UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EDUARDO RIBEIRO SINDEAUX

# FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DA LÓGICA MATEMÁTICA FUNDAMENTADA NA TEORIA DE FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS DE GALPERIN NOS ESTUDANTES DO 1◦ ANO DO ENSINO MÉDIO

Boa Vista - RR

2015

EDUARDO RIBEIRO SINDEAUX

# FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DA LÓGICA MATEMÁTICA FUNDAMENTADA NA TEORIA DE FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS DE GALPERIN NOS ESTUDANTES DO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda

Boa Vista - RR

2015

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S616f Sindeaux, Eduardo Ribeiro.
Formação do conceito de função a partir da lógica matemática fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin nos estudantes do 1º ano do ensino médio / Eduardo Ribeiro Sindeaux. – Boa Vista, 2015.
73 f.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 – Lógica matemática. 2 – Teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin. 3 – Atividade de situações problema. Título. II – Castañeda, Alberto Martin Martinez (orientador).

CDU – 510.6

EDUARDO RIBEIRO SINDEAUX

FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DA LÓGICA MATEMÁTICA FUNDAMENTADA NA TEORIA DE FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS DE GALPERIN NOS ESTUDANTES DO 1° ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, defendida em 27 de abril de 2015, e avaliada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda - UFRR
Orientador

Oscar Tintorer Delgado

Prof. Dr. Oscar Tintorer Delgado - UERR

Prof. Dr. Joselito de Oliveira - UFRR

*A Jesus Cristo, o meu Deus*
*aos meus filhos,*
*a minha família,*
*a todos que amo.*

**Agradecimentos**

Primeiramente, agradeço ao meu Senhor Jesus Cristo, por me conceder esta honra de ter participado deste concorrido Curso de Mestrado Profissional em Matemática. Agradeço a CAPES, a UFRR e a SBM por proporcionar a todos nós este curso de Pós Graduação voltado à matemática.

Aos meus queridos pais Rubem de Albuquerque Sindeaux e Maria de Lurdes Ribeiro Sindeaux, que com humilde sabedoria, me ensinaram a caminhar em busca de meus objetivos.

Aos meus maravilhosos e amados filhos Victor Emanuel de Sousa Sindeaux e Maria Eduarda de Sousa Sindeaux, pela colaboração compreensiva e fraternal.

Aos professores e equipe do PROFMAT que com muito carinho nos receberam e acolheram os mestrandos da turma de 2013, dentre todos, meu especial agradecimento para o professor Dr. Joselito de Oliveira por sua dedicação como coordenador do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, e ao meu Orientador professor Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda, pela dedicação, paciência e compromisso durante o período de estudo. E ao meu Coorientador professor Dr. Héctor José Garcia Mendoza por sua paciência e dedicação a este trabalho.

A todos os colegas da turma que colaboraram diretamente ou indiretamente nas discussões, meus sinceros agradecimentos pelas ideias colaborativas e amizade.

A minha grande amiga professora Msc. Solange de Almeida e por sua valorosa contribuição a quem jamais esquecerei.

*"A matemática é a única ciência exata em que nunca se sabe do que se está a falar nem se aquilo que se diz é verdadeiro".*

*(Bertrand Russell)*

**RESUMO**

Este trabalho contribui para o ensino-aprendizagem da matemática utilizando a lógica matemática como ferramenta precursora no desenvolvimento do raciocínio matemático através da Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin na formulação do conceito de função através de propriedades essenciais apresentadas durante o texto e da atividade da situação problema (ASP), atendendo as prerrogativas dos PCN's e do Conselho Nacional de Educação. Trabalha os conteúdos de lógica matemática, conjuntos e funções numa linguagem formal, visando o discente do 1° ano do ensino médio. A proposta de uma base orientadora da ação do tipo 3 que é generalizada, completa e elaborada independentemente, plano de aula e de ensino dentro de uma didática para o ensino do conceito de função solidificam a assimilação do conhecimento. Portanto, este trabalho ajuda na compreensão do conceito de função contribuindo para desenvolvimento intelectual e cognitivo do aluno.



**Palavras-chave:** Lógica matemática. Teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin. Atividade de situações problema.

## ABSTRACT

This work contributes to an improvement in the Mathematics teaching and learning using the mathematical logic as a forerunner tool in the development of the mathematical reasoning through the Theory of Formation by Phases of Galperin's Mental Actions in the formulation of the concept of function through essential properties presented during the text and the activity of the problem situation (ASP), attending to the prerogatives of the PCN's and National Council of Education. It works with the contents of the mathematical logic, sets and functions in a formal language way, but aiming the students of the first grade in the high school. The proposal of an oriented guiding base of the type 3 action that is widespread, complete and elaborated independently, lesson and teaching plan according to a didactic to the teaching of the concept of function solidify the assimilation of knowledge. So this work helps in the comprehension of the concept of function contributing to the intellectual and cognitive development of the student.

**Key-words**: Mathematical logic. Theory of Formation by phases of Galperin's Mental Action. Activity of problem situations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE TABELAS

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

As dificuldades de aprendizagem dos alunos do ensino médio foram identificadas nos primeiros momentos de contato com o ensino, ainda no estágio acadêmico de regência em uma escola pública estadual. Foram trabalhadas em duas turmas do 2º ano do ensino médio chamando minha atenção para diversos fatores na educação, porém o mais relevante foi o assunto Análise Combinatória que inicia com o princípio fundamental da contagem – PFC.

No início foi notado uma grande dificuldade por parte dos discentes em assimilar o conteúdo devido ao grande número de exercícios e exemplos envolvendo situações problemas, demonstrando suas deficiências no raciocínio lógico matemático como ferramenta para resolver as atividades em questão, isto é, o raciocínio lógico matemático apresentado pelos alunos das duas turmas não foram suficiente para uma melhor exposição da aula e apresentação do assunto introdutório. Portanto, os discentes necessitam, ao final do ensino médio, entender e compreender que a matemática é uma ciência com suas característica autônomas cuja organização se dá via teoremas e demonstrações (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, Volume 2, 2006, p.69). Porém, o ensino de lógica matemática integrada com os assuntos referentes ao ensino médio não tem ocorrido.

Uma outra vivência ocorreu já como professor efetivo do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Roraima (IFRR) Câmpus Amajari no ano de 2011 cujos alunos do interior demonstraram um vago conhecimento da lógica e raciocínio matemático para a solução de problemas dos assuntos referentes ao 1º ano do ensino médio, com isso houve uma atividade bimestral para o fortalecimento desse pré-requisito lógico matemático.

Com a remoção para atuar no Câmpus Boa Vista, outra vivência ocorreu, porém diferente, por se tratar do final do ano de 2012 os alunos já estavam bem preparados e compreendiam os assuntos com uma boa interpretação do problema através do raciocínio lógico matemático.

Quando iniciaram as novas turmas do 1º ano no ano seguinte com alunos da rede pública voltou novamente aos problemas já citados acima, alunos com déficit de aprendizagem e compreensão da lógica e raciocínio matemático, assim foi verificado que tal assunto, Lógica Matemática, não havia sido assimilado pelos alunos de forma integrada com os assuntos matemáticos do currículo do ensino básico, portanto destaca-se a necessidade do estudo destes conceitos para facilitar a compreensão e o desenvolvimento do pensamento e raciocínio lógico do discente no ensino médio, visto que nos Parâmentros Curriculares Nacionais (PCN's) de matemática para o ensino médio livro III já demonstra a necessidade do ensino da lógica e raciocínio matemático desde as séries iniciais. Segundo as (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, Volume 2, 2006,p.70):

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Assim, há uma necessidade da aprendizagem que por meio da atividade torna-se um processo em cada indivíduo de forma particular, modificada por reações devida as situações encontradas (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p.49-50).

No livro 3 dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN'S, onde é apontada a importância da Lógica nos processos de ensino e de aprendizagem do discente do ensino fundamental, segundo (BRASIL, 1997, p.36):

> Embora nestes Parâmetros a Lógica não se constitua como bloco de conteúdo a ser abordado de forma sistemática no ensino fundamental, alguns de seus princípios podem ser tratados de forma integrada aos demais conteúdos, desde as séries iniciais. Tais elementos, construídos por meio de exemplos relativos a situações-problema, ao serem explicitados, podem ajudar a compreender melhor as próprias situações.

Fica claro a necessidade do estudo, compreensão e entendimento da lógica matemática como ferramenta facilitadora no ensino-aprendizagem da matemática no ciclo básico.

## PROBLEMA

Será que a aplicação de uma base orientadora da ação geral, completa e forma de obtenção pelo estudante, independentemente, melhorará a aprendizagem do conceito de função fundamentada na lógica matemática e na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin na disciplina de Matemática para estudantes do 1$^{\circ}$ ano do Ensino Médio?

## OBJETIVOS

### Objetivo Geral

Propor uma base orientadora da ação para formação do conceito de função fundamentada na lógica matemática e na teoria de formação por etapas das ações mentais na disciplina de Matemática para estudantes do 1° ano do Ensino Médio.

### Objetivos Específicos

*a*) Apresentar a atividade do conceito de função a partir das propriedades essências e da lógica matemática;

*b*) Demonstrar uma sequência didática para a aprendizagem dos conceitos de funções fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin;

## APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS

O primeiro capítulo trabalha o conteúdo elementar de lógica matemática dentro da realidade da educação básica, conjuntos e fundamentos da matemática que são os principais assuntos encontrados nos livros didáticos desde o fundamental I por meio das palavras, até o terceiro ano do ensino médio. O foco deste trabalho é o primeiro ano do ensino médio, assim, muitas escritas com significados matemáticos e a simbologia apresentada são familiares aos alunos, porém, os símbolos desconhecidos como por exemplo os conectivos lógicos, são apresentados de forma didática e prática possibilitando uma leitura suscinta resumida e com rigor matemático. As propriedades essenciais, isto é, as propriedades que definem as relações, funções e gráfico de uma função são apresentadas como proposições e a manipulação destas com o conectivo lógico *e*, ou seja, aplicando a conjunção nessas proposições, faz-se a construção dos conceitos.

O segundo capítulo trata de um resumo da teoria de formação por etapas das ações mentais e dos conceitos criada por Galperin fundamentada na teoria sócio histórico cultural criada por Vygostsky tendo como principais instrumentos o desenvolvimento cognitivo, linguístico, social e cultura. A continuidade da teoria de Vygotsky deu-se por vários colaboradores que contribuiram para a expansão e o crescimento da psicologia e seu desenvolvimento na área pedagógica, dentre os colaboradores destaca-se Leóntiev que definiu o conceito de atividade no qual foi aceita como um dos princípios básicos da psicologia soviética. A partir da atividade Galperin formulou os princípios do experimento formativo, em estudos iniciais da teoria de formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. Este capítulo explica a trajetória para a consolidação da teoria de Galperin.

No terceiro capítulo é abordado uma didática do ensino de funções para demonstrar ao aluno juntamente com o conteúdo de lógica a possibilidade da construção do conceito de função e aplicá-la em situações problema referentes ao cotidiano do aluno. A lógica matemática está presente no conceito de função e nos exemplos apresentados como uma estratégia de ensino deste assunto e nas resoluções dos exemplos. A criação de uma Base Orientadora da Ação (BOA) do tipo 3 é necessária para construção de todo o conceito, pois a mesma é da forma generalizada, completa e independente contribuindo para que o aluno entenda e assimile o conteúdo e o aplique em outras situações. A direção da atividade de estudo e a atividade de situações problema em matemática (ASP) demonstram como conduzir todo o estudo e as ações necessárias para o entendimento do alunos, e também, a elaboração do plano de aula e do plano de ensino.

# 1 CONTEÚDOS ELEMENTARES DE LÓGICA MATEMÁTICA, CONJUNTOS E FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

A palavra *lógica* deriva-se do vocábulo grego *logos*, que significa "ideia", "palavra", "razão"ou "regularidade". A Lógica é uma ciência de natureza matemática ligada fortemente com a filosofia e estuda o conjunto de regras, situações e princípios que regem o processo de pensar e racionar. Assim, podemos dizer que a lógica é o ramo da filosofia que cuida do bem pensar, ou do pensar correto, sendo, portanto, um *instrumento do pensar*. Portanto, podemos afirmar que:

> (...) a lógica é a disciplina que trata das formas de pensamento, da linguagem descritiva do pensamento, das leis da argumentação e raciocínios corretos, dos métodos e dos princípios que regem o pensamento humano. Portanto, não se trata somente de uma arte, mas também de uma ciência. É uma ciência porque possui um objeto definido: as formas de pensamento. (OLIVEIRA; ROCHA,2011, *apud*, Bastos et. al., 1991)

Na linguagem natural, no caso o português, formúla-se argumentos que muitas vezes dificultam a leitura, principalmente pela ambiguidade inerente às linguagens naturais, e das construções vagas ou confusas dos termos. Em meados do século XIX, para expressar o raciocínio da lógica e os enunciados usou-se a linguagem simbólica, isto é, os símbolos de origem matemática foram de suma importância para transformar a linguagem natural numa linguagem lógica. Portanto, a lógica apresentada dessa forma é chamada Lógica Matemática.

## 1.1 PROPOSIÇÕES

O conceito de proposição é importante na lógica matemática por ser a base em sua construção. Observe as orações a seguir.

1. Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
2. Duas retas contidas num mesmo plano são paralelas.
3. Você me empresta cinco reais?
4. Oxalá que o professor não ministre aulas durante quinze dias.
5. A virtude é verde.
6. Que dia lindo!
7. O número natural a é divisor do número natural b.
8. Agamenon é engenheiro.

9. Saia da minha frente!

Destas orações podemos dizer:

1. É verdadeira.
2. É falsa.
3. É uma pergunta. Não podemos atribuir-lhe valor de verdade: falsa ou verdadeira.
4. Exprime um desejo de alguém. Também não é possível atribuir-lhe valor de verdade.
5. Carece de sentido e, portanto, não cabe se perguntar se é verdadeira ou falsa.
6. Depende das circunstancias, da sensibilidade, do humor. Não é possível classificá-la como verdadeira ou falsa.
7. Tem um sentido bem determinado, mas ser verdadeira ou falsa depende dos valores de a e b.
8. Pode ser verdadeira ou falsa.
9. Exprime uma ordem. Não faz sentido classificá-la como verdadeira ou falsa.

Na linguagem materna as orações costumam-se classificar em *declarativas*, *interrogativas*, *exclamativas* e *imperativas*. Nos exemplos acima temos que as orações (1), (2), (4), (5), (7) e (8) são declarativas. A número (3) é interrogativa, a (6) é exclamativa e a (9) é imperativa.

Em Lógica Matemática estudam-se as propriedades das orações declarativas às quais é possível atribuir um, e somente um, dos valores lógicos **verdadeiro** ou **falso**, tais orações são chamadas de proposições. Das nove orações apresentadas podemos afirmar que são proposições as correspondentes aos números (1), (2), (7) e (8). A notação $VL[p] = V$ $(VL[p] = F)$ indica que o valor lógico da proposição p é $V(F)$. Portanto, uma proposição é uma oração declarativa afirmativa, isto é, exprime um sentido completo que pode-se atribuír um valor lógico verdadeiro ou falso.

Em lógica matemática são adotadas as leis do pensamento também chamadas de axiomas ou regras básicas:

1) **Princípio da não contradição:** Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;

2) **Princípio do Terceiro Excluído:** Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo uma terceira possibilidade.

## 1.2 SENTENÇAS ABERTAS E FECHADAS

Uma sentença é dita aberta quando o sujeito da frase é uma constante. Na afirmação "Ana é advogada", tal frase pode ser verdadeira ou falsa, portanto, é uma proposição. Mas, ao substituir Ana pela variável $x$, ou pelo pronome *ela* obtemos as frases "$x$ é advogada"ou "Ela é advogada", daí não se pode atribuir um valor lógico, assim, frases como essas não são enunciados. Os enunciados são chamados de sentenças fechadas, ou simplesmente, fechados.

Assim, as sentenças abertas não são verdadeiras nem falsas; podemos dizer apenas que são satisfeitas para certos valores das variáveis, e não satisfeitos para outros. São exemplos de sentenças abertas:

1. $x$ é múltiplo de $y$;
2. $x + 3 > 10$;
3. Se $x$ é sobrinho de $y$ e $z$ é filho de $y$, então, $x$ e $z$ são primos.

## 1.3 NOÇÕES DE ÁLGEBRA PROPOSICIONAL E CONECTIVOS LÓGICOS

O Cálculo Proposicional, ou Álgebra das Proposições, constitui a parte mais elementar da lógica. Trabalha-se, preferencialmente, com as proposições compostas que é uma nova proposição formada por duas ou mais proposições. A Álgebra das Proposições permite estudar e simplificar muitos problemas da teoria lógica que posteriormente são estendidos a outras partes de maior complexidade, cujo objetivo é fundamentalmente o estudo das relações que têm lugar entre as proposições num dado discurso.

