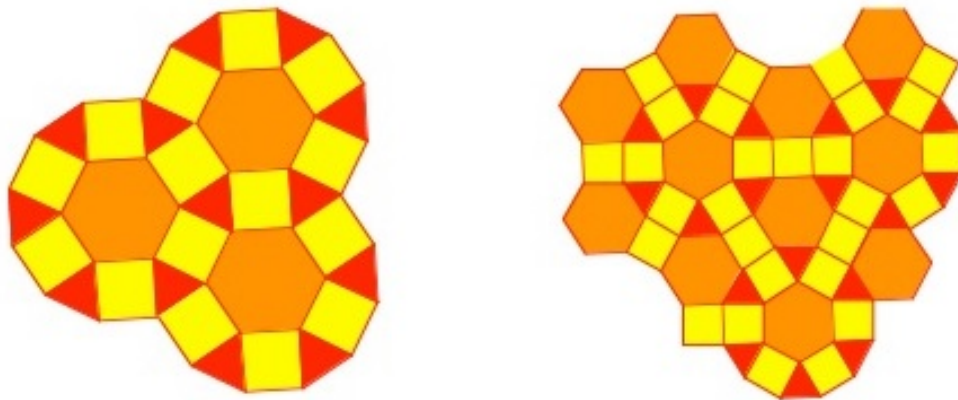


Figura 3.12: Pavimentações do mesmo tipo.

- (3,4,6,4) realizando uma rotação de 30° em um disco formado por um hexágono e os polígonos adjacentes a ele, observando que os discos podem girar independentemente, veja na figura 3.13.



3.4.6.4

Figura 3.13: Pavimentações do mesmo tipo.

Portando observa-se que o relaxamento dessa condição nos permite obter uma infinidade de pavimentações. Se considerarmos duas imagens por reflexão (enantiomórficas), apenas a configuração $(3,3,3,3,6)$ é chamada de igual. Tal pavimentação é exibida na figura 3.14.

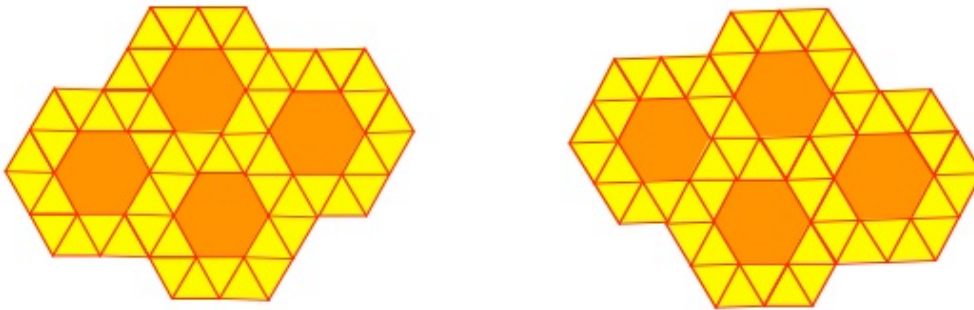


Figura 3.14: Pavimentações do mesmo tipo.

Capítulo 4

Outros tipos de pavimentações.

Neste capítulo reservamos um espaço para comentar outras pavimentações no plano euclidiano e alguns de seus elementos que não foram alvo de estudo no capítulo 3.

4.1 Pavimentações com polígonos não regulares.

Nesta seção discutiremos algumas pavimentações com polígonos não regulares. Começaremos esta discussão com os quadriláteros não regulares.

4.1.1 Pavimentações com quadriláteros não regulares.

Considere o quadrilátero $ABCD$ indicado pela figura 4.1. A pavimentação será feita seguindo o seguinte procedimento: inicialmente aplicamos uma reflexão em torno do lado BC , em seguida uma reflexão em torno da mediatriz m desse lado. Continuando esse processo obtemos a pavimentação exibida nas figuras 4.1 e 4.2.

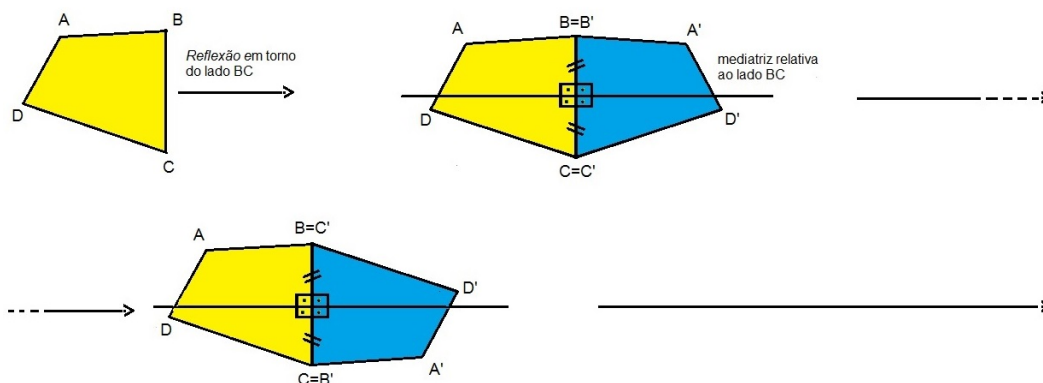


Figura 4.1: Pavimentação com quadrilátero qualquer.

