UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUIS ALEXANDRE CHICONELLO

Números Figurados e as Sequências Recursivas**:** uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados

SÃO CARLOS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUIS ALEXANDRE CHICONELLO

Números Figurados e as Sequências Recursivas**:** uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini

São Carlos
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

C533nf

Chiconello, Luis Alexandre.
Números figurados e as sequências recursivas : uma atividade didática envolvendo números triangulares e quadrados / Luis Alexandre Chiconello. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
86 p.

Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Sequência. 3. Sequência didática. 4. Números poligonais. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini
DM - UFSCar

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
ICMC - USP

Prof. Dr. Renato José de Moura
DM - UFSCar

A Tatiana e Tales, pela paciência infinita.

"Nossa exploração não deve nunca cessar
E o fim de toda exploração
Será voltar ao lugar de onde partimos
E o conhecer pela primeira vez"

T.S. Eliot.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela oportunidade em realizar esse trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini, pela dedicação, competência e precisão em nos orientar.

Aos meus pais Maria e Dirceu, que sempre me incentivaram.

Aos professores Márcio, Renato, Luciene, Grazieli, Ivo, Roberto, Tomas, Paulo Caetano, Pedro e Sampaio, que tanto nos ensinaram.

A todos os colegas da primeira turma do PROFMAT.

Aos meus amigos e companheiros de viagem do PROFMAT, Fabiano, Emerson, Rodrigo e Fabrício.

À professora Lolly, pelo *abstract*.

Especialmente à minha mulher Tatiana, por tudo que fez e faz por mim.

RESUMO

A escassez de atividades envolvendo sequências definidas recursivamente, aliada à importância desse tema para jovens estudantes, foi constatada em pelo menos vinte anos de experiência dando aulas de matemática. A elaboração de um produto de ensino, na forma de folhas de atividades que gradativamente levam o estudante à compreensão do conceito de recursividade, reconhecimento de padrões, testes de conjecturas e obtenção de fórmulas, pôde ser aferida através da aplicação dessas folhas de atividades em duas salas do ensino médio de uma escola técnica estadual. Os dados obtidos dessas aplicações foram analisados e comparados com as hipóteses levantadas (análises prévias), sendo estas feitas durante a elaboração das folhas de atividades. A metodologia de investigação usada foi a Engenharia Didática. Os alunos fizeram as atividades em grupos de dois ou três, foram participativos e se sentiram bastante estimulados em realizar todas as etapas (lições) propostas nas folhas. Constatou-se que o material de ensino produzido funciona, pois atingiu seus objetivos principais, sendo o maior deles o aprendizado do aluno. Acredita-se que o material elaborado possa ser útil a outros professores que desejarem desenvolver o tema proposto em suas aulas, podendo mesmo adaptá-los à realidade de suas turmas. Este trabalho trouxe, para esse autor, uma grande evolução profissional que se iniciou na escolha do tema, passou pela elaboração do material construído, pela aplicação nas turmas e finalmente pela reflexão de tudo que foi feito e que se encontra registrado nessas notas.

Palavras chave: Recursividade. Números poligonais. Sequência didática. Folhas de atividades.

ABSTRACT

The shortage of activities regarding recursive defined sequences, allied to the importance of this theme to young students has been contested in at least twenty years of experience teaching Mathematics. The elaboration of a learning product, in a form of sheets of activities which gradually lead the student to the understanding of the concept of recursion, the pattern recognition, conjectures tests and formulas acquisition, could be inferred by the application of these sheets of activities in two high school classrooms in a technical state school. The data attained from these activities applications were analyzed and compared to the previously formed hypothesis (previous analysis) which were formed during the elaboration of the sheets of activities. The investigation method used was the Didactical Engineering. The students did the activities in groups of two or three students .They were participative and felt challenged in doing every step (lessons) proposed in the sheets. It was verified that the teaching material developed works, as it reached its main goals, the biggest one, the students' learning. It is believed that the material developed may be useful to other teachers who may wish to develop the theme proposed in their classrooms, even adapting them to their students' needs. This work brought to this author a great profession evolution which began with the theme choice, passed through the development of the material, the application in the classes and finally in the reflection of everything that was done and that is recorded in these notes.

Keywords: Recursion. Polygonal numbers. Didactical sequence. Sheets of activities.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo das Funções nas escolas brasileiras ocorre sistematicamente nas séries do Ensino Médio, embora alguns conceitos sejam tratados em séries anteriores, oitavo ano e nono ano do Ensino Fundamental.

Basicamente é apresentado ao estudante dessas séries o conceito de função bem como o estudo das funções elementares: Afim, Quadrática, Exponencial, Logarítmica e Trigonométrica. A proposta dos livros didáticos nacionais, praticamente sua totalidade, sugere que o estudo de sequências, que são funções, seja trabalhado após o estudo das Funções Logarítmicas. Nesses livros, há uma pequena e rápida apresentação do conceito de sequências, seguida do estudo das Progressões Aritméticas (P.A.) e das Progressões Geométricas (P.G.), trabalhados de modo mais sistemático. Não será discutida neste trabalho a maneira como tais conceitos são apresentados aos usuários do livro didático nacional.

A ideia central destas notas é trabalhar com um assunto pouco valorizado na escola básica em particular no Ensino Médio, que são as *Sequências Definidas Recursivamente*, isto é, por *recorrência*. A escassez de tal assunto no Ensino Médio motivou a elaboração de um conjunto de atividades na forma de lições envolvendo sequências, em particular, usando *Números Figurados* (triangulares e quadrados). Com a finalidade de apresentar tais conceitos aos estudantes, conceitos estes inéditos para a maioria deles, promover a conexão entre o estudo de sequências e geometria e desenvolver o raciocínio recursivo nesses estudantes, tais atividades podem oferecer também oportunidades de estudar padrões, testar conjecturas e utilizar notações mais sofisticadas através do estudo de sequências.

Destaca-se também a importância, através dessa atividade, de permitir que os estudantes construam conceitos, elaborem seus caminhos e investiguem soluções, evitando o excesso de aulas expositivas.

Segundo Ediger (1987), os alunos não devem se restringir apenas a aulas expositivas com longas explanações sobre a matéria, mas ter acesso a objetos e materiais. A ideia é colocá-los como indivíduos ativos no processo de aprendizagem.

Este trabalho teve por meta propor uma aula envolvendo Números Triangulares e Números Quadrados para alunos do Ensino Médio, particularmente alunos da 1ª e 2ª séries. Em seguida, aplicar essa aula nas séries citadas acima e investigar os resultados obtidos.

A metodologia usada tem como referencial teórico a Engenharia Didática. Comparada ao trabalho do engenheiro ao realizar um projeto, a Engenharia Didática, segundo Almouloud (2008), "*caracteriza-se em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise das sessões de ensino.*"

A aula elaborada foi dividida em etapas, chamadas de lições. Foram oito lições que gradativamente exploravam o conceito de recursividade. As lições finais, sete e oito, almejaram a generalização das ideias trabalhadas nas lições anteriores. A construção desse material de ensino teve forte influência das chamadas *Activities*, material elaborado pelo NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*).

Abaixo segue uma descrição de cada capítulo do trabalho.

O Capítulo 1 faz um breve comentário sobre sequências, recursividade, números figurados e números poligonais e discorre sobre a importância do estudo de sequências no Ensino Médio.

O Capítulo 2 trata da Metodologia da Pesquisa que, nesse trabalho, seguiu os passos da Engenharia Didática. Tal metodologia, criada pela educadora francesa Michelle Artigue na década de 1980, tem papel fundamental no desdobramento desse trabalho.

O Capítulo 3 faz a apresentação da proposta do trabalho desenvolvido, ou seja, o produto de ensino elaborado, que são as folhas de atividades. Nesse capítulo também foram feitas algumas suposições em relação ao que se espera ao criar uma determinada lição e também a importância, segundo o autor dessas notas, que cada lição tem no contexto da atividade.

O Capítulo 4 destina-se à descrição das atividades aplicadas nas turmas do Ensino Médio. Uma 1ª série do Ensino Médio regular e também uma 2ª série do Ensino Médio, todas estas turmas pertencentes à Escola Técnica Estadual (ETEC) de São José do Rio Pardo-SP. As classes e a escola foram descritas brevemente nesse capítulo, bem como as respostas dadas pelos alunos em cada lição proposta do conjunto de atividades elaboradas. Tal capítulo constitui o teste da proposta de ensino elaborada.

Por fim, no Capítulo 5 encontra-se a conclusão do trabalho. A avaliação desse trabalho mostra-se positiva e entende-se que atingiu seu objetivo, que foi de elaborar um produto de ensino que levasse o aluno, de maneira gradativa, a entender processos que envolvam recursividade, associar com um assunto que ele acabou de estudar (P.A e P.G.) e, ainda, conectar tais conceitos com elementos geométricos, estudar padrões, testar conjecturas e entender notações matemáticas.

O uso de folhas de atividades na forma de lições, que foi adotado neste trabalho, mostra que tais procedimentos didáticos são bem eficazes no que refere à compreensão e consequentemente ao aprendizado dos estudantes do Ensino Médio. Essa maneira de trabalhar, produzindo materiais em forma de lições, nunca foi prática comum do autor destas notas e talvez de muitos colegas professores. Essa é mais uma contribuição, no mínimo pessoal, que este trabalho trouxe.

Encerra-se essa Introdução mostrando que a elaboração deste trabalho está centrada na construção de um material de ensino envolvendo sequências, recursividade e números poligonais, associada à leitura e reflexão de textos da literatura disponível. A tarefa de realizar a escrita deste trabalho trouxe um grande amadurecimento do autor na área de ensino de matemática.

CAPÍTULO 1

SEQUÊNCIAS E RECURSÃO

1.1 Introdução

Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais (sequência infinita) ou o conjunto dos n primeiros números naturais, no caso de uma sequência finita com n elementos.

Deve-se deixar claro ao estudante do Ensino Médio que, após ter estudado Função Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica sequências, como P.A. e P.G., por exemplo, nada mais são do que restrições (ao conjunto dos naturais) de funções Afins e Exponenciais, respectivamente.

A Recursão é um poderoso processo matemático para gerar sequências, em que as condições iniciais são definidas e cada termo posterior da sequência é determinado a partir de um ou mais dos seus antecessores. Tal processo tem muitas aplicações em várias áreas da Matemática, como Combinatória e Equações Diferenciais, sendo indispensável em áreas como a Computação.

Exemplos muitos interessantes e particularmente atrativos aos estudantes são as sequências definidas recursivamente chamadas de *Números Figurados,* como por exemplo, os *Números Poligonais*. Estudados desde a Antiguidade pelos gregos, tais números constituem representações de pontos formando polígonos regulares. Com eles, pode-se formular uma série de atividades interessantes, através das quais se propõe desenvolver algumas competências em Matemática.

Segundo Miller (1990), “*sequências envolvendo números poligonais são exemplos muito interessantes de sequências definidas recursivamente e que podem ajudar os estudantes investigarem o processo de recursão.*”

Através de um conjunto de folhas de atividades envolvendo os *Números Poligonais*, em particular, *Números Triangulares* e *Números Quadrados*, pretende-se, nesse trabalho, mostrar o quanto é importante deixar os alunos investigarem soluções para problemas, buscarem caminhos, proporem soluções, realizarem conjecturas e, consequentemente, produzirem algumas generalizações. As folhas de atividades produzidas constituirão o veículo a ser utilizado para investigar e propor algumas soluções para o problema levantado nesse trabalho.

1.2 Sequências no Ensino Médio

A competência Matemática que todo estudante deve desenvolver, necessariamente deve estar ligada ao estudo das funções. Formular, generalizar, reconhecer e representar relações entre variáveis constituem processos indispensáveis do pensamento matemático. Dessa forma, o conceito de função, a compreensão das funções elementares, bem como suas aplicações seja na própria Matemática como em outras áreas do conhecimento, constituem um dos mais importantes tópicos da Matemática trabalhada no Ensino Médio.

Segundo Abrantes (1999), desde os primeiros anos de escolaridade, as crianças podem ser encorajadas a enxergar padrões e coloca que:

> O reconhecimento de regularidades em matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem de álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstração. Essa capacidade é essencial no desenvolvimento da competência matemática.(ABRANTES, 1999, P. 98)

O ensino de sequências no Ensino Médio praticamente está restrito ao estudo das Progressões Aritméticas (P.A.) e das Progressões Geométricas (P.G.). Embora, infelizmente, não seja tão comum atrelar P.A. como funções afins e P.G. como funções exponenciais, os documentos de orientação nacional Brasil (2002) indicam que o ensino de sequência seja articulado ao ensino de funções e que se dê prioridade às ideias que estão por trás da definição de sequências:

Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas.

Os *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio* (BRASIL, 2006) estabelecem as chamadas Competências e Habilidades em Matemática. Entre elas, destacam-se:

- Ler e interpretar textos de Matemática;
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.);
- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc.);
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

A proposta deste trabalho ao elaborar um conjunto de atividades, permitindo que o aluno, ou o grupo de alunos envolvido, leia, interprete, formule hipóteses, realize testes com estas hipóteses e faça conjecturas, posiciona-se na mesma direção dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

O que os livros didáticos nacionais falam sobre recursão, números figurados atrelados ao estudo de sequências? Pouco ou quase nada. Um dos motivos pelos quais essas atividades foram elaboradas está exatamente na escassez de tal assunto em âmbito nacional.

O ensino de sequência nos livros didáticos brasileiros resume-se praticamente ao estudo de P.A. e P.G. e algumas poucas aplicações desses conceitos, feitas através de exercícios manipulatórios e de alguns problemas.

Em Ribeiro (2010, p.249), um dos itens dos seus objetivos específicos, no capítulo Progressões é o "*reconhecimento de uma sequência numérica e a identificação de suas regularidades"*. No entanto, não há uma referência mais detalhada sobre recursividade, apenas algumas observações que se encontram na página 253 do livro. Há também alguns exercícios selecionados envolvendo sequências com elementos geométricos, entre eles um da OBMEP e outro do ENEM.

Na obra de Barroso (2010), os autores estabelecem que os objetivos do capítulo intitulado sequências deve levar o aluno a reconhecer padrões numéricos e sequências e resolver situações-problema que envolvam sequências e interpretar graficamente P.A. e P.G.. No final do livro há uma referência, no capítulo Resoluções e Comentários, sobre números figurados. Mostram os números quadrados, pentagonais e hexagonais e sugerem que os alunos façam análises e elaborem estratégias para encontrar a lei de formação dos números figurados dados.

A importância em reconhecer padrões, levantar e validar conjecturas e generalizações, deixar claro para os estudante que sequências numéricas são exemplos de funções de domínio natural, se faz presente em Iezzi (2010).

O que se pode observar nas obras citadas acima, que de certa forma reflete a característica do livro didático nacional, é que atividades que envolvam o processo de recursão não é algo tão explorado. Em Miller (1990, p. 555), o autor coloca que: "*O uso de materiais concretos e representações pictóricas permite ao estudante do ensino médio investigar informalmente o processo de recursão.*"

De acordo com Menna (2008, p. 06):

> O ensino tem sido desenvolvido com pouca ênfase nas aplicações, no entanto, as sequências obtidas através da recursividade são ótimas oportunidades de desenvolver modelos matemáticos recursivos em diferentes contextos, como é o caso do modelo matemático que descreve a concentração de drogas no organismo humano.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA DESSA INVESTIGAÇÃO

Fruto da reflexão que associa o conhecimento teórico, obtido pela leitura e análise da literatura disponível, com a experiência adquirida na sala de aula em vinte anos de trabalho, o produto de ensino elaborado, relatado e investigado nesta monografia, tem como referencial teórico a *Engenharia Didática*.