**Conectivos** são palavras usadas para a formação de novas proposições compostas a partir de outras proposições dadas. Os conectivos usuais são:

- A negação "**não**", cujo símbolo mais utilizado é "$\sim$";
- A conjunção “**e**”, cujo símbolo é “$\wedge$”;
- A disjunção “**ou**” cujo símbolo é “$\vee$”;
- A disjunção excludente “**ou**” cujo símbolo é “$\veebar$";
- O condicional “**se**...,**então**”, cujo símbolo é “$\rightarrow$”. Também pode ser “$\Rightarrow$”;
- O bicondicional “...**se, e somente se...**”, cujo símbolo é “$\leftrightarrow$”, ou “$\Leftrightarrow$”.

Outros símbolos são utilizados nas literaturas com os mesmo significados , porém neste trabalho serão trabalhados os descritos acima com seus respectivos símbolos.

Uma proposição é dita *simples* quando nela não aparece algum conectivo, e *composta* quando está formada por proposições ligadas pelos conectivos lógicos. Abaixo tem-se exemplos de proposições simples.

- O número 5 é ímpar;
- O número 2 é par;
- $\pi$ é um número irracional;
- O homem é mortal;
- O cachorro põe ovos.

Com isso, podemos dizer que as proposições compostas são formadas por proposições simples ligadas pelos conectivos lógicos. Abaixo tem-se exemplos de proposições compostas.

- Pitágoras foi um filósofo e Gauss um antropólogo;
- Um numero inteiro é divisível por 5 se, e somente se termina em zero ou cinco;
- Todo inteiro é par ou ímpar;
- se $a$ é um inteiro par então $a^2$ é par.

## 1.4 NEGAÇÃO

Dada uma proposição qualquer pode-se formar a sua negação. Por exemplo, a negação de "*João caiu*"é "*João não caiu*". Na língua portuguesa o advérbia **não** é utilizado para negação, porém há situações em que a negação de uma proposição ocorre usando algum adjetivo ou preposição. Por exemplo, a proposição "alguma reta intersepta o plano $\alpha$"pode ser negada "nenhuma reta corta o plano $\alpha$"e "apreende com dificuldade"pode ser negado como "apreende sem dificuldade".

A definição da negação pode ser resumida na tabela-verdade abaixo:

Uma tabela-verdade é uma tabela onde se colocam todas as combinações possíveis de valores lógicos das proposições simples que aparecem em uma proposição composta, para calcular o valor lógico da proposição composta para cada uma dessas combinações.

Tabela 1 – Tabela verdade (Negação)

| ***p*** | $\sim p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

## 1.5 CONJUNÇÃO

O exemplo a seguir mostra a conjunção de duas proposições:

$p$: O número 2 é primo; $q$: O número 2 é par. A conjunção das proposições $p$ e $q$, denotada por $p \wedge q$ é: O número dois é primo e é par. Neste caso, ambas proposições possuem como valores lógicos a verdade e $p \wedge q$ também é verdadeira . Se considerarmos a proposição $w$: O número 2 é ímpar, a conjunção $p \wedge w$ é falsa. Portanto, A conjunção $p \wedge q$ formada pelas proposições $p$ e $q$ é verdadeira somente quando ambas as proposições $p$ e $q$ são verdadeiras. Se pelo menos uma das proposiçõe, ou ambas as proposições tem como valor lógico $F$, isto é, se pelo menos uma das proposições for falsa, ou ambas as proposições forem falsas então a proposição composta $p \wedge q$ é falsa. Na tabela verdade abaixo defini-se a operação de conjunção de proposições:

Tabela 2 – Tabela verdade (Conjunção)

| ***p*** | ***q*** | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

## 1.6 DISJUNÇÃO

Na linguagem natural o conectivo **ou** tem dois sentidos. Observe as duas proposições compostas abaixo:

- $p$: Lara é engenheira ou enfermeira;
- $q$: Rubem é maranhense ou cearense.

A proposição $p$ é formada pelas proposições simples $p_1$: Lara é engenheira e $p_2$: Lara é enfermeira. Poderia ocorrer que $p_1$ e $p_2$ sejam ambas verdadeiras, ambas falsas, ou só uma delas verdadeira e a outra falsa. $p$ seria verdadeira se Lara tivesse ambas as profissões ou só uma delas. Seria $p$ uma proposição falsa se , unicamente, Lara não fosse engenheira nem enfermeira.

A proposição $q$ está formada pelas proposições simples $q_1$: Rubem é maranhense e $q_2$: Rubem é cearense. Não pode ocorrer que ambas as proposições simples, $q_1$ e $q_2$, sejam verdadeiras, pois não há pessoas com duas naturalidades diferentes; ou Rubem é maranhense ou Rubem é cearense. A proposição $q$ é verdadeira unicamente se uma, e somente uma das proposições $q_1$ e $q_2$ é verdadeira.

Na proposição $p$ diz-se que o “ou” é inclusivo (admite que ambas as proposições conectadas sejam verdadeiras), e na proposição $q$ diz-se que o “ou” é excludente. A proposição $p$ é a disjunção inclusiva ou apenas disjunção das proposições simples $p_1$ e $p_2$; enquanto que a proposição $q$ é chamada de disjunção excludente das proposições simples $q_1$ e $q_2$.

A disjunção inclusiva das proposições $p$ e $q$ é a proposição composta denotada por $p \vee q$ (lê-se $p$ ou $q$), definida pela tabela-verdade abaixo.

Tabela 3 – Tabela verdade (Disjunção inclusiva)

| ***p*** | ***q*** | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

A disjunção exclusiva das proposições $p$ e $q$ é a proposição composta $p \veebar q$, que se lê: “ou $p$ ou $q$” ou “$p$ ou $q$, mas não ambos”, que é falsa quando o valor lógico das proposições $p$ e $q$ possuirem valores lógicos iguais, e verdadeira quando $p$ e $q$ possuirem valores lógicos diferentes. Em português não existe uma palavra específica para representar a disjunção exclusiva. A tabela-verdade que define a disjunção exclusiva é:

Tabela 4 – Tabela verdade (Disjunção exclusiva)

| ***p*** | ***q*** | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

## 1.7 CONDICIONAL ("se ..., então ...")

Para exemplificar e compreender melhor antes de inicar a definição de condicional, seja:

- $p$: *a* é múltiplo de 6;

- $q$: *a* é múltiplo de 3.

A proposição composta formada pelas proposições simples $p$ e $q$ e dita **condicional** é representada como $p \rightarrow q$: **Se** *a* é múltiplo de 6 **então** *a* é múltiplo de 3. Em matemática, nos enunciados dos teoremas costuma aparecer esse tipo de proposição composta. E, a sua forma geral é: **Se** $p$, **então**, $q$, ou ainda em símbolos, $p \Rightarrow q$, ou $p \rightarrow q$. A última notação é utilizada em agumas literaturas para diferenciar o *conectivo lógico* da *implicação lógica* presentes nos teoremas matemáticos. A relação entre os dois símbolos é estreita, isto é, seus significados são conceitualmente semelhantes.

Na proposição condicioal $p \rightarrow q$, a proposição $p$ chama-se **antecedente** ou **implicante** e a proposição $q$ é chamada de **consequencia** ou **implicado**. E ainda, a proposição $p \rightarrow q$ pode ser lida ou expressada de qualquer uma das formar abaixo:

- **p** implica em **q**
- **p**, logo **q**
- **p** só se **q**
- **q** se **p**
- se **p** então **q**
- **p** é condicão suficiente para **q**
- **p** apenas se **q**
- **q** segue de **p**
- **p** somente se **q**
- **q** é condicão necessária para **p**
- **p** só quando **q**

Na tabela-verdade fica:

Tabela 5 – Tabela verdade (Condicional)

| ***p*** | ***q*** | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Pela tabela verdade pode ser verificado facilmente as equivalências das proposições $p \to q$ e $\sim (p\wedge \sim q)$, isto é, ambas possuem a mesma função de verdade. Montando a tabela-verdade e comparando as duas últimas colunas que é onde ficará as proposições dadas verifica-se tal fato. Logo:

Tabela 6 – Tabela verdade de proposições equivalentes

| ***p*** | ***q*** | $\sim q$ | $p \to q$ | $\sim (p \wedge \sim q)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V |
| V | F | V | F | F |
| F | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V |

Na tabela-verdade parece "ilógico" que $F \to V$ e $F \to F$ sejam proposições verdadeiras. Essa aparente contradição reside em que a condicional $p \to q$ **não estabelece uma relação de implicação entre o antecedente e o consequente**; $q$ não se infere de $p$; $q$ não é uma consequência de $p$; $p$ não acarreta $q$. O conectivo condicional $\to$ é meramente uma operação para construir uma proposição composta, $p \to q$, a partir das proposições $p$ e $q$, conforme a tabela-verdade mostrada. Por exemplo, a proposição "Se $\pi$ é irracional, então 7 é primo" é uma proposição condicional verdadeira, mas não há nenhuma relação de inferência nela. É verdadeiro que $\pi$ é irracional e que 7 é primo, mas ser 7 é primo não é uma consequência da irracionalidade de $\pi$. Outro exemplo com aparência de absurdo é: "Se o mestrando Eduardo é astronauta, então seu orientador é milionário". Aqui, obviamente, $p$ e $q$ são falsas mas a condicional $p \to q$ é verdadeira.

Os lógicos que definiram dessa forma o conectivo condicional não estavam errados. O desenvolvimento da teoria mostra a utilidade e conveniência dessa definição, mas nós não comentaremos esses assuntos, pois ficam além dos objetivos da nossa disciplina.

## 1.8 BICONDICIONAL (se, e somente se; $\leftrightarrow$)

Dadas as sentenças $p \to q$ e $q \to p$, a conjunção desssas duas sentenças, isto é, $(p \to q) \wedge (q \to p)$ resulta na proposição $p \leftrightarrow q$, cuja proposição é chamada de *bicondicional* que pode ser lida como:

- $p$ se e somente se $q$;
- $p$ é equivalente a $q$;
- $p$ é condição necessária e suficiente para $q$.

A tabela-verdade que define a proposição bicondicional está abaixo explicitada:

Tabela 7 – Tabela verdade (Bicondicional)

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

## 1.9 Equivalência Lógica

Duas proposições $P(p_1, p_2, ..., p_k)$ e $Q(q_1, q_2, ..., q_k)$ são logicamente equivalentes (ou apenas equivalentes),denotado $P(p_1, p_2, ..., p_k) \equiv Q(q_1, q_2, ..., q_k)$ se, e somente se tomam os mesmos valores lógicos para cada combinação de valores lógicos das variáveis proposicionais $p_1, p_2, ..., p_k$. Na prática isso significa que suas tabelas verdades são idênticas.

**Exemplo 1.** *As proposições "$\sim p \rightarrow p$"e "$p$"são equivalentes.*

Tabela 8 – Tabela verdade de proposições equivalentes

| $p$ | $\sim p$ | $\sim p \rightarrow p$ |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | F |

Observe que a primeira e a terceira coluna da tabela-verdade acima são idênticas, logo $(\sim p \rightarrow p) \equiv p$.

**Exemplo 2.** *As proposições "$p \leftrightarrow q$"e a disjunção "$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$"são equivalentes.*

Tabela 9 – Tabela verdade de proposições equivalentes

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \wedge q$ | $\sim p \wedge \sim q$ | $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V | F | V |
| V | F | F | V | F | F | F | F |
| F | V | V | F | F | F | F | F |
| F | F | V | V | V | F | V | V |

A equivalência está provada pela identidade entre as colunas 5 e 8.

**Teorema 1.** *A relação de equivalência entre proposições é uma relação de equivalência. Ou seja, tem-se que:*

*i. Propriedade Reflexiva: Para toda proposição $P(p, q, ...)$, $P(p, q, ...) \equiv P(p, q, ...)$;*

*ii. Propriedade Simétrica: Se $P(p, q, ...) \equiv Q(p, q, ...)$, então $Q(p, q, ...) \equiv P(p, q, ...)$;*

*iii. Propriedade Transitiva: Se* $P(p, q, ...) \equiv Q(p, q, ...)$ *e* $Q(p, q, ...) \equiv R(p, q, ...)$*, então* $P(p, q, ...) \equiv R(p, q, ..)$.

A demonstração é imediata

## 1.10 TAUTOLOGIA, CONTRADIÇÃO E CONTIGÊNCIA

Denomina-se *tautologia* (proposição tautológica ou proposição logicamente verdadeira) à proposição composta que é verdadeira para todas as combinações de valores lógicos de suas variáveis proposicionais. Na tabela-verdade de uma proposição tautológica, a última coluna contém unicamente o valor $V$.

**Exemplo 3.** *Dada a proposição* $p \vee \sim p$*, a tabela abaixo demonstra uma tautologia:*

Tabela 10 – Tabela verdade de uma proposição tautológica

| $p$ | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | V |

Observe que a última coluna da tabela-verdade acima possui apenas $V$(verdade), logo é toutológica.

**Teorema 2.** *A proposição* $P(p, q, r, ...)$ *é equivalente à proposição* $Q(p, q, r, ...)$*, isto é:*

$$P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$$

*se e somente se a bicondicional:*

$$P(p, q, r, ...) \leftrightarrow Q(p, q, r, ...) \quad (1)$$

*é **tautológica**.*

*Demonstração.* **Demonstração:** Suponhamos que as proposições $P(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...)$ são **equivalentes**, logo suas tabelas-verdades idênticas, portanto o valor lógico da bicondicional em $(1)$ é sempre verdade, isto é, $(1)$ é toutológica.

Reciprocamente, se a bicondicional $(1)$ é tautológica, então a última coluna de sua tabela-verdade encerra somente a letra $V$(verdade), e por conseguinte os valores lógicos respectivos das proposições $P(p, q, r, ...)$ e $Q(p, q, r, ...)$ são ambos $V$(verdade) ou são ambos $F$(falsidade), isto é, estas duas proposições são equivalentes. $\square$

Portanto, a toda equivalência lógica corresponde uma **bicondicional tautológica**, e vice-versa.

**Corolário 1.** *Se $P(p,q,r,..) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$, então, também se tem:*

$$P(P_0, Q_0, R_0, ...) \Leftrightarrow Q(P_0, Q_0, R_0, ...)$$

*quaisquer que sejam as proposições $P_0, Q_0, R_0, ...$*

Vale ressaltar, novamente, que os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são distintos, pois o primeiro é de operação lógica entre duas proposições gerando uma nova preposição, enquanto que o segundo é uma relação que estabelece a bicondicional como **tautológica**.

**Exemplo 4.** *A bicondicional "$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$", onde $c$ é uma proposição cujo valor lógico é $F$(falsidade), é **tautológica**, pois, a última coluna de sua tabela-verdade encerra somente a letra $V$(verdade):*

Tabela 11 – Tabela verdade de uma proposição tautológica

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $c$ | $p \wedge \sim q \rightarrow c$ | $p \rightarrow q$ | $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F | V | V | V |
| V | F | V | V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | F | V | V | V |
| F | F | V | F | F | V | V | V |

Portanto, as proposições "$p \wedge \sim q \rightarrow c$"e "$p \rightarrow q$ são equivalentes. Simbolicamente fica:

$$p \wedge \sim q \rightarrow c \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

Nesta equivalência consiste o **"Método de demonstração por absurdo"**.

Denomina-se *contradição* à proposição composta que é falsa para todas as combinações de valores lógicos de suas variáveis proposicionais. Na tabela-verdade de uma contradição, na última coluna aparece somente o valor lógico falso.

**Exemplo 5.** *Dada a proposição $p \wedge \sim p$ observa-se que a última coluna na tabela-verdade abaixo só encerra $F$:*

Tabela 12 – Tabela verdade (Contradição)

| $p$ | $\sim p$ | $p \wedge \sim p$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |

Portanto, a proposição "$p \wedge \sim p$"não é toutológica, e sim uma **contradição**.

**Exemplo 6.** *Pode ser observado que a última coluna na tabela-verdade abaixo só encerra $F$:*

Tabela 13 – Tabela verdade (Contradição)

| $p$ | $\sim p$ | $p \leftrightarrow \sim p$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |

de forma análoga a anterior, a tabela-verdade acima mostra claramente que a última coluna (à direita) encerra-se apenas com $F$, assim a proposição composta "$p \leftrightarrow \sim p$"é uma **contradição**.

Denomina-se *contingência* (proposição contingente) à proposição composta que é verdadeira para algumas das combinações de valores lógicos de suas variáveis proposicionais e falsa para outras combinações de valores lógicos de suas variáveis proposicionais. Na tabela-verdade de uma contingência, a última coluna contém valore $V$ e $F$.

**Exemplo 7.** *Pode ser observado que a última coluna na tabela-verdade abaixo da proposição $p \vee (p \wedge \sim q)$ há $F$ e $V$:*

Tabela 14 – Tabela verdade (Contigência)

| $p$ | $q$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $p \vee (p \wedge \sim q)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V |
| V | F | V | V | V |
| F | V | F | F | F |
| F | F | V | F | F |

**Exemplo 8.** *Pode ser observado que a última coluna na tabela-verdade abaixo da proposição $p \rightarrow \sim p$ há $F$ e $V$:*

Tabela 15 – Tabela verdade (Contigência)

| $p$ | $\sim p$ | $p \rightarrow \sim p$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| V | V | V |

## 1.11 LEIS DA ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Em Álgebra estuda-se propriedades das operações com números, por exemplo, a comutatividade da soma: $a + b = b + a$; a associatividade da multiplicação: $a \cdot (b \cdot c) =$

$(a \cdot b) \cdot c$; e a distributividade da multiplicação em relação à soma, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Os conectivos lógicos permitem realizar operações com as proposições de forma parecida com as operações com números (representados por letras) que são conhecidas da Álgebra. Existe um certo "parecido" entre a soma de números $(+)$ e a disjunção de proposições $(\vee)$ e entre a multiplicação de números e conjunção de proposições $(\wedge)$. A seguir enunciamos as propriedades das operações com conectivos.

