UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

JAISON GASPERI

O PROBLEMA DE APOLÔNIO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Florianópolis

2015

JAISON GASPERI

O PROBLEMA DE APOLÔNIO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Licio H. Bezerra

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Gasperi, Jaison
O Problema de Apolônio / Jaison Gasperi ; orientador,
Licio Hernanes Bezerra - Florianópolis, SC, 2015.
208p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Incliu referências

1. Matemática. 2. Geometria Euclidiana, Geometria
Inversiva, Problema de Apolônio, Transformações Geométricas.
I. Hernanes Bezerra, Licio. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

O PROBLEMA DE APOLÔNIO

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre, e aprovada em forma final pelo Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Dr. Licio Hernanes Bezerra
Orientador –MTM/UFSC

Dr. Danilo Royer
Membro interno– MTM/UFSC

Dr. Luciano Bedin
Membro interno - MTM/UFSC

Dr. Gilson Braviano
Membro externo - EGR/UFSC

À minha esposa e a meu filho, razões do meu viver.

AGRADECIMENTOS

Ao meu professor orientador Licio H. Bezerra, de quem fui aluno na graduação, que me orientou em meu trabalho de conclusão de curso e que agora me ajudou muito a concluir esta dissertação, com competência pedagógica e muita paciência com meus erros. Foi um orientador sempre disponível e participativo, desde a escolha do tema deste trabalho, estimulando-me e corrigindo-me.

Ao meu amigo, parceiro de mestrado, João Carlos B. Batti, que me ajudou muito durante o curso com sua percepção aguçada e colaborou na compreensão da resolução de alguns problemas deste trabalho.

À minha esposa Francielle, sempre paciente e dedicada, e ao meu filho João Pedro, que conviveram com meu estresse, vendo-me despender horas a frente do computador para escrever este trabalho, e que sofreram com minhas ausências nos sábados, quando cursava disciplinas do curso.

À CAPES, pelo incentivo financeiro; à Universidade Federal de Santa Catarina, pelo acolhimento; e aos professores das disciplinas ministradas, pelo conhecimento compartilhado, tão necessário para a nossa formação acadêmica.

RESUMO

Um dos mais famosos problemas da geometria clássica é o Problema de Apolônio. Historicamente, esse problema contribuiu para o desenvolvimento de várias técnicas de construções geométricas. Este trabalho apresenta o contexto histórico do problema, a contribuição do problema no desenvolvimento da Geometria Euclidiana e detalha todos os procedimentos das construções geométricas com régua e compasso, em cada situação específica do problema que envolve os objetos do Problema de Apolônio: ponto, reta e circunferência. Para isso, utilizaremos aplicações elementares tanto da geometria clássica como da inversiva.

Palavras chaves: Geometria Euclidiana. Geometria Inversiva. Problema de Apolônio. Transformações Geométricas.

ABSTRACT

One of the most famous problems of classical geometry is the Apollonius' problem. Historically it has contributed to the development of various techniques of geometric constructions. This work brings the historical background of the problem, the contribution of the problem in the development of Euclidean geometry and shows all the procedures of geometric constructions with ruler and compass, in each specific situation of the problem which may involve the objects of Apollonius' problem: point, line and circle. For this end, we utilize elementary applications of both classical and inversive geometry.

Keywords: Euclidean Geometry. Inversive Geometry. Problem of Apollonius. Geometric Transformations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apolônio de Perga, matemático e astrônomo, chamado de “Grande Geômetra” pelos seus contemporâneos, nasceu em Perga no ano de 262 a.C. e morreu em 194 a.C., aos 72 anos de idade. Seções Cônicas foi um de seus trabalhos mais famosos, escrito em oito livros, que solidificou a fama de Apolônio. Apolônio chegou a escrever várias outras obras, mas a maioria somente se conhece por seus títulos, que foram citados por outros matemáticos ou historiadores. Na Renascença, as obras originais de Apolônio, sejam em grego ou em latim, eram praticamente inexistentes no ocidente. Restavam então apenas cópias traduzidas do árabe, de pouquíssimas delas. Por outro lado, matemáticos renascentistas empenharam-se na restauração ou na reconstrução de trabalhos gregos perdidos, baseando-se, para isso, em transcrições de trabalhos, ou de seus fragmentos, manuscritos por escritores do período clássico ou pós-clássico.

Um rico repertório de métodos geométricos e algébricos tem sido criado para resolver o Problema de Apolônio original, do círculo tangente a três círculos dados, que Apolônio propôs e resolveu no trabalho $E\pi\alpha\varphi\alpha\acute{\iota}$ (“Tangências”). A abordagem original de Apolônio se perdeu, mas quatro séculos depois Pappus de Alexandria retomou o problema. Mais reconstruções foram oferecidas por François Viète (1540-1603) e outros estudiosos, baseando-se em vestígios das descrições de Pappus.

O primeiro novo método de solução foi publicado em 1596, por Adrian Van Roomem (1561-1615), amigo de Viète, que identificou os centros dos círculos da solução como intersecção de pontos de duas hipérboles. O método de Van Roomem foi refinado em 1687 por Isaac Newton (1642-1727) e por John Casey (1820-1891) em 1881.

A Geometria Analítica (1637) trouxe novas ferramentas para solucionar o Problema de Apolônio. Descartes (1596-1650) apresentou duas soluções semelhantes, complicadas o suficiente para ainda mantê-lo interessado no problema. Princesa Elizabeth (1596-1662), esposa do rei da Bohemia, comunicou uma solução para Descartes, com quem mantinha contato por cartas, mas não obteve solução melhor que a do próprio Descartes. O insucesso de Descartes não desmotivou outros estudos, pois duas soluções foram apresentadas na Academia de São Petersburgo em 1788: uma por Leonardo Euler (1707-1783) e outra por Nicolas Fuss (1755-1826). O último quarto do século dezoito viu o ressurgimento da Geometria pura, iniciada por Gaspard Monge (1746-1818), o fundador da Geometria Descritiva. A teoria sobre os círculos foi enriquecida por novas e renovadas ideias, como a potência de pontos, o eixo radical entre dois círculos, o círculo ortogonal a três círculos, entre outras. Cada uma destas ideias proporcionou uma tentativa de aplicá-las ao Problema de Apolônio, e na Geometria clássica grega em geral. A Geometria Projetiva, que teve como pai J. V. Poncelet (1788-1867), ofereceu novos métodos de resolução do Problema de Apolônio baseados nas novas teorias.

O Problema de Apolônio estimulou pesquisas de métodos da Geometria pura e proporcionou a utilização de processos analíticos para refinar suas ferramentas. A rivalidade entre os seguidores da Geometria Analítica e os da Geometria pura, até a metade do século dezenove, foi muito acirrada e nem sempre amigável, e o Problema de Apolônio serviu como teste nesta disputa, aumentando o interesse no problema. Renomados matemáticos solucionaram o Problema de Apolônio, como o poeta e matemático Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), resolvendo-o em partes, e que foi completada por C.F. Gauss (1777-1855) e Augustin Cauchy (1789-1857). Soluções diretas do Problema só foram alcançadas em 1816 por J.D. Gergonne (1771-1859), de forma Analítica, e, logo após, por Poncelet, baseado na concepção de Geometria pura, ambos admirados pela crítica. Um quarto de século depois, Maurice Fouché (1759-1820) resolveu-o de forma direta, usando círculos isogonais, abrangendo também casos especiais, nos quais os círculos são substituídos por pontos ou retas. A teoria da inversão, desenvolvida durante a primeira metade do século dezenove, foi utilizada por Julius Petersen (1839-1910) para produzir uma elegante solução do Problema original de Apolônio. O Problema de Apolônio atualmente é enunciado de forma mais abrangente: **"Dados três objetos do plano, cada um dos quais é um ponto, uma reta ou uma circunferência, construir todas as circunferências (ou retas, pensando-as como casos degenerados) tangentes aos três objetos simultaneamente".**

O problema não especifica a localização dos pontos, retas ou circunferências. Arranjos especiais dos elementos podem mudar o número de soluções ou até nem haver solução. Uma enumeração das soluções, para todas as possibilidades de configurações dos três objetos, foi primeiro esboçada por Robert Franklin Muirhead (1860-1941) em 1896, embora esboços de outros trabalhos nesse sentido já existiam anteriormente, feitos por Stoll V. e Study E.. Contudo, o trabalho de Muirhead era incompleto, sendo ampliado em 1974 por James Martin Fitzgerald (1920-2011). Em 1983, finalmente, 33 casos distintos foram estabelecidos e publicados por A. Bruen, J.C. Fisher e J.B. Wilker. São dez variações dos três objetos no Problema de Apolônio:

1. **(PPP)** Os objetos são três pontos;
2. **(PPR)** Os objetos são dois pontos e uma reta;
3. **(PPC)** Os objetos são dois pontos e uma circunferência;
4. **(PRC)** Os objetos são um ponto, uma reta e uma circunferência;
5. **(PRR)** Os objetos são um ponto e duas retas;
6. **(PCC)** Os objetos são um ponto e duas circunferências;
7. **(RRR)** Os objetos são três retas;
8. **(RRC)** Os objetos são duas retas e uma circunferência;
9. **(RCC)** Os objetos são uma reta e duas circunferências;
10. **(CCC)** Os objetos são três circunferências.

Os casos de posicionamento desses objetos geométricos serão discutidos no capítulo 2, de acordo com as representações citadas acima. No capítulo 1, apresentaremos resultados básicos de Geometria Euclidiana Plana, incluindo Geometria Inversiva. Além disso, incluímos nesse capítulo construções geométricas básicas, que serão utilizadas no capítulo 2 para a apresentação de soluções dos dez casos do Problema de Apolônio. Todas as construções geométricas foram feitas utilizando-se o GeoGebra, que é um *software* de geometria dinâmica, de código aberto, disponível gratuitamente para usuários não comerciais [2].

CAPÍTULO 1- RESULTADOS PRELIMINARES DE GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Neste capítulo, apresentamos resultados básicos de Geometria Euclidiana Plana, baseados na descrição feita por Greenberg em [1]. Começaremos com algumas definições, apenas para estabelecer a notação que será usada em todo o nosso trabalho. Vamos supor que as outras definições são conhecidas pelo leitor. Observemos que na descrição da Geometria Euclidiana plana dada por Greenberg, ser congruente é um conceito primitivo, ângulos congruentes, lados congruentes, ou triângulos congruentes, isto é, não são definíveis e são conceitos que são regulados por axiomas. Neste trabalho, usaremos a notação $\cong$ para congruência. Outros conceitos indefiníveis considerados pelo autor são: ponto, reta, "pertencer a" e "estar entre".

Definição 1. Dados dois pontos A e B de uma reta $\overleftrightarrow{AB}$, denomina-se segmento de reta $\overline{AB}$ a todos os pontos de $\overleftrightarrow{AB}$entre A e B. A e B são chamados de extremos do segmento.

Notação: AB será o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

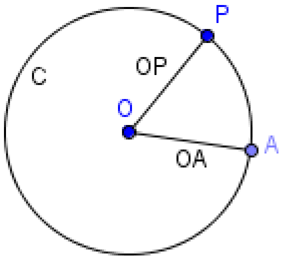
Segmento $\overline{AB}$

Reta $\overleftrightarrow{AB}$

Definição 2. A semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o subconjunto de pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que contém o segmento $\overline{AB}$, além de todos os pontos C tais que o ponto B está entre A e C.

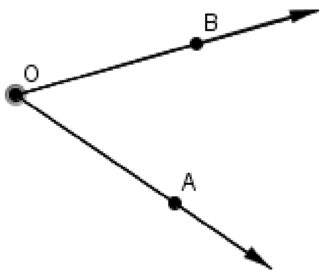
Notação: Semirreta $\overrightarrow{AB}$

Definição 3. Dados dois pontos O e A, o conjunto de todos os pontos P tais que $\overline{OP} \cong \overline{OA}$ é chamado de circunferência de centro O. Cada um dos segmentos $\overline{OP}$ será chamado de raio da circunferência. Portanto $OA = OP$.



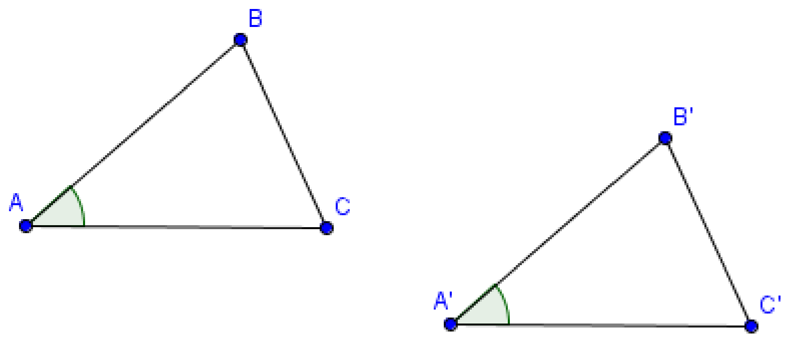
Definição 4. Um "ângulo com vértice O" é um ponto O em conjunto com duas semirretas, não opostas, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ (chamamos de lados do ângulo) com origem em O.

Notação: ângulo $A\hat{O}B$.



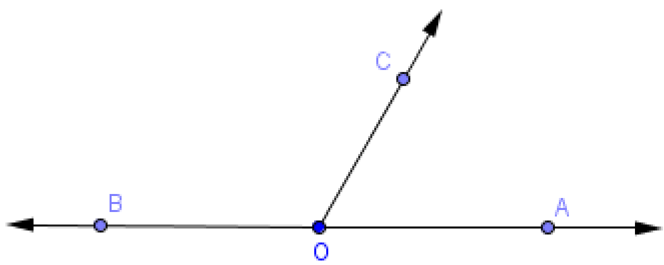
Definição 5. Dados três pontos não colineares (esta definição deixamos para o leitor) A, B e C, o triângulo definido por esses pontos, denotado por ΔABC, consiste dos segmentos AB, BC e AC, ditos seus lados. Os pontos mencionados são chamados de vértices do triângulo.

Greenberg apresenta a seguinte sentença como sendo o Axioma de Congruência 6: se dois lados de um triângulo e o ângulo interno formado por eles forem congruentes, respectivamente, aos lados e ângulo de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

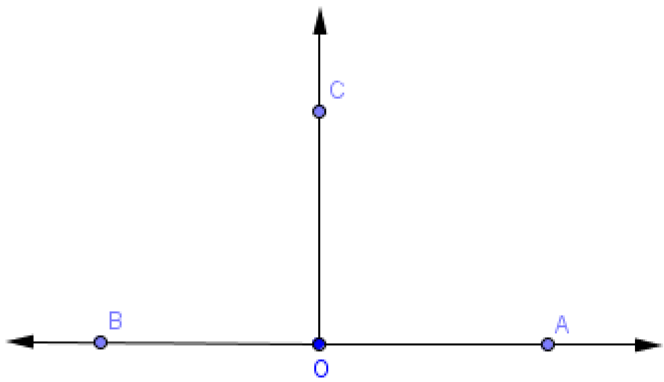


Notação: indicaremos que os dois triângulos são congruentes por: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Definição 6. Dois ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são suplementares, se tem um lado em comum $\overrightarrow{OC}$ e os outros dois lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas. Nesse caso, dizemos que tanto o primeiro ângulo é o suplemento do segundo, como o segundo ângulo é o suplemento do primeiro.



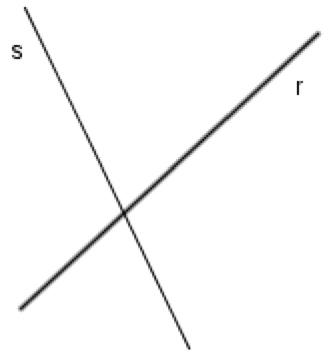
Definição 7. Um ângulo $A\hat{O}C$ é um ângulo reto, se $A\hat{O}C$e o seu suplemento forem congruentes.

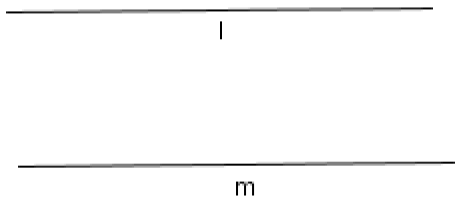


1.1 POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Definição 8. Duas retas l e m são paralelas se elas não se cruzam, ou seja, não há um ponto que pertencem a ambas. Notação: $l \parallel m$.

Obs. Se duas retas não são paralelas, elas são chamadas de concorrentes.





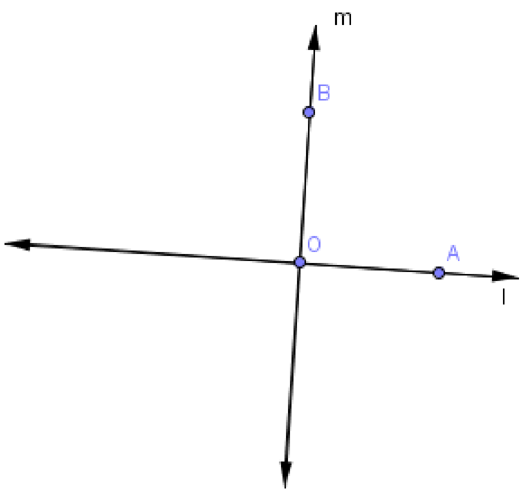
$r\ e\ s$ são concorrentes $m\ e\ l$ são paralelas.

Definição 9. Duas retas $m\ e\ l$ são perpendiculares quando satisfazem as seguintes condições:

i. elas são concorrentes em um ponto O;

ii. há uma semirreta $\overrightarrow{OA}$ que faz parte de l e uma semirreta $\overrightarrow{OB}$ que faz parte de m, tal que o ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo reto.

Notação: $m \perp l$.

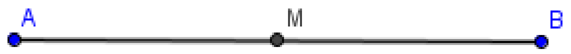


Definição 10. Um ponto M é ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, se:

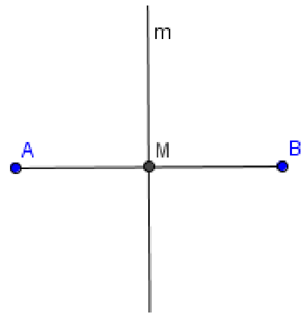
i. M é um ponto que pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$;

ii. M está entre A e B;

iii. O segmento $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{MB}$.



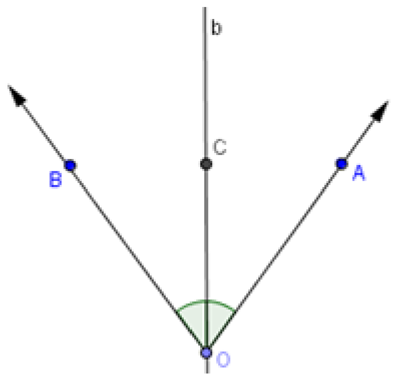
Definição 11. A Mediatriz do segmento $\overline{AB}$é a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$.



Obs.

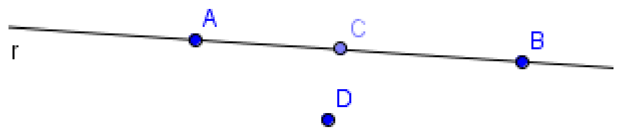
1) O ponto M é o ponto médio de $\overline{AB}$;
2) A reta m é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Definição 12. A Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ é a reta que contém $\overline{OC}$, com C entre A e B, tal que $A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$.



Obs. A reta b é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

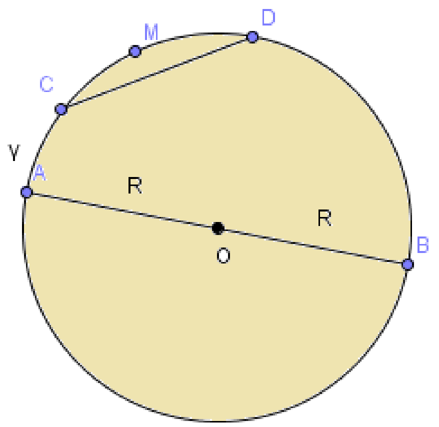
1.2 POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E RETA



1. A, B e C são colineares, pois pertencem à reta r.
2. A, B e D não são colineares, pois A e B pertencem à reta r, mas D não.

1.3 ELEMENTOS DE UM CÍRCULO

Seja o círculo de centro O da figura.



Temos:

$\overline{AO}$- raio

$\overline{AB}$- diâmetro

$\overline{CD}$- corda

$\widehat{CMD}$– arco

Obs. Sendo Ra medida do raio, temos: $AO = R \ e \ AB = 2R$.

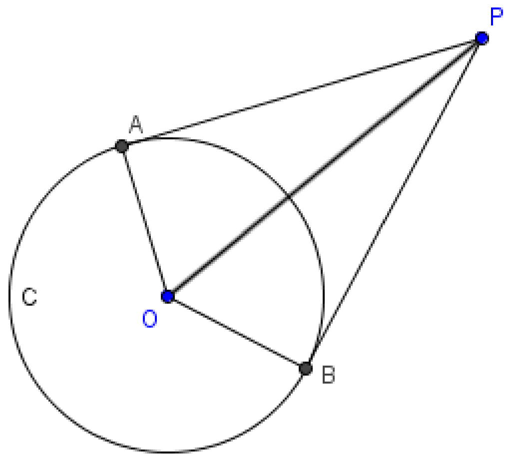
Proposição 1. Seja C um círculo de centro O e P um ponto exterior ao mesmo. Se A, B ∈ C são tais que $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes a C, então:

a) $PA = PB$.

b) $\overleftrightarrow{PO}$ é a mediatriz de AB.

c) $\overleftrightarrow{PO}$ é a bissetriz dos ângulos $A\hat{O}B \; e \; A\hat{P}B$.

d) $\overleftrightarrow{PO} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

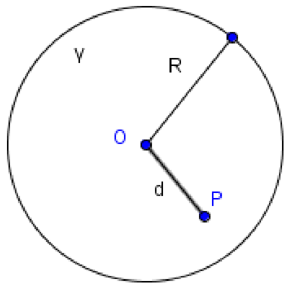


A demonstração encontra-se, por exemplo, em [3].

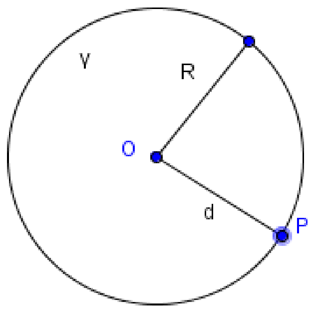
1.4 POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Seja um ponto P, uma circunferência γ de centro em O e raio R, e d a distância do centro O ao ponto P. A reta e a circunferência podem ocupar entre si uma das três posições:

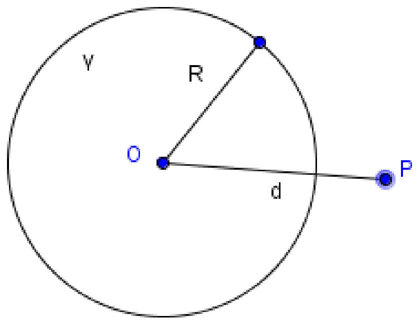
1ª posição: O ponto P é interior circunferência γ, isto é, à distância d < R.



2ª posição: O ponto P pertence circunferência γ, isto é, à distância d = R.



3ª posição: O ponto P é externo à circunferência γ, isto é, à distância d > R.

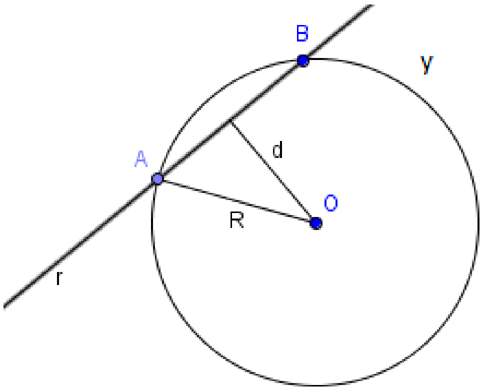


1.5 POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

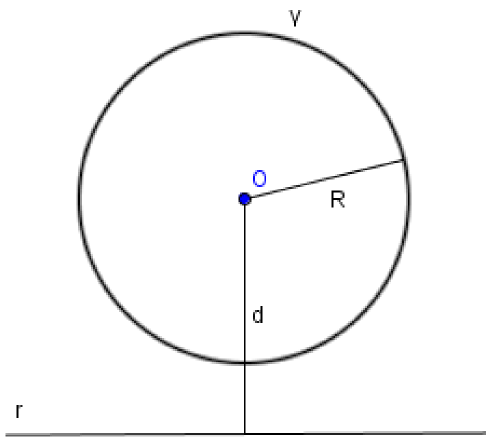
Sejam r uma reta, γ uma circunferência de centro em O e raio R, e d a distância do centro O à reta r. A reta e a circunferência podem ocupar entre si uma das três posições:

1ª posição: A reta r é secante à circunferência γ, isto é, a reta tem dois pontos distintos comuns com a circunferência nos pontos A e B.

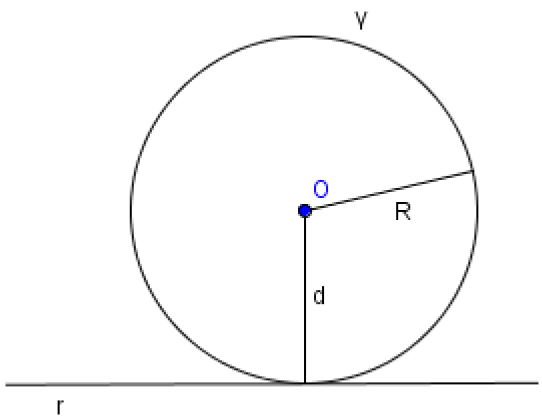
Note que $d < R$ e $r \cap \gamma = \{A, B\}$.



2ª posição: A reta r é exterior à circunferência γ, isto é, r não tem ponto comum com γ. Todos os pontos da reta r são exteriores à circunferência γ.

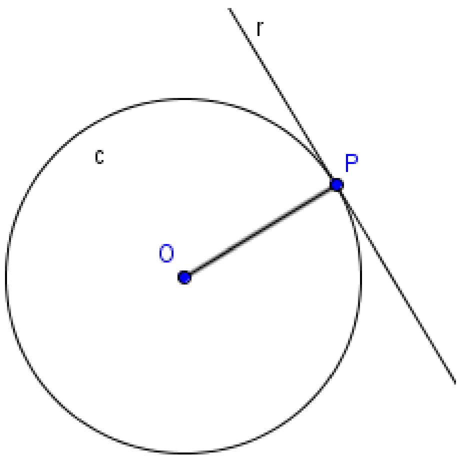


3ª posição: A reta r é tangente à circunferência γ, isto é, a reta tem um só ponto comum com a circunferência, e os outros pontos da reta são exteriores à circunferência. Note que $d = R$ e $r \cap \gamma = \{A\}$.



Proposição 2. Uma reta é tangente a uma circunferência de centro *O* em um ponto *P* se, e somente se, ela for perpendicular a $\overline{OP}$.

A demonstração abaixo está, por exemplo, na referência [4].



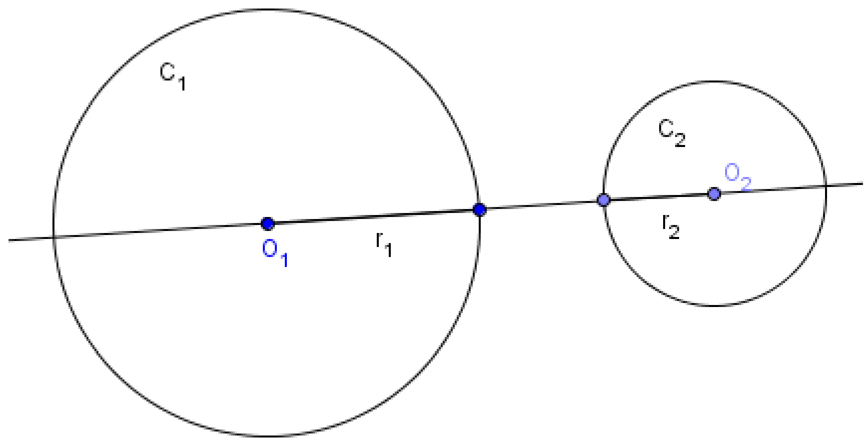
Obs. Note que, por um ponto *P* de uma circunferência, passa uma única reta tangente a essa circunferência.

1.6 POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

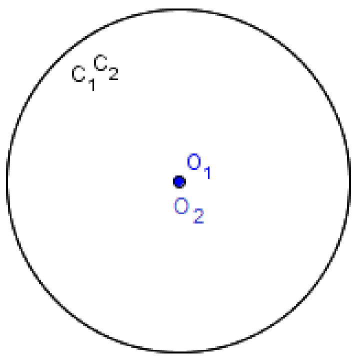
Vejamos agora as posições relativas de duas circunferências.

Sejam então duas circunferências $C_1\ e\ C_2$, de centros $O_1\ e\ O_2$ e raios $r_1\ e\ r_2$, respectivamente.

1ª posição: as circunferências são externas. Isso ocorre quando: $O_1O_2 > r_1 + r_2$.

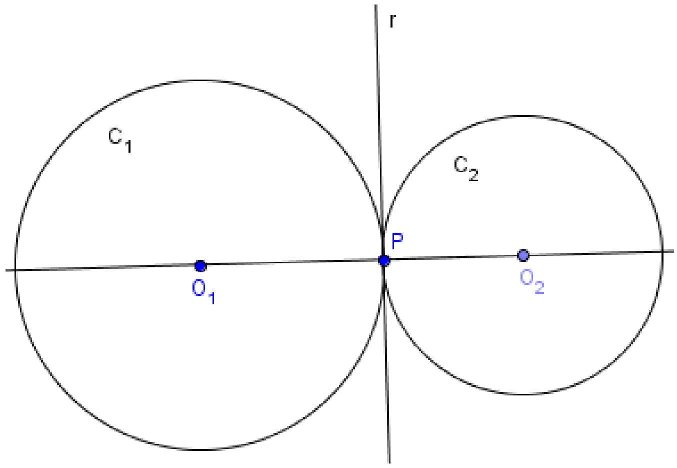


2ª posição: duas circunferências são coincidentes. Ocorre quando:$r_1 = r_2$ e$O_1O_2 = 0$.

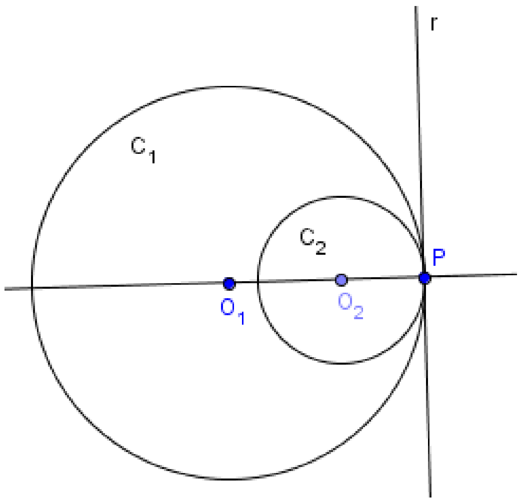


3ª posição: Duas circunferências são ditas tangentes se elas se interceptam em um único ponto. Suponha, sem perda de generalidade, que $r_1 > r_2$.

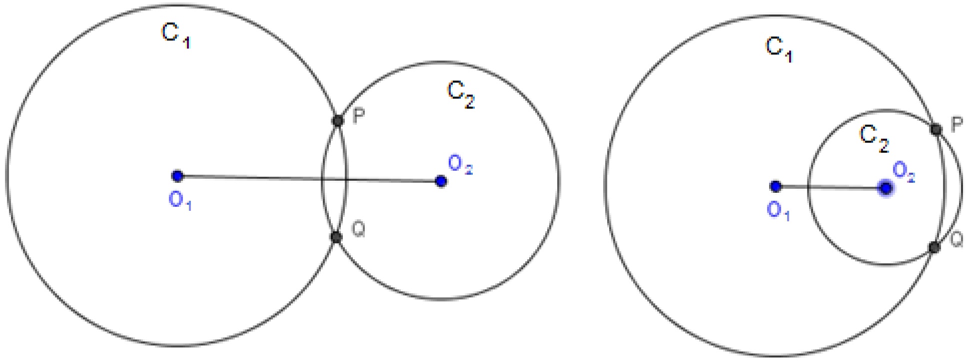
3.1- Tangentes externas. Ocorre quando:$O_1O_2 = r_1 + r_2$



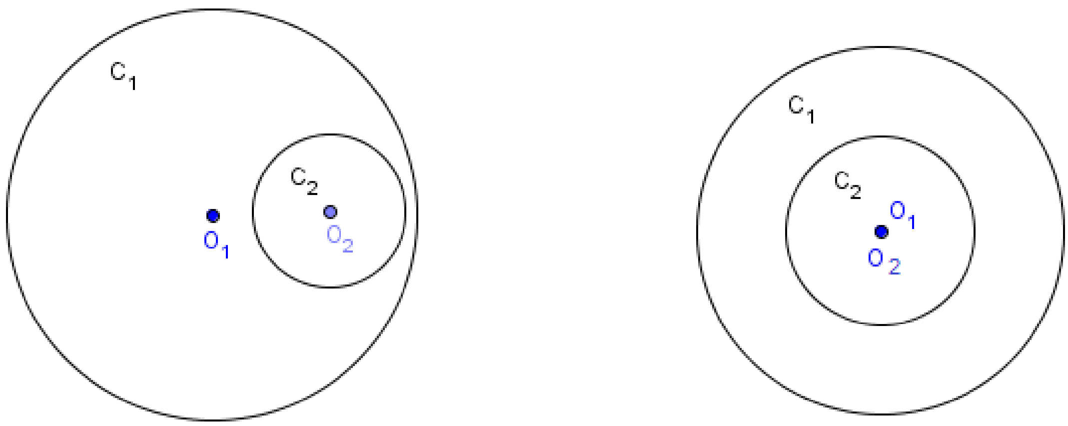
3.2- Tangentes internas. Ocorre quando:$O_1O_2 = r_1 - r_2$.



4ª posição: circunferências secantes. Ocorre quando: $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$.

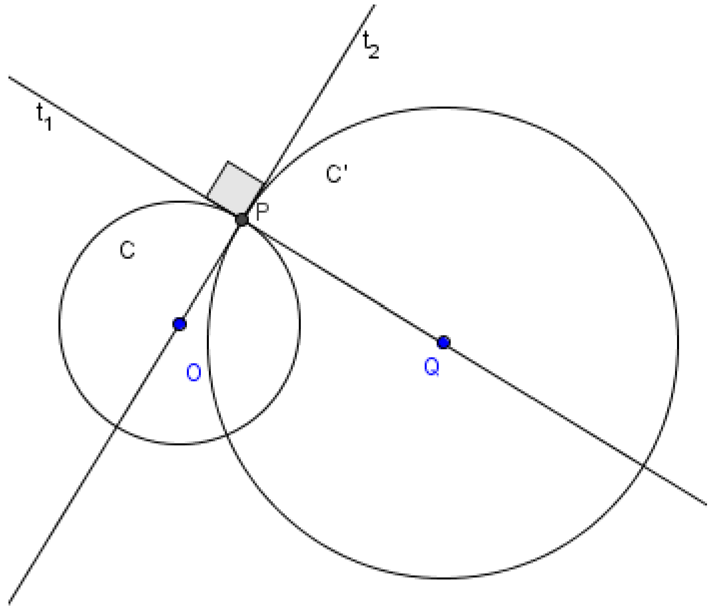


5ª posição: circunferência interior. Ocorre quando:$0 \leq \ O_1O_2 < r_1 - \ r_2$(no caso $r_1 > r_2$). Se os centros coincidirem, dizemos que as circunferências são concêntricas.



Concêntrica

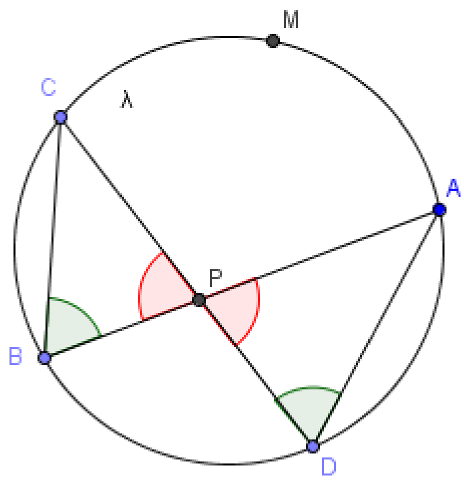
Definição 13. Sejam $C \ e \ C'$ duas circunferências que se interceptam em um ponto P. Se $C \ e \ C'$ possuem tangentes $t_1 \ e \ t_2$, respectivamente, em P, então, dizemos que o ângulo entre $C \ e \ C'$ em P é o ângulo entre $t_1 \ e \ t_2$. Em particular, dizemos que $C \ e \ C'$ são ortogonais em P se $t_1 \ e \ t_2$ são perpendiculares.



1.7 RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

1. Entre cordas:

Dados a circunferência λ, as cordas $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$, pertencentes ao círculo de λ, e P, o ponto de interseção entre as cordas. Vamos mostrar que $PA.PB = PC\ .PD$.



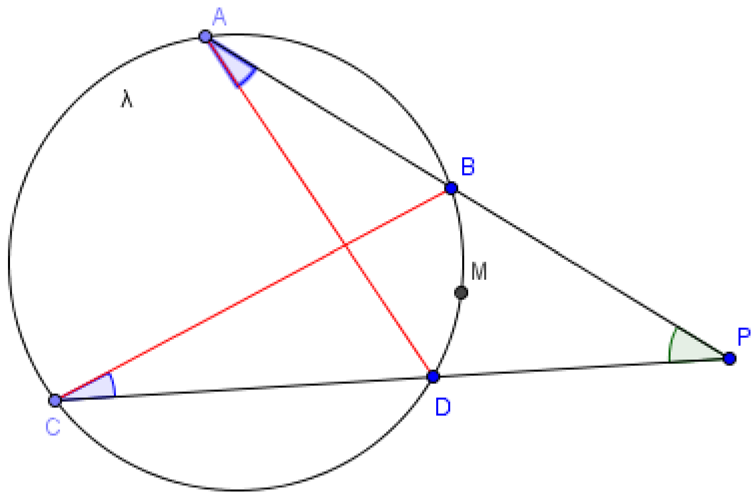
Note que os triângulos $\Delta PDA\ e\ \Delta PBC$ são semelhantes, pelo caso de dois ângulos internos de triângulos serem congruentes:

$$\begin{cases} C\hat{P}B\ \cong\ A\hat{P}D\ são\ opostos\ pelo\ vértice \\ C\hat{B}A \cong \dfrac{\widehat{CMA}}{2} \cong A\hat{D}C \end{cases}$$

Portanto, $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$.

2. Entre segmentos de retas secantes.

Dadas a circunferência λ e as retas secantes$\overleftrightarrow{PA}\, e\, \overleftrightarrow{PC}a\lambda$, vamos mostrar que $PA.PB = PC.PD$.



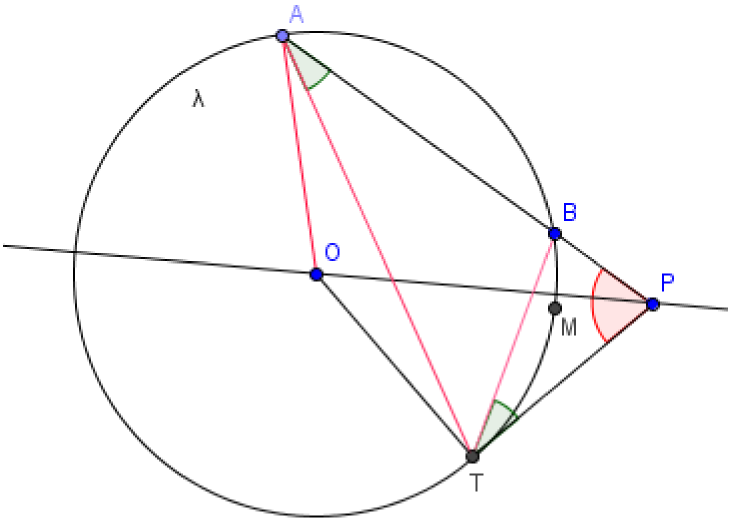
Note que os triângulos $\Delta PDA\ e\ \Delta PBC$ são semelhantes, pelo caso de dois ângulos internos de triângulos serem congruentes:

$$\begin{cases} D\hat{P}B \text{ é } comum\ aos\ dois\ triângulos \\ B\hat{C}P \cong \dfrac{\widehat{BMD}}{2} \cong D\hat{A}P \end{cases}$$

Portanto, $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$.

3. Entre reta secante e reta tangente

Dadas a circunferência λ, a reta secante $\overleftrightarrow{PA}$aλ e a reta tangente $\overleftrightarrow{PT}$ aλ, vamos mostrar que $PA.PB = PT^2$.



Note que os triângulos $\Delta PTA\ e\ \Delta PBT$ são semelhantes, pelo caso de dois ângulos internos de triângulos serem congruentes:

$$\begin{cases} T\hat{P}B \text{ é } comum\ aos\ dois\ triângulos \\ B\hat{T}P \cong \dfrac{\widehat{BMT}}{2} \cong P\hat{A}T \end{cases}$$

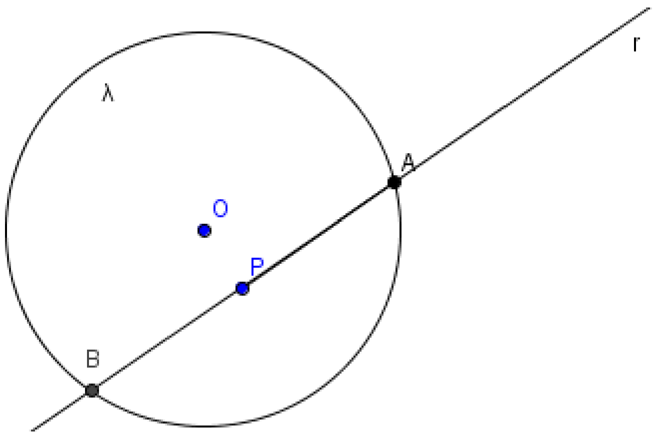
Portanto, $\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA.PB = PT.PT = PT^2$.

1.8 GEOMETRIA INVERSIVA

Para dar início ao estudo da Geometria Inversiva, vamos primeiramente definir a potência de pontos e a homotetia, e suas propriedades, que irão ajudar a entender algumas proposições. Seguiremos, então, definindo o Inverso de um ponto com relação a uma circunferência, o inverso de retas em relação a uma circunferência e de circunferências em relação a uma circunferência, além de outras inversões que independem de conceitos métricos.

1.8.1- Potência de ponto

Definição 14. Seja λ uma circunferência de centro O. Seja r a reta que passa por P e intercepta λ nos pontos A e B. A potência de P em relação à circunferência λ é o produto das medidas dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ (ver 1.7).