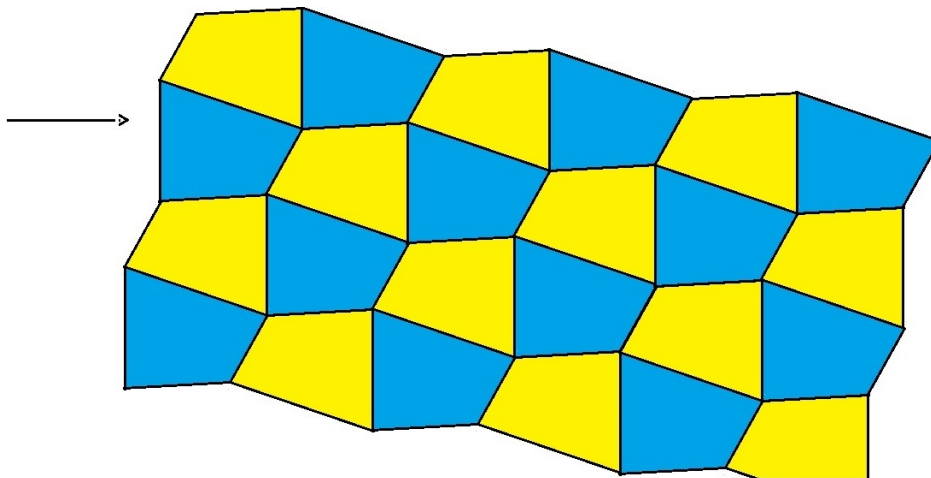


Figura 4.2: Pavimentação com quadrilátero qualquer.

Na Revista do Professor de Matemática (RPM) número 51 [13], consta em uma BIENAL da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), o seguinte relato de um leitor que era professor de uma turma de 7^a série: “realizando trabalho com mosaicos do plano sua aluna pavimentou uma superfície usando cópias congruentes de um mesmo quadrilátero como o da figura 4.3.

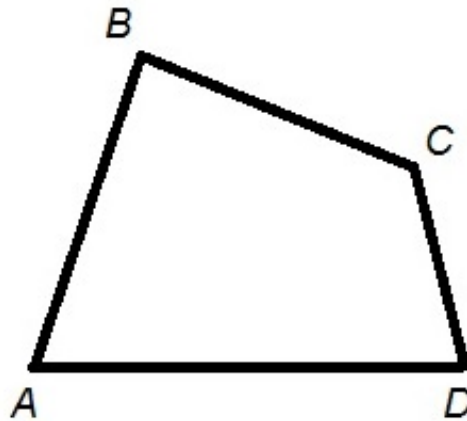


Figura 4.3: Pavimentação com quadrilátero qualquer.

Ela juntou diversas cópias do quadrilátero e reuniu-as como peças de um quebra-cabeça, de modo a preencher uma determinada superfície sem que houvesse lacunas, nem superposições e os lados dos quadriláteros ficassem justapostos. Tal fato impressionou muito o professor que perguntou à SBM: “qualquer quadrilátero, convexo ou não, pavimenta o plano?”

Pavimentações feitas com retângulos ou paralelogramos são bem conhecidas conforme exibe a figura 4.4.

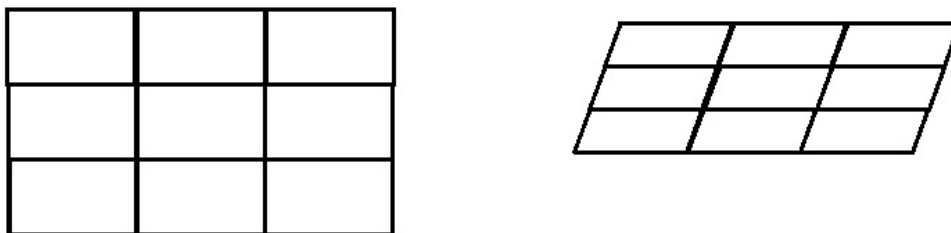


Figura 4.4: Pavimentação com retângulos e paralelogramos.

Para quadriláteros quaisquer iremos resumir a solução apresentada na oficina *O leitor pergunta*, realizada durante o 1º Encontro da RPM. A solução é simples, e nos mostra como construir na prática uma pavimentação a partir de um dado quadrilátero.

Seja $ABCD$ um quadrilátero A um vértice fixo desse quadrilátero. A pavimentação será feita através do seguinte procedimento. Seja M_1 o ponto médio do lado \overline{AB} (figura 4.5). Refletimos em torno de M_1 o quadrilátero $ABCD$, obtendo uma cópia congruente $A_1B_1C_1D_1$ com $A_1 = B$, $B_1 = A$. Essa construção faz com que tenhamos em volta do vértice A os ângulos do quadrilátero indicados por 1 e 2, conforme exibe a figura 4.5.

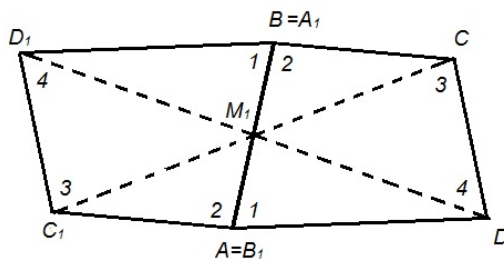


Figura 4.5: Construção do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ à partir do quadrilátero $ABCD$.

Repetimos a operação determinando o simétrico de $A_1B_1C_1D_1$ em relação a M_2 , onde M_2 é o ponto médio do lado $\overline{B_1C_1}$ (figura 4.6). O resultado obtido é outra cópia congruente $A_2B_2C_2D_2$ com $B_2 = C_1$, e $C_2 = B_1$. Temos agora em torno de A os ângulos indicados por 1, 2, e 3 conforme figura 4.6.

