UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA DE REDE NACIONAL

EDUARDO SANTANA CAVALCANTI

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAS VIA MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON COM USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS.

BELÉM-PA
2015

EDUARDO SANTANA CAVALCANTI

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAS VIA MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON COM USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – PPGME – UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

BELÉM – PA

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Santana Cavalcanti, Eduardo, 1978-
Soluções de equações polinomiais via método de newton-raphson com uso de planilhas eletrônicas. / Eduardo Santana Cavalcanti. - 2015.

Orientador: Anderson David De Souza Campelo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2015.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Cálculo diferencial. I. Título.

CDD 23. ed. 510.7

EDUARDO SANTANA CAVALCANTI

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAS VIA MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON COM USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – PPGME – UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Conceito: APROVADO

Aprovado em: 12 / 06 / 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (Orientador)
Universidade Federal do Pará – UFPA

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará – UFPA

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Universidade Federal do Pará – UFPA

Lindomar M. Ribeiro

Prof. Dr. Lindomar Miranda Ribeiro
Universidade Federal do Pará – UFPA

A minha mãe Nilce Santana Cavalcanti (in memoriam), a mulher mais importante da minha vida.

“ Mãe, você permanecerá para sempre em minhas lembranças e principalmente em meu coração. ”

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por todas bênçãos que me concedeu nesta vida.

A minha esposa, amiga e companheira, Karina da S. Castro Cavalcanti, que está comigo nessa minha caminhada profissional. Agradeço pela compreensão e carinho nos momentos difíceis em que me acolheu, compreendeu e me deu forças para continuar.

Aos meus tios Rubens Nascimento Santana e Rosilene do S. Andrade Coelho por sempre estar ao meu lado ajudando e incentivando.

Ao meu orientador prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo por sua dedicação e paciência.

Aos meus amigos da turma PROFMAT - 2013 que foram sempre prestativos e solidários nos momentos de dificuldade, companheiros, carismático e descontraídos nos momentos de alegria.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”

(Albert Einstein)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo proporcionar aos alunos do ensino médio um método de localização de raízes polinomiais com a utilização de planilhas eletrônicas, tal método, chamado de Método de Newton – Raphson, é um dos mais eficientes e conhecidos para resolver esse problema. Entende-se que este trabalho preenche uma lacuna não abordada nos livros didáticos e responde questionamentos de como se encontrar raízes reais de polinômios de grau $n > 2$. Para apresentar o Método de Newton – Raphson o aluno tem que ter uma noção de cálculo diferencial, que será introduzida de forma elementar e intuitiva neste trabalho.

PALAVRA CHAVE: Raízes Polinomiais; Método de Newton – Raphson; planilhas eletrônicas.

ABSTRACT

This paper aims to provide high school students a localization method of polynomial roots with the use of spreadsheets, such a method, called Newton's method - Raphson, is one of the most efficient and known to solve this problem. It is understood that this work fills a gap not covered in textbooks and answer questions on how to find roots of polynomials of degree $n > 2$. To display the Newton's method - Raphson the student has to get a sense of differential calculus, which will be introduced in elementary and intuitively in this work.

KEY WORD: Polynomial Roots; Newton - Raphson; spreadsheets.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

2 POLINÔMIOS 12
2.1 FUNÇÃO POLINOMIAL 12
2.2 OPERAÇÕES 13
2.2.1 Adição 13
2.2.2 Propriedade da adição 14
2.2.3 Multiplicação 15
2.2.4 Propriedade da Multiplicação 16
2.3 DIVISÃO DE POLINÔMIOS 17
2.3.1 Divisões imediatas 17
2.3.2 Método de Descartes 18
2.3.3 Existência e unicidade do Quociente e do resto 19
2.3.4 Método da chave 21
2.4 DIVISÃO DE UM POLINÔMIO POR $(x-a)$ 22
2.4.1 Teorema do resto 22
2.4.2 Teorema de D'Alembert 23
2.4.3 Algoritmo de Briot – Ruffini 23
2.5 NÚMERO DE RAÍZES 26
2.5.1 Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.) 26
2.5.2 Teorema da Decomposição 26
2.5.3 Multiplicidade de uma raiz 29
2.6 RELAÇÃO ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES (RELAÇÃO DE GIRARD .. 29
2.7 RAÍZES COMPLEXAS 32
2.7.1 RAÍZES CONJUGADAS 32
2.7.2 Multiplicidade da raiz conjugada 33
2.8 RAÍZES REAIS 34
2.8.1 Teoremas de Bolzano 35

3 NOÇÕES DE CÁLCULO 37
3.1 LIMITE E CONTINUIDADE 37

3.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO 38
3.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA 39
3.4 FUNÇÃO DERIVADA E DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR 41
3.5 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL 41
3.5.1 Regras de derivação de função polinomiais 41
3.6 MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ E FUNÇÃO DERIVADA 42
3.7 TEOREMA DE ROLLE E TEOREMA DO VALOR MÉDIO 44

4 MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON 46
4.1 UMA BREVE HISTÓRIA DO MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON 46
4.2 DEFINIÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON –RAPHSON 47
4.3 DEDUÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON 48
4.4 CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA 55
4.5 APLICANDO O MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON 55

5 APLICAÇÃO DO MÉTODO UTILIZANDO PLANILHA ELETRÔNICA. 58
5.1 PLANILHAS ELETRÔNICA 58
5.2 ATIVIDADE 1 59
5.3 ATIVIDADE 2 70

6 CONCLUSÃO 77

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 78

1 INTRODUÇÃO

É no ensino fundamental que os alunos têm os primeiros contatos com as equações polinomiais, como as equações polinomiais do 1º grau, 2º grau e algumas equações do 4º grau conhecida como biquadrada. Algumas aulas são dedicadas exclusivamente a descobrir as raízes desses polinômios, através de operações algébricas, uso de condições e de fórmulas. Ao ingressar no ensino médio, geralmente no último ano, o aluno se depara com novos conceitos de equação polinomial de grau n qualquer, logo surge o questionamento de como encontrar as raízes dessas equações polinomiais de grau maior do que 2.

Infelizmente a abordagem atual dos livros didáticos não oferece resposta para essas indagações, talvez pelo fato da abordagem exigir conceitos que a maioria dos professores jugam além dos objetivos da educação básica. No entanto, encontrar raízes de um polinômio é um problema importante, o qual tem sido estudado nos últimos quatro séculos.

Assim como a fórmula de Bháskara para determinação de raízes de polinômios do segundo grau, existem as fórmulas de Cardano e de Ferrari para polinômios de terceiro e de quarto grau, respectivamente. Entretanto, foi provado por Abel, em 1824, que não existe nenhuma fórmula algébrica finita capaz de calcular as raízes de um polinômio de grau maior do que ou igual a 5. A partir daí, até hoje, os métodos para o cálculo das n raízes de um polinômio de grau n são voltados aos métodos numéricos.

A proposta deste trabalho de conclusão de curso tem como objetivo proporcionar para os alunos do último ano do Ensino Médio habilidades, extra curriculares, de localizar raízes reais de polinômios de grau n usando um dos métodos mais eficientes, conhecido como Newton – Raphson. Como se trata de um método iterativo proporcionará uma etapa de repetidos cálculos maçantes que será facilitado pela utilização de planilhas eletrônicas, uma poderosa ferramenta digital que será um atrativo a mais para o aluno. É importante observar que esse método será usado no presente trabalho apenas em equações polinomiais, no entanto, é aplicável tanto para equações algébricas como para equações transcendentais. O Método de Newton – Raphson possui como diferencial o poder de enriquecer o aprendizado tendo em vista que há utilização de novos conceitos matemáticos que infelizmente não pertencem ao currículo do Ensino Médio, tais conceitos mencionados provem da disciplina Cálculo diferencial e integral que possui uma gigantesca importância para ciências e tecnologias modernas. No brasil já se discute a implantação do Cálculo no Ensino Médio devido a visível importância dessa disciplina nas mais diversas áreas do conhecimento. O professor Geraldo Ávila, em um artigo publicado na Revista do Professor de Matemática justifica seu ensino ao afirmar que:

> O Cálculo é moderno porque traz idéias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas idéias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. (ÁVILA, 1991, p.3).

Mas como introduzir o Cálculo no Ensino Médio? No mesmo artigo já citado Ávila diz que, "A idéia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados. " (AVILA, 1991, p.5).

Outro ponto positivo deste trabalho a ser analisado é a importância dos recursos computacionais para o bom desempenho do trabalho escolar. A tecnologia, além de renovar o processo de ensino aprendizagem, pode propiciar o desenvolvimento integral do aluno, valorizando o seu lado social, crítico, emocional e ainda deixar espaços para explorações de novas possibilidades de criação.

Percebe-se que este trabalho pode desempenhar vários papeis: localizar raízes de um polinômio qualquer usando como ponto de partida conteúdo já ensinado em sala de aula, introduzir conceitos importantes de Cálculo, enriquecendo seu aprendizado e por último a valorização adequada do uso de recursos tecnológicos visando tornar o processo de ensino-aprendizagem mais eficiente e eficaz.

2 POLINÔMIOS

2.1 FUNÇÃO POLINOMIAL

Uma função $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é uma função polinomial quando existem números complexos a_0, a_1, a_2, ..., a_n tais que

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

para todo $x\in\mathbb{C}$. Os números a_0, a_1, a_2, ..., a_n são denominados coeficientes da função polinomial. Se $a_n\neq 0$, dizemos que p tem grau n, onde $n\in\mathbb{N}$, e sua notação será $gr(p)=n$.

Sendo $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ uma função polinomial, chama-se valor numérico da função p correspondente a $x=\alpha$ ao valor numérico obtido substituindo x por um número complexo α, ou seja $p(\alpha)$. Se um número complexo α é tal que $p(\alpha)=0$, dizemos que α é raiz de p.

Somas e produtos de funções polinomiais complexas são, também, funções polinomiais complexas. É fácil ver que, se p e q são funções polinomiais, então o grau de $p+q$ é menor do que ou igual ao maior entre os graus de p e q, enquanto o grau de pq é a soma dos graus de p e q. Se uma função polinomial p é expressa como o produto $p=qr$ das funções polinomiais q e r, dizemos que p é divisível por q e r.

TEOREMA: Se o número complexo α é raiz de uma função polinomial p, então $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$.

DEMONSTRAÇÃO:

Como α é raiz da função polinomial p, então $p(\alpha)=0$, temos também que

$$\begin{aligned}
p(x)&=p(x)-p(\alpha)\\
&=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)-(a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0)\\
&=a_n(x^n-\alpha^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-\alpha^{n-1})+\cdots+a_1(x-\alpha)\\
&=a_n(x-\alpha)(x^{n-1}+x^{n-2}\alpha+\cdots+x\alpha^{n-2}+\alpha^{n-1})+a_{n-1}(x-\alpha)(x^{n-2}+x^{n-3}\alpha+\cdots+x\alpha^{n-3}+\alpha^{n-2})+\\
&+\cdots+a_1(x-\alpha)\\
&=(x-\alpha)\left[a_n(x^{n-1}+x^{n-2}\alpha+\cdots+x\alpha^{n-2}+\alpha^{n-1})+a_{n-1}(x^{n-2}+x^{n-3}\alpha+\cdots+x\alpha^{n-3}+\alpha^{n-2})+\cdots+a_1\right].
\end{aligned}$$

Logo, $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$.

Uma função polinomial $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ é identicamente nula se, e somente se os seus coeficientes a_0, a_1, a_2, ..., a_n forem todos iguais a zero.

Tomemos agora duas funções polinomiais p e q. Para que p e q sejam iguais, ou seja, $p(x)=q(x)$ para todo $x\in\mathbb{C}$, sua diferença $p-q$ tem que ser identicamente nula. Mas como vimos acima, isso ocorre somente se todos os coeficientes de $p-q$ são iguais a zero. Portanto, duas funções polinomiais p e q são iguais se, e somente se p e q tem coeficientes iguais.

Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, chamamos de polinômio complexo a uma expressão formal do tipo

$$p(X)=a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1 X+a_0,$$

associada a sequência dada. Chamamos o símbolo X de indeterminada. A todo polinômio complexo $p(X)=a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1 X+a_0$ corresponde uma função polinomial complexa $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$. É claro que todo polinômio corresponde uma única função polinomial, por outro lado, vimos anteriormente que duas funções polinomiais só são iguais quando têm a mesma sequência de coeficientes. Podemos dizer que duas funções polinomiais só são iguais quando os polinômios associados a elas são iguais. Assim, a uma função polinomial também corresponde um único polinômio. Desse modo, existe uma correspondência biunívoca entre funções polinomiais e polinômios, o que nos permite, sem risco de confusão, nos referirmos indistintamente ao polinômio $p(x)$ ou a função polinomial $p(x)$.

2.2 OPERAÇÕES

Definimos $P[x]$ como sendo o conjunto dos polinômios complexo.

2.2.1 ADIÇÃO

Dados dois polinômios

$$p_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$p_2(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \ ,$$

chamamos soma de p_1 com p_2 o polinômio

$$(p_1 + p_2)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \ ,$$

ou seja,

$$(p_1 + p_2)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i \ .$$

2.2.2 PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

A operação de adição define em $P[x]$, conjunto dos polinômios complexos, uma estrutura de grupo comutativo, isto é, verifica as seguintes propriedades:

A1 – **Propriedade Associativa**

$$p_1 + (p_2 + p_3) = (p_1 + p_2) + p_3 \ , \ \forall\, p_1,\ p_2,\ p_3 \in P[x].$$

DEMONSTRAÇÃO:

Fazendo $p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $p_2(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, $p_3(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, $(p_1 + (p_2 + p_3))(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$ e $((p_1 + p_2) + p_3)(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i x^i$, temos:

$d_i = a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i = e_i$, $\forall\ i \in \{0,1,2,...,n\}$.

A2 – **Propriedade comutativa**

$$p_1 + p_2 = p_2 + p_1 \ , \ \forall\, p_1,\ p_2 \in P[x].$$

DEMONSTRAÇÃO:

Fazendo $p_1(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $p_2(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, $(p_1+p_2)(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ e $(p_2+p_1)(x)=\sum_{i=0}^{n} d_i x^i$, temos:

$c_i = a_i + b_i = b_i + a_i = d_i$, $\forall\ i \in \{0,1,2,...,n\}$.

A3 – **Existência de elemento neutro**

Existe um polinômio $e_a \in P[x]$ tal que $p_1(x)+e_a = p_1(x)$, $\forall\ p_1 \in P[x]$.

DEMONSTRAÇÃO:

Fazendo $p_1(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $e_a(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, temos:

$p_1 + e_a = p_1 \Leftrightarrow a_i + b_i = a_i$, $\forall\ i \in \{0,1,2,...,n\}$ e então $b_i = 0$, $\forall\ i \in \{0,1,2,...,n\}$, portanto e_a (elemento neutro para a adição de polinômios) é o polinômio identicamente nulo.

A4 – **Existência de inverso aditivo**

Existe um polinômio $p_1' \in P[x]$ tal que $p_1(x)+p_1'(x)=e_a$, $\forall\ p_1 \in P[x]$.

DEMONSTRAÇÃO:

Fazendo $p_1(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $p_1'(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i' x^i$, temos:

$p_1 + p_1' = e_a \Leftrightarrow a_i + a_i' = 0$, $\forall\ i \in \{0,1,2,...,n\}$ e então $a_i' = -a_i$, $\forall\ i \in \{0,1,2,...,n\}$, portanto, $p_1'(x)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = -p_1(x)$ é o inverso aditivo de p_1, ou seja, é o polinômio que somado com p_1 dá o polinômio identicamente nulo.

2.2.3 MULTIPLICAÇÃO

Dados dois polinômios

$$p_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$$

e

$$p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \,,$$

chamamos produto $p_1 p_2$ o polinômio

$$p_1 p_2(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + a_m b_n x^{m+n} \,.$$

Notemos que o produto $p_1 p_2$ é o polinômio

$$p_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{m+n} x^{m+n}$$

cujo coeficiente c_k pode ser assim obtido:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \,.$$

Notemos ainda que $p_1 p_2$ pode ser obtido multiplicando-se cada termo $a_i x^i$ de p_1 por cada termo $b_j x^j$ de p_2, segundo a regra $(a_i x^i) \cdot (b_j x^j) = a_i b_j x^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

2.2.4 PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

A operação de multiplicação em $P[x]$ verifica as seguintes propriedades:

M1 – **Propriedade associativa**

$$p_1 \cdot (p_2 \cdot p_3) = (p_1 \cdot p_2) \cdot p_3 \,,\ \forall\, p_1,\ p_2,\ p_3 \in P[x].$$

M2 – **Propriedade comutativa**

$$p_1 \cdot p_2 = p_2 \cdot p_1 \,,\ \forall\, p_1,\ p_2 \in P[x].$$

M3 – **Existência de elemento neutro**

Existe um polinômio $e_m \in P[x]$ tal que $p_1(x) \cdot e_a = p_1(x)$, $\forall\, p_1 \in P[x]$. Portanto, e_m (elemento neutro da multiplicação) é o polinômio constante 1.

M4 – **Propriedade distributiva**

$p_1 \cdot (p_2 + p_3) = p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3$, $\forall\, p_1,\ p_2,\ p_3 \in P[x]$.

Para o desenvolvimento do trabalho, jugamos desnecessário conhecer a prova destas propriedades.

2.3 DIVISÃO DE POLINOMIOS

DEFINIÇÃO: Dados dois polinômios $p(x)$ e $g(x) \neq 0$, chamado de dividendo e divisor respectivamente, dividir $p(x)$ por $g(x)$ é determinar dois outros polinômios, sendo $q(x)$ o quociente e $r(x)$ o resto, de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

I. $q(x) \cdot g(x) + r(x) = p(x)$;

II. $gr(r) < gr(g)$ (ou $r(x) = 0$ (caso em que a divisão é chamada exata).

2.3.1 DIVISÕES IMEDIATAS

A divisão de $p(x)$ por $g(x)$ é imediata em duas situações:

1º. O dividendo $p(x)$ é o polinômio identicamente nulo ($p(x) = 0$).

Nesta situação, os polinômios $q(x) = 0$ e $r(x) = 0$ satisfazem as condições (I) e (II) da definição de divisão de polinômios, pois $q(x) \cdot g(x) + r(x) = 0 \cdot g(x) + 0 = 0 = p(x)$ e $r(x) = 0$.

$$p(x) = 0 \Rightarrow q(x) = 0 \text{ e } r(x) = 0 .$$

2º. O dividendo $p(x)$ não é polinômio identicamente nulo, mas tem grau menor que o divisor $g(x)$ ($gr(p) < gr(g)$).

Nesta situação, os polinômios $q(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$ satisfazem as condições (I) e (II) da definição de divisão de polinômios, pois $q(x) \cdot g(x) + r(x) = 0 \cdot g(x) + p(x) = p(x)$ e $gr(r) = gr(p) < gr(g)$.

$$gr(p) < gr(g) \Rightarrow q(x) = 0 \text{ e } r(x) = p(x).$$

2.3.2 MÉTODO DE DESCARTES

Este método, também conhecido como método dos coeficientes a determinar, baseia-se nos seguintes fatos:

I. $gr(q) = gr(p) - gr(g)$, o que é consequência da definição, pois:
$q(x) \cdot g(x) + r(x) = p(x) \Rightarrow gr(qg + r) = gr(p) \Rightarrow gr(q) + gr(g) = gr(p)$.

II. $gr(r) < gr(g)$ (ou $r(x) = 0$).

O método de Descarte é aplicado da seguinte forma:

1º Calculamos $gr(q)$ e $gr(\mathrm{r})$;

2º Construímos os polinômios $q(x)$ e $r(x)$, deixando incógnito os seus coeficientes;

3º Determinamos os coeficientes impondo a igualdade $q(x) \cdot g(x) + r(x) = p(x)$.

EXEMPLO 1. Dividir $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$ por $g(x) = x^2 + 2$.