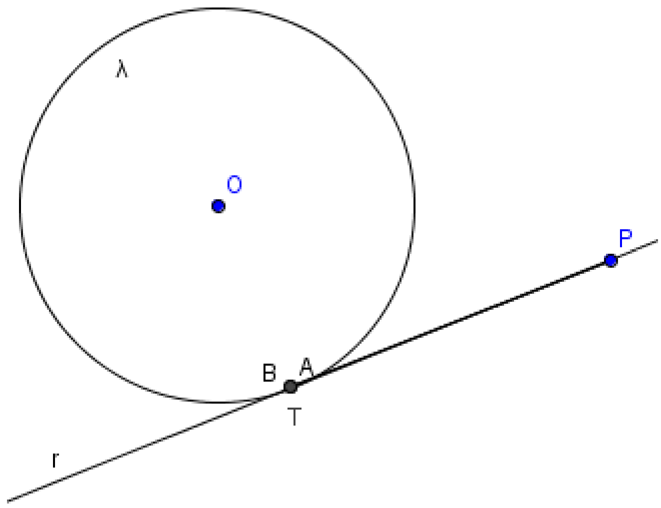


Vejamos algumas observações:

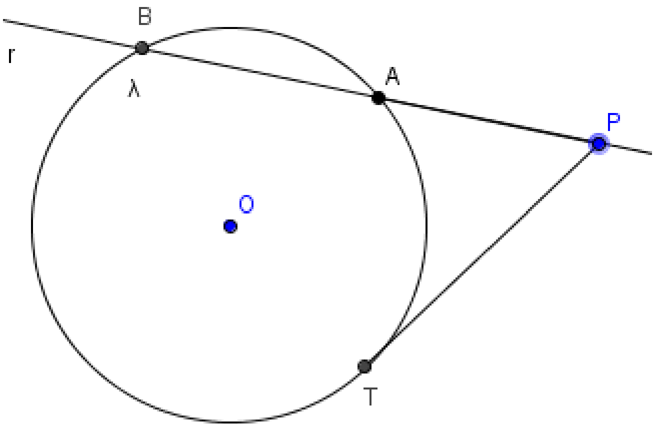
1. A definição independe da reta que corta ou tangencia a circunferência.

2. Se P é um ponto de λ tal que $PB = 0 \; ou \; PA = 0$, a potência é nula.

3. Se P $\notin$ λ e $\overleftrightarrow{PT}$ é tangente a λ tal que $A = B = T$, a potência de P em relação à circunferência λ é $PA.PB = PT.PT = (PT)^2$.

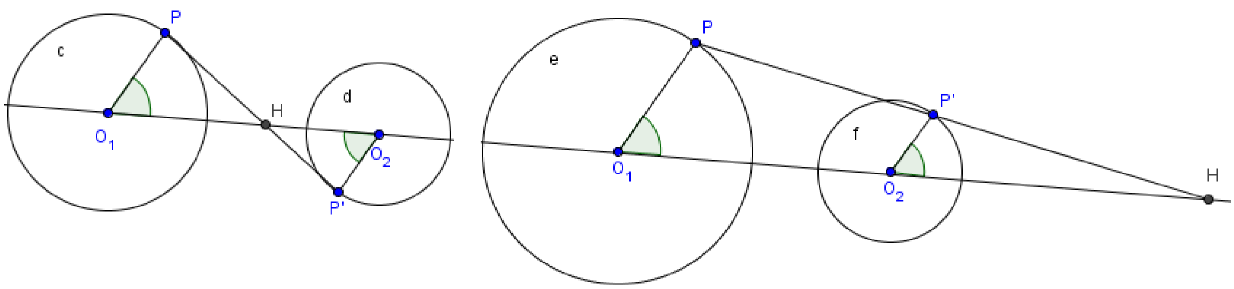


4. Se P for externo a λ temos que a potência do ponto P em relação a λ, pela propriedade da secante, é $PA.PB = (PT)^2$.



1.8.2 - Homotetia

Definição 15. Chama-se de homotetia de centro H e razão $k \neq 0$ a aplicação bijetiva que associa cada ponto P do plano ao ponto P' da reta $\overleftrightarrow{HP}$ tal que $k.HP = HP'$. H é chamado de centro homotético.



Propriedades da homotetia:

Teorema 1. Seja f uma homotetia de centro H e razão $k \neq 0$. Então:

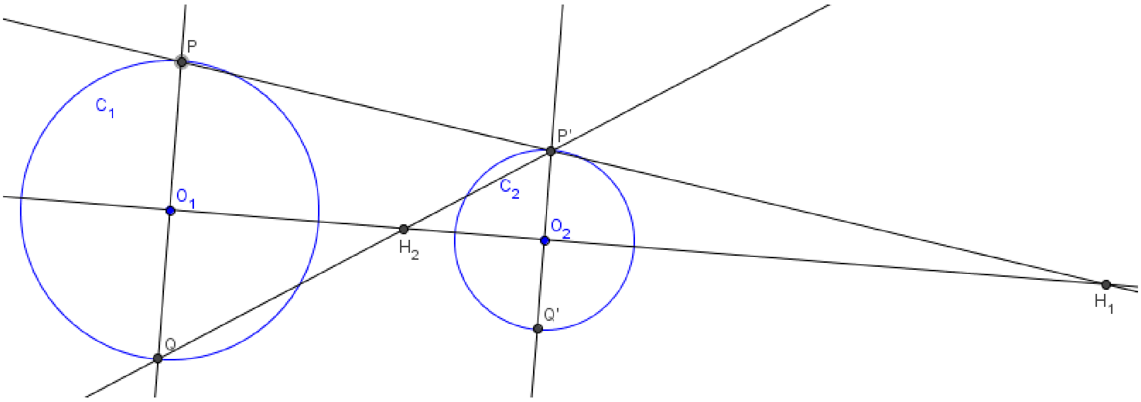
1- A imagem de uma reta é uma reta paralela (ou a reta coincidente que passa por H);

2- A imagem de um segmento de reta é um segmento de reta paralelo. Os extremos de um são enviados aos extremos do outro;

3- A imagem de um triângulo é um triângulo semelhante de lados paralelos;

4- A imagem de uma circunferência de raio r é uma circunferência de raio $|k.r|$ cujo centro é a imagem do centro da primeira.

Demonstração: ver [7].

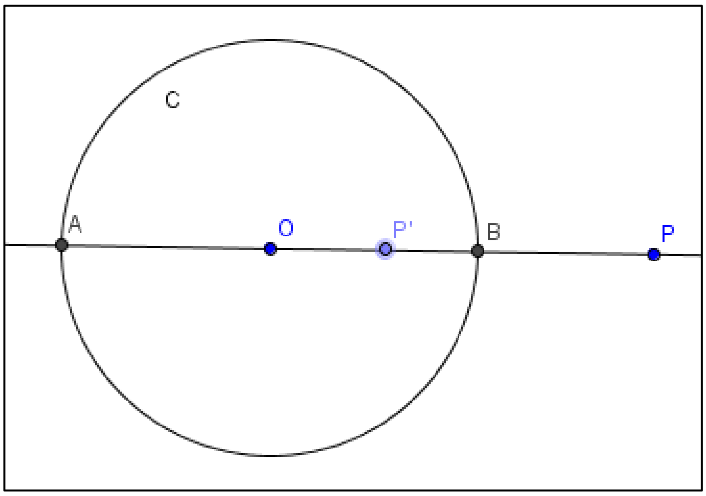


1.8.3- Inverso de ponto em relação a uma circunferência

Definição 16. Dada uma circunferência C de centro O e de raio r, dizemos que o inverso de P≠O em relação a C é o ponto P' sobre a reta $\overleftrightarrow{OP}$ que satisfaz a relação $OP.OP' = r^2$.

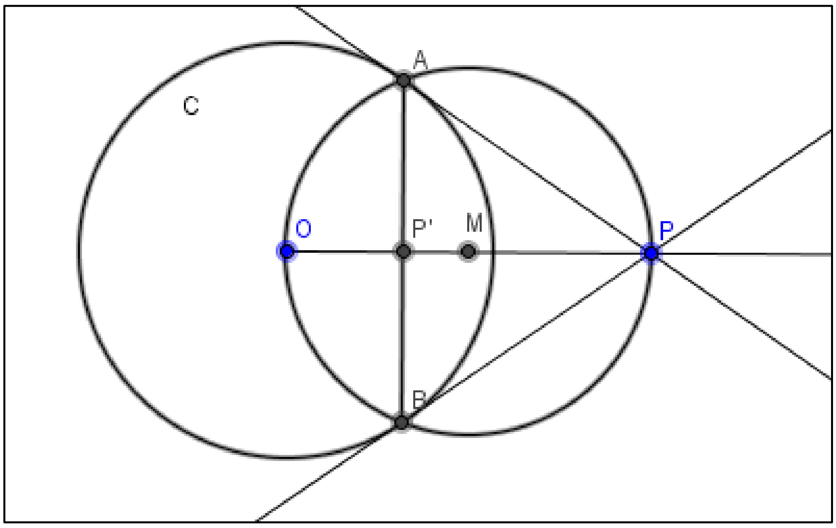
Definição 17. Conjugado Harmônico: Dados três pontos colineares A, B e P, com A≠B, dizemos que P' é o conjugado harmônico de P em relação ao segmento $\overline{AB}$ se $\frac{AP}{BP} = \frac{AP'}{BP'}$.

Proposição 3. Os pontos P e P' são inversos em relação à circunferência C de centro O e raio r se, e somente se, são conjugados harmônicos em relação ao diâmetro AB, determinado pela intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a circunferência C.



Demonstração: ver [6].

Proposição 4. Sejam P e P' inversos em relação à circunferência C de centro O e raio r. Vamos supor que P é exterior a C. Então, existem pontos A e B pertencentes a C tal que $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$ são tangentes a C se, e somente se, P' pertence à corda $\overline{AB}$.



Demonstração:

(⇒) Note que ΔOAP e ΔOBP são retângulos com ângulo reto em A e B respectivamente, pois $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são tangentes à circunferência C. Como P e P' são inversos em relação à circunferência C, então $r^2 = OP.OP' = OA^2 = OB^2$.

Assim, conclui-se que AP’ e BP’ são alturas relativas à hipotenusa OP no ΔOAP e ΔOBP, respectivamente. Como $\overline{AP'}$ e $\overline{BP'}$ são perpendiculares ao mesmo segmento $\overline{OP}$, tem-se que P’ pertence ao segmento $\overline{AB}$.

(⇐) Sejam A e B pontos da circunferência C tal que P’ pertence à corda $\overline{AB}$, com P e P’ inversos em relação a circunferência C.

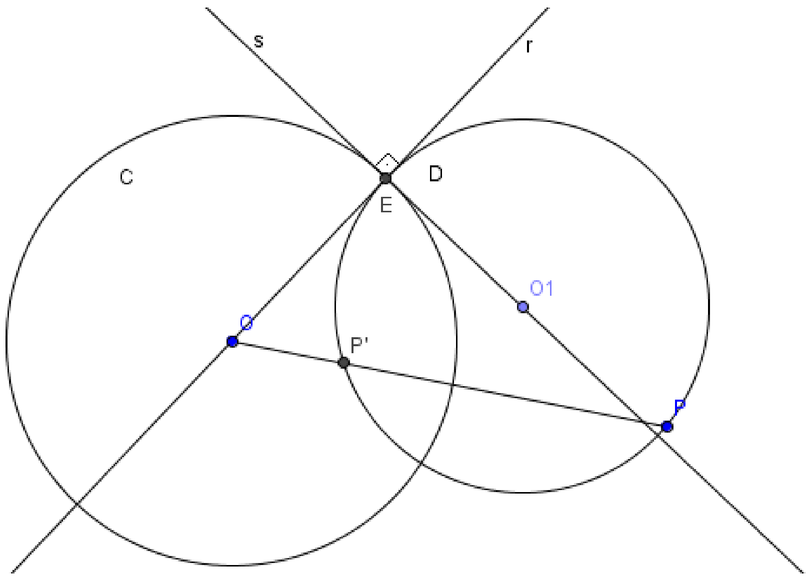
Assim, $r^2 = OP.OP' = OA^2 = OB^2$, o que indica que os triângulos ΔOAP e ΔOBP são retângulos em A e B, respectivamente. Portanto, $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são tangentes à circunferência C. ■

Definição 18. Seja C uma circunferência de centro em O e raio r. A transformação geométrica que associa a cada ponto $P \neq O$ ao seu inverso P’ em relação a O é denominada Inversão.

Obs. Esta definição, como mencionado anteriormente, faz uso de conceitos métricos da Geometria Euclidiana, uma vez que o inverso de um ponto P foi definido como sendo o ponto P’ que satisfaz a relação OP.OP’ = r^2.

Proposição 5. Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Se O,

P e P’ estão alinhados, então, P e P’ são inversos em relação a C se, e somente se, qualquer circunferência que passe por P e P’ for ortogonal à circunferência C.



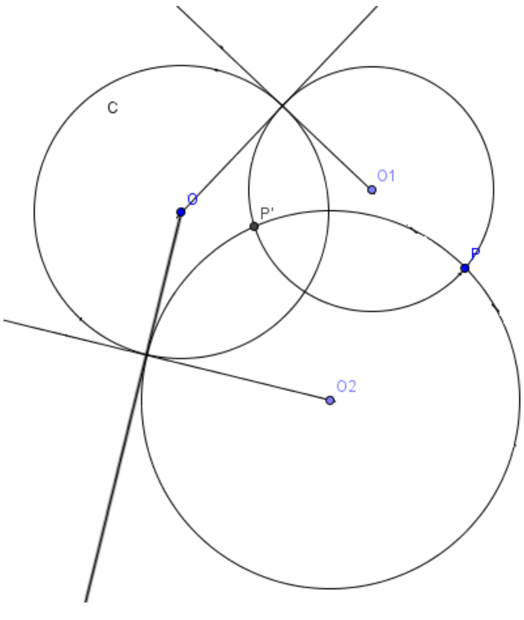
Demonstração:

(⇒)Suponhamos que P e P' são inversos em relação a C. Sejam D uma circunferência que passa por P e P' e r uma reta que passa por O e é tangente a D. Chamemos o ponto de tangência de A. Por potência de pontos, temos que $OP.OP' = OA^2$. Por serem P e P' inversos em relação a C, temos que $r^2 = OP.OP' = OA^2$, ou seja, $r^2 = OA^2$. Assim, A ∈ C e, logo, A∈ C ∪D.

Agora, seja s uma reta perpendicular a r passando por A. Então, s é tangente a C no ponto A, pois s é perpendicular ao raio OA. Portanto C e D são ortogonais.

(⇐) Seja D uma circunferência ortogonal a C e que passa por P e P'. Então, se A é um ponto de interseção entre C e D, a reta r tangente a D no ponto A é perpendicular à reta s tangente a C no ponto A. Assim, a reta r passa por O. Por potência de ponto, temos que $r^2 = OA = OP.OP'$. Logo, P e P' são inversos em relação a C.■

Portanto, para construir o inverso do ponto P em relação à circunferência C, basta construirmos duas circunferências ortogonais a C passando por P. O outro ponto de interseção das circunferências será o ponto P' procurado. Os pontos P, P' e O estarão alinhados, pelo teorema acima. Veja a Figura abaixo.



Definição 19. Eixo Radical é o lugar geométrico dos pontos equipotentes em relação a duas circunferências não concêntricas.

1.8.4 - Inverso de circunferência em relação a uma circunferência

Agora que sabemos encontrar o inverso de um ponto, cabe-nos perguntar: em qual figura será transformada pela inversão uma circunferência, por exemplo? E uma reta?

Proposição 6. Seja C uma circunferência de centro O e raio r. A inversão em relação a C de uma circunferência D que passa por O é uma reta que não passa por O.

Demonstração: ver [6].

Seja C uma circunferência de inversão de centro O e raio r. Seja D uma circunferência de centro O_1 que passa por O. Seja A ≠O, o ponto em que a reta $t_1 = \overleftrightarrow{OO_1}$ intercepta D. Se A’ é o inverso de A em relação a C, então, A’ pertence at_1. Seja t_2 a reta que passa por A’ e é perpendicular at_1.

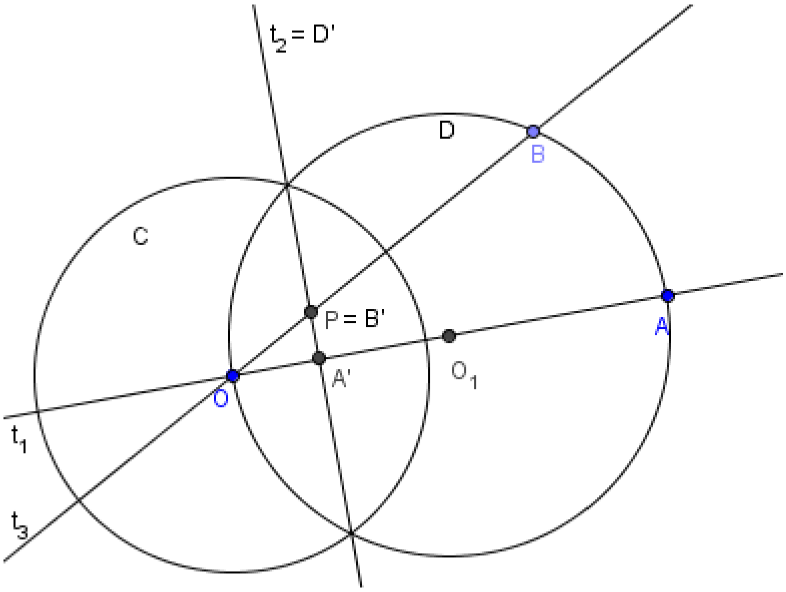
Provaremos que t_2= D’, ou seja, a inversão da circunferência D em relação a C é a reta t_2.

Seja B ≠A, O um ponto da circunferência D e $t_3 = \overleftrightarrow{OB}$. Agora, seja P o ponto em quet_2 intercepta a reta t_3. Queremos mostrar que P = B’. Temos que os triângulos $\Delta ABO \; e \; \Delta PA'O$ são semelhantes, pois os ângulos $A'\hat{O}B = B\hat{O}A$ são comuns e os ângulos $A\hat{B}O \; e \; P\widehat{A'}O$ são retos. Assim,

$$\frac{OB}{OA'} = \frac{OA}{OP}$$

Logo, $OB.OP = OA.OA' = r^2$ e, assim, P é o inverso de B, ou seja, P = B’.

Portanto, os inversos dos pontos B ≠O da circunferência D pertencem a t_2 e, como Ω (o inverso de O’) pertence a t_2, então D’⊆ t_2. É fácil ver que, pela demonstração feita acima, qualquer ponto P de t_2 é o inverso do ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a circunferência D.Logo, t_2= D’ e, como Ω ∉D, então seu inverso O não pertence a D’. Logo, D’ é uma reta que não passa por O. Veja a figura a seguir.



Inversão de circunferência que passa pelo centro de inversão ■

Proposição 7. Seja C uma circunferência de centro O e raio r. A inversão em relação a C de uma reta s que não passa por O é uma circunferência que passa por O.

Demonstração:

A demonstração segue imediatamente da proposição acima, pois a Inversão é uma involução, ou seja, ela própria é sua inversa. ■

Proposição 8. Seja C uma circunferência de centro O e raio r. A inversão em relação a C de uma reta s que passa por O é a própria reta s.

Demonstração: ver [6].

Proposição 9. Seja C uma circunferência de centro O e raio r. A inversão em relação a C de uma circunferência D que não passa por O é uma circunferência que não passa por O.

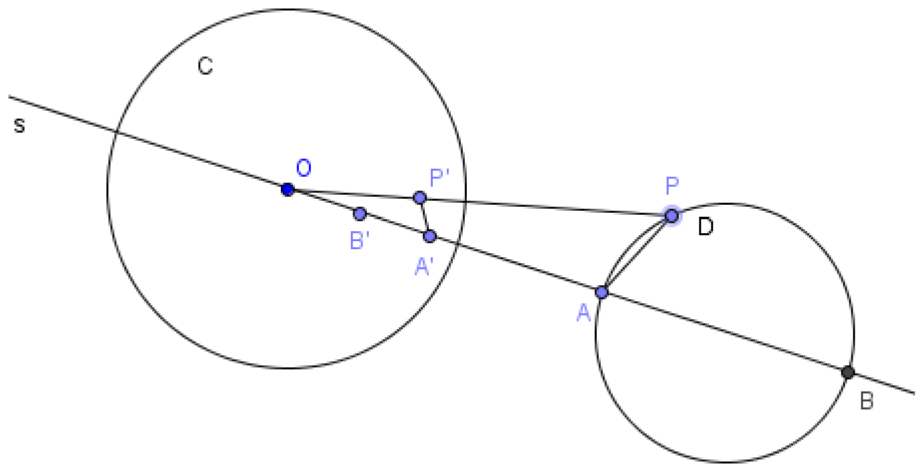
Demonstração:

Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Seja D uma circunferência que não passa por O. Seja s uma reta que passa por O e é secante à circunferência D. Sendo A ≠B os pontos de interseção de s com D, então, os inversos A' e B' de A e B, respectivamente, em relação a C, pertencem à reta s. Agora, seja P ∉ s tal que P ∈D.Se P' é o inverso de P em relação a C, então, temos que$r^2 = OA.OA' = OP.OP'$. Logo,

$$\frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{OA'}$$

Portanto, como os ângulos $P\hat{O}A\ e\ A'\hat{O}P'$ coincidem, temos que os triângulos $\Delta OAP\ e\ \Delta OA'P'$são semelhantes. Assim,

$O\hat{A}P = O\widehat{P'}A'$. (1)



Inversão de circunferência que não passa pelo centro de inversão

Analogamente, temos que,

$$O\hat{B}P = O\widehat{P'}B'. \qquad (2)$$

Agora, pelas propriedades de soma de ângulos de um triângulo, temos que $O\hat{A}P = A\hat{B}P + A\hat{P}B = O\hat{P}B + A\hat{P}B$. Logo,

$A\hat{P}B = O\hat{A}P - O\hat{B}P$. (3)

Por outro lado, $O\widehat{P'}A' = O\widehat{P'}B' + A'\widehat{P'}B'$, logo,

$$A'\widehat{P'}B' = O\widehat{P'}A' - O\widehat{P'}B'. \qquad (4)$$

Como consequência das equações (1), (2), (3) e (4), temos que,

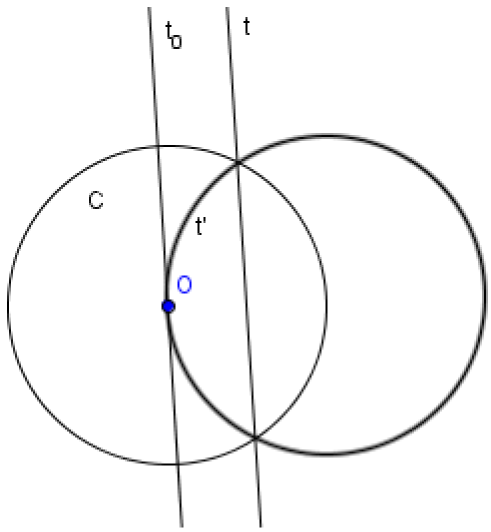
$$A\hat{P}B = A'\widehat{P'}B'.$$

Portanto, como P descreve a circunferência D, então, P' descreve a circunferência D'. ■

1.8.5 - Propriedades da Geometria Inversiva.

Tendo em vista os Problemas de Apolônio, estamos interessados na resolução de exercícios que envolvem tangência entre curvas.

Proposição 10. Seja C uma circunferência de centro O e raio r. Se t é uma reta que não passa por O, então, a reta tangente à circunferência t' (inversa de t) em O é paralela à reta t.



Demonstração: ver [6].

Proposição 11. Seja C uma circunferência de inversão de centro O e raio r. Sejam m, n duas retas concorrentes em P, diferente de Ω . Então, o ângulo entre as retas m e n é o mesmo ângulo entre m' e n'.

Demonstração:

Caso 1. Suponhamos que as retas m e n passam por O. Então, como m = m’ e n = n’, o ângulo entre m e n é o ângulo entre m’ e n’.

Caso 2. Suponhamos que m e n não passem por O. Então, m’ e n’ são circunferências que passam por O. Pela Proposição 10, a reta tangente a m’ em O é paralela a m, e a reta tangente a n’ em O é paralela a n. Logo, o ângulo entre m’ e n’ é igual ao ângulo entre m e n.

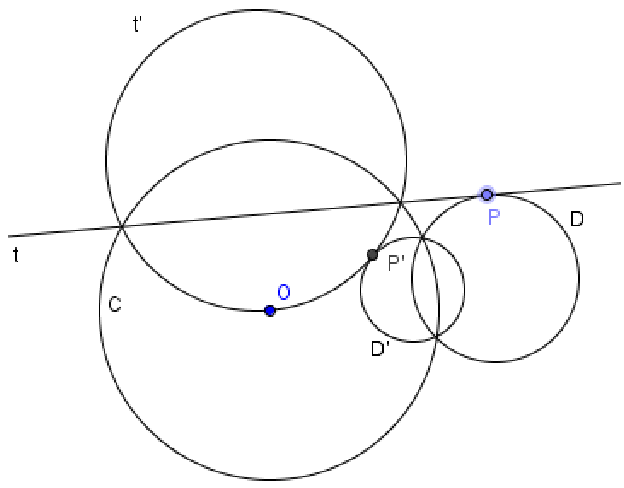
Caso 3. Suponhamos que a reta m passe por O e n não passe por O.

Então, m’ = m e n’ é uma circunferência que passa por O. Logo, m’ e n’ interceptam-se em O. Assim, o ângulo entre m’ e n’ no ponto P’ é igual ao ângulo no ponto O. Além disso, a reta tangente a m’ = m em O é a própria reta m, e a reta tangente a n’ em O é paralela a n. Portanto, o ângulo entre as retas tangentes a m’ e a n’ é igual ao ângulo entre m e n.■

Corolário 11.1. Seja C uma circunferência de inversão de centro O e raio r. Se A e B são circunferências que passam por O, então, o ângulo entre A e B é igual ao ângulo entre A’ e B’.

Demonstração: ver [6].

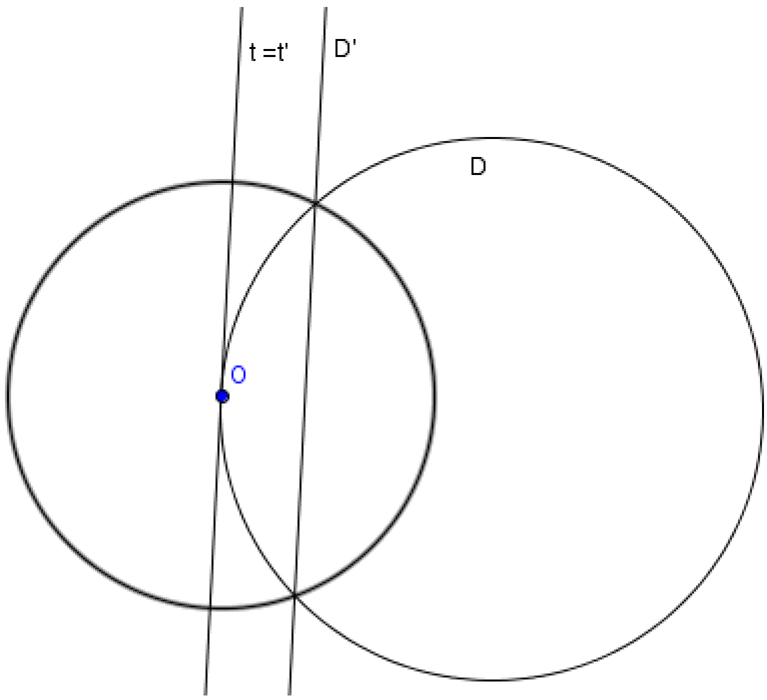
Proposição 12. Seja C uma circunferência de inversão de centro O e raio r. Se uma reta t e uma circunferência D são tangentes no ponto P $\neq$O, então, as inversões t’ e D’ são tangentes no ponto P’.



Inversão preserva tangência

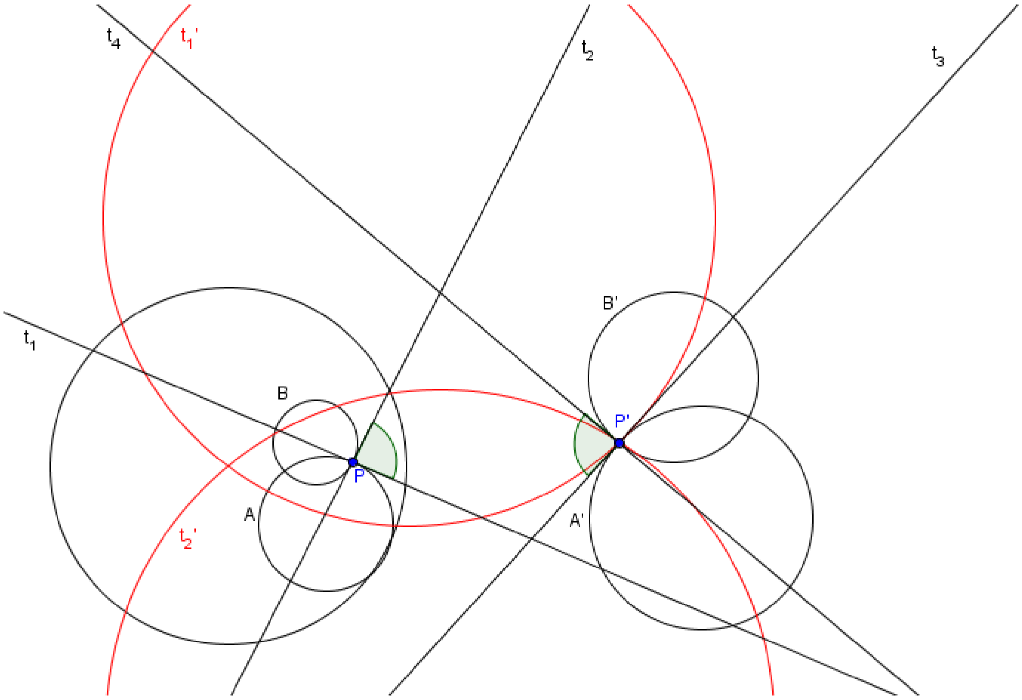
Demonstração: ver [6].

Obs. Observe que se P = O, então, a inversa de t é a própria reta t e a inversa de D é uma reta. Neste caso, o único ponto de interseção entre t' e D' é o ponto Ω (o inverso de P). Assim t' e D' são paralelas.



Tangência em O transformada em paralelismo.

Proposição 13. Seja C uma circunferência de inversão de centro O e raio r. Se A e B são circunferências que não passam por O, então, o ângulo entre A e B é igual ao ângulo entre A' e B'.

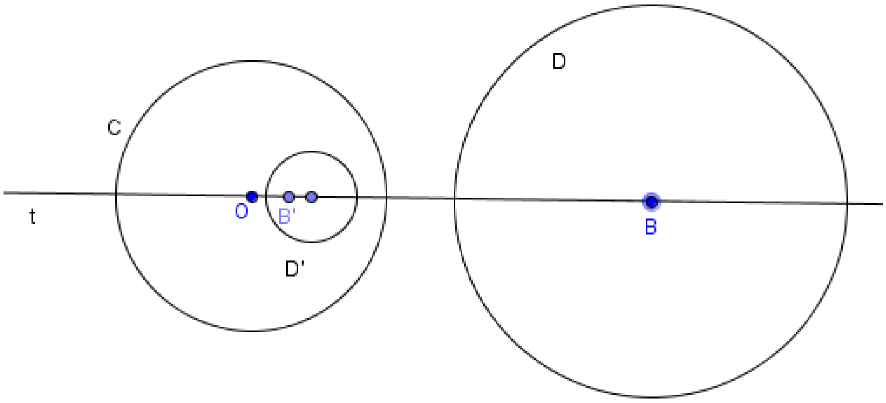


Inversão preserva ângulo de circunferências

Demonstração:

Sejam A e B duas circunferências que não passam por O. Sejam t_1 e t_2 as retas tangentes a A e a B, respectivamente, no ponto P de intersecção das circunferências. Então, a circunferência t'_1 é tangente à circunferência A', e a circunferência t'_2 é tangente a B'. Pela Proposição 11, o ângulo entre t_1 e t_2 é igual ao ângulo entre t'_1 e t'_2.Sejam t_3 a reta tangente a A' no ponto P' e t_4 a reta tangente a B' no ponto P'. Assim, t_3 é tangente a t'_1 em P' e t_4 é tangente a t'_2 em P'. Logo, o ângulo entre t_3 e t_4 é o ângulo entre t'_1 e t'_2 que, por sua vez, é o ângulo entre t_1 e t_2. ■

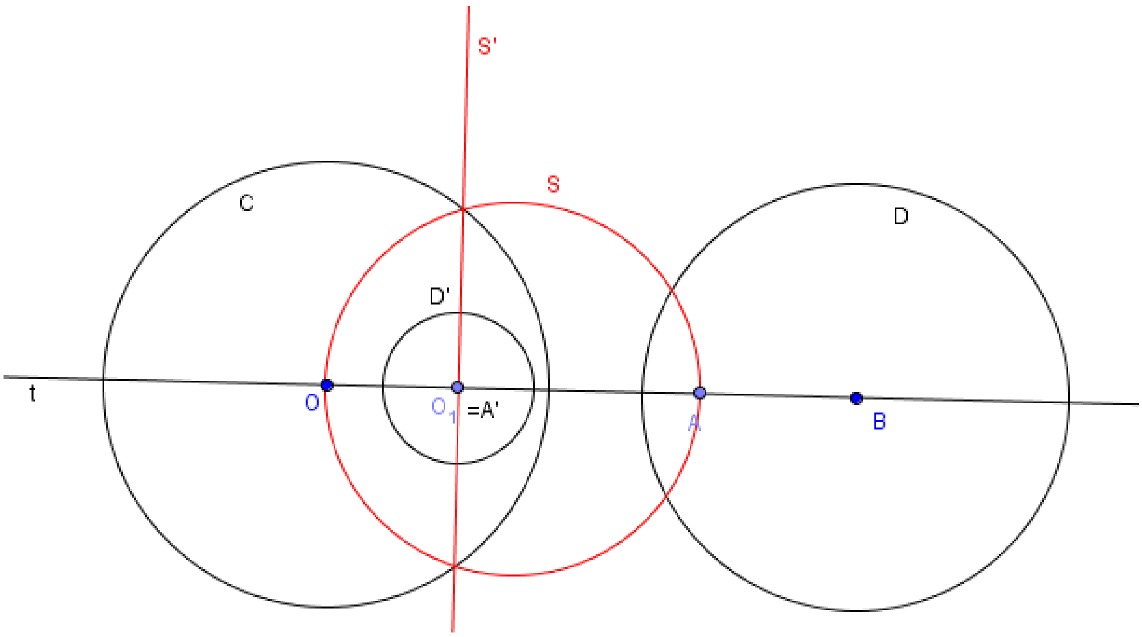
Obs. Um pequeno cuidado que devemos tomar ao nos referirmos ao centro de uma circunferência dada por meio de uma inversão é que este centro nem sempre é o inverso do centro da circunferência que foi invertida.



O inverso do centro

Por exemplo, na figura acima, B’ não é o centro de D’, mas B’ e o centro de D’ pertencem à mesma reta t. Mais do que isso, B’ e O são inversos em relação a D’.A proposição a seguir nos diz exatamente quem é o centro de D’:

Proposição 14. Seja C uma circunferência de inversão de centro O e seja D uma circunferência que não passa por O. Seja A o inverso de O em relação a D e seja D’ a inversa de D com relação a C. Então, A’, o inverso de A em relação a C, é o centro da circunferência D’.



O centro do inverso

Demonstração:

Seja t a reta que passa pelos centros O de C, e B de D. Se A é o inverso do ponto O em relação a D, então, A ∈t. Seja S uma circunferência que passa pelos pontos O e A. Então, S é ortogonal a D (veja a Proposição 6).Agora, a inversa S' da circunferência S em relação a C é uma reta, pois S passa pelo centro de C. Mais do que isso, S' é ortogonal à D'. Logo, S' passa pelo centro O_1 de D'. Temos também que $O_1 \in$ t. Logo, O_1= S' ∩ t. Como A ∈t e A ∈S, então, sendo A' o inverso de A em relação a C, temos que A' = S' ∩t'. Porém, como t = t', A' = S' ∩ t. Portanto, A' = O_1, ou seja, o inverso de A em relação a C é centro da circunferência D'. ■

Proposição 15. Seja C uma circunferência de inversão de centro O e seja D uma circunferência que não passa por O. Seja A o inverso de O em relação a D e seja D' a inversão de D com relação a C. Então, A', o inverso de A em relação a C é o centro da circunferência D'.

Demonstração: ver [6].

Proposição 16. Sejam $\overline{AB}\ e\ \overline{EF}$ segmentos disjuntos contidos em uma mesma reta. Então, existe um único par de pontos P e Q que são conjugados harmônicos, simultaneamente, com relação a $\overline{AB}\ e\ \overline{EF}$.

Demonstração: ver [6].

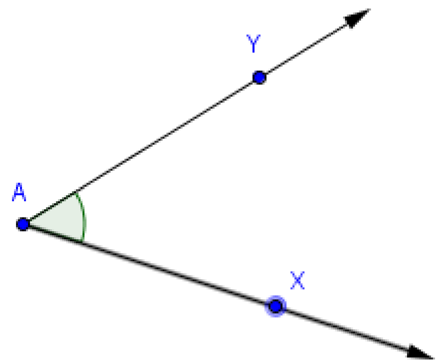
Proposição 17. Sejam C e D duas circunferências não concêntricas. Então, existe uma inversão que levam C e D em circunferências concêntricas.

Demonstração: ver [6].

1.9 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS

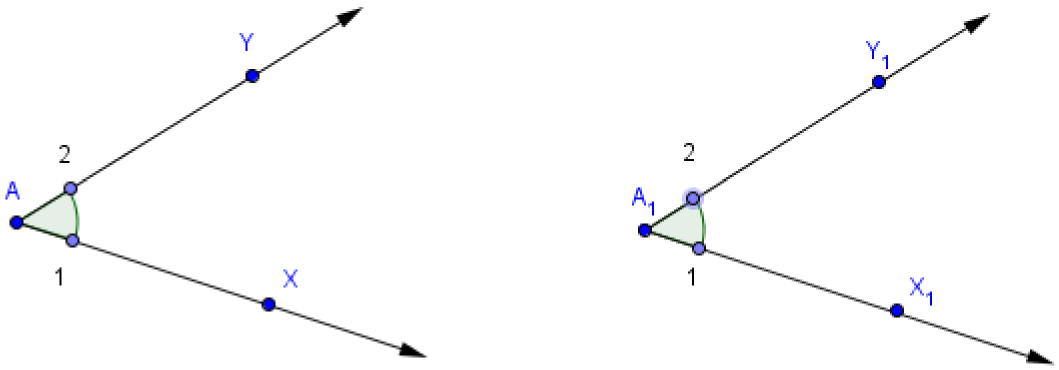
Ao longo de nosso trabalho teremos que fazer construções básicas, para que possamos usá-las como construções auxiliares em nossas resoluções.

1ª construção: Construir com régua e compasso um ângulo congruente ao ângulo $X\hat{A}Y$.

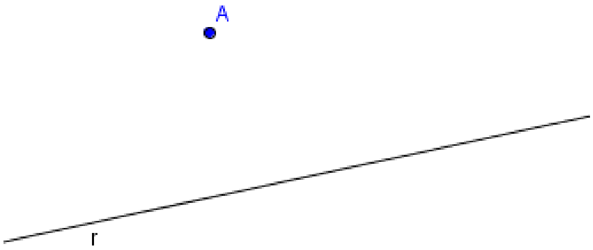


Descrição dos Passos:

1. Centra-se no vértice do ângulo que se vai transportar e, com abertura qualquer, descreva um arco que corta os dois lados do ângulo, gerando os pontos 1 e 2;
2. Traça-se um lado do ângulo a ser construído, definindo seu vértice;
3. Com a mesma abertura do compasso e centro no vértice do segundo ângulo, descreve-se um arco, igual ao primeiro, e que corta o lado já traçado, definindo um ponto que corresponde ao ponto 1 do primeiro ângulo;
4. Volte ao primeiro ângulo e meça a distância entre os pontos 1 e 2, com o compasso;
5. Aplica-se esta distância no segundo ângulo a partir do ponto correspondente ao ponto 1 sobre o arco já traçado, definindo o ponto correspondente ao ponto 2;
6. A partir do vértice e passando pelo ponto correspondente ao ponto 2, traça-se o outro lado do ângulo.

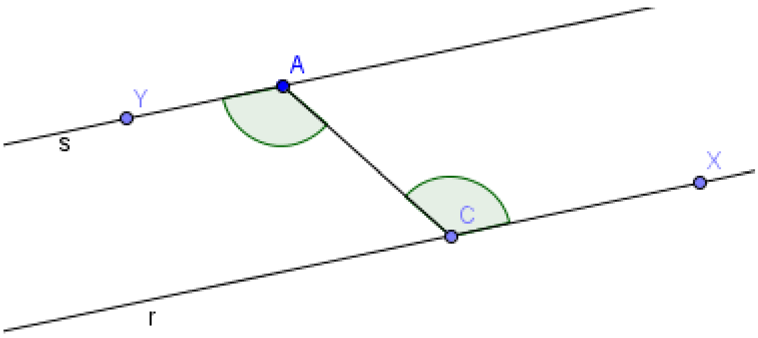


2ª construção: Construir com régua e compasso uma reta s, paralela à reta r e passando pelo ponto A.



Descrição dos Passos:

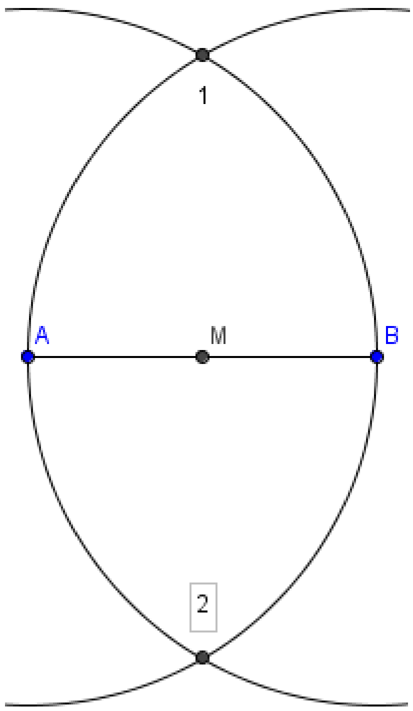
1. Tome pontos C e X sobre a reta r e una A a C;
2. Construa um ângulo $C\hat{A}Y$ tal que $C\hat{A}Y = A\hat{C}X$, e tal que X e Y estejam situados em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$;
3. A reta $s = \overleftrightarrow{AC}$ é paralela à reta r.



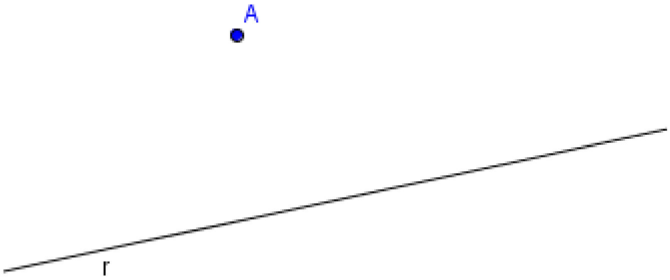
3ª construção: Construir com régua e compasso o ponto médio entre dois pontos A e B.

Descrição do Passos:

1. Trace uma reta por A e B;
2. Com compasso em A, faça um arco de círculo que passe por B. Em seguida, repita o processo com compasso em B, passando por A, de modo que os dois arcos se encontrem em dois pontos 1 e 2;
3. Com a régua sobre 1 e 2 marque o ponto médio M sobre o segmento AB.



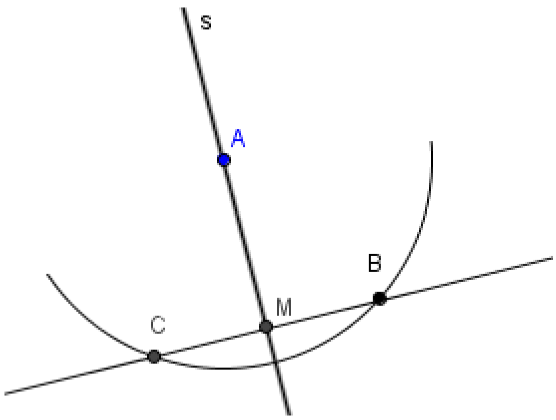
4ª construção: Construir com régua e compasso uma reta s perpendicular a r que passa pelo ponto A.