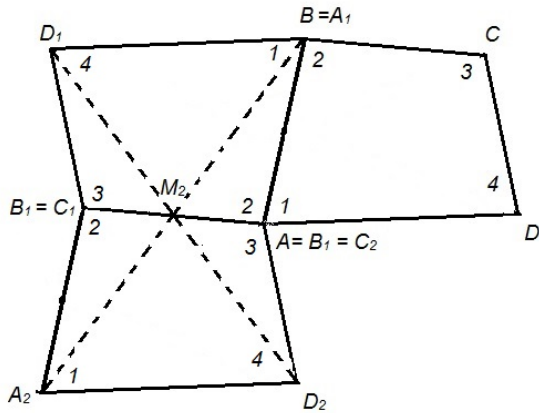


Figura 4.6: Construção do quadrilátero $A_2B_2C_2D_2$ à partir do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$.

Finalmente, sendo M_3 o ponto médio de $\overline{C_2D_2}$, refletimos em torno de M_3 , obtendo uma cópia congruente $A_3B_3C_3D_3$ com $C_3 = C_2$, $D_3 = C_2$, conforme exibe a figura 4.7.

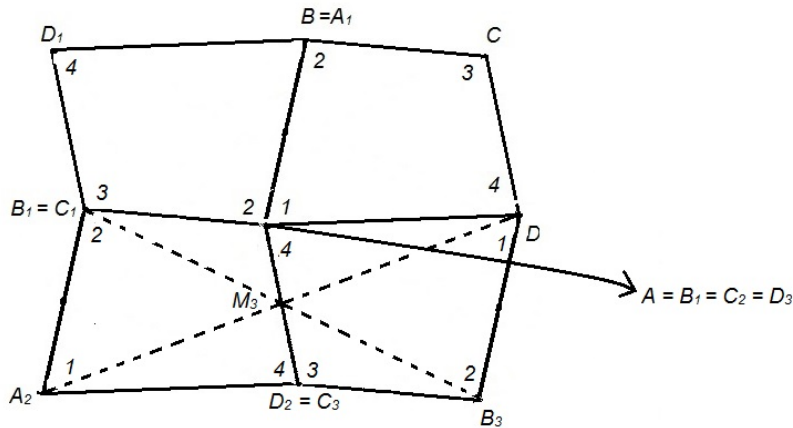


Figura 4.7: Construção do quadrilátero $A_3B_3C_3D_3$ à partir do quadrilátero $A_2B_2C_2D_2$.

Como a soma das medidas dos ângulos do quadrilátero é 360° , temos que a medida de $\widehat{D_2AD}$ é igual a do ângulo indicado por 4. Além disso, temos $\overline{AD} = \overline{A_1D_1} = \overline{A_2D_2} = \overline{A_3D_3}$ e então segue que $A_3 = D$, veja na figura 4.7.

Assim, conseguimos dessa maneira colocar em torno de A os quatro ângulos do quadrilátero e, repetindo-se o argumento para qualquer vértice A , obtemos uma pavimentação como a da figura 4.8.

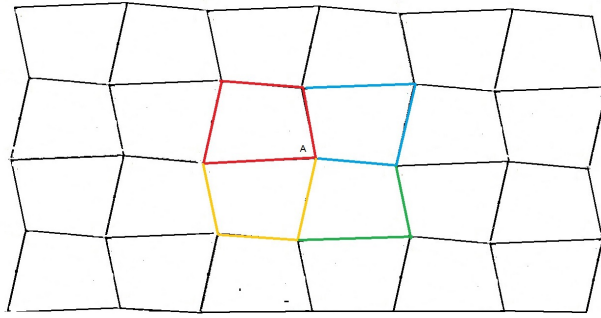


Figura 4.8: Pavimentação do plano com um quadrilátero convexo qualquer.

O argumento mencionado anteriormente vale também para um quadrilátero não convexo. Tal pavimentação é exibida na figura 4.9.

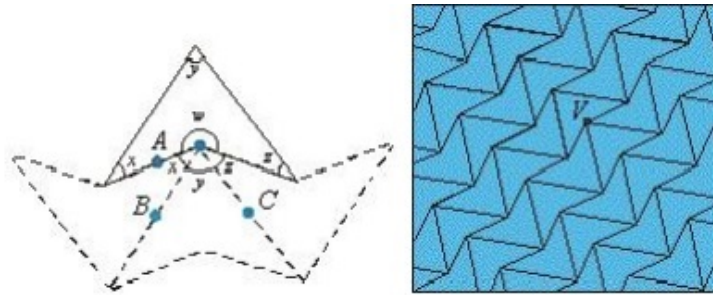


Figura 4.9: Pavimentação com quadrilátero não convexo.

Podemos estender a pergunta feita sobre pavimentações com quadrilátero não regulares convexos para outros polígonos, como por exemplo pentágonos não regulares convexos.

4.1.2 Pavimentações com pentágonos.

Pavimentações duais.

Seja T uma pavimentação. A *tesselação dual* T^* de T é obtida da seguinte forma: o centro de cada polígono em T corresponde a um vértice de um polígono em T^* ; cada lado de um polígono de T corresponde a um lado de um polígono de T^* , e dois vértices são unidos em T^* se, e somente se, são centros de dois polígonos em T que tem um lado em comum.

A figura 4.10 exhibe uma tesselação T e dual T^* . Observe que a configuração $(3,3,3,3,3)$ é a tesselação T e a sua dual T^* é a configuração $(6,6,6)$.