Usando o método de Descarte temos que:

$$gr(q) = gr(p) - gr(g) = 4 - 2 = 2$$
$$gr(r) < gr(g) \Rightarrow gr(r) < 2 \Rightarrow gr(r) \le 1.$$

Logo,

$$q(x) = ax^2 + bx + c \text{ e } r(x) = dx + e.$$

Desse modo, temos

$$q(x) \cdot g(x) + r(x) = p(x)$$
$$(ax^2 + bx + c)(x^2 + 2) + (dx + e) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$$
$$ax^4 + bx^3 + (2a + c)x^2 + (2b + d)x + (2c + e) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2.$$

Aplicando a identidade de polinômios:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ 2a + c = 1 \\ 2b + d = 4 \\ 2c + e = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

obtemos assim, $q(x) = x^2 + 2x - 1$ e $r(x) = 0$, indicando uma divisão exata.

2.3.3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DO QUOCIENTE E DO RESTO

TEOREMA: O quociente e o resto da divisão de um polinômio p por um polinômio g (não identicamente nulo) existem e são únicos.

DEMONSTRAÇÃO:

Comecemos com a unicidade. Suponhamos que existam dois pares de polinômios (q_1, r_1) e (q_2, r_2) satisfazendo a definição de divisão de polinômios de p por g. Isto é:

$$q_1 \cdot g + r_1 = p$$
$$q_2 \cdot g + r_2 = p.$$

Temos

$$q_1 \cdot g + r_1 = q_2 \cdot g + r_2$$
$$q_1 \cdot g - q_2 \cdot g = r_2 - r_1$$
$$(q_1 - q_2) \cdot g = r_2 - r_1 .$$

O polinômio do lado direito, da última igualdade acima, tem grau menor que o grau de g, por ser a diferença de dois polinômios de grau menor do que o grau de g. Já o polinômio da esquerda tem grau maior ou igual ao de g, a menos que $(q_1 - q_2)$ seja identicamente nulo. Portanto, a identidade ocorre somente quando os polinômios $(q_1 - q_2)$ e $(r_2 - r_1)$ em ambos os lados são identicamente nulos. Assim, temos, necessariamente, $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Para demonstrar a existência, empregaremos um processo algorítmico através do qual reduziremos sucessivamente o grau do dividendo até que ele se torne menor que o divisor e a divisão se torne imediata. Suponhamos que $gr(p) = n$ e $gr(g) = m$. Se $n < m$, não há nada a demonstrar: o quociente da divisão $q = 0$ e o resto é $r = p$. Caso contrário, consideremos os termos $a_n x^n$ e $b_m x^m$,que são os termos de mais alto grau em p e g, respectivamente. Seja r_1 o polinômio definido por

$$r_1(x) = p(x) - (a_n / b_m) x^{n-m} g(x),$$

chamado de primeiro resto parcial no processo de divisão. Observe que $(a_n / b_m) x^{n-m} g(x)$ é um polinômio de grau n cujo termo de mais alto grau é igual ao termo de mais alto grau $a_n x^n$ de p. Logo r_1 tem grau no máximo igual a $n-1$. Não sabemos ainda se r_1 pode ser dividido por g; isto é, se existem polinômios q_1 e r (com $gr(r) < gr(\text{g})$) tais que $r_1 = q_1 \cdot g + r$. Mas, se tais polinômios existirem, então p também pode ser dividido por g. Já que teremos

$$p(x) = (a_n / b_m) x^{n-m} \cdot g(x) + r_1(x)$$
$$p(x) = (a_n / b_m) x^{n-m} \cdot g(x) + q_1(x) \cdot g(x) + r(x)$$
$$p(x) = \left((a_n / b_m) x^{n-m} + q_1(x) \right) \cdot g(x) + r(x) .$$

Isto é, o resto é o mesmo que na divisão de r_1 por g, enquanto o quociente é obtido somando ao polinômio q_1, cujo grau é no máximo $n-m-1$, o termo $(a_n / b_m) x^{n-m}$.

Desta forma, reduzimos o problema de dividir p por g ao de dividir r_1 por g, onde r_1 tem grau mais baixo. Mas podemos aplicar o mesmo processo a r_1, obtendo um segundo resto parcial r_2 e assim por diante, sempre obtendo um polinômio de grau inferior ao do anterior. Após um número finito de passos, obteremos um resto parcial r_k de grau menor que m, para o qual a divisão é possível e imediata: o quociente é $q_k = 0$ e o resto é $r = r_k$. Retornando sobre os passos, concluímos que cada resto parcial pode ser dividido por g. O resto da divisão original é igual ao último resto parcial r_k e o quociente é formado colecionando os termos obtidos em cada passo.

2.3.4 MÉTODO DA CHAVE

A prova da existência de q e r vista no teorema anterior, nos ensina como construir esses dois polinômios a partir de p e g. Vejamos como proceder no exemplo abaixo.

EXEMPLO 2. Dividir $p(x) = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ por $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

Formamos o primeiro termo de q pela operação $\dfrac{3x^5}{x^2} = 3x^3$ e construímos o primeiro resto parcial $r_1(x) = p(x) - (3x^3)g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$, que tem grau maior $gr(g)$.

Formamos o segundo termo de q pela operação $\dfrac{4x^3}{x^2} = 4x$ e construímos o segundo resto parcial $r_2(x) = r_1(x) - (4x)g(x) = -x^2 - x - 1$, que tem grau igual a $gr(g)$.

Formamos o terceiro termo de q pela operação $\dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ e construímos o terceiro resto parcial $r_3(x) = r_2(x) - (-1)g(x) = -3x + 2$, que tem grau menor $gr(g)$, encerrando, assim, a divisão. Portanto, $q(x) = 3x^2 + 4x - 1$ e $r(x) = -3x + 2$.

A disposição pratica dessas operações é a seguinte:

$$
\begin{array}{lll}
p \;\rightarrow\; 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & \big| \; x^2 - 2x + 3 & \leftarrow g \\
-3x^5 + 6x^4 - 9x^3 & \quad 3x^3 + 4x - 1 & \leftarrow q \\
\hline
r_1 \;\rightarrow\; 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & & \\
-4x^3 + 8x^2 - 12x & & \\
\hline
r_2 \;\rightarrow\; -x^2 - x - 1 & & \\
x^2 - 2x + 3 & & \\
\hline
-3x + 2 \;\leftarrow\; r & &
\end{array}
$$

2.4 DIVISÃO DE UM POLINÔMIO POR $(x-a)$

Trataremos nesta seção o caso mais importante de divisão de polinômios que é aquele em que o divisor é da forma $(x-a)$. Neste tipo de divisão r é um polinômio constante, pois:

$$gr(x-a)=1 \Rightarrow gr(r)=0 \text{ ou } r(x)=0 .$$

2.4.1 TEOREMA DO RESTO

TEOREMA: O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x-a)$ é igual ao valor numérico de p em a.

DEMONSTRAÇÃO:

De acordo com a definição de divisão, temos:

$$q(x)\cdot(x-a)+r(x)=p(x),$$

em que $q(x)$ e $r(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto. Como $(x-a)$ tem grau 1, o resto r ou é identicamente nulo ou tem grau zero. Portanto, r é um polinômio constante.

Calculando os valores numéricos dos polinômios da igualdade acima para $x=a$, obtemos:

$$q(a)\cdot(a-a)+r(a)=p(a) \;\Rightarrow\; r=p(a).$$

2.4.2 TEOREMA DE D'ALEMBERT

TEOREMA: Um polinômio $p(x)$ é divisível por $(x-a)$ se, e somente se, a é raiz de $p(x)$.

DEMONSTRAÇÃO:

De acordo com teorema do resto, temos que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-a)$ é $r = p(a)$. Então:

$$r = 0 \text{ (divisão exata) } \Rightarrow p(a) = 0 \text{ (} a \text{ é raiz de } p(x)\text{).}$$

2.4.3 ALGORITMO DE BRIOT – RUFFINI

Considere um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdots + a_1 x + a_0 .$$

Sejam

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 \text{ e } r(x) = r_0$$

o quociente e o resto, respectivamente, da divisão de $p(x)$ por $(x-a)$. Aplicando o método dos coeficientes a determinar, temos

$$q(x)\cdot(x-a) + r(x) = p(x)$$

$$(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0)\cdot(x-a) + r_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdots + a_1 x + a_0 .$$

Desenvolvendo a expressão do lado esquerdo segundo as potências de x, obtemos:

$$b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2})x^{n-2} + \cdots + (b_0 - ab_1)x + (r_0 - ab_0) .$$

Igualando os coeficientes aos dos termos respectivos de $p(x)$, obtemos:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} - ab_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$$
$$b_{n-3} - ab_{n-2} = a_{n-2} \Rightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$b_0 - ab_1 = a_1 \Rightarrow b_0 = a_1 + ab_1$$
$$r_0 - ab_0 = a_0 \Rightarrow r_0 = a_0 + ab_0$$

Os cálculos para obter q e r indicado acima são facilmente efetuados com a aplicação do seguinte dispositivo prático de Briot-Ruffini.

O mecanismo do algoritmo é o seguinte:

1. Na primeira linha, à esquerda, colocamos os coeficientes dos termos do dividendo, em ordem decrescente de expoente. à direita, ficará a raiz do binômio divisor;
2. Baixamos o primeiro coeficiente do dividendo; multiplicamos esse coeficiente pela raiz e somamos o produto ao segundo coeficiente do dividendo, o resultado é escrito abaixo deste;
3. O resultado obtido é multiplicado pela raiz. Em seguida, adicionamos o produto ao terceiro coeficiente;
4. Repete-se esse processo até o último coeficiente.

Os primeiros coeficientes obtidos são os do quociente e o último é o resto da divisão.

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 & a \\
\hline
a_n & \underbrace{ab_{n-1} + a_{n-1}} & \underbrace{ab_{n-2} + a_{n-2}} & \cdots & \underbrace{ab_1 + a_1} & \multicolumn{1}{|c|}{\underbrace{ab_0 + a_0}} & \\
b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & & b_0 & r &
\end{array}$$

EXEMPLO 3. Dividir $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ por $g(x) = x - 2$.

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos

1	3	-2	-5	2
1	$\underbrace{2\times 1+3}$	$\underbrace{2\times 5+(-2)}$	$\underbrace{2\times 8+(-5)}$	
1	5	8	11	

O quociente é $q(x)=x^2+5x+8$ e o resto é $r(x)=11$.

TEOREMA: Se um polinômio $p(x)$ é divisível separadamente por $(x-a)$ e $(x-b)$, com $a\neq b$, então $p(x)$ é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$.

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam q o quociente e $r(x)=cx+d$ o resto da divisão $p(x)$ por $(x-a)(x-b)$, como $p(x)$ é divisível separadamente por $(x-a)$ e $(x-b)$, com $a\neq b$, então, pelo teorema de D'Alembert, a e b são raízes de $p(x)$, ou seja, $p(a)=0$ e $p(\text{b})=0$. Temos, então:

$$q(x)\cdot(x-a)\cdot(x-b)+(cx+d)=p(x),$$

calculando os valores numéricos desses polinômios para $x=a$, temos

$$q(a)\cdot(a-a)\cdot(a-b)+ca+d=p(a)$$
$$ca+d=0, \qquad (1)$$

calculando os valores numéricos desses polinômios para $x=b$, temos

$$q(b)\cdot(b-a)\cdot(b-b)+cb+d=p(b)$$
$$cb+d=0. \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) resulta, então, o sistema: $\begin{cases} ca+d=0 \\ cb+d=0 \end{cases}$, de onde vem $c=0$ e $d=0$, logo $r(x)=0$. Portanto $p(x)$ é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$.

2.5 NÚMERO DE RAÍZES

Toda equação polinomial pode ser colocada na forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,,$$

é evidente que as seguintes proposições são equivalentes:

I. α é raiz da equação polinomial $p(x) = 0$;
II. α é raiz da função polinomial $p(x)$;
III. α é raiz do polinômio p.

e as três proposições são sintetizadas por $p(\alpha) = 0$.

Diremos também que a equação polinomial $p(x) = 0$ é de grau n se, e somente se, $p(x)$ e p são de grau n.

2.5.1 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (T.F.A.)

TEOREMA: Todo polinômio complexo de grau maior do que ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

Embora fundamental para a Álgebra, o teorema acima é um teorema de Análise, e sua demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas. O leitor interessado na demonstração pode consultar ([7], p.219).

2.5.2 TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

TEOREMA: Todo polinômio complexo $p(x)$ de grau n ($n \geq 1$)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdots + a_1 x + a_0\,, \quad (a_n \neq 0)$$

pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

onde a_n é um número complexo e α_1, α_2, ..., α_n são raízes complexas de $p(x)$ (possivelmente repetidas). Além disso, esta decomposição é única, a menos da ordem dos fatores.

DEMONSTRAÇÃO:

Comecemos com a existência. Sendo $p(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$, podemos aplicar o T.F.A. e $p(x)$ tem pelo menos uma raiz α_1. Assim $p(\alpha_1) = 0$ e, de acordo com teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha_1)$, isto é:

$$p(x) = q_1(x)(x-\alpha_1) \qquad (1)$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n-1$ e coeficiente dominante a_n. Se $n=1$, então $gr(q_1)=0$ e $q_1(x)$ é polinômio constante, portanto, $q_1(x)=a_n$ e $p(x)=a_n(x-\alpha_1)$, ficando demonstrado a existência. Por outo lado, se $n \geq 2$, então $n-1 \geq 1$ e o T.F.A. é aplicado ao polinômio $q_1(x)$, isto é, $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz α_2. Assim $q_1(\alpha_2)=0$ e $q_1(x)$ é divisível por $(x-\alpha_2)$, ou seja:

$$q_1(x) = q_2(x)(x-\alpha_2). \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) resulta:

$$p(x) = q_2(x)(x-\alpha_2)(x-\alpha_1) \Rightarrow p(x) = q_2(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n-2$ e coeficiente dominante a_n. Se $n=2$, então $gr(q_2)=0$, logo $q_2(x)=a_n$ e $p(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, ficando demonstrado a existência.

Após n aplicações sucessivas do T.F.A. chegamos na igualdade

$$p(x) = q_n(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

em que $q_n(x)$ tem grau $n-n=0$ e o coeficiente dominante a_n, portanto, $q_n(x)=a_n$ e

$$p(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\,.$$

Para demonstrar a unicidade da decomposição, suponhamos que $p(x)$ possua duas decomposições distintas:

$$p(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

e

$$p(x)=b_n(x-\alpha_1')(x-\alpha_2')\ldots(x-\alpha_n')\,.$$

Inicialmente, comparado o termo de mais alto grau em ambas as expressões, verificamos que $a_n=b_n$. Logo, temos

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=(x-\alpha_1')(x-\alpha_2')\ldots(x-\alpha_n'). \qquad (3)$$

Calculando o valor dos dois lados da igualdade para $x=\alpha_1$, obtemos

$$0=(x-\alpha_1')(x-\alpha_2')\ldots(x-\alpha_n').$$

Assim, pelo menos um dos números α_1', α_2', ..., α_n' é igual a α_1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha_1'=\alpha_1$. Substituindo (3), temos

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2')\ldots(x-\alpha_n')\,.$$

Como o fator $(x-\alpha_1)$ é comum em ambos os lados da igualdade, temos

$$(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=(x-\alpha_2')\ldots(x-\alpha_n')\,.$$

A aplicação repetida do mesmo argumento permite identificar e eliminar, em cada passo, um par de termos idênticos em cada lado da igualdade. Desta forma fica estabelecida a seguinte correspondência: $a_n = b_n$, $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha'_2 = \alpha_2$, ..., $\alpha'_n = \alpha_n$, o que prova a unicidade da decomposição.

Como um polinômio $p(x)$ de grau n pode ser decomposto em n fatores do 1º grau, é comum dizer que $p(x)$ possui n raízes. Naturalmente, isso não significa que $p(x)$ necessariamente se anule para n valores distintos de x. Como vimos anteriormente, pode haver repetição de fatores na decomposição de $p(x)$. Associando os fatores idênticos da decomposição, podemos escrever $p(x)$ na forma

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ldots(x-\alpha_k)^{\beta_k},$$

onde α_1, α_2, ..., α_k são raízes complexas de $p(x)$ e os expoente β_1, β_2, ..., β_k satisfazem $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k = n$.

2.5.3 MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

Dizemos que α é uma raiz de multiplicidade β ($\beta \geq 1$) da equação $p(x) = 0$ se, e somente se,

$$p(x) = (x-\alpha)^{\beta} q(x) \text{ e } q(\alpha) \neq 0,$$

isto é, α é uma raiz de multiplicidade β de $p(x) = 0$ quando o polinômio $p(x)$ é divisível por $(x-\alpha)^{\beta}$ e não é divisível por $(x-\alpha)^{\beta+1}$, ou seja, a decomposição de $p(x)$ apresenta exatamente β fatores iguais a $(x-\alpha)$.

Quando $\beta = 1$, dizemos que α é raiz simples; quando $\beta = 2$, dizemos que α é raiz dupla; quando $\beta = 3$, dizemos que α é raiz tripla; e assim por diante.

2.6 RELAÇÃO ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES (RELAÇÃO DE GIRARD)

Considere um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdots + a_1 x + a_0$$

e considere suas n raízes complexas (não necessariamente distintas) α_1, α_2, ..., α_n. Como vimos, $p(x)$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Observamos que o desenvolvimento do produto produz 2^n termos, correspondentes à escolha de um dos dois possíveis termos (x ou $-\alpha_i$) em cada fator. Agrupando os termos semelhantes (no qual figurem a mesma potência de x), podemos exprimir os coeficientes a_0, a_1, ..., a_n de $p(x)$ em termos das suas n raízes α_1, α_2, ..., α_n.

Comecemos com o termo em x^n, que é formado tomando a parcela x, em todos os fatores gerando assim o termo $a_n x^n$.

A seguir, formamos o termo em x^{n-1}, obtido escolhendo-se x em cada fator exceto em um deles. Obtém-se assim

$$a_n(-\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n)x^{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)x^{n-1} = -a_n S_1 x^{n-1},$$

onde S_1 denota a soma das raízes de $p(x)$.

Formamos a seguir o termo em x^{n-2}, que é igual a

$$a_n((-\alpha_1)(-\alpha_2) + (-\alpha_1)(-\alpha_3) + \cdots + (-\alpha_{n-1})(-\alpha_n))x^{n-2}$$
$$a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2} = a_n S_2 x^{n-2},$$

onde S_2 denota a soma dos produtos das raízes de $p(x)$, tomados duas as duas.

De modo geral, o termo em x^{n-k}, envolve produto de k fatores da forma $(-\alpha_1)(-\alpha_2)\ldots(-\alpha_k)$ e é igual a

$$a_n(-1)^k S_k x^{n-k} \ ,$$

onde S_k é a soma dos produtos das raízes de $p(x)$, tomadas k a k.

Em particular, o termo independente a_0 é dado por:

$$a_n(-1)^n S_n,$$

onde S_n é o produto de todas as raízes de $p(x)$.

Resumindo, o desenvolvimento de

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

fornece

$$p(x) = a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + a_n S_2 x^{n-2} + \cdots + a_n(-1)^k S_k x^{n-k} + \cdots + a_n(-1)^n S_n.$$

Igualando os termos nesse desenvolvimento aos correspondentes em

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdots + a_1 x + a_0,$$

podemos, enfim, relacionar os coeficientes de um polinômio às somas de produtos de suas raízes. Comparado os termos obtemos:

$$S_1 = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$S_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$S_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

As relações acima são as relações entre coeficientes e raízes da equação $p(x)=0$, também chamada de relações de Girard.

EXEMPLO 4. Se $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ é o conjunto solução da equação $2x^3+5x^2+8x+11$, calcular $\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2$.

Temos que:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{a_2}{a_3}=-\frac{5}{2},$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{a_1}{a_3}=\frac{8}{2}=4,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_2=-\frac{a_0}{a_3}=-\frac{11}{2}.$$

Como

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2=\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2+2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3),$$

então

$$\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot(4)=-\frac{7}{4}.$$

2.7 RAÍZES COMPLEXAS

2.7.1 RAÍZES CONJUGADAS

TEOREMA: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo não real $z=a+bi$, então essa equação também admite como raiz o número complexo $\overline{z}=a-bi$, conjugado de z.