Descrição dos Passos:

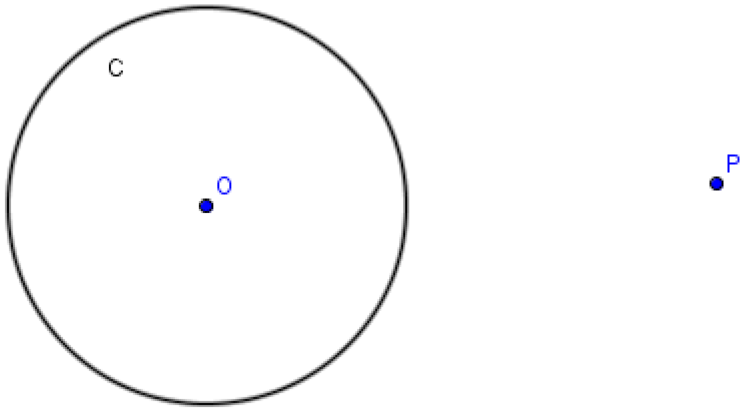
1. Com o compasso centrado em A, descreva um arco de círculo que intercepte a reta r em dois pontos B e C;

2. Construa o ponto médio M de $\overline{BC}$ e faça $s = \overleftrightarrow{AM}$.



5ª construção: Construir o ponto P’, inverso de P em relação à circunferência C, de centro O e raio r.

Nesta construção iremos mostrar duas formas diferentes de solucionar o problema.



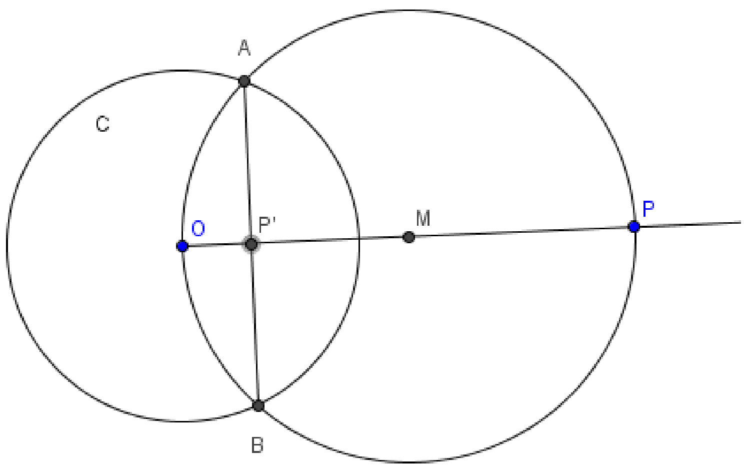
Descrição dos Passos

1ª Solução:

1. Construa a semirreta $\overrightarrow{OP}$ e o ponto médio do segmento $\overline{OP}$;

2. Construa um círculo auxiliar com centro neste ponto médio e diâmetro $\overline{OP}$. Obtenha os pontos de interseção A e B dos dois círculos. Construa as semirretas que partem de P e passam por A e B;

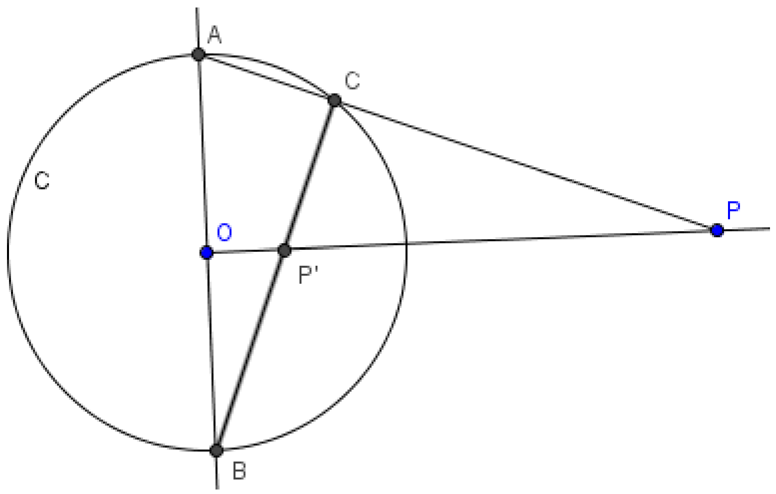
3. Construa a corda que une os pontos A e B. Obtenha o ponto de interseção deste segmento com a semirreta inicial $\overrightarrow{OP}$. Chame-o de P'.



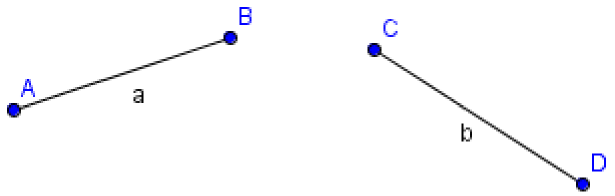
Obs. essa construção só é possível se P for externo à circunferência C.

2ª Solução

1. Trace a semirreta $\overrightarrow{OP}$;
2. Passando por O, trace a perpendicular à semirreta $\overrightarrow{OP}$ e assinale os pontos A e B de intersecção com a circunferência;
3. Trace a semirreta $\overrightarrow{AP}$ e assinale o ponto C, outro ponto que intercepta a circunferência;
4. Trace a semirreta $\overrightarrow{BC}$;
5. Assinale o ponto P', inverso de P, que resulta da intersecção das semirretas $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{BC}$.

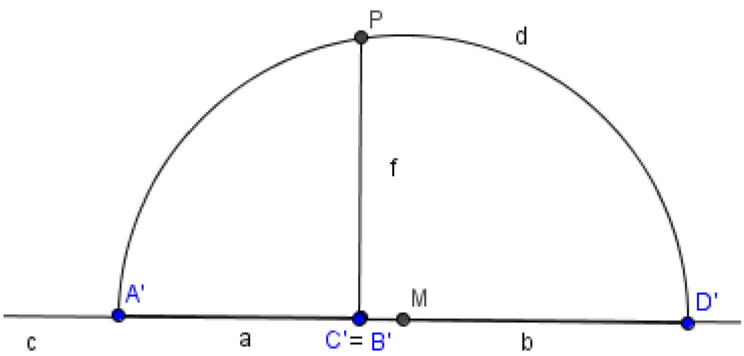


6ª Construção: construir a média geométrica de dois segmentos de reta.

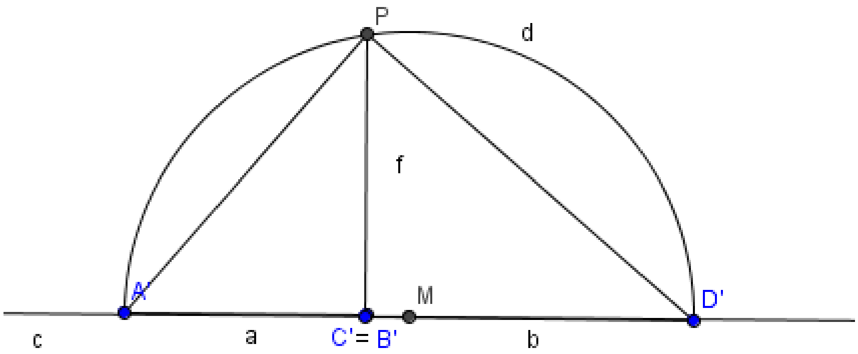


Descrição dos Passos

1. Coloque os dois segmentos em uma reta obtendo um segmento de tamanho a + b;
2. Encontre o ponto médio M deste segmento;
3. Trace o semicírculo com centro em M e com diâmetro $(a+b)$;
4. Trace a reta perpendicular que sai da extremidade entre a e b.



Obs. Uma observação importante aqui é: qual é o valor de $f = PC' = PB'$?

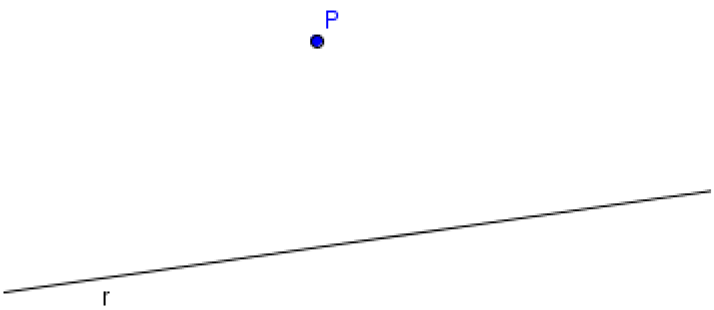


Como o arco $\widehat{A'MD'}$ é um semicírculo o triângulo $\Delta A'PD'$ é retângulo com ângulo reto em P. Portanto, a e b são projeções dos catetos em relação à hipotenusa e f é a altura relativa à hipotenusa. Portanto,$f^2 = a.b$, ou seja, o valor de $f = \sqrt{a.b}$. Consequentemente, $PC' = PB' = \sqrt{A'B'.C'D'}$

7ª Construção: Construir um ponto Q simétrico a um ponto P em relação à reta r.

Se o ponto P pertence à reta r, não é preciso construção, pois Q é coincidente a P.

Vamos então fazer a construção em que P não pertence à reta r.

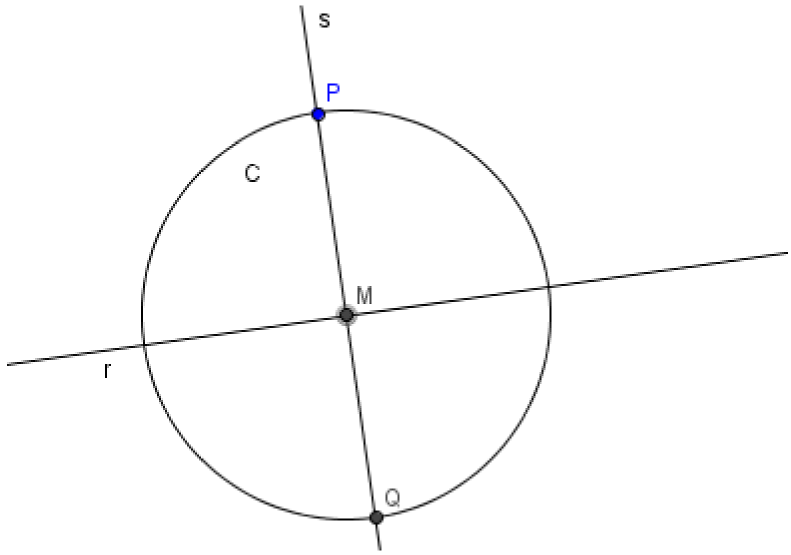


Descrição dos passos:

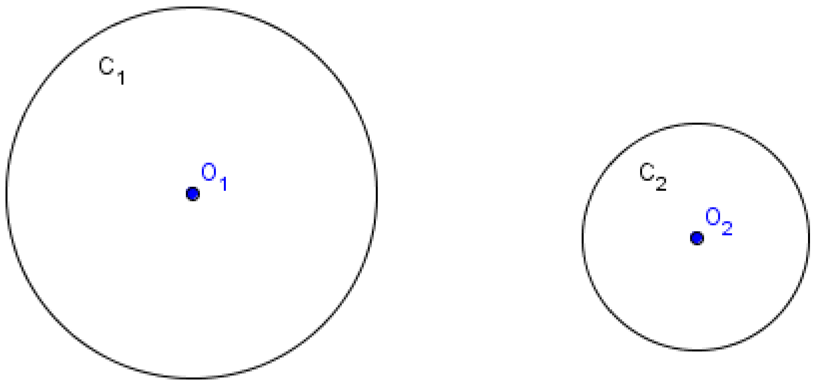
1. Trace uma reta s perpendicular à reta r que passa pelo ponto P, marcando o ponto M na interseção entre as retas r e s.

2. Trace uma circunferência C, de centro M e de raio igual ao segmento $\overline{MP}$.

3. Marque o ponto Q na interseção da circunferência C com a reta s, no lado oposto ao ponto P.



8ª construção: Construir os centros homotéticos O e O', em relação a duas circunferências externas C_1 e C_2.

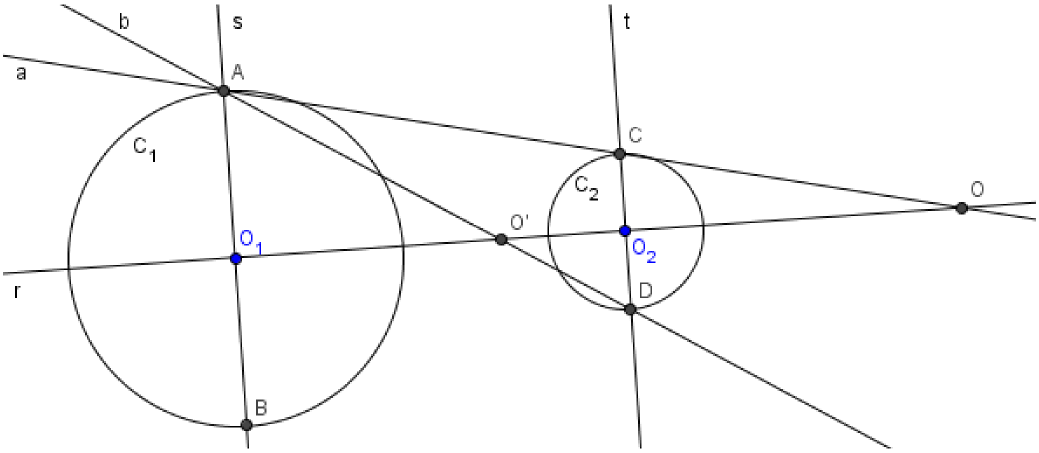


Descrição dos passos:

1. Traçamos a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2} = r$;

2. Traçando as retas perpendiculares s e t em relação à reta r, passando por O_1 e O_2, respectivamente, marcamos os pontos A e B na interseção de s com C_1, e os pontos C e D na interseção de t com C_2;

3. Traçamos a reta $\overleftrightarrow{AC} = a$ e marcamos o centro homotético externo O na interseção entre as retas $a \, e \, r$. Traçamos a reta $\overleftrightarrow{AD} = b$ e marcamos o centro homotético interno O' na interseção entre as retas $b \, e \, r$.

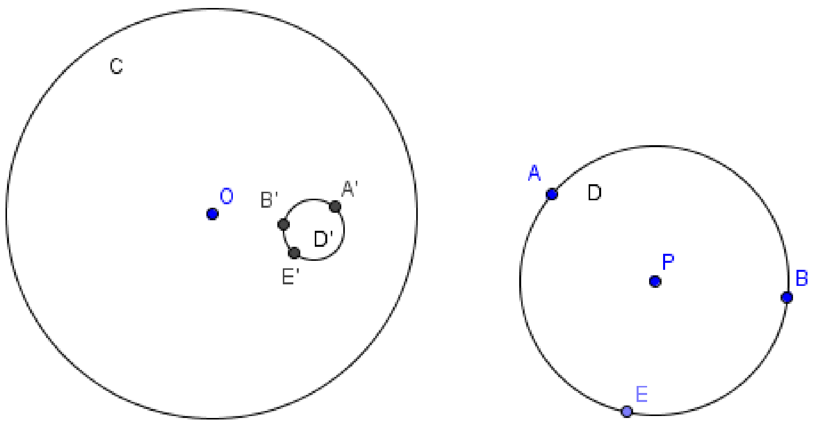


Obs. Para construir os centros homotéticos para circunferências com posições relativas diferentes, usamos os mesmos passos. Não temos centro homotético para circunferências concêntricas.

9ª construção: Construir a circunferência inversa da circunferência D, de centro P, em relação à circunferência C, de centro O. Sejam C e D circunferências externas.

Descrição dos passos:

1. Marque três pontos A, B e E, na circunferência D.
2. Faça os pontos A', B' e E', inversos de A, B e E, respectivamente, em relação à circunferência D;
3. Trace a circunferência D', inversa de D em relação a C, que passa pelos pontos A', B' e E'.



Obs.

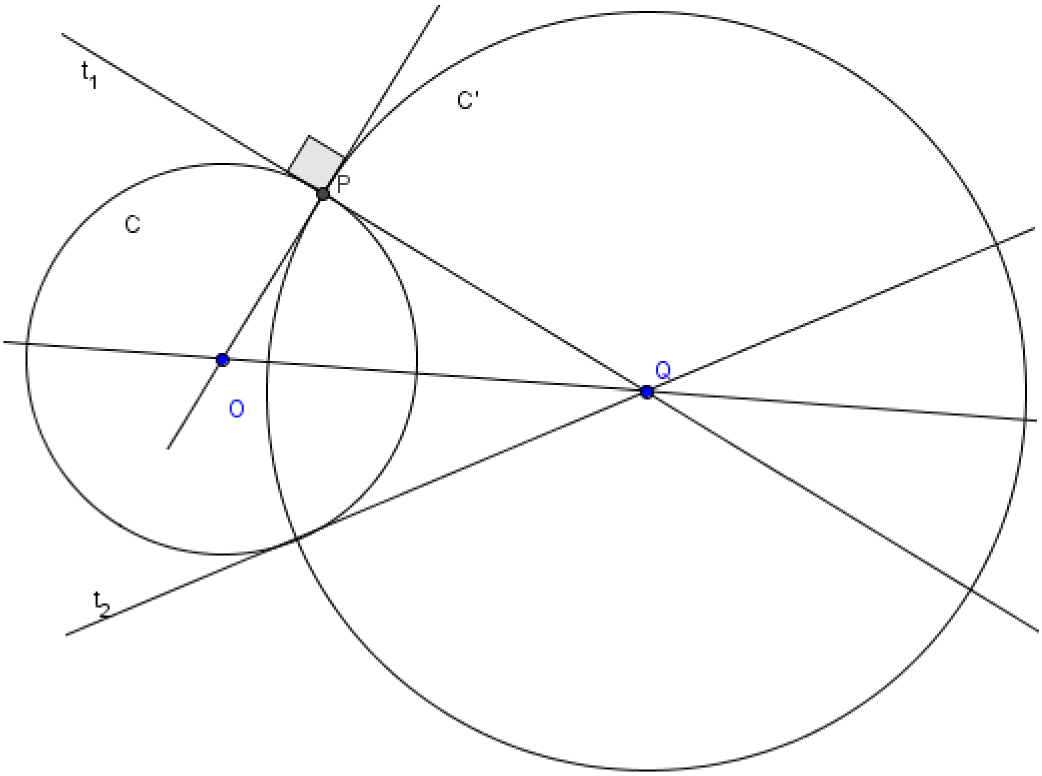
1. Note que, na construção acima, D’ é interna a C. Caso D fosse interna a C, D’ seria externa a C.

2. Quando D é secante a C, com O não pertencente a D, a circunferência D’ será secante a C e a D, nos mesmos pontos de interseção de C e D. Caso O pertença a D, D’ é uma reta que passa pelos pontos de interseção de C com D.

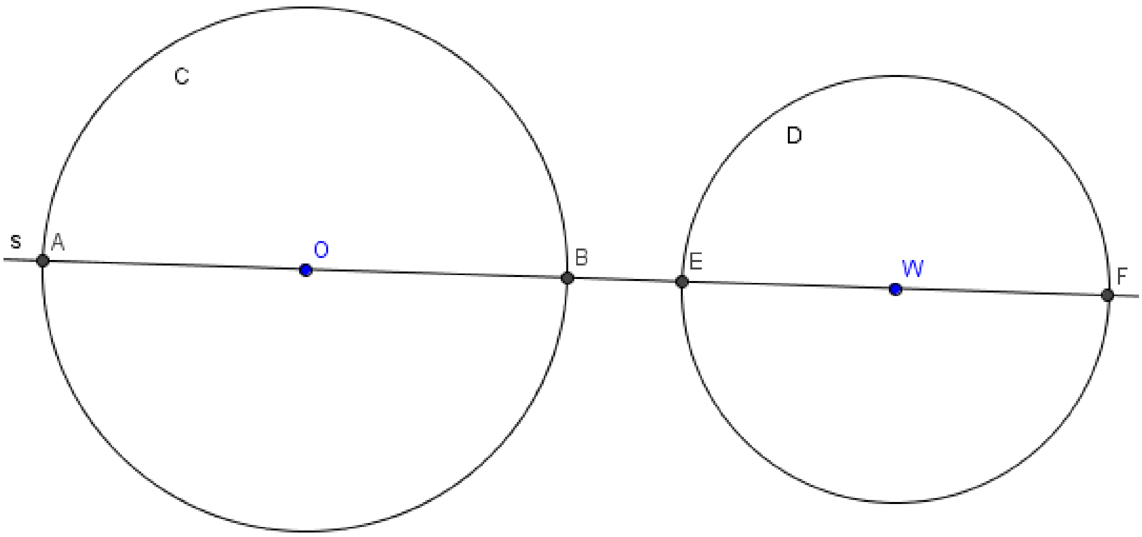
10ª construção: Construir uma circunferência C', com centro em um ponto Q qualquer, ortogonal a uma circunferência C, de centro O. Note que uma circunferência ortogonal à circunferência C só faz sentido para um ponto Q exterior a C.

Descrição dos passos

1. Trace a reta $\overleftrightarrow{OQ}$ e as retas t_1 e t_2, tangentes a C no ponto Q;
2. Marque um ponto P na interseção de t_1 com C (ou na interseção de t_1 com C);
3. Trace a circunferência C’ ortogonal a C, de centro O e raio igual a $\overline{PQ}$.

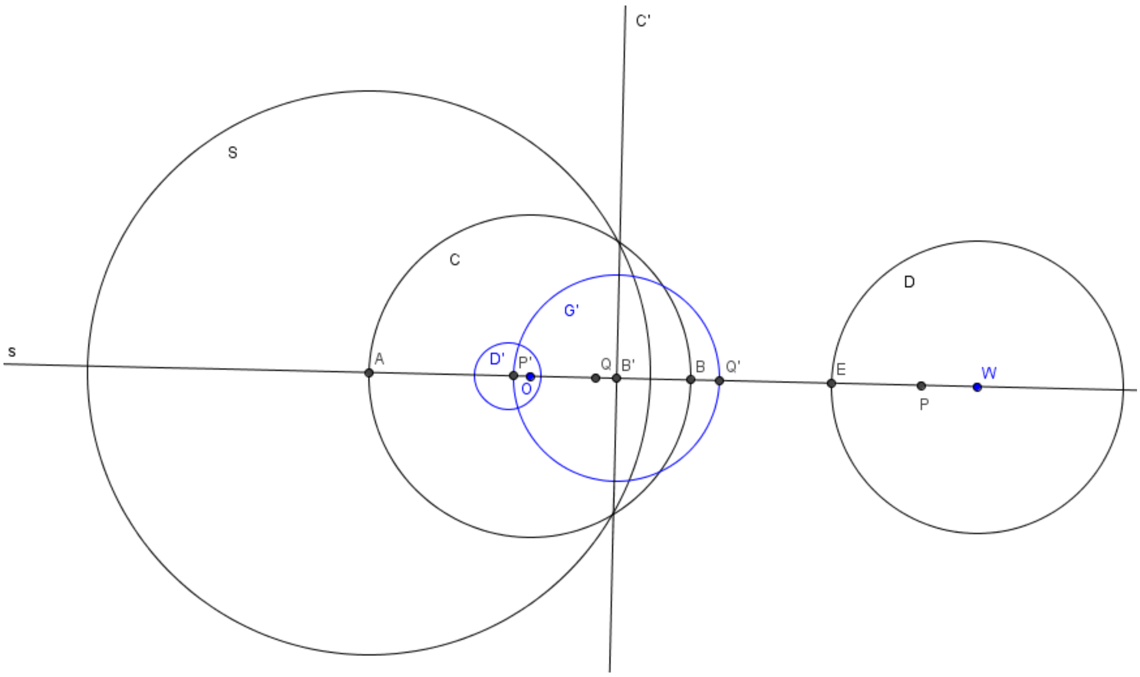


11ª construção: Construir os conjugados harmônicos simultâneos, P e Q, de dois diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$, das circunferências C e D, respectivamente. Sejam C e D duas circunferências externas, de centros O e W, respectivamente. Chamemos de s a reta $\overleftrightarrow{OW}$. $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$são os diâmetros determinados por s em C e D, respectivamente.



Descrição dos passos:

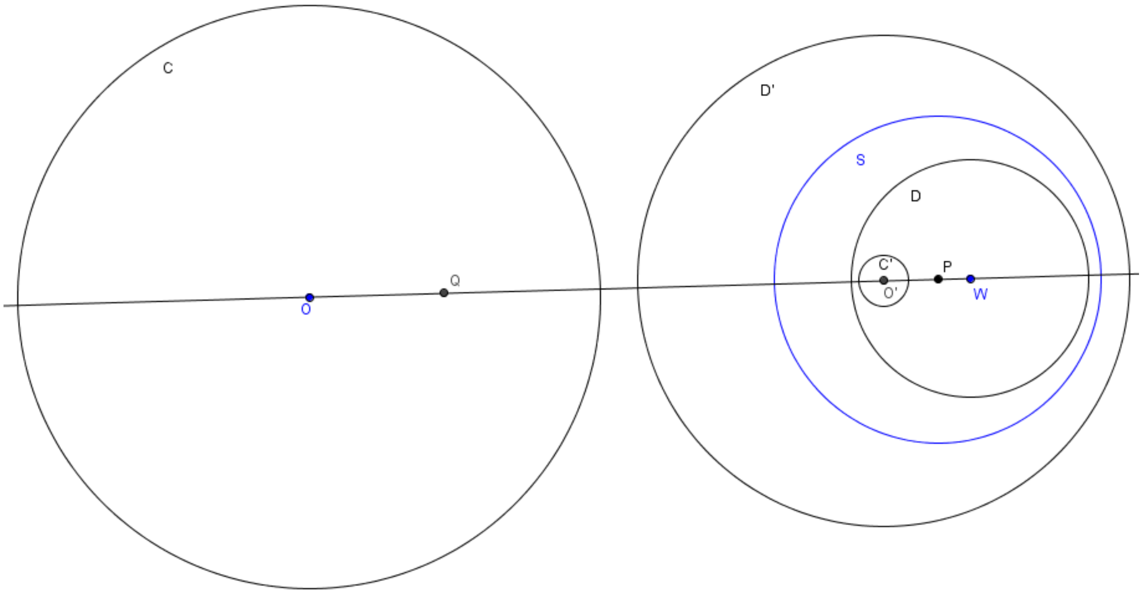
1. Trace uma circunferência qualquer S secante a C, de centro em A. Faça a inversão de C em relação a S, obtendo a reta c'. Marque um ponto B' na interseção de c' com s;
2. Determine a circunferência D', inversão de D em relação a S. Encontre a reta s', inversão da reta s em relação a S. Perceba que $s' = s$;
3. Faça a circunferência G' ortogonal a D', com centro em B';
4. Marque nas interseções de s com G' os ponto P' e Q';
5. Inverta P' em relação a S e marque o ponto P;
6. Inverta o ponto P em relação à circunferência C e marque o ponto Q.



12ª construção: Construir duas circunferências C' e D' concêntricas, inversões de C e D em relação a uma circunferência S, respectivamente.

1. Encontre os conjugados harmônicos simultâneos, P e Q, das circunferências C e D;
2. Trace uma circunferência S, com centro em P;
3. Determine C', a inversão de C em relação a S, e marque O', o centro de C';

4. Determine a circunferência D’, inversão de D em relação a S com centro em O’.



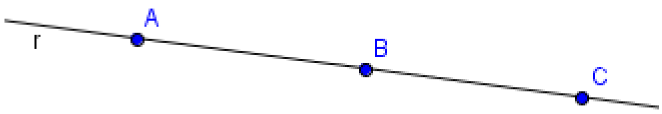
CAPÍTULO 2- SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE APOLÔNIO

Neste capítulo apresentamos a resolução das dez variações do problema de Apolônio, relativos às configurações entre os três objetos – ponto (P), reta (R) e circunferência (C). Nas variações cuja resolução é menos complexa, as justificativas dos passos da solução são explicitadas. Mas, conforme a complexidade da resolução aumenta, nós optamos por simplesmente descrever os passos de solução, uma vez que utilizamos transformações geométricas que reduzem as variações mais complexas a variações já tratadas anteriormente, cujas soluções já foram justificadas. Notemos ainda que uma situação do CCC foi resolvida tanto no plano euclidiano como no plano inversivo.

2.1. PPP

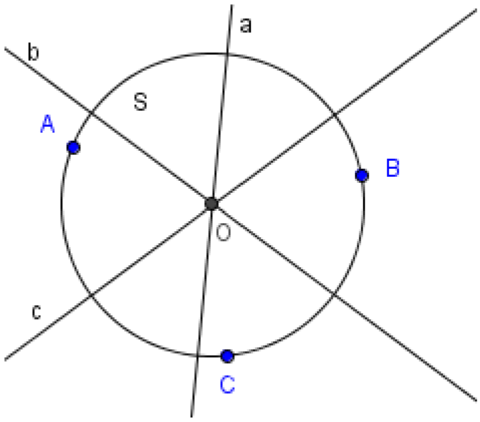
Caso 1. Três pontos colineares.

A solução é a reta r que os três pontos pertencem. Trata-se aqui a reta como sendo uma circunferência de raio infinito.



Caso 2. Três pontos não colineares

A solução é uma circunferência: o encontro das mediatrizes entre cada dois pontos é o lugar geométrico chamado circuncentro, que é o centro da circunferência que passa pelos três pontos dados.



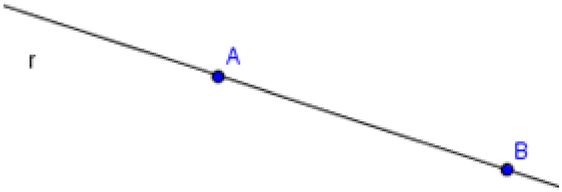
Obs.

1) A reta a é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
2) A reta b é a mediatriz do segmento $\overline{BC}$.
3) A reta c é a mediatriz do segmento $\overline{AC}$.

2.2- PPR

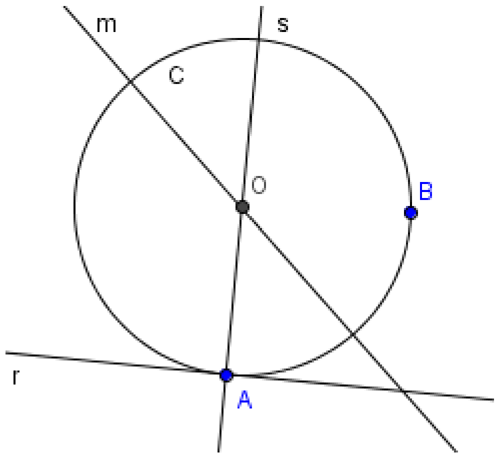
Caso 1. Os dois pontos pertencem à reta r.

Não tem solução.



Caso 2. Só um ponto pertence à reta r.

A solução é uma circunferência cujo centro é a interseção de dois lugares geométricos: a reta perpendicular à reta dada no ponto pertencente à reta e a mediatriz dos pontos dados



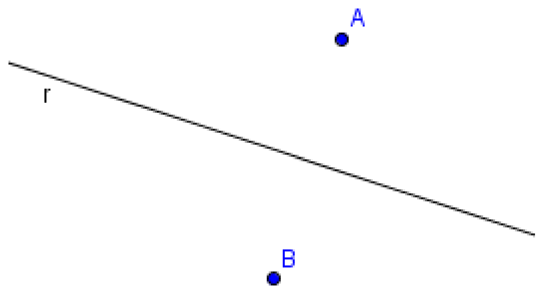
Obs.

1) A reta s é perpendicular à reta r.
2) A reta m é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Caso 3. Os dois pontos não pertencem à reta.

Este caso tem duas situações:

1ª situação: A reta corta o segmento formado pelos dois pontos.

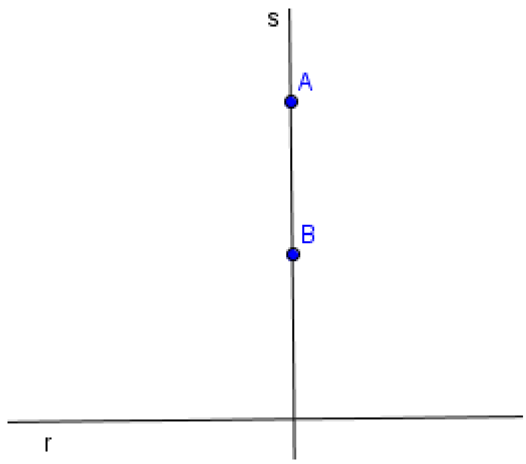


Não há solução nesse caso, pois qualquer circunferência que passar por A e B irá cortar a reta r em dois pontos e, portanto, não será tangente à reta.

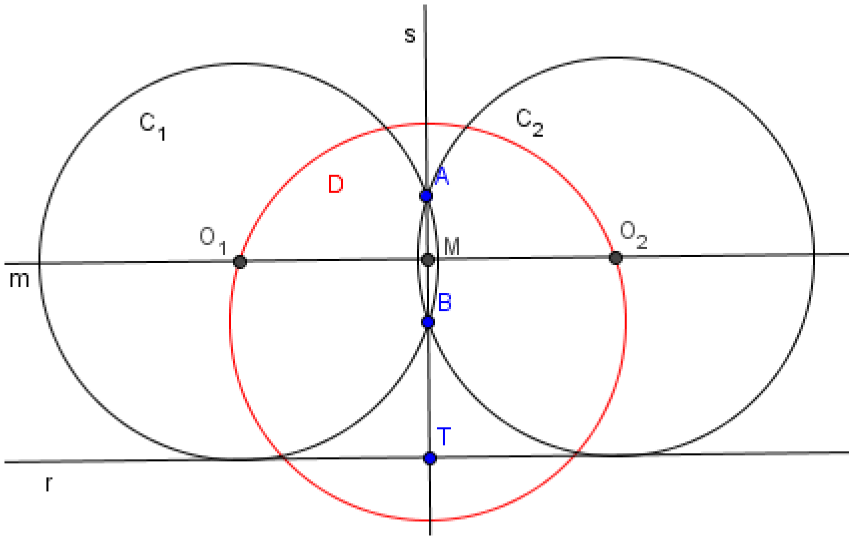
2ª situação: A reta não corta o segmento formado por A e B.

Discutimos essa situação de duas formas:

a) A e B pertencem a uma perpendicular s.



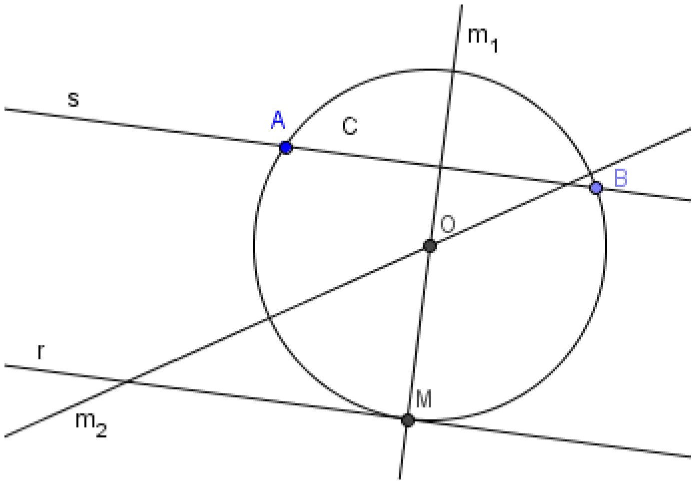
Temos duas soluções, a circunferência C_1, de centro O_1 e a circunferência C_2 de centro O_2. A solução começa traçando a mediatriz m em relação ao segmento $\overline{AB}$, marcando o ponto médio M entre os pontos A e B. As circunferências que queremos encontrar tem o comprimento do raio igual à distância entre a mediatriz m e a reta r. Marcando o ponto T, a interseção das perpendiculares r e s, podemos usar a circunferência D, de centro B e raio de comprimento MT, para marcar os centros O_1 e O_2, nas interseções dessa circunferência com a mediatriz m.



b) A e B não pertencem a uma reta perpendicular s. A solução desse caso pode ser vista, por exemplo, em [8]. Observamos que, para obter a solução desse problema, basta encontrar o centro da circunferência que é tangente à reta e que passa pelos dois pontos. Assim, o lugar geométrico desse centro será a intersecção da mediatriz dos dois pontos dados com a reta perpendicular à reta r dada que passa pelo ponto de tangência de r com a circunferência. Mas fica uma pergunta: como encontrar esse ponto de tangência da reta r com a circunferência? Em [8], há construções para dois casos diferentes:

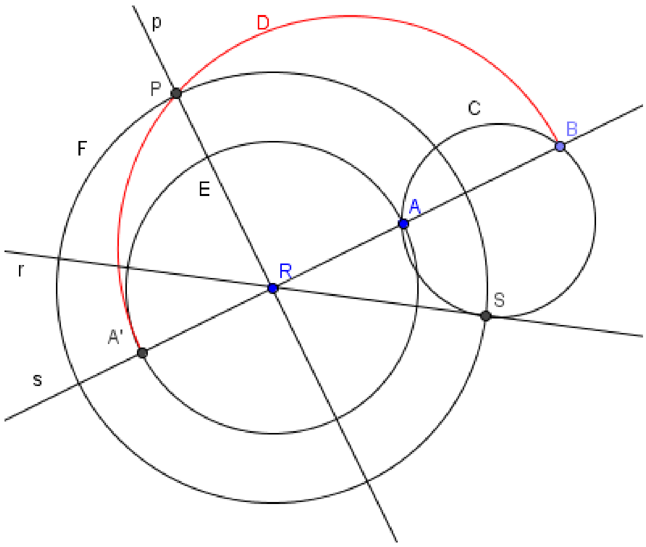
1ª construção: a reta formada pelos pontos dados é paralela à reta dada.

Nesse caso, a reta perpendicular no ponto de tangência e a mediatriz entre os pontos dados são a mesma reta. Portanto, o ponto de tangência é a intersecção da mediatriz com a reta dada. Para encontrar o centro, basta traçar a mediatriz entre um dos pontos dados e o ponto de tangência, determinando-se, assim, a solução.



2ª construção: a reta formada pelos pontos dados é concorrente, mas não perpendicular à reta dada.

Neste caso, o artigo demonstra como encontrar o segmento que resulta no ponto de tangência que pertence à reta, utilizando a Lei de Secantes, que irá implicar na construção de uma média geométrica.

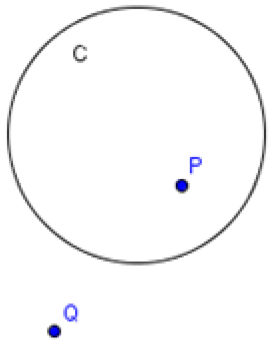


Dados os pontos A, B e a reta r, traçando a reta s, que passa por A e B, encontramos o ponto de intersecção R, formando uma reta secante à circunferência de solução. Como queremos encontrar o ponto de tangência S, temos a seguinte relação pela lei da Secante: $RA.RB = RS^2$, ou seja, $RS = \sqrt{RA.RB}$, que é a média geométrica entre $RA\ e\ RB$. Usando a construção acima descrita encontramos RP.

Traçando o círculo F, com centro em R e raio $\overline{RP}$, a intersecção desse círculo com a reta r é o ponto de tangência S da circunferência solução com a reta r. Assim, traçamos a circunferência solução passando por A e B e tangente a r no ponto S.

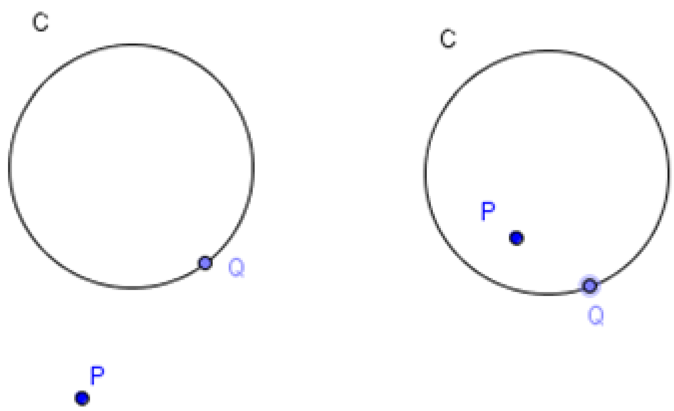
2.3. PPC

Caso 1. Um ponto é interno ao círculo e o outro é externo.

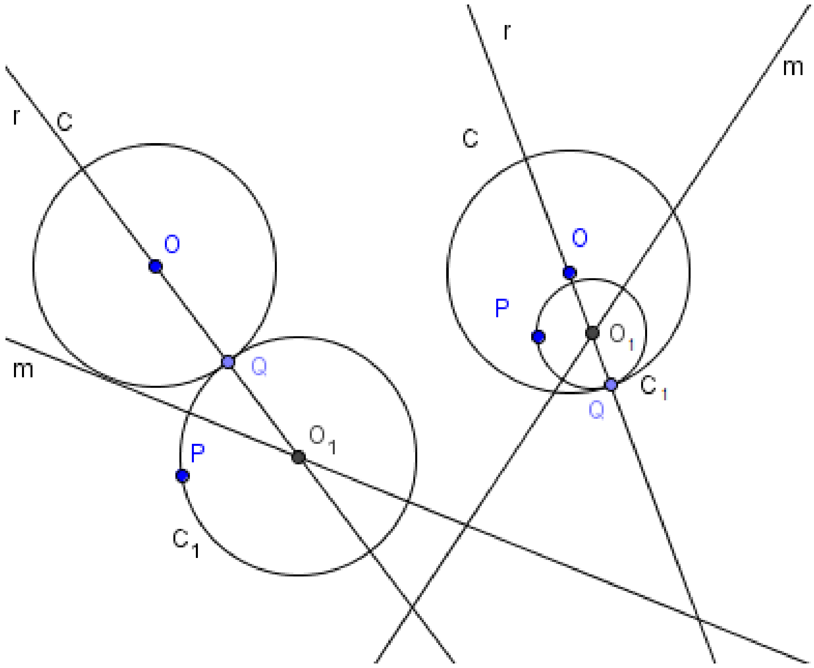


Nesse caso obviamente não há solução.

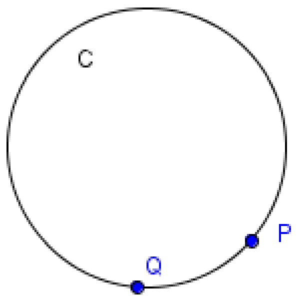
Caso 2. Um ponto é externo, ou interno, e o outro pertence à circunferência.



Nesse caso, o centro da circunferência-solução pertence à reta que passa por O e Q, e equidista de P e Q. Logo, há uma única solução: basta traçar a mediatriz do segmento $\overline{PQ}$, cuja interseção com a reta $\overleftrightarrow{OQ}$ é o centro da circunferência solução do problema.



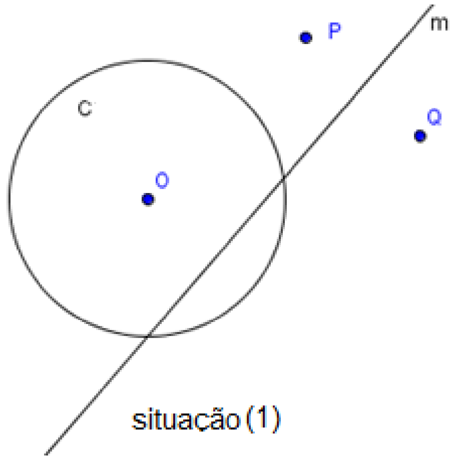
Caso 3. Os dois pontos pertencem à circunferência.