A trajetória deste trabalho seguiu os passos do referencial teórico citado acima em que inicialmente se tem as chamadas *análises prévias*, seguidas, num segundo momento, pela *construção e análise a priori* e, por fim, a *experimentação*, *análise a posteriori* e *validação* do produto de ensino elaborado. Acredita-se que a natureza destas notas vem de encontro com a proposta dos mestrados profissionalizantes, dirigidos para professores em exercício. Segundo Carneiro (2005, p. 03), tais cursos "*preveem a elaboração de um trabalho final de pesquisa profissional, aplicada, com desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional*".

Nas *análises prévias* (Capítulo 1), destaca-se como item principal a ausência do trato do assunto recursividade no Ensino Médio, relatado no capítulo anterior.

Na *análise a priori* (Capítulo 3), ressalta-se a importância de se produzir um material no qual os estudantes poderão manipular objetos e tomar decisões, com ou sem a interferência do professor, visando permitir que os alunos trabalhem em sala e não apenas se posicionem de maneira passiva em aulas expositivas, transcrevendo o que está na lousa para o caderno. Num âmbito mais específico, essa fase do estudo fará a descrição passo a passo do material produzido, levantando hipóteses e questionando sobre a validação das mesmas.

Seguindo os passos da Engenharia Didática, serão feitas a *análise a posteriori* e a *validação da experiência* (Capítulo 4). Tal ponto confrontará as hipóteses levantadas com os resultados efetivamente obtidos através da aplicação do material produzido. Com isso, espera-se gerar algumas conclusões desejáveis e também as indesejáveis, sendo estas importantes para que se possa refletir sobre os pontos de insucessos e alterá-los quando possível.

Por fim, esse trabalho tem por objetivo o ensino/aprendizagem no que se refere ao estudo das funções, sequências e recursividade, utilizando a construção de uma sequência didática com a meta de proporcionar ao aluno condições para construir e compreender tais conceitos.

CAPÍTULO 3

APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA

3.1 Introdução

Esse capítulo tem por meta descrever as folhas de atividades aplicadas aos alunos. A descrição das mesmas será feita lição por lição na mesma ordem que os alunos receberam nas suas folhas de atividades. Alguns comentários explicativos serão colocados de forma a justificar a escolha do assunto abordado na lição. A fim de visualizar a atividade por completo foi criado o **Apêndice A**, e as respostas esperadas encontram-se no **Apêndice B** deste trabalho. Em relação aos comentários, foram colocadas as intenções a serem atingidas bem como algumas suposições no que se refere às respostas esperadas.

3.2 Idealização da Proposta

Praticamente toda minha experiência profissional de vinte anos lecionando tanto na rede pública como na rede particular limitou-se ao Ensino Médio e ao Ensino Superior.

No Ensino Médio, o assunto funções e seus desdobramentos pode ser considerado um dos principais tópicos de matemática elementar a ser trabalhado nesse nível de ensino. O excesso de aulas expositivas e, muitas vezes, a obrigatoriedade em seguir um modelo de programação com conteúdos prontos, fazem com que a compreensão e consequentemente o ensino de assuntos fundamentais fiquem muito aquém do que se espera de um aprendizado sólido e consciente. É muito comum o professor imaginar que grande parte do que ele explicou nas suas aulas os alunos captaram e entenderam; no entanto, a realidade aparece no momento da aferição desses conteúdos. Tal fato não é raro em minha trajetória como professor.

Minha motivação em construir um conjunto de folhas de atividades envolvendo o conceito de recursividade, divididas em lições, obedecendo a uma determinada ordem que se julga coerente, vem ao encontro de uma insatisfação pessoal no que se refere à compreensão de tópicos importantes da Matemática que ficam de lado no Ensino Médio. Além disso, a mudança de atitude ao colocar os alunos em grupos e deixá-los trabalharem e tomarem suas decisões representa, para esse autor, uma prática que não era tão comum em outros tempos.

Especificamente em relação ao assunto que envolve esse trabalho, percebi ao longo da minha experiência profissional que o estudo de sequências limita-se praticamente ao estudo da P.A. e da P.G.. Define-se o que é cada uma das sequências, obtém-se os seus termos gerais, suas fórmulas de soma e faz-se uma série de exercícios, alguns puramente manipulatórios e outros na forma de problemas. A proposta, ao criar essas folhas de atividades, está na pouca ou nenhuma ênfase que se dá ao tópico que envolve a recursividade. Para que se tornasse mais leve e atrativa, a ideia foi explorar a visualização através dos números figurados poligonais, triangulares e quadrados.

3.3 Descrevendo a atividade

O material foi elaborado para que os alunos o fizessem em grupos com dois ou três elementos em cada equipe. O tempo de duração foi estipulado em cem minutos. Além das folhas com as atividades, cada grupo recebeu um saquinho contendo cinquenta cubinhos de madeira. A atividade foi dividida em lições, em um total de oito. Cada uma das oito etapas (lições) tem uma finalidade e uma sequência, que tem por meta levar o aluno progressivamente a construir a ideia da recursividade, seja por elementos geométricos, seja por elementos algébricos.

Esta atividade foi aplicada nas primeiras e nas segundas séries do Ensino Médio, logo após os alunos terem estudado P.A. e P.G.. A escolha de aplicar esta atividade após o estudo de sequências teve por meta aferir a conexão que os alunos poderiam fazer com o estudo de P.A., feito de maneira tradicional, seguindo os passos do livro didático e também de dimensionar o que eles captaram dos ensinamentos trabalhados anteriormente sobre sequências.

FOLHA DE APRESENTAÇÃO

A folha de apresentação, composta por um cabeçalho com tempo de duração da atividade fazendo uma breve apresentação dos números figurados, coloca algumas representações geométricas de números figurados quaisquer e faz um destaque dos números figurados poligonais, triangulares e quadrados, sendo estes os objetos de estudo do material.

Números figurados são números que podem ser representados por uma coleção de pontos numa configuração geométrica. Conhecidos desde a antiguidade pelos gregos e reverenciado por eles, tais números e suas disposições geométricas são incrivelmente ricos em propriedades de vários tipos. Veja abaixo a representação dos dois mais conhecidos números figurados.

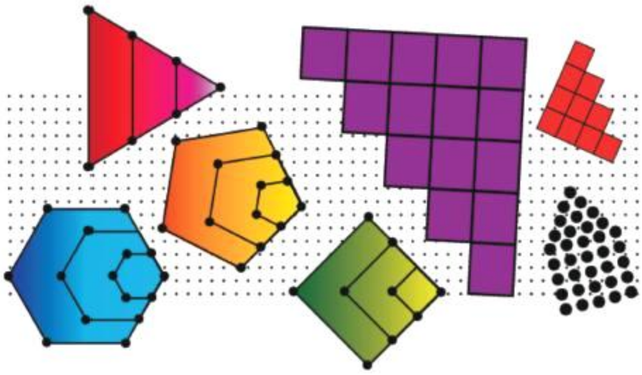


Figura 1: Números Figurados

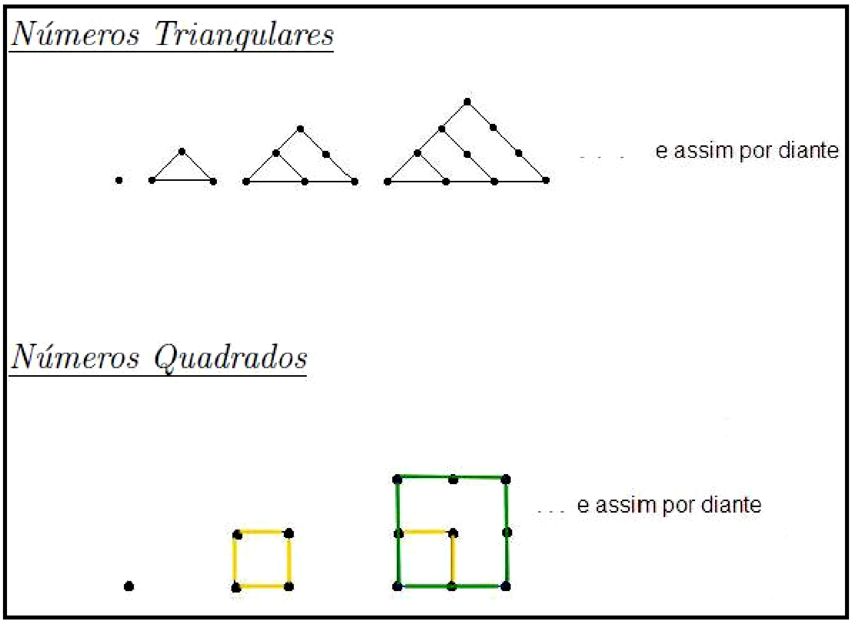


Figura 2: Números Poligonais Triangulares e Quadrados

LIÇÃO 1

Nesta lição a proposta do primeiro contato é utilizar o material concreto. A manipulação de objetos nesta atividade com os cubinhos de madeira é de fácil manuseio, estimula a introdução ao assunto, é bem aceita pelos alunos e ainda, para os estudantes do Ensino Médio, é uma atividade pouco explorada.

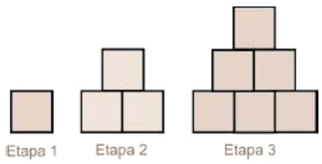
Na *Parte A,* os alunos devem, inicialmente, representar na carteira as configurações dos cubos que se encontram na folha de lição. Aqui também está sendo observada a maneira como esses estudantes farão a representação física desses cubinhos na carteira, já que na folha a representação é plana.

Além das representações foram criados três itens ((a), (b) e (c)), tanto para os números triangulares quanto para os números quadrados, perguntando quantos cubinhos a mais foram colocados em relação à etapa anterior. A atividade convida o estudante a iniciar o pensamento recursivo.

Lição 1 Parte A

Agora que você já sabe o que é um número figurado (*Triangulares e Quadrados*) , seguindo os exemplos abaixo, represente-os com os cubinhos que você recebeu.

• Primeiro , faça com os cubinhos, sobre a carteira, as 3 primeiras representações dos **números triangulares** que você vê abaixo:



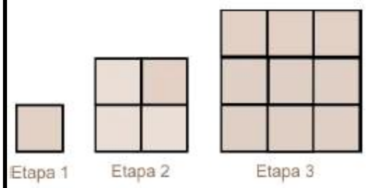
(a) Na segunda etapa , quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à primeira etapa? **Resp.**_______

(b) Na terceira etapa , quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à segunda etapa? **Resp.**_______

(c) Agora , faça com os cubinhos na sua carteira, a quarta etapa, e diga quantos cubinhos a mais você colocou , em relação à terceira etapa. **Resp.**_______

Figura 3: Parte A - Números Triangulares

• Vamos agora , fazer o mesmo , mas para os **números quadrados**.



(a) Na segunda etapa , quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à primeira etapa? **Resp.**_______

(b) Na terceira etapa , quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à segunda etapa? **Resp.**_______

(c) Agora , faça com os cubinhos na sua carteira, a quarta etapa, e diga quantos cubinhos a mais você colocou , em relação à terceira etapa. **Resp.**_______

Figura 4: Parte A - Números Quadrados

Na Parte B, os alunos devem apenas responder se montar a etapa vinte ou a etapa cem seria trabalhoso ou não. O que se espera é que o estudante perceba que construir uma sequência muito grande com cubinhos de madeira não seria nada prático, não só pelo trabalho de montar, como também pelo tempo de execução de cada arranjo.

Parte B | Pergunta

Seria trabalhoso para você , montar a Etapa 20 ou mesmo a Etapa 100 , tanto para os **números triangulares** quanto para os **números quadrados**?(Coloque um x na frente da sua resposta)

Sim, seria trabalhoso ____ **Não seria trabalhoso** ____

Figura 5: Parte B (Pergunta)

COMENTÁRIOS DA LIÇÃO 1

Essa lição encerra-se com o intuito geral de um primeiro contato com números figurados e que, de modo intencional, explora o manuseio de cubos de madeira com a finalidade de usar materiais concretos na sala de aula instigando a percepção de sequências e da recursividade.

LIÇÃO 2

A lição 2 tem dupla finalidade: estudar representações algébricas e geométricas. Primeiro, a representação pictográfica no papel de pontos. Essa atividade é bastante simples. O aluno deve seguir o modelo proposto tanto para números triangulares quanto para os números quadrados. A finalidade é fazer o estudante perceber padrões através do apelo visual (geométrico).

Embaixo de cada desenho ele deve fazer o trabalho algébrico. Colocar a quantidade de pontos, como no modelo. Note que, nessa lição, já há um convite à simbolização, pois o aluno deve perceber que, por exemplo, $T_3 = 6$ representa a quantidade de pontos da terceira configuração dos números triangulares, $Q_2 = 4$ representa a quantidade de pontos da segunda configuração dos números quadrados. Importante destacar que que essa atividade será aplicada a turmas que já tiveram uma iniciação ao estudo de sequências e também ao estudo de Progressões Aritméticas.

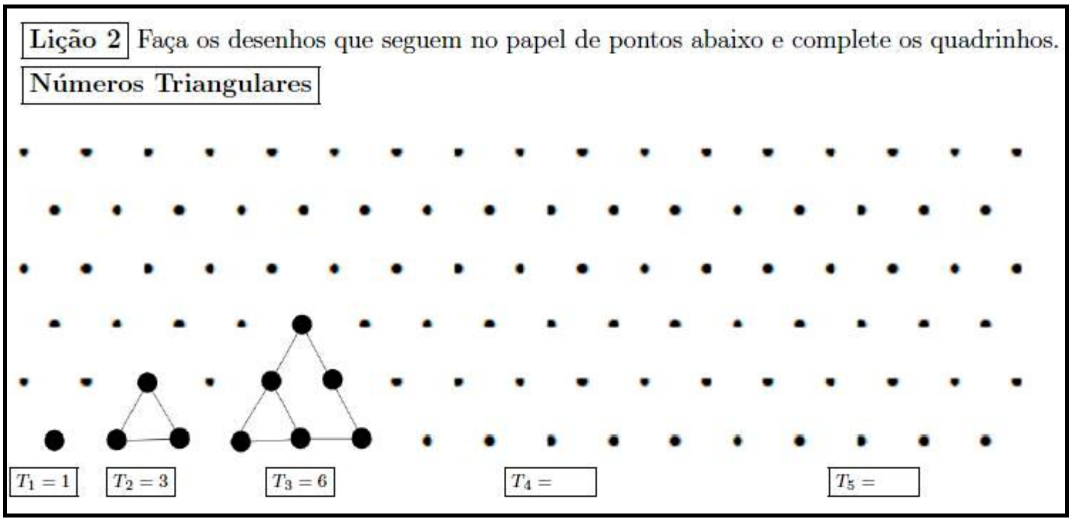


Figura 6: Números Triangulares

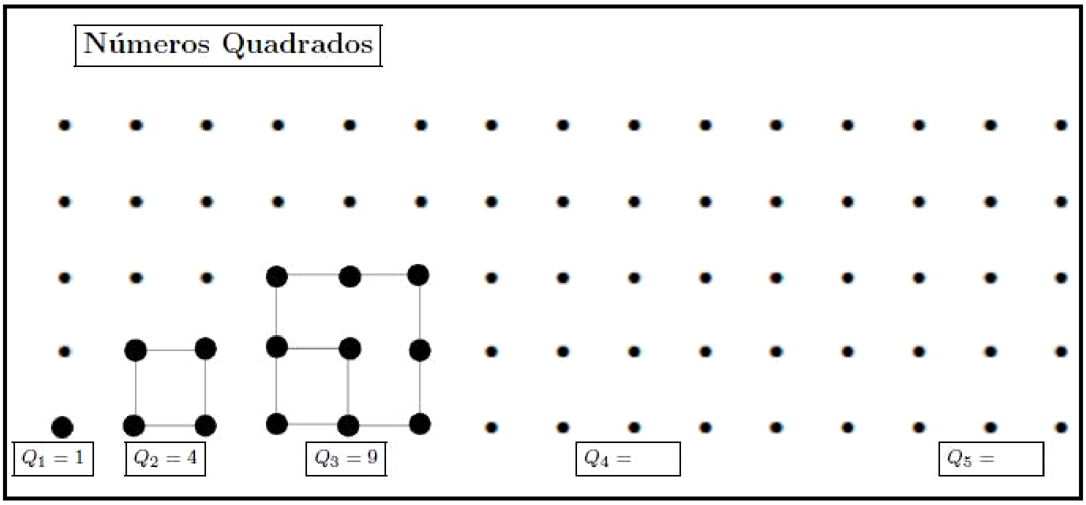


Figura 7: Números Quadrados

COMENTÁRIOS DA LIÇÃO 2

Espera-se que os alunos consigam facilmente passar por essa lição, que explora a capacidade de visualização, representação e continuação dos modelos dados. Quanto à parte algébrica basta, após o desenho, contar o número de pontos desenhados e apresentar a resposta.