DEMONSTRAÇÃO:

Basta usar o fato de que somas e produtos de números complexos preservam a conjugação complexa, Isto é, dados complexos z_1 e z_2, temos

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ e } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} .$$

Em partícula, se a é um número real, então

$$a(\overline{z})^n = a \cdot \underbrace{\overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \ldots \cdot \overline{z}}_{n \text{ vezes}} = \overline{a \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z} = \overline{az^n} .$$

Assim, dado um polinômio $p(x)$ com coeficientes reais, temos que $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$, para todo z complexo. Portanto, se $z = a + bi$ é raiz de $p(x)$, então

$$p(a - bi) = p(\overline{a + bi}) = \overline{p(a + bi)} = \overline{0} = 0 ,$$

o que mostra que $z = a - bi$ também é raiz de $p(x)$.

2.7.2 MULTICIPLIDADE DA RAIZ CONJUGADA

TEOREMA: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade β, então essa equação admite a raiz $\overline{z} = a - bi$ com multiplicidade β.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que a equação $p(x) = 0$ com coeficientes reais admita a raiz $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade β e a raiz $\overline{z} = a - bi$ com multiplicidade β'. Para mostrar que a multiplicidade de $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$ é a mesma, basta eliminar as raízes $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$, dividindo $p(x)$ por

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 .$$

Como o divisor é um polinômio de coeficientes reais, o quociente também tem coeficientes reais. Logo, novamente $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$ estarão presente ou assentes como raízes do novo polinômio. Concluímos, portanto, que as raízes $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$ ocorrem o mesmo número de vezes, ou seja, $\beta = \beta'$.

Observações:

1. Os dois teoremas anteriores só se aplicam a equações polinomiais de coeficientes reais. Por exemplo, a equação $x^2 - ix = 0$ tem como raízes os números complexos 0 e i, entretanto não admite a raiz $-i$, conjugada de i;
2. Como toda raiz complexa não real z de uma equação polinomial de coeficientes reais $p(x) = 0$ corresponde uma outra raiz complexa não real $\overline{z}$ (conjugada), com igual multiplicidade, decorre que o número de raízes complexas não reais da equação polinomial $p(x) = 0$ é necessariamente par;
3. Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então ela admite um número ímpar de raízes reais.

2.8 RAÍZES REAIS

Dada uma equação polinomial $p(x) = 0$ com coeficientes reais. Indiquemos por α_1, α_2, ..., α_p suas raízes reais e por z_1, $\overline{z_1}$, z_2, $\overline{z_2}$, ..., z_q, $\overline{z_q}$ suas raízes complexas e não reais.

Pelo teorema da decomposição, temos:

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p)(x-z_1)(x-\overline{z_1})(x-z_2)(x-\overline{z_2})\ldots(x-z_q)(x-\overline{z_q}). \qquad (1)$$

Vamos efetuar o produto correspondente as duas raízes complexas conjugadas $z_1 = a + bi$ e $\overline{z_1} = a - bi$. Temos, então:

$$(x-z_1)(x-\overline{z_1}) = x^2 - (z_1 + \overline{z_1})x + z_1\overline{z_1} = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 =$$
$$= (x-a)^2 + b^2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o produto é positivo para todo valor real dado a x. Como o polinômio:

$$q(x)=\underbrace{(x-z_1)(x-\overline{z_1})}_{1}\underbrace{(x-z_2)(x-\overline{z_2})}_{2}\ldots\underbrace{(x-z_q)(x-\overline{z_q})}_{q}$$

é o produto de q fatores do tipo que acabamos de analisar, concluímos que o polinômio $q(x)$ assume valor numérico positivo para todo x real e a expressão (1) pode ser escrita da forma:

$$p(x)=a_n\cdot q(x)\cdot(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p) \text{ com } q(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

2.8.1 TEOREMA DE BOLZANO

TEOREMA: Sejam $p(x)=0$ uma equação polinomial com coeficiente reais e $]a,b[$ um intervalo real aberto. Se $P(a)$ e $P(b)$ têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existe raízes da equação em $]a,b[$. Se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em $]a,b[$.

DEMONSTRAÇÃO:

Notemos que, se α_i é interna ao intervalo $]a,b[$, então $a<\alpha_i<b$, isto é:

$$\left.\begin{array}{l} a-\alpha_i<0 \\ b-\alpha_i>0 \end{array}\right\}\Rightarrow(a-\alpha_i)(b-\alpha_i)<0.$$

Notemos também que, se α_e é externa ao intervalo $]a,b[$, então temos dois casos: Se $a<b<\alpha_e$ então $a-\alpha_e<0$ e $b-\alpha_e<0$. Por outro lado, se $\alpha_e<a<b$ então $a-\alpha_e>0$ e $b-\alpha_e>0$. Em ambos os casos temos $(a-\alpha_i)(b-\alpha_i)<0$.

Calculemos agora o produto $P(a)\cdot P(b)$:

$$P(a)\cdot P(b)=\left[a_n\cdot q(a)\cdot(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)\ldots(a-\alpha_p)\right]\left[a_n\cdot q(b)\cdot(b-\alpha_1)(b-\alpha_2)\ldots(b-\alpha_p)\right]=$$

$$=a_n^{\,2}\left[q(a)\cdot q(b)\right]\underbrace{\left[(a-\alpha_1)(b-\alpha_1)\right]\left[(a-\alpha_2)(b-\alpha_2)\right]\ldots\left[(a-\alpha_p)(b-\alpha_p)\right]}_{p\ fatores}. \qquad (*)$$

Verificamos que $P(a)\cdot P(b)$ é um produto de $p+2$ fatores numéricos, onde temos o fator $a_n{}^2>0$, o fator $q(a)\cdot q(b)>0$, pois $q(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ e p fatores do tipo $(a-\alpha_m)(b-\alpha_m)$ em que α_m é raiz real da equação dada. Assim, os únicos fatores negativos do segundo membro da relação $(*)$ são os fatores correspondente as raízes de $p(x)=0$ interna ao intervalo $]a,b[$, o que permite concluir a existência de duas possibilidades.

1ª Quando $P(a)$ e $P(b)$ têm mesmo sinal, isto é $P(a)\cdot P(b)>0$, existe um número par de fatores negativos $(a-\alpha_i)(b-\alpha_i)$ e, portanto, existe um número par de raízes reais da equação $p(x)=0$ que são internas ao intervalo $]a,b[$.

2ª Quando $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, isto é $P(a)\cdot P(b)<0$, existe um número ímpar de fatores negativos $(a-\alpha_i)(b-\alpha_i)$ e, portanto, existe um número ímpar de raízes reais da equação $p(x)=0$ que são internas ao intervalo $]a,b[$.

EXEMPLO 5. Quantas raízes reais a equação $x^3+5x^2-3x+4=0$ pode apresentar no intervalo $]0,1[$?

Temos $p(x)=x^3+5x^2-3x+4$, então:

$$p(0)=0^3+5\cdot 0^2-3\cdot 0+4=4>0,$$
$$p(1)=1^3+5\cdot 1^2-3\cdot 1+4=7>0.$$

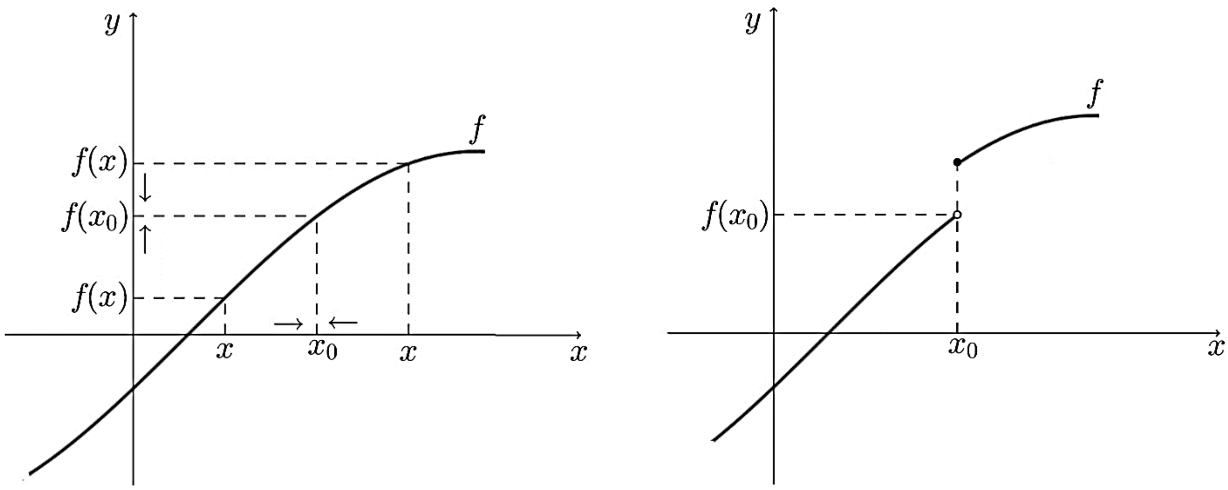
Como $p(0)$ e $p(1)$ são positivos, a equação pode ter duas ou nenhuma raiz real no intervalo dado.

3 NOÇÕES DE CÁLCULO

3.1 LIMITE E CONTINUIDADE

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto x_0 de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta salto em x_0.

Figura 3.1 – Representação intuitiva de continuidade



Fonte: Elaborado pelo autor

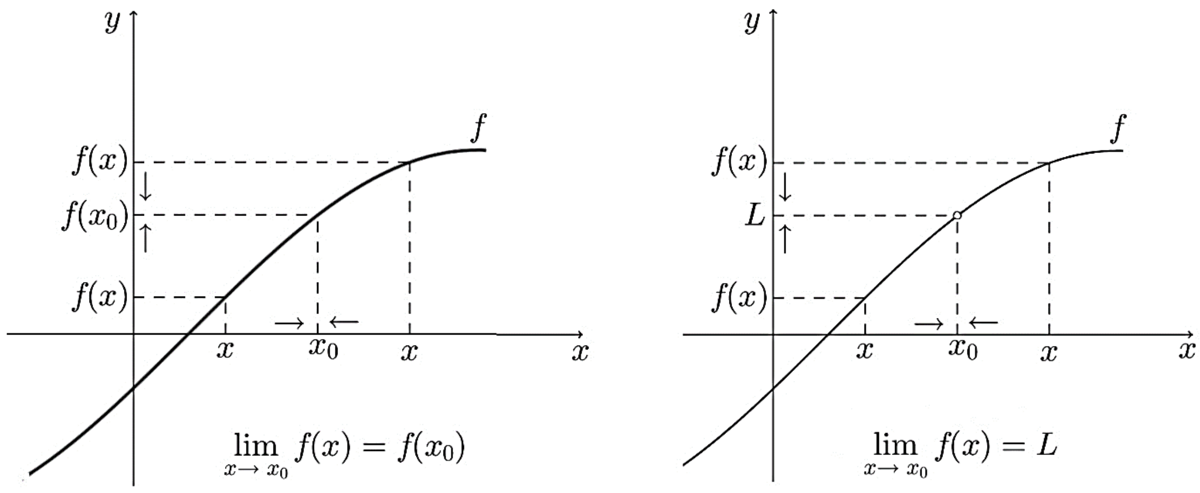
O gráfico da esquerda, como mostra na Figura 3.1, f não apresenta salto em x_0, ou seja, f é contínua em x_0. Observe que à medida que x se aproxima de x_0, quer pela direita ou pela esquerda, os valores de $f(x)$ se aproximam de $f(x_0)$, e quanto mais próximo x estiver de x_0, mais próximo $f(x)$ estará de $f(x_0)$. O mesmo não acontece com o gráfico da direita (Figura 3.1), em x_0 a função f apresenta salto, logo f não é continua em x_0.

Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, é igual a L que, simbolicamente, se escreve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

significa que quando x tende a x_0, $f(x)$ tende a L.

Figura 3.2 – Representação intuitiva de limite



Fonte: Elaborado pelo autor

É razoável esperar que se f estiver definida em x_0 e for contínua em x_0, então, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, e reciprocamente. Observe que isto realmente acontece, isto é, se f estiver definida em x_0

$$f \text{ contínua em } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observe, ainda, que se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e se f não for contínua em x_0, então L será aquele valor que f deveria ter em x_0 para ser contínua neste ponto.

3.2 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Chama-se derivada de f no ponto x_0 o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se este existir e for finito.

Indicaremos a derivada de f no ponto x_0 por $f'(x_0)$. Logo:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Quando existe $f'(x_0)$ dizemos que f é derivável no ponto x_0. Dizemos também que f é derivável no intervalo aberto I quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

3.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

Seja f uma função contínua no intervalo aberto I. Admitamos que exista a derivada de f no ponto $x_0 \in I$.

Dado um ponto $x \in I$, tal que $x \neq x_0$, consideremos a reta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$.

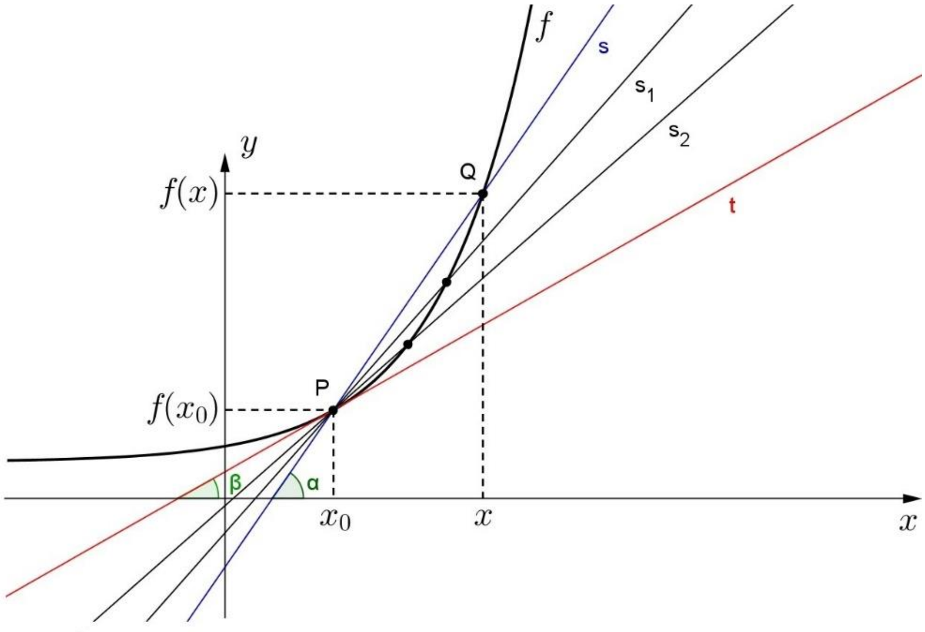
A reta s é secante com o gráfico de f e seu coeficiente angular é:

$$\tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

portanto, $\tan\alpha$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Se f é contínua no intervalo aberto I, então, quando $x \to x_0$, o ponto Q desloca-se sobre o gráfico da função e aproxima-se de P. Consequentemente, a reta s desloca-se tomando sucessivamente as posições s_1, s_2, ... e tende a coincidir com a reta t, tangente a curva no ponto P, como mostra a Figura 3.3 a seguir.

Figura 3.3 – Interpretação geométrica da derivada



Fonte: Elaborado pelo autor

Como existe

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\tan\beta \ ,$$

concluímos que a derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

Quando queremos obter a equação de uma reta passando por $P(x_0, y_0)$ e com coeficiente angular m, utilizamos a fórmula:

$$y-y_0=m(x-x_0).$$

Em particular, se queremos a equação da reta tangente t ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0,\ y_0)$, em que f é derivável, basta fazer $y_0=f(x_0)$ e $m=f'(x_0)$. A equação obtida da reta t fica:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

3.4 FUNÇÃO DERIVADA E DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

Sejam f uma função e I o conjunto dos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f' : I \to \mathbb{C}$ dada por $x \mapsto f'(x)$, denomina-se função derivada ou, simplesmente, derivada de f, diremos, ainda, que f' é a derivada de 1ª ordem de f e pode, também ser indicada por $f^{(1)}$.

A derivada de f' denomina-se derivada de 2ª ordem de f e é indicada por f'' ou por $f^{(2)}$, assim, $f'' = (f')'$. De maneira análoga, define-se as derivadas de ordens superiores a 2 de f.

3.5 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

Dada a função polinomial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

em que $a_n \neq 0$ e n é um número natural maior do que zero, chama-se função polinomial derivada de $f(x)$ a função $f' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 .$$

Se $f(x) = a_0$, $\forall\ x \in \mathbb{C}$, então a função polinomial derivada é definida por $f'(x) = 0$.

EXEMPLO 6.

$$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^3 + 3 \cdot 5 \cdot x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x^1 + 1 \cdot 2 \cdot x^0 + 0 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 15x^2 + 8x + 2 .$$

3.5.1 REGRAS DE DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

Sejam as funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis e seja k uma constante. Então as funções $f + g$, kf e $f \cdot g$ são deriváveis e tem as seguintes regras:

(D1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

(D2) $(kf)'(x) = kf'(x)$;

(D3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

3.6 MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ E FUNÇÃO DERIVADA

TEOREMA: Se α é raiz de multiplicidade m da equação polinomial $f(x) = 0$, então α é raiz de multiplicidade $m-1$ da equação $f'(x) = 0$ em que $f'(x)$ é a derivada primeira ordem de $f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO:

Como α é raiz da equação polinomial $f(x) = 0$, com multiplicidade m, então:

$$f(x) = (x-\alpha)^m q(x) \text{ e } q(\alpha) \neq 0$$

Usando a regra de derivação (D3), temos:

$$f(x) = (x-\alpha)^m q(x) \Rightarrow f'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} q(x) + (x-\alpha)^m q'(x),$$

Portanto, temos

$$f'(x) = (x-\alpha)^{m-1} \left[m \cdot q(x) + (x-\alpha) \cdot q'(x) \right]$$

e, como $m \cdot q(\alpha) + (\alpha - \alpha) \cdot q'(\alpha) = m \cdot q(\alpha) \neq 0$, decorre que α é raiz de multiplicidade $m-1$ de $f'(x) = 0$.

Se α é raiz de multiplicidade m da equação $f(x) = 0$, então α é raiz de

$$f^{(1)}(x) = 0,\ f^{(2)}(x) = 0,\ f^{(3)}(x) = 0,\ ...,\ f^{(m-1)}(x) = 0$$

com multiplicidades $m-1$, $m-2$, $m-3$, ..., 1, respectivamente, e α não é raiz de $f^{(m)}(x) = 0$.

Se α é raiz das equações

$$f(x)=0\,,\ f^{(1)}(x)=0\,,\ f^{(2)}(x)=0\,,\ ...,\ f^{(m-1)}(x)=0$$

e α não é raiz da equação $f^{(m)}(x)=0$, então a multiplicidade de α em $f(x)=0$ é m.

Resumindo, a condição necessária e suficiente para que um número α seja raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial $f(x)=0$ é que α seja raízes das funções $f(x)$, $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, ..., $f^{(m-1)}(x)$ e não seja raiz de $f^{(m)}(x)$.

EXEMPLO 7. Resolva a equação $x^3+x^2-5x+3=0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

Fazendo $f(x)=x^3+x^2-5x+3$, temos $f^{(1)}(x)=3x^2+2x-5$. A raiz dupla é necessariamente raiz de $f^{(1)}(x)$, portanto:

$$3x^2+2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{6}=\frac{-2\pm 8}{6}= \begin{matrix} \nearrow & 1 \\ \searrow & -\frac{5}{3} \end{matrix}$$

Verificando em $f(x)$ temos:

$$f(1)=1^3+1^2-5\cdot 1+3=0$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^3+\left(\frac{5}{3}\right)^2-5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)+3=\frac{56}{27}\neq 0\,.$$

Assim, a raiz dupla de $f(x)$ é 1. Aplicando Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & \multicolumn{1}{|c|}{0} & 1 \\ \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{|c}{0} & & \end{array}$$

recaímos em $x+3=0$, portanto a outra raiz é -3. Logo, a solução $S=\{1,\ -3\}$.