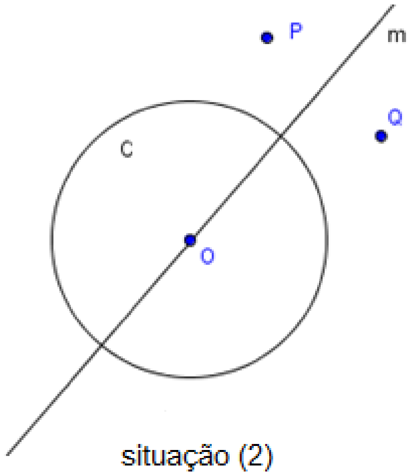


Nesse caso não tem solução distinta de C, pois se traçarmos uma circunferência por P e Q, essa circunferência é secante ou coincidente à circunferência C.

Caso 4. Os dois pontos são externos.

Nesse caso temos que distinguir duas novas situações: (1) a mediatriz do segmento formado pelos dois pontos não passa pelo centro da circunferência; (2) a mediatriz do segmento formado pelos dois pontos passa pelo centro da circunferência.





1ª situação: a mediatriz do segmento formado pelos dois pontos não passa pelo centro da circunferência.

Vamos supor o problema resolvido. Por exemplo, tomemos a solução em que a circunferência solução é externa a C. Então, a reta tangente às duas circunferências, no ponto T_2, vai interceptar a reta que passa por P e Q em um ponto, digamos, R. Observemos que a reta que tangencia C no ponto T_1, relativo à outra circunferência-solução, tangente interna a C, também passa por R. Agora, tracemos uma circunferência secante a C, passando por P e Q. Ela vai cortar Cem, digamos, P_1 e P_2. Usando potência de pontos, temos que:

$$(RT_2)^2 = RP_1.RP_2 = RP.RQ = (RT_1)^2$$

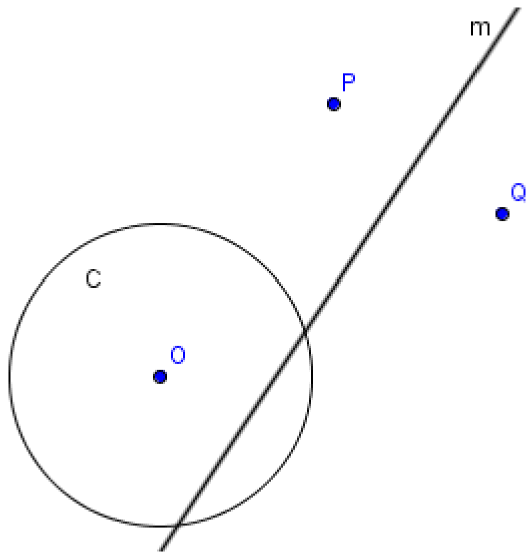
Vimos que existem duas soluções:

i) A circunferência C_1 que passa por P, Q e T_1.

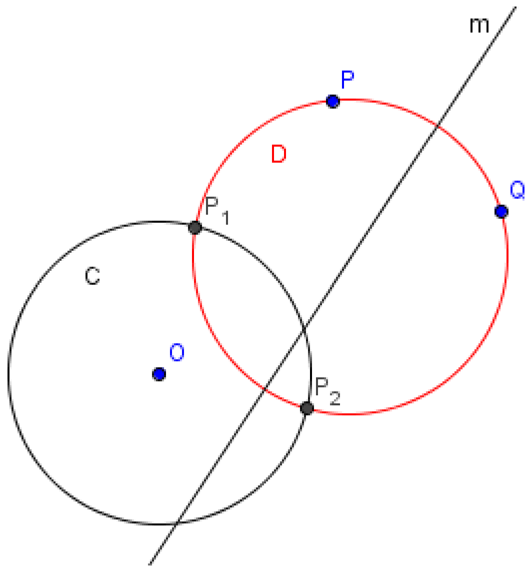
ii) A circunferência C_2 que passa por P, Q e T_2.

Apresentamos a seguir, passo a passo, essas duas soluções (podem ser encontradas também em [5]).

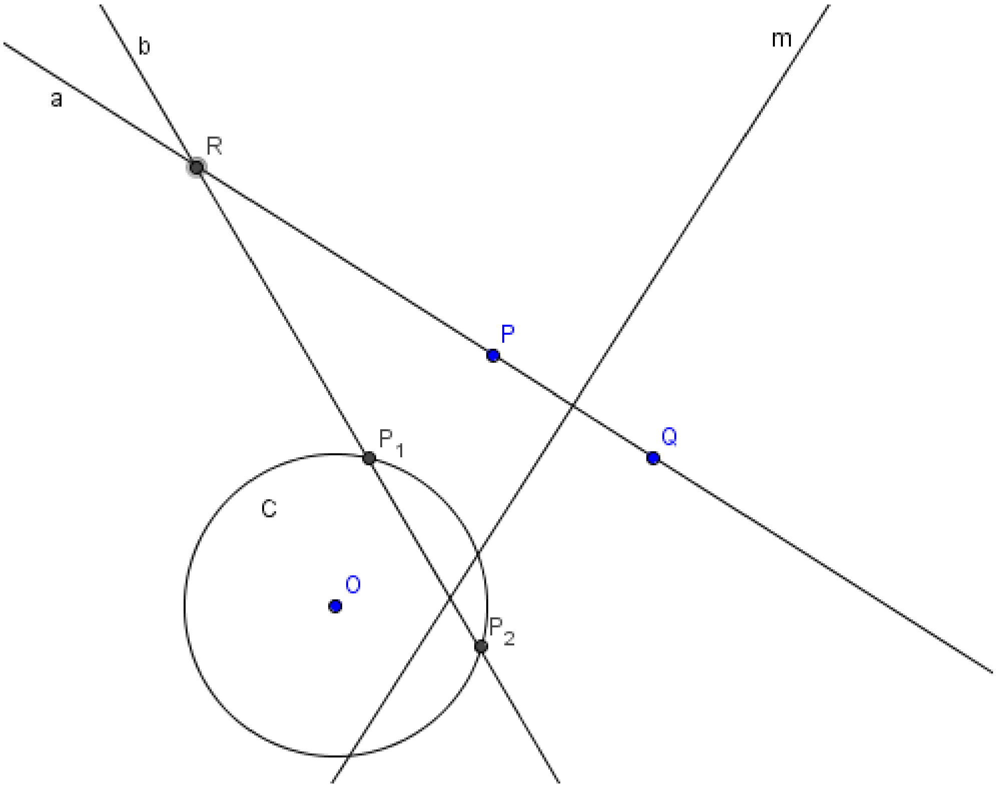
a) Trace a mediatriz m do segmento formado pelos dois pontos P e Q;



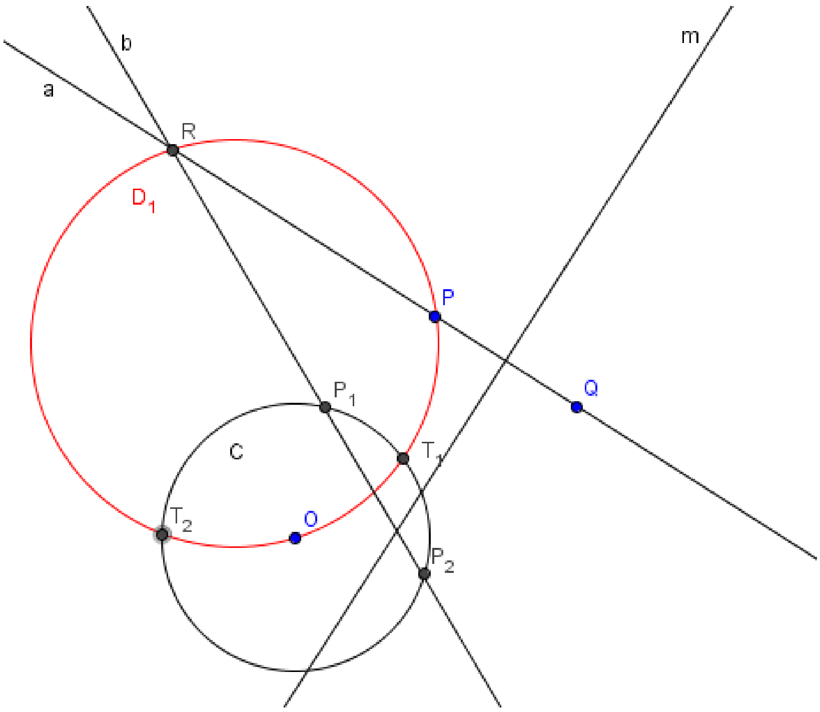
b) Trace um círculo D, de centro qualquer, que passe pelos dois pontos e seja secante à circunferência C em P_1 e P_2, de centro O dado;



c) Trace a reta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ até atingir a reta que contém o segmento $\overline{PQ}$, no ponto R;

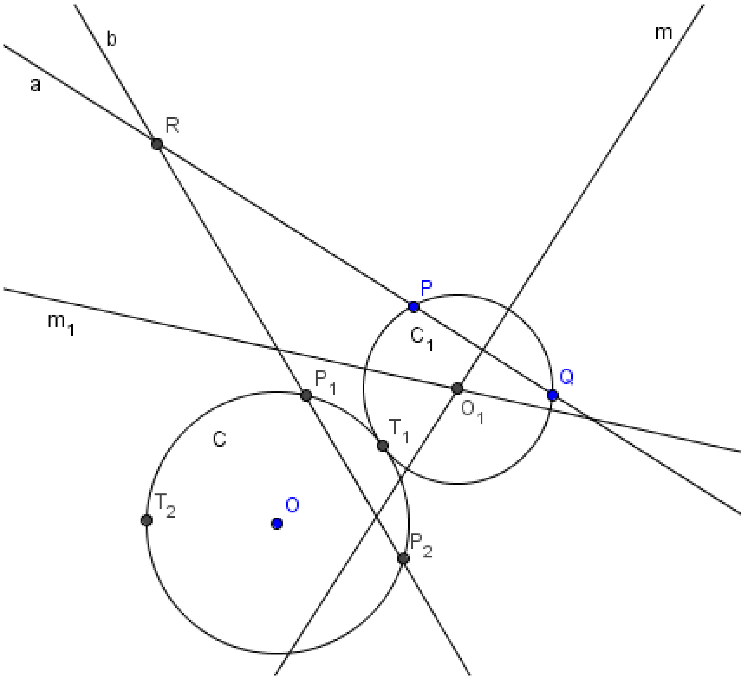


d) Trace a circunferência D_1 cujo diâmetro é $\overline{OR}$ e suas interseções com C são os pontos $T_1 \; e \; T_2$ (assim, $R\widehat{T_1}O \cong R\widehat{T_2}O = 90°$);

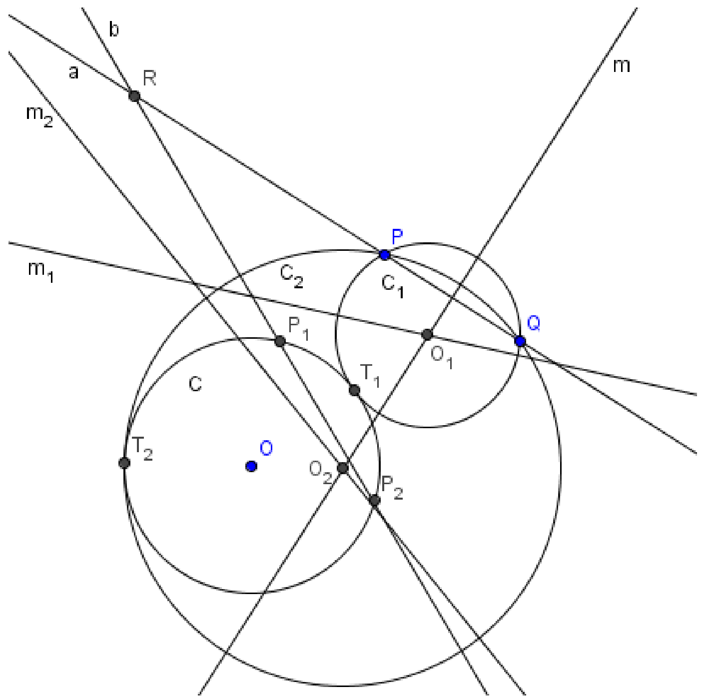


e) Chegamos assim a duas soluções:

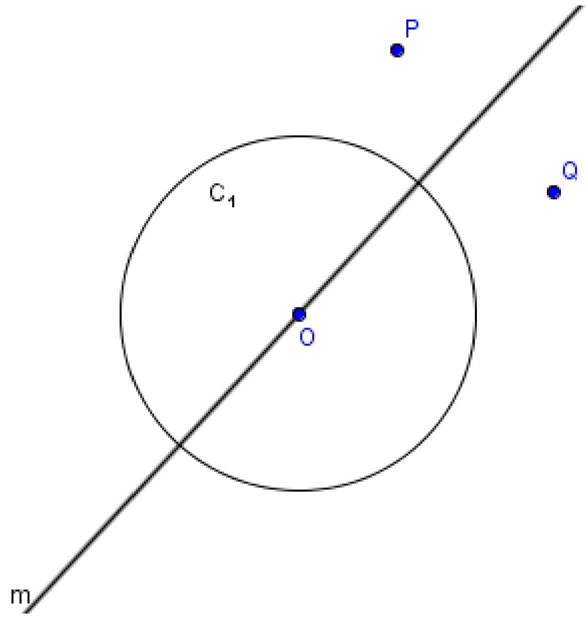
i) Trace a mediatriz m_1 de $\overline{PT_1}$. A interseção entre m e m_1 é o centro O_1 da circunferência C_1 que passa por P e Q, e é tangente a C;



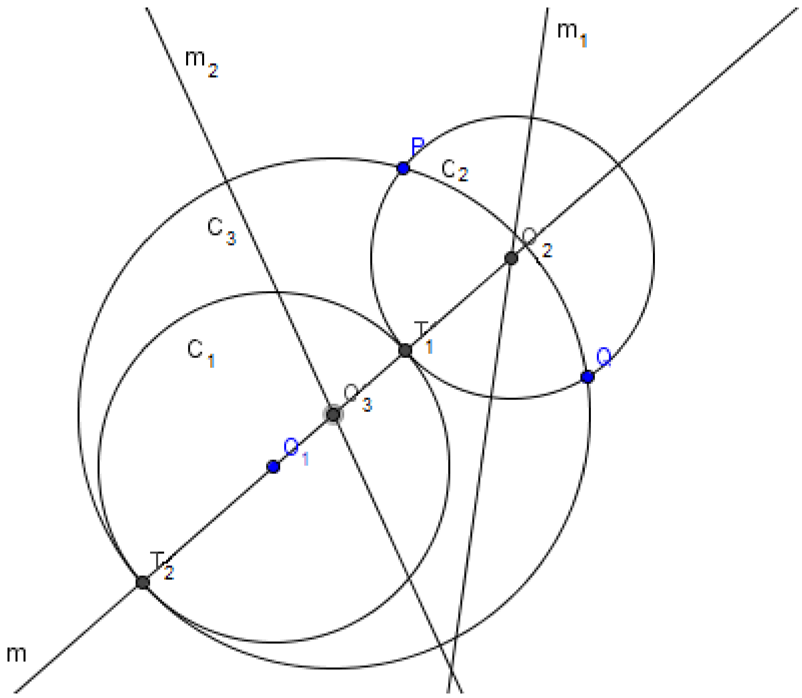
ii) Trace a mediatriz m_2 de $\overline{PT_2}$. A interseção entre m e m_2 é o centro O_2 da circunferência C_2 que passa por P e Q, e é tangente a C.



2ª situação: A mediatriz do segmento formado pelos dois pontos passa pelo centro da circunferência.



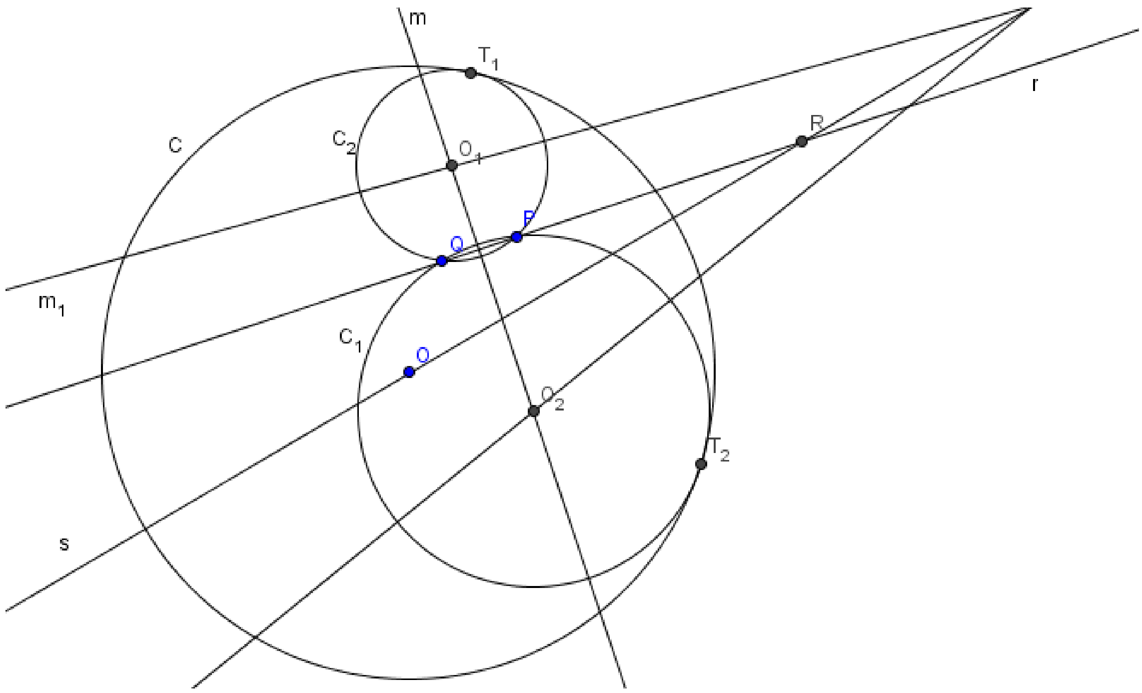
Nesse caso, também haverá duas soluções.



Ache as mediatrizes m, entre P e Q, m_1, entre Q e T_1, e m_2, entre P e T_2. Ache então os centros O_2 e O_3 das respectivas circunferências-solução C_2 e C_3.

Caso 5. Os dois pontos são internos ao círculo.

As soluções para esse caso são encontradas da mesma forma que foram encontradas para o caso dos pontos externos.

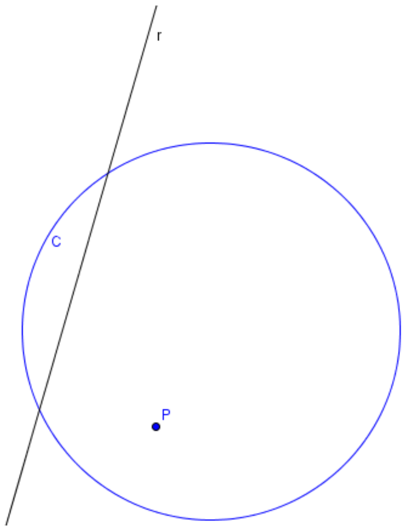

m
T1
r
R
C
C2
O1
P
Q
m1
C1
O
O2
T2
s

2.4. PRC

Os casos a seguir serão discutidos conforme a posição da reta r em relação à circunferência C. As situações de posição do ponto serão vistas caso a caso.

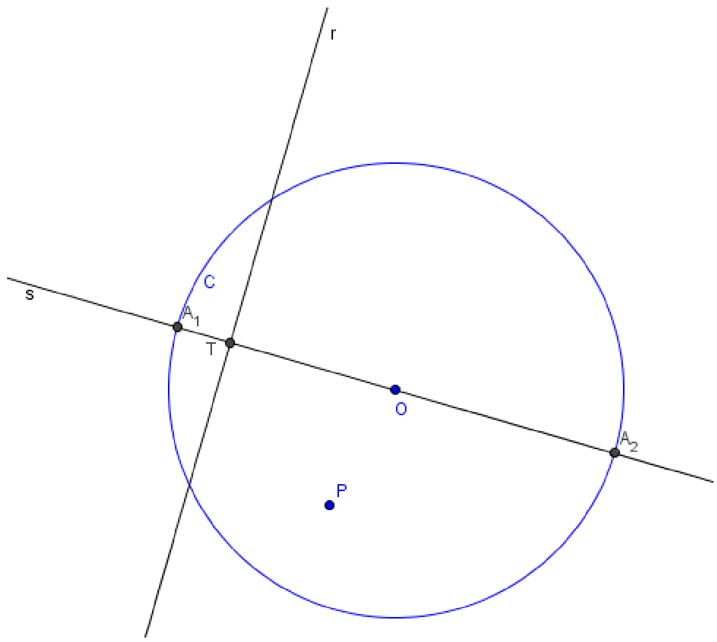
Caso 1. A reta é secante à circunferência.

1ª situação – O ponto é interno à circunferência e não pertence à reta.

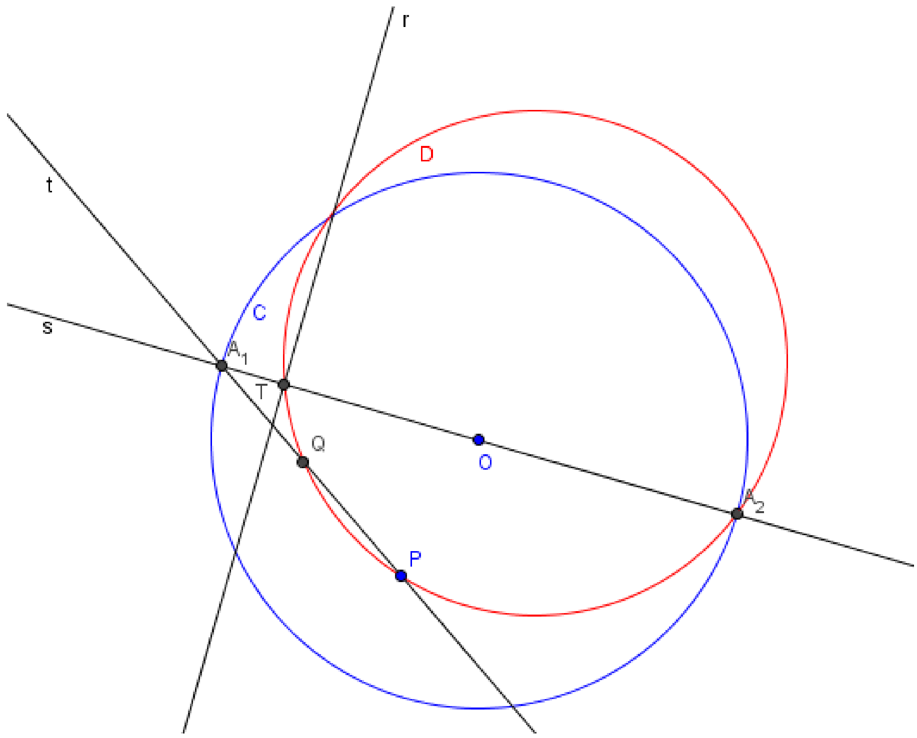


Neste caso, há duas soluções. A intenção é reduzir o problema a PPR, caso 3, 2ª situação. A justificativa disso pode ser encontrada em [8], onde é mostrado o fato de que as circunferências-solução do PRC devem conter o ponto Q, definido em (b), abaixo. Indicaremos passo a passo o procedimento a ser feito, que será usado também em outras situações.

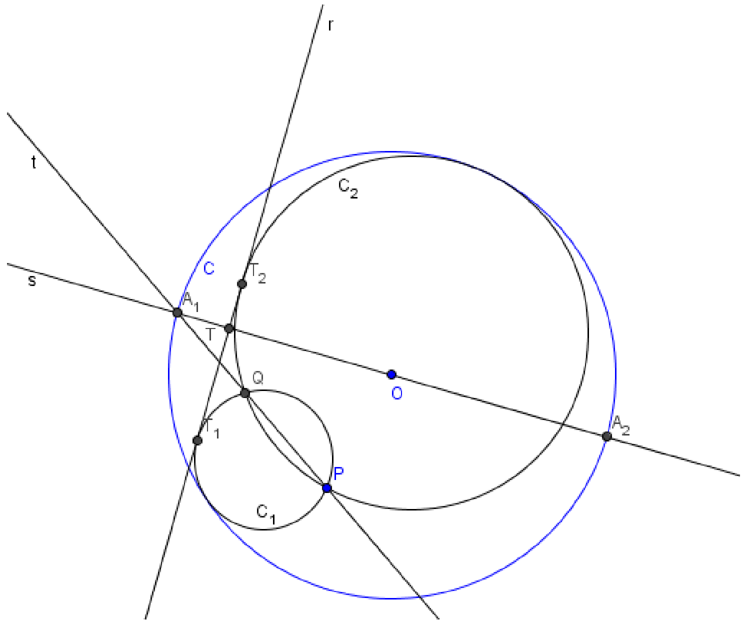
a) Trace a reta s perpendicular à reta r e que passa pelo centro O da circunferência C. Seja T a interseção de s com r. Denotemos as interseções de s com C por A_1 e A_2;



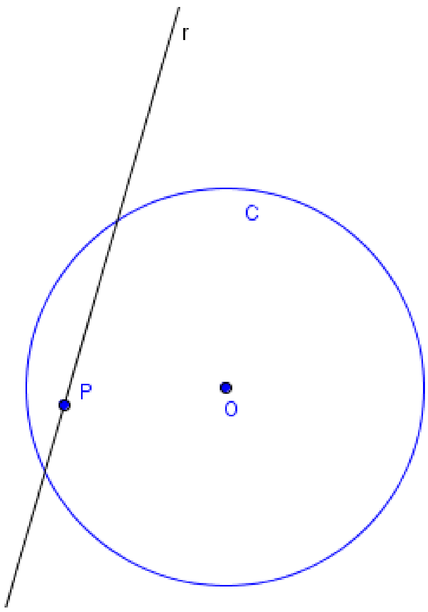
b) Trace a reta $t = \overleftrightarrow{A_1P}$ e a circunferência D que passa pelos pontos T, P e A_2. Na interseção de t com D marque o ponto Q.



c) Considere agora a construção PPR, caso 3, 2ª situação, 2ª construção, para o caso dos pontos P e Q, mais a reta r. Encontramos assim as duas soluções.



2ª situação – O ponto é interno à circunferência e pertence à reta.

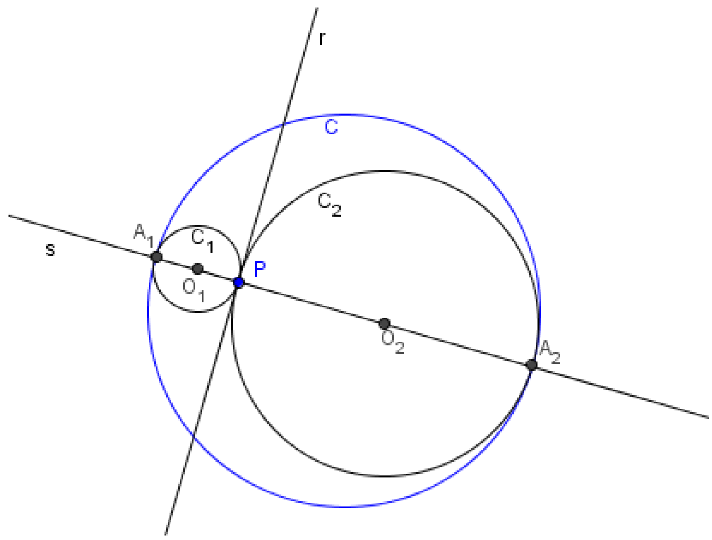


Nesta situação há duas soluções. Note que os centros $O_1\, e\, O_2$ das circunferências-solução dessa situação pertencem à reta s, que é perpendicular à reta r no ponto P, pois P será o ponto de tangência das soluções com a reta r. Portanto, o problema é encontrar os pontos de tangência $T_1\, e\, T_2$ em C, tal que $O_1P = O_1T_1$ e $O_2P = O_2T_2$.

Temos duas construções:

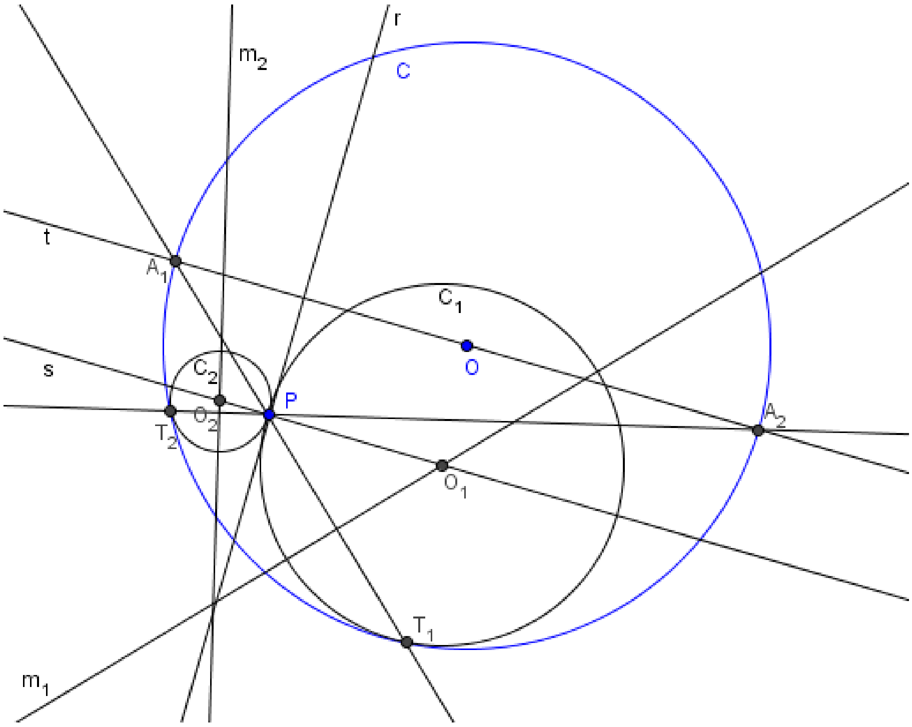
1ª construção: s contém um diâmetro da circunferência C.

Os pontos $O_1\, e\, O_2$ são os pontos médios de $\overline{A_1P}\, e\, \overline{A_2P}$, respectivamente, sendo os pontos $A_1 = T_1\, e\, A_2 = T_2$ as interseções de s com C.

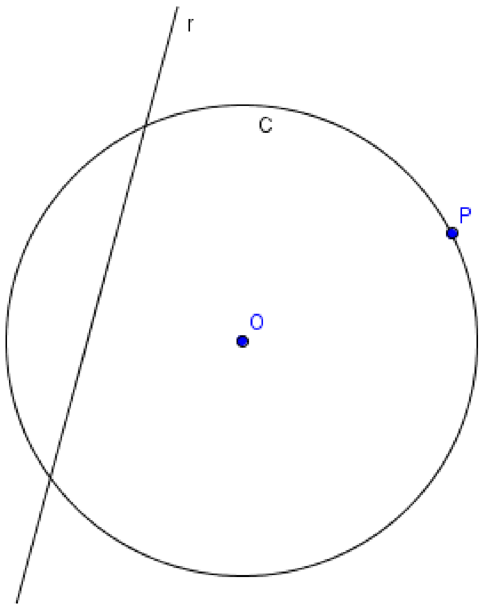


2ª construção: s não contém um diâmetro da circunferência C.

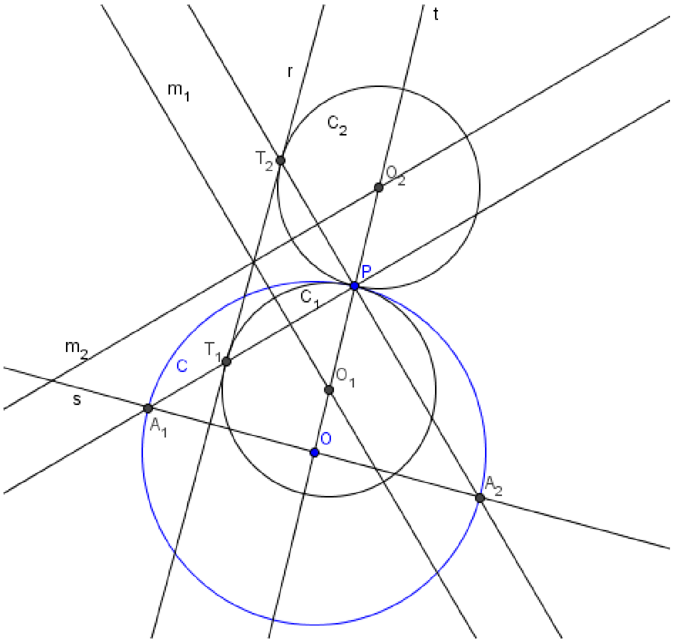
Traçando a perpendicular t em relação à reta r que passa por O, marcamos os pontos $A_1\, e\, A_2$ na interseção com C. Traçando as retas $\overleftrightarrow{PA_2}\, e\, \overleftrightarrow{PA_1}$, marcamos, respectivamente, os pontos $T_1\, e\, T_2$ na interseção com C. Portanto, $O_1\, e\, O_2$ são as interseções de s com as mediatrizes $m_1\, e\, m_2$, de $\overline{PT_1}\, e\, \overline{PT_2}$, respectivamente.



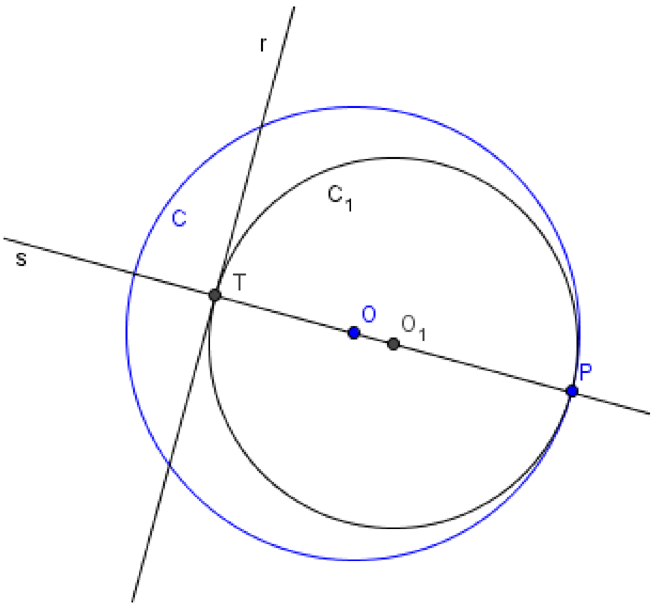
3ª situação – O ponto pertence à circunferência e não pertence à reta r.



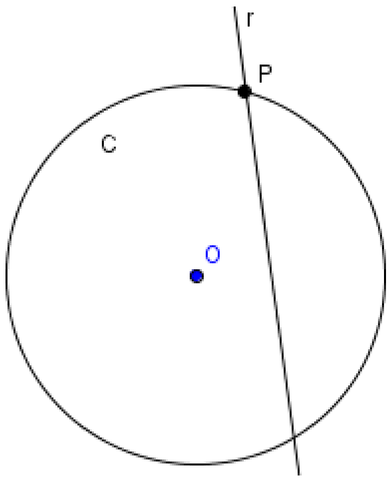
1ª construção: a reta $\overleftrightarrow{PO}$ não é perpendicular a r. Aqui temos duas soluções, pois existe uma circunferência tangente interna, além de outra externa à circunferência C, ambas passando por P. A construção é igual ao método apresentado logo acima.



2ª construção: a reta $\overleftrightarrow{PO}$ é perpendicular à reta r. Neste caso, temos uma solução, que é a circunferência C_1, de raio $\overline{O_1P}$ e centro O_1, sendo O_1 o ponto médio entre o ponto P e o ponto T de interseção da reta r com $\overleftrightarrow{PO}$.

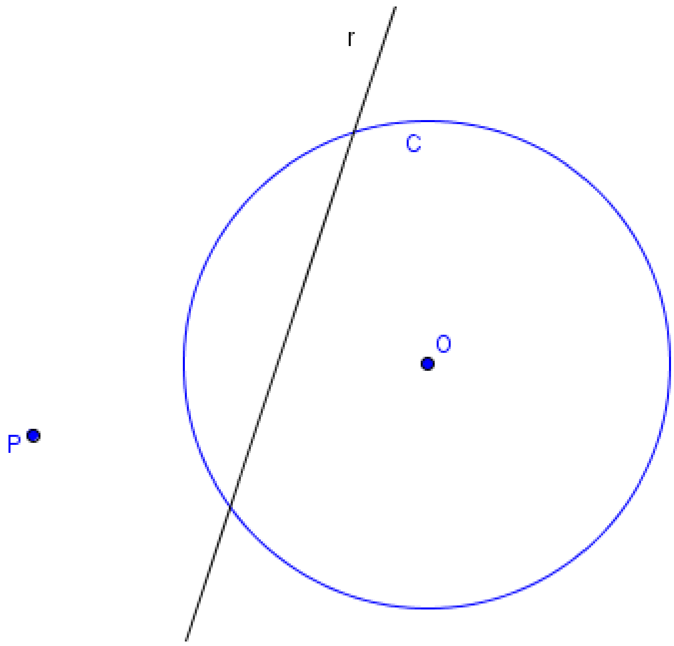


4ª situação – O ponto pertence à circunferência e à reta.

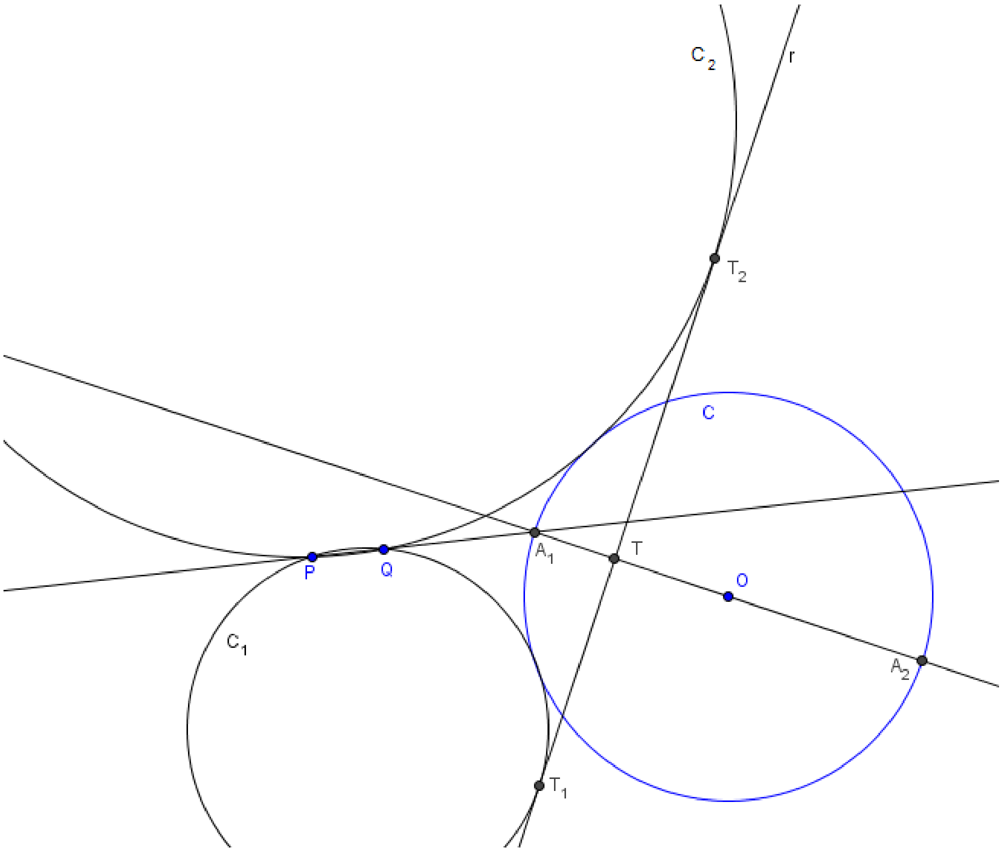


Neste caso a solução não tem solução.

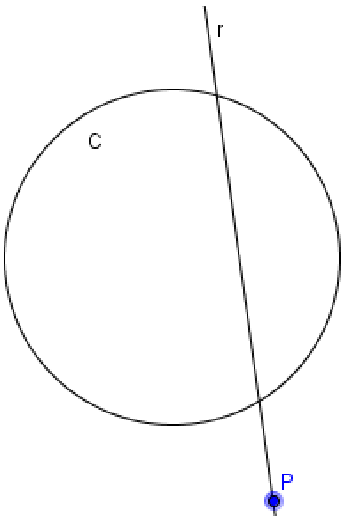
5ª situação – O ponto é exterior à circunferência e não pertence à reta.



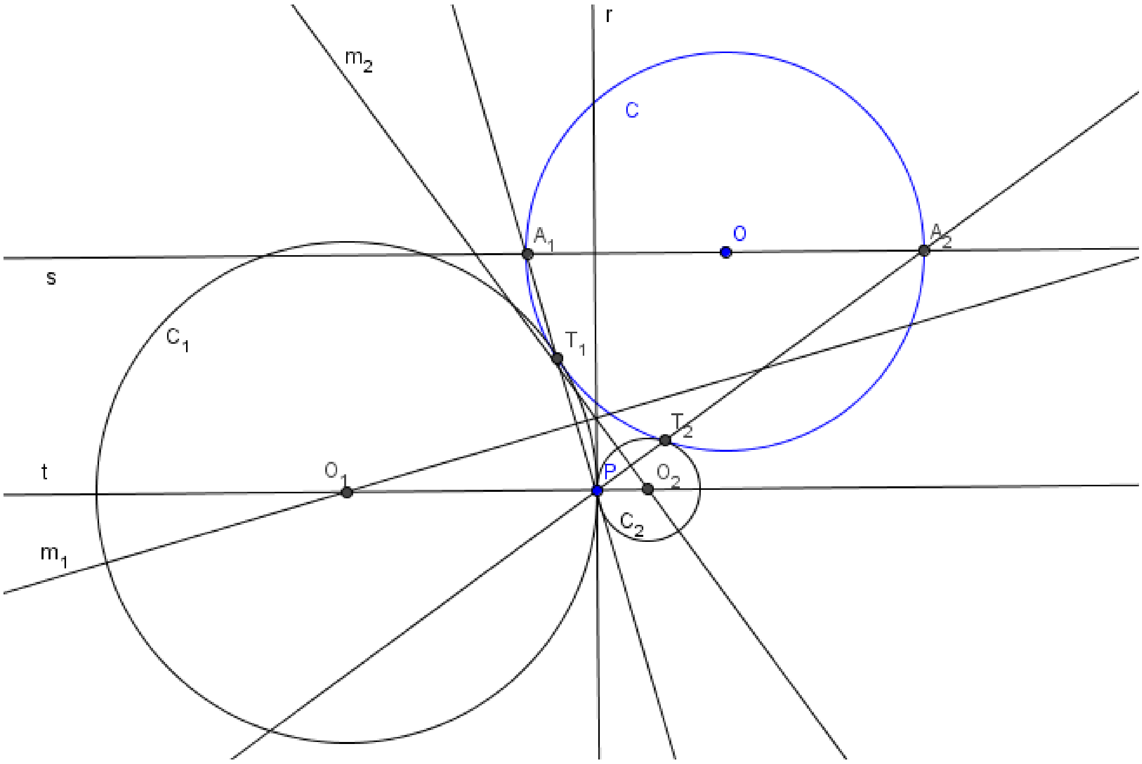
Temos duas soluções construídas de modo igual ao Caso 1, 1ª situação, 2ª construção, desta seção.



6ª situação – O ponto é exterior à circunferência e pertence à reta.