A lista abaixo das principais leis da Álgebra Proposicional contribue para a resolução de problemas matemáticos de forma mais legível e por vezes, economiza nas argumentações e cálculos.

**Teorema 3.** *Se $A$, $B$, e $C$ são proposições, tem-se as seguintes propriedades:*

1. $\sim\sim A \equiv A$ *(Lei da Dupla Negação)*
2. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ *(Lei da Comutatividade da Conjunção)*
3. $A \vee B \equiv B \vee A$ *(Lei da Comutatividade da Disjunção)*
4. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ *(Lei da Associatividade da Conjunção)*
5. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ *(Lei da Associatividade da Disjunção)*
6. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *(Primeira Lei de Distributividade)*
7. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(Segunda Lei de Distributividade)*
8. $\sim (A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ *(Primeira Lei de De Morgan)*
9. $\sim (A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$ *(segunda Lei de De Morgan)*
10. $A \wedge A \equiv A$ *(Lei da Idempotência da Conjunção)*
11. $A \vee A \equiv A$ *(Lei da Idempotência da Disjunção)*
12. $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$
13. *Lei da Bicondicional:*

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$$

14. *Lei da Contraposição:* $(A \rightarrow B) \equiv (\sim B \ \rightarrow \sim A)$
15. *Lei da absorção:* $A \rightarrow A \wedge B \equiv A \rightarrow B)$
16. *Lei de Clavius:* $\sim A \rightarrow A \equiv A$

17. *Lei da Refutação por absurdo:* $(A \to B) \wedge (A \to \sim B) \equiv \sim A$

18. *Lei do Dilema:* $(A \to B) \wedge (\sim A \to B) \equiv B$

19. *Lei da Demonstração por absurdo (onde $F$ é uma contradição):*

$$A \wedge \sim B \to F \equiv A \to B$$

20. *Lei de Exportação - Importação:* $A \to (B \to C) \equiv A \wedge B \to C$

21. *Lei da Não Contradição:* $\sim (A \wedge \sim A) \equiv V$

22. *Lei do Terceiro Excluído:* $A \vee \sim A \equiv V$

23. *Lei da Identidade para a Implicação:* $A \to A \equiv A$

24. *Lei da Identidade da Equivalência:* $A \leftrightarrow A \equiv A$

    *As propriedades abaixo são evidentes, contudo merecem ser registradas:*

25. $A \vee V \equiv A$

26. $A \wedge V \equiv A$

27. $A \vee F \equiv A$

28. $A \wedge \sim A \equiv F$

Para demonstrar todas as propriedades basta utilizar as tabelas-verdades.

## 1.12 QUANTIFICADORES

Para iniciar sobre quantificadores utilizar-se-á um exemplo de conjuntos, pois é o primeiro assunto a ser estudado no ensino médio, especificamente no primeiro ano do ensino médio. Portanto, considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k+1\ com\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Assim, o conjunto $A$ pode ser escrito como, $A = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$, logo afirma-se que:

1. Qualquer que seja o elemento de $A$, ele é par;

2. Existe ao menos um elemento que pertence ao conjunto $A$ que é primo;

3. Existe um único elemente em $A$ que é menor que todos os outros elementos de $A$;

4. Não existe elemento em $A$ tal que ele é ímpar.

Os enunciados anteriores estão escritos na linguagem natural, mas na Lógica Matemática há símbolos próprios, chamados quantificadores, que permitem expressar essas quatro sentenças. Existe fundamentalmente dois tipos de quantificadores: *universal* e *existencial*.

i. **Quantificador universal:** Seu símbolo é $\forall$, Lê-se: "para todo", "qualquer que seja".

ii. **Quantificador existencial:** Representado pelo símbolo $\exists$, Lê-se: "existe".

Agora, reescrevendo os ítens anteriores utilizando os quantificadores, logo:

1'. $\forall\ x \in A$, $x$ é par;

2'. $\exists\ x \in A \mid x$ é primo;

3'. $\exists!\ x \in A \mid x = 1$;

4'. $\nexists\ x \in A \mid x$ é ímpar.

Veja que os todos os enunciados acima são verdadeiros ou falsos, logo são proposições. Em efeito, (1) é um enunciado falso; (2) é verdadeiro; (3) é verdadeiro e (4) é falso.

*Resumindo:* Se $P(x)$ é uma sentença aberta num conjunto $A$, então:

- $(\forall x \in A)P(x)$ ou $\forall x, P(x)$ é um enunciado que lê-se "Para todo elemento $x$ de $A$, $P(x)$", ou "Todo elemento $x$ de $A$ cumpre a propriedade $P$", simplesmente, "Para todo $x, P(x)$;

- $(\exists x \in A)P(x)$ ou $\exists x, P(x)$ é um enunciado que lê-se "Existe [ao menos] um $x \in A$ tal que $P(x)$, ou "Existe [ao menos] um elemento $x$ de $A$ que cumpre a propriedade $P$", ou simplesmente, "Para algum $x, P(x)$.

Os quantificadores transformam sentenças abertas em proposições. Uma sentença aberta num conjunto não vazio $A$ carece de valor lógico $V$ ou $F$. A sentença aberta $P(x)$ com algum quantificador antes dela se torna uma proposição e, portanto, tem valor lógico $V$ ou $F$.

como visto nos exemplos iniciais, o símbolo $\nexists$ lê-se "não existe". Como por exemplo: $\nexists x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0$. Com a mesma ideia, alguns autores representam a sentença "Existe um único $x$ tal que $P(x)$ utilizando o símbolo $\exists!$. Por exemplo, para representar simbolicamente o enunciado “Existe um único número real cujo quadrado é zero” pode-se escrever $\exists! x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0$.

Algumas observações são listadas abaixo para explicar as notações utilizadas:

I) A frase "tal que", que aparece com frequência em enunciados com o quantificador existencial $\exists$, pode ser representada pelos símbolos: ", ":"ou ";". Por exemplo, "existe um número natural $n$ tal que $n^2 < 100$" pode ser representada assim:

   i. $\exists n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 100$;

   ii. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 < 100$;

   iii. $\exists n \in \mathbb{N}; n^2 < 100$;

   iv. $(\exists n \in \mathbb{N})(n^2 < 100)$.

II) Quando não há perigo de dúvida o quantificador universal pode ser escrito depois e não obrigatoriamente antes da sentença aberta quantificada. Por exemplo, descrevendo a propriedade associativa da multiplicação de números reais podemos escrever:

   i. $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Ou ainda, uma melhor escrita é: $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\,(a\cdot(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c))$.

Chama-se *escopo de um quantificador* a parte da frase sobre a qual ele atua; em geral o escopo de um quantificador é indicado pelos parênteses que o seguem. Se não houver parênteses, o escopo do quantificador é limitado ao predicado que o segue. Veja os exemplos abaixo:

- $\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$: o escopo de $\exists x$ é $P(x) \vee Q(x)$;
- $\exists x\; P(x) \vee Q(x)$: o escopo de $\exists x$ é $P(x)$;
- $\exists y\,(P(x, y) \wedge\ \forall x Q(x))$: o escopo de $\exists x$ é $[P(x, y) \wedge\ \forall x Q(x)]$. O escopo de $\forall x$ é $Q(x)$.

### 1.12.1 Negação de Proposições que Contêm Quantificadores

Consideremos que a expressão $\forall x, P(x)$ é verdadeira no universo $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. Tomamos um universo finito para simplificar a exposição, mas o raciocínio vale para qualquer universo. Isto significa que $P(u_1) \equiv V, P(u_2) \equiv V, \cdots$, e $P(u_n) \equiv V$.

Ser verdadeira $\forall x, P(x)$ no universo $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ significa que $P(u_1) \wedge P(u_2) \wedge \cdots \wedge P(u_n) \equiv V$. Negando, aplica-se as leis de De Morgan:

$\sim [(\forall x)P(x)] \equiv\sim [P(u_1) \wedge P(u_2) \wedge \cdots \wedge P(u_n)] \equiv\sim P(u_1) \vee \sim P(u_2) \vee \cdots \vee \sim P(u_n) \equiv (\exists x)(\sim P(x))$. Podemos concluir que $\sim [(\forall x)P(x)] \equiv (\exists x)(\sim P(x))$.

Analogamente, ser $(\exists x)P(x)$ verdadeira no universo $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ significa que $P(u_1) \equiv V \vee P(u_2) \equiv V \vee \cdots \vee P(u_n) \equiv V$. Logo, $P(x) \equiv [P(u_1) \vee P(u_2) \vee \cdots \vee P(u_n)]$. Negando, aplica-se as leis de De Morgan:

$\sim [(\exists x)P(x)] \equiv \sim [P(u_1) \vee P(u_2) \vee \cdots \vee P(u_n)] \equiv \sim P(u_1) \wedge \sim P(u_2) \wedge \cdots \wedge \sim P(u_n) \equiv (\forall x)(\sim P(x))$. Assim, $\sim [(\exists x)P(x)] \equiv (\forall x)(\sim P(x))$, se indica o universo da variável:

$$\sim (\forall x \in M)(P(x)) \equiv (\exists x \in M)(\sim P(x))$$

e

$$\sim (\exists x \in M)(P(x)) \equiv (\forall x \in M)(\sim P(x))$$

.

**Exemplo 9.** *Os itens abaixo demonstram quão importantes são os quantificadores, logo:*

1) *Consideremos a proposição: " Não existe um número real cujo quadrado é negativo", cuja expressão simbólica é* $(\nexists x \in \mathbb{R})(x^2 < 0)$. *A negação é "Todo número real tem quadrado não negativo". Com símbolos:* $\sim (\nexists x \in \mathbb{R})(x^2 < 0) \equiv (\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq 0)$;

2) *A negação de "Para todo número natural* $n, n+2 > 8$*",* $(\forall n \in \mathbb{N})(n+2 > 8)$ *é: "Existe um número natural* $n$ *tal que* $n + 2 \not> 8$*", ou, "Existe um número natural* $n$ *tal que* $n + 2 \geq 8$*". Simbolicamente:* $(\exists n \in \mathbb{N})(n + 2 \geq 8)$, *ou,* $\exists n \in \mathbb{N} \mid n + 2 \geq 8$.

   *Observe que:*

   - *a negação de* $\leq$ *é* $>$;
   - *a negação de* $\geq$ *é* $<$;
   - *a negação de* $<$ *é* $\geq$;
   - *a negação de* $>$ *é* $\leq$;
   - *a negação de* $=$ *é* $\neq$.

### 1.12.2 Quantificação Múltipla

Um enunciado aberto com $n$ variáveis e um quantificador para cada uma das variáveis é uma proposição. Por exemplo:

1. $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(P(x, y))$;
2. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(P(x, y))$;
3. $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in C)(P(x, y, z))$.

Vejamos um exemplo extra matemático. Considere os conjuntos $H = \{$ Carlos, Pedro, Mário $\}$ e $M = \{$ Claudia, Lílian $\}$ e suponha que Carlos e Pedro sejam irmãos de Claudia, que Mário seja irmão de Lílian e que não exista outra relação de parentesco. Seja a sentença aberta em duas variáveis $I(x, y) =$ "$x$ é irmão de $y$", onde $H$ é o universo de $x$, e $M$ o universo de $y$. Examine a validade dos seguintes enunciados:

a) $(\forall x \in H)(\exists y \in M)(I(x, y))$;

b) $(\exists x \in H)(\forall y \in M)(I(x, y))$;

c) $(\forall x \in H)(\forall y \in M)(I(x, y))$;

d) $(\exists x \in H)(\exists y \in M)(I(x, y))$.

É fácil perceber que o primeiro e o último são verdadeiros. Analisemos (a): Se $x =$ Carlos $\in H$, existe $y =$ Claudia $\in M$ tal que $I(x, y)$. Se $x =$ Pedro $\in H$, existe $y =$ Claudia $\in M$ tal que $I(x, y)$. Se $x =$ Mário $\in H$, existe $y =$ Lílian $\in M$ tal que $I(x, y)$.

As proposições (b) e (c) são falsas. Analisemos (c): Se $x =$ Carlos $\in H$ e $y =$ Lílian $\in M$, $\sim I(x, y)$. Carlos não é irmão de Lilian.

Observe que mudando a ordem dos quantificadores obtemos proposições diferentes. Por exemplo, mudando a ordem em (a) obtem-se:

e) $(\exists y \in M)(\forall x \in H)(I(x, y))$ que é uma proposição falsa (ao invés de (a)), pois se $y =$ Claudia, $\sim I($Mário, Claudia$)$; se $y =$ Lílian, $\sim I($Pedro, Lílian$)$.

Resumindo:

1. Quantificadores da mesma espécie podem ser comutados. Por exemplo,

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(P(x, y)) \equiv (\forall y \in B)(\forall x \in A)(P(x, y))$$

e

$$(\exists x \in A)(\exists y \in B)(P(x, y)) \equiv (\exists y \in B)(\exists x \in A)(P(x, y))$$

.

2. Quantificadores de espécies diferentes, em geral, não podem ser comutados. Por exemplo: $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(x \geq y)$ é verdadeira, mas $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})(x > y)$ é falsa.

### 1.12.3 Negação de Proposições com mais de um Quantificador

A negação de proposições com mais de um quantificador se obtém mediante a aplicação sucessiva das leis de De Morgan, utilizando as regras para negação de proposições com um único quantificador.

**Exemplo 10.** *Obserque que:*

*(i)* $\sim [(\forall x \in M)(\exists y \in N)(P(x,y))] \equiv (\exists x \in M)(\forall y \in N)(\sim P(x,y))$;

*(ii)* $\sim [(\exists z \in A)(\forall x \in B)(\forall y \in C)(z > x - y \wedge z = 2x)] \equiv (\forall z \in A)(\exists x \in B)(\exists y \in C)(z \leq x - y \vee z \neq 2x)$.

## 1.13 COMO SE ESTRUTURA UMA TEORIA MATEMÁTICA: AXIOMA, DEFINIÇÕES E TEOREMAS

No estudo dos Conjuntos, se abordado com um certo nível de formalização é necessário mencionar os conceitos de: *Elemento Primitivo*, *Axioma*, *Definição* e *Teorema*. Esses ingredientes são os "tijolos" com os quais se elaboram as teorias matemáticas. O docente do Ensino Médio deve ter familiaridade com essas ideias e ser capaz de transmití-las convenientemente aos seus alunos. Neste item o objetivo é apresentar esses conceitos a um nível de familiarização.

**Elementos primitivos**. Apresentando exemplo da geometria entende-se o que são elementos primitivos. Portanto, na Geometria se estudam as figuras, por exemplo, retas, segmentos, ângulos, triângulos, círculos e etc. Pode-se dizer que um triângulo é a porção do plano limitada por três retas que se cortam duas a duas e que os vértices do triângulo são os pontos de interseção dessas retas. Assim, defini-se formalmente o que é um triângulo. Mas, o que é uma reta? O que é um ponto? Não é possível definir formalmente esses objetos matemáticos utilizando outros que lhes precedam na teoria. Os elementos primitivos são objetos cuja existência se admite sem demonstração e estão no alicerce da construção da teoria. Ponto, reta e plano são elementos primitivos na formalização da Geometria Euclidiana. Na Teoria de Conjuntos o conceito de conjunto é primitivo.

Existem também relações primitivas, isto é, relações entre os elementos primitivos que não é possível definir formalmente. Por exemplo, se $A$ é um conjunto e $x$ é um elemento que pertence ao conjunto $A$, se denota $x \in A$; se $x$ não pertence ao conjunto $A$, denota-se $x \notin A$. Essa relação de pertinência de um elemento a um conjunto é um exemplo de relação primitiva. Não é possível definí-la formalmente.

**Axiomas**. Existem certas propriedades dos elementos primitivos que não tem como provar e são admitidas como verdadeiras sem demonstração. Por exemplo: "Por um ponto exterior a uma reta passa uma única paralela a essa reta". "Dados dois pontos diferentes do plano existe uma única reta que os contêm". "Existem três pontos que não pertencem a uma única reta". Essas proposições admitidas como verdadeiras e tomadas como ponto de partida na teoria são denominadas *Axiomas*.

**Definições**. As definições permitem uma conceituação, organização e estruturação das ideias e conceitos matemáticos, sem as quais seria praticamente impossível entender a teoria e, muito menos, desenvolvê-la. É importante que ao estudar memorizem as definições. Exemplos de definição são as das operações com conjuntos: união, interseção e diferença. Outro exemplo de definição é o da relação de inclusão entre conjuntos: Diz-se que um conjunto $A$ é um subconjunto do conjunto $B$ se, e somente se, todo elemento que pertence a $A$ também pertence a $B$. Se denota $A \subset B$.