LIÇÃO 3

A lição 3, Parte A, assim como outras lições que seguem, é de natureza algébrica. Na parte A, o aluno deve seguir o modelo dos itens (a) e (b) e completar os espaços que faltam para os números triangulares; já na parte B a atividade é a mesma, mas para os números quadrados. A meta aqui é levar o aluno lentamente à ideia de recursão. O estudante deve perceber que para se obter a quantidade de pontos do quarto termo (T_4) ele precisa saber quantos pontos terá obtido na terceira etapa (T_3), por exemplo, e assim por diante. Além disso, deve começar a se familiarizar com as notações. Nos nossos estudantes, a familiarização com a notação não ocorre no ritmo que muitos professores acham que se dá.

Na parte B, para os números quadrados, há um pequeno acréscimo de dificuldade. O aluno é convidado a perceber, pelos exemplos dados, que em cada nova etapa soma-se um número ímpar, $Q_2 = Q_1 + \underbrace{3} = 1 + 3 = 4$, $Q_3 = Q_2 + \underbrace{5} = 4 + 5 = 9$. Note que existe uma observação nos itens (a) e (b). A meta aqui é mostrar como podemos escrever qualquer ímpar, já que tal informação será importante nas lições futuras.

$\boxed{\text{Lição 3}}$

$\boxed{\text{Parte A}}$ Complete a atividade para os **números triangulares** :

(a) $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

(b) $T_3 = T_2 + 3 = 3 + 3 = 6$

(c) $T_4 = T_3 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(d) $T_5 = T_4 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(e) $T_6 = T_5 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(f) $T_7 = T_6 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(g) $T_8 = T_7 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(h) $T_9 = T_8 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

Figura 8: Parte A

$\boxed{\text{Parte B}}$ Agora , vamos completar o que se pede para os **números quadrados** :

(a) $Q_2 = Q_1 + 3 = 1 + \underbrace{3} = 4$ (Note que $3 = 2 \cdot (2) - 1$)

(b) $Q_3 = Q_2 + \underbrace{5} = 4 + 5 = 9$ (Note que $5 = 2 \cdot (3) - 1$)(Observe que qualquer número ímpar pode ser escrito na forma $2 \cdot n - 1$)

(c) $Q_4 = Q_3 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(d) $Q_5 = Q_4 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(e) $Q_6 = Q_5 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(f) $Q_7 = Q_6 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(g) $Q_8 = Q_7 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

Figura 9: Parte B

COMENTÁRIO DA LIÇÃO 3

Nesse ponto é importante tecer um comentário sobre esse tipo de atividade, especificamente sobre essa lição. A experiência em sala de aula mostra que nossos alunos sentem muita dificuldade com notações matemáticas. Muito comum após várias aulas de um determinado assunto é o aluno questionar o professor sobre o que significa tal símbolo. É comum também o professor ficar admirado com esse tipo de comentário do aluno, afinal achava que a plateia já estava bem familiarizada com a simbologia adotada. O professor segue seu ritmo e nem percebe o quanto os alunos ainda necessitam de um trato mais detalhado no que se refere às notações matemáticas.

LIÇÃO 4

Essa lição é uma continuação da lição 3, com algumas dificuldades a mais. Na parte A, é dado o valor de $T_{20} = 210$ e $T_{100} = 5050$. Solicita-se que o aluno complete:

$$T_{21} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$T_{22} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$T_{101} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$T_{102} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Figura 10: Parte A (itens (a) e (b))

Espera-se que o estudante não tenha tanta dificuldade nesses itens. No entanto, nessa lição, o cuidado maior está no item (c).

$$T_{19} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$T_{99} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Figura 11: Parte C

Na parte B, temos a mesma atividade para os números quadrados.

$\boxed{\text{Parte B}}$ - Vamos agora fazer o mesmo mas para os **números quadrados**

Tendo a informação de que $\boxed{Q_{20} = 400}$, complete:

(a) $Q_{21} = 400 + [2 \cdot (21) - 1] = 400 + 41 = 441$

(b) $Q_{22} =$ ____________________ = ____________________ =

(c) $Q_{19} =$ ____________________ = ____________________ =

Tendo a informação de que $\boxed{Q_{100} = 10\,000}$, complete:

(a) $Q_{101} = 10\,000 + [2 \cdot (101) - 1] = 10\,000 + 201 = 10201$

(b) $Q_{102} =$ ____________________ = ____________________ =

(c) $Q_{99} =$ ____________________ = ____________________ =

Figura 12: Parte B

COMENTÁRIO DA LIÇÃO 4

Espera-se que no item (C) o número de acertos não seja tão grande. Afinal, a hipótese é que alguns, ou vários alunos façam:

$T_{19} = T_{20} - 19$, quando o correto é $T_{19} = T_{20} - 20 = 210 - 20 = 190$

$T_{99} = T_{100} - 99$, quando o correto é $T_{99} = T_{100} - 100 = 5050 - 100 = 4950$

Encerra-se essa lição com a expectativa de que os alunos até esse ponto da tarefa tenham percebido que tanto para um número triangular quanto para um número quadrado, obter a quantidade de pontos da próxima etapa é necessário conhecer a quantidade de pontos da etapa anterior.

LIÇÃO 5

Esse ponto da atividade é muito importante já que o aluno deve, em função do que ele já fez antes, completar o que falta, mas perceber que agora não estamos na etapa três (3) ou quatro (4), como dos exemplos numéricos anteriores, mas numa etapa *n* qualquer (*n natural*).

Lição 5

Chegamos aqui num ponto importante de nossa atividade . Complete:

$$\boxed{T_n = T_{n-1} + \_\_\_\_}$$

(*) Caso você não consiga ou tenha dúvidas, tente observar o que você já fez nas **lições 2 e 3** ; note que a expressão T_{n-1} é a antecessora (que está antes) de T_n

Agora complete para os **números quadrados**

$$\boxed{Q_n = Q_{n-1} + \_\_\_\_}$$

Figura 13: Lição 5

COMENTÁRIO DA LIÇÃO 5

Algumas hipóteses no que se refere às dificuldades que podem surgir são:

- Alguns alunos ainda sentir-se-ão inseguros com a notação e ficarão confusos com o que completar;
- Não perceberão que n é o sucessor de n-1;
- Não perceberão que T_n corresponde à etapa que sucede a etapa T_{n-1} .

Por esse motivo, é solicitado numa observação denotada por (*) que o aluno volte paras as lições 2 e 3, caso tenha dificuldade.

LIÇÃO 6

Parece bastante natural que quando um estudante se depara com cálculos como $T_3 = 1 + 2 + 3$, ele faça a conta e coloque $T_3 = 6$. Nessa lição, a tentativa é mostrar que o que importa, em muitos casos, não é somente o resultado final, se vai dar 20 , 30 ou 60 e sim, o que levou o estudante ao resultado. Por isso foi usada a expressão *calcular sem calcular*; uma expressão um tanto estranha aos ouvidos dos nossos alunos.

Lição 6

Vamos agora *calcular sem calcular*, parece estranho não é ? O que você deve fazer nessa atividade é apenas indicar a soma mas sem realizar o cálculo.

Parte A Para os **números triangulares**

(a) $T_1 = 1$

(b) $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2$

(c) $T_3 = T_2 + 3 = \underbrace{1 + 2}_{T_2} + 3$

(d) $T_4 = T_3 + \_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{T_3} + \_\_\_$

(e) $T_5 = T_4 + \_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{T_4} + \_\_\_$

(f) $T_6 = T_5 + \_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{T_5} + \_\_\_$

Figura 14: Parte A

$\boxed{\text{Parte B}}$ **Para os números quadrados**

(a) $Q_1 = 1$

(b) $Q_2 = Q_1 + 3 = 1 + 3$

(c) $Q_3 = Q_2 + 5 = \underbrace{1 + 3}_{Q_2} + 5$

(d) $Q_4 = Q_3 + \_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{Q_3} + \_\_\_$

(e) $Q_5 = Q_4 + \_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{Q_4} + \_\_\_$

(f) $Q_6 = Q_5 + \_\_\_ = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{Q_5} + \_\_\_$

Figura 15: Parte B

COMENTÁRIO DA LIÇÃO 6

Nesse ponto da atividade, o que se quer destacar é a *indicação das somas* e tentar levar o aluno a perceber que se trata de somas de Progressões Aritméticas. Mesmo que ele não tenha conseguido fazer a lição 5, ele pode fazer a lição 6 sem muitos problemas.

LIÇÃO 7

Essa lição é muito importante. Tem como finalidade escrever uma fórmula para números triangulares na parte A da lição, e uma fórmula para números quadrados, na parte B da lição. Primeiramente, o que se deseja é que o aluno leia atentamente o texto, pois nele terá todos os passos para se chegar no objetivo desejado, que é escrever a fórmula.

Inicialmente pede-se que o aluno complete a sequência nos espaços destinados. Espera-se que a maioria dos grupos não tenha dificuldade em completar. Em seguida pede-se que os alunos deem o nome de uma sequência que seja do tipo (1,2,3,4,5,6, ... , n). A ideia é fazer o resgate do conceito de P.A., que acabaram de estudar.

Lição 7

Parte A

Agora , complete a sequência nos espaços:

$$\boxed{T_n = 1 + 2 + 3 + \_\_ + \_\_ + \_\_ + \cdots + n}$$

• Qual é o nome que se dá a uma sequência de números reais que seja do tipo:$(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n)$?

Resposta: _____ ; Qual é o primeiro termo dela? **Resposta:** _____

Qual é a razão dessa sequência? **Resposta:** _____

Figura 16: Parte A

• Vamos lembrar como se calcula a soma dos termos da sequência $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n)$ .Trata-se de uma **P.A.** , com $\boxed{a_1 = 1}$ e $\boxed{a_n = n}$ e a soma dos n termos de uma **P.A.** é dada pela expressão $\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$. Para encontrarmos uma fórmula para os nossos **números triangulares**, podemos realizar a soma da **P.A.** $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Use a fórmula da soma da **P.A.** e escreva uma fórmula para os **números triangulares**.

$$\boxed{T_n = \_\_\_\_\_\_}$$

Figura 17: Usando a Soma da P.A.

$\boxed{\text{Parte B}}$

Agora vamos trabalhar da mesma forma para os números quadrados :

$$\boxed{Q_n = 1 + 3 + 5 + \_\_ + \_\_ + \_\_ + \cdots + (2n - 1)}$$

• Você consegue identificar uma sequência de números reais que seja do tipo:

$(1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots, (2n - 1))$ que você já tenha estudado? Qual é o nome dessa sequência.

Resposta: _____ Qual é o primeiro termo? **Resposta:** _____ Qual a razão? **Resposta:** _____

• Como se calcula soma dos termos da sequência acima? Use essa informação para obter uma fórmula para os nossos **números quadrados**.

$\boxed{Q_n = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ =}$ $\boxed{Q_n =}$

Figura 18: Usando a Soma da P.A. novamente

Para completar essa lição, pede-se que o aluno, agora de posse da fórmula, calcule T_{1000} e Q_{1000} .

Veja que , de posse dessas fórmulas , podemos calcular de maneira simples os valores de T_{1000} e Q_{1000} . Você seria capaz de calcular tais valores usando a fórmula?

$\boxed{T_{1000} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ =}$

$\boxed{Q_{1000} = \quad =}$

Figura 19: Usando as fórmulas obtidas

COMENTÁRIO DA LIÇÃO 7

Essa lição dá todas as condições para que o aluno chegue na fórmula desejada. Por esse motivo é feita uma revisão dos conceitos de P.A. e dada a fórmula da soma da P.A.

Mesmo assim, espera-se que uma parcela dos grupos não consiga chegar na expressão desejada.

A pouca habilidade em ler e consequentemente interpretar textos pode ser o agravante para o insucesso do aluno nessa lição. Ainda, a dificuldade dos alunos em trabalhar com expressões literais também pode contribuir para que ele não consiga escrever as fórmulas desejadas na lição.

O intuito dessa lição é mostrar que uma fórmula é resultado de uma ideia. Representa o fim de uma história que foi construída antes. Acredita-se que o estudante que consiga chegar até esse ponto da atividade e tenha tido sucesso na obtenção dessas expressões, terá uma satisfação muito grande principalmente pelo fato de ter, com suas próprias mãos, chegado a um resultado mais geral de algo que vinha manipulado de maneira mais particularizada.

LIÇÃO 8

Por fim, a descrição das folhas de atividades encerra-se na lição 8. Essa lição inicia-se novamente com um apelo visual (geométrico). Tomam-se os três primeiros números quadrados e pede-se que os alunos observem o segmento de reta que separa os números quadrados em duas regiões formadas por pontos que representam números triangulares. A lição é composta de três partes, A, B e C. Na parte A, a atividade tem natureza geométrica. Segue os três exemplos dados no modelo, ou seja, separar com um segmento de reta as regiões. Na parte B, mais algébrica, o aluno deve seguir o modelo. Espera-se que ele perceba que a soma de dois números triangulares sucessivos dá um número quadrado de ordem igual ao maior triangular.

Na parte C, temos a generalização. Também é colocada a expressão para o número triangular de ordem T_{n-1} e de ordem T_n e pede-se para que o estudante realize a soma e confirme sua conjectura.