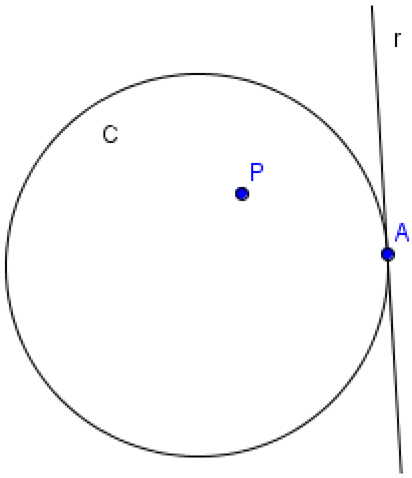
Há duas soluções: os centros $O_1 \, e \, O_2$, respectivamente, das circunferências-solução $C_1 \, e \, C_2$ pertencem à reta t, perpendicular à reta r no ponto P. Portanto, basta traçar a perpendicular s à reta r no ponto O, marcando os pontos $A_1 \, e \, A_2$. Traçando as retas $\overleftrightarrow{A_1P} \, e \, \overleftrightarrow{A_2P}$, encontramos, respectivamente, os pontos de tangência $T_1 \, e \, T_2$. Assim temos as circunferências $C_1 \, e \, C_2$ passando, respectivamente, por T_1e P, e por T_2 e P.



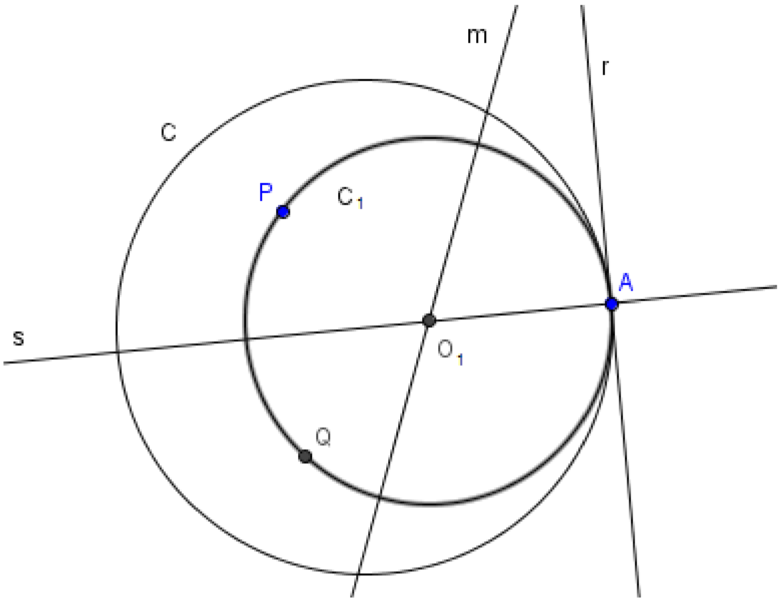
Caso 2. A reta é tangente à circunferência, no ponto A.

Esse caso é comentado na referência [8].

1ª situação – O ponto P é interior à circunferência.



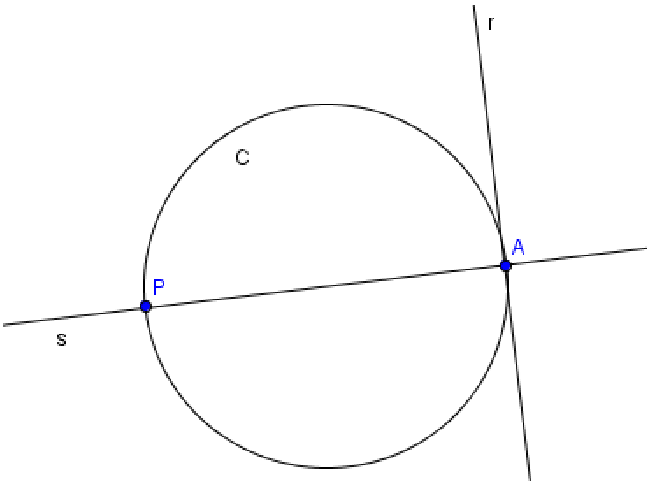
Existe apenas uma solução nesta situação. Basta determinar o ponto Q, que seja simétrico ao ponto P em relação à reta perpendicular à reta r no ponto A, que chamaremos de reta s. Esse fato garante que a reta s é a mediatriz de $\overline{PQ}$. Assim temos o centro da circunferência solução C_1, o ponto O_1, que é interseção entre a mediatriz de $\overline{AP}$ e s..



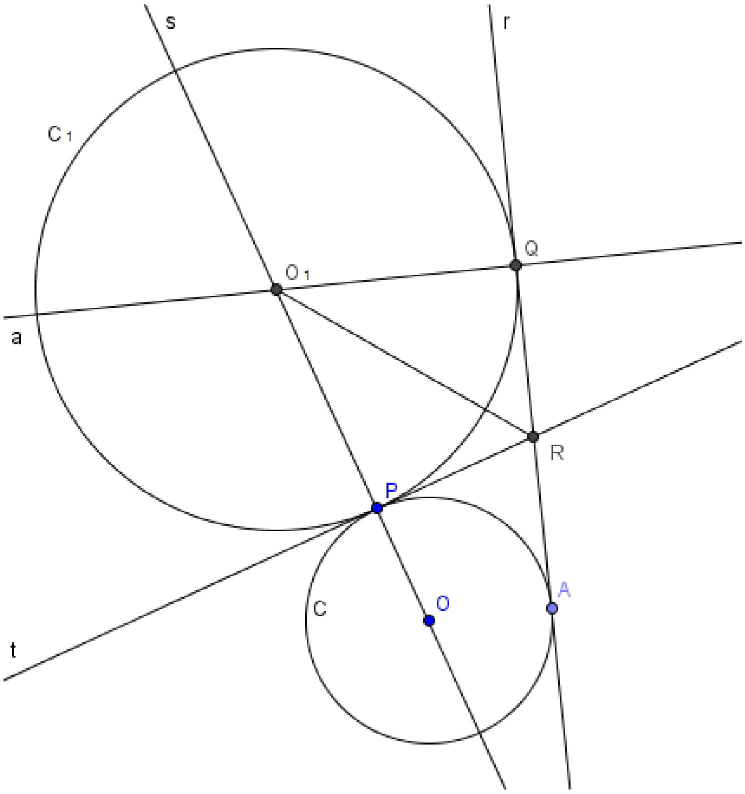
Obs. A reta m é mediatriz de $\overline{AP}$.

2ª situação – O ponto P pertence à circunferência e não pertence à reta.

Se $\overline{AP}$ for um diâmetro, não temos solução distinta de C.



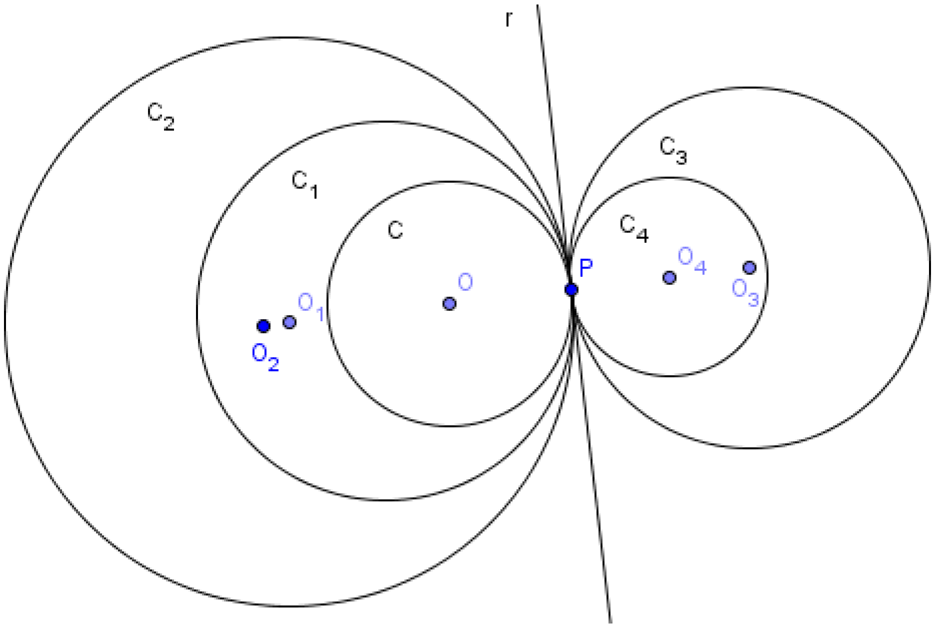
Se $\overline{AP}$ não for um diâmetro, temos uma solução. A circunferência solução C_1 é a circunferência tangente à reta r e que passa pelo ponto P.



Como mostramos na figura acima, para encontrar a circunferência C_1, temos que traçar a reta t, tangente à circunferência C no ponto P, e a reta s, perpendicular à reta t no ponto P. Sabe-se que t é tangente à circunferência C_1 e à circunferência C. Portanto, o centro O_1 da circunferência C_1 pertence à reta s. Marcando o ponto R na interseção das retas r e t, e o ponto Q pertencente à reta r tal que, $\overline{PR} \cong \overline{RQ}$, teremos que os triângulos ΔO_1PR e ΔO_1QR são congruentes. Portanto, traçando a reta a perpendicular à reta r no ponto Q, a interseção entre a reta a e a reta s é o ponto O_1, centro da circunferência C_1 de raio $\overline{PO_1}$.

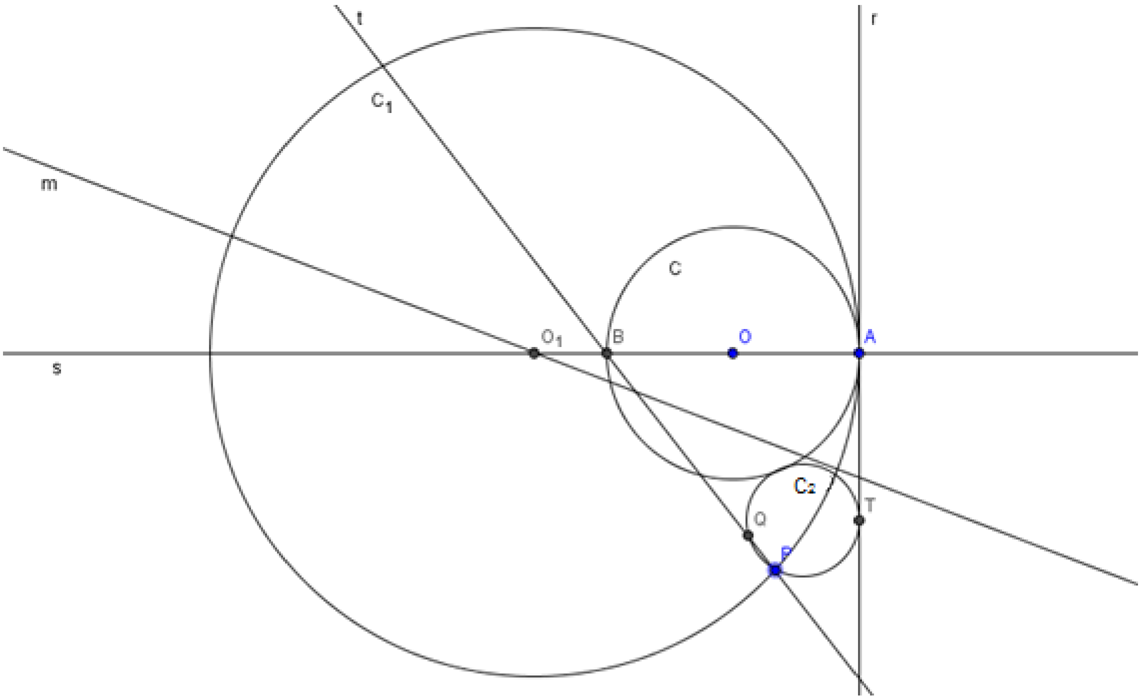
3ª situação: o ponto $P = A$.

Esta situação é interessante, pois qualquer circunferência que passa pelo ponto P e que é tangente à circunferência C é uma solução do problema. Portanto, temos uma infinidade de soluções de raios distintos.

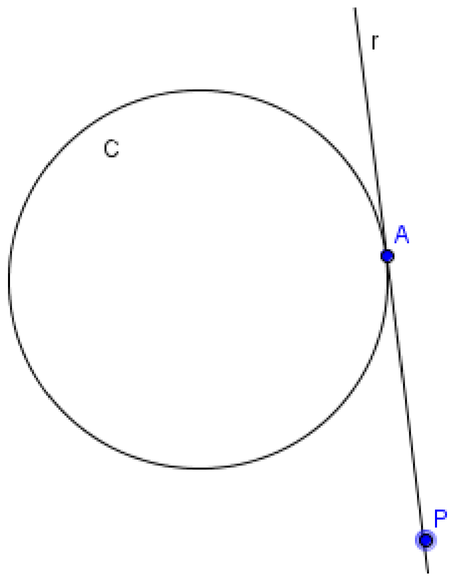


4ª situação – O ponto P é externo à circunferência e não pertence à reta.

Temos duas circunferências-solução C_1 e C_2 (ver referência [8]).



5ª situação – O ponto P é externo à circunferência e pertence à reta.



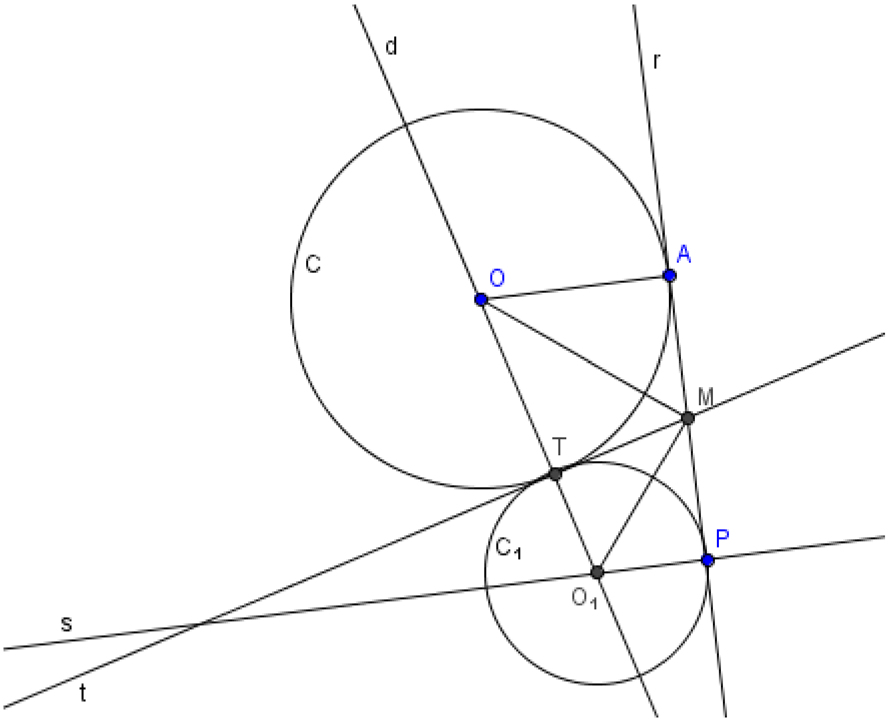
Temos uma solução. Para construí-la, temos que analisar alguns fatos:

- O_1 pertence à reta s perpendicular a r no ponto P.

- a reta $d = \overleftrightarrow{OO_1}$ é perpendicular à reta t, tangente às circunferências C e C_1 no ponto T.

- M é a interseção das retas r e t.

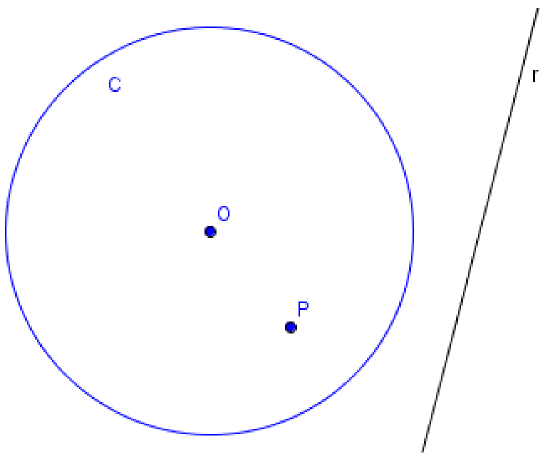
Assim, temos que $\Delta AOM \cong \Delta TOM$ e $\Delta TO_1M \cong \Delta PO_1M$. Portanto, $\overline{AM} \cong \overline{TM} \cong \overline{MP}$. Logo, M é ponto médio do segmento $\overline{AP}$.



Assim, na construção da solução, acha-se o ponto médio M e traça-se a reta t tangente à circunferência C, no ponto T, que passa por M. Traçando a reta d pelos pontos O e T, a interseção com a reta s é o centro O1 da circunferência C_1 com raio $\overline{PO_1}$.

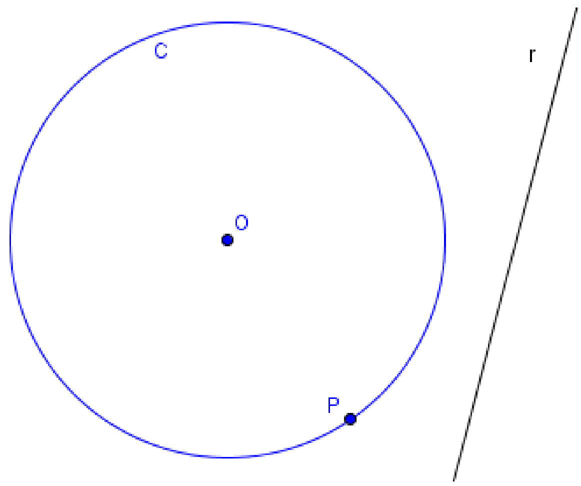
Caso 3. A reta é externa a circunferência.

1ª situação – O ponto é interno à circunferência.



Nesta situação não há solução.

2ª situação – O ponto pertence à circunferência.



Nesta situação temos duas soluções. A construção é simples, mas seu entendimento depende da verificação de algumas propriedades. Vamos primeiro supor o problema resolvido.

Na figura abaixo:

- ao traçar a reta $s = \overleftrightarrow{OP}$, notamos que os centros $O_1 \ e \ O_2$ das soluções $C_1 \ e \ C_2$, respectivamente, pertencem à reta s;

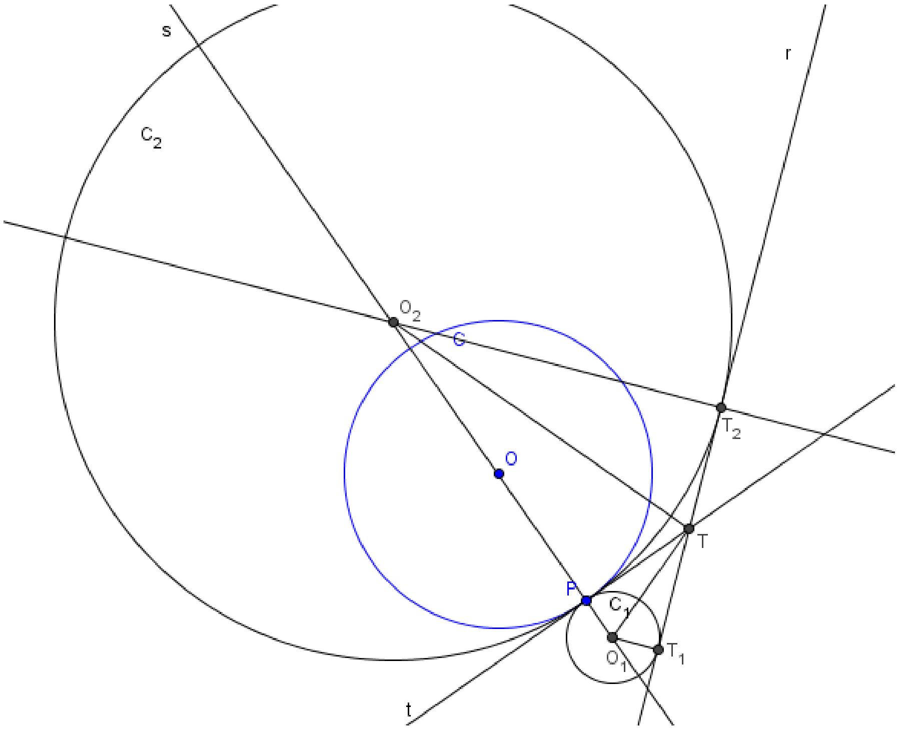
- ao traçar a reta t tangente à circunferência C, marquemos o ponto T na interseção de r e t;

- t e s são perpendiculares, portanto, o ângulo $O_1\hat{P}T$ é reto;

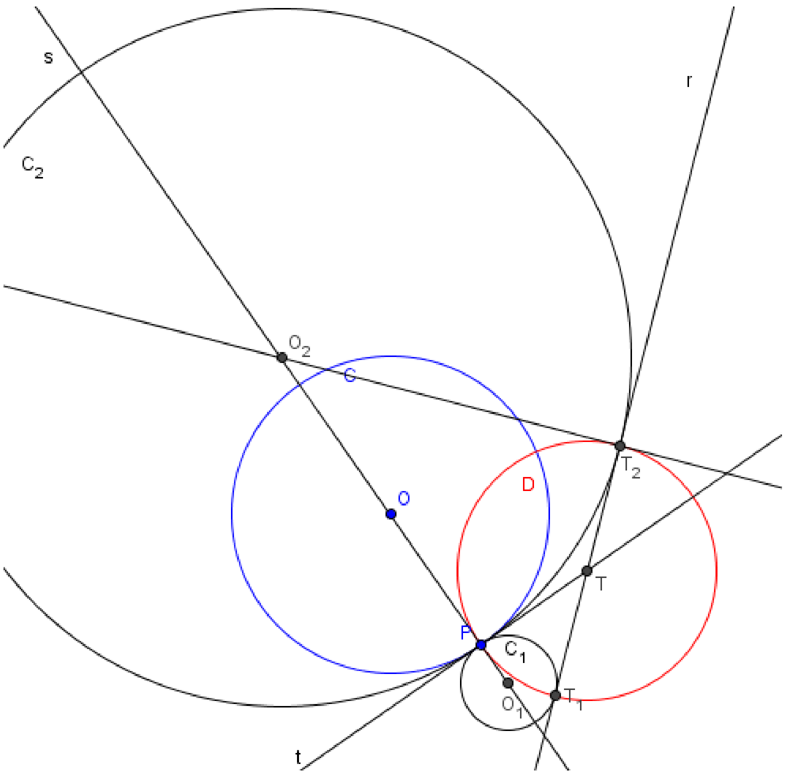
- O ângulo $O_1\widehat{T_1}T$ também é reto, pois T_1 é ponto de tangência entre C_1 e r;

- Assim temos que: $\Delta PTO_1 \cong \Delta T_1TO_1$ e $\Delta PTO_2 \cong \Delta T_2TO_2$, pois:

$$\begin{cases} O_1\hat{P}T \cong O_1\widehat{T_1}T \ são \ retos \\ \overline{TO_1} \text{ é } comum \\ \overline{PO_1} \cong \overline{T_1O_1} \ são \ o \ raio \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} O_2\hat{P}T \cong O_2\widehat{T_2}T \ são \ retos \\ \overline{TO_2} \text{ é } comum \\ \overline{PO_2} \cong \overline{T_2O_2} \ são \ o \ raio \end{cases}$$

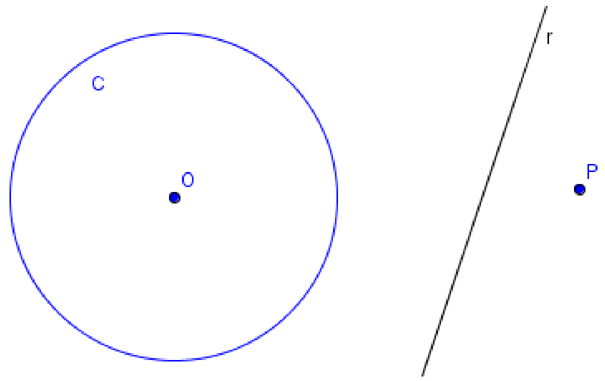


Assim, para construir as soluções $C_1 \, e \, C_2$, basta encontrar os pontos $T_1 \, e \, T_2$ que são as interseções da circunferência auxiliar D e a reta r. A circunferência D tem raio $\overline{PT}$ e centro T.

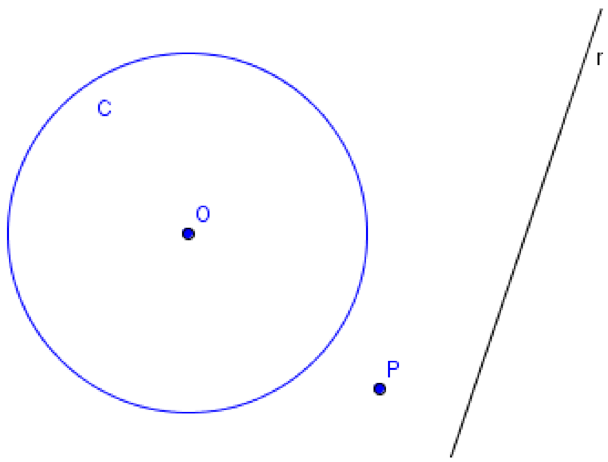


3ª situação – O ponto é externo à circunferência e não pertence à reta.

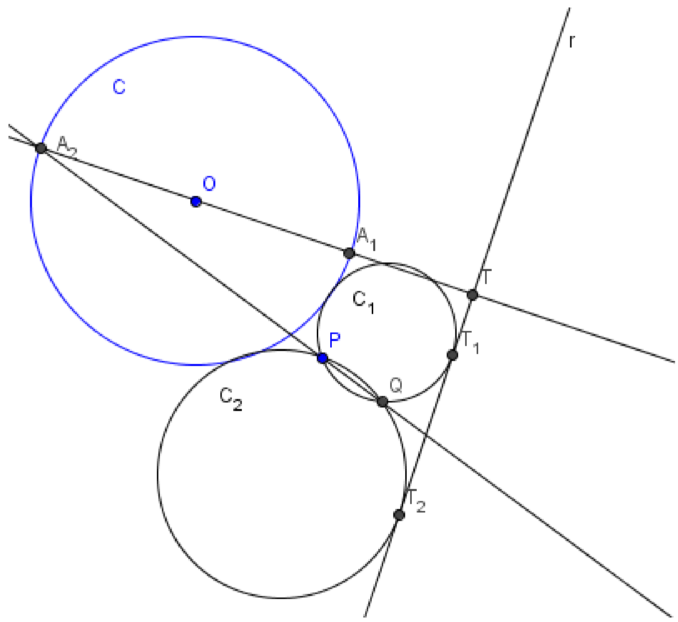
Se P está em lado oposto à circunferência C em relação à reta r, não temos solução.



Mas, se o ponto P está no mesmo lado da circunferência C, vai haver duas soluções.

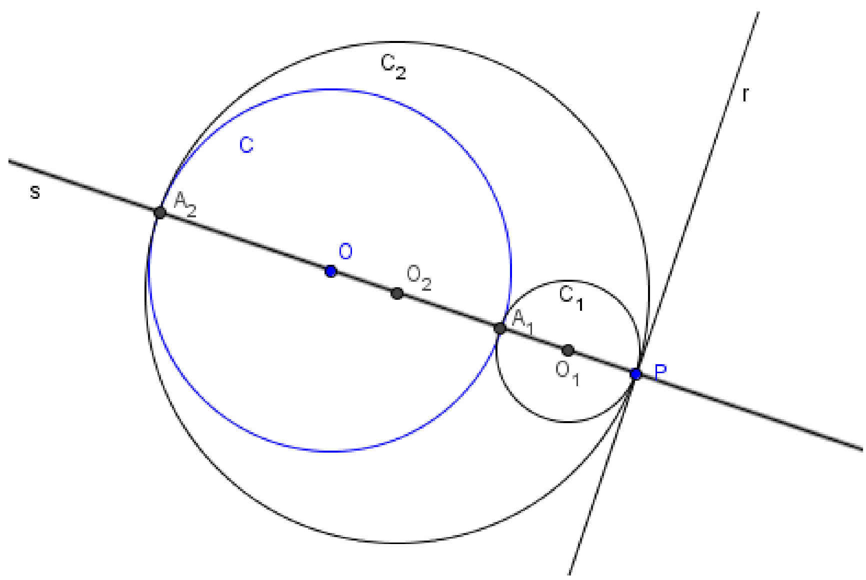


A construção é da mesma forma que no Caso 1, 1ª situação, 2ª construção desta seção.

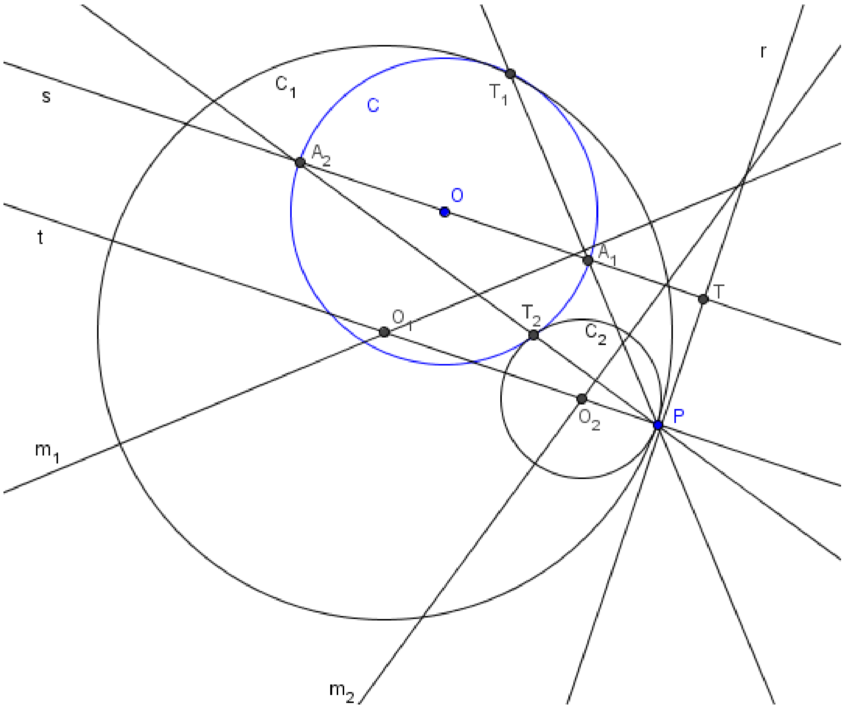


4ª situação – O ponto é externo à circunferência e pertence à reta.

1ª construção: o ponto P pertence à reta s, que é perpendicular à reta r e passa pelo ponto O. Temos duas soluções e a construção é simples.



2ª construção: o ponto P não pertence à reta s, que é perpendicular à reta r e passa pelo ponto O. Nesta situação, temos duas soluções, e a construção é análoga a do Caso 1, 2ª situação, 2ª construção.

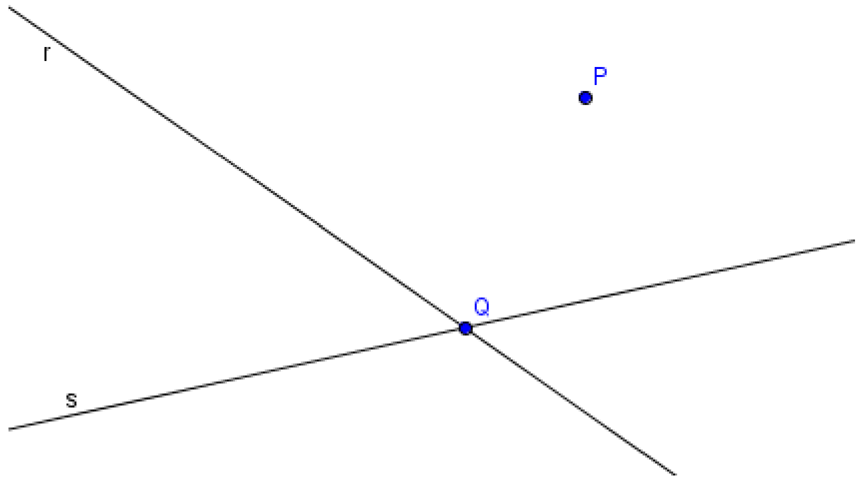

s
C_1
C
T_1
r
A_2
O
t
A_1
T
O_1
T_2
C_2
O_2
P
m_1
m_2

2.5. PRR

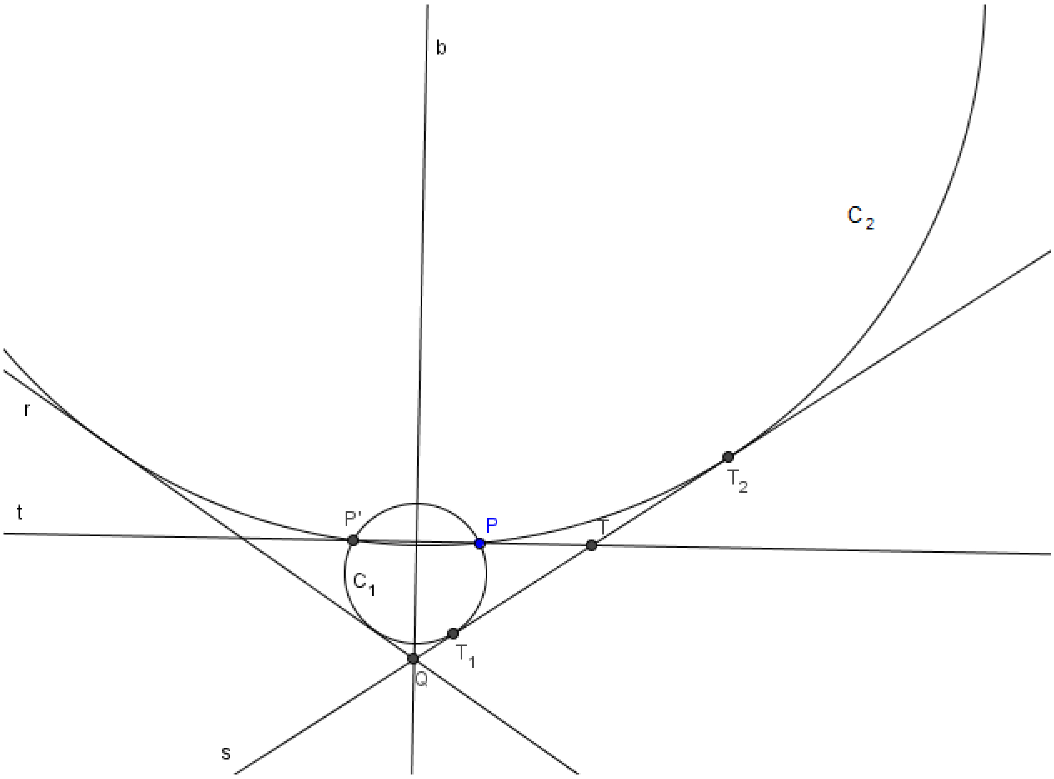
Os casos apresentados a seguir são dados conforme as posições relativas das duas retas, r e s, e as situações do ponto P.

Caso 1. As retas r e s são concorrentes no ponto Q.

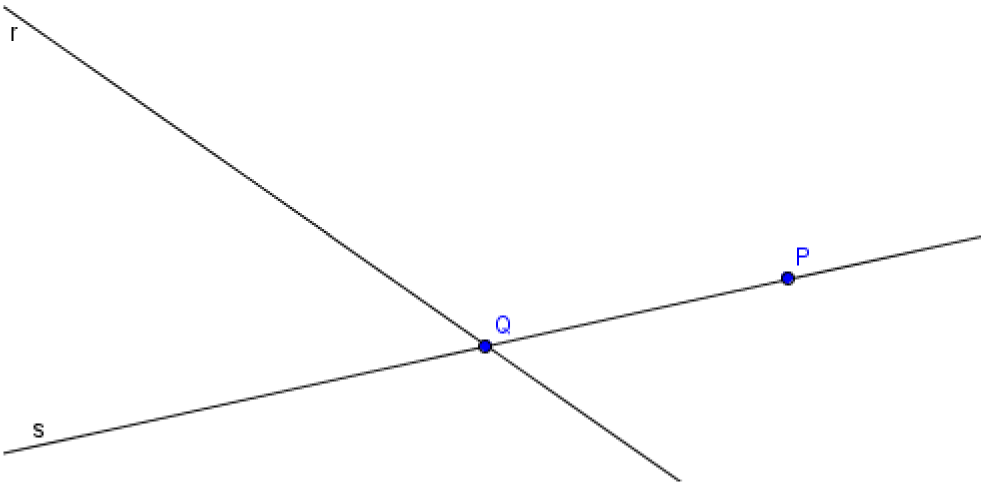
1ª situação: P não pertence a nenhuma das retas.



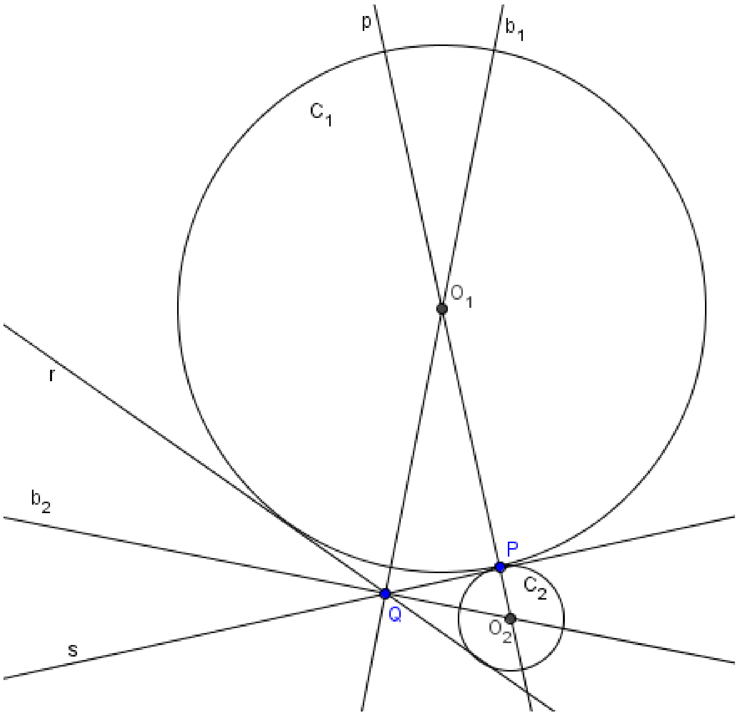
Nesta situação temos duas soluções. Os centros das circunferências devem pertencer a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s no vértice Q. Assim, traçando essa bissetriz b e tomando o simétrico P' do ponto P em relação à bissetriz b, reduzimos a situação ao problema PPR, Caso 3, 2ª situação.



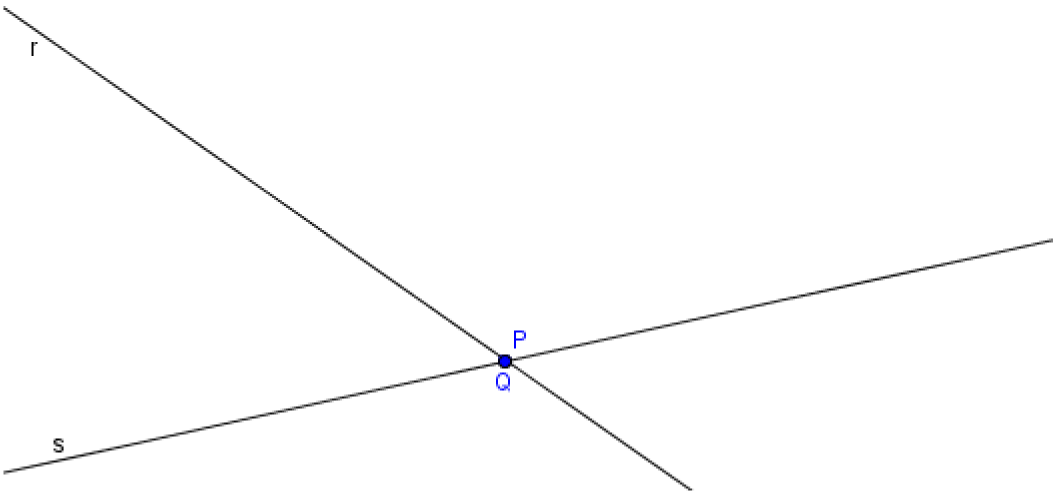
2ª situação: P pertence a uma das retas.



Nesta situação temos duas soluções. Sua construção é mais fácil, pois os centros das circunferências, além de pertencerem às bissetrizes entre r e s no vértice Q, pertencem à reta perpendicular a s no ponto P.



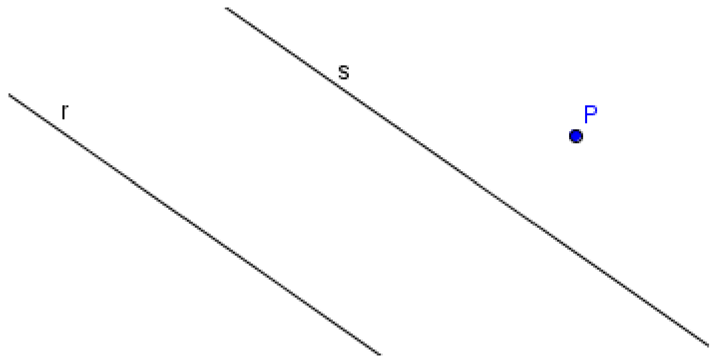
3ª situação: $P = Q$.



Nesta situação não há solução (a não ser que consideremos como solução um círculo de raio igual a zero).

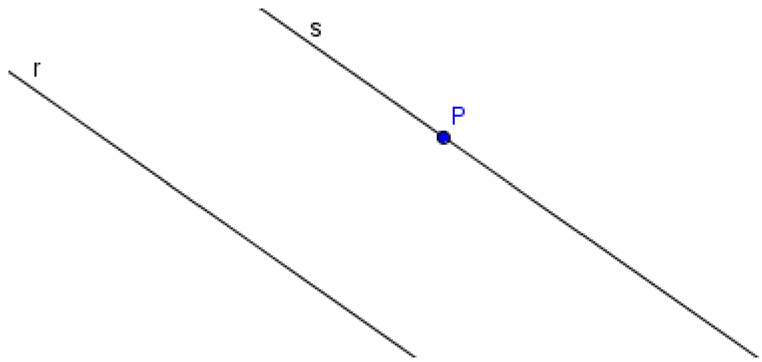
Caso 2. r e s são paralelas.

1ª situação: P não pertence a ambas as retas e está no mesmo lado em relação às duas retas.

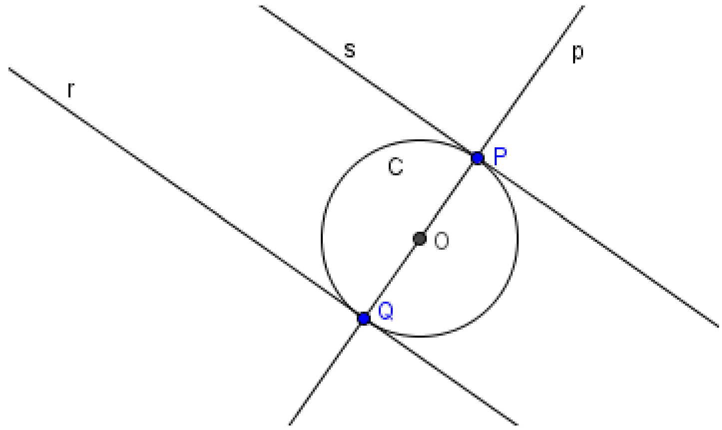


Nesta situação não há solução.

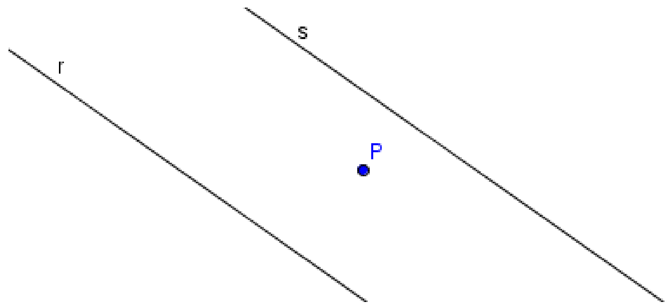
2ª situação: P pertence a uma das retas.