**Teoremas**. As proposições matemáticas que não são axiomas têm que ser demonstradas para que sejam aceitas como verdadeiras no corpo da teoria, sendo chamadas de *teoremas*, e ainda, a matemática se faz demonstrando teoremas gerando o conhecimento matemático. O estudo da matemática no ensino básico ou superior é repleto de teoremas. Um dos mais conhecidos desde o ensino fundamental é o *teorema de Pitágoras* [1]. A maior parte das vezes, os teoremas são formulados como uma condicional "*Se* $H$ *então* $T$", ou seja, como uma implicação lógica $H \Rightarrow T$. A proposição $H$ é chamada de hipótese, enquanto a proposição $T$ é chamada de tese. Também pode-se dizer: "$H$ é suficiente para $T$" ou "$T$ é necessária para $H$".

É importante entender que em um teorema **da veracidade da proposição H se infere a veracidade da proposição T. A tese decorre da hipótese**. Um teorema é uma inferência ou implicação lógica. De acordo com (FILHO, 2013, p. 105-106):

> A hipótese ou as hipóteses (se for mais de uma) do teorema são condições indispensáveis que aparecem no enunciado do teorema e devem ser usadas na demonstração desse teorema. Já a tese, que também aparece no enunciado do teorema, é a conclusão que se deve deduzir na demonstração. (...), numa demonstração matemática é preciso utilizar a hipótese para, por meio de um precesso lógico-dedutivo, obter a conclusão do teorema, que é sua tese.

No ensino da Matemática na escola é importante apresentar aos alunos as ideias sobre como é constituída a ciência Matemática. Segundo Brasil (2006):

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais

[1] **Pitágoras de Samos** (século VI a.C.), apontado como o "pai da matemática", foi o fundador da Escola Pitagórica, escola filosófica e científica que tinha os moldes e o rigor de uma seita religiosa e pregava que os números eram o princípio de todas as coisas. (FILHO, 2013)

> estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é "verdade"em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma conseqüência lógica de outras proposições provadas previamente.(PCN+ Ensino Médio, 2006, p.36)

### 1.13.1 Teoremas que exprimem uma equivalência

Dado um teorema $H \Rightarrow T$ pode ocorrer que o enunciado recíproco $T \Rightarrow H$ seja falso ou verdadeiro. Se ocorre que $T \Rightarrow H$ é verdadeiro, isto é, se $T \Rightarrow H$ também é um teorema, tem-se a equivalência $H \Leftrightarrow T$. Nesse caso, a proposição $H \Leftrightarrow T$ se lê de qualquer uma das formas abaixo:

- $H$ é necessário e suficiente para $T$;
- $H$ se, e somente se $T$;
- $H$ equivale a $T$.

Por exemplo, considere os Teoremas:

1. Se um triângulo tem dois lados iguais, então, os ângulos opostos a esses lados também são iguais;
2. Se um triângulo tem dois ângulos iguais, então, os lados opostos a esses ângulos também são iguais;

Pode-se incluir os dois teoremas anteriores em um único enunciado. Para compreender melhor separa-se a hipótese e a tese de cada um. Sejam:

$p$ : Um triângulo tem dois lados iguais.
$q$ : Um triângulo tem dois ângulos iguais.

O teorema (1) é $p \Rightarrow q$, e o teorema (2) é $q \Rightarrow p$. Pode-se englobar os dois teoremas em um único enunciado, que também é um teorema: $p \Leftrightarrow q$. Na linguagem natural este teorema poderia ser escrito nas diferentes formas equivalentes:

- Um triângulo tem dois lados iguais se, e somente se, os ângulos opostos a esses lados são iguais;
- É condição necessária e suficiente para que um triângulo tenha dois lados iguais que os ângulos opostos a esses lados sejam iguais;
- Em todo triângulo a existência de dois lados iguais equivale à existência de dois ângulos iguais.

## 1.14 O CONCEITO DE FUNÇÃO

O conceito de função ou aplicação entre dois conjuntos é primordial no estudo da Matemática atualmente. Neste item tratamos este assunto a partir do conceito de relação binária entre os elementos de dois conjuntos. Na escola existem diferentes abordagens didáticas sobre o conceito de função, mas para adotar qualquer uma com êxito pedagógico é imprescindível que o docente domine profundamente o conceito.

### 1.14.1 Par Ordenado e Produto Cartesiano de Conjuntos

É evidente que os conjuntos binários $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, mas é necessário em muitas situações definir um objeto matemático onde a ordem em que são dados os dois elementos $a$ e $b$ tenham importância decisiva. Assim, se define o conceito de *par ordenado* $(a, b)$, onde $a$ é o *antecedente* ou *primeira componente* do par ordenado e $b$ é o *consequente* ou *segunda componente* do par ordenado.

Na entidade matemática "*par ordenado*" é decisiva a ordem em que aparecem as componentes $a$ e $b$. Portanto, deve-se ter:

(i) Se $a \neq b$ então $(a, b) \neq (b, a)$;

(ii) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Há várias formas de definir formalmente o conceito de par ordenado. Aqui será adotado a seguinte definição: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. É fácil verificar que esta definição satisfaz as pretendidas relações (i) e (ii).

O conceito de par ordenado é familiar como as coordenadas cartesianas de todo ponto do plano.

**Definição 1.** *Dados dois conjuntos $X$ e $Y$, o produto cartesiano de $X$ por $Y$, denotado $X \times Y$, é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, y)$ tais que $x \in X$ e $y \in Y$. Simbolicamente:*

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

O produto cartesiano é um conceito familiar, sabe-se que o plano é identificado com $P \times P = P^2$. A seguir é enunciado algumas propriedades do produto cartesiano que podem ser provadas facilmente.

**Teorema 4.** *Se $X_1, X_2, Y, Y_1$ e $Y_2$ são conjuntos, tem-se:*

1. $(X_1 \cup X_2) \times Y = X_1 \times Y \cup X_2 \times Y$;

2. $(X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_2) \cup (X_2 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2)$;

3. $(X_1 - X_2) \times Y = X_1 \times Y - X_2 \times Y$;

4. $(X_1 \cap X_2) \times (Y_1 \cap Y_2) = (X_1 \times Y_1) \cap (X_2 \times Y_2)$.

O conceito de produto cartesiano de dois conjuntos pode ser estendido a $n$ conjuntos. Assim, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n\}$. $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é chamada $n$-úpla ordenada e generaliza o conceito de par ordenado para $n$ componentes.

### 1.14.2 Relação Binária Entre os Elementos de Dois Conjuntos

Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Chama-se relação binária de $A$ em $B$ ou apenas relação de $A$ em $B$ todo subconjunto $R$ do produto cartesiano $A \times B$. Simbolicamente: $R$ é uma relação de $A$ em $B \Leftrightarrow R \subset A \times B$.

Interpreta-se o conceito de relação. Uma relação binária é uma propriedade qualquer que vincula ou associa elementos de dois conjuntos. Dizer que $x \in A$ está relacionado com $y \in B$ pela relação $R$ significa que $x$ e $y$ se correspondem, estão associados segundo a propriedade definida por $R$. Veja um exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 8, 9, 16\}$ e $B = \{-10, -5, -4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Definamos a relação $R_1$ pelo predicado binário "$x \in A, y \in B, x$ é o quadrado de $y$". Escrevamos numa tabela os elementos que se relacionam segundo $R_1$.

| $x \in A$ | $y \in B$ |
|---|---|
| 4 | -2 |
| 4 | 2 |
| 9 | 3 |
| 9 | -3 |
| 16 | 4 |
| 16 | -4 |

Para formalizar o fato de $x \in A$ estar relacionado com $y \in B$ forma-se o par $(x, y)$. A relação $R_1$ fica perfeitamente definida escrevendo o conjunto de todos os pares ordenados $(x, y)$ tais que $x \in A, y \in B$ e $x$ está relacionado com $y$ pela relação $R_1$. No exemplo, o conjunto destes pares ordenados é $\{(4, -2), (4, 2), (9, 3), (9, -3), (16, 4), (16, -4)\}$. Formalmente identificamos a relação com este conjunto de pares ordenados:

$$R_1 = \{(4, -2), (4, 2), (9, 3), (9, -3), (16, 4), (16, -4)\} \subset A \times B$$

Observemos que podem ser definidas diferentes relações entre os elementos de $A$ e $B$. Por exemplo:

1. $R_2$ é a relação definida pela equação $x = -y$, com $x \in A$ e $y \in B$. Então, $R_2 = \{(2, -2), (4, -4), (3, -3)\} \subset A \times B$;

2. Seja $R_3$ a relação definida pela equação $y = x + 1$, com $x \in A$ e $y \in B$. Tem-se $R_3 = \{(2,3),(4,5)\}$;

3. $R_4$ é uma relação definida por $x \in A, y \in B$ e $x \leq y$. Logo, $R_4 = \{(2,2),(2,3),(2,4),$ $(2,5),(4,4),(4,5)\}$.

Uma relação pode ser definida em forma totalmente arbitrária, sem mediar alguma fórmula.

**Definição 2.** *Seja $R$ uma relação de $A$ em $B$, ou seja, $R \subset A \times B$. Portanto:*

- *$A$ é o conjunto de partida da relação $R$;*
- *$B$ é o conjunto de chegada da relação $R$;*
- *Se $(x,y) \in R$, indicamos esta pertinência por $xRy$ e dizemos que "$x$ está na relação $R$ com $y$" ou que "$y$ é correspondente de $x$ pela relação $R$" ou se está entendido que está sendo falado da relação $R$, simplesmente, "$x$ está relacionado com $y$";*
- *Uma relação binária em $A$ é qualquer subconjunto de $A \times A$;*
- *Como o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto, $\emptyset \subset A \times B$ é considerado uma relação de $A$ em $B$, denominada relação vazia;*
- *Pela reflexividade da inclusão, $A \times B \subset A \times B$, logo o produto cartesiano $A \times B$ é uma relação de $A$ em $B$. Pela mesma razão, $A \times A = A^2$ é uma relação em $A$;*
- *As relações $\emptyset$ e $A \times B$ são denominadas relações triviais de $A$ em $B$.*

**Definição 3.** *Seja $R$ uma relação de $A$ em $B$. Chama-se domínio de $R$, denotado $D(R)$, ao conjunto de todas as primeiras coordenadas dos pares ordenados que pertencem a $R$. Ou seja, $D(R) = \{x \in A | (\exists y \in B)(xRy)\}$. Chama-se imagem de $R$, denotado $I(R)$, ao conjunto de todas as segundas coordenadas dos pares ordenados que pertencem a $R$. Ou seja, $I(R) = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(xRy)\}$. Evidentemente, $D(R) \subset A, I(R) \subset B$ e $D(R) \times I(R) \subset A \times B$.*

**Exemplo 11.** *Sejam $A = \{2,4,8,9,16\}$, $B = \{-10,-5,-4,-3,-2,1,2,3,4,5\}$ e a relação $R_1 = \{(4,-2),(4,2),(9,3),(9,-3),(16,4),(16,-4)\}$ de $A$ em $B$. Tem-se $D(R) = \{4,9,16\}$ e $I(R) = \{-4,-3,-2,2,3,4\}$.*

**Exemplo 12.** *Seja $A = \{3,4,5,6,7\}$ e $B = \{3,4,5,6\}$. Determine:*

*a) o produto cartesiano $A \times B$*

*b) a relação* $R_1 = \{(x, y); x < y\}$ *de* $A$ *em* $B$

*c) a relação* $R_2 = \{(x, y); x > y\}$ *de* $A$ *em* $B$

*d) a relação* $R_3 = \{(x, y); x = y\}$ *de* $A$ *em* $B$

*e) O que ocorre ao aplicar a disjunção nas relações de cada item?*

Solução:

a) De acordo com a definição 5 tem-se $A \times B = \{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),$ $(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6)\}$;

b) Os elementos de $R_1$ são todos os pares ordenados de $A \times B$ tal que o primeiro elemento é maior que o segundo elemento, isto é, são os pares formados pela correspondência de cada $x \in A$ com cada $y \in B$ donde $x > y$. Logo, $R_1 = \{(4,3),(5,3),(5,4),(6,3),(6,4),(6,5),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6)\}$. Observe que $R_1 \subset A \times B$. O diagrama de flechas é uma excelente ferramenta para a compreender essa relação, observe a figura 3.

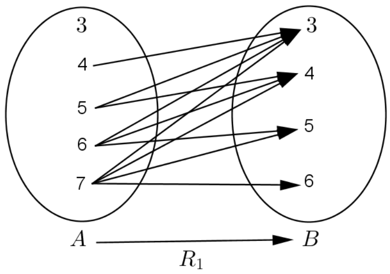



Figura 1 – Autor

c) Os elementos de $R_2$ são todos os pares ordenados de $A \times B$ tal que o primeiro elemento é menor que o segundo elemento, isto é, são os pares formados pela correspondência de cada $x \in A$ com cada $y \in B$ donde $x < y$. Logo, $R_2 = \{(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$. Observe que $R_2 \subset A \times B$. Observe a figura 4.

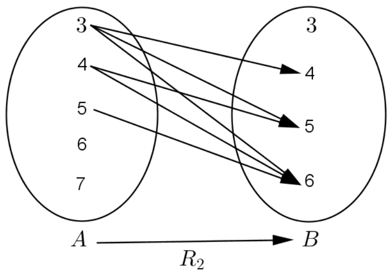



Figura 2 – Autor

d) Os elementos de $R_3$ são todos os pares ordenados de $A \times B$ tal que o primeiro elemento é menor que o segundo elemento, isto é, são os pares formados pela correspondência de cada $x \in A$ com cada $y \in B$ donde $x = y$. Logo, $R_3 = \{(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$. Observe que $R_3 \subset A \times B$.

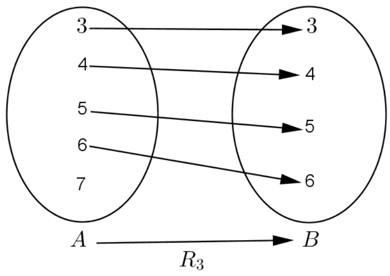



Figura 3 – Autor

e) Aplicando a disjunção em $R_1, R_2$ e $R_3$, isto é, representando cada relação pelas proposições $p_1 : R_1$, $p_2 : R_2$ e $p_3 : R_3$, obtem-se uma proposição composta $q$. Logo,

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \Rightarrow q$$

ou seja,

$$R_1 \cup R_2 \cup R_3 = A \times B$$

, daí, a união das relações $R_1, R_2$ e $R_3$ implica logicamente a $q : A \times B$.

### 1.14.3 Relação Identidade

**Definição 4.** *Seja $A$ um conjunto. Chama-se relação identidade em $A$ a relação $I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$. Obviamente, $D(I_A) = A$ e $I(I_A) = A$. Por exemplo, a relação identidade em $A = \{-2,0,2,4\}$ é $I_A = \{(-2,-2),(0,0),(2,2),(4,4)\}$.*

### 1.14.4 Relação Recíproca ou Inversa

**Definição 5.** *Seja $R$ uma relação de $A$ em $B$. Chama-se relação recíproca ou relação inversa de $R$ à relação $R^{-1}$ de $B$ em $A$ cujos elementos são todos os pares ordenados $(y,x)$ tais que $(x,y) \in R$. Ou seja, $R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A | (x,y) \in R\}$.*

Obviamente: $D(R^{-1}) = I(R), I(R^{-1}) = D(R)$ e $(R^{-1})^{-1} = R$.

**Exemplo 13.** *Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b\}$. Se $R = \{(1,a),(1,b),(2,a),(3,b)\}$, a relação inversa é $R^{-1} = \{(a,1),(b,1),(a,2),(b,3)\}$.*

## 1.15 FUNÇÃO OU APLICAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS

**Definição 6.** *Seja $f$ uma relação de $A$ em $B$. Diz-se que $f$ é uma função ou aplicação de $A$ em $B$ se, e somente se:*

*(i):* $p : \forall x \in A, \exists y \in B \mid (x, y) \in f$

*(ii):* $q : (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Observa-se que aplicando a conjunção em $p$ e $q$ obtemos uma proposição $r$ através da inferência lógica $p \wedge q \Rightarrow r$, onde $r : (\forall x \in A)(\exists! y \in B)((x, y) \in f : y = f(x))$. Isto é, uma função de $A$ em $B$ é uma correspondência que associa a cada elemento de $A$ um único elemento de $B$. Para que uma correspondência $f$ seja uma aplicação ou função de $A$ em $B$ tem que ocorrer que $D(f) = A$ e que nenhum elemento de $A$ tenha dois correspondentes diferentes em $B$.

Se $f$ é uma função ou aplicação de $A$ em $B$ costuma-se utilizar a notação $f : A \to B$, que se lê "*função $f$ de $A$ em $B$*" ou "*função $f$ definida em $A$ com valores em $B$*". O conjunto $B$ chama-se *contradomínio* de $f$ ou *conjunto de chegada de $f$* e denota-se por $CD(f)$.