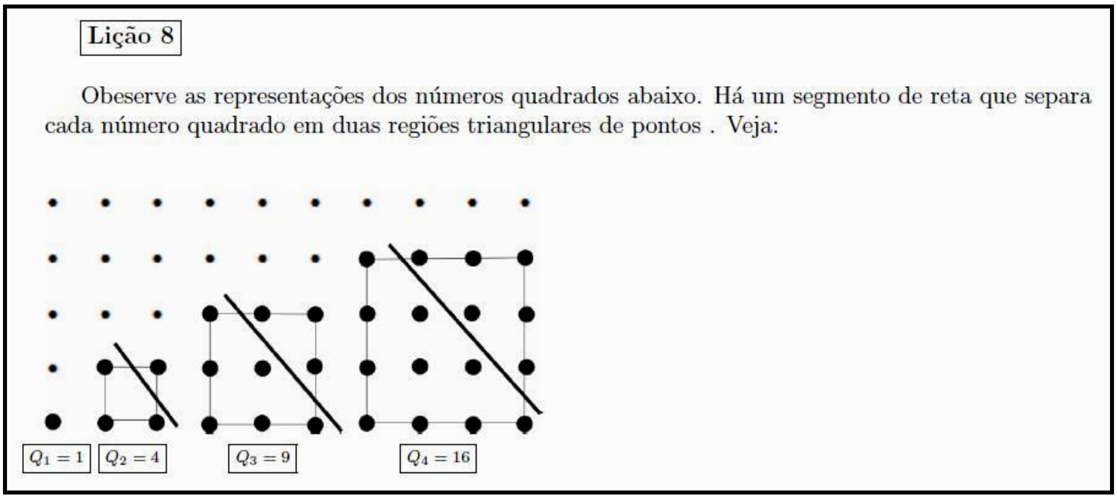


Figura 20: Lição 8

Parte A

Seguindo os exemplos dados acima separe com um segmento de reta os números quadrados dados abaixo , que representam a continuação dos 4 primeiros dados no exemplo acima.

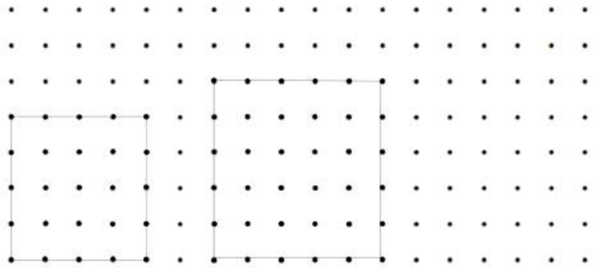


Figura 21: Lição 8: Parte A

Parte B Complete:

(a) $T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = Q_2$

(b) $T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = Q_3$

(c) $T_3 + T_4 = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = Q_{\_}$

(d) $T_4 + T_5 = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = Q_{\_}$

(e) $T_5 + T_6 = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = Q_{\_}$

Parte C Complete : $\boxed{T_{n-1} + T_n = Q_{\_}}$

Veja que : $T_{n-1} = \dfrac{[1 + (n-1)] \cdot (n-1)}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = \dfrac{n^2 - n}{2}$

$T_n = \dfrac{(1+n) \cdot n}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2}$

Calculando a soma $T_{n-1} + T_n = \dfrac{n^2 - n}{2} + \dfrac{n^2 + n}{2} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = Q_{\_}$

Figura 22: Lição 8 - Parte B e Parte C

COMENTÁRIO DA LIÇÃO 8

A lição 8 fecha o conjunto de lições propostas com uma atividade que visa conectar os números quadrados aos números triangulares. Em outras palavras, propõe mostrar a existência de uma relação entre esses números poligonais.

COMENTÁRIO FINAL

A sequência didática construída encerra-se com a expectativa de que o estudante possa ter se envolvido no tema proposto, através das folhas de atividades e da interação com seus colegas de grupo. Especificamente, tenha se iniciado ao raciocínio recursivo através dos números poligonais triangulares e quadrados.

A suposição é que alguns grupos consigam chegar bem até a última lição e de maneira correta. No entanto, não se espera que todos consigam finalizar as lições e da maneira correta, principalmente as lições 7 e 8 que exigem mais maturidade matemática por parte dos alunos.

A proposta desse trabalho é a elaboração e análise do produto de ensino descrito nesse capítulo. Faz-se necessário dizer que ele não representa um produto acabado e sem arestas. O próximo passo é a experimentação, ou seja, a aplicação do que foi elaborado e conjecturado.

Segundo Carneiro (2005, p. 103), ao expressar nossas hipóteses, *"é preciso ter consciência de que vamos voltar a elas, durante a experimentação, checando-as inquirindo-as. Será que o plano funciona? Será que nossas hipóteses são válidas?*".

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DAS FOLHAS DE ATIVIDADE

4.1 Introdução

Esse capítulo tem a finalidade de apresentar e descrever brevemente a escola onde foi aplicada a atividade elaborada nesse trabalho. Destaca-se, também, a descrição das salas onde foram aplicadas as atividades e um breve histórico do professor aplicador, autor dessa monografia. Seguindo, temos uma análise das respostas obtidas pelos grupos de alunos que participaram das atividades. A análise será feita por sala. Como foi relatado antes, essa atividade foi aplicada duas vezes em duas salas distintas. As escolhas das turmas se justificam apenas por serem turmas onde o autor dessa monografia ministrava suas aulas.

4.2 Descrevendo a escola e o professor

A *Escola Técnica (ETEC) de São José do Rio Pardo* iniciou suas atividades na referida cidade em 20 de fevereiro de 2006 com os cursos de Técnico em Informática nos períodos vespertino e noturno e Técnico em Web Design no período Vespertino. Em 2008, novos cursos foram oferecidos à comunidade de São José do Rio Pardo e região: Técnico em Administração, Técnico em Redes de Computadores e Ensino Médio. Atualmente oferece também o Ensino Médio Integrado que é um curso de Ensino Médio juntamente com um curso de nível técnico, no caso dessa escola, técnico em Informática. A escola está instalada na Avenida Alexandre Carlos de Melo, 18, Jardim Aeroporto São José do Rio Pardo/SP num imponente prédio recém construído, fruto de um investimento considerável do Governo do Estado de São Paulo, obra orçada em mais de 9 milhões de reais.

A estrutura da escola é considerada excelente. Lousas brancas com 4 metros de comprimento, cada sala é equipada com um computador e um projetor de multimídia. Além disso, a escola possui mais de 5 laboratórios de informática, laboratórios de química, biologia, quadra de esportes, e biblioteca. Muitas escolas particulares não possuem a estrutura que esta possui.

A escola atende à população de São José do Rio Pardo e região. Os alunos que ingressam nessa instituição o fazem mediante a aprovação no chamado *Vestibulinho*, um processo seletivo que em determinadas épocas pode ser relativamente concorrido. O Ensino Médio, por exemplo, tem sido desde quando começou, o curso de maior procura, chegando a ter quase 04 candidatos por uma vaga.

O número de alunos por sala é no máximo 40. Quando algum aluno desiste, alguém que esteja interessado e que esteja na lista de espera pode ingressar. Dessa forma, as salas de Ensino Médio praticamente ficam com 40, 39 ou 38 alunos, sendo raras as turmas com número inferior a 38 alunos. A classe social da maioria é média-baixa.

O Ensino Médio começou a funcionar na ETEC - São José do Rio Pardo no ano de 2008. Um ano antes, a escola abriu concurso em caráter indeterminado, para professores ministrarem aulas nessa categoria de ensino. Fui aprovado no concurso e atualmente leciono Matemática em 5 salas do Ensino Médio, sendo elas: 1° ano A, 2° ano A, 3° ano A e 1° ano Integrado e 2° ano Integrado.

4.3 Descrevendo as salas da aplicação

A aplicação da atividade se deu em 2 salas. A primeira sala aplicada foi o 2° ano A, no dia 16 de outubro de 2012. Especificamente nessa turma ocorreu que sequências, P.A. e P.G. eram assuntos que não estavam programados na grade curricular deles para o 1° ano. Dessa forma, tais assuntos foram tratados no 2° ano. Para os alunos do 1° ano A tais assuntos já estavam nos conteúdos programáticos do 1° ano. Assim, após esses alunos terem estudado P.A. e P.G. a atividade foi aplicada no dia 27 de novembro de 2012.

No 2° ano A, 40 alunos participaram da atividade. Formaram-se 12 grupos com 3 alunos em cada grupo e 2 grupos com 2 alunos em cada. Já no 1° ano A formaram-se 11 grupos de 3 alunos e 2 grupos de 2 alunos, totalizando 37 alunos participantes.

Em todas as turmas aplicadas houve um envolvimento integral dos alunos. De um modo geral, foram bem receptivos à atividade e se mostraram muito participativos.

4.4 Aspectos gerais da aplicação

A aplicação da atividade ocorreu de forma semelhante nas duas turmas. Os alunos foram divididos em grupos como relatado nos parágrafos anteriores. Não era permitido que um grupo se comunicasse com outro grupo. Todas as respostas deveriam ser dadas na folha de atividades que cada grupo recebeu (uma folha por grupo). A interferência do professor aplicador nas respostas dos alunos foi mínima, praticamente nula. Nas três turmas as atividades foram aplicadas em aulas duplas de 50 minutos cada aula. Logo, a atividade teve duração máxima de 100 minutos conforme planejado. Durante a aplicação não foi permitido que os alunos mudassem de grupo. Uma vez estabelecido um grupo, este iria até o fim da aplicação. A aplicação transcorreu normalmente, sem incidentes.

4.5 Análise da aplicação no 2° ano A

Essa turma foi a primeira que recebeu a aplicação da atividade. Como foi relatado antes, esses alunos não tinham estudado sequências, P.A. e P.G. no primeiro ano do Ensino Médio. Na grade curricular deles, tal tópico estava programado para o segundo ano. A aplicação da atividade se deu logo após os alunos dessa série terem estudado P.A. e P.G.

Quarenta (40) alunos participaram da atividade, divididos em 12 grupos com 3 alunos em cada grupo e 2 grupos com 2 alunos em cada.

4.5.1 Análise das respostas

<u>LIÇÃO 1</u>

Na lição 1, parte A, apenas um grupo errou os itens (c) tanto para os números triangulares quanto para os números quadrados. Na parte B dessa lição ocorreu algo curioso. Dos 14 grupos, 5 grupos, aproximadamente, 36% disseram que *não seria trabalhoso* montar os cubos até a vigésima etapa ou mesmo até a centésima etapa. Alguns alunos, durante a aplicação, perguntaram-me sobre esse item. Percebe-se que alguns não entenderam a pergunta.

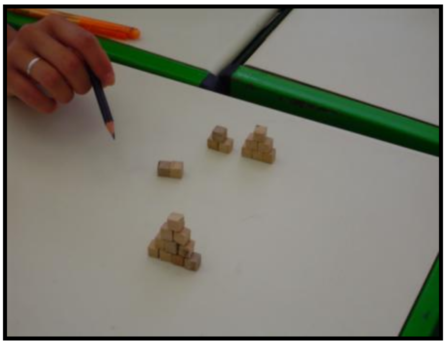


Figura 23: Usando os cubinhos de madeira

<u>LIÇÃO 2</u>

Na lição 2, apenas dois grupos (14%) fizeram configurações um pouco diferentes, ligando ou não por meio de segmentos, os pontos do papel. Os demais grupos reproduziram exatamente o modelo proposto. Veja abaixo, na Figura 24, um exemplo de um grupo que não ligou os pontos com segmentos, como no modelo, para os números triangulares, já para os números quadrados o grupo seguiu o modelo.

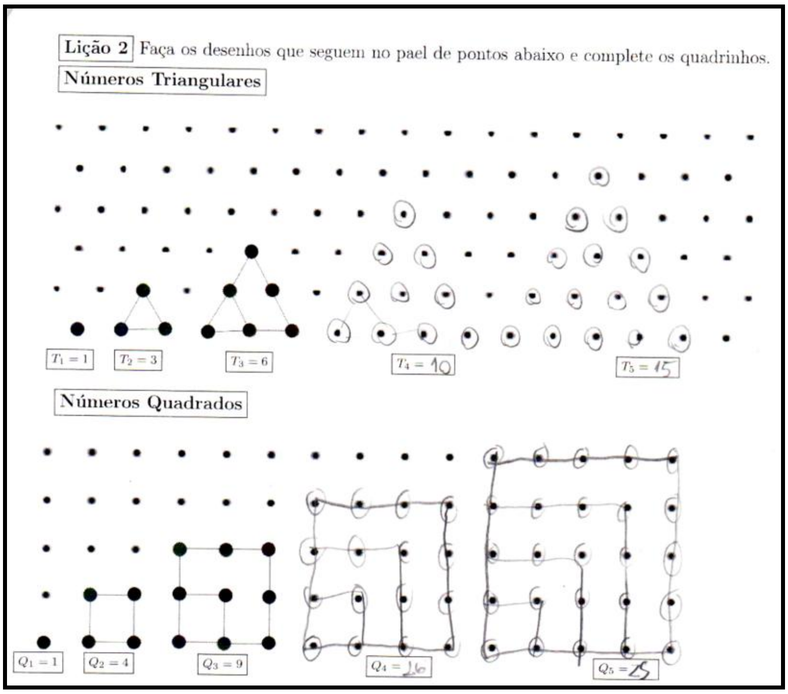


Figura 24:Lição2:Exemplo de atividade

LIÇÃO 3

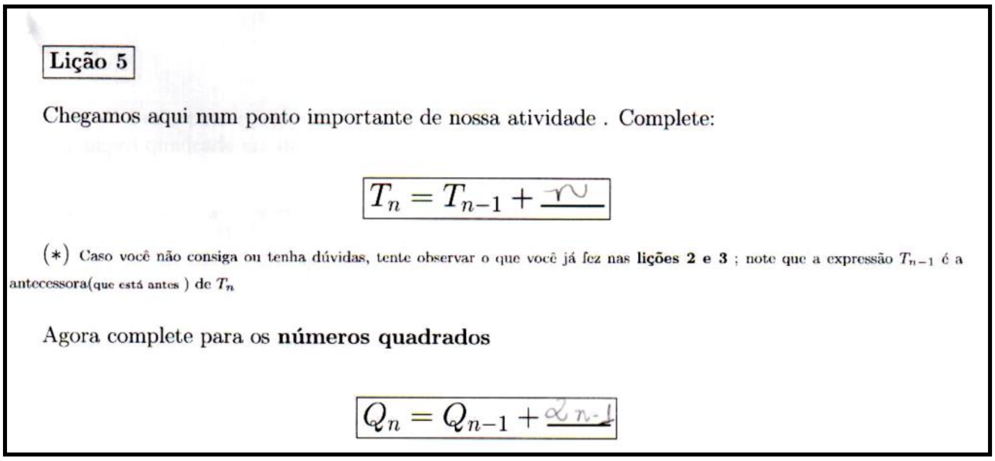
A lição 3 foi bem executada por praticamente todos os grupos, apenas um grupo dos 14 errou na Parte B, itens (e), (f) e (g). O grupo não conseguiu ver o erro e perceber que em cada nova etapa soma-se um número ímpar.

LIÇÃO 4

Na Lição 4 parte A, como havíamos conjecturado, os itens (C) seriam problemáticos. De fato, 36% dos grupos erraram esses itens. Na parte B que tratava dos números quadrados a mesma incidência de erros nesses itens (itens C) ocorreu. Dos 14 grupos, 5 cometeram erros nesses itens o que dá 36% aproximadamente.