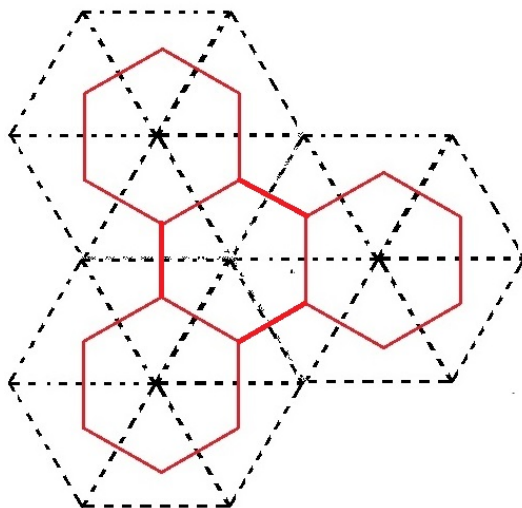


Figura 4.10: Tesselação T e sua dual T^* .

Convencionaremos que a pavimentação original T será representada por linhas pontilhadas e a pavimentação dual T^* por linhas cheias.

Construindo pavimentações com pentágonos não regulares através do dual.

Conforme já vimos não é possível pavimentações com pentágonos quase-regulares ou regulares, porém com pentágonos não regulares é possível. Mostraremos algumas pavimentações com pentágonos não regulares obtidas a partir de duais de pavimentações discutidas no capítulo 3.

Dual da configuração $(3,3,3,3,6)$. A figura 4.11 exhibe uma pavimentação com pentágonos não regulares, que é a dual da configuração $(3,3,3,3,6)$, cujos ângulos internos são $(60^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$.

Dual da configuração $(3,3,3,4,4)$. Nesta outra configuração, encontramos uma pavimentação com pentágonos não regulares, cujos ângulos internos são $(90^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$. Tal pavimentação é exibida na figura 4.12.

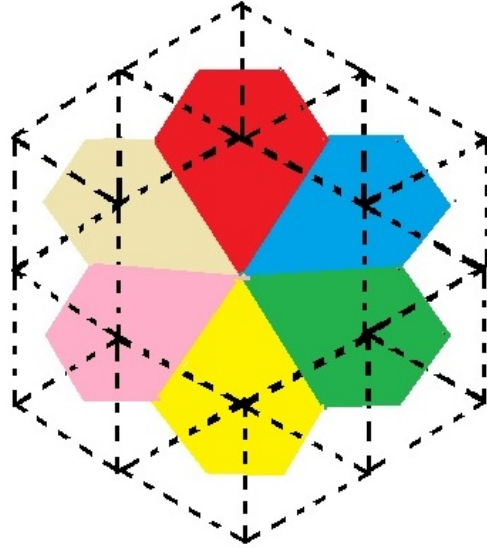


Figura 4.11: A Pavimentação T e a dual T^* .

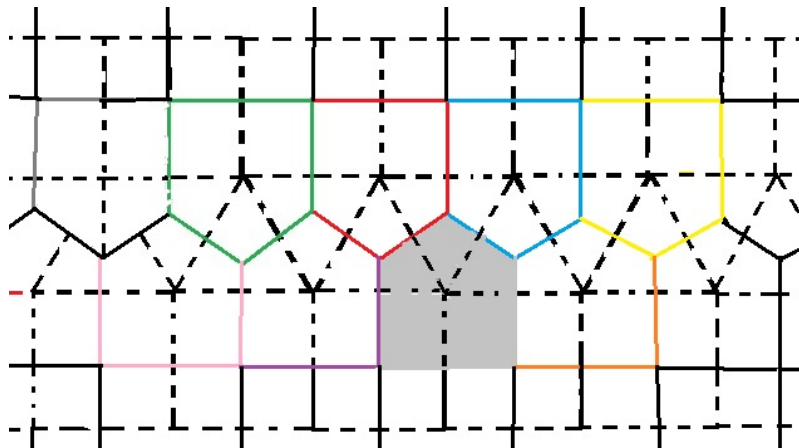


Figura 4.12: A Pavimentação T e a dual T^* .

Dual para a configuração (3,3,4,3,4). A partir da configuração (3,3,4,3,4), encontramos a pavimentação dual cujos ângulos internos são $(90^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$. A figura 4.13 exibe essa pavimentação.

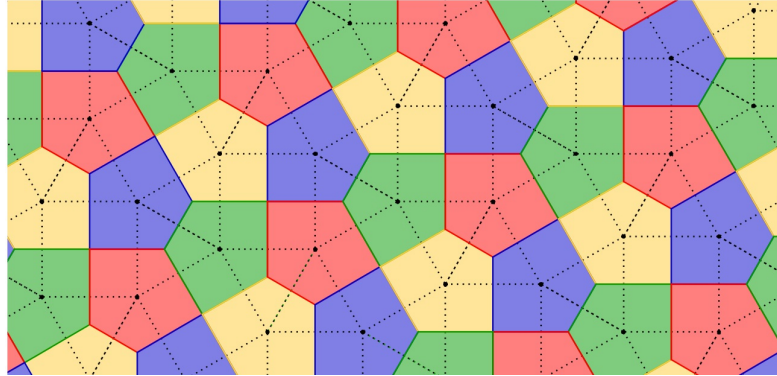


Figura 4.13: A pavimentação T e a dual T^* .

Outras pavimentações com pentágonos não regulares.

Algumas pavimentações com polígonos regulares congruentes podem ser modificadas por transformações geométricas para obter pavimentações com pentágonos não regulares.

Transformando a configuração (4,4,4,4). Escolhemos os quadrados mantendo uma distância entre eles de quatro quadrados, tanto na linha como na coluna. Além disso, entre uma linha e outra e entre uma coluna e outra, a escolha do quadrado obedece ao movimento do cavalo no jogo de xadrez. Nestes quadrados escolhidos traçamos as diagonais. Dessa forma encontramos um padrão com pentágonos irregulares, cujos ângulos internos são $(90^\circ, 135^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 135^\circ)$, conforme exibido pela figura 4.14.