Para cada elemento $x \in A$, o único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ representa-se por $f(x)$, que se lê: "$f$ de $x$". Isto é, quando escrevemos $y = f(x)$, significa que $y \in B$ é o correspondente de $x \in A$ pela aplicação $f$. Diz-se que $y$ ou $f(x)$ é a *imagem* de $x$ por $f$ ou que $y$ ou $f(x)$ é o *valor da função $f$* no elemento $x$.

**Definição 7.** *A imagem da função $f : A \to B$ é o conjunto formado por todos os elementos de $B$ que são imagens dos elementos de $A$. A imagem de $f$ se denota por $Im(f)$ ou por $f(A)$. Simbolicamente: $f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$.*

É claro que $f(A) \subset B$ e que eventualmente $f(A) = B$. É conveniente distinguir os símbolos $f(x)$ e $f$, pois $f(x) \in B$ representa a imagem do elemento $x \in A$. Quando escrevemos $y = f(x)$ significa que $y \in B$ é a imagem, ou transformado, do elemento $x \in A$. $f$ e o subconjunto de $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$. As vezes, por um abuso de linguagem, se fala "da funcao $y = f(x)$"no lugar de "a função $f$", especialmente quando definimos a correspondência mediante uma formula, como por exemplo, $y = x^3 + 4x + 5$.

Uma aplicação $f : A \to B$ está constituída por três entidades: o domínio $A$, o contradomínio $B$ e o conjunto $f \subset A \times B$ dos pares ordenados $(x, y)$ tais que $y = f(x)$. Por esta razão, em alguns livros se define a função ou aplicação como a terna ordenada $(A, B, f)$.

O gráfico de uma aplicação $f : P \to P$ possui a característica geométrica de que cada reta perpendicular ao eixo das ordenadas que corte ao gráfico de $f$, corta-o em um único ponto.

### 1.15.1 Igualdade de Funções

**Definição 8.** *Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$. Diz-se que estas funções são iguais se e somente se:*

*(i)* $A = C$;

*(ii)* $B = D$;

*(iii)* $f = g$.

*Isto é, duas funções são iguais se têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e os mesmos pares ordenados.*

Observe que as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_+$ tais que $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2$ são formalmente diferentes porque, embora os domínios são iguais e os conjuntos dos pares ordenados $f$ e $g$ são iguais, os contradomínios são diferentes.

### 1.15.2 Funções Injetoras

**Definição 9.** *Uma função $f : A \to B$ é **injetora** se, e somente se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.*

A contrapositiva da condicional $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ é $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$, logo, uma definição equivalente de função injetora é dada pela propriedade $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Esta última condição é mais clara em relação ao conceito que define: uma função é injetora se, e somente se elementos diferentes do domínio têm imagens diferentes. Mas, a primeira é mais conveniente na solução de exercícios.

Para provar que uma função não é injetora basta achar dois elementos do domínio que tenham a mesma imagem.

**Exemplo 14.** *$g : P \to P$ definida por $g(x) = x^3$ é injetora:*

$$[g(x_1) = g(x_2)] \Leftrightarrow \left[(x_1)^3 = (x_2)^3\right] \Rightarrow \sqrt[3]{(x_1)^3} = \sqrt[3]{(x_2)^3} \Rightarrow x_1 = x_2$$

.

Graficamente, uma funcao $f : AsubsetP \to P$ é injetora se toda reta perpendicular ao eixo das abscissas que interceptar o gráfico de $f$, intercepta-o em um único ponto.

**Exemplo 15.** *Se $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Quais são os elementos da relação $R$ de $A$ em $B$ definida como: $xRy \Leftrightarrow y = 2x + 1$?*

Solução:

Sejam as proposições $p : xRy$ e $q : y = 2x + 1$, logo a bicondicional $p \Leftrightarrow q$ é uma tautologia se, e somente se, os valores lógicos das proposições são verdadeiros, isto é, $VL[p] = V$ e $VL[q] = V$. Pela definição deve ter $(x, y) \in R \wedge R \subset A \times B$. Como $x \in A$ tem-se que: ou seja, encontra-se $y$ a partir de $x$ utilizando a lei $y = 2x + 1$. Portanto, a

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 7 |
| 4 | 9 |

Figura 4 – Autor

relação pode ser descrita usando a figura 6, então $R = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$. Visualizando pelo diagrama de flechas obtém-se:

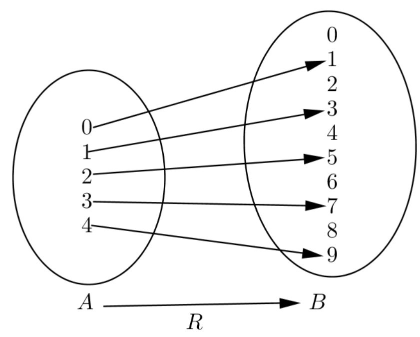



Figura 5 – Autor

### 1.15.3 Funções Sobrejetoras

**Definição 10.** *Uma função* $f : A \to B$ *é sobrejetiva se, e somente se* $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$. *Em outras palavras,* $f$ *é sobrejetiva se, e somente se, seu conjunto imagem é igual ao contradomínio, ou seja, todos os elementos do contradomínio são imagem de algum elemento do domínio.*

**Exemplo 16.** *Dada a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, com* $f(x) = x^2$*. Tem-se que* $f$ *é uma função sobrejetora, e vale ressaltar que a mesma não é injetora visto que* $f(3) = f(-3) = 9$ *mas* $-3 \neq 3$.

### 1.15.4 Funções Bijetoras

**Definição 11.** *Uma função $f : A \to B$ é bijetiva se, e somente se, é injetiva e é sobrejetiva.*

**Exemplo 17.** *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x$ é bijetiva.*

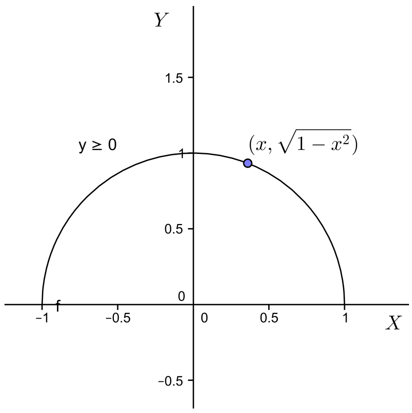
Também há possibilidades de uma função não ser injentiva ou sobrejetiva. O exemplo abaixo demonstra a utilização da lógica matemática em sua solução e através do gráfico concluir a não injetividade e sobrejetividade de $f$.

**Exemplo 18.** *A fórmula da distância entre dois pontos serve para reconhecer que o gráfico $G$ da função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

*, é a semi-circunfência $C_+$.*

Figura 6 – Semi-circunferência $C_+$




Dada a proposição $p : (x, y) \in G$. Para que $VL[p] = V$ é necessário e suficiente que a proposição $q : -1 \leq x \leq 1$ **e** $r : y = \sqrt{1 - x^2}$ seja verdadeira, ou seja, é necessário e suficiente que se tenha $VL[q \wedge r] = V$, e ainda, observa-se que $r \Rightarrow r'$, donde $r' : y \geq 0$. Assim, $VL[p] = V \Leftrightarrow VL[q \wedge r \wedge r'] = V$. Portanto, deve-se ter $p \Leftrightarrow q \wedge r \wedge r'$, daí

$$\begin{aligned}
(x, y) \in G \quad &\Leftrightarrow \quad (-1 \leq x \leq 1) \wedge (y = \sqrt{1 - x^2}) \\
&\Leftrightarrow \quad (-1 \leq x \leq 1) \wedge (y \geq 0) \wedge (y^2 = 1 - x^2) \\
&\Leftrightarrow \quad (y \geq 0) \wedge (x^2 + y^2 = 1) \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y) \in C_+
\end{aligned}$$

Supondo que o aluno já conheça a definição de função, gráfico de uma função e equação de uma circunferência, então, a solução apresentada utilizando os conectivos lógicos demonstrando que $y = \sqrt{1 - x^2}$ elevando ao quadrado os dois lados da equação obtem-se $y^2 = 1 - x^2$, e somando o inverso aditivo $-x^2$ nos dois lados da equação encontra-se a equação de uma circunferência com centro da origem e raio 1, isto é, $x^2 + y^2 = 1$.

Assim, conclui-se que todo par ordenado em $G$ pertence a uma semi-circunferência $C_+$, ou seja, $(x, y) \in G \Leftrightarrow (x, y) \in C_+$.

Realizando o procedimento lógico matemático e analisando as equivalências, o aluno será capaz de identificar o gráfico da função, mediante a interpretação da resolução do problema utilizando a lógica e o raciocínio matemático.

Observa-se claramente pelo gráfico que $f(-1) = f(1) = 0$, mas $-1 \neq 1$, logo não é injetiva. Como o $CD(f) = \mathbb{R}$, tem-se que $(\forall y > 1)(\nexists x \in [-1, 1] : y = f(x))$, assim $f$ não é sobrejetiva. Mas é uma aplicação, ou seja, uma função.

# 2 A TEORIA DE FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS E DOS CONCEITOS

Este capítulo aborda a teoria de formação por etapas das ações mentais e dos conceitos criada por Galperin fundamentada na teoria de Lev Semionovitch Vygotsky (1896-1934), psicólogo soviético, bacharel em direito, história e filosofia. Vygotsky criou a teoria sócio histórico cultural tendo como principais instrumentos o desenvolvimento cognitivo, linguístico, social e cultural, sendo também, o fundador da escola soviética de psicologia histórico-cultural onde deixou seu legado na ciência. A continuidade de sua teoria deu-se por diversos colaboradores que contribuiram para a expansão e o crescimento da psicologia e seu desenvolvimento na área pedagógica, dentre eles destaca-se o psicólogo e filósofo, Doutor em ciências psicológicas e professor, Aleksei Nikolaevitch Leóntiev (1889-1960) que definiu o conceito de atividade, no qual foi aceita como um dos princípios básicos da psicologia soviética. A partir da atividade Piotr Iakovlevitch Galperin (1902-1988), psicólogo e Doutor em ciências pedagógicas, formulou os princípios do experimento formativo, em estudos iniciais da teoria de *formação por etapas das ações mentais e dos conceitos*. Este capítulo explica a trajetória para a consolidação da teoria de Galperin.

## 2.1 PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Aprendizagem é o processo pelo qual o indivíduo adquire informações, habilidades, atitudes, valores, etc., a partir de seu contato com a realidade, o meio ambiente e outras pessoas, denomina-se aprendizagem na concepção de L. S. Vygotsky (1896-1934)" (OLIVEIRA, 1997, p.57). Logo, a aprendizagem faz parte do desenvolvimento cognitivo, linguístico, social, e cultural, referenciados nos pilares básicos do pensamento de Vygotsky, segundo Oliveira (1997):

- *As funções psicológicas têm um suporte biológico, pois são produtos da atividade cerebral;*
- *O funcionamento psicológico fundamenta-se nas relações sociais entre o indivíduo e o mundo exterior, as quais desenvolvem-se num processo histórico;*
- *A relação sujeito e contexto exterior é uma relação mediada por sistemas simbólicos (OLIVEIRA, 1997, p. 23).*

Assim, a zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é definida como a distância entre o mediador (professor) e o sujeito (aluno), como um espaço de forma crescente onde o aluno se encontra na parte inferior e o professor na parte superior. Como mostra a figura 1, há níveis nessa distância que são definidos como *nível de desenvolvimento real* e *nível de desenvolvimento potencial*, o primeiro ocorre por meio da independência na solução de problemas e o segundo por meio da solução de problemas, porém, com a presença de um adulto como orientador.

Figura 7 – Autor


Desse modo, a partir da interação social o sujeito tende a adquirir habilidades para organizar seu próprio padrão de conduta, mediante as ações que vão sendo gradativamente acrescentadas e materializadas na psique, até que se tornem automáticas (TALÍZINA, 1988). Vygotsky desenvolveu sua teoria no campo da formação de conceitos, por meio da linguagem, mas condicionada por uma atividade conjunta do aprendiz com o mediador (SANTOS; MENDOZA, 2013, p.24). Por Vygotsky é empregado o conceito de zona de desenvolvimento proximal para o esclarecimento de toda esta dinâmica, vista que é necessária para estabelecer a base para um melhor entendimento da teoria. Segundo Sforni (2001):

> Embora seja um conceito muito utilizado nas pesquisas educacionais, vale retomar a explicação vygostskyana, por ser essencial para o proposito deste trabalho. Por intermédio do conceito de Zona de Desenvolvimento Próximo, Vygotsky explica a ação da mediação que permite o movimento do plano interpsíquico para o intrapsíquico. Se o desenvolvimento é um processo, como tal não é constituído apenas de capacidades consolidadas, mas também de capacidades embrionárias, em via de amadurecimento. A primeira situação, chamada por Vygotsky de Desenvolvimento Real, é a evidenciada nas atividades que a criança pode realizar sozinha; e a segunda de Desenvolvimento Potencial, percebida nas atividades que a criança somente realiza com a ajuda de outros. A distância entre esses dois níveis é denominada de Zona de Desenvolvimento Próximo (SFORNI, 2004, p.40-41).

No entanto, a zona de desenvolvimento proximal definida por Vygotsky não estabelecia níveis de compreensão ou parâmetros sistemáticos para compreender qual era o procedimento ou comportamento para adquirir aprendizagem neste intervalo. No entanto, Leóntiev nos seus estudos, constituiu uma relação direta entre a psique e a atividade prática, determinou o evento do processo de execução das ações, em atividade do sujeito (SANTOS; MENDOZA, 2013).

De modo que a atividade é uma teoria constituída por Leóntiev (2004) definida como um processo de interação por onde ocorre transferências de informações sobre o objeto para o sujeito. Porém, Leóntiev chama atenção afirmando que toda atividade deve ser composta com um objetivo associado a uma motivação para realiza-la. Conclui-se então, que a atividade constitui-se da relação sujeito-objeto, na qual se origina um reflexo psíquico através desta mediação. Visto que, a interação possibilita gerar uma representação subjetiva deste objeto. Esse tipo de interação ocorre principalmente por meio da linguagem, de modo que, o sujeito assimila as experiências das gerações passadas, relacionando-as com as experiências da sociedade atual. Logo, o ser humano multiplica suas experiências, tendo como base a própria sociedade do seu contexto cultural (SANTOS; MENDOZA, 2013, p.25).

Mesmo tendo conceituado a atividade como processo psíquico do ser humano, a teoria de Leóntiev, despertou novos questionamentos entre os colaboradores da Escola Sócio Histórica. As indagações foram levantadas com intuito de descobrir: como acontecia a formação de novas ações mentais? Quais eram as características das ações no contexto da interação externa e interna? Que ações compõe os diversos tipos de atividade psíquica?

Diante da situação, ocorreu que Galperin, desenvolveu "a teoria da formação por etapa das ações mentais e dos conceitos" como fundamento teórico da organização e dos conceitos, por meio da atividade psíquica para compreender o processo da atividade no contexto externo e interno, isto é, segundo Longarezi e Puentes (2013):

> Galperin demonstrou que a atividade prática externa se interioriza e adquire a forma de atividade interna ideal. No entanto, ao tomar a forma psíquica e tornando-se relativamente independente, não se deixa de representar a atividade, ou seja, os processos dirigidos para a solução de tarefas vitais que surgem no processo de interação do sujeito com o mundo. A atividade psíquica não se torna puramente espiritual, isto é, essencialmente oposta à atividade prática externa. Isso permite eliminar a oposição dualista entre a atividade interna, da consciência, e a atividade externa. Permite também mostrar que o processo da consciência e a atividade externa não são coisas distintas, mas formas de um único processo: a atividade. Uma forma engendra a outra e se deriva dela (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p.293-294).

Desse modo, Galperin identificou que o ser humano desenvolvia suas habilidades cognitivas, por meio da atividade, no entanto, dividida por cinco etapas qualitativas que auxiliariam no desenvolvimento do processo cognitivo. Contudo, a concretização da assimilação deste processo de etapas, depende de um conjunto de elementos a serem considerados: as ações, as operações, os objetivos, a motivação, as habilidades e os hábitos principais. Talízina (1988) em suas pesquisas, complementou, apresentando as etapas na seguinte forma:

1. *Etapa (0): Motivação ;*
2. *Etapa (1): formação do esquema da base orientadora da ação;*

3. *Etapa (2): formação da ação em forma material ou materializada;*
4. *Etapa (3): formação da ação como verbal;*
5. *Etapa (4): formação da Linguagem Externa para si;*
6. *Etapa (5): formação da Ação na linguagem interna.*

A atividade se constitui pelas etapas e consequentemente pelas características das ações e operações que o sujeito realiza, observadas na maneira que são executadas e desenvolvidas sequencialmente quanto ao nível de aprendizagem, classificadas de acordo com a teoria Galperin, de maneira inicialmente detalhada à forma reduzida, ou seja, partindo de conceitos particulares, que visam alcançar o objetivo da atividade, que é desenvolver o conceito geral.

A etapa "0" (motivação) funciona como predisposição para o sujeito adquirir conhecimento, considerada de fundamental importância e deve aparecer em todo o processo. Em suas pesquisas Talízina (1988) concluiu que estudantes motivados aprendem melhor, embora a motivação seja algo espontâneo e tem relação com o complexo emocional de cada sujeito, considerou como um elemento estratégico a ser explorado pelos professores, e assim, fortalecer os recursos que facilitam o processo de ensino e aprendizagem.