LIÇÃO 5

Na Lição 5 esperava-se que o número de acertos não fosse muito alto. De fato, isso ocorreu; 57% dos grupos erraram essa atividade. Embora a maioria tenha feito corretamente as atividades nas lições anteriores, abstrair a essência do que vinham fazendo com números e generalizar esses resultados representou um passo de grande dificuldade para os nossos estudantes. Vale a pena ressaltar que se considerarmos, nessa atividade, apenas a parte referente aos números triangulares, todos os grupos perceberam o padrão e responderam corretamente. A dificuldade maior, nessa lição, realmente foi a parte referente aos números quadrados, onde ocorreu os 57% de erros.



Lição 5

Chegamos aqui num ponto importante de nossa atividade . Complete:

$$\boxed{T_n = T_{n-1} + \underline{n}}$$

(*) Caso você não consiga ou tenha dúvidas, tente observar o que você já fez nas **lições 2 e 3** ; note que a expressão T_{n-1} é a antecessora(que está antes) de T_n

Agora complete para os **números quadrados**

$$\boxed{Q_n = Q_{n-1} + \underline{2n-1}}$$

Figura 25: Exemplo de resposta correta

LIÇÃO 6

A lição 6 foi muito foi bem executada. Apenas um grupo deixou em branco. Os demais grupos fizeram corretamente tanto a parte A como a parte B. Pelos modelos apresentados nos exemplos, esperava-se que essa lição fosse bem recebida e não ocorressem dificuldades maiores.

LIÇÃO 7

Nessa lição, o grupo teria que chegar numa fórmula para os números triangulares e para os números quadrados. Dos 14 grupos, 7, ou seja, 50% executaram todos os passos corretamente, chegaram nas fórmulas esperadas tanto para a parte A quanto para a parte B e fizeram corretamente o uso dessas fórmulas para calcular o que se pedia no fim da lição. Dois grupos fizeram somente a parte A corretamente (14%). Já os outros 36% não conseguiram chegar corretamente nas fórmulas desejadas.

As conjecturas levantadas sobre essa lição puderam ser confirmadas nas dificuldades que esses 36% tiveram em chegar às fórmulas desejadas. Novamente é importante ressaltar que através dessas respostas pode-se, de certa forma, enxergar mais de perto as dificuldades que nossos alunos apresentam, no que se refere ao entendimento da Matemática. Numa aula expositiva tradicional, a sensibilidade e a visão do professor ficam um tanto distorcidas para captar tais dificuldades.

Lição 7

Parte A

Agora , você deverá ser capaz de escrever :

$$\boxed{T_n = 1 + 2 + 3 + \underline{4} + \underline{5} + \underline{6} + \cdots + n}$$

• Você consegue identificar uma sequência de números reais que seja do tipo:$(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n)$

Resposta: Sim Qual é o primeiro termo? **Resposta:** 1 Qual a razão? **Resposta:** +1

• Como se calcula soma dos termos da sequência acima? Lembre-se de que se trata de uma **P.A.** onde $a_1 = 1$ e $a_n = n$ e a soma dos n termos de uma **P.A.** é $\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$ Use essa informação para obter uma fórmula para os nossos **números triangulares**.

$$\boxed{T_n = \frac{(1+n).n}{2}}$$

Parte B

Agora vamos trabalhar da mesma forma para os números quadrados :

$$\boxed{Q_n = 1 + 3 + 5 + \underline{7} + \underline{9} + \underline{11} + \cdots + (2n-1)}$$

• Você consegue identificar uma sequência de números reais que seja do tipo:

$(1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots, (2n-1))$ que você já tenha estudado? Qual é o nome dessa sequência.

Resposta: Sim Qual é o primeiro termo? **Resposta:** 1 Qual a razão? **Resposta:** 2

• Como se calcula soma dos termos da sequência acima? Use essa informação para obter uma fórmula para os nossos **números quadrados**.

$$\boxed{Q_n = \frac{(\cancel{1}+2n\cancel{-1})n}{2} = \frac{\cancel{2}n^2}{\cancel{2}} = n^2} \qquad \boxed{Q_n = n^2}$$

Veja que , de posse dessas fórmulas , podemos calcular de maneira simples os valores de T_{1000} e Q_{1000} . Você seria capaz de calcular tais valores usando a fórmula?

$$\boxed{T_{1000} = \frac{(1+1000).1000}{2} = \frac{1001 \cdot \overset{500}{1000}}{2} = 500500}$$

$$\boxed{Q_{1000} = 1000^2 = 1000000}$$

Figura 26: Exemplo da lição 7 feita corretamente

<u>LIÇÃO 8</u>

Essa lição é última lição do conjunto de atividades. Estava dividida em parte A, parte B e parte C. Na parte A, todos os grupos que fizeram esse item, no total de 10 grupos (71%), não tiveram dificuldades em perceber o que se pedia e acertaram plenamente. No entanto, os 4 grupos que não fizeram esse item, também não fizeram a parte B e a parte C. Esses grupos foram um pouco mais lentos do que os outros 10 que fizeram os itens B e ou C. Alguns alunos disseram que se tivessem mais uns 10 minutos talvez conseguiriam finalizar tudo. A opção adotada nessa sala foi recolher as folhas de atividades assim que deu o tempo de 100 minutos. Na outra turma aplicada (1° ano), foi dada uma tolerância de 10 minutos.

Dos 10 grupos que trabalharam nos itens B e ou C, 7 deles fizeram a parte B corretamente e 3 grupos deixaram em branco esse item. Já no item C apenas 4 grupos dos 10, concluíram a lição plenamente.

4.5.2 Comentários da aplicação no 2° ano A

Observa-se através da análise dos resultados obtidos e descritos para o 2° ano A, que a atividade atingiu seu objetivo. Algumas hipóteses feitas na descrição das folhas, no capítulo 3, foram confirmadas na análise dos resultados. Acredita-se que as lições foram adequadas para a turma e os erros cometidos por eles permitem apontar os pontos de maior dificuldade dos estudantes quando realizam atividades sem a interferência contínua do professor.

4.6 Análise da aplicação no 1° ano A

A aplicação da atividade nessa turma se deu no dia 27 de novembro de 2012, praticamente no final do ano letivo. Até a aula anterior à atividade, os alunos estavam resolvendo exercícios de P.A. A aplicação se deu de forma bem tranquila sem incidentes.

Formaram-se 13 grupos, sendo 11 grupos com 3 integrantes e 2 grupos de 2 integrantes, totalizando 37 alunos participantes.

Figura 27: Aplicação no 1° ano A

4.6.1 Análise das respostas

LIÇÃO 1

Na lição 1, parte A, todos os grupos fizeram corretamente e responderam corretamente. Na parte B, apenas um grupo assinalou que não seria trabalhoso montar com os cubos de madeira, a etapa 20 e a etapa 100.

Nessa lição é interessante observar como alguns grupos fizeram a disposição dos cubinhos de madeira. A maior parte dos grupos dispôs os cubos deitados na superfície da mesa. No entanto, alguns grupos empilharam os cubos.

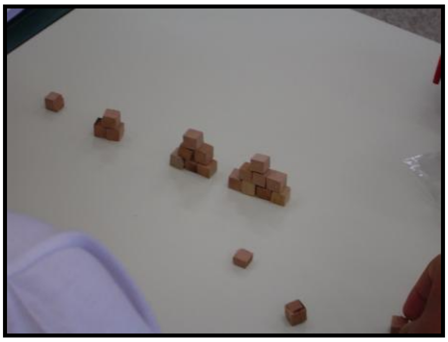


Figura 28: Cubos empilhados 1

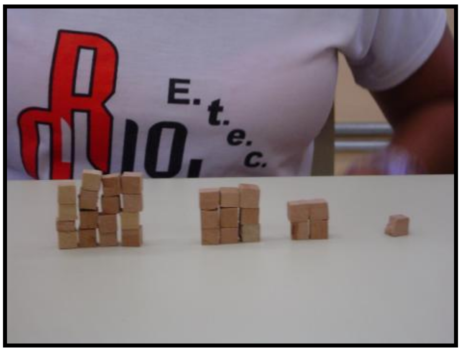


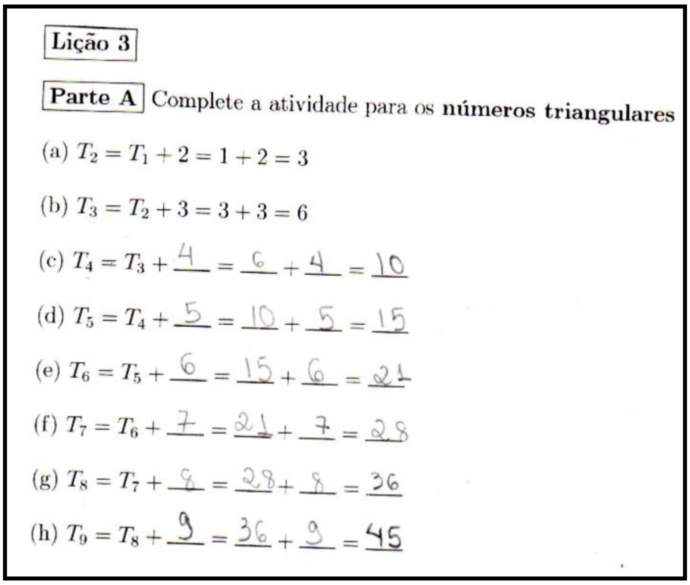
Figura 29: Cubos empilhados 2

<u>LIÇÃO 2</u>

Na lição 2, apenas dois grupos (15%) tiveram um pouco de dificuldade de seguir o modelo proposto. Os demais grupos reproduziram fielmente as configurações propostas.

<u>LIÇÃO 3</u>

A lição 3 foi perfeitamente executada por 11 dos 13 grupos (85%) ; dois grupos apenas cometeram erros de cálculo na execução dessa lição.



Lição 3

Parte A Complete a atividade para os **números triangulares**

(a) $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

(b) $T_3 = T_2 + 3 = 3 + 3 = 6$

(c) $T_4 = T_3 + 4 = 6 + 4 = 10$

(d) $T_5 = T_4 + 5 = 10 + 5 = 15$

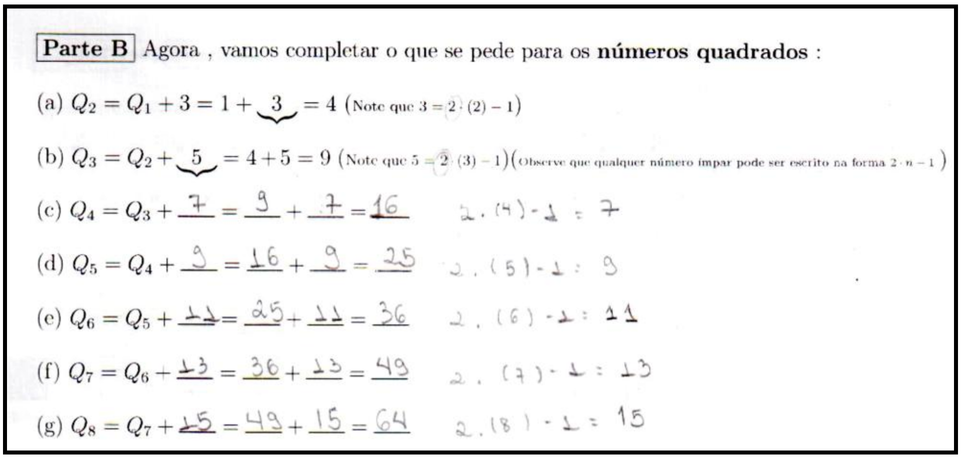
(e) $T_6 = T_5 + 6 = 15 + 6 = 21$

(f) $T_7 = T_6 + 7 = 21 + 7 = 28$

(g) $T_8 = T_7 + 8 = 28 + 8 = 36$

(h) $T_9 = T_8 + 9 = 36 + 9 = 45$

Figura 30: Lição 3: Parte A – correta



Parte B Agora , vamos completar o que se pede para os **números quadrados** :

(a) $Q_2 = Q_1 + 3 = 1 + \underbrace{3} = 4$ (Note que $3 = 2 \cdot (2) - 1$)

(b) $Q_3 = Q_2 + \underbrace{5} = 4 + 5 = 9$ (Note que $5 = 2 \cdot (3) - 1$)(Observe que qualquer número ímpar pode ser escrito na forma $2 \cdot n - 1$)

(c) $Q_4 = Q_3 + 7 = 9 + 7 = 16$ $\quad 2.(4) - 1 = 7$

(d) $Q_5 = Q_4 + 9 = 16 + 9 = 25$ $\quad 2.(5) - 1 = 9$

(e) $Q_6 = Q_5 + 11 = 25 + 11 = 36$ $\quad 2.(6) - 1 = 11$

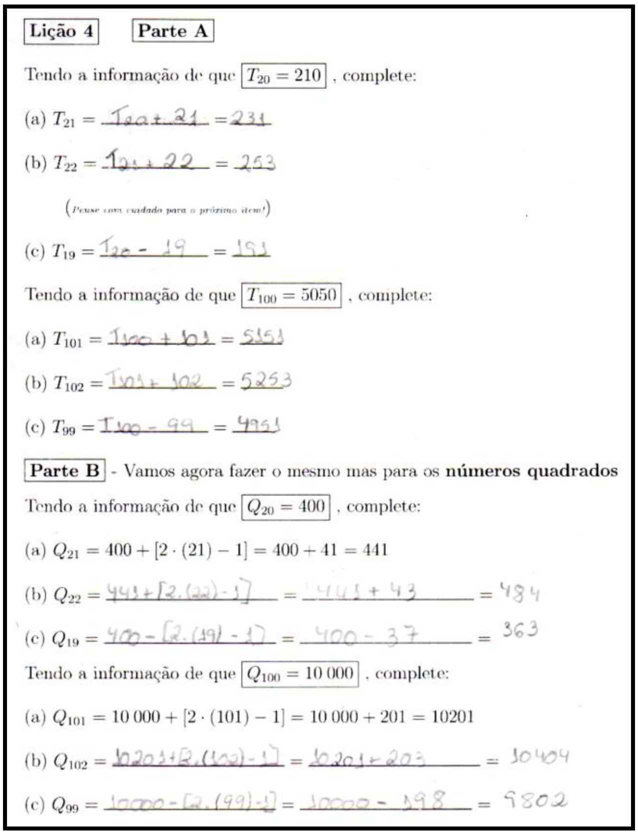
(f) $Q_7 = Q_6 + 13 = 36 + 13 = 49$ $\quad 2.(7) - 1 = 13$

(g) $Q_8 = Q_7 + 15 = 49 + 15 = 64$ $\quad 2.(8) - 1 = 15$

Figura 31: Lição 3: Parte A – correta

LIÇÃO 4

Nessa lição como já havia sido observado, o item C tanto da parte A quanto da parte B seria mais delicado. Apenas 23% dos grupos obtiveram êxito total na execução dessa lição. Os erros concentraram-se exatamente no item indicado, item C. Veja, na figura abaixo, um exemplo.