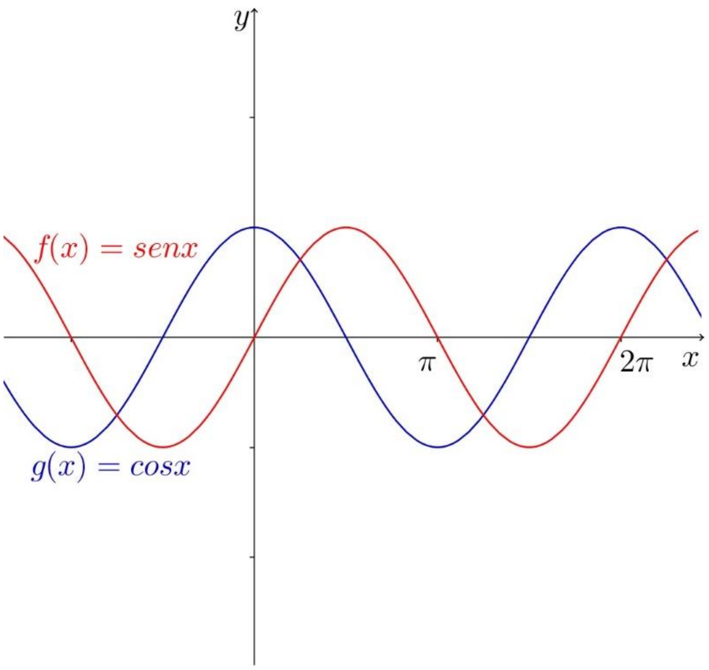
3.7 TEOREMA DE ROLLE E TEOREMA DO VALOR MÉDIO

TEOREMA (DE ROLLE): Se f for contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $f(a)=f(b)$, então existirá pelo menos um c em (a,b) tal que $f'(\text{c})=0$.

Para demonstração ver ([4], p.458).

EXEMPLO 8. O Teorema de Rolle pode ser utilizado para a localização das raízes de uma função. Temos que uma função *g* pode ser identificada como a derivada de uma função *f*, em seguida, entre quaisquer duas raízes de *f* existe pelo menos uma raiz de *g*. Por exemplo, seja $g(x)=\cos x$, sabemos que g é conhecido por ser a derivada $f(x)=\text{sen}\,x$. Assim, entre quaisquer duas raízes de $\text{sen}\,x$ existe pelo menos uma raiz de $\cos x$. Por outro lado, $g'(x)=-\text{sen}\,x=-f(x)$, então uma outra aplicação do Teorema de Rolle nos diz que entre quaisquer duas raízes da função cosseno há pelo menos uma raiz da função seno. Portanto, conclui-se que as raízes da função seno e cosseno entrelaçam entre si.

Figura 3.5 – Representação da função seno e cosseno entrelaçado entre si



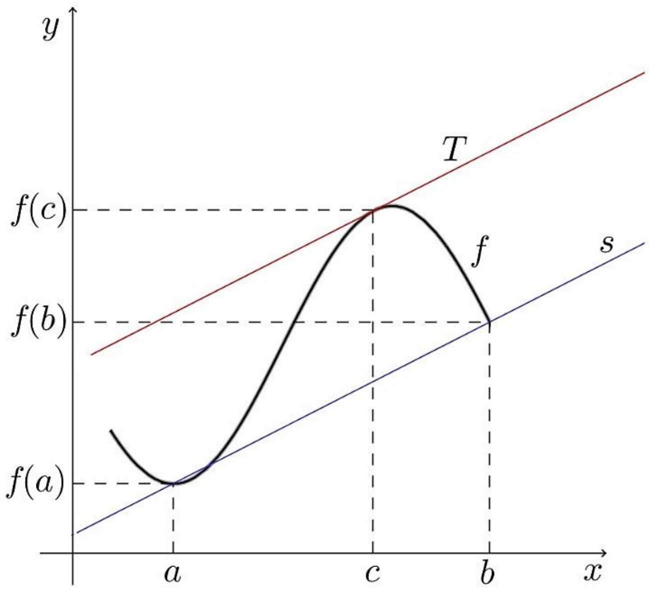
Fonte: Elaborado pelo autor

TEOREMA (DO VALOR MÉDIO – TVM): Se f for continua em $[a,b]$, derivável em (a,b), então existirá pelo menos um c em (a,b) tal que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Para demonstração consulte ([4], p.460).

Geometricamente, este teorema conta-nos que se s é uma reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existirá pelo menos um ponto $(c, f(c))$, com $a<c<b$, tal que a reta tangente ao gráfico de f, neste ponto, é paralela à reta s. Como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o coeficiente angular de s e $f'(c)$ o de T, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Figura 3.5 – Representação do TVM



Fonte: Elaborado pelo autor

4 MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON

Muito utilizado na determinação de raízes de equações polinomiais, com grau maior do que 2, o método de Newton é considerado um dos mais eficientes e conhecidos e pode ser introduzido de várias formas. É importante observar que ao trabalharmos com equações polinomiais de 1º e 2º grau tal método normalmente não é empregado uma vez que existem recursos mais simples como o isolamento de incógnita ao desenvolvemos equações polinomiais de 1º grau e o método de Bháskara quando as equações envolvidas forem polinomiais de 2º grau, sendo elas, completa ou incompletas.

4.1 UMA BREVE HISTÓRIA DO MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON

Isaac Newton (1642 – 1727) foi um dos maiores cientistas de todos os tempos. O fim do século XVII foi um período de muito entusiasmo para a Ciência e a Matemática, e quase todos os aspectos destas foram abrangidos pelo trabalho de Newton. A primeira aparição de seu método para resolver equações, foi num manuscrito: *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* composta por ideias adquiridas em 1665 – 1666 sendo publicado apenas em 1711, neste pequeno trabalho Newton expõe um método para encontrar soluções de equações polinomiais de grau 3. A segunda aparição foi em *De metodis fluxionum et serierum infinitarum*, escrito em 1671 sendo aprimorado para qualquer tipo de função real em 1690 pelo matemático inglês Joseph Raphson (1648 – 1715). Daí sua popularidade como Método de Newton-Raphson. Nem Newton, nem Raphson utilizaram, de forma explícita, a derivada em sua descrição, pois ambos consideraram apenas polinômios.

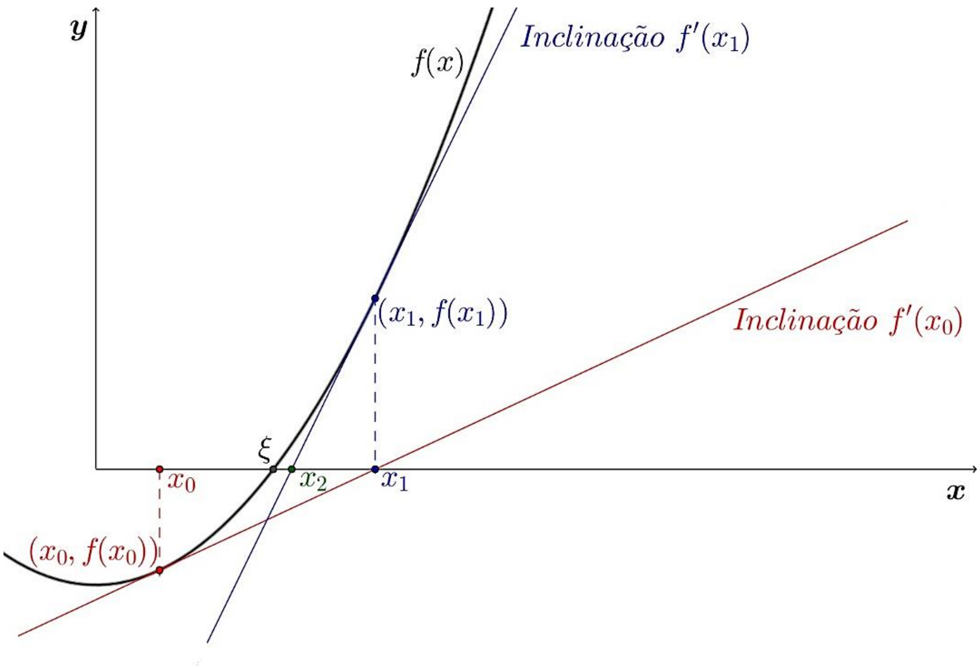
Uma das primeiras aplicações mais importantes do método de Newton foi usado para resolver a chamada equação de Kepler, equação conhecida em astronomia, que serve para determinar a posição de um planeta em sua órbita elíptica. Foi nesta que se aplicou pela primeira vez o método de Newton, como um lema geométrico. Outro exemplo de aplicação foi no estudo do lançamento de um projétil, para calcular o alcance de um disparo.

É válido notar que, a priori, o mesmo não foi apresentado tal como é trabalhado hoje. A este fato foi extremamente importante a atuação de outros grandes matemáticos como Fourier, Cauchy, Kantorovich, Fine e Bennet entre outros, os quais contribuíram com o método provando que o mesmo convergia quadraticamente desde que o ponto inicial fosse tomado em uma vizinhança da solução procurada (Fourier), que o mesmo se estende para funções de várias variáveis e que pode ser utilizado para se provar a existência de raízes de outras equações (Cauchy).

4.2 DEFINIÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON

O método de Newton consiste em uma sequência de cálculos da tangente do ângulo formado entre uma reta tangente a curva $f(x)$ em um ponto inicial x_0 e o eixo das abscissas, que por sua vez dará um novo ponto x_1, ao qual definirá uma nova reta tangente que por sua vez propiciará um novo ponto x_2 e assim sucessivamente como mostra a Figura 4.1 abaixo.

Figura 4.1 – interpretação geométrica do método de Newton



Fonte: Elaborado pelo autor

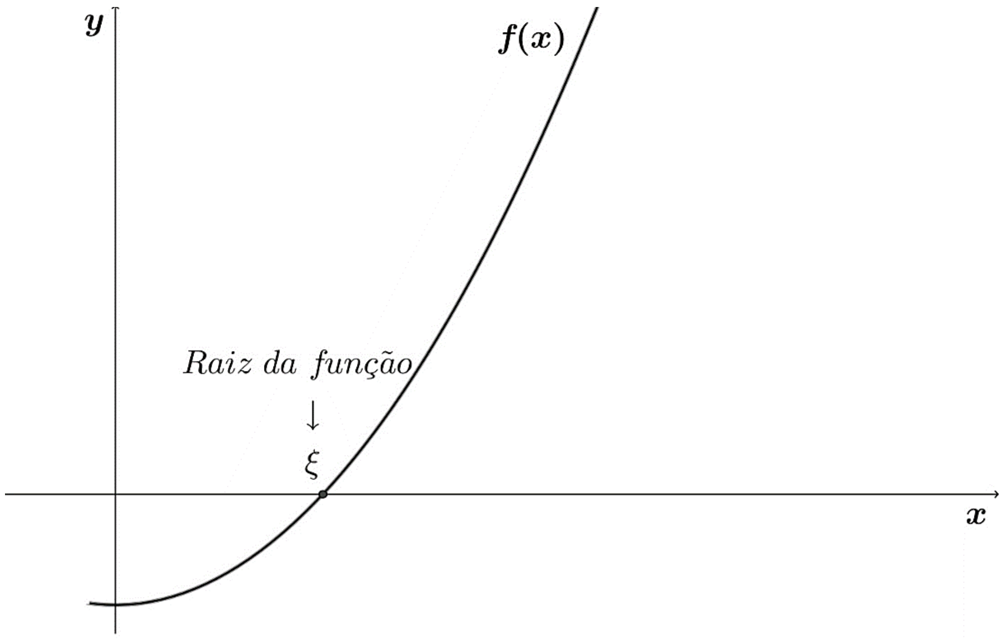
Portanto, a ideia do método de Newton nada mais é que a linearização de uma função derivável $f(x)$ a qual para resolvermos a equação $f(x)=0$ a partir de uma aproximação inicial x_0 iremos construir uma aproximação linear de $f(x)$ em uma vizinhança x_0.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

4.3 DEDUÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON

Existem várias maneiras de deduzirmos tal método, utilizaremos, neste trabalho, argumentos geométricos com a intenção de chegarmos a fórmula de recorrência de Newton-Raphson. Para isso, tomemos uma função $f(x)$ cujo seu gráfico está representado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – curva $f(x)$



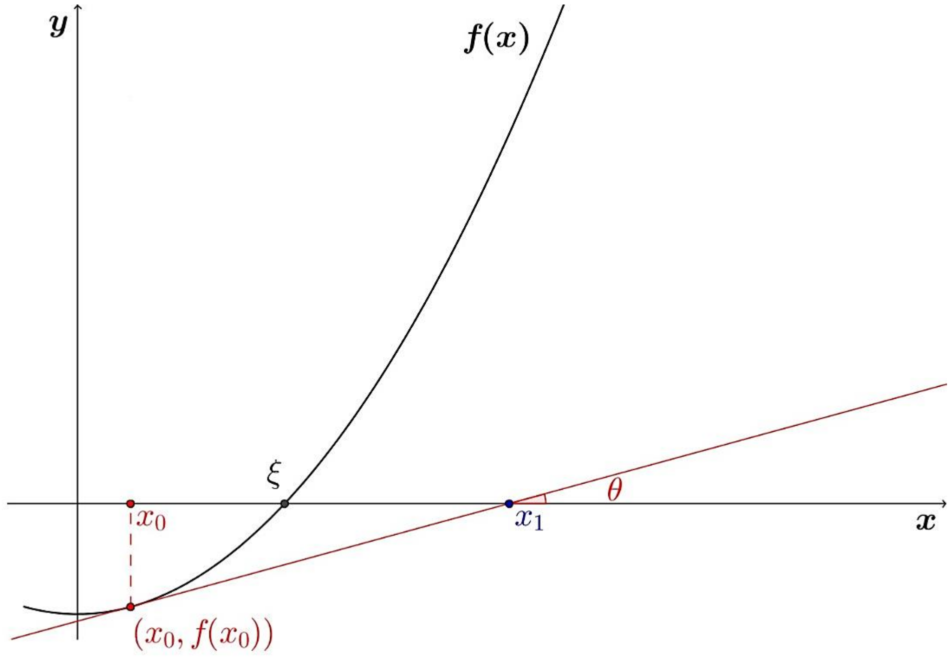
Fonte: Elaborado pelo autor

Como pretendemos encontrar uma de suas raízes, uma das maneiras para entendermos o método de Newton dar-se-á inicialmente com a escolha de uma aproximação para a raiz ξ que é o número real x_0 denominado de passo inicial, conforme a Figura 4.3. O passo seguinte será traçar a reta tangente à curva $f(x)$ em x_0, com isso a reta tangente cortará o eixo das abscissas em um novo ponto, que indicaremos por x_1, ao qual não conhecemos seu valor.

Chegamos então, em um problema a ser questionado: Como encontrar a próxima aproximação para a raiz partindo do ponto inicial x_0, no caso, como determinar x_1?

Para solucionarmos tal problema é necessário observamos o ângulo θ formado entre a reta tangente obtida e o eixo das abscissas.

Figura 4.3 – Reta tangente à curva de f em $(x_0, f(x_0))$ que corta o eixo das abscissa em x_1.



Fonte: Elaborado pelo autor

Então se calcularmos a tangente deste ângulo θ, teremos que:

$$\tan\theta = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Do cálculo temos que a derivada da função f no ponto x_0 é a tangente do ângulo de inclinação θ, portanto, podemos afirmar que $f'(x_0) = \tan\theta$, ou seja,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Isolando x_1 na equação acima temos,

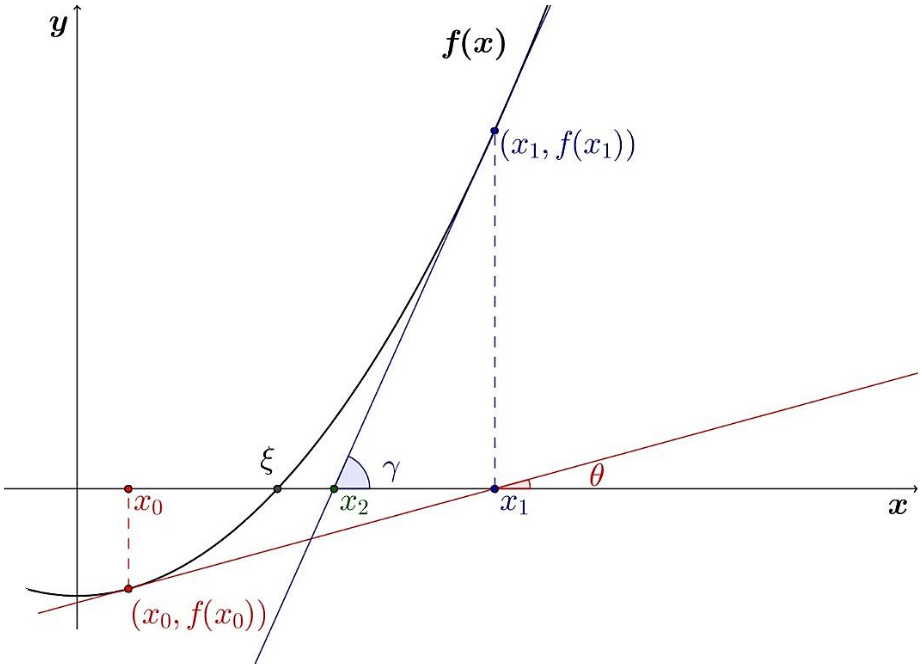
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \Rightarrow f'(x_0)(x_0 - x_1) = f(x_0) \Rightarrow x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Concluímos então, que o valor de x_1 será dado pela relação $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Surge, dessa forma, um novo problema: Como obter uma nova aproximação desta raiz que esteja no intervalo entre ela e o valor x_1 obtido?

O procedimento para responder a este questionamento dar-se-á de forma análoga ao procedimento feito anteriormente. Desta forma, será necessário traçarmos uma próxima reta tangente à curva $f(x)$ em $\left(x_1, f(x_1)\right)$ que por sua vez cortará o eixo das abscissas em um novo ponto x_2, isto fará com que repitamos o procedimento anterior só que desta vez com objetivo de determinar o valor de x_2. Assim, deveremos calcular a tangente do ângulo γ formado entre a reta tangente à curva $f(x)$ em $\left(x_1, f(x_1)\right)$ e o eixo das abscissas que é igual a derivada da função f no ponto x_1.

Figura 4.4 - Reta tangente à curva de f em $\left(x_1, f(x_1)\right)$ que corta o eixo das abscissa em x_2.