A primeira etapa é fundamental para o direcionamento do processo, contendo abordagem dos procedimentos específicos que constitui a familiarização com as condições concretas da ação e sua representação em forma de um modelo do sistema de operações adequado à assimilação do conceito. Corresponde à etapa da Base Orientadora da Ação (BOA) que, na opinião de Galperin é um elemento que determina a qualidade do processo de assimilação (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p.296).

Os aspectos da elaboração da BOA a serem realizados pelo mediador do processo, dentre eles o objetivo do ensino, os parâmetros avaliativos e as características a associadas a orientação, se sobrepõem pelo grau de importância na elaboração, seguindo os critérios segundo Santos e Mendoza (2013):

1. *O planejamento das aulas, realizado com base no resultado de um diagnóstico aplicado pelo professor, antes de iniciar as atividades de ensino do conhecimento novo e o programa curricular da escolar;*

2. *O planejamento dos objetivos geral e específicos da atividade de ensino;*

3. *A organização sequencial do conteúdo da disciplina de acordo com as características das ações;*

4. *A definição ordenada gradativa dos conceitos relacionados;*

5. *O estabelecimento das estratégias de ensino;*

6. *As características de atuação e orientação do professor;*
7. *A forma pela qual será o conteúdo da disciplina disponibilizado para o estudante (preparada ou independente);*
8. *Os parâmetros avaliativos;*
9. *A retroalimentação durante o processo (SANTOS; MENDOZA, 2013, p.35-36).*

Portanto, a forma eficaz de aplicação da BOA depende dos procedimentos planejados e bem orientados, logo, a atividade do sujeito, torna-se mais importante no contexto da aprendizagem para assegurar as demais etapas seguintes.

A segunda etapa, formação da ação material ou materializada, inicia à atividade prática de ensino sendo o evento pelo qual os sujeitos serão orientados objetivando o alcance da aprendizagem dos conceitos envolvidos na atividade (SANTOS; MENDOZA, 2013, p.37). Portanto, é a formação da ação no plano material ou materializado com o uso de objetos reais ou suas representações simuladas, isto é, o sujeito desenvolve as ações práticas com o auxílio do mediador (professor) ainda com uma relação de dependência para o seu desenvolvimento. Por exemplo, um cubo mágico (objeto material) e o seu algoritmo (materializado).

Na terceira constitui a formação das ações da linguagem verbal externa (ação verbal). Neste nível o sujeito realiza a ação usando recursos da linguagem externa, ou seja, sua condução visa desenvolver a habilidade e capacidade/autonomia de expressar o conhecimento assimilado, tanto na forma verbal quanto na escrita (SANTOS; MENDOZA, 2013, p.37). Portanto, a explanação das ações, dadas pelo aluno, deve ser de forma consciente e autônoma contribuindo para sua independência, porém, seus erros e suas ações são reguladas e observadas pelo mediador que trilha caminhos para o principal objetivo que é a assimilação das operações.

A formação da ação da linguagem externa para si é a etapa que consiste na internalização do conhecimento adquirido, ou seja, pode ser visualizado na forma consciente que o sujeito expressa verbalmente ou de forma descritiva, os conceitos, acrescentando e tornando esse conhecimento, em uma habilidade do sujeito (SANTOS; MENDOZA, 2013, p.37). Ou seja, a etapa de formação da ação no plano da linguagem externa é representada de forma verbal (oral ou escrita), sendo teórica por meio de conceitos (verbais) e das palavras. Isto é, "a ação se realiza de forma semelhante à etapa anterior, [...]. Realizam-se operações que são controladas de acordo com os resultados de cada uma delas" (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p.297).

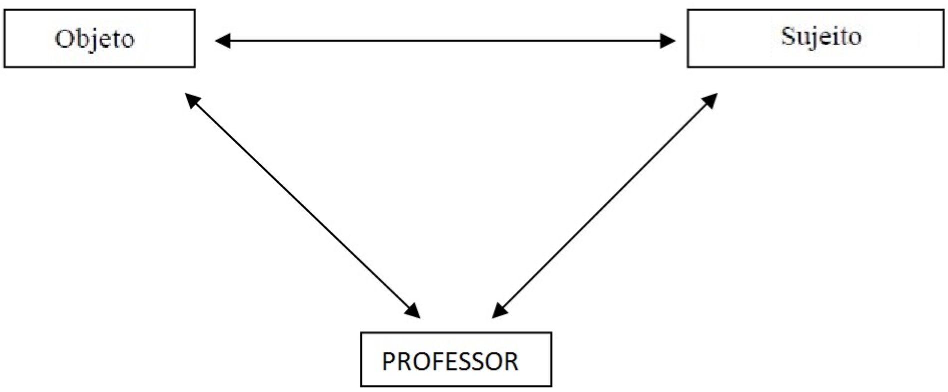
A quinta etapa a formação das ações em linguagem interna (ações mentais) resulta na transformação das atividades detalhadas em conceitos reduzidos e habilidades para desenvolvimento da ação na forma abstrata, trata-se de um procedimento oculto da ação cognitiva.

A Teoria da Formação por Etapas das Ações Mentais, é uma estratégia para "a obtenção do conhecimento cognitivo com caráter formativo que oportuniza a obtenção de conhecimentos e habilidades para resolução de situações problema" (RUBINSH-TEIN, apud. TALÍZINA, 1988). Por meio desta teoria se disponibiliza recursos para a formação do estudante, onde sua forma de abordagem dá-se com ênfase na formação de conceitos, com intuito de obter a aprendizagem organizada de forma estrutural e hierárquica.

Galperin estabeleceu o desenvolvimento superior do princípio da atividade psíquica e prática, da atividade interna e externa. Considerando que a atividade externa segue um percurso de transformação no processo, até que seja internalizada na psique humana, todo este processo de organização é denominado de formação por etapas das ações mentais (SANTOS; MENDOZA, 2013, p.27). Portanto, as formações por etapas das ações, que levam às ações externas (objeto de estudo), internas e ideais, estabelecem o conteúdo fundamental do processo de assimilação (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p.297).

Talízina descreve o processo de assimilação de Galperin, como um sistema de atividades, que são desenvolvidas por meio das ações e operações que estabelecem a organização da sistemática, entrelaçadas por suas características, que possibilitarão conduzir o sujeito a obter novos conhecimentos e hábitos (GALPERIN, apud TALÍZINA, 1988). Esta assimilação ocorre pela interação entre os elementos objeto, sujeito e mediador como na figura 2.

Figura 8 – Autor




A teoria da formação por etapas das ações mentais e dos conceitos é o resultado das investigações teóricas e experimentais de Galperin (1902-1988), ao estudo da estrutura e à gênese da atividade humana, especificamente na atividade prática e seu papel nas formações dos diferentes processos psíquicos, nos diferentes estágios de desenvolvimento ontogenético (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p.286).

As investigações de Galperin, permitiram destacar as principais etapas na formação de novos processos psíquicos do ser humano para o seu desenvolvimento psicológico. Por meio desta teoria, visamos compreender os principais tipos de organização do processo de formação por assimilação de conceitos e descobrir novas vias para resolver problemas didático-metodológicos do Ensino Médio, em particular os problemas que comprometem o desenvolvimento mental dos alunos, constituídos a partir da insuficiência dos conceitos de lógica e raciocínio matemático. Para Galperin a formação do sujeito para atuar em novas situações problema, depende da sua habilidade de realizar atividades.

## 2.2 CARACTERÍSTICAS DAS AÇÕES

A ação no contexto da atividade, Leóntiev (2004), é um ato realizado por meio de operações que a constitui a própria ação e as operações são os procedimentos pelos quais o sujeito realiza a ação. Para Galperin, as ações estão divididas em três aspectos: orientadora, executora e de controle, afirmando que em toda ação humana existem partes orientadoras, de execução e de controle (GALPERIN, op. cit, 58, apud. SANTOS; MENDOZA, 2013, p.28).

Por meio da ação orientadora o sujeito relaciona-se com o conjunto de ações e operações para realiza-las, seguindo as condições fundamentais para o desempenho bem sucedido da atividade. A ação executora assegura as modificações obtidas no objeto da ação (ideal ou material). Enquanto que a parte de controle é orientada pelo percurso da ação, a confrontar os resultados obtidos com o modelo do objeto.

As características da ação estudadas na teoria de Galperin são: a forma pela qual a ação é realizada; o grau de generalização do conceito; o grau de detalhamento da informação; o grau de consciência, o grau de independência; o grau de retenção da atividade ou o grau de consistência da informação obtida; e o caráter racional (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p.302).

Seguindo os princípios da organização do ensino do contexto externo para o interno (psíquico ou cognitivo) da teoria. As características independentes são formadas no contexto externo e não dependem da ação cognitiva dos sujeitos para serem observadas. As características dependentes são as propriedades secundárias, que dependem da primária, ou seja, são os efeitos das primeiras, consideradas como as ações cognitivas dos sujeitos acionadas para aprender o conhecimento novo (SANTOS; MENDOZA, 2013).

As características das ações são essenciais para planejar o ensino. Como já citamos, estão classificadas em dois aspectos: independentes (primárias) e dependentes (secundárias), que possuem suas subdivisões, dispostas na tabela abaixo:

Tabela 16 – Características das Ações

| Independentes (Primárias) | Dependentes (Secundárias) |
|---|---|
| A forma (material ou materializado; perceptiva; verbal externa e verbal) | Caráter Razoável |
| Caráter Explanado | Caráter Consciente |
| Caráter Assimilado | Caráter Abstrato |
| Caráter Generalizado | Caráter Consistente |

Seguindo a disposição da tabela 1, a primeira característica independente, destaca-se a “forma”, que caracteriza o grau de apropriação de conhecimento do sujeito, por meio da ação. A transformação da ação em conceitos abstratos ocorre durante o percurso de desenvolvimento, ou seja, de externa (contexto) a interna (psíquica).

Galperin distingue a característica da forma da ação, basicamente em: material, verbal e mental. Além disso, o autor ainda referencia à forma materializada (abstração do objeto) e a perceptiva (refletidos pelos sentidos sensoriais).

A forma material ou materializada da ação é a ação de partida em um sistema composto na atividade. As perceptivas refletem a capacidade dos órgãos sensitivos do sujeito de ver e ouvir. A verbal externa se caracteriza pela representação do objeto expressado pelo sujeito de forma verbal externa, raciocínio em “voz alta”, que também pode ser expressado quando o sujeito descreve essa trajetória de raciocínio. Quanto à forma mental da ação o sujeito absorve mentalmente os significados da ação realizada, ou seja, significa que a ação se realiza internamente, “para si”, transformados em elementos estruturais como: as representações e os conceitos (SANTOS; MENDOZA, 2013, p. 29).

A característica explanada é absorvida pelo sujeito por meio da explicação detalhada das ações e das operações. O processo de assimilação inicia-se com base em uma ideia ainda inconsistente e instável e na medida que os procedimentos e as descrições tornam-se conhecidos, tendem a redução do detalhamento, ou seja, perde suas formas particulares e transforma-se em ideias mais consistentes e consolidadas (SANTOS; MENDOZA, 2013, p. 29-30).

Ainda seguindo as características dispostas na tabela 1, a característica assimilada deve ser realizada pelo sujeito de maneira gradativa e consciente. Ressalta-se que a característica assimilada não está relacionada com a quantidade de ações realizadas para definir a automatização da ação, mas a execução consciente. Portanto, se o sujeito realiza a ação corretamente, consciente “sabendo o que está fazendo”, logo, transformar-se em ação automatizada.

E, quando o sujeito atinge o nível de capacidade de separar as propriedades do objeto, classificando-as em essenciais e não essenciais (conceitos particulares e conceitos gerais) para a execução da ação, significa que atingiu a característica generalizada da ação (SANTOS; MENDOZA, 2013, p. 30). Contudo, o mediador deve observar a expressão verbal; as variações destacadas como não essenciais; as particularidades da compreensão pelo sujeito; aplicação dos exemplos, entre outros.

Galperin considera a característica generalizada como fundamental em qualquer ação, porém afirma que não se limita somente à esfera do pensamento, também está relacionada com as partes estruturais e funcionais da execução da ação (apud, TALÍZINA, 1988, p.76).

As Características dependentes das ações conforme a tabela 1, dependem dos resultados da execução das ações primárias. Portanto, são essencialmente determinadas pela orientação do sujeito por meio da base orientadora da ação. A característica razoável é observável nos momentos iniciais do processo, ou seja, no momento em que os elementos do abjeto ainda estão formados por conceitos particulares e ideias dissociadas para realizar a ação, logo, o sentido razoável é insuficiente para aplicar os conceitos do objeto em outras situações. A característica razoável depende da característica explanada em sua orientação plena, essa relação assegura que, quanto mais completa a ação for representada para o sujeito, melhor será a assimilação em sua lógica (SANTOS; MENDOZA, 2013, p. 30).

A próxima característica “consciente” exige maior atenção do sujeito ao realiza-la, pois o mesmo deverá realizar a ação e argumentar como foi realizada destacando seus principais conceitos. Talízina (1988), afirma que esta característica pode ser identificada, quando o sujeito tem consciência da ação que está realizando e porque a realiza. No entanto, esta característica depende da plena representação da ação na forma verbal externa e da qualidade da assimilação dos conceitos.

Nas arguições de Santos e Mendoza (2013), após realizar a ação na característica generalizada, ou seja, aplicando os conceitos gerais do objeto, dar-se o momento que atinge o aspecto da característica abstrata da ação, pois, consiste na possibilidade da execução da ação pelo sujeito, sem o apoio de objeto material ou materializado, ou seja, a ação será realizada com o conhecimento na forma abstrata, representando assim o resultado da transformação da ação material em forma mental.

E por fim a característica consistente da ação, na qual o conceito se transforma em algo mais espontâneo, sua aplicação torna-se habitualmente normal na execução de uma tarefa, porém exige um período maior de observação para garantir a aprendizagem plena (SANTOS; MENDOZA, 2013, p. 30-31).

## 2.3 A BASE ORIENTADORA DA AÇÃO

Galperin (apud TALÍZINA, 1988, p.58), afirma que toda ação é composta por um conjunto de operações, que se exercem em determinada ordem, correspondência e regra. Portanto, a prática consecutiva das operações desenvolve o processo de execução da ação e as ações consequentemente desempenham a execução da atividade.

A Base Orientadora da Ação (BOA) é o modelo da atividade em forma de projeto da ação, composta das partes estruturais e funcionais da atividade (orientação, execução e controle). (LONGAREZI; PUENTES, 2013, p.300).

A BOA é formada por normas e condições de elaboração, que são seguidas pelo mediador do processo de assimilação como recurso estratégico para que os sujeitos possam desempenhar as ações e consequentemente, concluir a atividade. As características gerais da base orientadora da ação segundo Galperin, são oito combinações, porém somente as quatro primeiras foram testadas. Estas características, estão classificadas (tabela 2), por sua característica generalizada, a condição plena e o modo de obtenção do conhecimento:

Tabela 17 – Característica Generalizada

| Nº. | *Caráter Generalizado* | *Plena* | *Modo de obtenção* |
|---|---|---|---|
| 1 | **Concreta** | Incompleta | **Elaborada independentemente** |
| 2 | **Concreta** | **Completa** | **Preparada** |
| 3 | **Generalizada** | **Completa** | **Elaborada independentemente** |
| 4 | **Generalizada** | **Completa** | **Preparada** |
| 5 | Generalizada | Incompleta | Preparada |
| 6 | Generalizada | Incompleta | Elaborada independentemente |
| 7 | Concreta | Completa | Elaborada independentemente |
| 8 | Concreta | Incompleta | Preparada |

A (Tabela 2) na coluna “caráter generalizado” traz os aspectos da organização da atividade em dois conceitos: a primeira “concreta”, a partir de conceitos particulares e a segunda “generalizada”, apresenta o estudo por vias de aproximação por meio do conceito geral. O tipo de orientação plena é a maneira que os conceitos são apresentados nas aulas práticas classificadas em completa e incompleta. A orientação plena completa, ocorre por meio da orientação ativa de todos os procedimentos e conceitos incrementados, e a incompleta quando as ações da atividade não são orientadas em todas as propriedades conceituais (SANTOS; MENDOZA, 2013, p. 32).

O Modo de obtenção são classificadas em preparada e elaborada independente. O conteúdo ao ser apresentado na forma preparada, as s atividades são organizadas sistematicamente visando alcançar os objetivos. E a obtenção na forma elaborada independente o sujeito deverá ser orientado a solucionar problemas de maneira mais autônoma.

Portanto, o desempenho da base orientadora da ação pelo sujeito depende do auxílio do mediador da atividade, que deverá instiga-lo por meio das bases externas da ação, com o objetivo de que ele próprio, o sujeito, construa o conhecimento, obtendo a capacidade de elaborar e desenvolver seu próprio pensamento por meio das ações mentais (SANTOS; MENDOZA, 2013, p. 33).