Lição 4 **Parte A**

Tendo a informação de que $\boxed{T_{20} = 210}$, complete:

(a) $T_{21} = T_{20} + 21 = 231$

(b) $T_{22} = T_{21} + 22 = 253$

(*Pense com cuidado para o próximo item!*)

(c) $T_{19} = T_{20} - 19 = 191$

Tendo a informação de que $\boxed{T_{100} = 5050}$, complete:

(a) $T_{101} = T_{100} + 101 = 5151$

(b) $T_{102} = T_{101} + 102 = 5253$

(c) $T_{99} = T_{100} - 99 = 4951$

Parte B - Vamos agora fazer o mesmo mas para os **números quadrados**

Tendo a informação de que $\boxed{Q_{20} = 400}$, complete:

(a) $Q_{21} = 400 + [2 \cdot (21) - 1] = 400 + 41 = 441$

(b) $Q_{22} = 441 + [2.(22) - 1] = 441 + 43 = 484$

(c) $Q_{19} = 400 - [2.(19) - 1] = 400 - 37 = 363$

Tendo a informação de que $\boxed{Q_{100} = 10\,000}$, complete:

(a) $Q_{101} = 10\,000 + [2 \cdot (101) - 1] = 10\,000 + 201 = 10201$

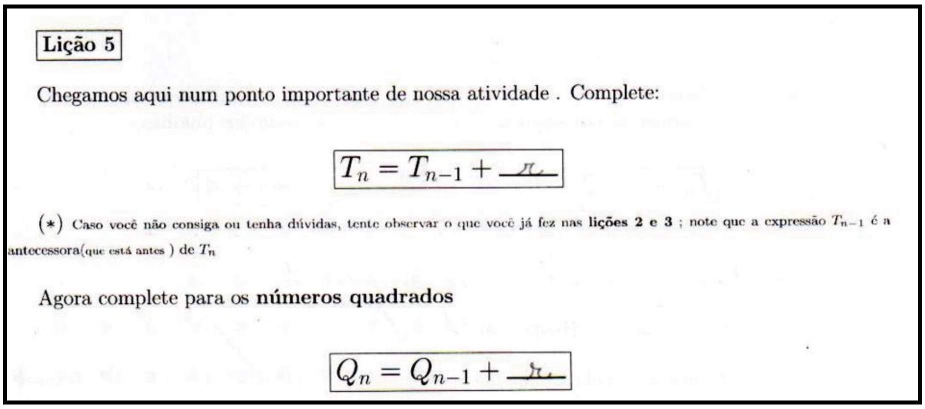
(b) $Q_{102} = 10201 + [2.(102) - 1] = 10201 + 203 = 10404$

(c) $Q_{99} = 10000 - [2.(99) - 1] = 10000 - 198 = 9802$

Figura 32: Exemplo - solução incorreta no item C

LIÇÃO 5

Nessa lição, 3 dos 13 grupos responderam corretamente (23%), 38,5% responderam corretamente, usando a notação correta, apenas para os números triangulares e os outros 38,5% erraram essa lição. Interessante observar que vários alunos completaram o espaço da resposta com a letra *r* , para os números triangulares e não com *n* que era a resposta esperada. A explicação estaria no fato do aluno ter pensado ser a razão de uma P.A. O autor dessas notas acredita que essa seria a justificativa que mais se sustenta.



Lição 5

Chegamos aqui num ponto importante de nossa atividade . Complete:

$$\boxed{T_n = T_{n-1} + \underline{\ n\ }}$$

(*) Caso você não consiga ou tenha dúvidas, tente observar o que você já fez nas **lições 2 e 3** ; note que a expressão T_{n-1} é a antecessora(que está antes) de T_n

Agora complete para os **números quadrados**

$$\boxed{Q_n = Q_{n-1} + \underline{\ n\ }}$$

Figura 33: Exemplo de solução incorreta

Nessa lição, completar para os números quadrados é tarefa mais difícil do que para os números triangulares já que o aluno deve abstrair a noção de ímpar e escrevê-lo de forma geral (*2n-1*).

LIÇÃO 6

Nessa lição, os grupos não apresentaram dificuldade em executá-la. Apenas um grupo confundiu-se um pouco com a notação, mas mesmo assim nota-se que a ideia proposta foi percebida. Considera-se que os objetivos dessa lição foram atingidos plenamente.

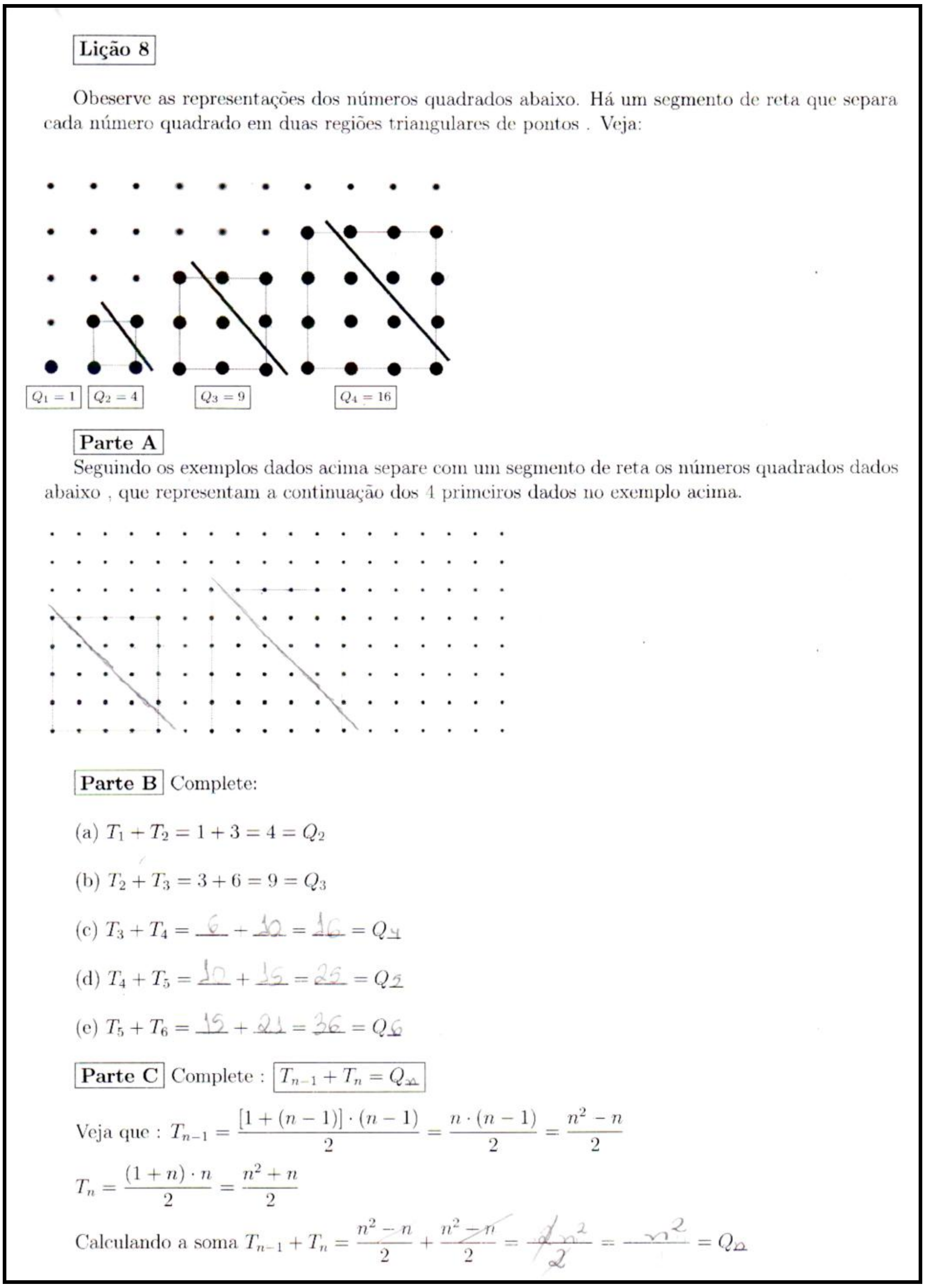
LIÇÃO 7

As duas lições finais, 7 e 8, são as mais exigem do aluno. Dos 13 grupos, 4 deles fizeram corretamente todos os passos da lição (31%). Fizeram parcialmente, ou seja, acertaram a parte A da lição, 15% e os demais, 54% não atingiram a meta nessa lição.

Essa lição confirma uma característica dessa sala, percebida por esse autor desde o primeiro contato com a turma no início do ano letivo. Apresentam uma grande dificuldade em manipular expressões algébricas. Vale a pena ressaltar também que a dificuldade de leitura e a interpretação de textos constituem uma barreira grande a ser transposta por muitos desses estudantes.

LIÇÃO 8

Nessa lição, 54% de acertos de todos os itens (A,B e C), 31% de acertos parciais, ou seja, acertaram somente os itens A e B , mas cometeram algum erro no item C. Os erros, desses 15%, ocorreram nos itens B e C.



Lição 8

Obeserve as representações dos números quadrados abaixo. Há um segmento de reta que separa cada número quadrado em duas regiões triangulares de pontos . Veja:

Parte A
Seguindo os exemplos dados acima separe com um segmento de reta os números quadrados dados abaixo , que representam a continuação dos 4 primeiros dados no exemplo acima.

Parte B Complete:

(a) $T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = Q_2$

(b) $T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = Q_3$

(c) $T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16 = Q_4$

(d) $T_4 + T_5 = 10 + 15 = 25 = Q_5$

(e) $T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = Q_6$

Parte C Complete : $\boxed{T_{n-1} + T_n = Q_n}$

Veja que : $T_{n-1} = \frac{[1 + (n-1)] \cdot (n-1)}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$

$T_n = \frac{(1+n) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

Calculando a soma $T_{n-1} + T_n = \frac{n^2 \cancel{- n}}{2} + \frac{n^2 \cancel{+ n}}{2} = \frac{\cancel{2} n^2}{\cancel{2}} = n^2 = Q_n$

Figura 34: Lição 8 correta

4.6.2 Comentários da aplicação no 1° Ano A

Observa-se também através da análise dos resultados obtidos e descritos para o 1° ano A que a atividade atingiu o esperado. No geral, as folhas com as lições foram adequadas para a sala e as dificuldades apresentadas por eles permitiram enxergar os pontos de maior fragilidade da turma.

4.7 Conclusões das aplicações

As respostas dadas pelos estudantes constituem um material de grande valia para o professor que deseja promover um aprendizado mais eficiente.

As folhas de atividades na forma de lição constituem um veículo bastante interessante para ser usado em sala. Percebeu-se que os estudantes aprovaram a aula e se mostraram satisfeitos por terem conseguido executar as tarefas propostas nas lições. Quando o professor sempre mostra "*como se faz*", o aluno pode até entender; no entanto, quando o estudante consegue realizar algo sem a interferência direta do professor, percebe-se que a satisfação do aluno é muito grande.

O procedimento de colocar os alunos em grupos de no máximo três pessoas mostrou-se satisfatório. Grupos com mais de três alunos parecem não funcionar muito bem, quase sempre um ou mais estudante fica alienado às atividades.

A sequência proposta mostrou-se bastante clara e compreensível de modo geral. Durante a aplicação a quantidade de alunos que apresentaram dúvidas quanto à compreensão do que se pedia não foi significativa ao ponto de esse autor desejar realizar mudanças nas folhas.

Nas aulas seguintes às aplicações das folhas de atividades, foram feitos comentários das respostas dadas por eles, bem como colocadas as respostas esperadas. As atividades aplicadas nas duas turmas fizeram parte da avaliação relativa ao 4° bimestre dos alunos. Foram atribuídas notas pela execução das atividades.

As notas dadas na Escola Técnica Estadual são classificadas da seguinte forma: **I** (insuficiente), **R** (regular) , **B** (bom) e **MB** (muito bom) . Os grupos que acertaram plenamente todas as lições ou erraram uma lição apenas tiveram nota **MB**; aqueles que erraram duas lições inteiras mas acertaram as demais tiveram nota **B.** Os demais tiveram nota **R**, já que os grupos participantes acertaram pelo menos quatro lições inteiras das oito lições propostas.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

5.1 Introdução

Esse capítulo será destinado à conclusão do trabalho. Começará com uma reflexão sobre o produto de ensino desenvolvido, que são as folhas de atividades. Em seguida, será feita uma análise sobre a aplicação da atividade. Por fim, serão feitas as considerações finais.

5.2 Reflexões sobre o produto elaborado

As folhas de atividades elaboradas na forma de lições, construídas nesse trabalho, constituem um material de ensino não muito comum nas escolas brasileiras, principalmente para o Ensino Médio, nível de ensino a que foram destinadas. Tais atividades mostraram-se bastante eficazes em vários aspectos:

- Desenvolvimento da autonomia do aluno e melhoria da capacidade de tomar decisões;
- A sequência didática desenvolvida nas lições permite gradualmente que se chegue a conclusões mais sofisticadas indo do mais elementar para o mais difícil, sem saltos;
- Desenvolvimento da auto-confiança. O aluno consegue fazer, sem a interferência contínua do professor;
- O assunto tratado, a recursividade por números poligonais, é importante e raramente desenvolvido pelos livros didáticos nacionais;
- Permite que o professor compreenda melhor onde estão os pontos de maior dificuldade do aluno;
- Diminui a quantidade de aulas expositivas com respostas prontas colocadas na lousa;

- Promove a sociabilidade

Os passos sugeridos pela Engenharia Didática permitiram otimizar e organizar melhor esse trabalho. O levantamento do problema didático, nas análises prévias, norteou a elaboração do conjunto de lições que constitui a atividade.

O formato de folhas de atividade, até então inédito para esse autor, mostrou ser um eficiente método para o ensino-aprendizagem da Matemática, sobretudo por promover o respeito aos processos de aprendizagem dos alunos.

5.3 Análise da aplicação

A avaliação desse trabalho feita na aplicação das atividades propostas mostrou-se positiva e, de maneira geral, pode-se afirmar que atingiu os objetivos esperados.

Pode-se dizer que a participação dos alunos na execução das atividades propostas foi integral. Os alunos mostraram-se interessados não só em realizar todos os passos como também em terminar no prazo previsto que foi de cem minutos. A atividade promoveu a aprendizagem dos alunos. Mesmo para aqueles grupos que erraram algumas lições, mesmo assim, puderam discutir, refletir e pensar sobre o assunto. Na análise feita no capítulo 4, observa-se que praticamente todos os grupos, nas duas turmas pesquisadas, fizeram corretamente as lições de 1 a 6.

Como já havia sido previsto no capítulo 3, as lições 7 e 8 seriam um pouco mais trabalhosas, no entanto também atingiram suas metas. Vários grupos conseguiram generalizar os resultados, obtendo as fórmulas para os números triangulares e números quadrados. Aqueles que não conseguiram, ensaiaram e pensaram no assunto; constatou-se que alguns grupos responderam corretamente uma parte das lições 7 e 8. Dessa forma, pode-se dizer que a aplicação foi válida.

Através da atividade os alunos puderam ler e interpretar enunciados, exercitar a linguagem simbólica da ciência, pensar indutivamente através da recursividade, conectar a álgebra com a geometria e prever resultados de hipóteses formuladas.

Na atividade proposta, esse autor optou por não alterar nada nas lições, mesmo após as duas aplicações feitas. Isso não impede que o professor que irá aplicar na sua sala faça alguma alteração nas folhas de atividades de forma a adequar à realidade de suas turmas.

O material de ensino elaborado permite que um aluno do Ensino Médio aprenda de forma leve e gradativa conceitos básicos de recursividade através dos números poligonais. Por esse motivo, acredita-se que essas folhas de atividades cumprem sua meta também nesse aspecto.