Fonte: Elaborado pelo autor

Então,

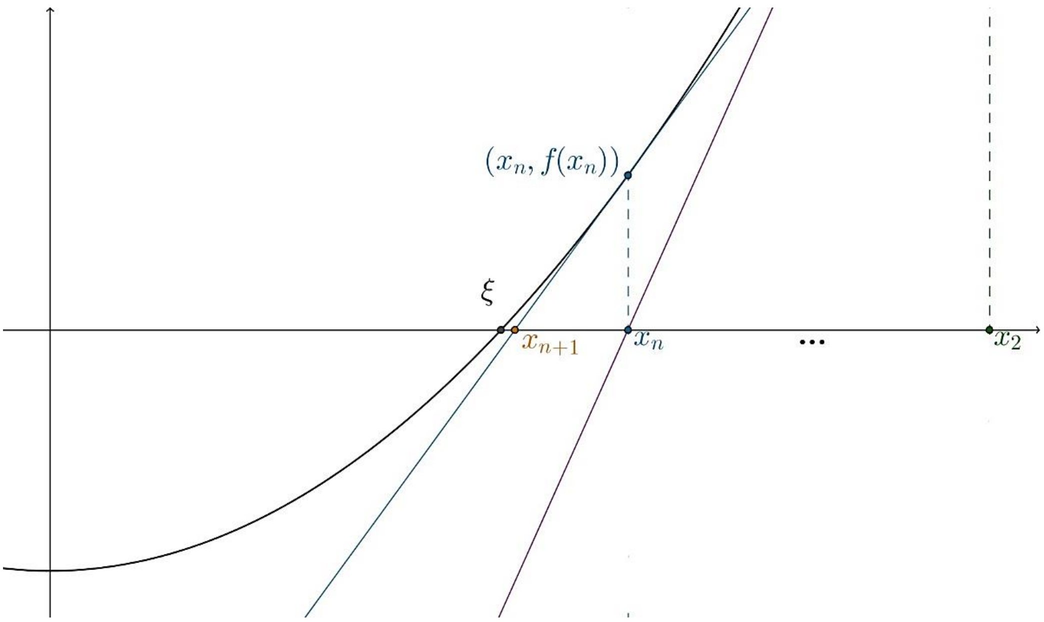
$$\tan\gamma = f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} \;\Rightarrow\; f'(x_1)(x_1 - x_2) = f(x_1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \;\Rightarrow\; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Concluiremos assim, que o valor de x_2 será dado pela relação $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Desta maneira, repetindo sucessivamente esse procedimento, estaremos construindo uma sequência (x_n) de números reais. Mas precisamente, se para um inteiro $n \geq 1$, já obtivermos os números x_1, x_2, ..., x_n e a função f está definida em x_n com $f'(x_n) \neq 0$, podemos determinar o termo seguinte da sequência, x_{n+1}, que é o número que corresponde ao ponto de intersecção do eixo das abscissas com a reta tangente ao gráfico f em $(x_n, f(x_n))$. (Ver Figura 4.5)

Figura 4.5 – Iterações de retas tangentes



Fonte: Elaborado pelo autor

Concluiremos que a iteração posterior será dada a partir da mesma relação anterior. Logo,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Portanto, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ é a fórmula de recorrência dada pelo método de Newton. Observe que essa fórmula já reflete as condições que apontamos acima para que se possa realmente obter uma sequência: para calcular o número x_{n+1} é preciso que f esteja definida em x_n e $f'(x_n) \neq 0$ para que possamos efetuar a divisão $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

É possível que existam passos iniciais para as quais o processo é interrompido (ou nem pode começar) e, nesse caso, o que devemos fazer é escolher um outro passo inicial.

Suponhamos então que temos um passo inicial x_0, a partir da qual é possível construir uma sequência (x_n), isto é, o processo nunca é interrompido. A pergunta que nos interessa agora poder responder é: Qual é o comportamento de (x_n)?

Nem sempre uma tal sequência converge. Por outro lado, se os números de (x_n) ficam cada vez mais próximos de ξ a medida que n cresce, diremos que a sequência converge para ξ e escreveremos das seguintes formas:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \quad \text{ou} \quad x_n \to \xi.$$

Portanto, se a sequência converge, então ela converge para uma solução da equação $f(x) = 0$, como veremos no seguinte Teorema.

TEOREMA: Seja f uma função derivável com f' contínua e ξ um número de seu domínio. Se (x_n) é uma sequência obtida pelo método de Newton a partir de um passo inicial x_0 e $x_n \to \xi$, então $f(\xi) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Como já sabemos, a sequência (x_n) é definida pela fórmula de recorrência $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Para cada inteiro $n \geq 1$ seja $y_n = x_{n+1}$, isto é, a lista ordenada infinita de número reais dados pela sequência (y_n) é obtida da lista de números reais da sequência (x_n) simplesmente eliminando o número x_1. Em particular, y_n também converge a ξ e portanto

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Mas

$$x_n - y_n = x_n - x_{n+1} = x_n - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

logo,

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - y_n).$$

Como f' contínua, por hipótese, então $f'(x_n) \to f'(\xi)$, portanto aplicando limite quando $n \to \infty$ na equação acima temos que,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left[f'(x_n)(x_n - y_n)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[f'(x_n)\right]\lim_{n\to\infty}\left[(x_n - y_n)\right] = f'(\xi)\cdot 0.$$

Mas f contínua em ξ, logo $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

EXEMPLO 8. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^5 - 5x^3 + 16x$, cuja derivada é $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 16$, e o passo inicial $x_0 = 1$. Aplicando o método de Newton temos:

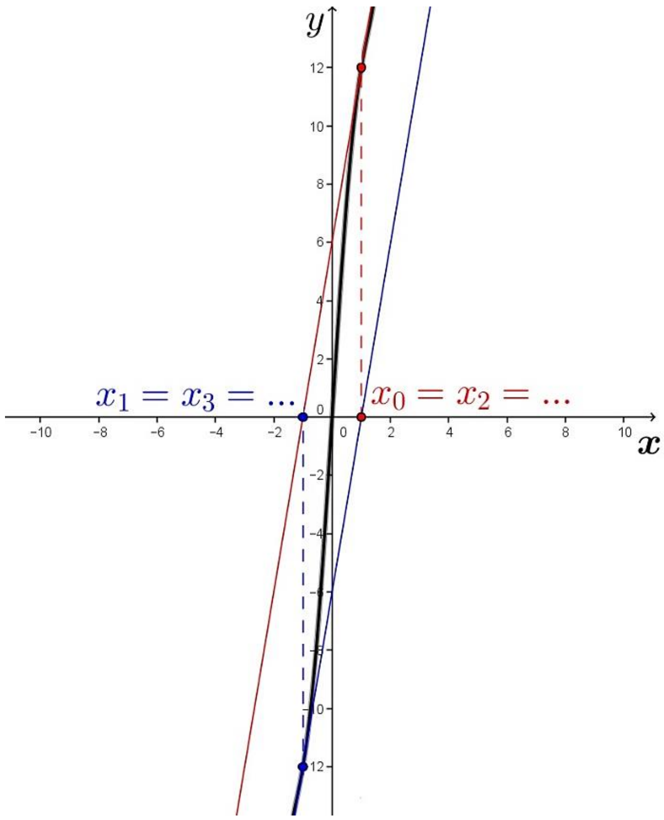
$$x_{0+1} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{12}{6} \Rightarrow x_1 = -1,$$

em seguida, calculemos x_2, então:

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} \Rightarrow x_2 = -1 - \frac{-12}{6} \Rightarrow x_2 = 1.$$

Notemos que, como o valor de um termo da sequência dada pelo método de Newton só depende do valor do termo anterior, vemos que a sequência (x_n) satisfaz $x_n = -1$ se n é ímpar e $x_n = 1$ se n é par e, portanto não é uma sequência convergente.

Figura 4.6 – Gráfico do exemplo 8



Fonte: Elaborado pelo autor

Por outro lado, para esta função, qualquer número do intervalo $(-1, 1)$ é um bom passo inicial, e a sequência dada pelo método de Newton a partir de um passo inicial $x_0 \in (-1, 1)$ converge a $\xi = 0$ que é a única solução da equação $f(x) = 0$.

O aspecto mais importante do método de Newton é que se x_0 é um bom passo inicial, então a convergência é muito rápida, no sentido de que com um número muito pequeno de etapas podemos obter aproximações de uma solução da equação $f(x) = 0$ com uma precisão muito grande.

4.4 CONDIÇÕES DE CONVERGÊNCIA

Segundo Newton, para haver a convergência à uma raiz em seu método, bastaria que o intervalo $(a,\, b)$ em análise fosse suficientemente pequeno. Contudo, Raphson e Fourier concluíram que um intervalo pequeno é aquele contém uma e somente uma raiz. Com isso, algumas condições foram estabelecidas para que tal exigência fosse válida.

PROPOSIÇÃO: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, duas vezes derivável, com f'' contínua. Suponhamos que:

1º. $f(a)\cdot f(b)<0$;

2º. $f'(x)\neq 0$, $\forall\, x\in[a,b]$;

3º. $f''(x)$ é de sinal constante em $(a,\, b)$, ou seja, $f''(a)\cdot f''(b)>0$;

4º. O valor inicial x_0, for o extremo do intervalo $[a,b]$ em que $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$, isto é, toma-se $x_0=a$ ou $x_0=b$ de modo que $f(x_0)$ e $f''(x_0)$ tenham o mesmo sinal.

Então a sequência (x_n) gerada pelas iterações do método de Newton-Raphson converge para a única raiz ξ de f, isolado em $[a,\, b]$, se $x_0\in[a,b]$ for escolhido convenientemente.

4.5 APLICANDO O MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON

ALGORITMO: *Método de Newton*
Seja a equação $f(x)=0$.   *É necessário conhecer um intervalo que contenha o valor desejado* ξ.   *Supor satisfeitas as hipóteses da proposição de convergência.*   *Dados iniciais:* x_0, $f'(x)$, $f''(x)$, e_1 *e/ou* e_2 *(erro)*   *1) Para* $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$ *faça*   *2)* $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ *3) Se* $\lvert f(x_{n+1})\rvert<e_1$ *então* $\xi=x_{n+1}$ *ou* $\lvert x_{n+1}-x_n\rvert<e_2$ *então* $\xi=x_{n+1}$

Através dos seguintes exemplos, ilustraremos mais detalhadamente do funcionamento do método.

EXEMPLO 9. Determinar uma das raízes reais da equação $x^3 - x - 4 = 0$ com erro inferior a 10^{-3}.

Inicialmente, conjecturamos que existe um raiz no intervalo $[1,2]$. Verifiquemos se nossa suspeita procede. Fazendo $f(x) = x^3 - x - 4$, observe que $f(1) = 1^3 - 1 - 4 = -4$ e $f(2) = 2^3 - 2 - 4 = 2$. Como $f(1) \cdot f(2) = -8 < 0$, existe (pelo menos uma) raiz de f entre 1 e 2.

Verifiquemos, também, que como $f'(x) = 3x^2 - 1$ e $f''(x) = 6x$ então $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [1,2]$, já que se anula para $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, e $f''(x) > 0$ em todo intervalo.

Tomaremos o valor inicial $x_0 = 2$ pois $f(2) \cdot f''(2) > 0$. Com esses pontos verificados estão cumpridas as condições de convergência, logo podemos começar as iterações.

Podemos fazer as iterações utilizando o seguinte quadro:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert < 10^{-3}$
0	*2*	*2,00000*	*11,00000*	*1,81818*	*0,18182*
1	*1,81818*	*0,19234*	*8,91736*	*1,79661*	*0,02157*
2	*1,79661*	*0,19234*	*8,68346*	*1,79632*	*0,00029*
3	*1,79632*	---	---	---	---

Uma das raízes desejada é $\xi = 1,79632$.

EXEMPLO 10. Calcular a raiz negativa de $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$, com erro $e \leq 10^{-4}$.

É evidente que há uma raiz ξ no intervalo $[-1,0]$ uma vez que $f(-1) = -4$ e $f(0) = 3$ logo $f(-1) \cdot f(0) = -12 < 0$.

Verifiquemos, também, que como $f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$ e $f''(x) = 6x - 10$ então $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [-1,0]$, já que se anula para $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{22}}{3}$, e $f''(x) > 0$ em todo intervalo, ou seja, $f''(-1) \cdot f''(0) = (-16) \cdot (-10) > 0$.

Tomaremos o valor inicial $x_0 = -1$ pois $f(-1) \cdot f''(-1) > 0$. Com esses pontos verificados estão cumpridas as condições de convergência, logo podemos começar as iterações.

Podemos fazer as iterações utilizando o seguinte quadro:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$e = \lvert x_{n+1} - x_n \rvert < 10^{-4}$
0	*-1,000000*	*-4,000000*	*14,000000*	*-0,714286*	*0,285714*
1	*-0,714286*	*-0,629738*	*9,673469*	*-0,649186*	*0,065099*
2	*-0,649186*	*-0,029995*	*8,756191*	*-0,645761*	*0,003426*
3	*-0,645761*	*-0,000081*	*8,708627*	*-0,645751*	*0,000009*
4	*-0,645751*	---	---	---	---

A raiz negativa é $\xi = -0,645751$.

5 APLICAÇÃO DO MÉTODO UTILIZANDO PLANILHA ELETRÔNICA

O principal objetivo desse capítulo é fazer com que o aluno ponha em prática todos os conceitos matemático adquirido na aplicação do método de Newton-Raphson para localizar raízes reais polinomiais. A planilha eletrônica, usada como ferramenta neste processo, pode auxiliar na descoberta e exploração de tais conceito pois permite que o conhecimento seja construído a partir de ações do aluno quando, em interação com o computador, este desenvolve atividades relacionadas à organização, ao processamento e análise da informação, à exploração e experimentação, formulação e teste de conjecturas, resolução de problemas e comunicação.

É válido mencionar que o computador pode enriquecer ambientes de aprendizagem onde o aluno, interagindo com os objetos desse ambiente, tem chance de construir o seu próprio conhecimento. Sendo assim Valente diz que:

> *[...]* o computador como recurso importante para auxiliar o processo de mudança pedagógica – a criação de ambientes de aprendizagem que enfatizam a construção do conhecimento e não a instrução. Isso implica entender o computador como uma nova maneira de representar o conhecimento, provocando um redimensionamento dos conceitos já conhecidos e possibilitando a busca e compreensão de novas idéias e valores. Usar o computador com essa finalidade, requer a análise cuidadosa do que significa ensinar e aprender bem como demanda rever o papel do professor nesse contexto. (Valente, 1999, p.12)

Portanto, por meio de planilhas e com o professor mediando a interação aluno-computador o processo de reflexão e depuração pode ser realizado favorecendo a construção de conceitos matemáticos.

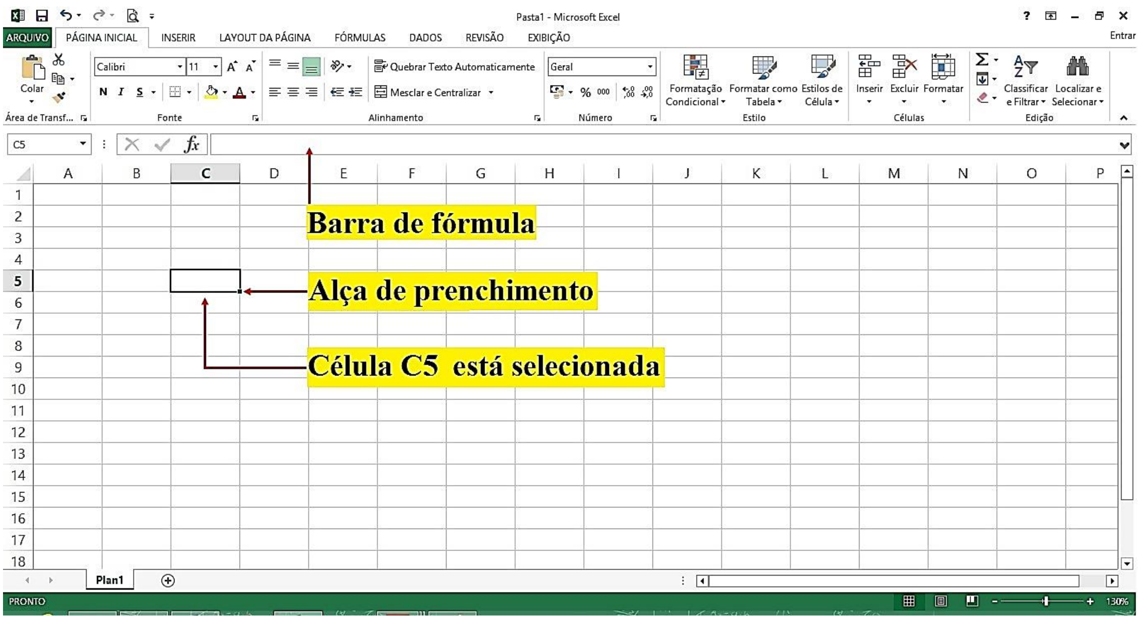
Serão apresentadas duas atividades que visam mostrar a aplicação do método de Newton – Raphson com o uso da planilha eletrônica, mas antes, vamos conhecer um pouco mais sobre essa ferramenta.

5.1 PLANILHA ELETRÔNCA

A planilha eletrônica é um software desenvolvido para efetuar cálculos ou apresentar dados através de tabelas, sendo que sua composição é basicamente formada por linhas e colunas que geram espaços chamados de células, essas, por sua vez servem para armazenar dados de texto, números ou formulas. Não há grandes dificuldades para inserir números e texto nas células, basta digitar os dados nos espaços vazios, para inserir fórmulas

Matemática é necessário iniciar por um sinal de igualdade. Para visualizar o conteúdo de uma fórmula digitada, é necessário selecionar a célula e olhar para a barra de fórmulas situada na parte superior da tela. Para finalidade educacionais e científicas, existem algumas planilhas de cálculo gratuitas interessantes como a versão de avaliação Kyplot, além da planilha Calc embutida na suíte gratuita BrOffce. Em geral, pessoas que usam computadores com o Windows, usam a suíte Microsoft Office, contendo a Planilha Excel. Existem outros softwares que possuem planilha eletrônica, um deles é o GeoGebra uma valiosa ferramenta Matemática gratuita que reúne geometria, álgebra e cálculo. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Figura 5.1 – Visão da tela de abertura da planilha Excel



Fonte: Elaborado pelo autor

5.2 ATIVIDADE 1

Usaremos o software Excel como ferramenta nesta atividade.

ATIVIDADE 1: Encontre a raiz negativa do polinômio $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 1{,}6$ pelo método de Newton – Raphson, use $e \leq 10^{-3}$.

Abra uma pasta de trabalho em branco no Excel e escreva na célula A1 um título, por exemplo: Método de Newton-Raphson. Pode escolher letra negrita e tamanho da fonte 12.

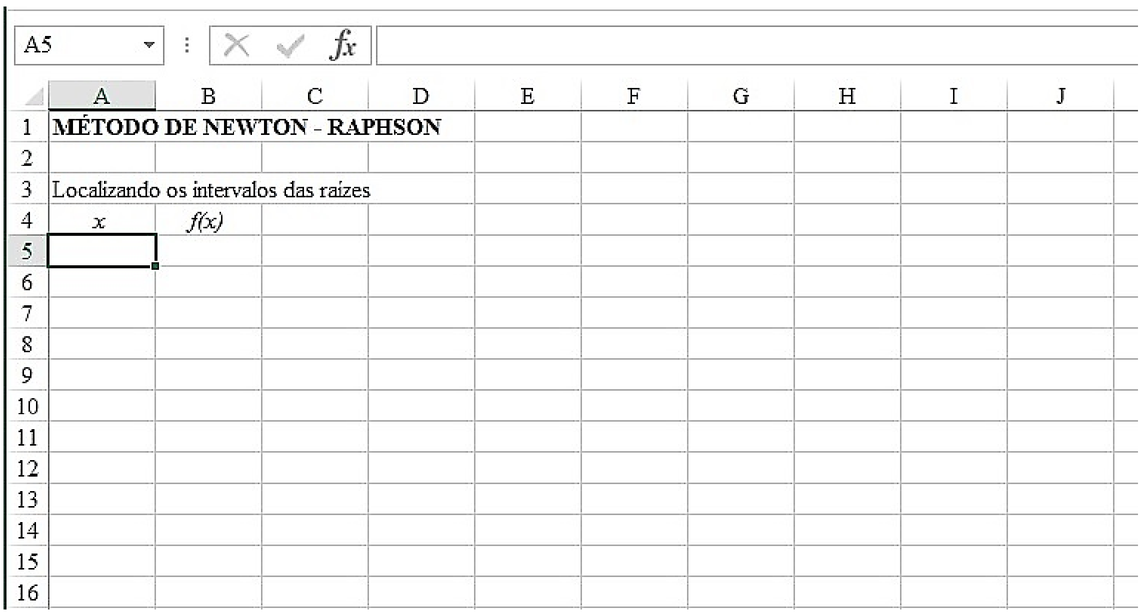
Dividiremos o problema em etapas para entender melhor os conceitos:

1ª Etapa: Construiremos uma tabela para localizar os intervalos onde se encontram as raízes. Faremos uma tabela com valores de x e suas respectivas imagens $f(x)$. Para isso, siga os seguintes passos:

Passo 1: Na célula A3 escrevemos um título para primeira tabela, por exemplo: Localizando os intervalos das raízes;

Passo 2: Na linha 4 escreveremos o cabeçalho, inserindo x na célula A4 e $f(x)$ na célula B4;

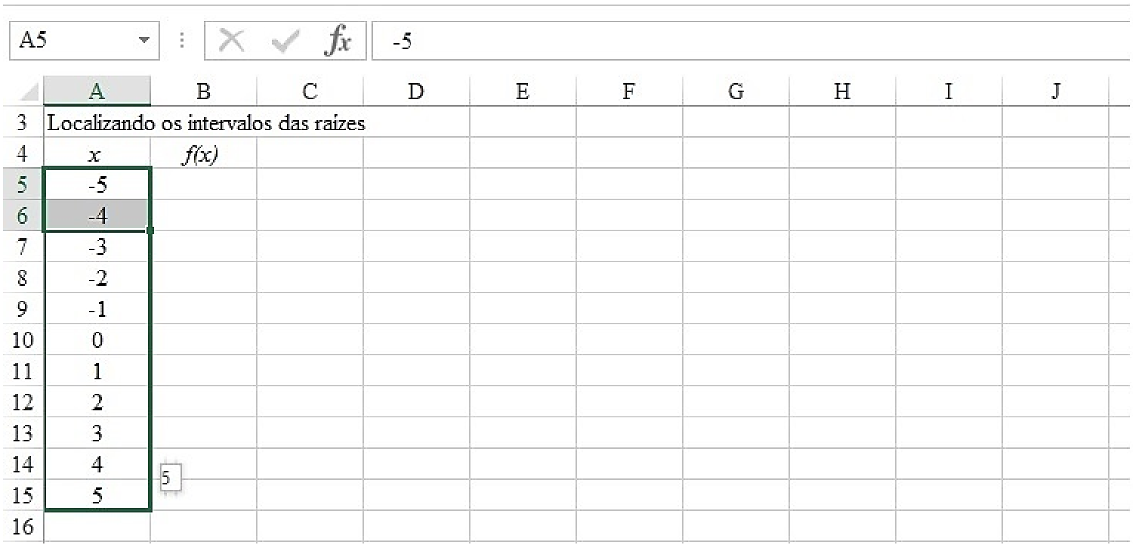
Figura 5.2 – Iniciando a 1ª etapa.