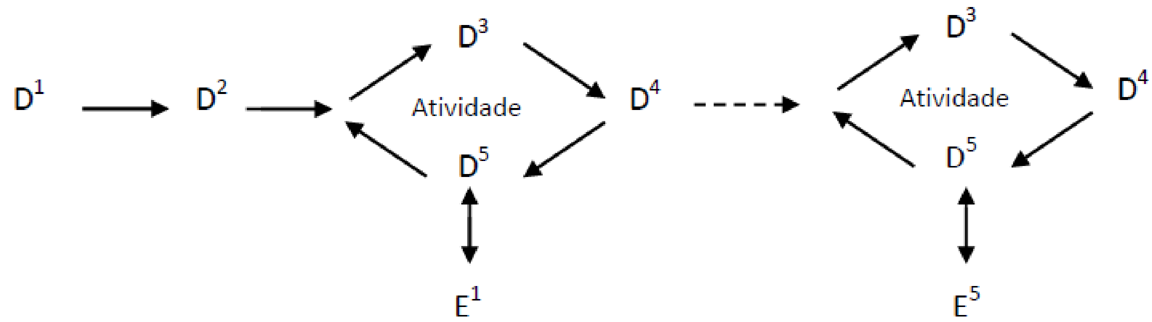
# 3 DIDÁTICA DO ENSINO DE FUNÇÕES

## 3.1 Direção da Atividade de Estudo

O processo de ensino aprendizagem deve estar sob o comando do professor seguindo os princípios da teoria geral de direção, constituída por: o objetivo de ensino ($D^1$), o estado de partida da atividade psíquica dos estudantes ($D^2$), o processo de assimilação ($D^3$), a retroalimentação ($D^4$) e a correção ($D^5$). Este processo deve ser cíclico e transparente visando, como elemento principal, o processo de transformação da atividade externa à atividade interna (TALÍZINA, 1984, 1988, 1994).

Se representará a direção da atividade a partir da figura ?, onde $E^1$, $E^2$ até $E^5$ significa as cinco etapas de formação das ações mentais.

Figura 9 – Direção da Atividade de Estudo




## 3.2 Atividade de Situação Problema em Matemática

A Atividade de Situações Problema (ASP) em Matemática está orientada pelo objetivo de resolver situações problema na zona de desenvolvimento proximal num contexto de ensino aprendizagem onde existe uma interação entre o professor, o estudante e a situação problema, utilizando a resolução de problema em Matemática como metodologia de ensino, a tecnologia disponível e outros recursos didáticos, para transitar pelos diferentes estados do processo de assimilação. (MENDOZA, 2009)

A ASP em Matemática está formada por um sistema invariante de quatro ações com suas respetivas operações que permitem solucionar várias classes de problemas matemáticos. A continuação é exposta o sistema de ações com suas respetivas operações (MENDOZA, 2009, MENDOZA et al.,2009, MENDOZA; TINTORER, 2010).

$1^a$ Ação: *compreender o problema:*

- Ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos;
- Estudar os dados e suas condições;
- Determinar o(s) objetivo(s) do problema.

$2^a$ Ação: *construir o modelo matemático*:

- Determinar as variáveis e incógnitas; nominar as variáveis e incógnitas com suas unidades de medidas;
- Construir o modelo matemático a partir das variáveis, incógnitas e condições e por último;
- Realizar a análise das unidades de medidas do modelo matemático.

$3^a$ Ação: *Solucionar o problema matemático*:

- Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo;
- Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo e solucionar o modelo matemático.

$4^a$ Ação: *Interpretar a solução* formada pelas operações:

- Interpretar o resultado; extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema;
- Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema;
- Realizar uma reflexão baseado no(s) objetivo(s) do problema;
- Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema existindo a possibilidade de reformular o problema e assim construir novamente o modelo matemático, solucioná-lo e interpretar sua solução.

A partir da Atividade de Situações em Matemática foi modificada e construída a atividade de situações problema em funções que tem por objetivo prover nos estudantes de uma estratégia para aplicar o conceito na resolução de problema que tenha como modelo uma função.

$1^a$ Ação: *compreender o problema:*

- Ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos;
- Estudar os dados e suas condições;
- Determinar o(s) objetivo(s) do problema.

$2^a$ Ação: Analisar se uma dada relação cumpre as propriedades essenciais do conceito de função:

- Relacionar entre os elementos de dois conjuntos;
- Analisar que em algumas relações todos os elementos do primeiro conjunto se correspondem com algum elemento do segundo conjunto;
- Examinar se em algumas relações não ocorre que algum elemento do primeiro conjunto se relacione com mais de um elemento do segundo conjunto.

$3^a$ Ação: *Aplicar o conceito de função*:

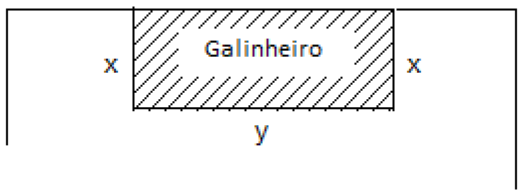
- Dada uma relação determinar se é função;
- Dada uma situação construir a função que modela o problema.

$4^a$ Ação: *Interpretar a solução* formada pelas operações:

- Interpretar o resultado; extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema;
- Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema;
- Realizar uma reflexão baseado no(s) objetivo(s) do problema;
- Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema existindo a possibilidade de reformular o problema e assim construir novamente o modelo matemático, solucioná-lo e interpretar sua solução.

**Exemplo 19.** *Um avicultor deseja construir um galinheiro na forma retangular em uma porção de terra parcialmente murada. Ele pretende utilizar como fundo do galinheiro o muro, para isso o avicultor dispõe de 40 metros de tela, conforme o desenho.*

Figura 10 – Autor




*Portanto:*

a) *Determine as proposições necessárias para escrever a lei (fórmula) que modela o problema;*

b) *Analise se os dados obtidos descrevem uma função;*

*c) Construa a lei da função utilizando os dados anteriores e com isso, calcule as medidas dos lados para que a área do galinheiro seja a máxima possível;*

*d) Explique o processo da solução do problema e o porquê das dimensões encontradas no item c) determinam a área máxima do galinheiro.*

Solução do problema

**1$^a$ Ação: Compreender o problema**

a) Como na figura, seja $x$ a medida dos lados menores e $y$ a medida do lado maior, a unidade para essas medidas é o metro ($m$). Tem-se as proposições $p$ e $q$, donde $p$ refere-se ao perímetro do galinheiro e $q$ a sua área. Como o avicultor possui 40 m de tela então o perímetro é $p : 2x + y = 40$ e a área é $A = xy$.

**2$^a$ Ação: Analisar se a relação cumpre as propriedades essenciais do conceito de função**

b) Pela fórmula do perímetro tem-se $y = 40 - 2x \Rightarrow y > 0 \Rightarrow 40 - 2x > 0 \Rightarrow 2x < 40 \Rightarrow x < 20$. Portanto, para todo valor de $x$ no intervalo $(0, 20)$ existe um único $y$ correspondente originando o perímetro e a área do galinheiro, tomando os valores de $x$ nesse intervalo encontrando consequentemente o valor de $a$, ou seja, $(\forall x \in (0, 20))\,(\exists!\ y \in R)$ onde $R$ é uma relação.

**3$^a$ Ação: Aplicar o conceito de função**

c) Dados $p : 2x + y = 40$, $q : A = xy$ a conjunção $p \wedge q$ infere logicamente numa proposição $r$, que representa a lei da função, isto é, $p \wedge q \Rightarrow r$. De fato,

$$p \wedge q : \begin{cases} 2x \ + \ y \ = \ 40 \quad (I) \\ \qquad\quad A \ = \ xy \quad (II) \end{cases}$$

Em $(I)$ tem-se que $y = 40 - 2x \ \ (III)$, substituindo $(III)$ em $(II)$ obtem-se, $A = x \cdot (40 - 2x)$, logo

$$A(x) = -2x^2 + 40x$$

Portanto, $r : A(x) = -2x^2 + 40x$. Assim, temos que $A$ é uma função de $(0, 20)$ em $\mathbb{R}$, isto é, $D(A) = (0, 20)$ e o $CD(A) = \mathbb{R}$. Portanto, temos a função $A : (0, 20) \longrightarrow \mathbb{R}$. O fato de $A$ ser uma função pode ser visto na ação 2, pois $(\forall x \in (0, 20))\,(\exists!\ y \in \mathbb{R})$.

A proposição $r$ demonstra que a função descoberta é uma função quadrática, assim podemos utlizar o vértice $V(x_v, y'_v)$, logo a abscissa do vértice de $A$, isto é, $x_v$ é o lado pedido, assim $x_v = \frac{-b}{2a}$, donde $x_v = \frac{-40}{2\cdot(-2)}$, daí, $x_v = 10$. Substituindo $x_v = 10$ em $(I)$, fica $y = 40 - 2 \cdot 10$, donde $y = 20$. E ainda, $A(10) = (-2) \cdot 10^2 + 40 \cdot 10 = 200$. Portanto, a área máxima é $200m^2$ e as medidas dos lados são $x = 10$ e $y = 20$. A partir de $y'_v$ pode-se encontrar o conjunto imagem da função $A$, isto é, $Im(A) = \{y'_v \in$

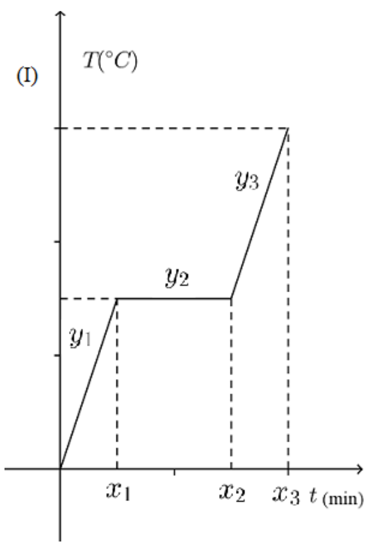
$\mathbb{R} \mid 0 < y'_v \leq 200\}$, ou ainda, $Im(A) = (0, 200)$. Assim, em podemos escrever que $(\forall x \in (0, 20))\,(\exists!\ A(x) \in (0, 200))$. Com isso, podemos observar pelo gráfico de uma função quadrática e pelo domíno, que a função $A$ é injetiva mas não sobrejetiva, pois, $\forall y > 200, x \notin (0, 20)$.

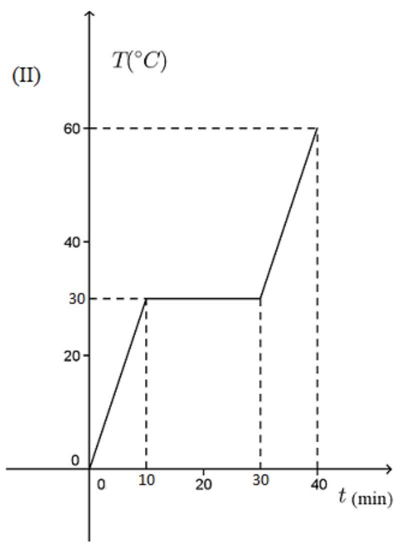
**$4^a$ Ação: Interpretar a solução do problema**

d) O processo de solução do problema ocorre com base na descoberta das proposições $p$ e $q$, visto que esta ação é a principal para a solução dos itens b) e c). A interpretação de forma independente da proposição $p$ e da proposição $q$ geram a conjunção $p \wedge q$. Assim, $p \wedge q$ forma um sistema de equação linear. E ainda, $p \wedge q \Rightarrow r$, onde $r$ representa a lei de associação da função. A área máxima é $A = 200m^2$ porque a função $A$ é uma função quadrática com coeficiente $a = -2 < 0$, assim a concavidade da parábola é voltada para baixo, portanto o Vértice $V = (x_v, y'_v)$ possui seu ponto de mínimo em $x_v = 10$ e seu valor máximo em $y'_v = 200$.

Na solução deste problema observa-se o nível em que o aluno deverá chegar para obter respostas plausíveis com contextos matemáticos. Exercícios como esse trabalham o cognitivo do aluno gerando autonomia em seus pensamentos contribuindo para que possa aplicar em outras situações que virão. A *etapa de formação da ação no plano da linguagem externa* apresentada pelo discente demonstrará o cumprimento da etapa 4 da teoria de Galperin, pois, o aluno expressa por meio da escrita conceitos necessários e as propriedades essenciais para a solução do exercício, demonstranto conhecimento suficiente, isto é, seu nível de conhecimento para aplicação do conceito de função com a lógica e o raciocínio matemático é totalmente consciente.

**Exemplo 20.** *As funções modelam fenômenos que ocorrem em substâncias químicas, com isso, os gráficos abaixo mostram um processo de aquecimento referente a uma substância líquida. A temperatura da substância varia com o tempo.*



a) Identifique as proposições $p_1, p_2$ e $p_3$ e as condições $q_1, q_2$ e $q_3$ que determinam as funções e os intervalos respectivamente, de acordo com o gráfico (I);

b) Com base no item a) e utilizando o gráfico (II), Identifique as proposições $p_1, p_2$ e $p_3$ e as condições $q_1, q_2$ e $q_3$, e analise se esses dados descrevem uma função;

c) Aplique o conectivo lógico $\wedge$ e utilize as proposições $p_1, p_2$ e $p_3$ e as condições $q_1, q_2$ e $q_3$, e escreva a lei de associação da função que modela o gráfico (II);

d) Explique o processo de solução de cada item de forma lógica matemática.

Solução do Problema

**1$^a$ Ação: Compreender o problema**

a) Observa-se que o gráfico (I) apresenta as proposições:

$$p_1 : y_1 = ax, (a \in \mathbb{R}^*)$$

$$p_2 : y_2 = k, (k \in \mathbb{R})$$

e

$$p_3 : y_3 = ax + b, (a \in \mathbb{R}^* \wedge b \in \mathbb{R})$$

, cujas condições são as proposições

$$q_1 : [0, x_1]$$

$$q_2 : ]x_1, x_2[$$

e

$$q_3 : [x_2, x_3]$$

, ou seja, $q_1, q_2$ e $q_3$ são intervalos. E ainda, a proposição $p_1$, $p_2$ e $p_3$ tratam de funções linear, constante e polinomial do primeiro grau, respectivamente. Pois, cumprem todas as propriedades essencias, vale lembrar que:

(i): $p : \forall x \in A, \exists y \in B \mid (x, y) \in f$

(ii): $q : (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Podemos observar que a conjunção aplicada as proprosições $q_1, q_2$ e $q_3$ inferem logicamente a uma proposição $d$ que representa o domínio de $f$. Temos também, uma relação entre dois conjuntos, uma aplicação entre o tempo em minutos e a temperatura em graus Celsius.

**2$^a$ Ação: Analisar se a relação cumpre as propriedades essenciais do conceito de função**

b) Com base no ítem a) e no gráfico (II) tem-se que:

$$p_1 : y_1 = 3x$$

$$p_2 : y_2 = 30$$

e

$$p_3 : y_3 = 3x - 60$$

E ainda,

$$q_1 : [0, 10]$$

$$q_2 : ]10, 30[$$

e

$$q_3 : [30, 40]$$

O conectivo lógico $\vee$ aplicado as proposições $q_1, q_2$ e $q_3$ inferem logicamente no domínio da função, ou seja,

$$q_1 \vee q_2 \vee q_3 \Rightarrow d$$

onde $d$ é a proposição referente ao domínio da função f. Assim o domínio da função f é,

$$d : D_f = [0, 10] \cup ]10, 30[ \cup [30, 40]$$

ou seja,

$$d : D_f = [0, 40]$$

. Podemos observar que para cada valor $x$ nesse intervalo temos uma temperatura $y$, e somente uma temperatura, ou seja, $x$ se corresponde com apenas um $y$,isto é, $(\forall x \in D_f)(\exists!\ y \in [0, 60]$.

**3$^a$ Ação: Aplicar o conceito de função**

c) Aplicando a conjunção nas proposições obtem-se a lei de associação da função, daí

$$p_1 \wedge q_1 : y_1 = 3x, se\ x \in\ [0, 10]$$

$$p_2 \wedge q_2 : y_2 = 30, se\ x \in ]10, 30]$$

e

$$p_3 \wedge q_3 : y_3 = 3x - 60, se\ x \in ]30, 40]$$

Assim,

$$(p_1 \wedge q_1) \wedge (p_2 \wedge q_2) \wedge (p_3 \wedge q_3) \Rightarrow r$$

donde

$$r : f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se} \quad x \in \ [0, 10] \\ 30, & \text{se} \quad x \in \ ]10, 30[ \\ 3x - 60, & \text{se} \quad x \in \ [30, 40] \end{cases}$$

A função $f$ é uma função sobrejetiva, pois todos os $y$ que são a temperatura ocorre em algum tempo $x$ em minutos, Porém, não é injetiva, basta observar que no intervalo $]10, 30[$ tem-se uma temperatura constante.