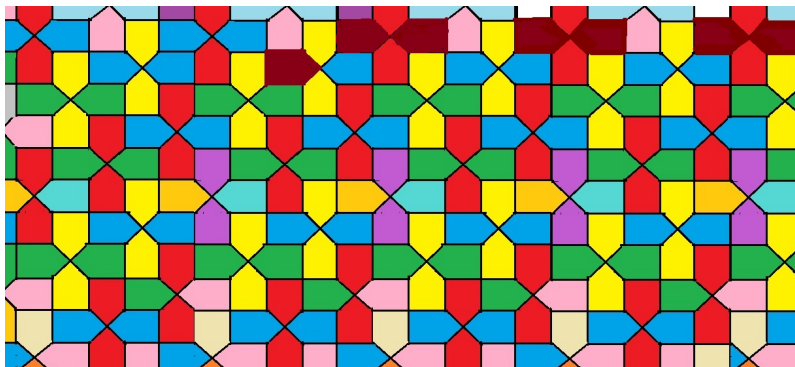


Figura 4.14: Pavimentação obtida da (4,4,4,4).

Transformando a configuração (6, 6, 6). Traçamos um reta mediatriz de dois lados opostos, desta forma encontramos um padrão com pentágonos irregulares, cuja forma angular é $(90^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$. A figura 4.15 exibe essa construção.

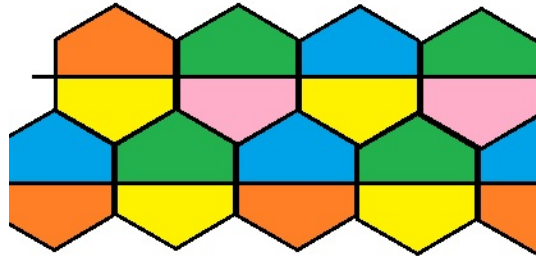


Figura 4.15: Pavimentação obtida da configuração (6, 6, 6).

Transformando a configuração (3, 3, 3, 3, 3, 3). Traçando segmentos conforme exibe a figura 4.16, obtemos um padrão com pentágono não regular, cujos ângulos internos são $(90^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 120^\circ, 120^\circ)$ [14].

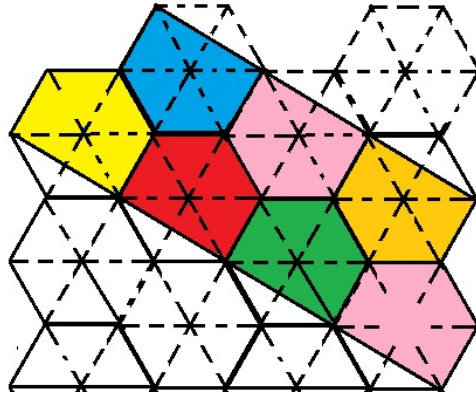


Figura 4.16: Pavimentação obtida da configuração (3, 3, 3, 3, 3, 3).

4.1.3 Pavimentações de Penrose.

Em 1974, o físico e matemático inglês Roger Penrose que era aficionado por jogos e recreações matemáticas, descobriu que era possível pavimentar o plano de forma não periódica, utilizando apenas dois quadriláteros irregulares denominados *kite* e *dart* (papagaio e flecha) respectivamente. Observe na figura 4.17 que esses quadriláteros podem ser construídos a partir de um pentágono regular.

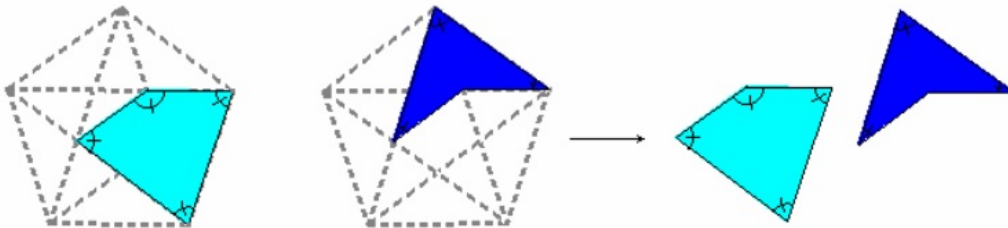


Figura 4.17: kite e dart gerados a partir do pentágono regular [3].

As *pavimentações de Penrose* são aperiódicas, ou seja, não podem ser obtidas pela translação de um padrão da pavimentação. Isto quer dizer que se tivéssemos uma transparência de uma pavimentação de Penrose seria impossível movê-la em uma determinada direção e fazê-la coincidir com a pavimentação original. A figura 4.18 exibe uma pavimentação aperiódica [3].

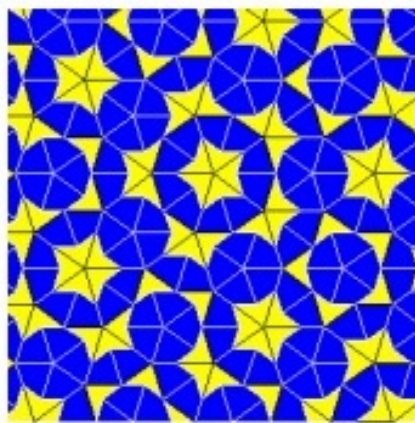


Figura 4.18: Pavimentação aperiódica [3].