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3: Escolheremos os valores de x, por exemplo: *-5* na célula A5 e *-4* na célula A6, selecionaremos as duas células juntas e na alça de preenchimento arrastaremos verticalmente até a célula A15. O Excel fará o preenchimento da sequência na ordem colocada nas células selecionadas.

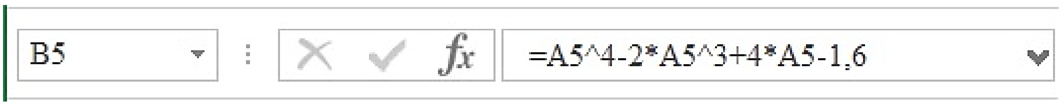
Figura 5.3 – Construindo a coluna de valores de x



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 4: Selecione a célula B5 é insira o polinômio $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 1{,}6$ iniciando com o símbolo de igual $(=)$ e substituindo x por A5. Use $(*)$ para multiplicação e $(\wedge)$ para colocar expoentes.

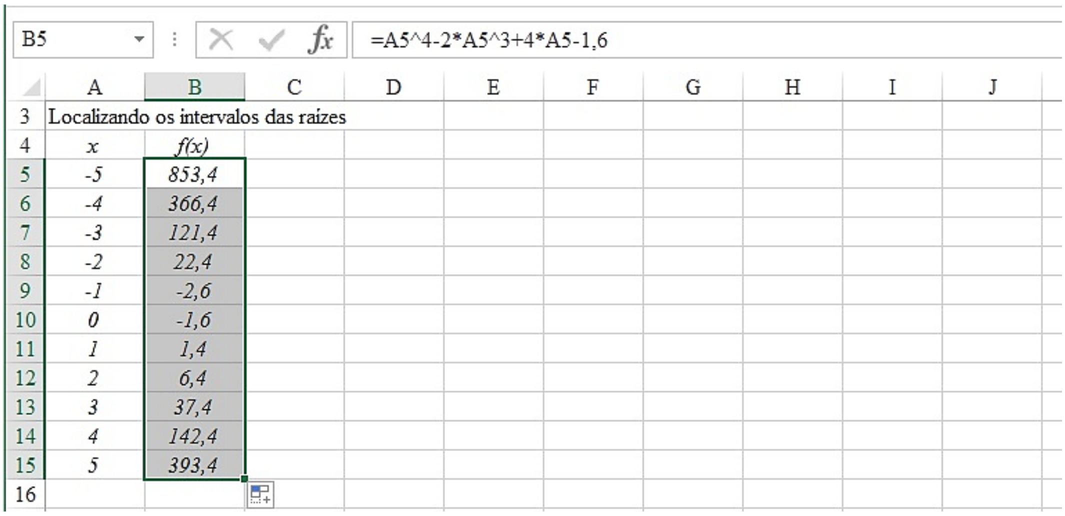
Figura 5.4 – inserindo fórmula na célula B5



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 5: Selecione a célula B5 e arraste verticalmente até B15 para que o Excel faça o preenchimento automático dos outros valores.

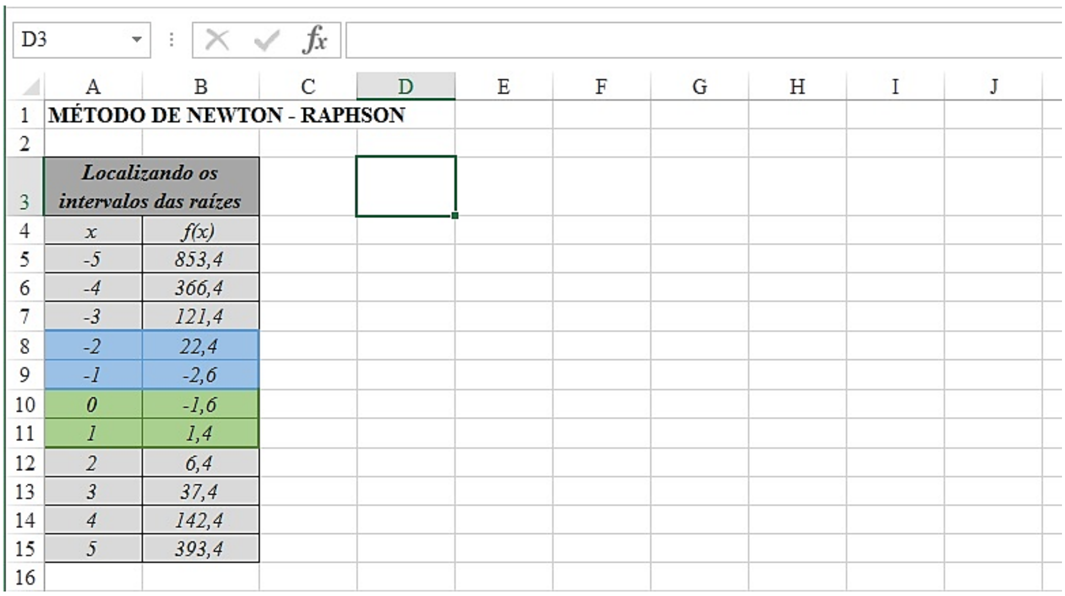
Figura 5.5 – Construindo a coluna de valores de $f(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6: Observe que a primeira variação de sinal $f(x)$ ocorre nas células B8 e B9 e a segunda nas células B10 e B11. Logo, esses são os intervalos onde se encontram as raízes reais. Formate a tabela e destaque as variações.

Figura 5.6 – 1ª Tabela finalizada



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, sabemos que existem raízes pertencentes aos seguintes intervalos: $[-2,-1]$ e $[0,1]$. Como queremos a raiz negativa então descartamos o intervalo $[0,1]$ e aplicaremos o método no intervalo $[-2,-1]$.

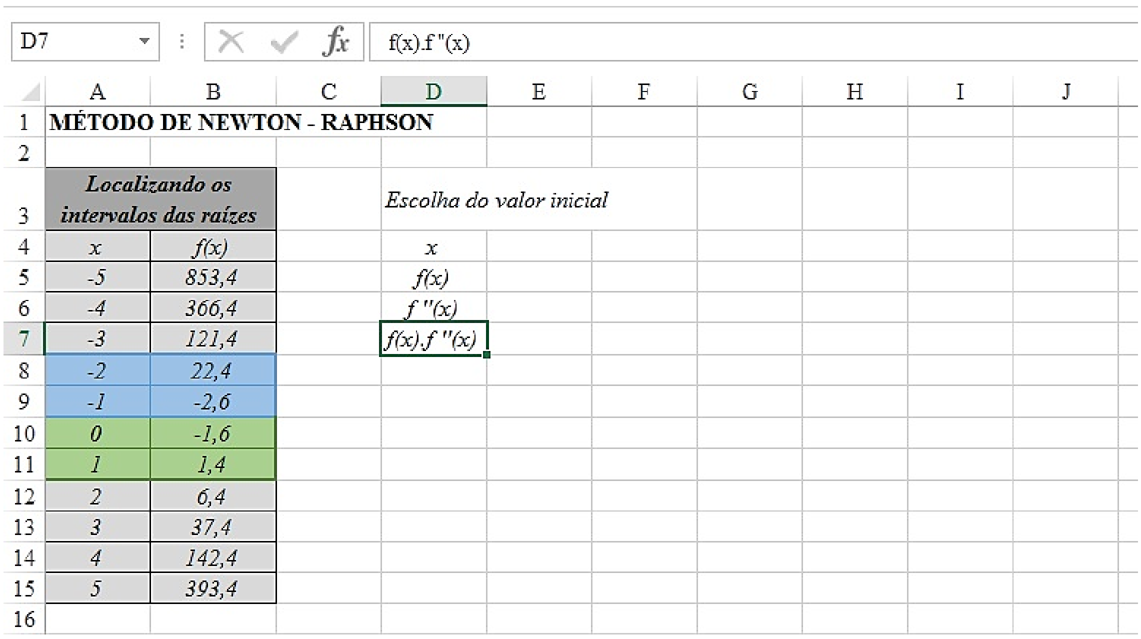
Observe que como $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4$ e $f''(x) = 12x^2 - 12x$ então $f'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in [-2,1]$ e $f''(x) > 0$ em todo intervalo, satisfazendo as condições de convergência para qualquer $x \in [-2,1]$. Dessa forma, podemos dar início a segunda etapa construindo uma tabela para escolha do melhor valor inicial.

2ª Etapa: Construiremos uma tabela para escolha do valor inicial, para isso seguiremos os seguintes passos:

Passo 1: Na célula D3 escrevemos um título para a segunda tabela, por exemplo: Escolha do valor inicial;

Passo 2: Na coluna D escreveremos o cabeçalho, inserindo x na célula D4, $f(x)$ na célula D5 , $f''(x)$ na célula D6 e $f(x) \cdot f''(x)$ na célula D7;

Figura 5.7 – Iniciando a 2ª tabela


D7 f(x).f "(x)

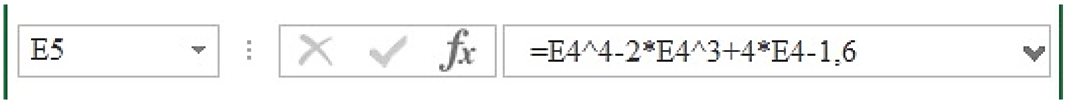
	A	B	C	D
1	MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON			
2				
3	Localizando os intervalos das raízes			Escolha do valor inicial
4	x	f(x)		x
5	-5	853,4		f(x)
6	-4	366,4		f "(x)
7	-3	121,4		f(x).f "(x)
8	-2	22,4		
9	-1	-2,6		
10	0	-1,6		
11	1	1,4		
12	2	6,4		
13	3	37,4		
14	4	142,4		
15	5	393,4		
16				

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3: Na linha 4 inserimos os valores x, que são os extremos do intervalo estudado, ou seja, *-2* na célula E4 e *-1* na célula E5.

Passo 4: Na célula E5 insira o polinômio $f(x)$, conforme visto no passo 4 da 1ª etapa. Nesse caso, substitua x por E4.

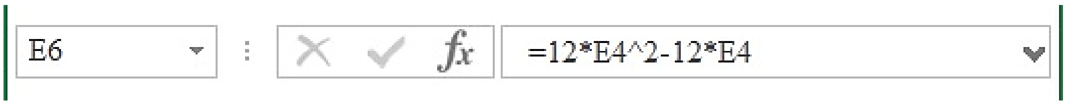
Figura 5.8 – Inserido fórmula na célula E5



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 5: Insira o polinômio $f''(x) = 12x^2 - 12x$ na célula E6, iniciando da igualdade e substituindo x por E4.

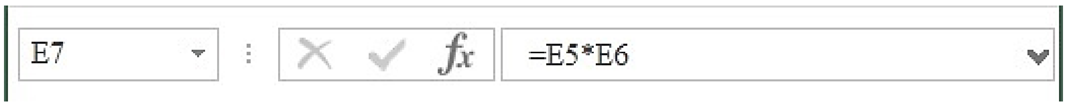
Figura 5.9 – Inserido fórmula na célula E6



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6: Na célula E7 insira a fórmula $(=E5*E6)$;

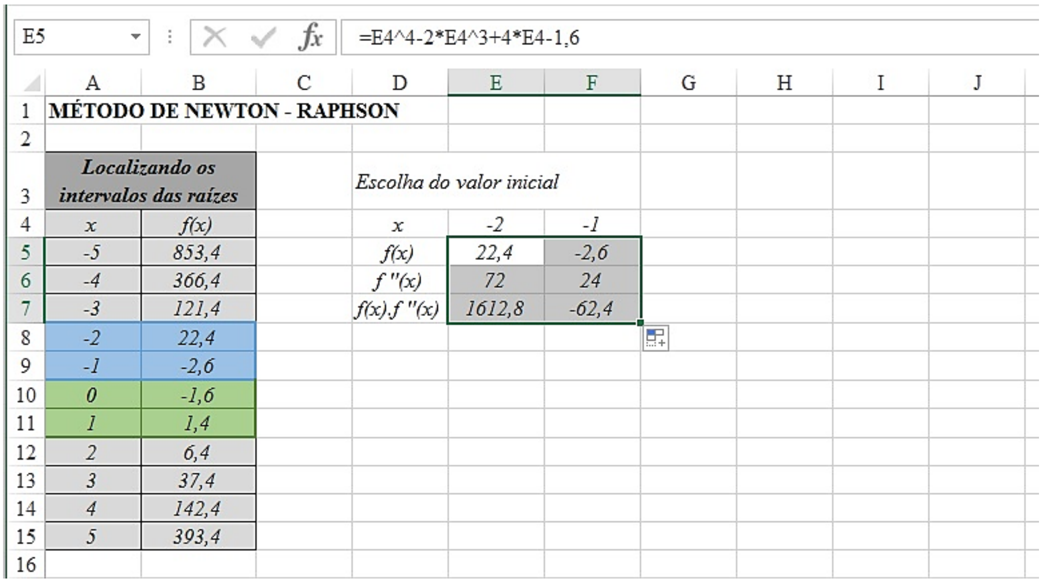
Figura 5.10 – Inserido fórmula na célula E7



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 7: Selecione as células E5, E6, E7 juntas e arraste, pela alça de preenchimento, horizontalmente até G7;

Figura 5.11 – Construindo a coluna de valores G



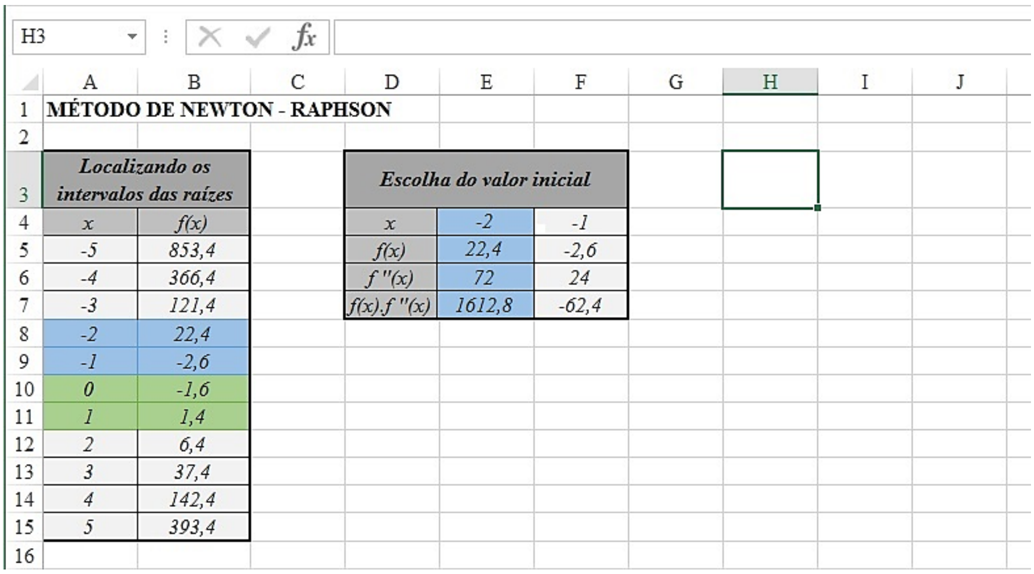
E5 =E4^4-2*E4^3+4*E4-1,6

	A	B	C	D	E	F
1	MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON					
2						
3	Localizando os intervalos das raízes			Escolha do valor inicial		
4	x	f(x)		x	-2	-1
5	-5	853,4		f(x)	22,4	-2,6
6	-4	366,4		f ''(x)	72	24
7	-3	121,4		f(x).f ''(x)	1612,8	-62,4
8	-2	22,4				
9	-1	-2,6				
10	0	-1,6				
11	1	1,4				
12	2	6,4				
13	3	37,4				
14	4	142,4				
15	5	393,4				
16						

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 8: Como visto nas condições de convergência do capítulo anterior, se o valor inicial x_0 for um dos extremos então o melhor valor inicial é o que satisfaz a condição $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, ou seja, $x_0 = -2$. Desta forma, finalizamos a 2ª etapa. Formate a tabela e destaque a coluna que satisfaz a condição.

Figura 5.12 – 2ª Tabela finalizada



H3

	A	B	C	D	E	F
1	MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON					
2						
3	Localizando os intervalos das raízes			Escolha do valor inicial		
4	x	f(x)		x	-2	-1
5	-5	853,4		f(x)	22,4	-2,6
6	-4	366,4		f ''(x)	72	24
7	-3	121,4		f(x).f ''(x)	1612,8	-62,4
8	-2	22,4				
9	-1	-2,6				
10	0	-1,6				
11	1	1,4				
12	2	6,4				
13	3	37,4				
14	4	142,4				
15	5	393,4				
16						

Fonte: Elaborado pelo autor

Tendo em mãos o valor inicial $x_0 = -2$, podemos ir para principal etapa onde iremos encontrar a solução do problema.