**4$^a$ Ação: Interpretar a solução do problema**

d) No item a) o gráfico foi dividido em três situações já descritas como $y_1, y_2$ e $y_3$. As proposições pedidas $p_1, p_2$ e $p_3$ representam funções, e de acordo com o gráfico (I) estas proposições representam funções afins, o que valida o gráfico visto que o gráfico $G$ de uma função afim é uma reta. Mas as proposições $p_1, p_2$ e $p_3$ são verdadeiras se, e somente se, as proposições $q_1, q_2$ e $q_3$ são verdadeiras, sendo uma tautologia, pois $q_1 : [0, x_1]$, $q_2 :]x_1, x_2[$ e $q_3 : [x_2, x_3]$ são intervalos do domínio, assim, as funções se comportam de acordo com os intervalos no domínio.

A solução de forma geral do item a) deixa claro a construção do item b) e o item c), pois o gráfico (II) é uma situação problema com números. Assim, basta substituir as incógnitas do item a) pelos números de acordo com o problema. As proposições $q_1, q_2$ e $q_3$ representam intervalos, e a disjunção aplicada nestas proposições inferem a outra proposição $d$ que representa o conjunto $D_f$ que é a união dos intervalos. Assim, $D_f = [0, 40]$, visto que a substância é aquecida até um tempo já determinado no experimento. Com as proposições $p_1, p_2$ e $p_3$, e as proposições $q_1, q_2$ e $q_3$ podemos escrever a lei de associação da função que modela o problema, para isso, apliquemos a conjunção nas proposições descritas encontrando proposições compostas $p_1 \wedge q_1$, $p_2 \wedge q_2$ e $p_3 \wedge q_3$, agora aplicando novamente a conjunção nessas proposições compostas terá um inferência lógica, isto é, implicará logicamente em uma proposição $r$, onde $r$ representa a lei de associação da função que modela o problema, ou seja, é a lei que mostra o compontamento do líquido ao ser aquecido em uma temperatura na escala Celcius ($°C$) num dado tempo em minutos.

## 3.3 ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMAS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

As situações problema da Didática da Matemática está orientada para a solução de problemas do processo ensino aprendizagem na zona desenvolvimento atual e proximal, onde existe uma interação entre o estudante e a situação problema, orientada pelo professor considerando um objetivo de ensino vinculando a conteúdos de Matemática, num contexto de aprendizagem, utilizando métodos, recursos didáticos e técnicas para colocar em prática as estratégias metodológicas.

A ASP da Didática Matemática está fundamentada pela teoria de formação das ações mentais de Galperin, pela direção do processo ensino aprendizagem e pela ASP em Matemática. O objeto de estudo está constituído por um sistema invariante de ações, com suas respectivas operações, com o objetivo de contribuir na formação da teoria científica prática do professor de Matemática para resolver problemas de ensino aprendizagem no planejamento e exposição de aulas (TINTORER; MENDOZA, 2010).

A estratégia para a solução de problemas didáticos é divido em três momentos: identificar o problema da ASP da Didática da Matemática, planejar e construir a ASP em Matemática que a seguir será descrito com suas ações e operações correspondentes (MENDOZA, TINTORER; no prelo).

Momento n° 1: Identificar o problema ASP da Didática da Matemática.

$1^a$ Ação: Compreender a situação problema:

- Identificar o problema e extrair todos os elementos desconhecidos;
- Estudar e compreender os elementos desconhecidos;
- Determinar os dados e suas condições, tais como as principais propostas do projeto pedagógico no contexto em que se desenvolve o processo de ensino aprendizagem da Matemática e as características dos estudantes, professores e recursos didáticos referidas à atividade;
- Identificar o(s) objetivo(s) do problema.

$2^a$ Ação: Identificar a atividade cognoscitiva:

- Determinar o(s) objetivo(s) de ensino do conteúdo matemático;
- Identificar a existência de um sistema invariante de ações com suas operações para alcançar o objetivo anterior (atividade);
- Identificar a existência de métodos para executar a atividade;
- Identificar se deseja formar uma nova atividade ou elevar a existente por meio de determinadas características.

$3^a$ Ação: Determinar o nível de partida da atividade cognitiva dos estudantes:

- Determinar o nível dos conhecimentos matemáticos referido ao objetivo de ensino;
- Determinar o nível dos estudantes em relação ao sistema de ações da atividade que se deseja formar;
- Verificar o nível dos estudantes relacionada à métodos para executar a atividade;

- Determinar a etapa mental dos estudantes;
- Verificar a atitude e motivação dos estudantes diante da atividade;

Neste primeiro momento o professor deve ter consciência das condições onde vai ser realizado o processo de ensino aprendizagem tais situação físicas do ambiente, recursos tecnológicos, didáticos, etc. Não se deve desconsiderar as experiências acumuladas até momentos pelo que precisa-se conversar com os professores sobre a situações docentes dos estudantes, se não são calouros, revisar os resultados acadêmicos no registro acadêmico. Também deve-se verificar o projeto político pedagógico enquanto a ensino da matemática enfatizando no conteúdo de função e sua coerência com os parâmetros curriculares nacionais.

O professor dominar os conteúdos matemáticos é uma condição necessária para obter uma efetividade no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função pelo deve-se encontrar quais os conhecimentos prévios e as experiências em relação a formação do conceito de função a partir da resolução de problema como metodologia de ensino. Também deve-se identificar os conjuntos de conhecimentos prévios sobre a formação do conceito de função, mas também o método para a resolução de problema.

Momento n° 2: Planejar a ASP em Matemática.

$4^a$ Ação: Formular o sistema invariante das ações:

- Propor a ponte necessária entre o nível de partida dos estudantes e a atividade, que inclui conteúdos e método, que se deseja formar;
- Constituir o sistema invariante de ações com suas respectivas operações.

$5^a$ Ação: Formular a base orientadora da ação ($1^a$ Etapa):

- Selecionar a estratégia do sistema de ações considerando sua generalidade (invariante), plenitude e a forma de obtenção pelos estudantes de acordo com o objetivo de ensino;
- Estabelecer a parte orientadora, executora e de controle do sistema de ações.

$6^a$ Ação: Selecionar os recursos didáticos:

- Verificar os recursos didáticos disponível no contexto de aprendizagem;
- Analisar os recursos didáticos tomando sua contribuição de todas as etapas da transformação;
- Selecionar os recursos didáticos, visando o tipo de base orientadora da ação.

$7^a$ Ação: Selecionar o sistema de avaliação:

- Analisar o tipo de avaliação considerando a etapa mental a formar;
- Analisar os possíveis instrumentos a ser utilizado em cada tipo de avaliação.

Agora se está no momento para planejar a ASP em Matemática, é um momento de decisões para o professor logo de analisar os resultados do nível de partida dos estudantes. Deve decidir como levar aos estudantes da zona de desenvolvimento real à potencial. É o momento de construir a zona de desenvolvimento proximal.

Momento n$^\circ$ 3: Construir a ASP em Matemática:

8$^a$ Ação: Preparar o plano de ensino das etapas seguintes:

- Estabelecer as ações com suas respectivas operações centradas na resolução de problema;
- Elaborar o plano de ensino, segundo o objetivo de ensino guiado pelas etapas de formação das ações mentais com suas características primárias e secundárias.

9$^a$ Ação: Fazer os planos de aulas:

- Selecionar as tarefas seguindo a lógica do processo de aprendizagem;
- Elaborar as situações problema que devem guiar os planos de aulas.

10$^a$ Ação: Preparar os instrumentos do sistema de avaliação:

- Organizar os instrumentos para saber quanto e como os estudantes aprendem através das etapas de formação das ações mentais que permitam verificar as características primárias e secundárias do sistema invariante.

Plano de Aula

Elementos de identificação: Disciplina, unidade, assunto e tempo.

*Objetivos*

- Definir as habilidades dos estudantes que devem alcançar em relação aos conteúdos;
- Determinar a(s) meta(s) dos procedimentos lógicos e psicológicos do processo de assimilação dos conteúdos pelos estudantes.

*Método de Ensino*

- Selecionar a Base Orientadora da Ação;
- Eleger o tipo de aula. (Aula Expositiva, Aula Mista, Aula Prática, Seminário, Prática de Laboratórios, entre outras);
- Escolher a(s) estratégia(s) de ensino. (Resolução de Problema, Modelação Matemática, Jogos, História da Matemática, entre outras);
- Definir a estratégia de direção do processo de ensino aprendizagem.

*Introdução*

- Motivar os estudantes a partir dos objetivos de ensino;
- Avaliar nos estudantes os elementos prévios dos conteúdos e a etapa mental em relação com objetivos de ensino;
- Explicar os objetivos de ensino.

*Desenvolvimento*

- Explicar a atividade de estudo com suas ações e operações através da Base Orientadora da Ação selecionada;
- Manter a lógica durante as explicações, isso servirá de modelo para o estudante;
- Introduzir as ideias e conceitos mais simples para chegar aos mais complexos;
- Utilizar os recursos didáticos que possam fazer a aula mais atrativa e eficiente;
- Avaliar em vários momentos o cumprimento dos objetivos de ensino, e se é preciso realizar as correções pertinentes. Verificar através de perguntas se os estudantes estão aprendendo;
- Analisar o planejamento dos principais recursos e metodologias usadas, incluindo o tempo que está sendo dedicado aos objetivos essenciais da aula.

*Conclusões*

- Avaliar o cumprimento dos objetivos de ensino;
- Corrigir os erros mais significativos dos estudantes;
- Sintetizar as ideias centrais, reforçando os objetivos propostos;
- Orientar o trabalho extraclasse que possa ser avaliado em aulas posteriores;

- Motivar o conteúdo da próxima aula.

*Indicar a Referência Bibliográfica*

Tabela 01: Plano de Ensino da ASP no conceito de Função

| nº | Conteúdos | Objetivos | TA | H/A | Etapa mental |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Correspondência entres os elementos de dois conjuntos e suas qualidades distintivas fundamentais | ➢ Compreender o caráter geral do conceito de relação entre os elementos de dois conjuntos.<br>➢ Identificar que em algumas relações todos os elementos do primeiro conjunto se correspondem com algum elemento do segundo conjunto.<br>➢ Identificar que em algumas relações não ocorre que algum elemento do primeiro conjunto se relacione com mais de um elemento do segundo conjunto. | AE | 2 | Orientação do sistema de ações da ASP em conceito de função a partir de problemas onde as relações dadas cumpram ou não as qualidades associadas aos objetivos dois e três, formulados com linguagem dos conectivos lógicos e quantificadores. |
| 2 | | Resolver problemas que tenham como solução a análise das qualidades das relações | AP | 8 | O estudante deve realizar (etapa material) detalhadamente o sistema de ações, tomando como base a análise das qualidades das relações. O professor deve controlar os sis-tema de ações e corrigir quando necessário.<br>As acões são conscientes. comparti-lhadas, detalhadas e ainda não generalizadas. |
| 3 | Definição do conceito de função entre dois conjuntos | Saber aplicar a definição do conceito de função entre dois conjuntos na resolução de problema | AM | 2 | O estudante deve explicar (etapa verbal) o conceito de função entre dois conjuntos sem a ajuda dos objetos externos.<br>As ações são conscientes, compartilhadas, detalhadas, mais as operações são automatizadas. |
| 4 | | | S | 2 | |
| 5 | | Saber aplicar a definição do conceito de função entre dois conjuntos na resolução de problema em novos contextos (transferências). | AP | 6 | O estudante deve saber aplicar o conceito de função entre dois conjuntos (etapa verbal externa para si).<br>As ações são, independentes, comprimidas, automatizadas e generalizadas. |

Legenda: AE: Aula Expositiva, AP: Aula Prática, AM: Aula Mista, S: Seminário.

Fonte: Elaborado pelos autores

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas no ensino básico se demonstram complexas e de suma importância para o desenvolvimento da educação de modo geral, visto que, o presente estudo propõe a introdução do conceito de função a partir de propriedades essenciais invariantes através da resolução de problema como metodologia de ensino, com uma base orientadora da ação geral, completa e independente, utilizando a Atividade de Situações Problema em Matemática para estudante de 1º Ano de Ensino Médio

Propoem-se uma sequência didática que permita o estudante uma transformação da atividade externa à interna fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais, ou seja, de ações não generalizada à generalizada, compartilhada à independente e de consciente à automatizada. Dita sequência deve contribuir aos estudantes a resolver novos problemas não estudados que contenha como modelo matemático o conceito de função, também deve colaborar com a criatividade dos mesmos.

Além da estratégia da aprendizagem dos conteúdos, A Atividade de Situações Problema na formação do conceito de função, se considera uma metodologia para o professor conduzir a transformação da atividade externa à interna utilizando a direção da Atividade de Estudo de Talízina.

A utilização da teoria de formação por etapas das ações de Galperin e a lógica matemática permite ao professor realizar um planejamento das aulas para a formação do conceito de função, ou seja, existe um critério científico de como organizar as aulas, selecionar os exercícios e realizar avaliações.

Sugere-se dar-se continuidade as propostas metodológicas de formação do conceito de função para estudante do 1º Ano de Ensino Médio, construindo os procedimentos metodológicos como pesquisa e a verificação da mesma.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BRASIL. **Secretaria da Educação Média e Tecnológica**. PCN: Orientações curriculares para o ensino médio ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

CASTAÑEDA, Alberto M. Martinez. **Introdução a Lógica Matemática**. Apostila. Roraima. 2008.

CASTAÑEDA, Alberto M. Martinez. **Teoria dos Conjuntos**. Apostila. Roraima. 2013.

FILHO, Edgar de Alencar. **Iniciação à Lógica Matemática**. Nobel. São Paulo. 1975.

GALPERIN, P. Ya. **Introducción a la psicología**, Editorial Peublo y Educación, Calle 3ra. A N. 4605, Playa, Ciudad de La Habana.

LIMA, Elon Lages et. al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1. SBM . Rio de Janeiro. 2006.

LIMA, Elon Lages et. al. **Número e Funções Reais**. 1ª Edição. SBM . Rio de Janeiro. 2013.

LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (orgs.). **ENSINO DESENVOLVIMENTAL: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos**. Editora EDUFU. Uberlândia. 2013.

MENDOZA, Héctor José Garcia. **La Teoria de La Atividad de Formación por Etapas de Las Acciones Mentales em La Resolución de Problemas**, Ana Maria Ortiz Colón, Juan Martinez Moreno, Oscar Tintorer Delgado, Revista Científica Internacional "Inter Sciencie Place", Indexada ISSN 1679-9844, www.intercienceplace.org. Ano 2, nº09, setembro/outubro, 2009.

MENDOZA, Héctor José Garcia. **Estudio Del Efecto Del Sistema de Acciones Em El Proceso Del Aprendizaje De Los Alumnos En La Actividad De Situciones Problema En Matemática En La Asignatura De Álgebra Lineal**, En El Contexto de La Facultad Actual De La Amazonia. 2009 Tese (Doutorado em Psicopedagogia) - Universidad de Jaén (UJAEN), Espanha, 2009a.

TINTORER, O. ; MENDOZA, Héctor J. G. ; CASTANEDA, A. M. M. . **Implicação da base orientação das ações e direção do processo de estudo na aprendizagem dos alunos na atividade de situações problema em sistema de equações lineares**. In: VIII Congresso Norte e Nordeste do Ensino de Ciências e Matemática, 2009, Boa Vista. CD Anais do VIII Congresso Norte e Nordeste do Ensino de Ciências e Matemática, 2009.

MENDOZA, Héctor J. G. ; TINTORER, O. . **A Didática da Matemática Fundamentadas na Teoria da Atividade de Formação por Etapas Mentais**. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. CD ANAIS X ENEM, 2010.

MENDOZA, Héctor José Garcia. **Sistema de ações para melhorar o desempenho dos estudantes na atividade de situações problema em matemática**. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM, 2011.

MENDOZA, Héctor Jose Garcia; TINTORER, Oscar. A Didática da Matemática fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin. In: NÚÑEZ, Isauro Beltrán; RAMALHO, Betânia Leite. **Ya. Galperin e e Teoria da Assimilação mental por etapas: pesquisas e experiências para um ensino inovador**. No prelo 2015

OLIVEIRA, Martha Khol. **Vygotsky: Aprendizado e Desenvolvimento Um Processo Sócio-histórico**, São Paulo: Scipione, 1997 – Coleção (Pensamento e Ação no Magistério).

PINHO, José A. **Introdução à Lógica Matemática**. Apostila. Rio de Janeiro. 1999.

SANTOS, Solange de Almeida. **ESTUDO DA APRENDIZAGEM NA ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA EM LIMITE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL FUNDAMENTADO NA TEORIA DE FORMAÇÃO POR ETAPAS DAS AÇÕES MENTAIS DE GALPERIN NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE RORAIMA**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Estadual de Roraima, Roraima, 2014 .

TALÍZINA, Nina. **Psicologia do Ensino**, Moscou: Progresso, 1988.

SÉRATES, Jonofon. **Raciocínio Lógico**. Volume I. 8ª Edição. Editora JONOFON Ltda., 1998.

SFORNI, Marta Sueli de Faria, **Aprendizagem Conceitual e Organização do Ensino: Contribuição da Teoria da Atividade**, 1ª ed. Araraquara: JM Editora, 2004.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch, 1986-1934. **Linguagem Desenvolvimento e Aprendizagem**, Alexander Romanovich Luria, Alex N. Leóntiev; tradução Maria da Penha Vila Lobos – São Paulo: Ícone, 2006.