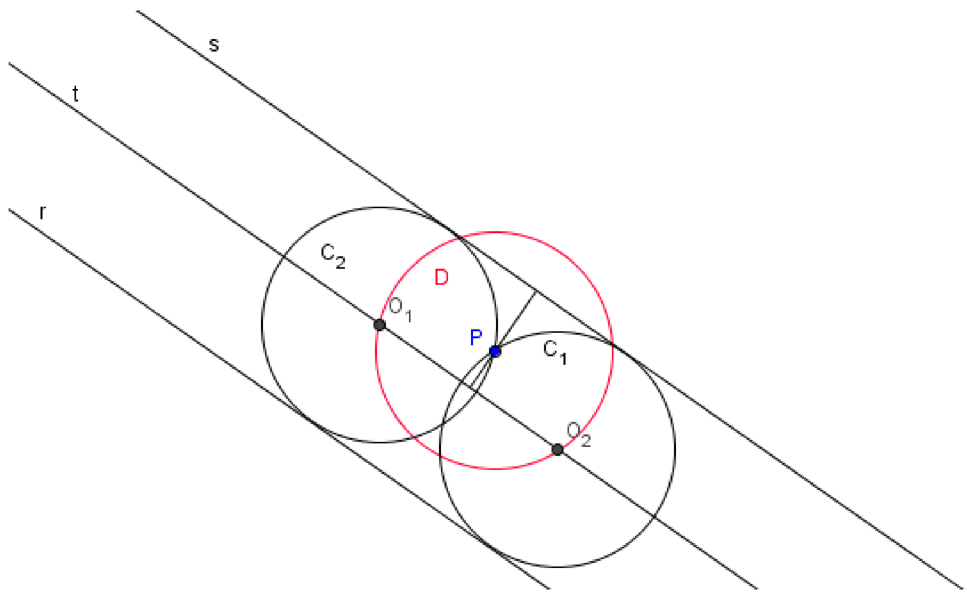
Nesta situação há uma solução. Basta traçar a perpendicular a s no ponto P encontrando o ponto Q em r. Agora, achando o ponto médio de $\overline{PQ}$, encontramos o centro O da circunferência C, solução do problema.



3ª situação: P não pertence a ambas as retas e está entre elas.



Nesta situação há duas soluções. Podemos verificar que o raio das circunferências é a metade da distância entre r e s. Assim para determinar a solução basta traçar a reta t, que equidista de r e s, e uma circunferência auxiliar D, com centro em P e raio igual à distância entre s e t. Na interseção da reta t com a circunferência D, determinamos os centros $O_1\ e\ O_2$, das circunferências $C_1\ e\ C_2$, respectivamente, com raio igualà da circunferência D.



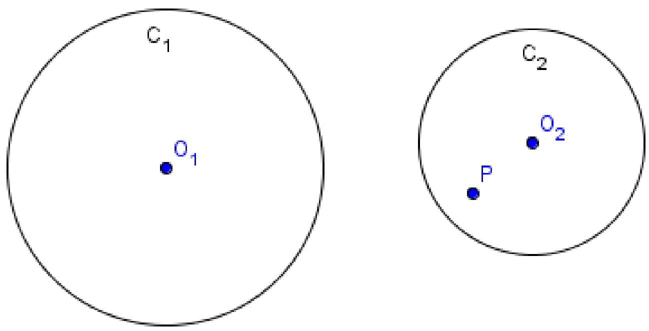
2.6. PCC

Vamos separar os casos conforme as posições relativas entre as duas circunferências $C_1\ e\ C_2$, estudando as diversas situações do ponto P.

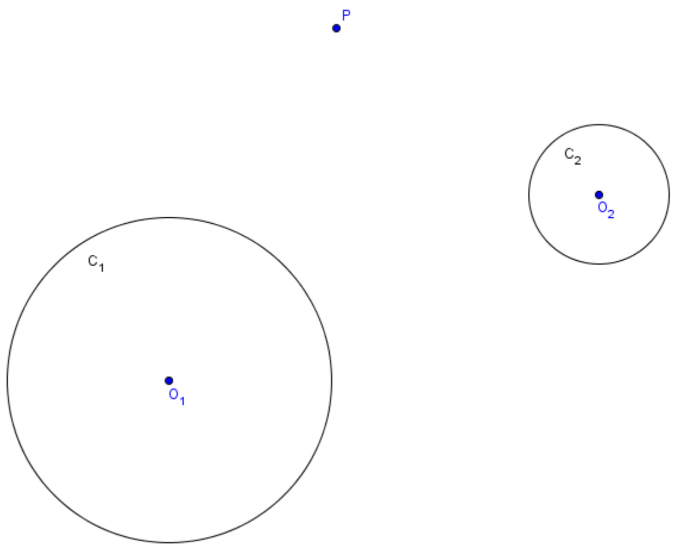
Caso 1. As circunferências $C_1\ e\ C_2$são externas.

1ª situação: P é interno a uma das circunferências.

Não há solução.



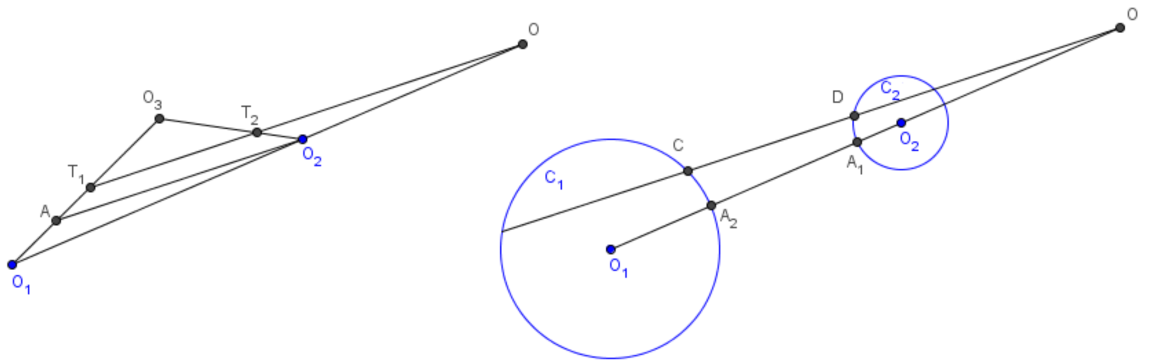
2ª situação: P é externo às duas circunferências.



Primeiramente, se T_1 e T_2 são os pontos de tangência de C_3, uma das duas soluções externas a ambas (a outra seria C_4), eles pertencem aos lados $\overline{O_1O_3}$ e

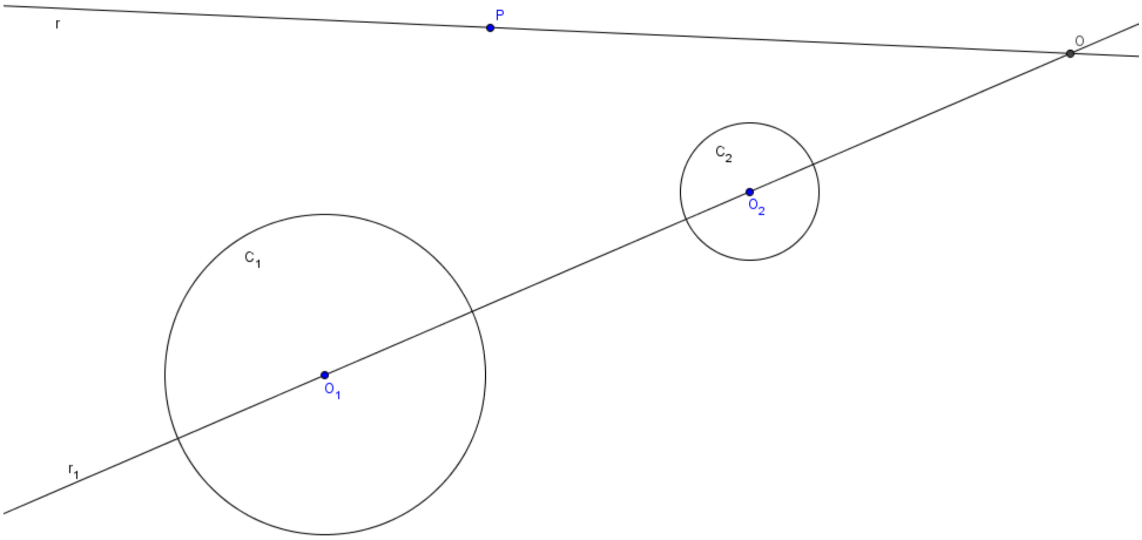
$\overline{O_2O_3}$, respectivamente, do triângulo formado pelos centros O_1, O_2 e O_3. Notemos que, na figura a seguir, a reta que passa por T_1 e T_2 intercepta a reta que passa por O_1 e O_2 no ponto O. Por construção, AT_1 = O_2T_2 = r_2, e os triângulos ΔOT_1O_2 e ΔO_2AO_1 são semelhantes. Logo, temos que OO_1 / OO_2 = O_1T_1 / AT_1 = r_1/r_2. Conclusão: O é o centro homotético, em relação às duas circunferências, de razão r_1/r_2. Mas isso significa que $OC.OD$ é constante para quaisquer C e D, conforme a figura a seguir. Em particular, se $C = T_1$ e $D = T_2$.

Assim, a reta que passa por O e P vai cortar C_3 em um ponto Q, e teremos então a seguinte relação: $OP.OQ$ = $OT_1.OT_2$ = $OA_1.OA_2$. A construção a seguir tem por finalidade determinar o ponto Q, que vai servir para achar as duas soluções que são externas a ambas as circunferências. Há duas outras soluções referentes a uma construção análoga, com centro de homotetia interno.

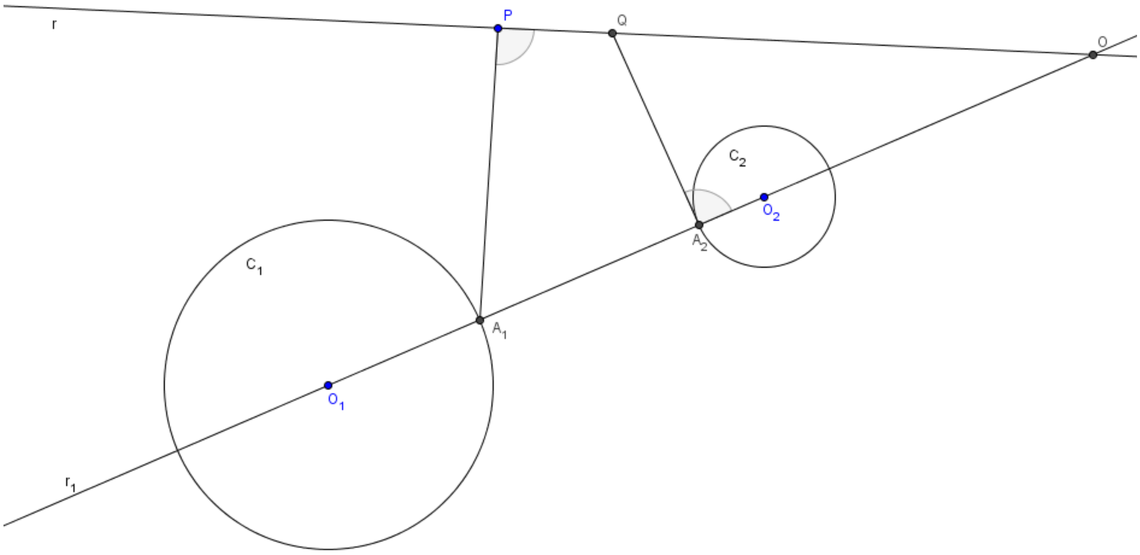


Descrição dos passos:

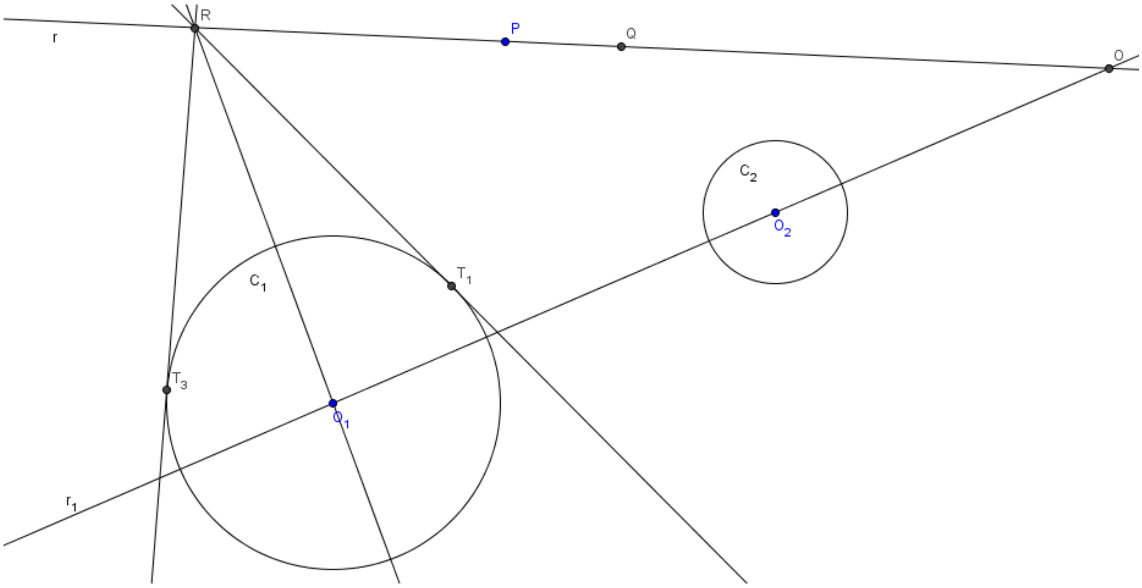
a) Construir o centro homotético externo O na reta $\overline{O_1O_2}$ e traçar a reta $r = \overleftrightarrow{OP}$;



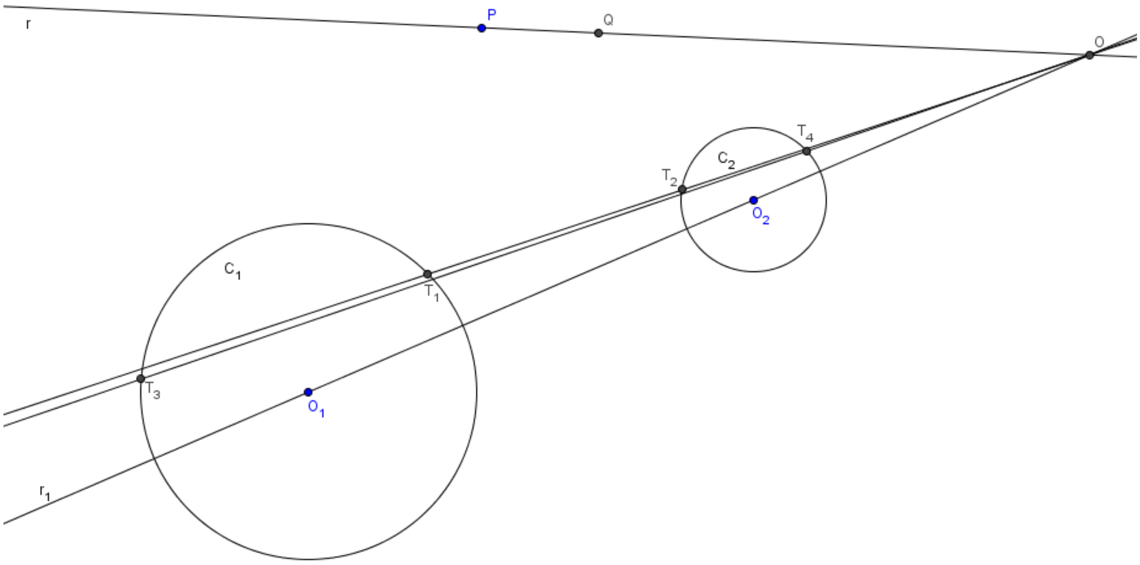
b) Construir os triângulos ΔOPA_1 e ΔOA_2Q semelhantes, tais que A_1 e A_2 são pontos de $\overline{O_1O_2}$ e Q é ponto $\overline{OP}$;



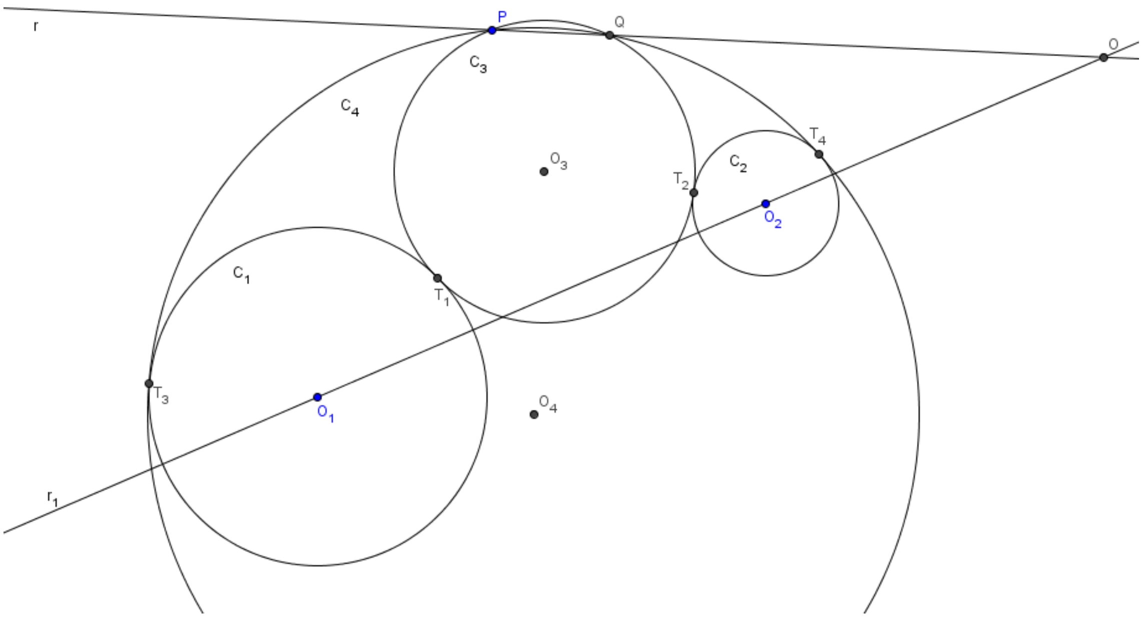
c) Usando o método no caso PPC para dois ângulos externos P e Q, encontrar os pontos T_1 e T_3 em C_1;



d) Trace as retas $\overleftrightarrow{OT_1}$e $\overleftrightarrow{OT_3}$, marque os pontos T_2 e T_4 na interseção das retas com C_2, tais que estejam em lados opostos ao centro O_2;

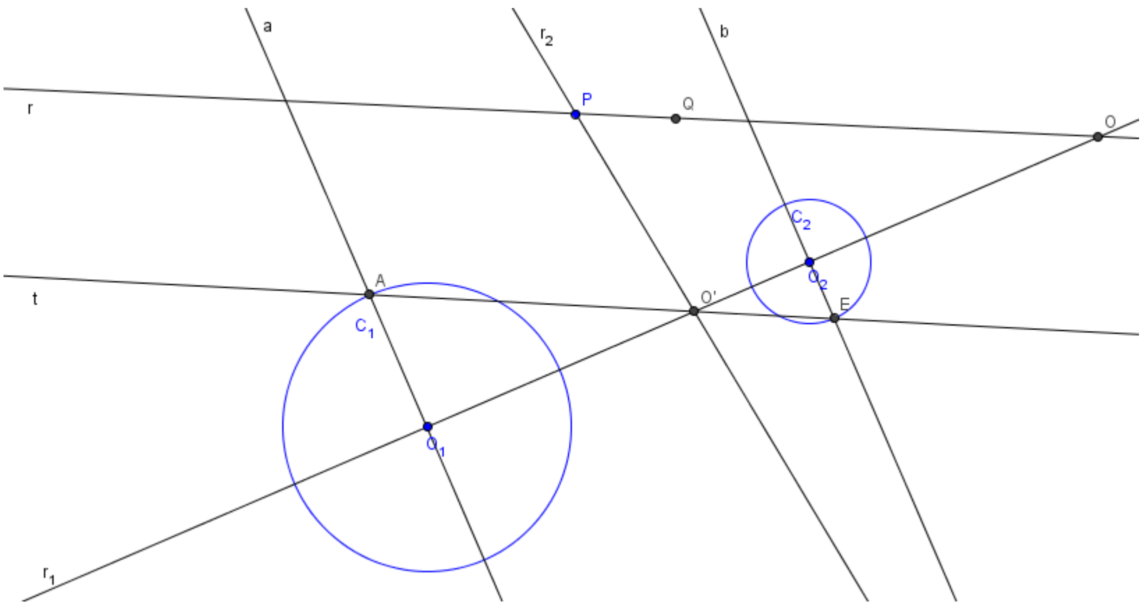


e) Traçando as mediatrizes $m, m_1 e\, m_2$ de $\overline{PQ}, \overline{PT_1}\ e\ \overline{PT_3}$, respectivamente, temos os centros das circunferências-solução C_3 e C_4: O_3, que é a interseção entre $m\ e\ m_1$; O_4, interseção entre $m\ e\ m_2$;

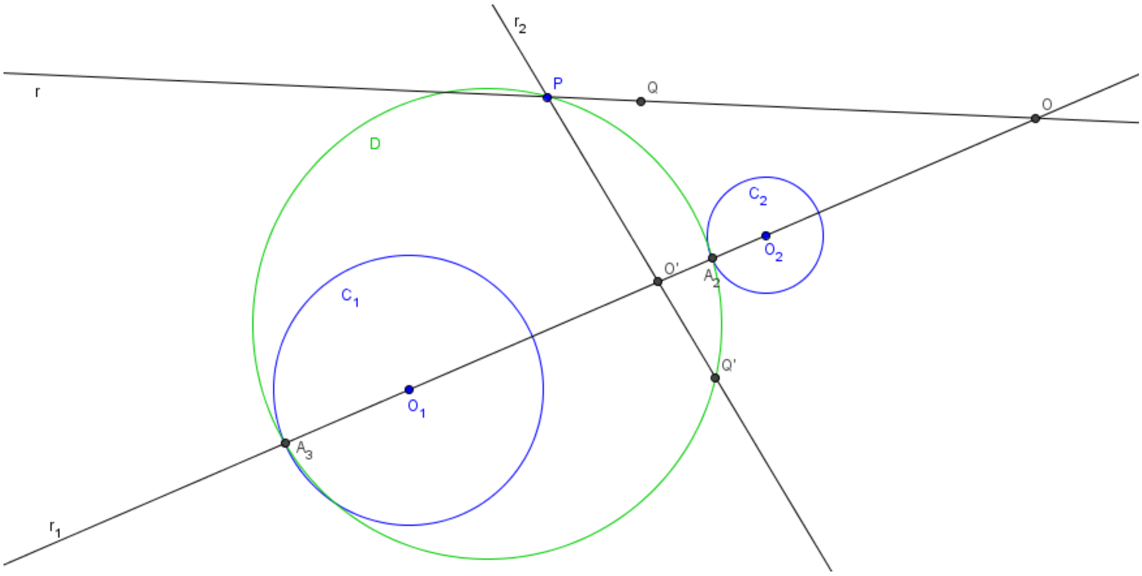


Vamos repertir o processo com o centro de homotetia interno O’, visto em [5], onde encontramos as circunferências $C_5 \, e \, C_6$, soluções do problema, que passam por P e Q’.

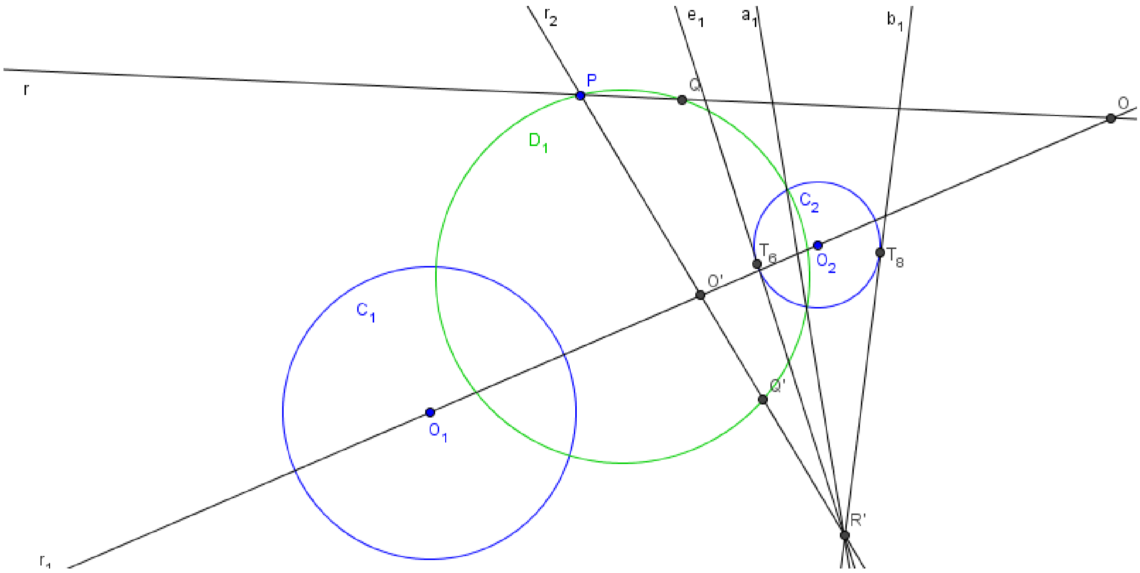
f) Ache o centro homotético interno O' na reta $\overline{O_1O_2}$ e trace a reta $r_2 = \overleftrightarrow{O'P}$;



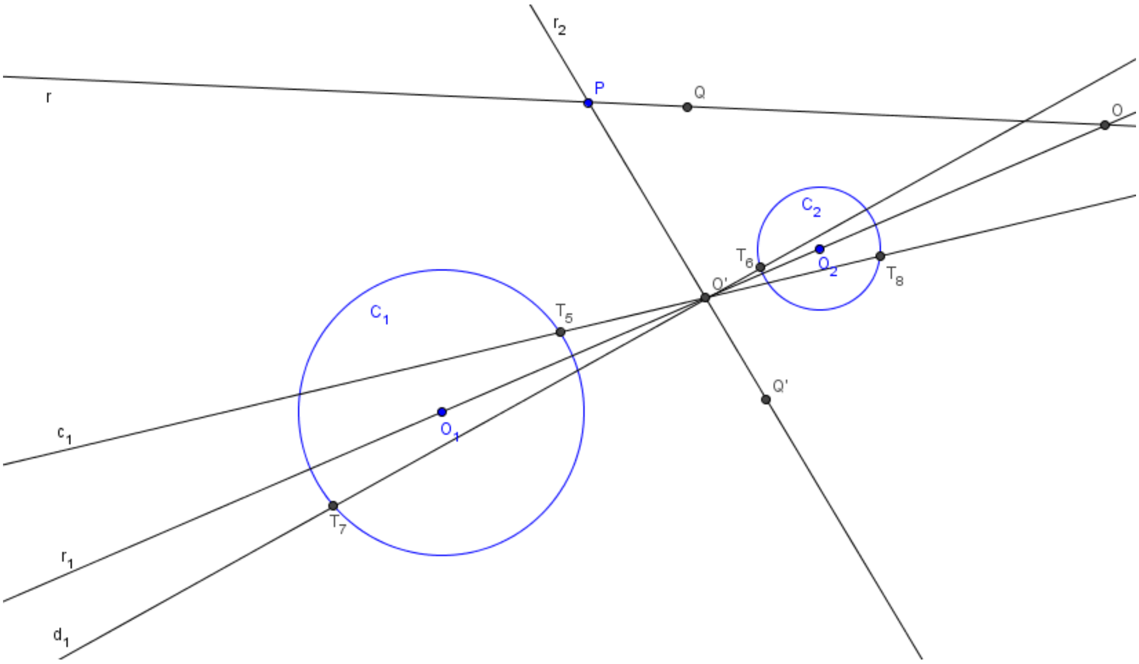
g) Trace uma circunferência auxilar D, que passa pelos ponto P, A_1 e A_3. A interseção de D com a reta r_2 é o ponto Q'.



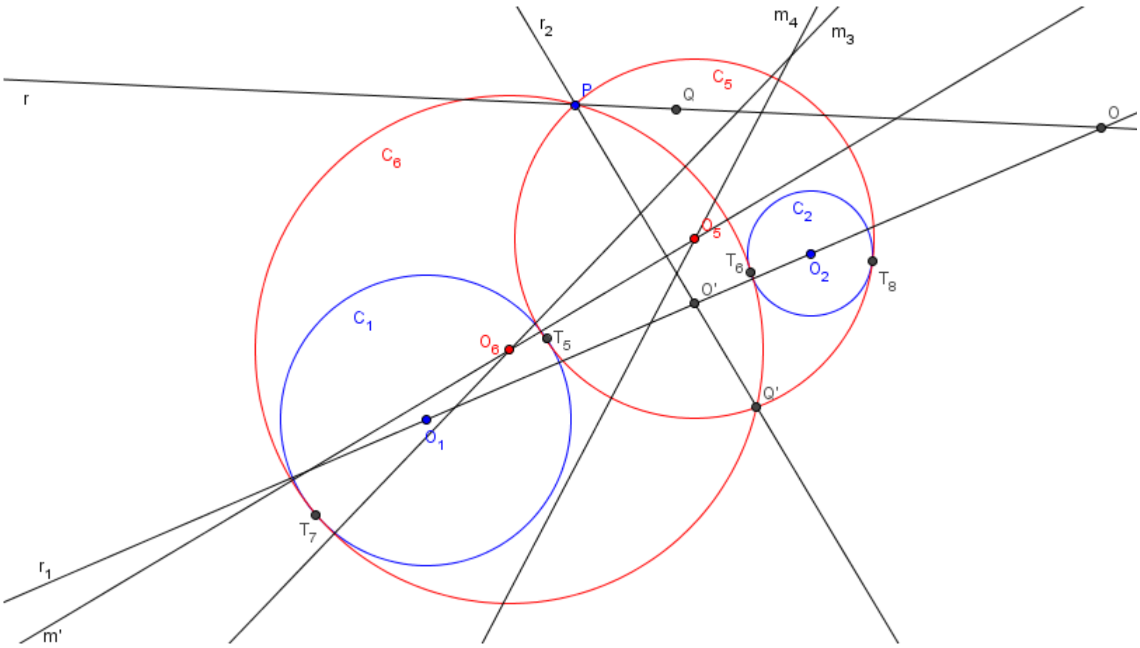
h) Usando o método no caso PPC para dois ângulos externos P e Q', encontre os pontos T_6 e T_8 em C_2;



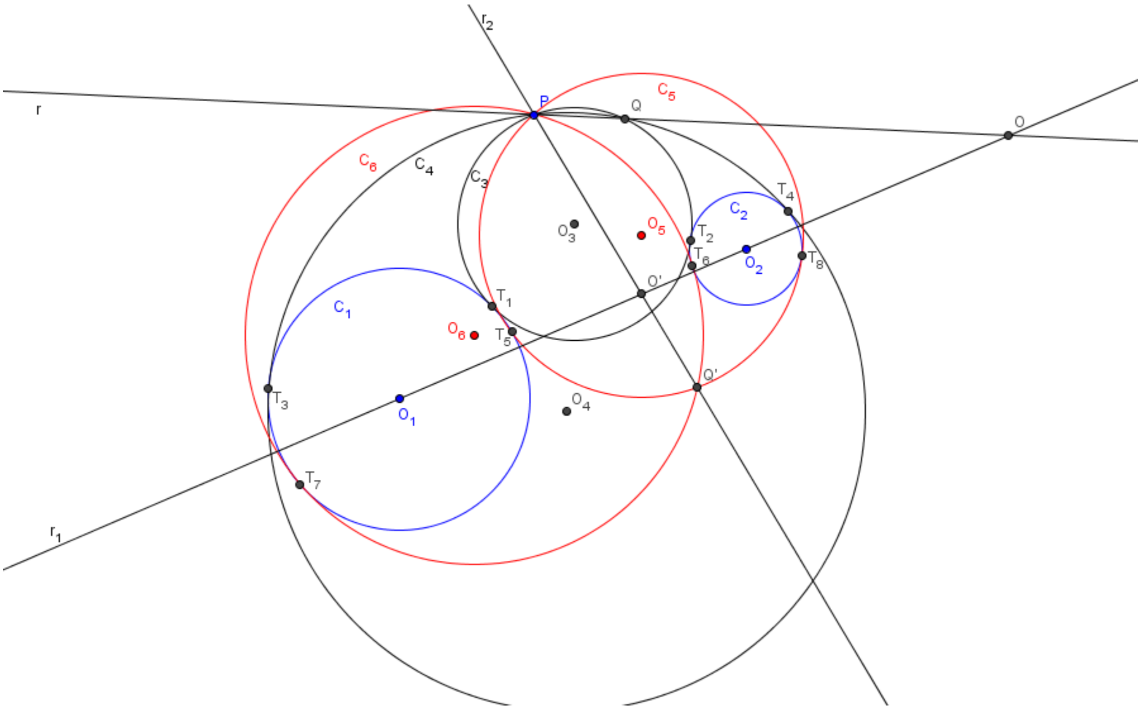
i) Trace as retas $\overleftrightarrow{O'T_6}$ e $\overleftrightarrow{O'T_8}$, marque os pontos T_5 e T_7 na interseção das retas com C_1, tais que estejam em lados opostos ao centro O_1;



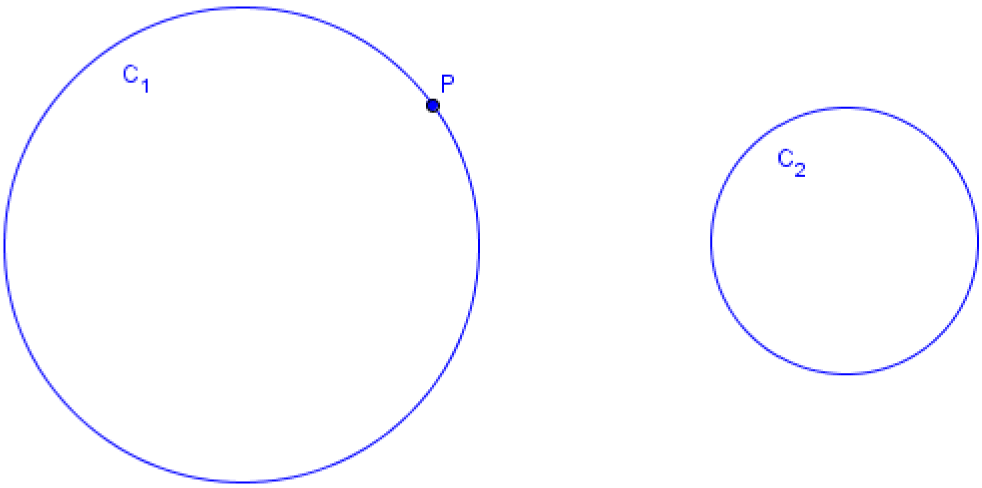
j) Traçando as mediatrizes $m', m_3 \; e \; m_4$ de $\overline{PQ'}, \overline{PT_6} \; e \; \overline{PT_8}$, respectivamente, temos os centros das circunferências-solução C_6 e C_5: O_6, interseção entre $m' \; e \; m_3$; e O_5, interseção entre $m' \; e \; m_4$;



Assim, as quatro soluções possíveis são as circunferências em vermelho e preto, a seguir.



3ª situação: P pertence a uma das circunferências.



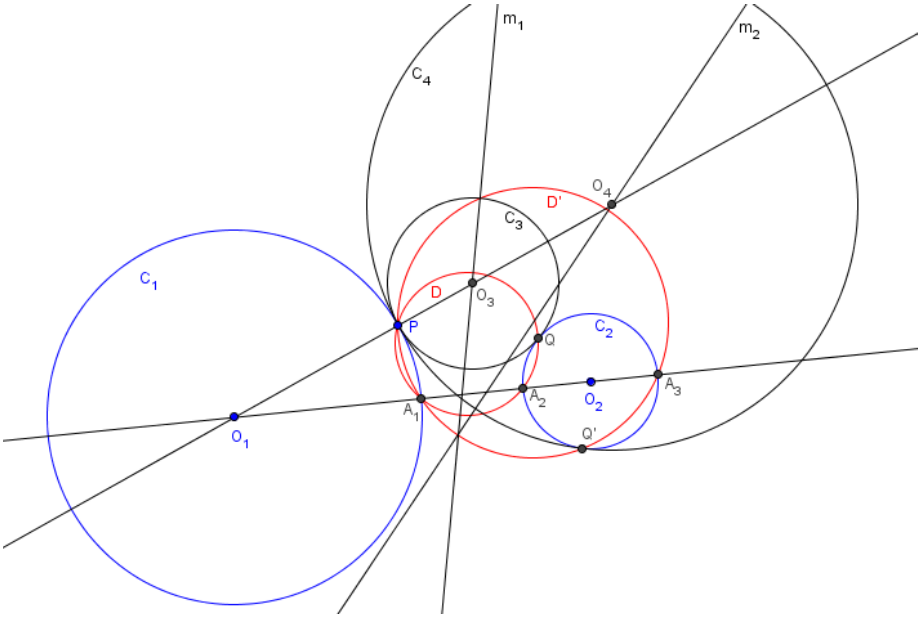
Nesta situação, vamos ter duas circunferências-solução, que são tangentes interna e externamente à circunferência C_2. Para fazer a construção observamos que:

- os centros $O_3 \ e \ O_4$ das circunferências-solução $C_3 \ e \ C_4$, respectivamente, pertencem à reta $\overleftrightarrow{O_1P}$;

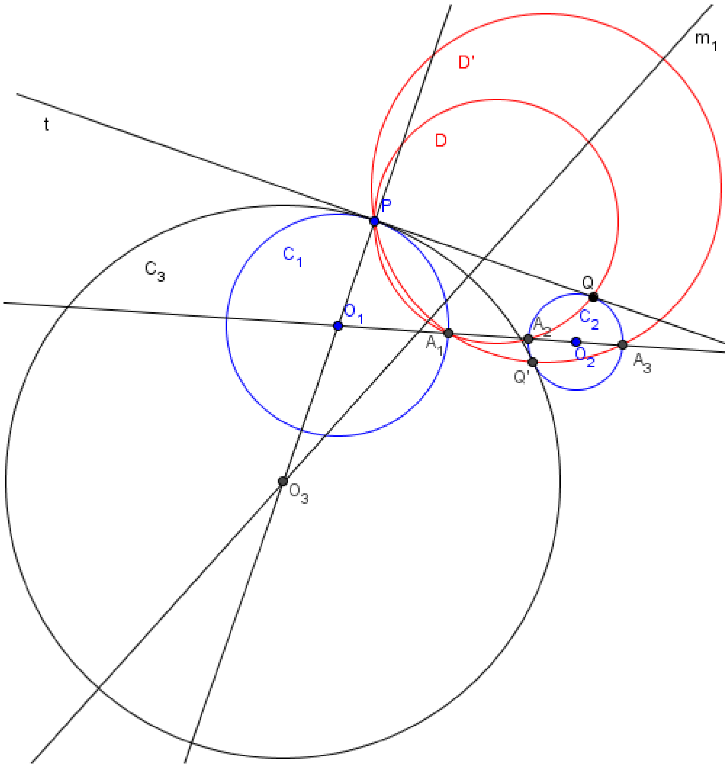
- a localização dos pontos de tangência Q e Q' em C_2, são proporcionais as distâncias entre as circunferências $C_1 \ e \ C_2$.

Assim fazendo as circunferências D e D' para manter as proporcionalidades, encontramos na interseção dessas circunferências com C_2 os pontos Q e Q'.

Logo, basta fazer as mediatrizes $m_1 \ e \ m_2$ de $\overline{PQ} \ e \ \overline{PQ'}$ para encontrar, na interseção com a reta $\overleftrightarrow{O_1P}$, os pontos $O_3 \ e \ O_4$.

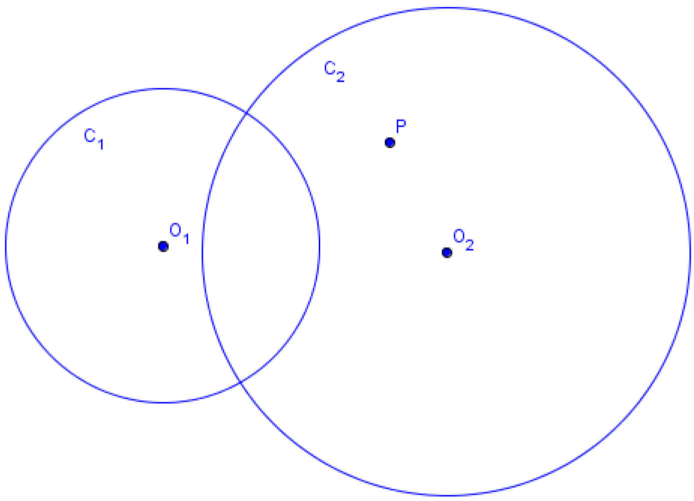


Obs. Um fato interessante nesta situação é quando o ponto P pertence à reta tangente comum às duas circunferências, pois uma das soluções do problema é a própria reta, como vemos a seguir. Note que as soluções do problema são a reta t e a circunferência C_3.

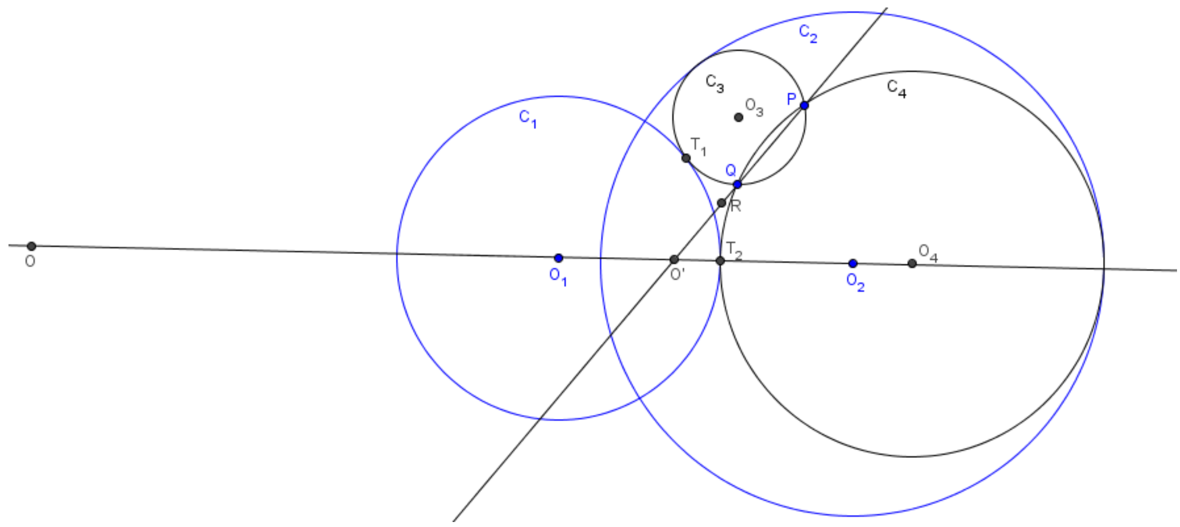


Caso 2. As circunferências C_1 e C_2 são secantes.

1ª situação: o ponto P é interior a apenas uma das circunferências.