3ª Etapa: Construiremos primeiramente uma pequena tabela para inserir dados iniciais e em seguida a tabela de iterações de Newton. Para isso, basta seguir os passos:

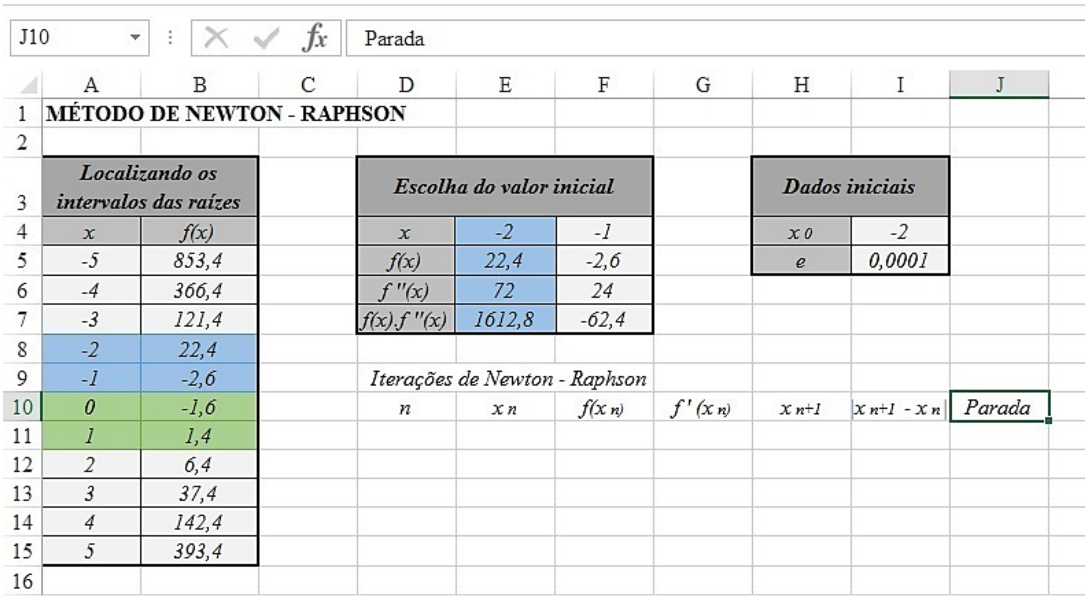
Passo 1: Na célula H3 escrevemos um título para a terceira tabela, por exemplo: Dados iniciais;

Passo 2: Na coluna H escreveremos o cabeçalho, inserindo x_0 na célula H4 e o erro e na célula H5;

Passo 3: Inserimos o valor inicial $x_0 = -2$ na células I4 e o erro 10^{-3} na célula I5 em seguida formate a tabela 3;

Passo 4: Na célula D9 escrevemos um título para a quarta tabela, por exemplo: Iterações de Newton - Raphson;

Figura 5.13 – 3ª Tabela e início da 4º tabela



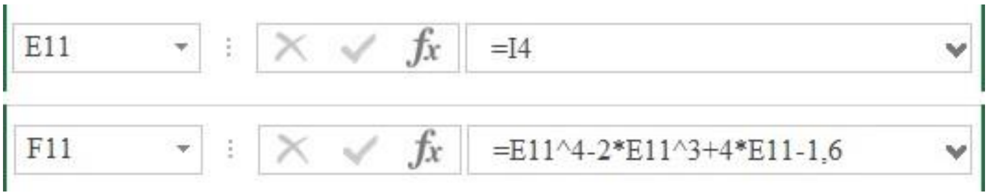
Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 5: Na linha 10 escrevemos o cabeçalho, iniciando na célula D10 e terminando na célula J10, inserindo os respectivos valores: n (número de iterações), x_n (iteração anterior), $f(x_n)$, $f'(x_n)$, x_{n+1} (que é a fórmula de Newton – Raphson $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$), $e_n = |x_{n+1} - x_n|$ (erro) e parada, como mostra a figura anterior. (Figura 5.13)

Passo 6: Na linha 11 inseriremos os seguintes valores: iteração 0 (zero) na célula D11, e x_0 que está em I4 na célula E11, use a fórmula (=I4);

Passo 7: Continuado na linha 11, inseriremos na célula F11 mais uma vez a fórmula do polinômio $f(x)$ só que desta vez substituiremos x por E11;

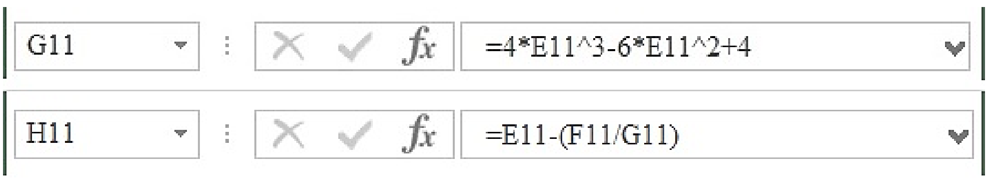
Figura 5.14 – inserindo fórmula nas células E11 e F11



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 8: Na célula G11 inserimos o polinômio $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4$ substituindo x por E11 e na célula H11 inserimos a fórmula de Newton – Raphson $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ iniciando da igualdade e substituindo x_n por E11, $f(x_n)$ por F11, $f'(x_n)$ por G11;

Figura 5.15 – inserindo fórmula nas células G11 e H11

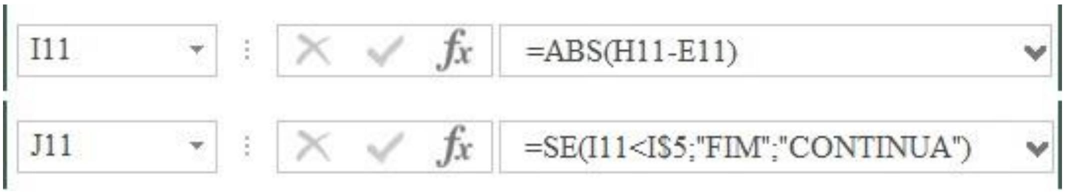


Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 9: Insira na célula I11 a fórmula $|x_{n+1} - x_n|$ use o código ABS, iniciado por uma igualdade, para representar módulo e substitua x_{n+1} por H11 e x_n por E11;

Passo 10: Na célula J11 vamos colocar a condição de parada. Como vimos no capítulo anterior, as interações terminam sempre que a condição $|x_{n+1} - x_n| < e$ é satisfeita. Para colocar uma condição no Excel usamos o código SE iniciado por uma igualdade, em seguida colocamos o teste lógico que neste caso é $|x_{n+1} - x_n| < e$, faremos isto substituindo $|x_{n+1} - x_n|$ por I11 e e por I\$5. Depois colocamos as duas condições a primeira para o teste lógico verdadeiro e a segunda para o teste lógico falso. Neste caso usaremos “FIM” para verdade e “CONTINUA” para falso. O teste lógico e as duas condições ficam separados por ponto e vírgula e textos entre aspas;

Figura 5.16 – inserindo fórmula nas células I11 e J11

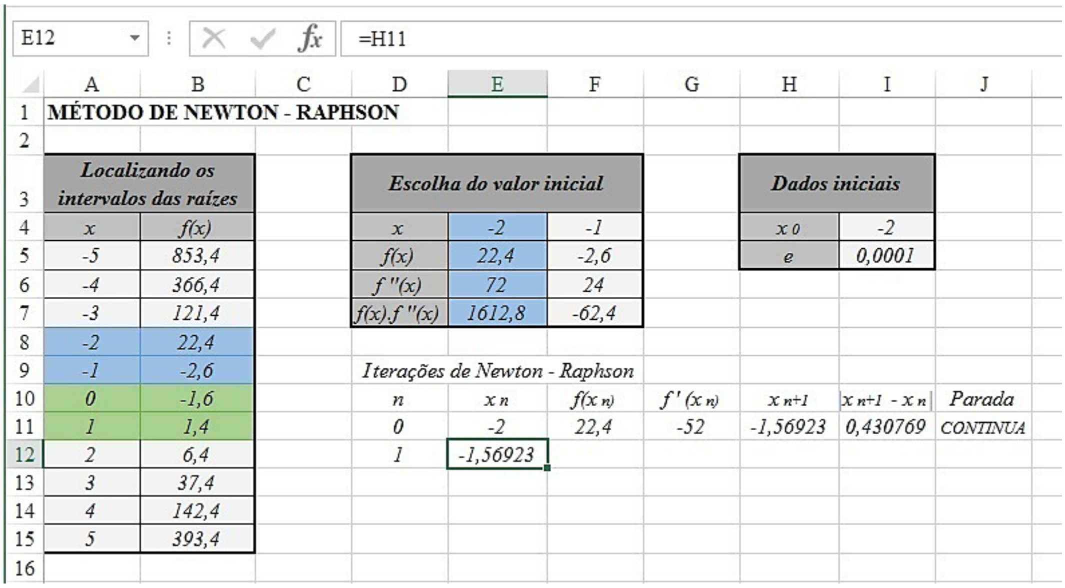


Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 11: Na linha 12 inserimos a iteração 1 na célula D12 e na célula E12 inserimos o x_1 calculado na célula H11, use a fórmula (=H11);

Passo 12: Selecione a linha 11 da célula F11 até J11, depois arraste verticalmente pela alça de preenchimento até a célula J12 preenchendo assim a linha 12. Depois, formate a tabela.

Figura 5.17 – Visualização da linha 11 e inserido fórmula em E12

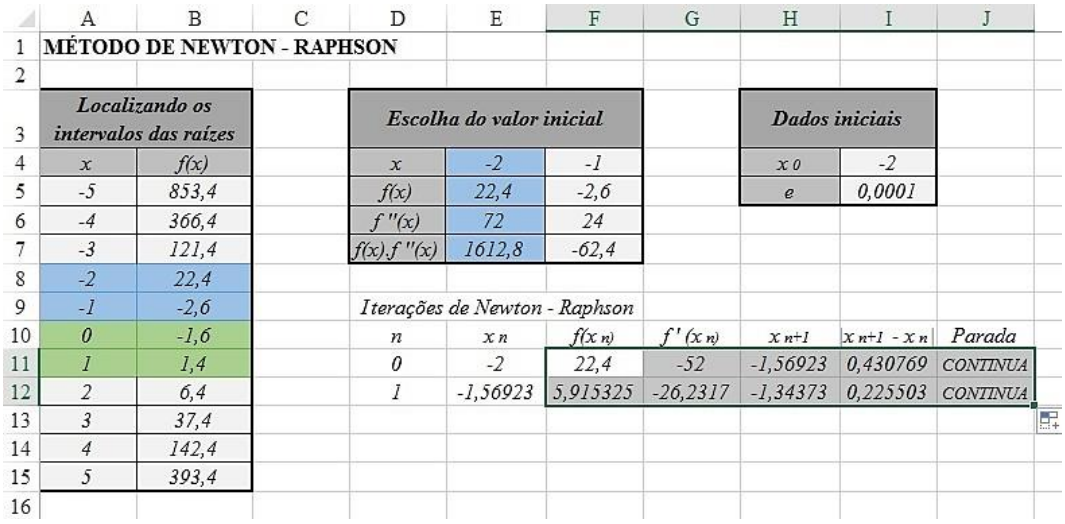


E12 | f_x | =H11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON**									
2										
3	*Localizando os intervalos das raízes*			*Escolha do valor inicial*				*Dados iniciais*		
4	x	$f(x)$		x	-2	-1		x_0	-2	
5	-5	853,4		$f(x)$	22,4	-2,6		e	0,0001	
6	-4	366,4		$f''(x)$	72	24				
7	-3	121,4		$f(x).f''(x)$	1612,8	-62,4				
8	-2	22,4								
9	-1	-2,6		*Iterações de Newton - Raphson*						
10	0	-1,6		n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$\|x_{n+1} - x_n\|$	Parada
11	1	1,4		0	-2	22,4	-52	-1,56923	0,430769	CONTINUA
12	2	6,4		1	-1,56923					
13	3	37,4								
14	4	142,4								
15	5	393,4								
16										

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5.18 – Preenchendo a linha 12



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON**									
2										
3	*Localizando os intervalos das raízes*			*Escolha do valor inicial*				*Dados iniciais*		
4	x	$f(x)$		x	-2	-1		x_0	-2	
5	-5	853,4		$f(x)$	22,4	-2,6		e	0,0001	
6	-4	366,4		$f''(x)$	72	24				
7	-3	121,4		$f(x).f''(x)$	1612,8	-62,4				
8	-2	22,4								
9	-1	-2,6		*Iterações de Newton - Raphson*						
10	0	-1,6		n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$\|x_{n+1} - x_n\|$	Parada
11	1	1,4		0	-2	22,4	-52	-1,56923	0,430769	CONTINUA
12	2	6,4		1	-1,56923	5,915325	-26,2317	-1,34373	0,225503	CONTINUA
13	3	37,4								
14	4	142,4								
15	5	393,4								
16										

Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 13: Para encontrar a raiz do problema selecione a linha 12 da célula D12 até a célula J12 e pela alça de preenchimento vai arrastando verticalmente para baixo até que a condição de parada apareça o texto FIM. Destaque a última interação na coluna H que aparece na tabela, pois é a raiz desejada.

Figura 5.19 – Fim do problema

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1					MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON					
2										
3	Localizando os intervalos das raízes			Escolha do valor inicial				Dados iniciais		
4	x	$f(x)$		x	-2	-1		x_0	-2	
5	-5	853,4		$f(x)$	22,4	-2,6		e	0,0001	
6	-4	366,4		$f''(x)$	72	24				
7	-3	121,4		$f(x).f''(x)$	1612,8	-62,4				
8	-2	22,4								
9	-1	-2,6		Iterações de Newton - Raphson						
10	0	-1,6		n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$\|x_{n+1} - x_n\|$	Parada
11	1	1,4		0	-2	22,4	-52	-1,56923	0,430769	CONTINUA
12	2	6,4		1	-1,56923	5,915325	-26,2317	-1,34373	0,225503	CONTINUA
13	3	37,4		2	-1,34373	1,137784	-16,5386	-1,27493	0,068796	CONTINUA
14	4	142,4		3	-1,27493	0,087053	-14,0421	-1,26873	0,006199	CONTINUA
15	5	393,4		4	-1,26873	0,000667	-13,8271	-1,26868	4,82E-05	FIM
16										

Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, a raiz real negativa do polinômio $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 1,6$ é $\xi = -1,26868$.

Com as tabelas prontas, o aluno pode interagir trocando alguns valores e verificar o que acontece. Por exemplo: Diminuindo o erro na célula I5 para *0,01* diminui os números de interações.

Se quiser calcular a raiz positiva que se encontra no intervalo $[0,1]$ descartado no início problema, basta trocar os valores das células E4 e F4 por *0* e *1* respectivamente e trocar o valor inicial por *0* ou *1*, tendo em vista que a condição para escolher o melhor valor inicial na 2 ª tabela é 0 (zero) para ambas extremidades. Fazendo as respectivas substituições chegaremos a raiz $\xi = 0,431505$.

5.3 ATIVIDADE 2

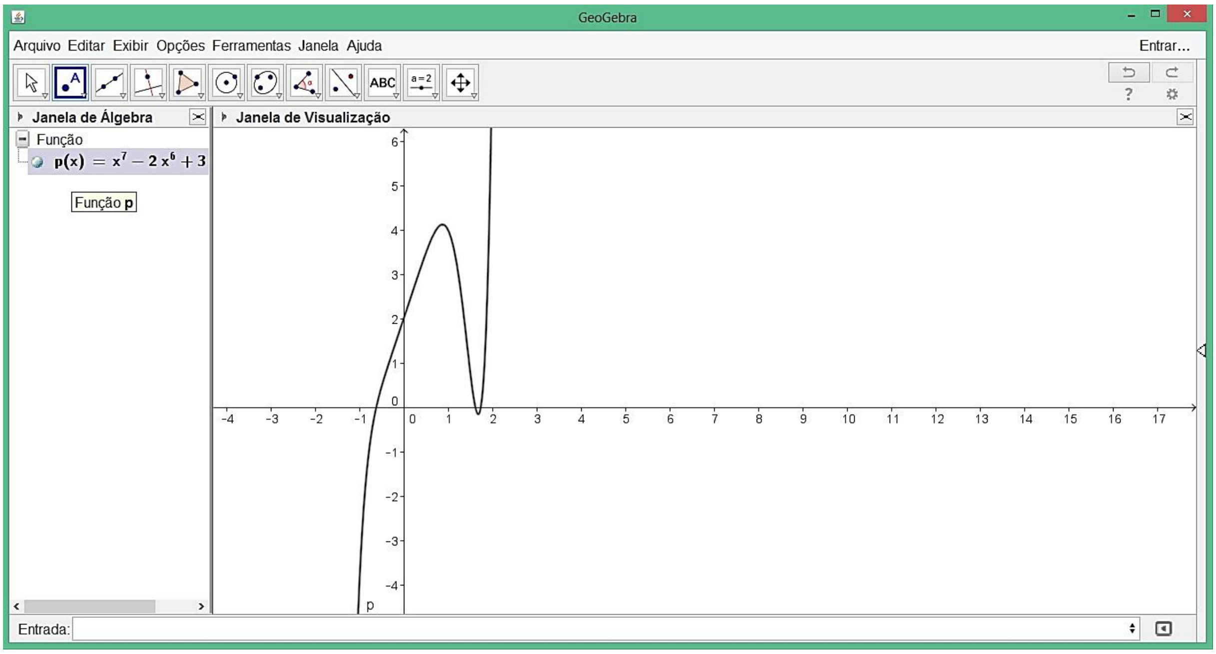
Para esta atividade usaremos o software de Matemática conhecido como GeoGebra. É um software livre criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula e pode ser adquirido pelo site http://www.geogebra.org. Nele podemos acompanhar toda construção geometricamente do Método de Newton – Raphson.

ATIVIDADE 2: Encontre, usando o método de Newton, a raiz negativa do polinômio $x^7 - 2x^6 + 3x + 2 = 0$. Use o erro $e = 10^{-3}$.

Façamos os seguintes passos para atividade 2:

Passo 1: Abra o programa GeoGebra e na barra de entrada, que fica na parte inferior à esquerda, insira a função polinomial $p(x) = x^7 - 2x^6 + 3x + 2$, use o símbolo $(\wedge)$ para representar os expoentes e para a multiplicação não é necessário usar o símbolo $(*)$ como visto na atividade 1 quando usamos o Programa Excel.

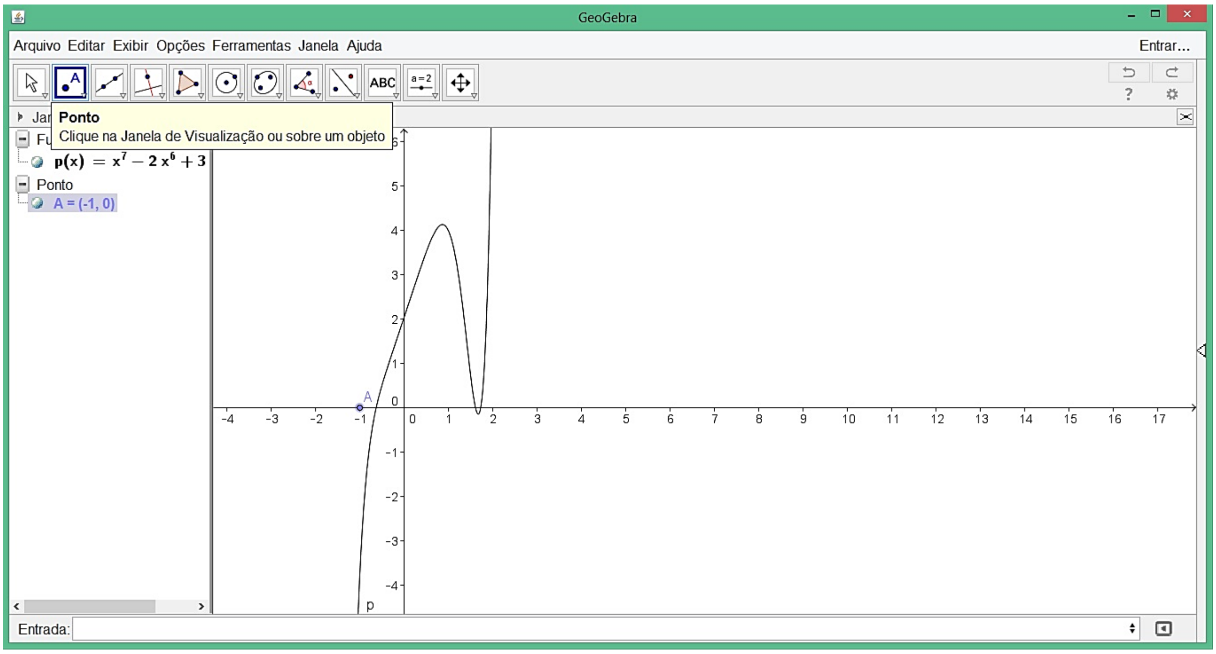
Figura 5.20 – Inserido função polinomial $p(x) = x^7 - 2x^6 + 3x + 2$



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 2: Localize a raiz negativa no gráfico gerado, observando que a mesma fica próxima da abscissa *-1*. Então, insira nessa abscissa um ponto usando o segundo ícone que fica a baixo da barra de ferramenta localizado na parte superior a esquerda. Esse ponto será o valor inicial x_0.