4.1.4 Uma pavimentação famosa

As obras do artista holandês “ Mauritis Cornelis Escher ”(1898-1972), com suas composições geométricas continuam a atrair um grande interesse de cientistas das mais diversas áreas. Em suas obras percebemos que as pavimentações são feitas por peixes, pássaros, répteis e outros. Inicialmente ele fazia pavimentações com polígonos (veja figura 4.19) e depois preenchia esses polígonos com linhas formando as figuras citadas. Até hoje estas despertam atenção de quem as observa e de quem as estuda. Observando a figura 4.20 podemos questionar, qual pavimentação por polígonos foi usada como base nesta xilogravura?

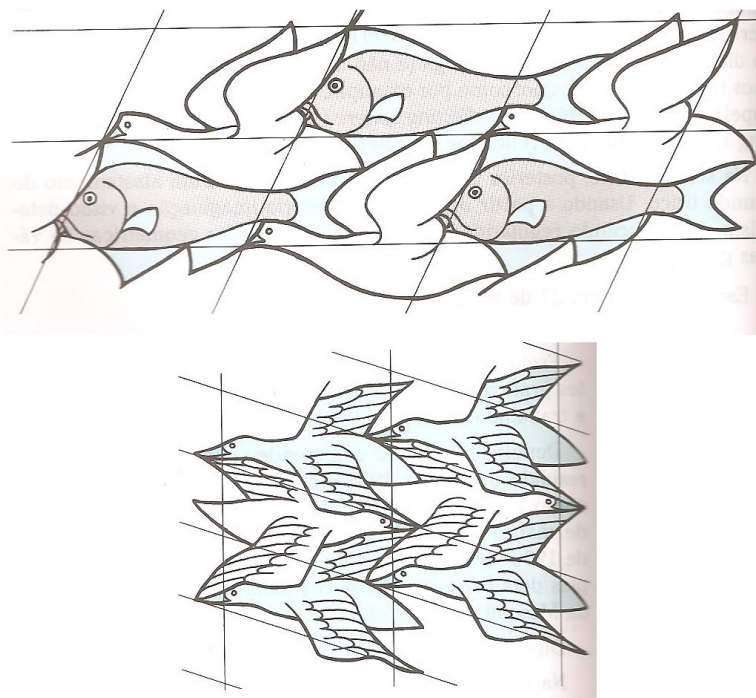


Figura 4.19: Exemplos de base nas figuras de Escher [1].

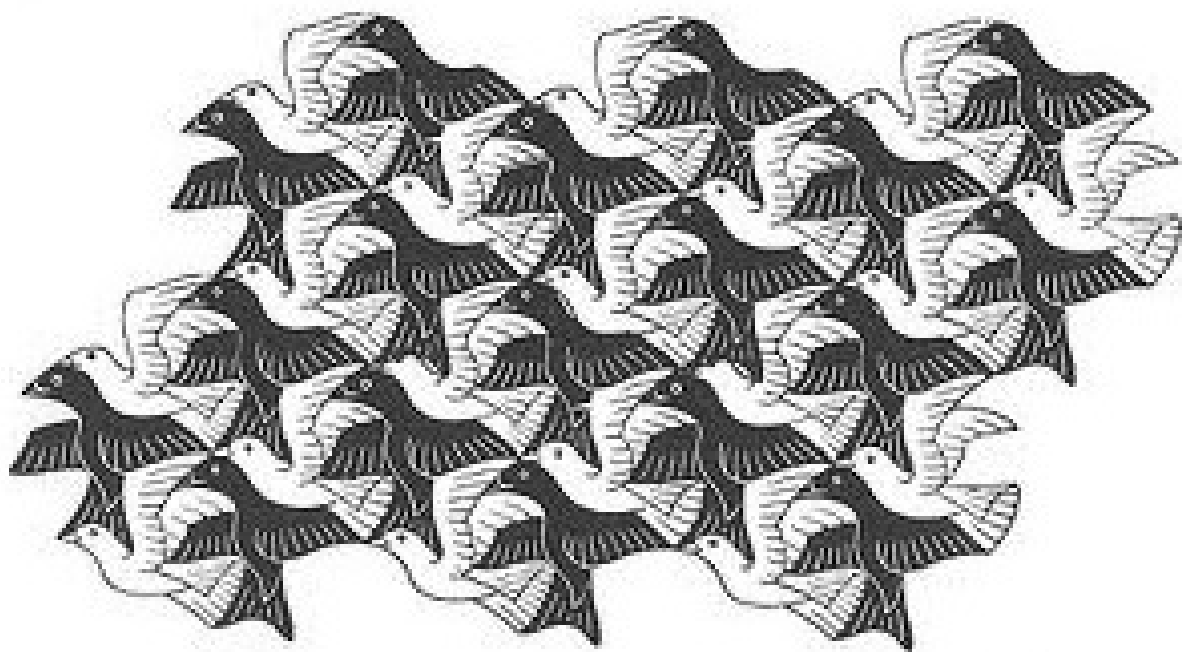


Figura 4.20: Xilogravura de Escher: Birds - 1949 [1].

Capítulo 5

Experimentos em sala de aula

Neste capítulo apresentaremos algumas atividades que poderão ser desenvolvidas em sala de aula e ressaltam a importância do ensino de geometria, proporcionando a exploração do espaço físico e desenvolvendo a observação e a percepção de congruências, semelhanças, diferenças e regularidades. Também faz conexão com outras áreas da matemática, desenvolvendo, por exemplo, noções de álgebra e aritmética. Dessa forma, compete ao professor oferecer aos alunos o ensino de pavimentações de forma lúdica através de jogos com manipulação de polígonos, propiciando assim a oportunidade de medir, classificar, comparar, transformar e criar suas conjecturas, tendo o professor a possibilidade de associá-la a conteúdos conceituais desenvolvidos ou a serem desenvolvidos a partir destas atividades.