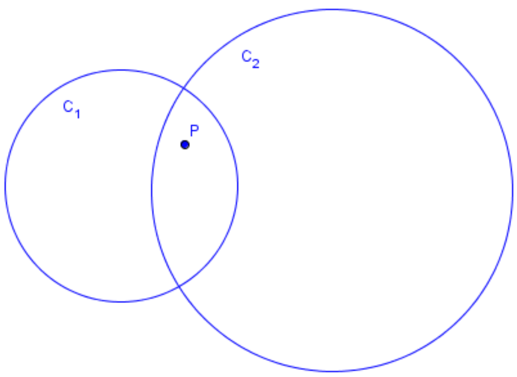


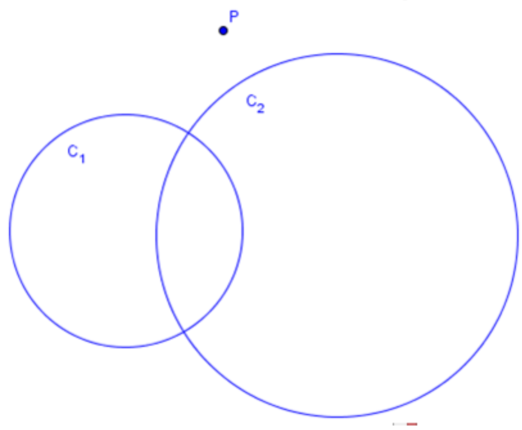
Nesse caso, aplicado o método do Caso 1, 2ª situação, para o centro de homotetia interno encontramos as duas soluções para esse problema.



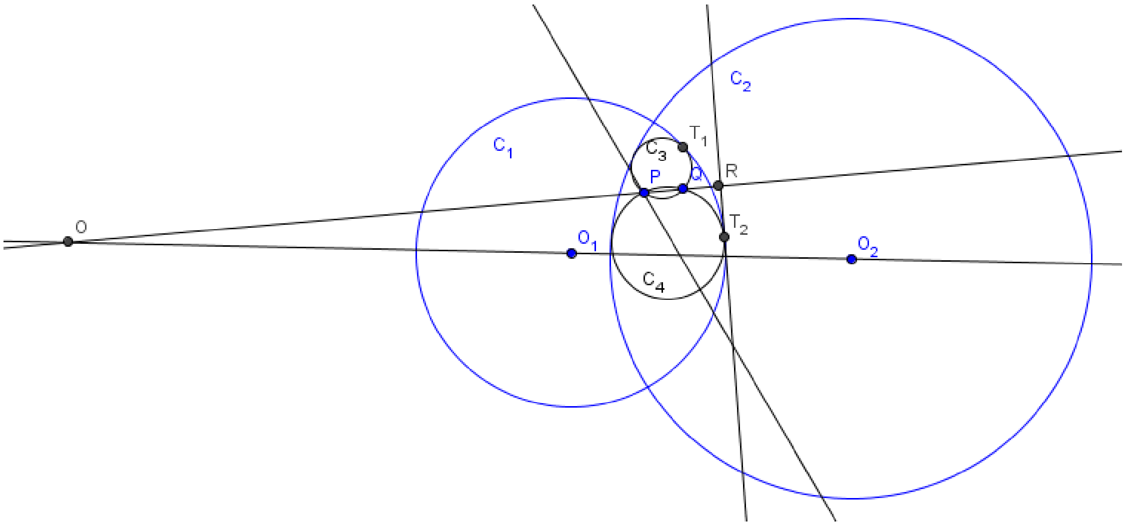
Observamos que, partindo da homotetia externa, não haverá solução. Portanto, as soluções acima são as duas únicas soluções do problema.

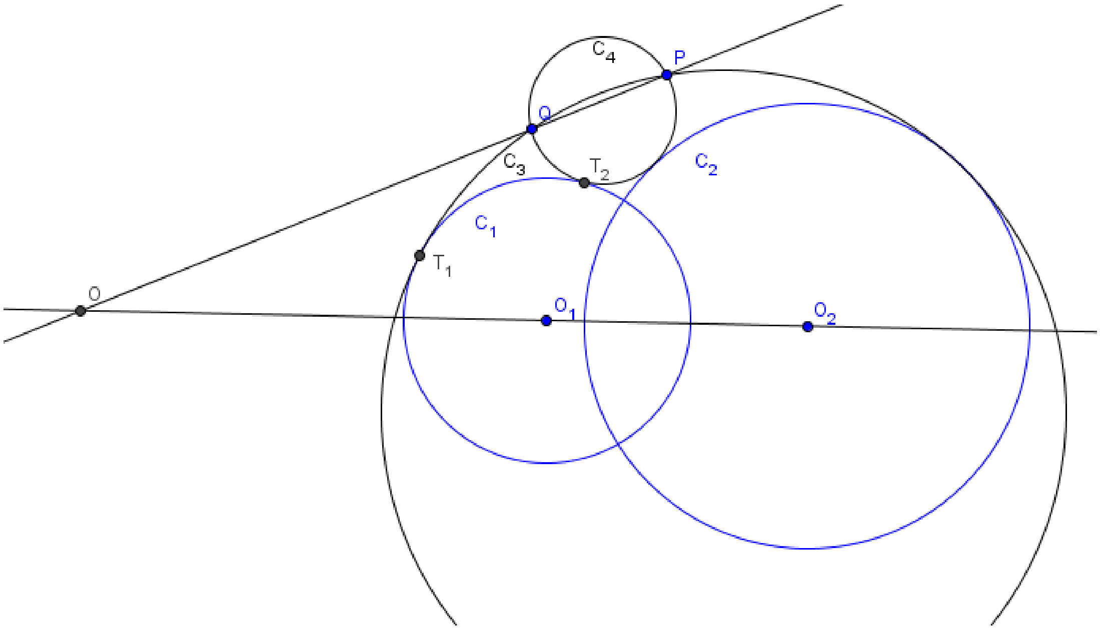
2ª situação: P é interior ou exterior a ambas as circunferências dadas.



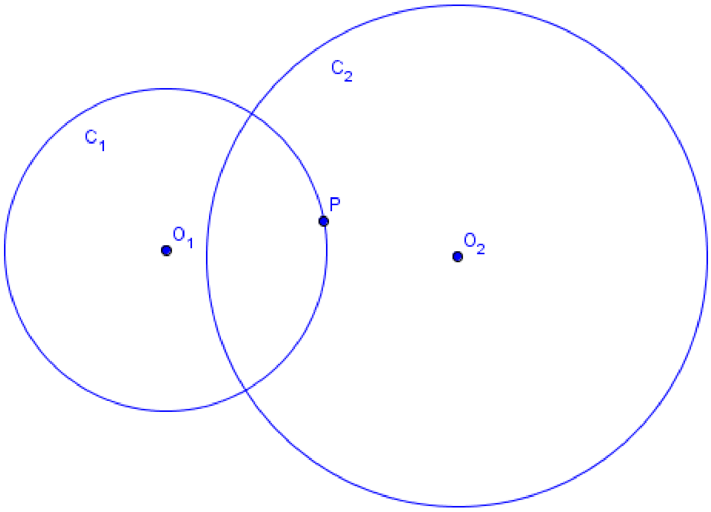


Temos duas soluções encontradas a partir do processo de homotetia externa descrita no Caso 1, 2ª situação.



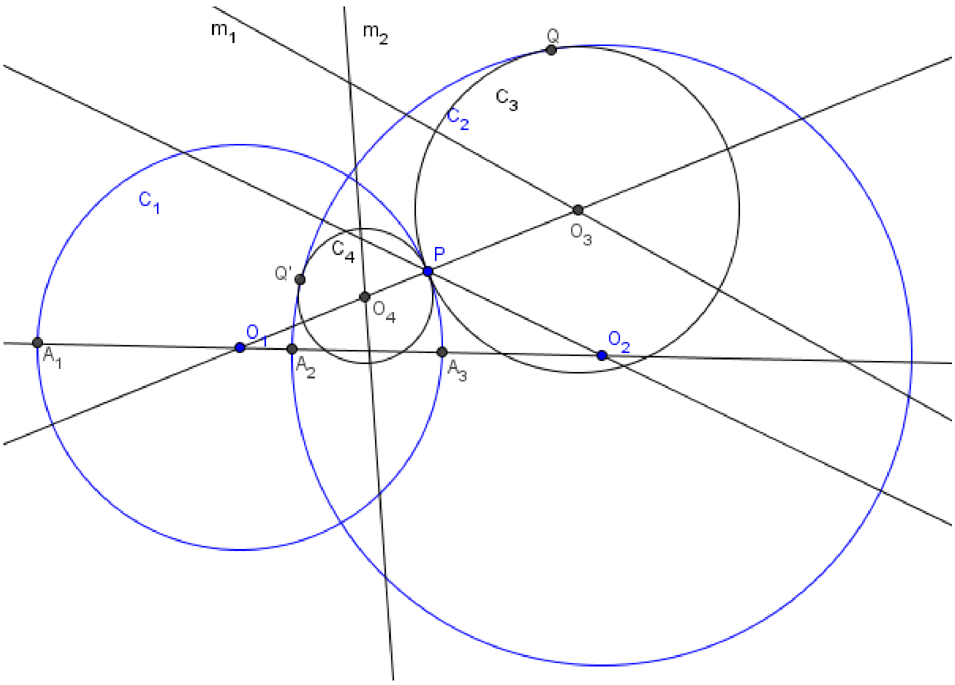


3ª situação: P é interior a uma circunferência e pertence à outra.

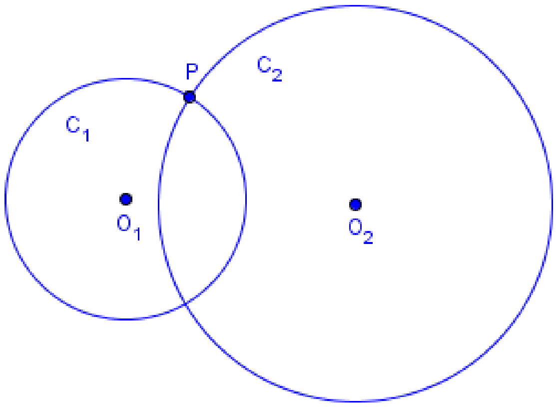


Nesta situação, temos duas soluções, pois o ponto P está na circunferência C_1 e há apenas duas circunferências que podem ser tangentes a C_1 no ponto P.

A construção é feita quase que da mesma forma que no Caso 1, 3ª situação. A única diferença é que um dos centros pertence à reta $\overleftrightarrow{O_1P}$ e o outro centro pertence à reta $\overleftrightarrow{O_2P}$.

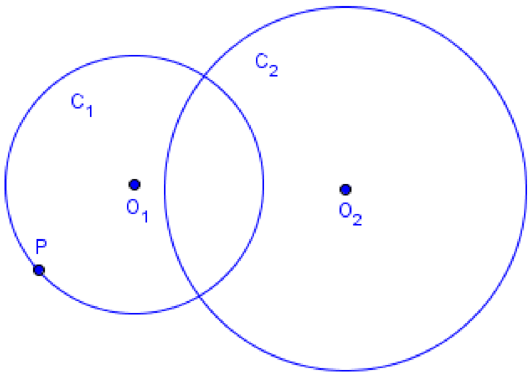


4ª situação: O ponto P pertence a ambas as circunferências.

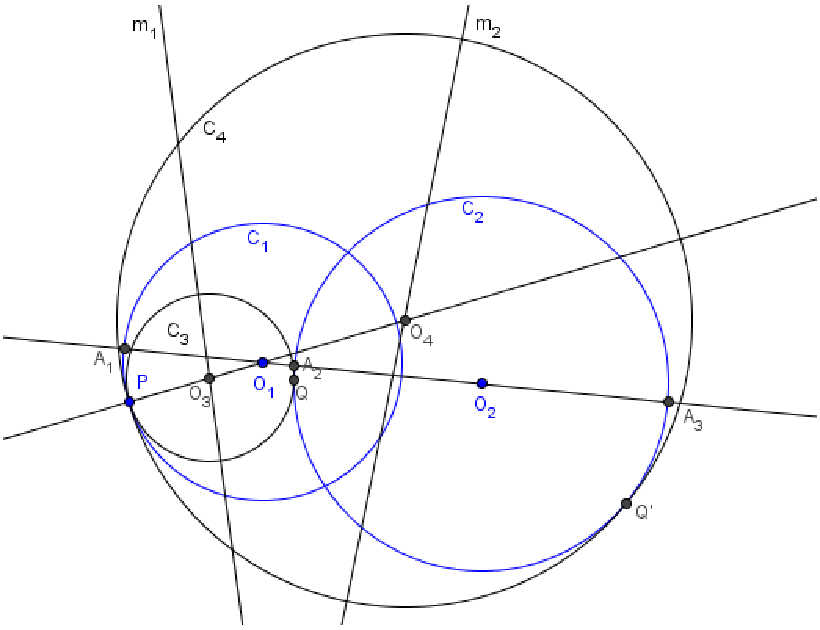


Nesta situação não há solução (a não ser que consideremos o ponto P como uma circunferência de raio zero).

5ª situação: O ponto P é externo a uma circunferência e pertence à outra.



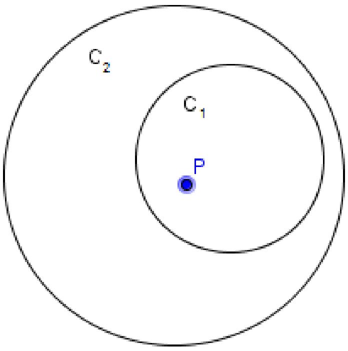
Nesta situação temos duas soluções encontradas da mesma forma que no Caso 1, 3ª situação.



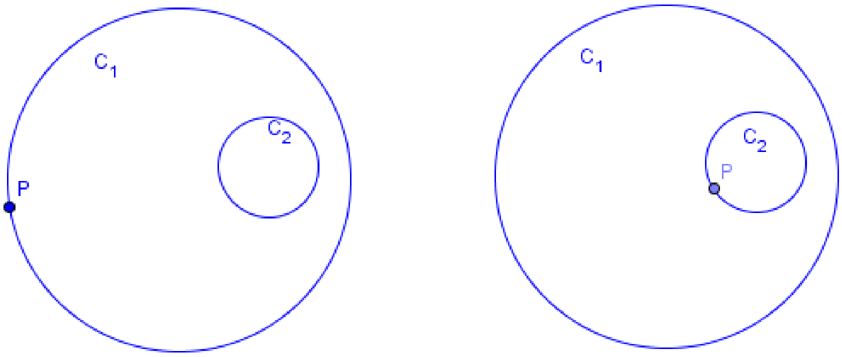
Caso 3. C_1 é interior a C_2.

1ª situação: P é interno a C_1.

Não há solução.

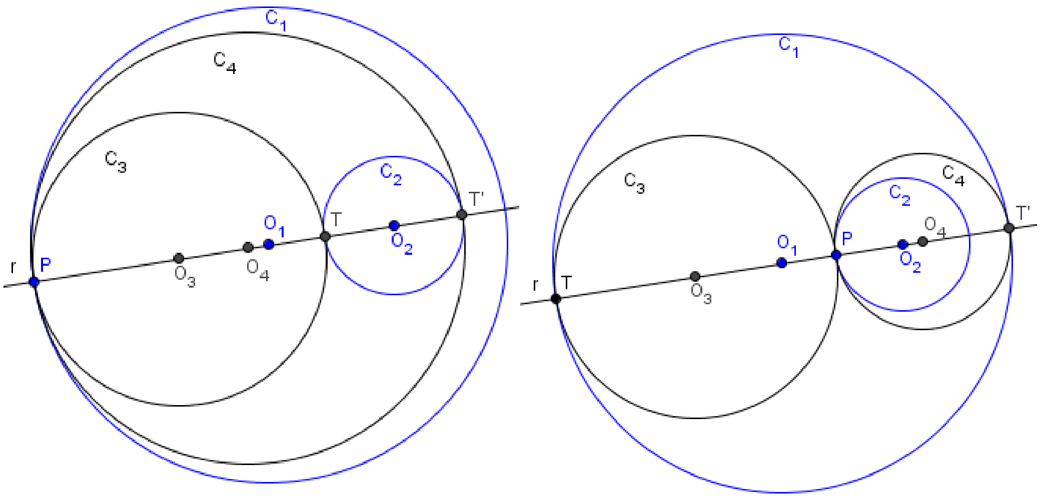


2ª situação: P pertence a C_1 ou a C_2.

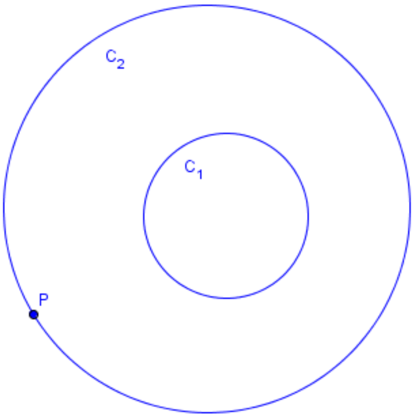


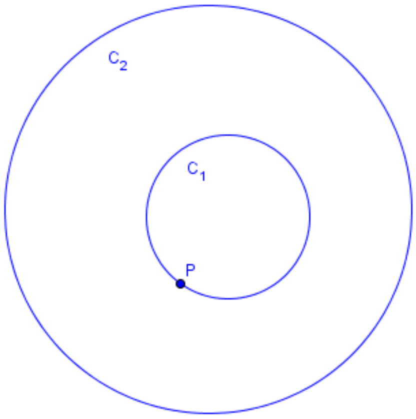
1ª construção: O ponto P está na reta que contém o diâmetro da circunferência C_1.

Vamos ter duas soluções: a circunferência C_3 que passa por P e é tangente à circunferência C_2 e a circunferência C_4 que passa por P e é tangente à circunferência C_1. Para construir C_3 basta traçar a reta que passa por P e O_1 (centro de C_1), marcando o ponto T em C_1. O centro O_3 da circunferência C_3 é o ponto médio do segmento $\overline{PT}$. Para construir C_4 basta traçar a reta que passa por P e O_1 (centro de C_1), marcando o ponto T' em C_1. O centro O_4 da circunferência C_4 é o ponto médio do segmento $\overline{PT'}$.

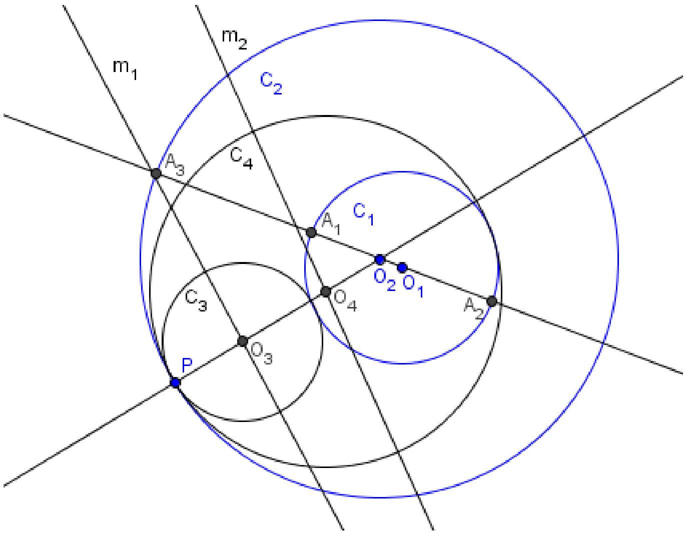


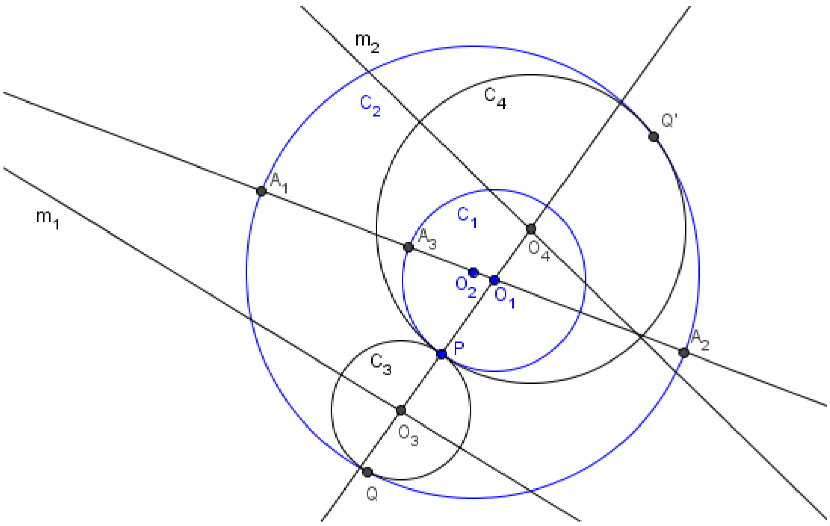
2ª construção: O ponto P não pertence à reta que contém o diâmetro da circunferência C_1.



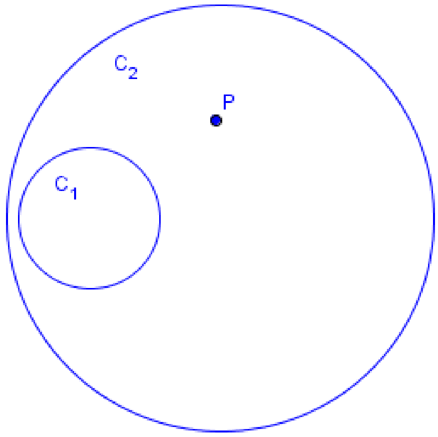


A situação tem duas soluções. E é construída da mesma forma que no Caso 1, 3ª situação.

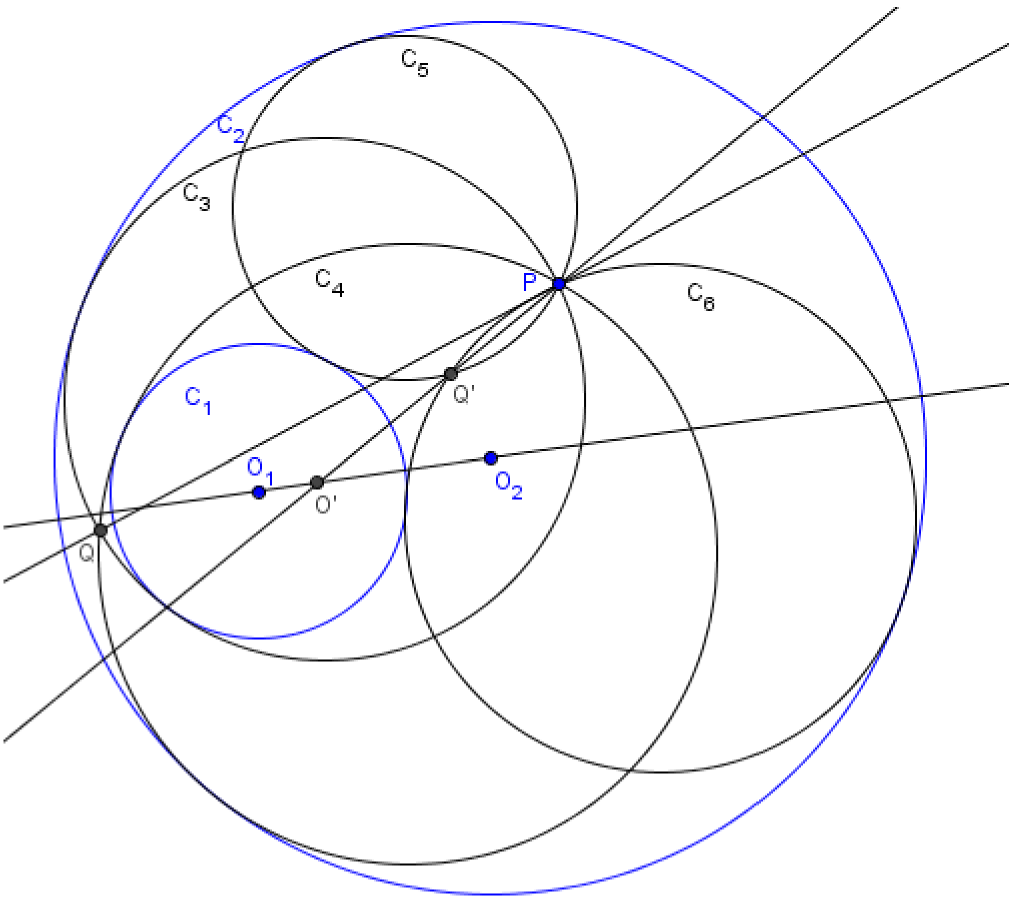




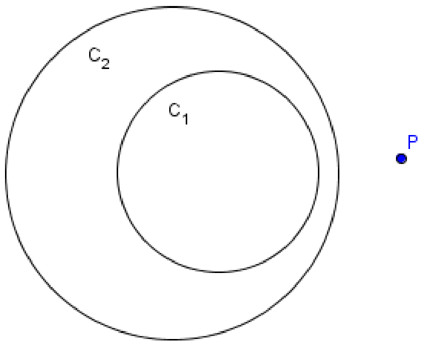
3ª situação: O ponto P é interno à circunferência C_2 e externo à circunferência C_1.



Temos duas soluções, $C_3\ e\ C_4$, encontradas pelo processo de homotetia externa descrita no Caso 1, 2ª situação. Temos, ainda, mais duas soluções, $C_5\ e\ C_6$, encontradas pelo processo de homotetia interna, descrita também no Caso 1, 2ª situação.



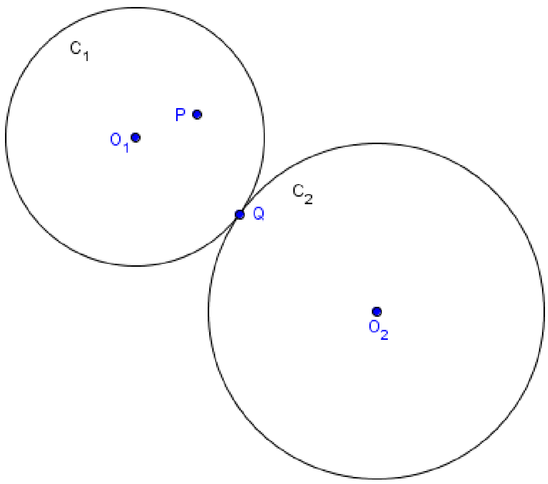
4ª situação: O ponto P é externo à circunferência C_2.



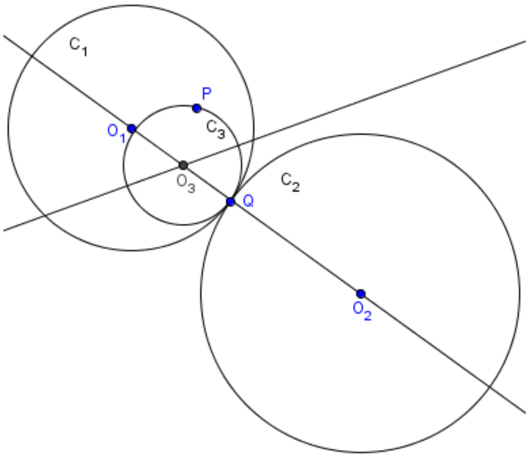
Obviamente não temos solução.

Caso 4. As circunferências C_1 e C_2 são tangentes externas, no ponto Q.

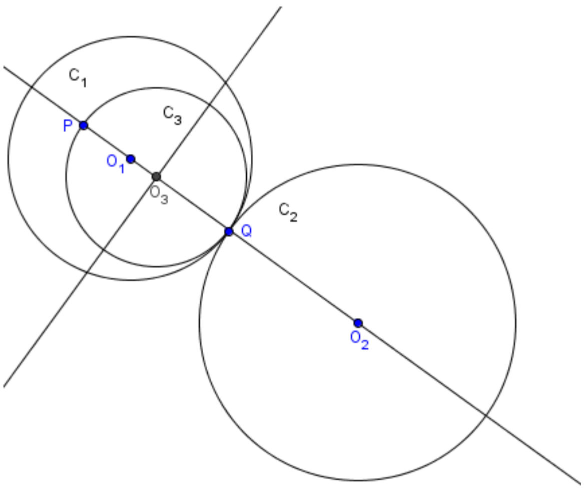
1ª situação: o ponto P é interno a uma delas.



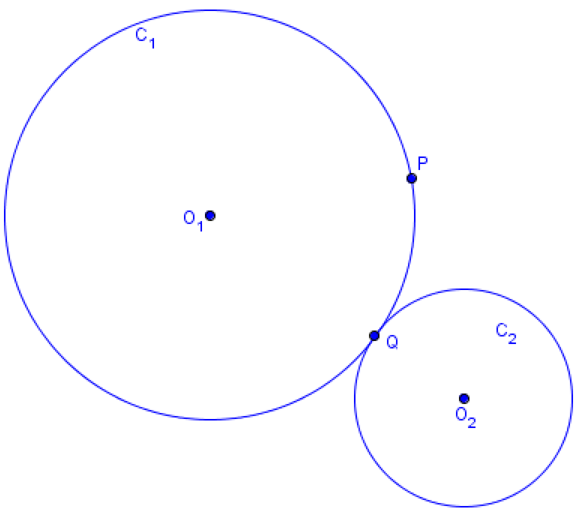
Nesta situação temos apenas uma solução. A circunferência tem que passar por P e Q, portanto há apenas um centro O_3 que é a interseção da mediatriz de $\overline{PQ}$ com a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.



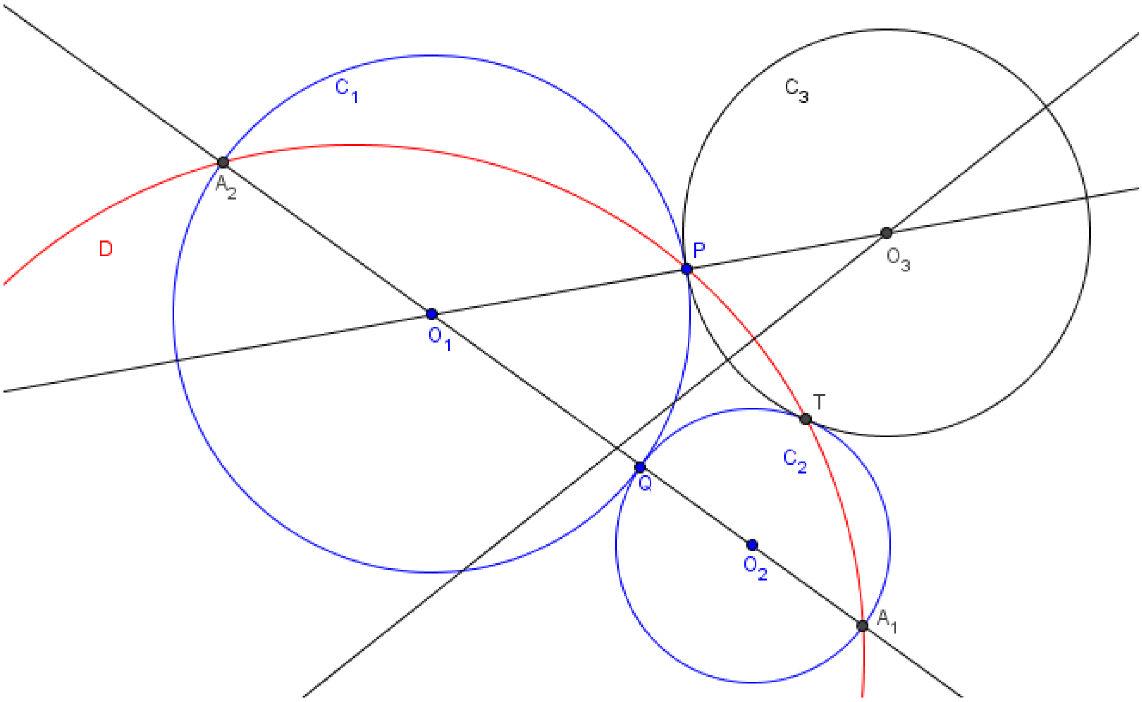
Essa solução faz sentido mesmo se P pertencer à reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$.



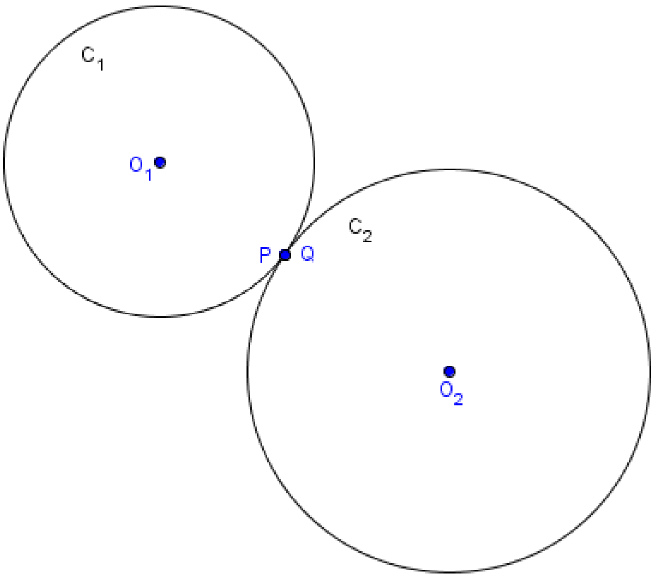
2ª situação: P pertence a apenas uma das circunferências.



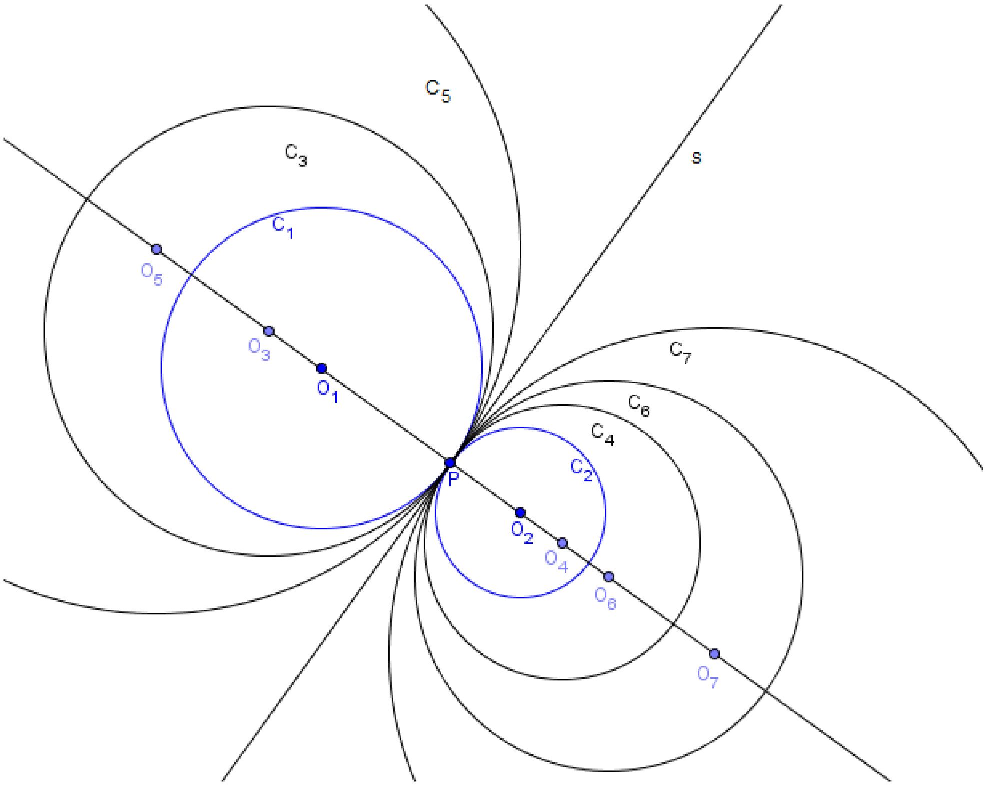
Nesta situação temos apenas uma solução (não considerando C_1 como solução). A construção é da mesma forma que no Caso 1, 3ª situação.



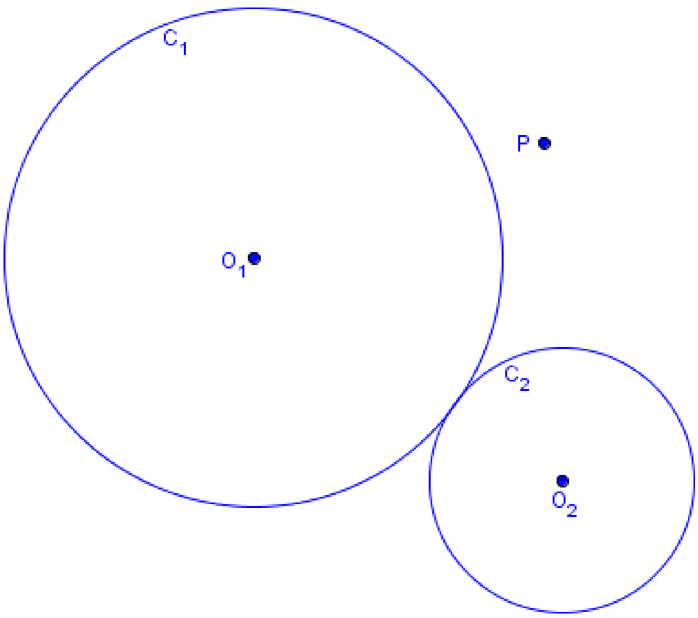
3ª situação. $P = Q$.



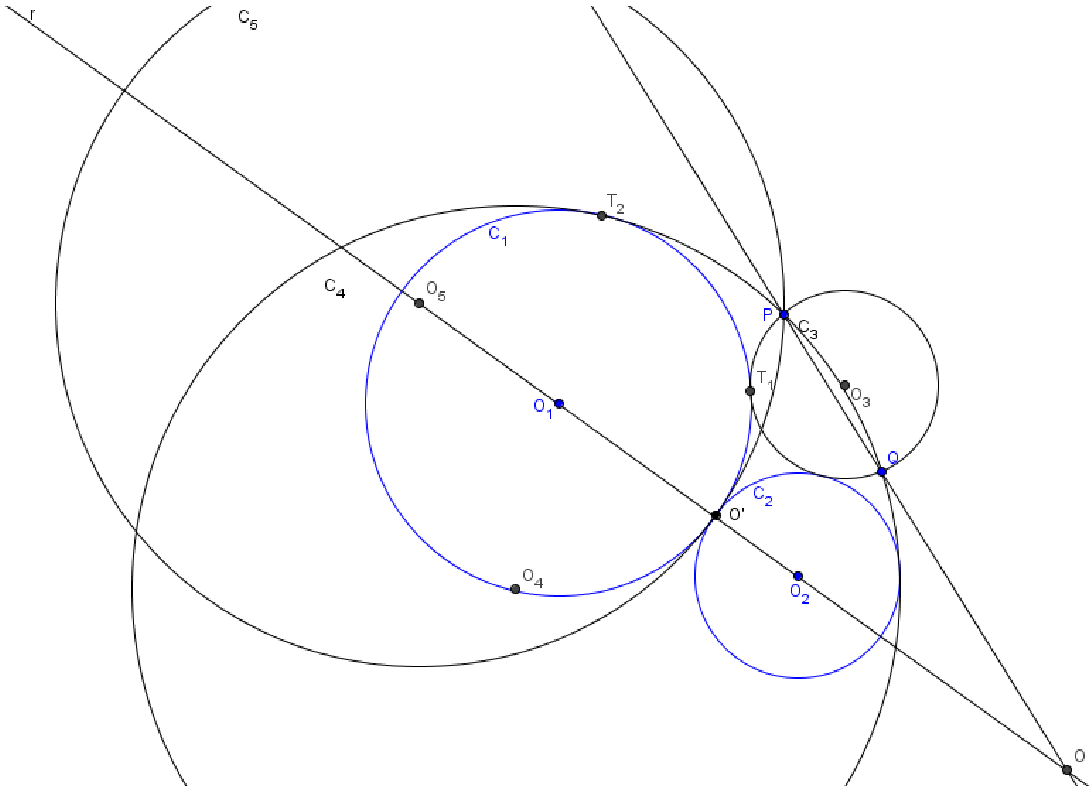
Nesta situação temos infinitas soluções. Bastam os centros das circunferências pertencerem à reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ e elas terem raios diferentes O_1P ou O_2P.



4ª situação: o ponto P é externo a ambas as circunferências.



Nesta situação temos três soluções. Para achar as soluções C_3 e C_4, usamos os mesmos passos do Caso 1, 2ª situação, descritos acima. Para achar a circunferência-solução C_5, usamos os passos do Caso 4, 1ª situação.

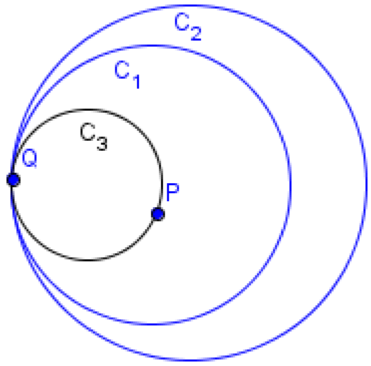


Caso 5. A circunferência C_1é tangente interna de C_2, no ponto Q.

Nas situações abaixo serão mostradas apenas as suas soluções, pois as construções são análogas às que foram feitas acima.

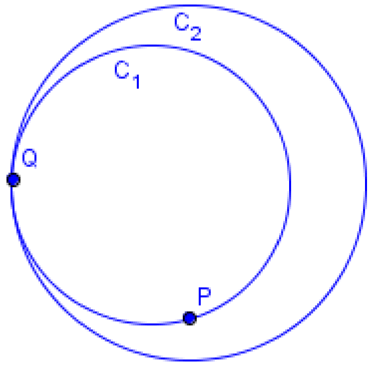
1ª situação: O ponto P é interno a C_1.

Temos uma solução.



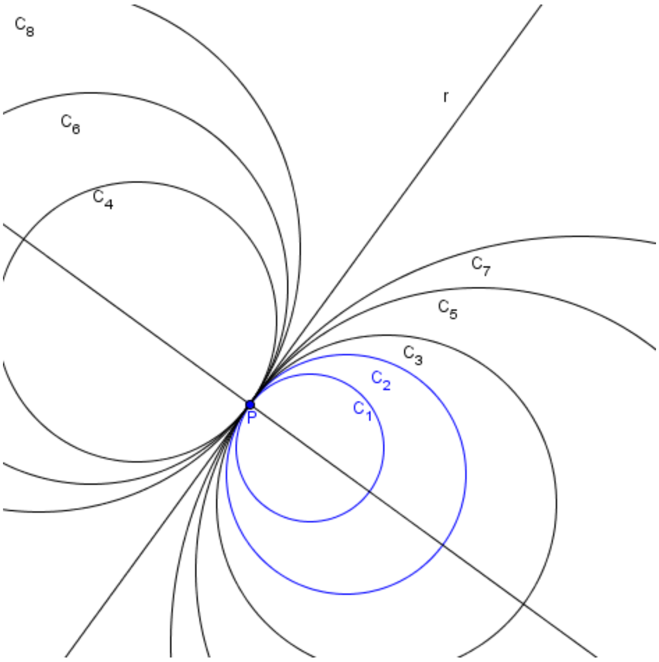
2ª situação: O ponto P pertence somente a C_1.

Não temos solução, pois não consideramos C_1 como solução.



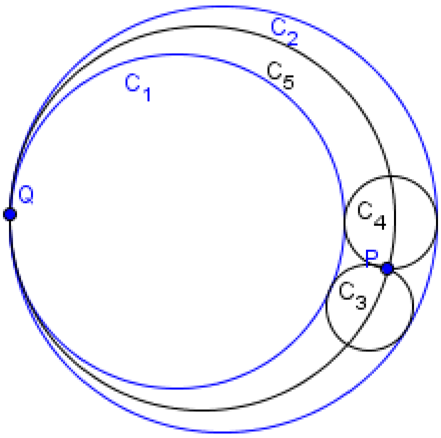
3ª situação: P = Q.