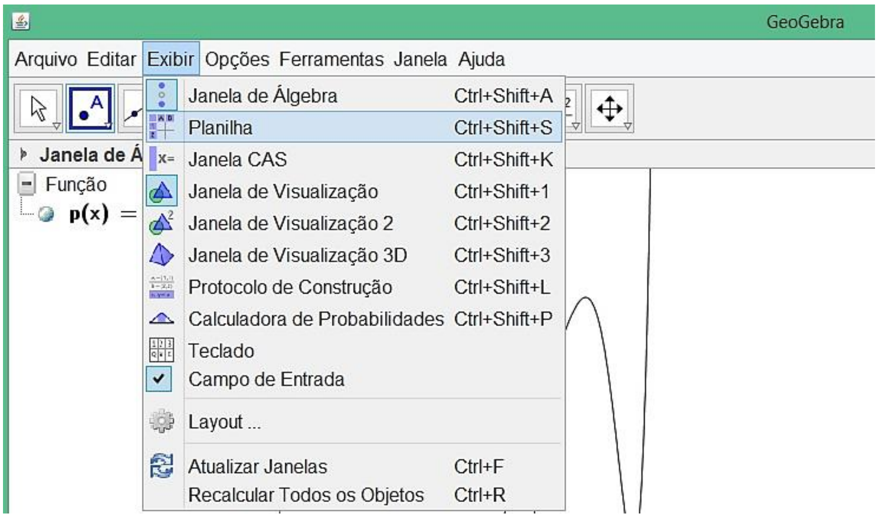
Figura 5.21 – inserido um ponto na abscissa *-1*



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 3: Ative a janela de planilha eletrônica na barra de ferramenta indo em Exibir $\rightarrow$ Planilha

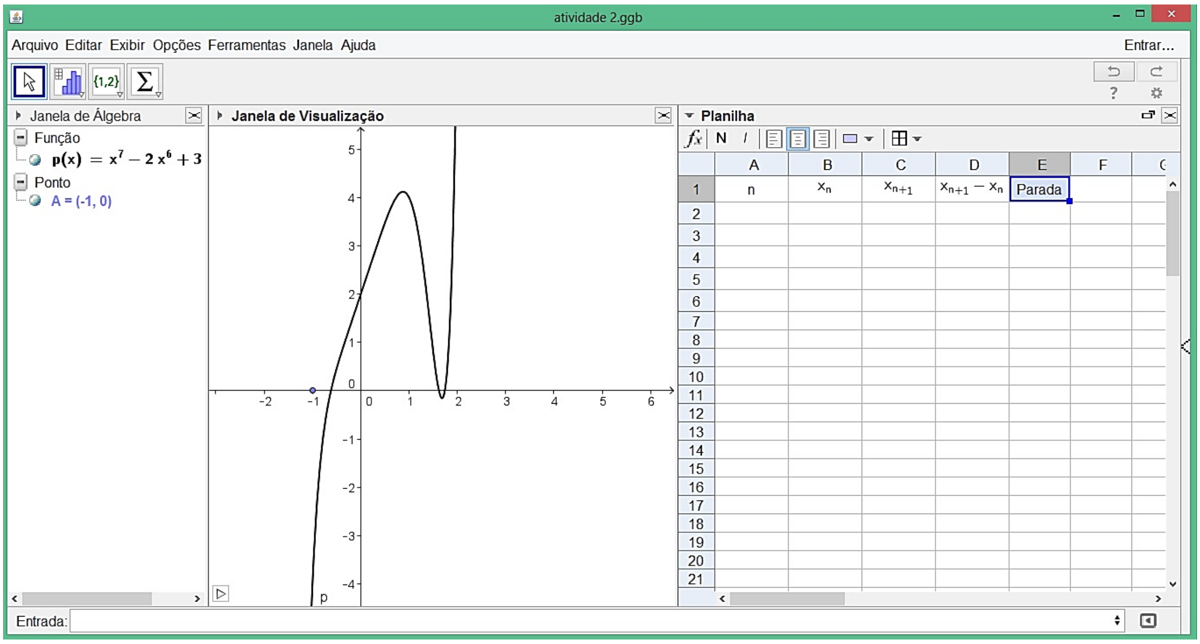
Figura 5.22 – Exibindo planilha eletrônica



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 4: Na linha 1 escreveremos o cabeçalho da tabela de iterações do método de Newton – Raphson, inserido os valores n, x_n, x_{n+1}, $|x_{n+1} - x_n|$ nas respectivas células A1, B1, C1 e D1.

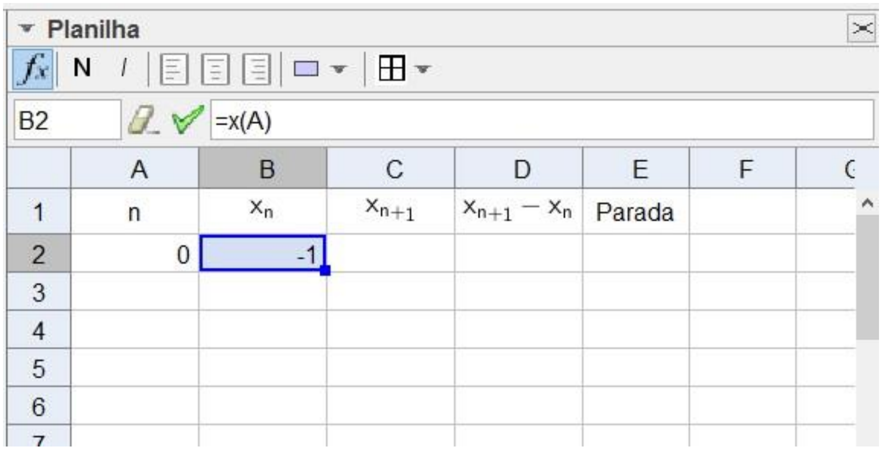
Figura 5.23 – inserido cabeçalho



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 5: Na célula A2 insira o 0 (zero) para começarmos as iterações. Na célula B2 insira o valor inicial que é a abscissa do ponto A $(= x(A))$.

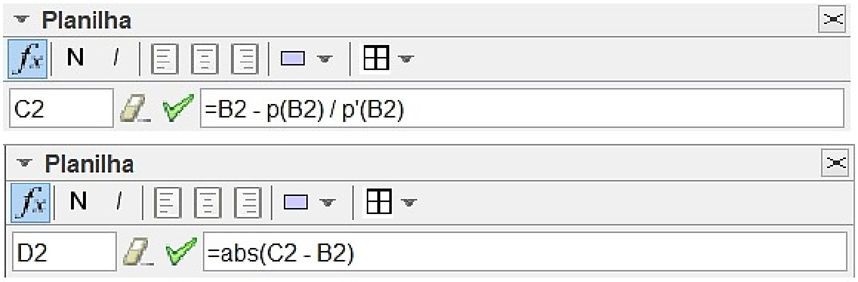
Figura 5.24 – inserido cabeçalho



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 6: Na célula C2 insira a formula de newton Raphson $x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$, iniciando da igualdade e substituindo x_n por C2. Na célula D2 insira a formula do erro inserido o valor absoluto da diferença de $(x_{n+1} - x_n)$, substitua x_{n+1} e x_n pelas células D2 e C2 respectivamente.

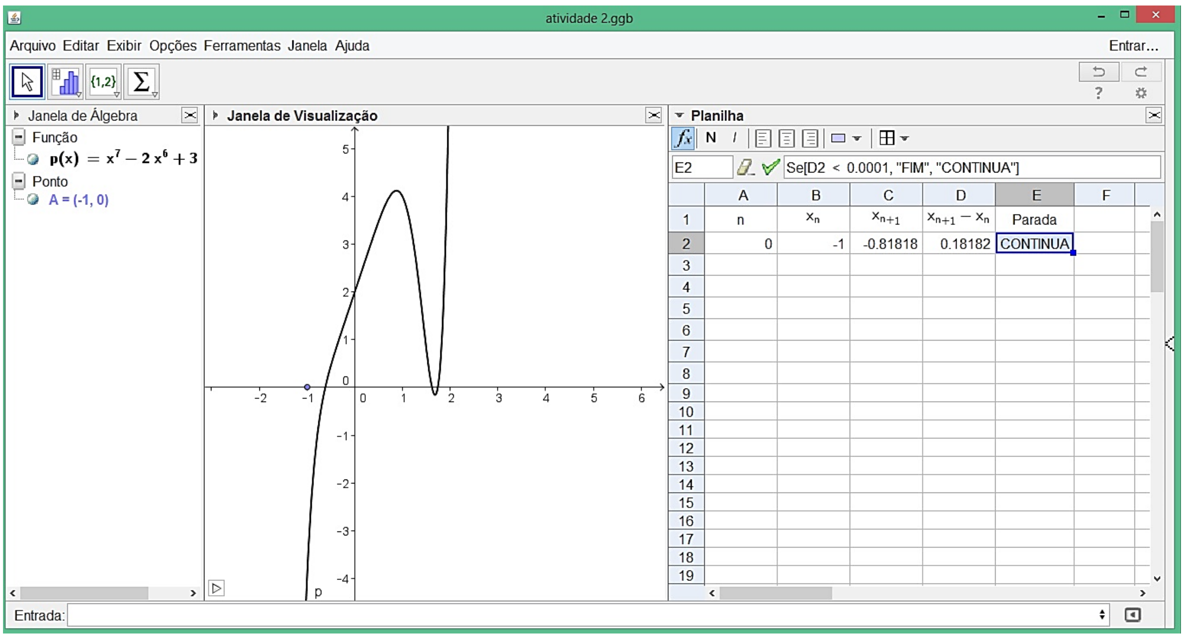
Figura 5.26 – inserido fórmula nas células C2 e D2



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 7: Insira a condição de parada usando o código SE onde o teste lógico é $|x_{n+1} - x_n| < 0.001$, substitua $|x_{n+1} - x_n|$ por D2 e as condições “FIM” para então e “CONTINUA” para senão.

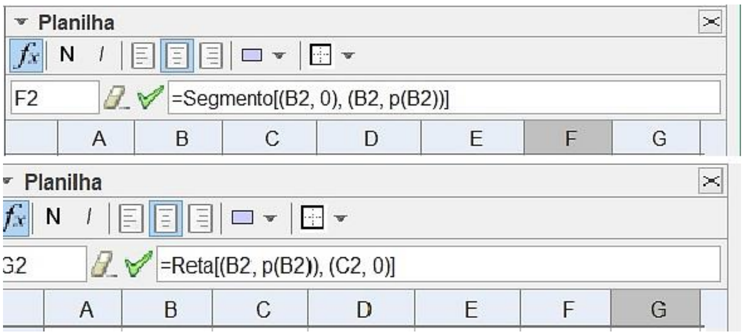
Figura 5.27 – inserido condição de parada



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 8: Insira na célula F2 a fórmula (=Segmento[(B2, 0), (B2, p(B2))]) para representar geometricamente a projeção do ponto $(x_0, p(x_0))$ ao eixo x, e na célula G2 a fórmula (=Reta[(B2, p(B2)), (C2, 0)]) para representar a reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, p(x_0))$;

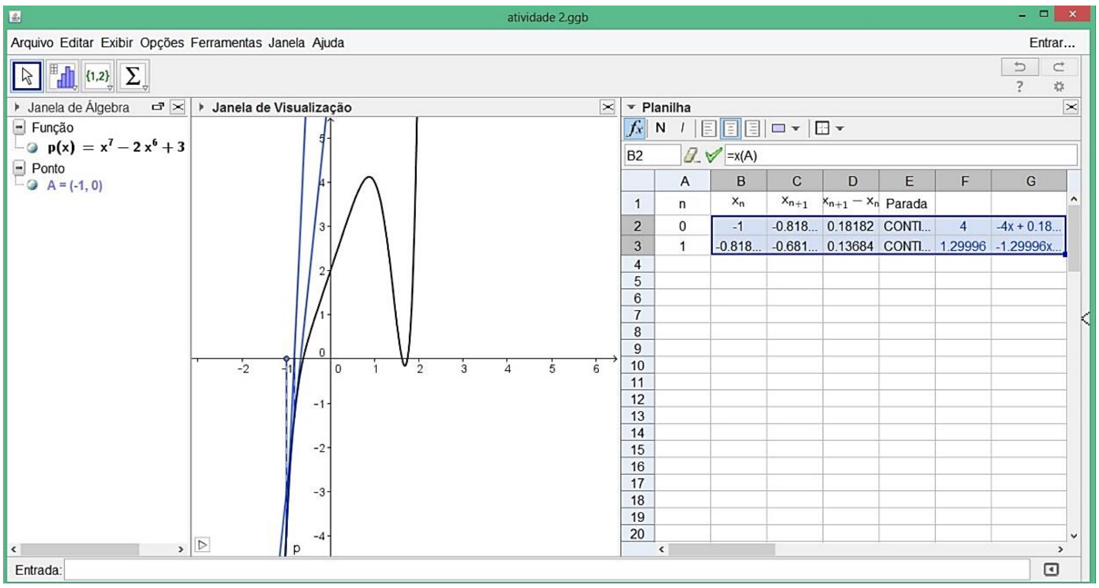
Figura 5.28 – inserido fórmula nas células F2 e G2



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 9: Na linha 3 inserimos a iteração 1 na célula A3 e na célula B3 a fórmula (=C2) que é o valor de x_1 calculado na célula C2. Selecione a linha 2 iniciando em C2 e terminando em G2 e arraste verticalmente para baixo para completar a linha 3;

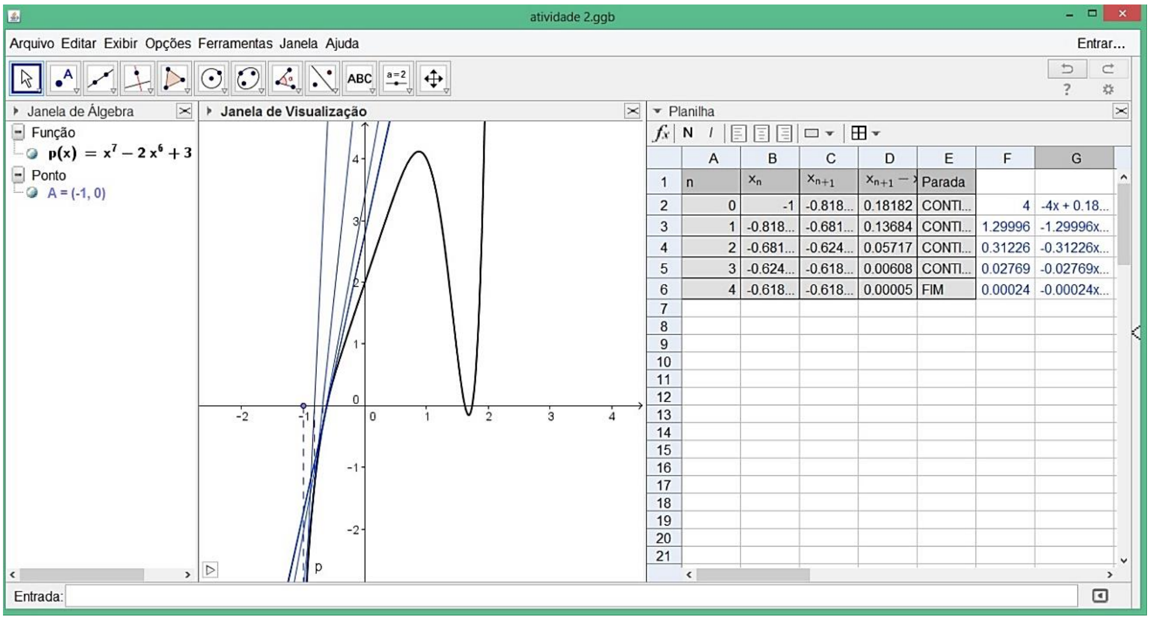
Figura 5.29 – Preenchendo a linha 3



Fonte: Elaborado pelo autor

Passo 10: Na linha 4, insira na célula A4 a próxima iteração *2*. Selecione a linha 3 iniciando de B3 e terminando em G3 e arraste verticalmente para célula G4 e assim sucessivamente até a condição de parada aparecer Fim.

Figura 5.30 – fim do problema



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, a raiz procurada é $\xi = -0,61809$.

Na parte gráfica do programa podemos interagir com ponto A e observa o que acontece se escolher outro valor inicial.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho mostra a eficiência de se utilizar o método de Newton – Raphson no Ensino Médio, tanto pelo aprofundamento teórico quanto pela utilização de recursos tecnológicos. O principal objetivo é fazer com que o aluno interaja com os conteúdos adquiridos por meio de software matemático que possibilita uma visão clara e dinâmica dos conceitos matemáticos, ressaltando a importância da informática no ensino de Matemática, sobretudo, quanto à utilização de softwares, em específico as planilhas eletrônicas, que ajudam no desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade dos alunos, auxiliando assim na qualidade do ensino da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais já apontam para a importância do ensino da Matemática integrada as novas tecnologias de informação e comunicação, principalmente, com o uso dos computadores como instrumento para levar o aluno a testar suas hipóteses e construir seu conhecimento por meio da interação com a máquina.

É relevante também mencionar que o método de Newton – Raphson vem responder um questionamento que os livros didáticos do Ensino médio não respondem, questionamento este que normalmente um aluno tem quando se estuda polinômios, de como encontrar suas raízes reais. Este método é extremamente prático e rápido na obtenção de tal raiz sendo válido ressaltar que a mesma é uma raiz aproximada do que se pretende obter. Para utilização deste método, torna-se necessária e natural a introdução de novos conceitos matemáticos, como limite e derivada, ao estudante do Ensino Médio. Nesse aspecto, encontra-se a maior contribuição desse trabalho pois o caminho torna-se tão enriquecedor quanto o próprio objetivo a ser alcançado.

Por fim, destaca-se que este trabalho fornece ideias, dar sugestões para o trabalho desses assuntos no Ensino Médio, as quais possam servir de inspiração para professores, no momento do planejamento de suas atividades. Espera-se obter resultados dessas iniciativas na melhoria da qualidade do ensino da Matemática no pais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ÁVILA, Geraldo. O Ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática,** n. 18, p. 1-9, Rio de Janeiro, SBM, 1991.

[2] BARTLE, Robert G.; SHERBERT, Donald R. **Introduction to Real Analysis**. 3rd Ed., Copyright. New York, 2000

[3] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. 8ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

[4] CUNHA, M. Cristina. **Métodos Numéricos**. São Paulo: Editora Unicampi, 2003

[5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo: Volume 1**. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[6] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: **Volume 6**. 6ª edição. São Paulo: Atual, 2002.

[7] IEZZI, Gelson; MURAKANI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de matemática elementar**: **Volume 8**. 5ª edição. São Paulo: Atual, 2001.

[8] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio: volume 3**. 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] MACHADO, Inácio de Araújo; ALVES, Ronaldo Ribeiro. Método de Newton. **Revista Eletrônica de Educação da Faculdade Araguaia,** v. 4, n. 4, p. 30-45. Goiânia: Editora Faculdade Araguaia, agosto, 2013. Disponível na internet: <http://www.fara.edu.br/sipe/index.php/renefara/article/view/153/137 >

[10] SODRÉ, Ulysses. **Matemática Básica com Excel.** Londrina-PR: agosto, 2011, 39 p. Disponível na internet: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/matexcel2011.pdf>

[11] VALENTE, José Armando. **O Computador na Sociedade do Conhecimento.** Campinas-SP: Nied, 2002.