Desenvolveremos a seguir algumas atividades a serem desenvolvidas em sala de aula com o propósito de explorar o desenvolvimento geométrico em situações que envolvem pavimentações e mosaicos. Para a realização destas atividades utilizaremos um conjunto de polígonos regulares, denominado *Kit Polígonos* [4], sendo formado por polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12 lados. Neste kit quaisquer dois polígonos tem os lados com a mesma medida. Tal kit pode ser confeccionado em papel cartão, cartolina ou emborrachado e colorido em ambos os lados. A figura 5.1 exibe este Kit Polígonos.



Figura 5.1: Kit polígonos. [4]

As atividades a seguir devem ser realizadas na sequência.

5.1 1ª Atividade - Pavimentando o plano com polígonos regulares congruentes

A atividade a seguir foi retirada de [4].

Sugerimos que o professor divida a classe em grupos que deverão primeiramente pavimentar parcialmente o plano, somente com polígonos regulares congruentes, devendo ser obedecidas as seguintes condições:

- os vértices devem coincidir num mesmo ponto, e
- não devem haver sobreposições e nem espaço entre os polígonos.

Ao realizarem os experimentos, deverá surgir de forma natural alguns questionamentos, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de cada polígono no vértice onde coincidirão deve ser 360° . A medida que forem formando as pavimentações deverão preencher uma tabela, que constará o polígono regular, a medida do ângulo interno de cada polígono no vértice onde coincidirão e a soma dos ângulos internos ao redor do vértice onde coincidirão. A anotação dos dados será feita na tabela 5.1. A formação das pavimentações encontradas com polígonos regulares é exibida pela figura 5.2. Esta atividade deve ser aplicada no 8º ano do ensino fundamental II.

Triângulos equiláteros	60°	60°	60°	60°	60°	60°
Quadrados	90°	90°	90°	90°		
Hexágonos	120°	120°	120°			

Tabela 5.1: Polígonos regulares.

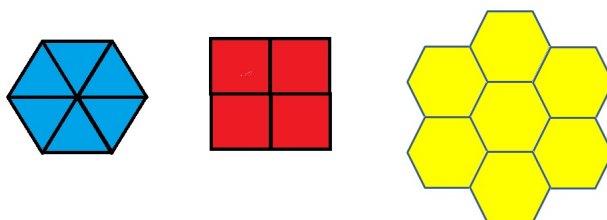


Figura 5.2: Atividades com polígonos regulares congruentes.

Após realizarem esta pavimentação inicial, sugerimos aos alunos que verifiquem se ela se estende para todo o plano.

Temos como objetivo nesta atividade fazer com que os alunos explorem de forma lúdica a pavimentação com polígonos regulares congruentes, associando o experimento a conceitos teóricos desenvolvidos na aula sobre ângulos internos de polígonos regulares e quais formações com polígonos regulares congruentes realizam pavimentação ao redor de um vértice.

5.2 2ª Atividade - Pavimentando o plano com polígonos regulares não congruentes

A atividade foi retirada de [4].

Nesta 2ª atividade propomos aos alunos que obedecendo as mesmas condições da atividade 1, utilizem polígonos regulares de tipos diferentes. A medida que forem descobrindo as formações, anotem numa tabela os valores dos ângulos internos dos polígonos coincidentes num mesmo vértice, bem como a soma desses ângulos nesse vértice. A seguir devem verificar se esta formação se estende para todo o plano.

Nesta atividade iremos explorar:

- a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice, com polígonos regulares não congruentes;
- as configurações de polígonos regulares não congruentes ao redor de um vértice;
- quais das configurações obtidas pavimentam todo o plano;
- quando é possível perceber que após posicionarem uma determinada quantidade de polígonos, aquela formação pavimentará todo o plano.

Esta atividade deve ser aplicada no 8º ano do ensino fundamental II.

O objetivo desta atividade é fazer com que os alunos explorem também de forma lúdica a pavimentação com polígonos regulares não congruentes, associando o experimento a conceitos teóricos desenvolvidos na aula sobre ângulos internos de polígonos regulares. Devem também perceber quais formações com polígonos regulares não congruentes realizam pavimentação ao redor de um vértice e pavimentam todo o plano.

5.3 3ª Atividade - Construindo colméias de abelhas com palitos de fósforo

A atividade foi retirada de [5].

Esta atividade deve ser aplicada no 9º ano do ensino fundamental II. Os favos de mel de algumas abelhas tem formato hexagonal. Porque eles não tem a forma de triângulos, quadrados ou outro tipo de polígono?

Já sabemos após realizar a atividade 1 que os únicos polígonos regulares congruentes que pavimentam o plano são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono. Por que então as abelhas utilizam o formato hexagonal? Será que elas levam vantagem com esse formato?

Vamos simular a construção de favos de mel com formato de triângulo equilátero, quadrado e hexágono. Tal atividade será realizada com o uso de palitos de fósforo, que representarão as paredes do favo de mel. Os alunos devem construir formações triangulares, quadradas e hexagonais com os palitos de fósforo que representarão as colmeias. Após encontrarem uma quantidade de palitos comum às três formações, devem anotar na tabela 5.3 o número de polígonos utilizados, bem como a quantidade deles, de modo que representem as paredes dos polígonos.