5.4 Reflexões finais

A escolha de um conteúdo que envolve sequências, recursividade e números figurados, tema central desse trabalho, foi motivada essencialmente pela pouca ou nenhuma ênfase que tal assunto se dá no Ensino Médio. Um segundo ponto de grande importância foi encontrar, através das folhas de atividades, um produto de ensino que realmente funciona. A sequência didática criada mostrou ser um método de ensino bastante eficiente e ainda, através dele, pode-se detectar também o nível de compreensão e as dificuldades que os estudantes apresentam quando trabalham com a linguagem científica, em particular a linguagem matemática, principalmente na álgebra.

O aprendizado desse autor ocorreu durante todo o processo de elaboração desse trabalho que culmina nessas notas. Desde a reflexão na escolha do tema, na procura de uma metodologia, nas leituras de artigos, teses e dissertações. Todas essas etapas trouxeram grande aprendizado. A todos aqueles que se interessarem pelo tema e desejarem aplicá-los em sala, esse trabalho estará à disposição.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica.** Lisboa. Ministério da Educação/Departamento de Educação Básica, 1999. p.98.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. de Q. e S. Engenharia Didática: características e seus usos apresentados em trabalhos no GT-19/ ANPEd. Revista Eletrônica da Educação Matemática, Santa Catarina, v. 3, n. 6, p. 62-77, 2008.

BARROSO, J.M. **Conexões com a Matemática**. São Paulo, Ed. Moderna, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002. 46p. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 28 dez. 2012.

______. **Orientações Educacionais aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio** (PCN+). Brasília, 2007.
Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 03 jan. 2013.

CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia Didática:** um referencial para a ação investigativa e para formação de professores de matemática. Zetetiké, Campinas, v. 13 n° 23, p. 87-119, 2005.

EDIGER, M. **Objetivos do Ensino de Matemática**, Revista da Faculdade de Educação, São Paulo, v.13, n.1, p.115-142, 1987.

HARTMAN, J. **Figurate Numbers**. Mathematics Teacher, Gainesville, v.69, n.1, p.47-50, 1976.

IEZZI, G. et. al. **Matemática:** Ciência e Aplicação. São Paulo. Editora Saraiva, 2010.

LIMA, E. L. et. al. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2006. 65p. (Coleção Professor de Matemática).

MENNA, B. M. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio**, PPG-Ensino de Matemática, Porto Alegre, UFRGS, 2008. Disponível em:
<http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/funcoes.pdf>.
Acesso em: 20 dez. 2012.

MILLER, W. A. **Polygonal Numbers and Recursion**. Mathematics Teacher. Mount Pleasant, vol.83, n.7, p. 555-562, 1990.

MILLER, W. A. **Recursion and the Central Polygonal Numbers**. Mathematics Teacher, Mount Pleasant, v.84, n.9, p.738-746, 1991.

MONTEIRO, M. S.; GABRIELLI, A. M. **Atividades com números poligonais e Sequências**. Revista do professor de Matemática (RPM), São Paulo, v.68, p.7-12, 2009.

PEREZ, G. Prática reflexiva do professor de matemática**.** In: BICUDO, M.A.V.(Org.). **Educação Matemática:** Pesquisa em Movimento. São Paulo: Cortez Editora, 2004, p.250-263.

PONTE, J. P.; O conceito de função no currículo de Matemática, **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, APM, n.15, p.3-9, Portugal, 1990. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4473>. Acesso em: 29 dez. 2012.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo, Ed. Scipione, 2010.

STEWART, I. **Os Números da Natureza.** Rio de Janeiro, Editora Rocco, 1996.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FOLHAS DE ATIVIDADES APLICADAS NA ESCOLA

Estas folhas não foram modificadas com a análise a posteriori e constituem nosso produto final

CENTRO PAULA SOUZA

Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

UFSCar

PROFMAT

ETEC - São José do Rio Pardo

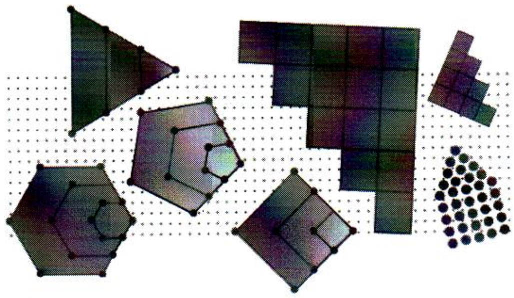
Atividade: Números Figurados e as sequências recursivas:

uma atividade com números triangulares e números quadrados

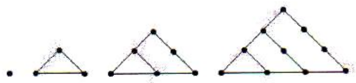
Tempo máximo: $100min$

Nome		Série:
Nome		Série:
Nome		Série:

Números figurados são números que podem ser representados por uma coleção de pontos numa configuração geométrica. Conhecidos desde a antiguidade pelos gregos e reverenciado por eles, tais números e suas disposições geométricas são incrivelmente ricos em propriedades de vários tipos. Veja abaixo a representação dos dois mais conhecidos números figurados.

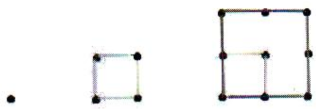


Números Triangulares



... e assim por diante

Números Quadrados

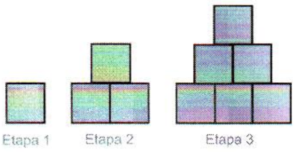


... e assim por diante

Lição 1 **Parte A**

Agora que você já sabe o que é um número figurado (*Triangulares e Quadrados)* , seguindo os exemplos abaixo, represente-os com os cubinhos que você recebeu.

• Primeiramente , faça com os cubinhos, sobre a carteira, as 3 primeiras representações dos **números triangulares** que você vê abaixo:

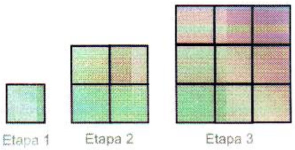


(a) Na segunda etapa , quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à primeira etapa? **Resp.**________

(b) Na terceira etapa , quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à segunda etapa? **Resp.**________

(c) Agora , faça com os cubinhos na sua carteira, a quarta etapa, e diga quantos cubinhos a mais você colocou , em relação à terceira etapa. **Resp.**________

• Vamos agora , fazer o mesmo , mas para os **números quadrados**.



(a) Na segunda etapa , quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à primeira etapa? **Resp.**________

(b) Na terceira etapa , quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à segunda etapa? **Resp.**________

(c) Agora , faça com os cubinhos na sua carteira, a quarta etapa, e diga quantos cubinhos a mais você colocou , em relação à terceira etapa. **Resp.**________

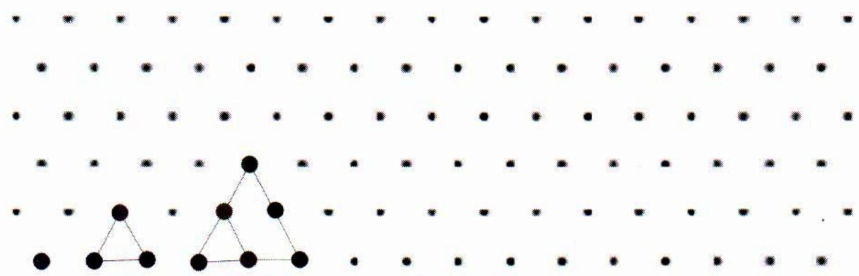
Parte B **Pergunta**

Seria trabalhoso para você , montar a Etapa 20 ou mesmo a Etapa 100 , tanto para os **números triangulares** quanto para os **números quadrados**?(Coloque um x na frente da sua resposta)

Sim, seria trabalhoso ____ **Não seria trabalhoso** ____

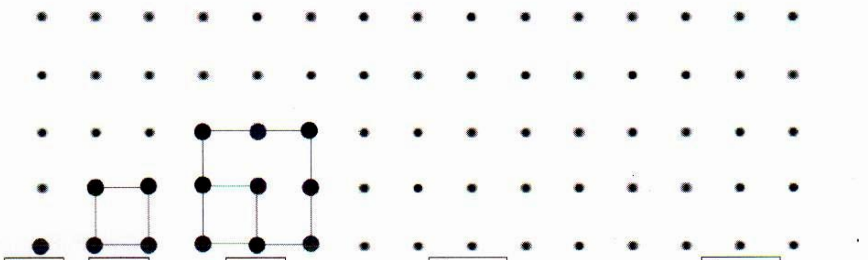
Lição 2 Faça os desenhos que seguem no papel de pontos abaixo e complete os quadrinhos.

Números Triangulares



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 =$ $T_5 =$

Números Quadrados



$Q_1 = 1$ $Q_2 = 4$ $Q_3 = 9$ $Q_4 =$ $Q_5 =$

Lição 3

Parte A Complete a atividade para os **números triangulares** :

(a) $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

(b) $T_3 = T_2 + 3 = 3 + 3 = 6$

(c) $T_4 = T_3 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(d) $T_5 = T_4 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(e) $T_6 = T_5 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(f) $T_7 = T_6 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(g) $T_8 = T_7 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

(h) $T_9 = T_8 + \_\_\_ = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_$

$\boxed{\text{Parte B}}$ Agora , vamos completar o que se pede para os **números quadrados** :

(a) $Q_2 = Q_1 + 3 = 1 + \underbrace{3} = 4$ (Note que $3 = 2 \cdot (2) - 1$)

(b) $Q_3 = Q_2 + \underbrace{5} = 4 + 5 = 9$ (Note que $5 = 2 \cdot (3) - 1$)(Observe que qualquer número ímpar pode ser escrito na forma $2 \cdot n - 1$)

(c) $Q_4 = Q_3 +$ ___ = ___ + ___ = ___

(d) $Q_5 = Q_4 +$ ___ = ___ + ___ = ___

(e) $Q_6 = Q_5 +$ ___ = ___ + ___ = ___

(f) $Q_7 = Q_6 +$ ___ = ___ + ___ = ___

(g) $Q_8 = Q_7 +$ ___ = ___ + ___ = ___

$\boxed{\text{Lição 4}}$ $\boxed{\text{Parte A}}$

Tendo a informação de que $\boxed{T_{20} = 210}$, complete:

(a) $T_{21} =$ _________ = ___

(b) $T_{22} =$ _________ = ___

(*Pense com cuidado para o próximo item!*)

(c) $T_{19} =$ _________ = ___

Tendo a informação de que $\boxed{T_{100} = 5050}$, complete:

(a) $T_{101} =$ _________ = ___

(b) $T_{102} =$ _________ = ___

(c) $T_{99} =$ _________ = ___

$\boxed{\text{Parte B}}$ - Vamos agora fazer o mesmo mas para os **números quadrados**

Tendo a informação de que $\boxed{Q_{20} = 400}$, complete:

(a) $Q_{21} = 400 + [2 \cdot (21) - 1] = 400 + 41 = 441$

(b) $Q_{22} =$ ____________ = ____________ =

(c) $Q_{19} =$ ____________ = ____________ =

Tendo a informação de que $\boxed{Q_{100} = 10\,000}$, complete:

(a) $Q_{101} = 10\,000 + [2 \cdot (101) - 1] = 10\,000 + 201 = 10201$

(b) $Q_{102} =$ ____________ = ____________ =

(c) $Q_{99} =$ ____________ = ____________ =

Lição 5

Chegamos aqui num ponto importante de nossa atividade . Complete:

$$\boxed{T_n = T_{n-1} + \underline{\qquad}}$$

(*) Caso você não consiga ou tenha dúvidas, tente observar o que você já fez nas lições 2 e 3 ; note que a expressão T_{n-1} é a antecessora (que está antes) de T_n

Agora complete para os **números quadrados**

$$\boxed{Q_n = Q_{n-1} + \underline{\qquad}}$$

Lição 6

Vamos agora *calcular sem calcular*, parece estranho não é ? O que você deve fazer nessa atividade é apenas indicar a soma mas sem realizar o cálculo.

Parte A Para os **números triangulares**

(a) $T_1 = 1$

(b) $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2$

(c) $T_3 = T_2 + 3 = \underbrace{1+2}_{T_2} + 3$

(d) $T_4 = T_3 + \underline{\quad} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad}}_{T_3} + \underline{\quad}$

(e) $T_5 = T_4 + \underline{\quad} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}_{T_4} + \underline{\quad}$

(f) $T_6 = T_5 + \underline{\quad} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}_{T_5} + \underline{\quad}$

Parte B Para os **números quadrados**

(a) $Q_1 = 1$

(b) $Q_2 = Q_1 + 3 = 1 + 3$

(c) $Q_3 = Q_2 + 5 = \underbrace{1+3}_{Q_2} + 5$

(d) $Q_4 = Q_3 + \underline{\quad} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad}}_{Q_3} + \underline{\quad}$

(e) $Q_5 = Q_4 + \underline{\quad} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}}_{Q_4} + \underline{\quad}$

(f) $Q_6 = Q_5 + \underline{\quad} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}_{Q_5} + \underline{\quad}$

Lição 7

Parte A

Agora , complete a sequência nos espaços:

$$\boxed{T_n = 1 + 2 + 3 + \_\_ + \_\_ + \_\_ + \cdots + n}$$

• Qual é o nome que se dá a uma sequência de números reais que seja do tipo:$(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n)$?

Resposta: ____ ; Qual é o primeiro termo dela? **Resposta:** ____

Qual é a razão dessa sequência? **Resposta:** ____

• Vamos lembrar como se calcula a soma dos termos da sequência $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n)$. .Trata-se de uma **P.A.** , onde $\boxed{a_1 = 1}$ e $\boxed{a_n = n}$ e a soma dos n termos de uma **P.A.** é dada pela expressão $\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$. Para encontrarmos uma fórmula para os nossos **números triangulares**, podemos realizar a soma da **P.A.** $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Use a fórmula da soma da **P.A.** e escreva uma fórmula para os **números triangulares**.

$$\boxed{\mathrm{T}_n = \_\_\_\_}$$

Parte B

Agora vamos trabalhar da mesma forma para os números quadrados :

$$\boxed{Q_n = 1 + 3 + 5 + \_\_ + \_\_ + \_\_ + \cdots + (2n - 1)}$$

• Você consegue identificar uma sequência de números reais que seja do tipo:

$(1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots, (2n - 1))$ que você já tenha estudado? Qual é o nome dessa sequência.

Resposta: ____ Qual é o primeiro termo? **Resposta:** ____ Qual a razão? **Resposta:** ____

• Como se calcula soma dos termos da sequência acima? Use essa informação para obter uma fórmula para os nossos **números quadrados**.

$$\boxed{\mathrm{Q}_n = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ =} \qquad \boxed{\mathrm{Q}_n =}$$

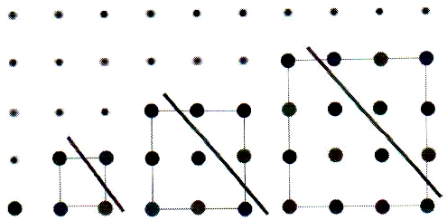
Veja que , de posse dessas fórmulas , podemos calcular de maneira simples os valores de T_{1000} e Q_{1000} . Você seria capaz de calcular tais valores usando a fórmula?

$$\boxed{\mathrm{T}_{1000} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ =}$$

$$\boxed{\mathrm{Q}_{1000} = \quad =}$$

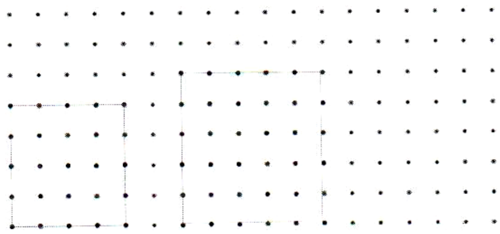
Lição 8

Obeserve as representações dos números quadrados abaixo. Há um segmento de reta que separa cada número quadrado em duas regiões triangulares de pontos . Veja:



Parte A

Seguindo os exemplos dados acima separe com um segmento de reta os números quadrados dados abaixo , que representam a continuação dos 4 primeiros dados no exemplo acima.