	Número De favos De mel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Número de palitos	triângulos	3	5	7	9	11	12	14	16	18	19	21	23	24	26	28	29	31	33	34	
	Quadrados	4	7	10	12	15	17	20	22	24	27	29	31	34							
	hexágonos	6	11	15	19	23	27	30	34												

Figura 5.3: Construção de colméias com palitos de fósforo. [5]

Observando-se a tabela 5.3, percebe-se que 34 é a menor quantidade comum aos três polígonos. Ou seja, desta forma poderíamos construir 19 favos de mel em forma de triângulos equiláteros, 13 em forma de quadrados e 8 em forma de hexágonos. Vamos calcular a área de cada figura geométrica obtida com os 34 palitos, denotaremos por l a medida do comprimento de cada palito.

- 19 Triângulos equiláteros $A_3 = \frac{L\sqrt{3}}{4} \cdot 19 \Rightarrow A_3 \approx 8,22L^2$
- 13 Quadrados $A_4 = 13L^2$
- 8 Hexágonos $A_6 = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} \cdot 8 \Rightarrow A_6 \approx 20,78L^2$

Analisando os resultados obtidos verificamos que com 34 palitos na construção dos favos em forma de hexágonos a área é maior do que os construídos em forma de triângulos equiláteros ou quadrados. Consequentemente as abelhas ao formarem as paredes com a cera, obtêm assim um recipiente, que é o favo, conseguindo então otimizar o armazenamento de mel em cada um desses favos hexagonais em relação a outros formatos. Embora tenhamos realizado os cálculos apenas para uma superfície que está no plano, se considerarmos uma altura h qualquer, obtemos proporcionalmente um volume maior para os favos hexagonais.

Temos como objetivo nesta atividade, primeiramente fazer com que os alunos realizem uma pavimentação com polígonos regulares congruentes utilizando palitos e a seguir realizando cálculos de área desses polígonos regulares, concluam que a pavimentação feita com formato hexagonal é mais vantajosa por apresentar uma área maior que as outras.

Conclusão

Neste trabalho abordamos principalmente as pavimentações do plano com polígonos regulares congruentes e não congruentes. Foram realizados cálculos para definirmos quais configurações com polígonos regulares congruentes e não congruentes pavimentam o plano chegando a conclusão que são 11 casos. O estudo sobre pavimentações do plano propiciou também a formalização de alguns conceitos em geometria, ampliando desta forma a ideia de congruência, ângulos em polígonos, isometrias, regularidades.

Este trabalho representa uma parte das possíveis formas de se pavimentar o plano, porém outras possibilidades de pavimentações poderão ser alvo de um próximo estudo.

Esperamos que o conteúdo desenvolvido neste trabalho, tenha contribuído para um entendimento geral sobre pavimentações no plano.

Finalmente desejamos que este trabalho possa contribuir como material de apoio aos professores que pretendam explorar esse conteúdo e desenvolvê-lo em suas aulas. A aprendizagem desses conceitos nas séries finais do ensino fundamental poderão ajudá-los a compreender melhor os conceitos abordados no ensino médio.

Acredito que o caminho para o aprendizado passa obrigatoriamente pela vivência e exploração de conceitos, primeiramente de forma concreta (lúdica), posteriormente de forma abstrata. Esse é o objetivo desse trabalho, a possibilidade de desenvolver no aluno o espírito investigativo e crítico, fomentando e perpetuando a busca por novos conhecimentos.

Referências Bibliográficas

- [1] CASTRO, R. F. C. R. *Pavimentações no Plano Euclidiano*. Belo Horizonte: (Monografia), UFMG, 2008.
- [2] LADRILHAMENTOS: matemateca. [Http://www.ime.usp.br/matemateca/textos/ladrilhamento](http://www.ime.usp.br/matemateca/textos/ladrilhamento). Acessado em 20/08/2014.
- [3] MOSAICOS. *Pavimentações*. [Http://www.livrosgratis.com.br/arquivos_livros/cp0207078](http://www.livrosgratis.com.br/arquivos_livros/cp0207078). Acessado em 01/10/2014.
- [4] SANTOS, M. R.; MURARI, C. *Aprendendo Tesselacões de forma Lúdica: Vii encontro nacional de educação matemática*. [Http://www.yumpu.com/pt/document/view/1343471/aprendendo-tesselacões-de-forma-ludica-sbem](http://www.yumpu.com/pt/document/view/1343471/aprendendo-tesselacões-de-forma-ludica-sbem). Acessado em 08/09/2014.
- [5] SILVA, R. A.; XAVIER, C. S. F.; BENTO, A. N. S. *Trabalhando Matemática: concepções contemporâneas: Explorando o formato hexagonal dos favos de mel das abelhas*. [Http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/Comunicacao_81.pdf](http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/Comunicacao_81.pdf). Acessado em 14/10/2014.
- [6] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. *Tópicos da História da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.
- [7] PIRES, C. M. C. *Espaço e Forma: A construção de noções geométricas das quatro séries iniciais do ensino Fundamental*. São Paulo: PROEM, 2012.
- [8] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora Unicamp, 2011.
- [9] GUEDJ, D.; BRANDÃO, E. *O teorema do papagaio*. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
- [10] BICUDO, I. *Os elementos*. São Paulo: UNESP, 2009. ISBN 9788571399358.
- [11] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. São Paulo: Editora SBM (Coleção do Professor de Matemática), 2006.
- [12] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, L. B. *Geometria Euclidiana Plana*. Campinas: Editora Unicamp, 2008.
- [13] REVISTA do Professor de Matemática. São Paulo: Editora SBM, 1999.
- [14] BARBOSA, R. M. *Descobrendo Padrões em Mosaicos*. São Paulo: Editora Atual, 1993.