Parte B Complete:

(a) $T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = Q_2$

(b) $T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = Q_3$

(c) $T_3 + T_4 = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = Q_{\_}$

(d) $T_4 + T_5 = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = Q_{\_}$

(e) $T_5 + T_6 = \_\_\_ + \_\_\_ = \_\_\_ = Q_{\_}$

Parte C Complete : $\boxed{T_{n-1} + T_n = Q_{\_}}$

Veja que : $T_{n-1} = \dfrac{[1 + (n-1)] \cdot (n-1)}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = \dfrac{n^2 - n}{2}$

$T_n = \dfrac{(1+n) \cdot n}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2}$

Calculando a soma $T_{n-1} + T_n = \dfrac{n^2 - n}{2} + \dfrac{n^2 + n}{2} = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = Q_{\_}$

APÊNDICE B – FOLHAS DE ATIVIDADES RESOLVIDAS – RESPOSTAS ESPERADAS

ETEC - São José do Rio Pardo

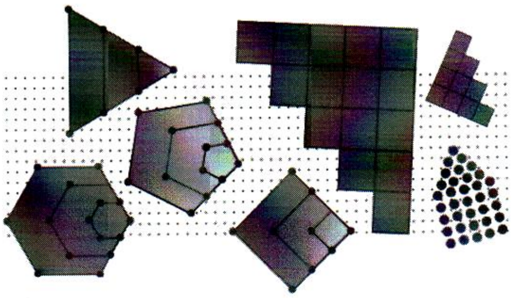
Atividade: Números Figurados e as sequências recursivas:

uma atividade com números triangulares e números quadrados

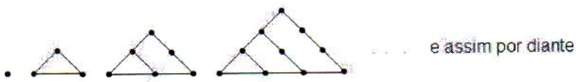
Tempo máximo: $100min$

Nome		Série:
Nome		Série:
Nome		Série:

Números figurados são números que podem ser representados por uma coleção de pontos numa configuração geométrica. Conhecidos desde a antiguidade pelos gregos e reverenciado por eles, tais números e suas disposições geométricas são incrivelmente ricos em propriedades de vários tipos. Veja abaixo a representação dos dois mais conhecidos números figurados.



Números Triangulares

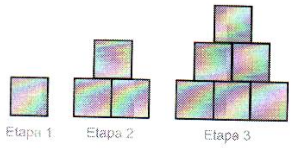


Números Quadrados

Lição 1 **Parte A**

Agora que você já sabe o que é um número figurado (*Triangulares e Quadrados*), seguindo os exemplos abaixo, represente-os com os cubinhos que você recebeu.

- Primeiramente, faça com os cubinhos, sobre a carteira, as 3 primeiras representações dos **números triangulares** que você vê abaixo:

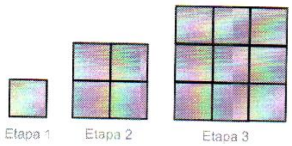


(a) Na segunda etapa, quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à primeira etapa?
Resp. 2 cubinhos

(b) Na terceira etapa, quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à segunda etapa?
Resp. 3 cubinhos

(c) Agora, faça com os cubinhos na sua carteira, a quarta etapa, e diga quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à terceira etapa. **Resp.** 4 cubinhos

- Vamos agora, fazer o mesmo, mas para os **números quadrados**.



(a) Na segunda etapa, quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à primeira etapa?
Resp. 3 cubinhos

(b) Na terceira etapa, quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à segunda etapa?
Resp. 5 cubinhos

(c) Agora, faça com os cubinhos na sua carteira, a quarta etapa, e diga quantos cubinhos a mais você colocou, em relação à terceira etapa. **Resp.** 7 cubinhos

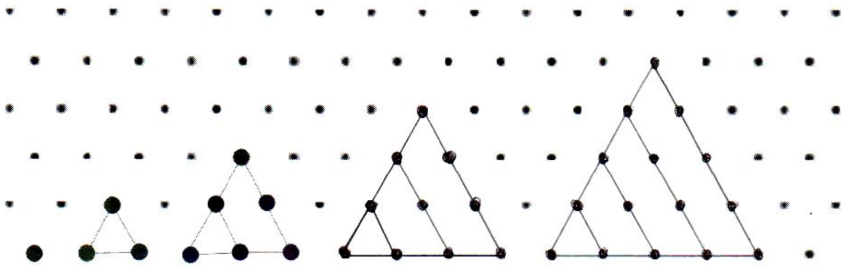
Parte B **Pergunta**

Seria trabalhoso para você, montar a Etapa 20 ou mesmo a Etapa 100, tanto para os **números triangulares** quanto para os **números quadrados**? (Coloque um x na frente da sua resposta)

Sim, seria trabalhoso X **Não seria trabalhoso** ____

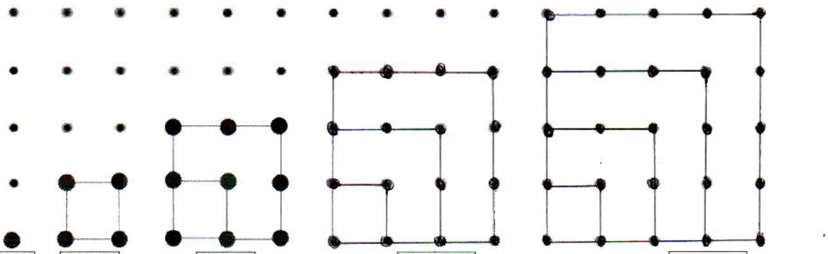
Lição 2 Faça os desenhos que seguem no papel de pontos abaixo e complete os quadrinhos.

Números Triangulares



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$ $T_5 = 15$

Números Quadrados



$Q_1 = 1$ $Q_2 = 4$ $Q_3 = 9$ $Q_4 = 16$ $Q_5 = 25$

Lição 3

Parte A Complete a atividade para os **números triangulares** :

(a) $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

(b) $T_3 = T_2 + 3 = 3 + 3 = 6$

(c) $T_4 = T_3 + \underline{4} = \underline{6} + \underline{4} = \underline{10}$

(d) $T_5 = T_4 + \underline{5} = \underline{10} + \underline{5} = \underline{15}$

(e) $T_6 = T_5 + \underline{6} = \underline{15} + \underline{6} = \underline{21}$

(f) $T_7 = T_6 + \underline{7} = \underline{21} + \underline{7} = \underline{28}$

(g) $T_8 = T_7 + \underline{8} = \underline{28} + \underline{8} = \underline{36}$

(h) $T_9 = T_8 + \underline{9} = \underline{36} + \underline{9} = \underline{45}$

Parte B Agora , vamos completar o que se pede para os **números quadrados** :

(a) $Q_2 = Q_1 + 3 = 1 + \underbrace{3} = 4$ (Note que $3 = 2 \cdot (2) - 1$)

(b) $Q_3 = Q_2 + \underbrace{5} = 4 + 5 = 9$ (Note que $5 = 2 \cdot (3) - 1$)(Observe que qualquer número ímpar pode ser escrito na forma $2 \cdot n - 1$)

(c) $Q_4 = Q_3 +$ 7 = 9 + 7 = 16

(d) $Q_5 = Q_4 +$ 9 = 16 + 9 = 25

(e) $Q_6 = Q_5 +$ 11 = 25 + 11 = 36

(f) $Q_7 = Q_6 +$ 13 = 36 + 13 = 49

(g) $Q_8 = Q_7 +$ 15 = 49 + 15 = 64

Lição 4 **Parte A**

Tendo a informação de que $\boxed{T_{20} = 210}$, complete:

(a) $T_{21} = T_{20} + 21 = 231$

(b) $T_{22} = T_{21} + 22 = 253$

(*Pense com cuidado para o próximo item!*)

(c) $T_{19} = T_{20} - 20 = 190$

Tendo a informação de que $\boxed{T_{100} = 5050}$, complete:

(a) $T_{101} = T_{100} + 101 = 5151$

(b) $T_{102} = T_{101} + 102 = 5253$

(c) $T_{99} = T_{100} - 100 = 4950$

Parte B - Vamos agora fazer o mesmo mas para os **números quadrados**

Tendo a informação de que $\boxed{Q_{20} = 400}$, complete:

(a) $Q_{21} = 400 + [2 \cdot (21) - 1] = 400 + 41 = 441$

(b) $Q_{22} = 441 + [2(22) - 1] = 441 + 43 = 484$

(c) $Q_{19} = 400 - [2 \cdot (20) - 1] = 400 - 39 = 361$

Tendo a informação de que $\boxed{Q_{100} = 10\,000}$, complete:

(a) $Q_{101} = 10\,000 + [2 \cdot (101) - 1] = 10\,000 + 201 = 10201$

(b) $Q_{102} = 10201 + [2 \cdot (102) - 1] = 10201 + 203 = 10404$

(c) $Q_{99} = 10000 - [2(99) - 1] = 10000 - 197 = 9803$

Lição 5

Chegamos aqui num ponto importante de nossa atividade . Complete:

$$\boxed{T_n = T_{n-1} + \underline{n}}$$

(∗) Caso você não consiga ou tenha dúvidas, tente observar o que você já fez nas **lições 2 e 3** ; note que a expressão T_{n-1} é a antecessora(que está antes) de T_n

Agora complete para os **números quadrados**

$$\boxed{Q_n = Q_{n-1} + \underline{2n-1}}$$

Lição 6

Vamos agora *calcular sem calcular*, parece estranho não é ? O que você deve fazer nessa atividade é apenas indicar a soma mas sem realizar o cálculo.

Parte A Para os **números triangulares**

(a) $T_1 = 1$

(b) $T_2 = T_1 + 2 = 1 + 2$

(c) $T_3 = T_2 + 3 = \underbrace{1+2}_{T_2} + 3$

(d) $T_4 = T_3 + \underline{4} = \underbrace{1+2+3}_{T_3} + \underline{4}$

(e) $T_5 = T_4 + \underline{5} = \underbrace{1+2+3+4}_{T_4} + \underline{5}$

(f) $T_6 = T_5 + \underline{6} = \underbrace{1+2+3+4+5}_{T_5} + \underline{6}$

Parte B Para os **números quadrados**

(a) $Q_1 = 1$

(b) $Q_2 = Q_1 + 3 = 1 + 3$

(c) $Q_3 = Q_2 + 5 = \underbrace{1+3}_{Q_2} + 5$

(d) $Q_4 = Q_3 + \underline{7} = \underbrace{1+3+5}_{Q_3} + \underline{7}$

(e) $Q_5 = Q_4 + \underline{9} = \underbrace{1+3+5+7}_{Q_4} + \underline{9}$

(f) $Q_6 = Q_5 + \underline{11} = \underbrace{1+3+5+7+9}_{Q_5} + \underline{11}$

Lição 7

Parte A

Agora , complete a sequência nos espaços:

$$\boxed{T_n = 1 + 2 + 3 + \underline{4} + \underline{5} + \underline{6} + \cdots + n}$$

• Qual é o nome que se dá a uma sequência de números reais que seja do tipo:$(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n)$?

Resposta: P.A. ; Qual é o primeiro termo dela? **Resposta:** 1

Qual é a razão dessa sequência? **Resposta:** 1

• Vamos lembrar como se calcula a soma dos termos da sequência $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, n)$·.Trata-se de uma **P.A.** , onde $\boxed{a_1 = 1}$ e $\boxed{a_n = n}$ e a soma dos n termos de uma **P.A.** é dada pela expressão $\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$. Para encontrarmos uma fórmula para os nossos **números triangulares**, podemos realizar a soma da **P.A.** $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Use a fórmula da soma da **P.A.** e escreva uma fórmula para os **números triangulares**.

$$\boxed{T_n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}}$$

Parte B

Agora vamos trabalhar da mesma forma para os números quadrados :

$$\boxed{Q_n = 1 + 3 + 5 + \underline{7} + \underline{9} + \underline{11} + \cdots + (2n - 1)}$$

• Você consegue identificar uma sequência de números reais que seja do tipo:

$(1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots, (2n - 1))$ que você já tenha estudado? Qual é o nome dessa sequência.

Resposta: P.A. Qual é o primeiro termo? **Resposta:** 1 Qual a razão? **Resposta:** 2

• Como se calcula soma dos termos da sequência acima? Use essa informação para obter uma fórmula para os nossos **números quadrados**.

$$\boxed{Q_n = \frac{[1+(2n-1)]n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2} \qquad \boxed{Q_n = n^2}$$

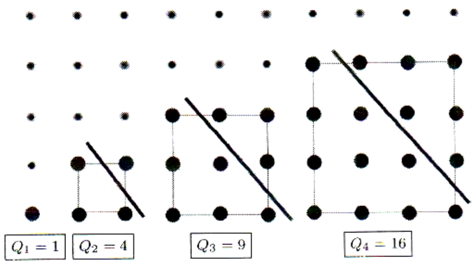
Veja que , de posse dessas fórmulas , podemos calcular de maneira simples os valores de T_{1000} e Q_{1000} . Você seria capaz de calcular tais valores usando a fórmula?

$$\boxed{T_{1000} = \frac{(1+1000)\cdot 1000}{2} = \frac{1001\cdot 1000}{2} = 1001\cdot 500 = 500500}$$

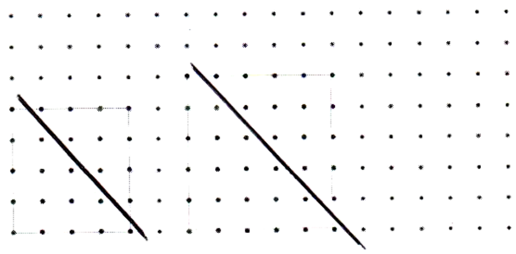
$$\boxed{Q_{1000} = 1000^2 = 1000\,000}$$

Lição 8

Obeserve as representações dos números quadrados abaixo. Há um segmento de reta que separa cada número quadrado em duas regiões triangulares de pontos . Veja:



Parte A
Seguindo os exemplos dados acima separe com um segmento de reta os números quadrados dados abaixo , que representam a continuação dos 4 primeiros dados no exemplo acima.



Parte B Complete:

(a) $T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = Q_2$

(b) $T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = Q_3$

(c) $T_3 + T_4 = \underline{6} + \underline{10} = \underline{16} = Q_{\underline{4}}$

(d) $T_4 + T_5 = \underline{10} + \underline{15} = \underline{25} = Q_{\underline{5}}$

(e) $T_5 + T_6 = \underline{15} + \underline{21} = \underline{36} = Q_{\underline{6}}$

Parte C Complete : $\boxed{T_{n-1} + T_n = Q_{\underline{n}}}$

Veja que : $T_{n-1} = \dfrac{[1 + (n-1)] \cdot (n-1)}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = \dfrac{n^2 - n}{2}$

$T_n = \dfrac{(1 + n) \cdot n}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2}$

Calculando a soma $T_{n-1} + T_n = \dfrac{n^2 \cancel{- n}}{2} + \dfrac{n^2 \cancel{+ n}}{2} = \dfrac{\cancel{2} n^2}{\cancel{2}} = \dfrac{n^2}{1} = Q_{\underline{n}}$