Temos infinitas soluções.



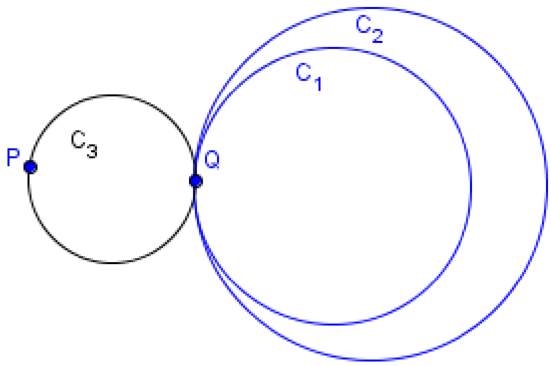
4ª situação: P é externo a C_1 e interno a C_2.

Temos três soluções.



5ª situação: P é externo a ambas as circunferências.

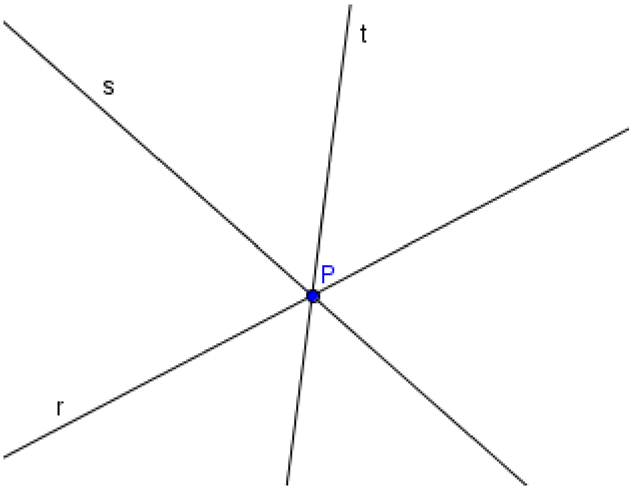
Temos uma solução.



2.7. RRR

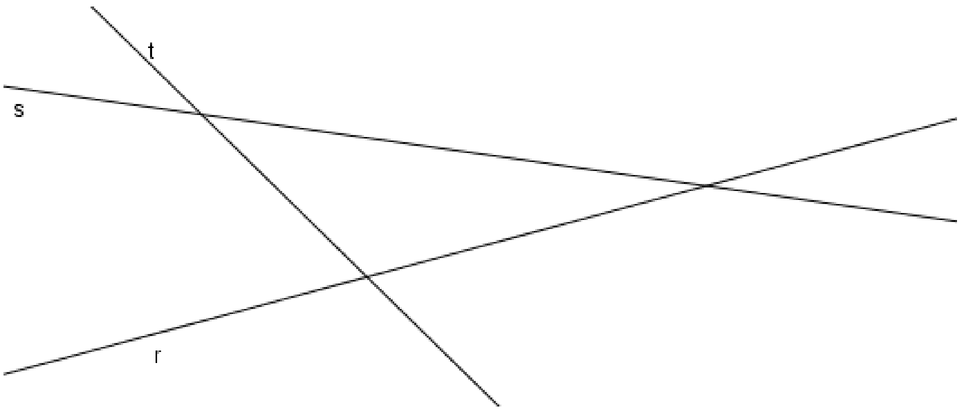
Caso 1. As retas são concorrentes.

1ª situação: em um mesmo ponto.

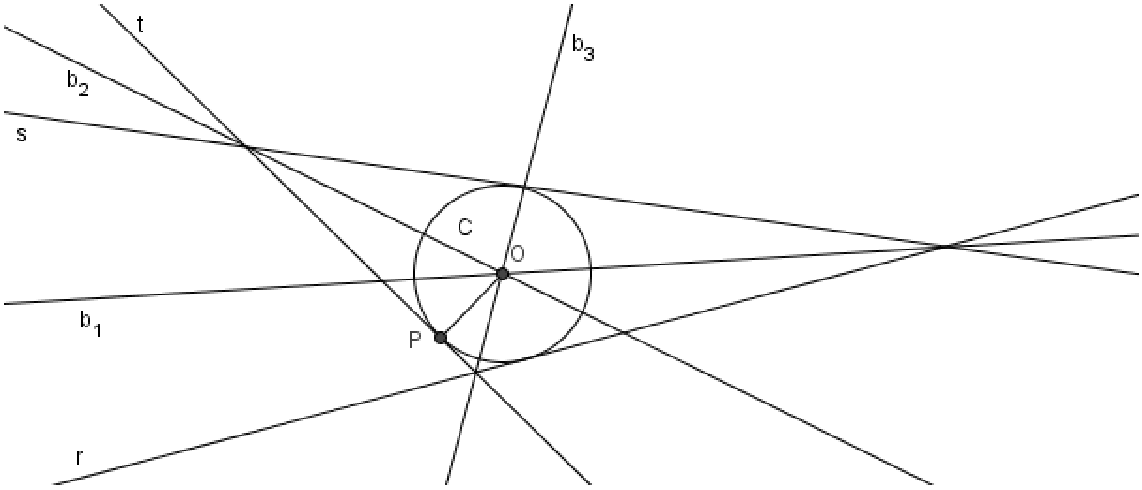


Nesta situação não há solução (a não ser que consideremos o ponto P como uma circunferência de raio zero).

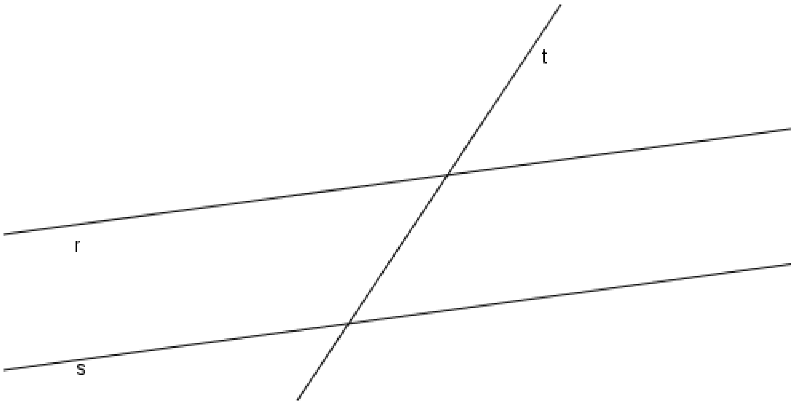
2ª situação: as retas são concorrentes duas a duas.



Nesse caso há uma solução: a circunferência inscrita no triângulo formado pelas retas. Portanto o centro da circunferência é o encontro das bissetrizes entre as retas e seu raio tem comprimento igual à distância entre as retas e esse centro.

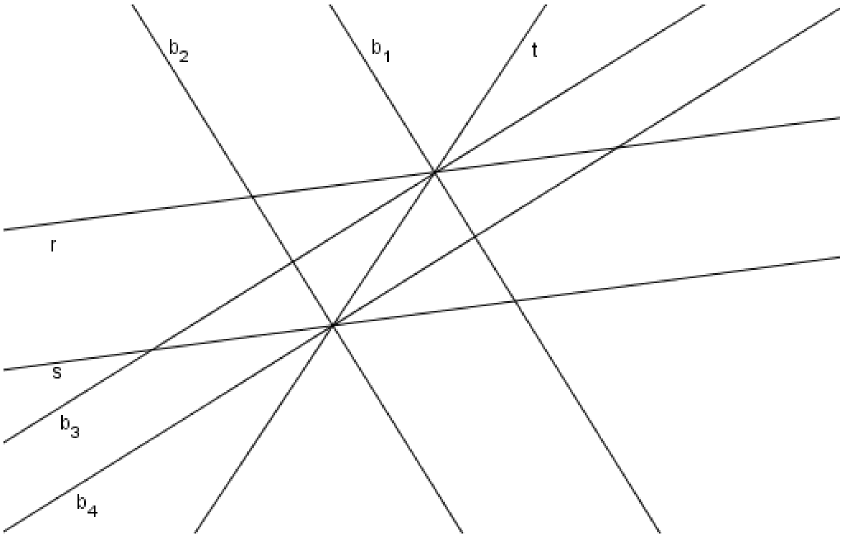


Caso 2. Duas retas são paralelas e uma é concorrente.

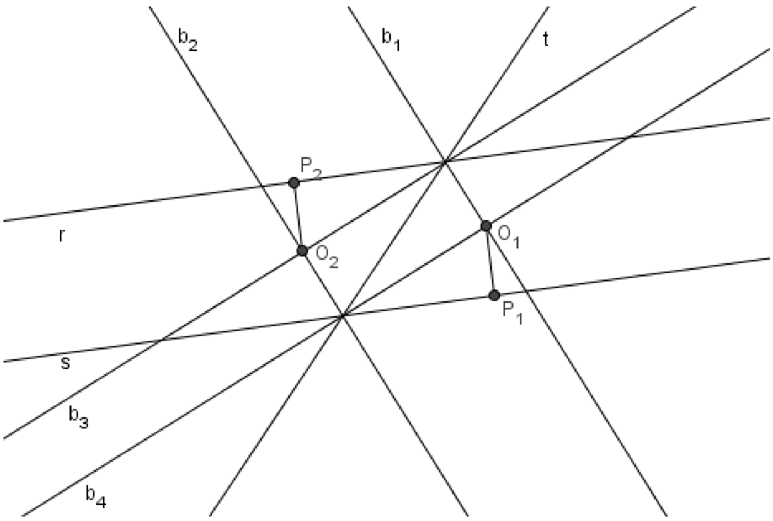


Neste caso vamos ter duas soluções. Vamos descrever passo a passo:

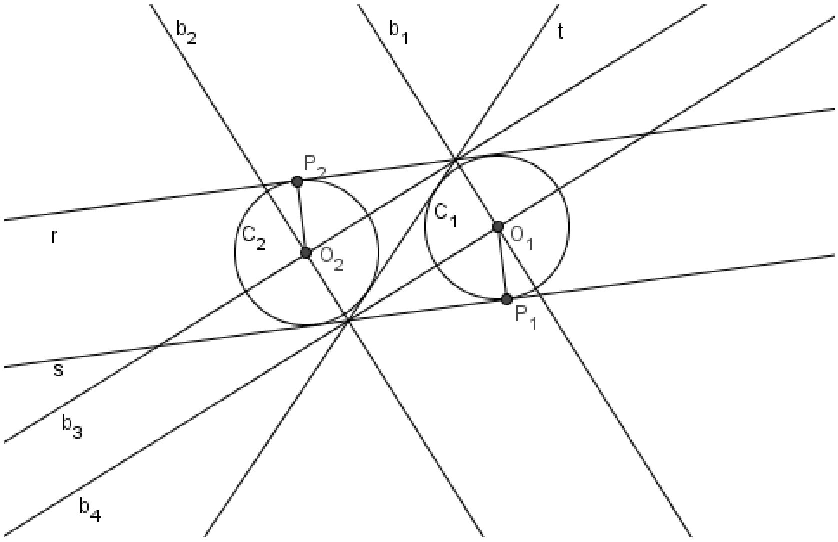
a) Construa as bissetrizes (b_1, b_2, b_3 e b_4) entre as retas r e t, e entre as retas s e t;



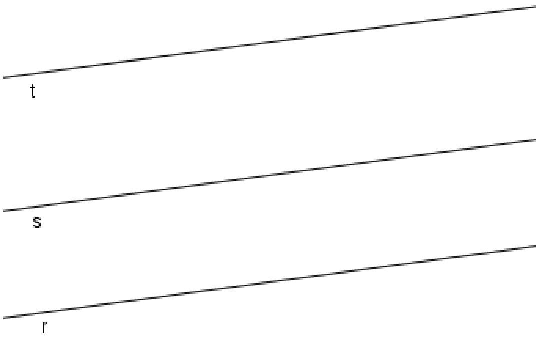
b) Na interseção de b_1 com b_4 marque o ponto O_1 e trace o segmento $\overline{O_1P_1}$ perpendicular à reta s; e na interseção de b_2 com b_3 marque o ponto O_2 e trace o segmento $\overline{O_2P_2}$ perpendicular a r.



c) Trace a circunferência C_1 de centro O_1 e raio $\overline{O_1P_1}$; e trace a circunferência C_2 de centro O_2 e raio $\overline{O_2P_2}$.



Caso 3. As três retas são paralelas.



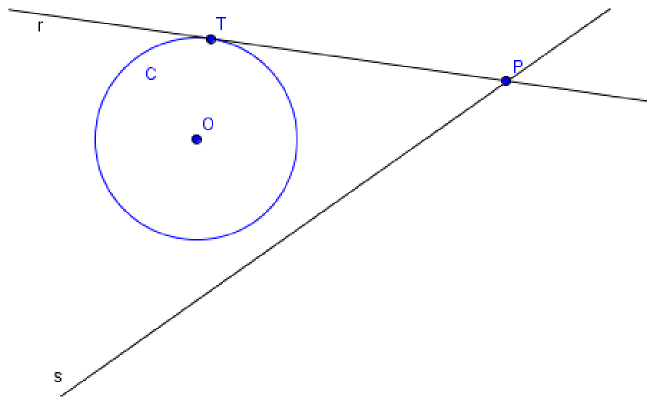
Neste caso não há solução.

2.8. RRC

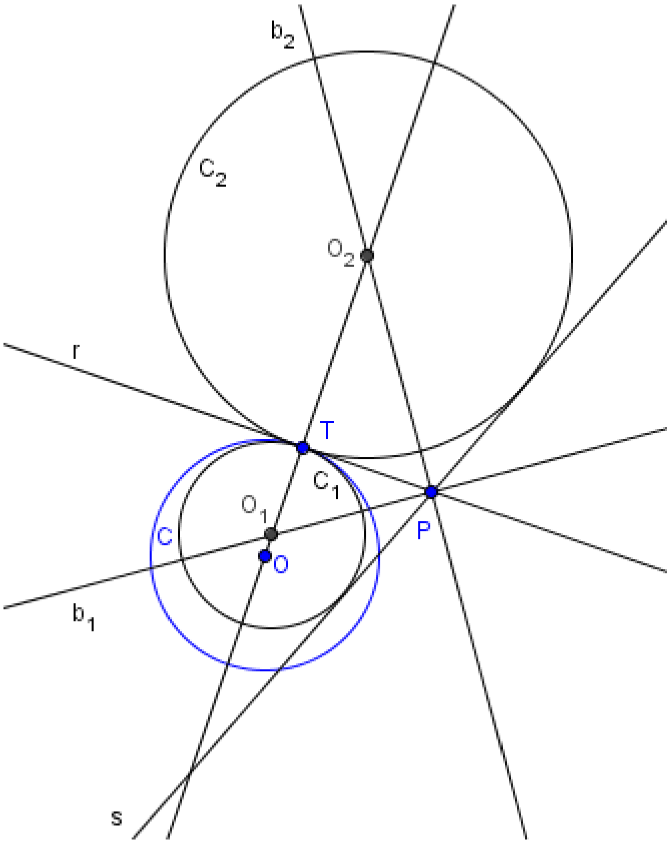
Caso 1. As retas r e s são concorrentes no ponto P.

Uma observação importante neste caso é que os centros de todas as soluções possíveis pertencem às bissetrizes das retas r e s, pois somente desta forma obtemos circunferências tangentes a essas retas. Os métodos para desenvolver as soluções a seguir podem ser vistos também em [7] e serão usados ao longo desta seção.

1ª situação: A reta r é tangente à circunferência C no ponto T, e a reta s é externa à circunferência C.

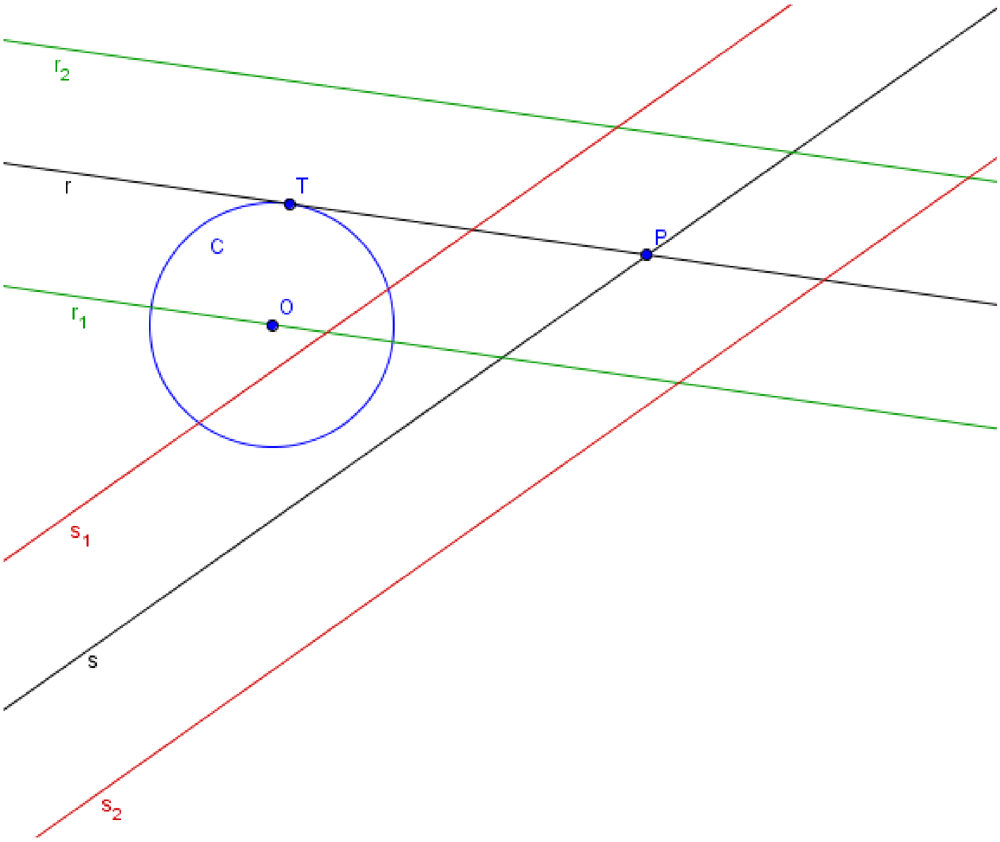


Nesta situação temos quatro soluções. As construções, duas a duas, são feitas diferentemente. Para achar o primeiro par de soluções, basta traçar as bissetrizes b_1 e b_2 entre as retas r e s, e a reta $\overleftrightarrow{OT}$. As interseções de $b_1$com $\overleftrightarrow{OT}$ e de b_2 com $\overleftrightarrow{OT}$são os centros $O_1 e$ O_2, respectivamente, das circunferências C_1 e C_2.

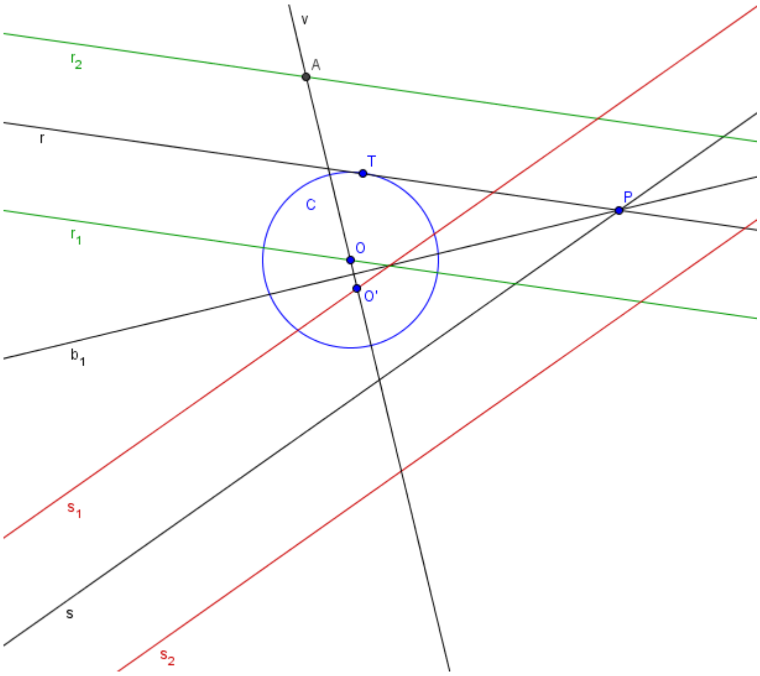


Para obtermos as outras soluções, reduzimos o raio da circunferência até ela se transformar em um ponto e transladamos as retas paralelamente às retas dadas, pelo tamanho desse raio. Assim, resolvemos PRR e então fazemos as operações inversas, para obtermos as respectivas soluções do RRC.

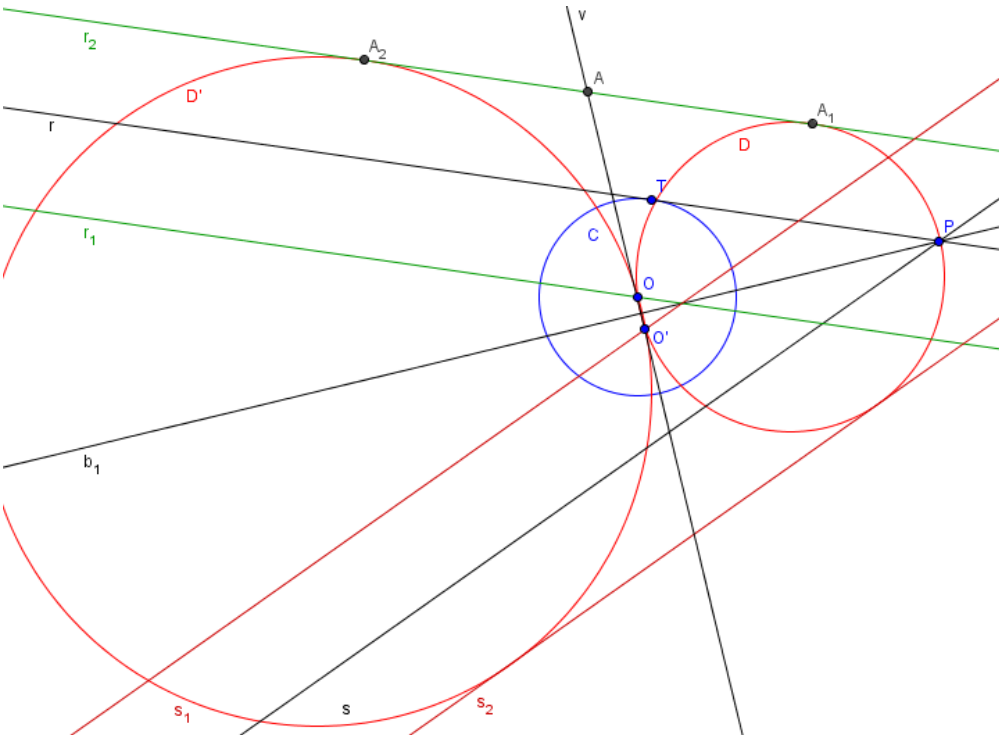
a) Traçamos duas retas paralelas à reta r, r_1 e r_2, e duas retas paralelas à reta s, s_1 e s_2, tais que ambas equidistam de r e de s, e essa distância é o comprimento do raio da circunferência C;



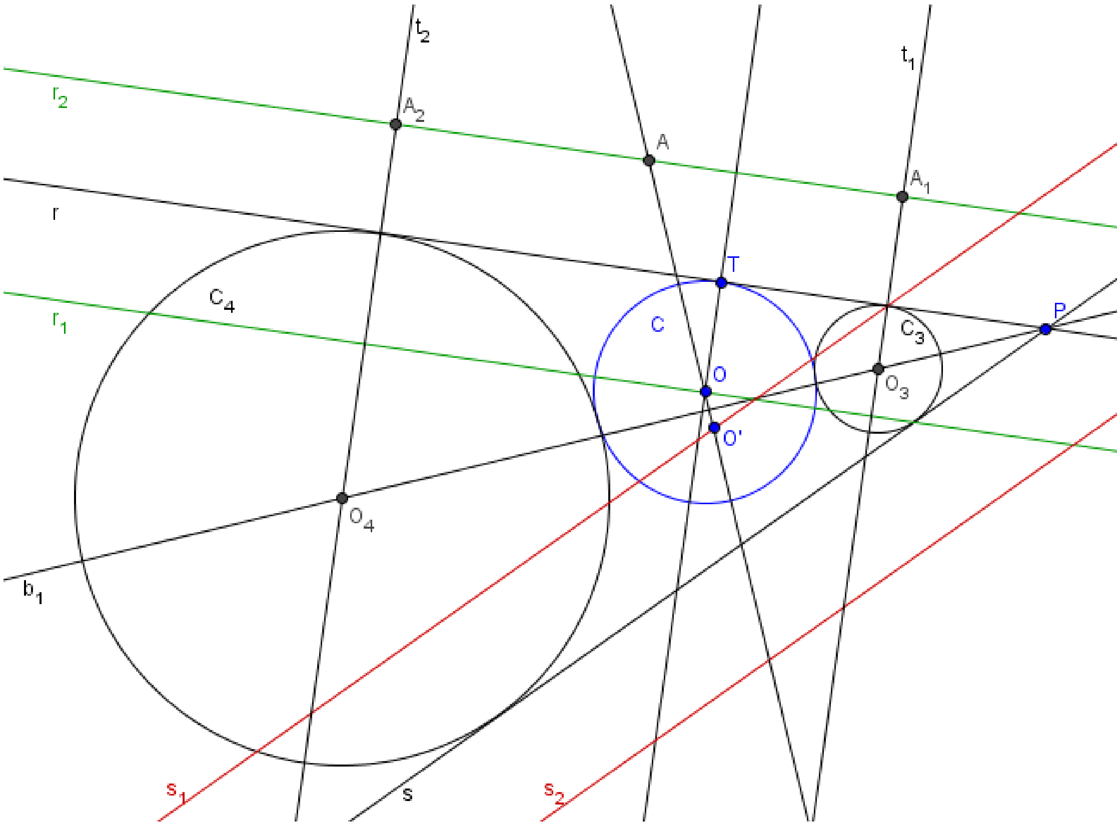
b) Trace uma reta v perpendicular a b_1, passando pelo ponto O. Marque, em v, o ponto O', simétrico a O, e o ponto A, na interseção de v e r_2;



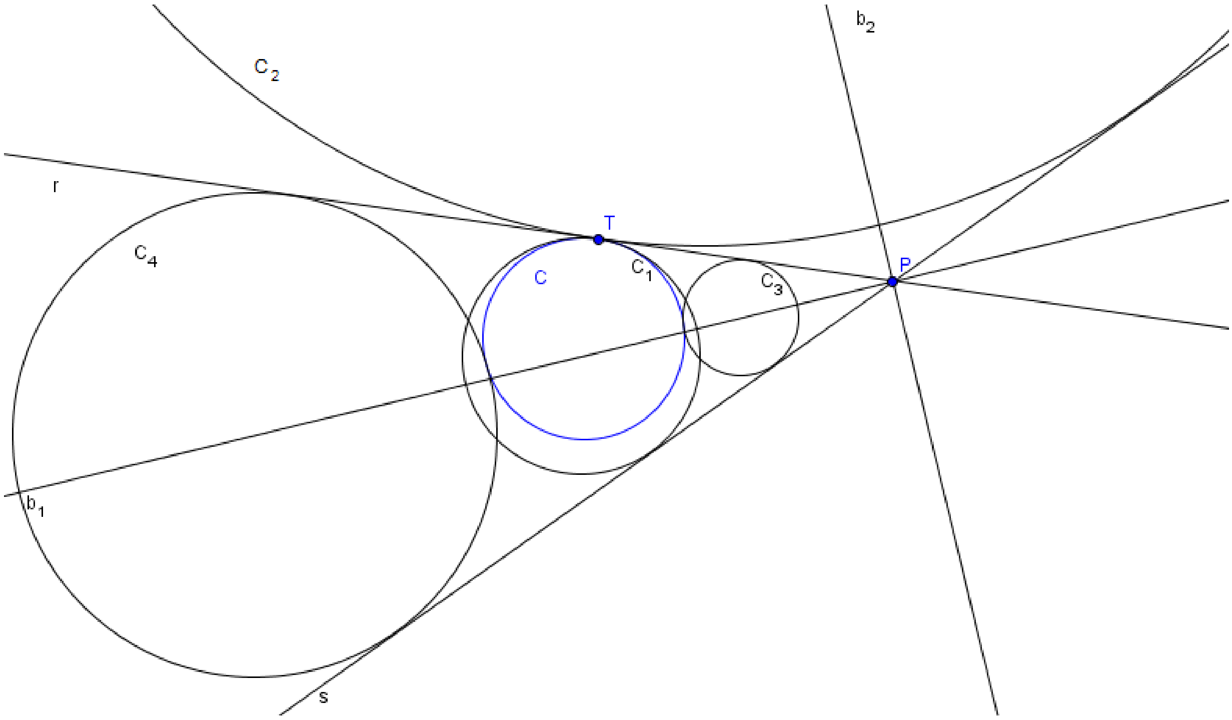
c) Usando o método de solução do PPR, construa duas circunferências auxiliares D e D’, soluções do problema de Apolônio para os pontos O, O’ e a reta r_2;



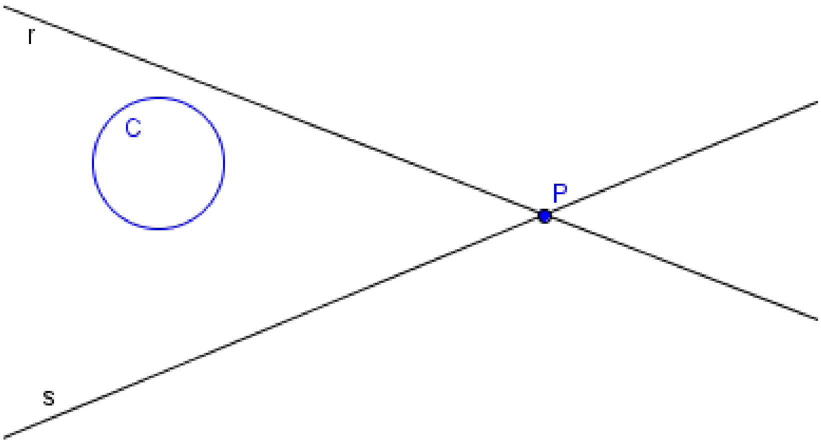
d) Os pontos $A_1\ e\ A_2$ pertencem às circunferências D e D' que são as soluções para O, O' e r_2. Observe que a distância entre A_1 (ou A_2) e a reta r é igual ao raio da circunferência C. Portanto, para encontrar os centros $O_3\ e\ O_4$ das soluções $C_3\ e\ C_4$, basta traçar as perpendiculares $t_1\ e\ t_2$ à reta r_2, em $A_1\ e\ A_2$, respectivamente. Marque $T_1\ e\ O_3$ nas interseções de t_1 com r e b_1, respectivamente; marque $T_2\ e\ O_4$ nas interseções de t_2 com r e b_1, respectivamente. Agora é só traçar as soluções $C_3\ e\ C_4$, de raios $\overline{O_3T_1}\ e\ \overline{O_4T_2}$, respectivamente.



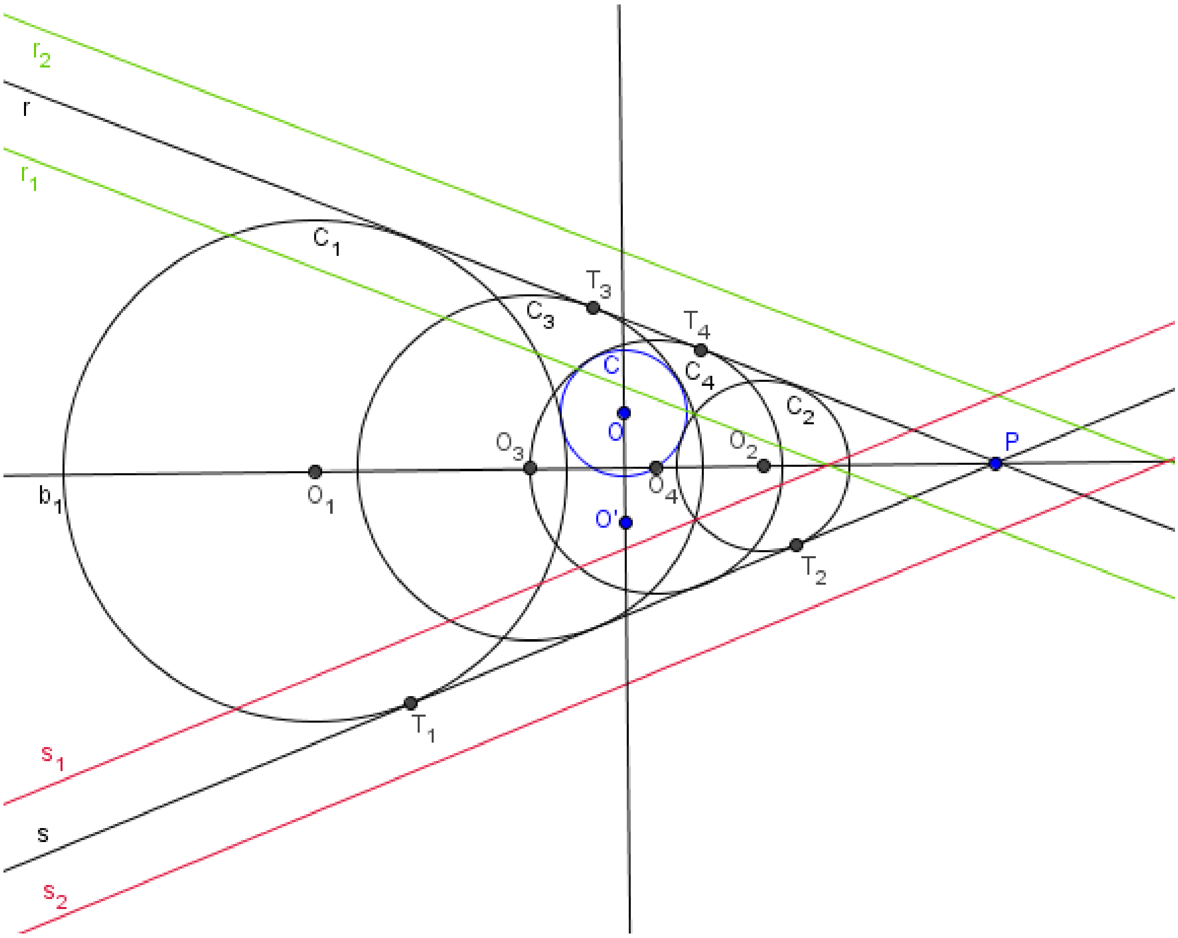
Assim, temos todas as quatro soluções:



2ª situação: As retas r e s são externas à circunferência C.

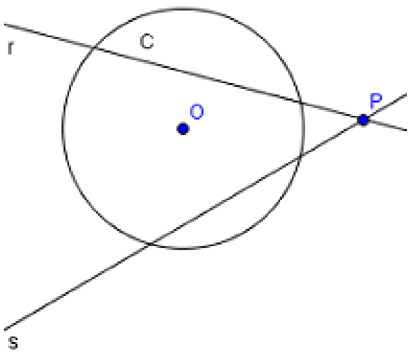


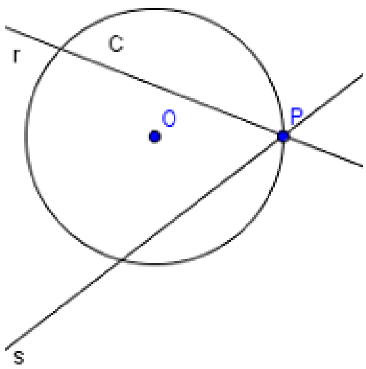
Essa situação tem quatro soluções, pois são duas circunferências tangentes externas e duas circunferências tangentes internas à circunferência C. Usando o método descrito acima, Caso 1,1ª situação, desta seção, encontramos as quatros soluções. Tomando como base a reta s_2, encontramos as soluções $C_1\ e\ C_2$, e, como base a reta r_1, encontramos as soluções $C_3\ e\ C_4$.

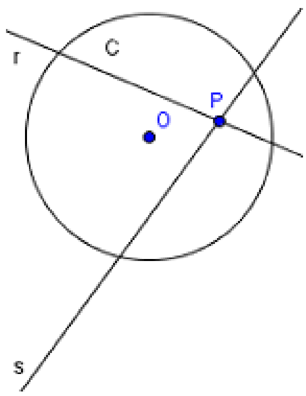


3ª situação: as retas r e s são secantes à circunferência C.

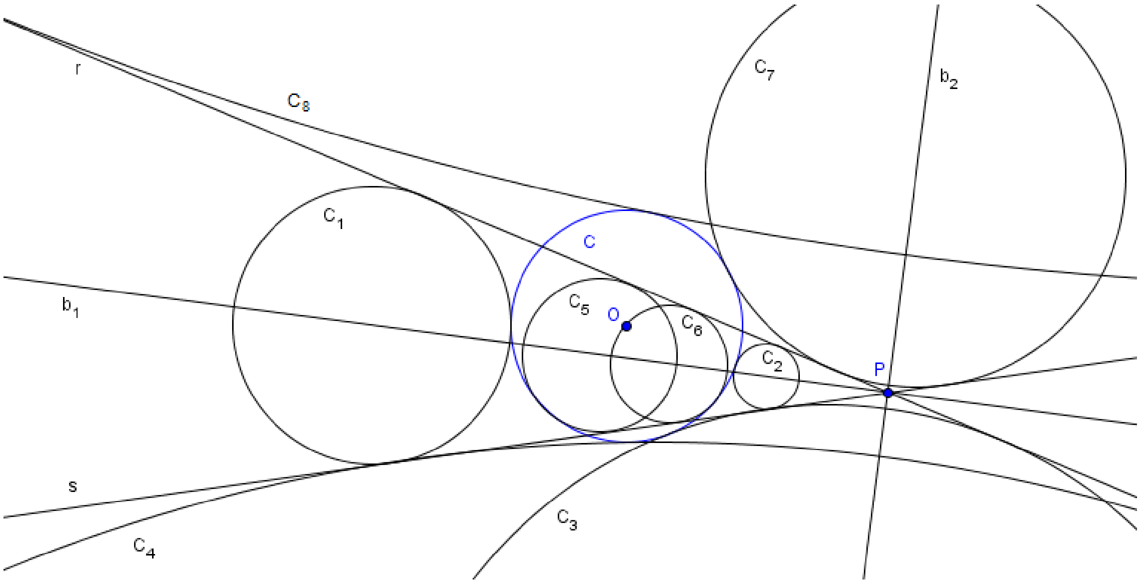
Vamos ter três situações, de acordo com a localização do ponto P:



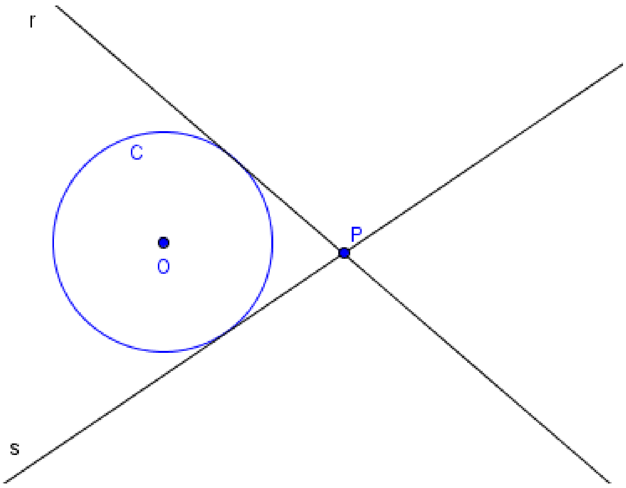




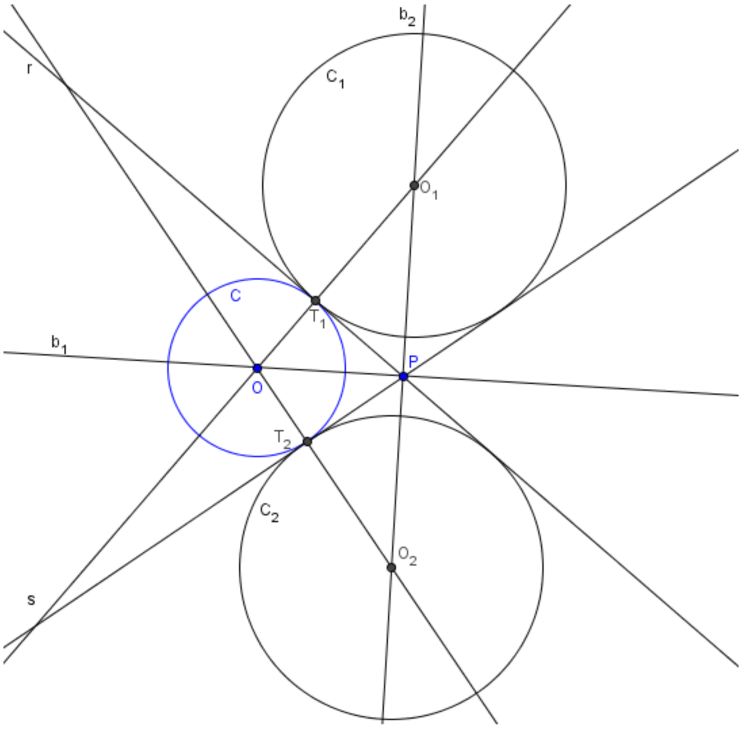
Para cada uma dessas situações, há oito soluções, todas construídas quase da mesma forma que as do Caso 1, 1ª situação desta seção.



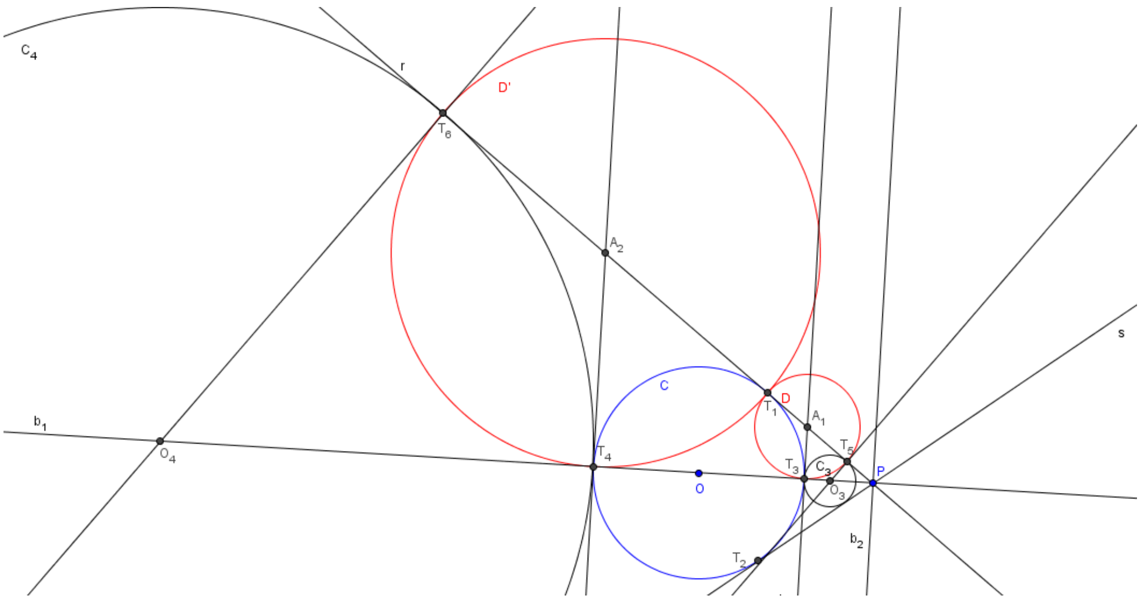
4ª situação: As retas são tangentes à circunferência.



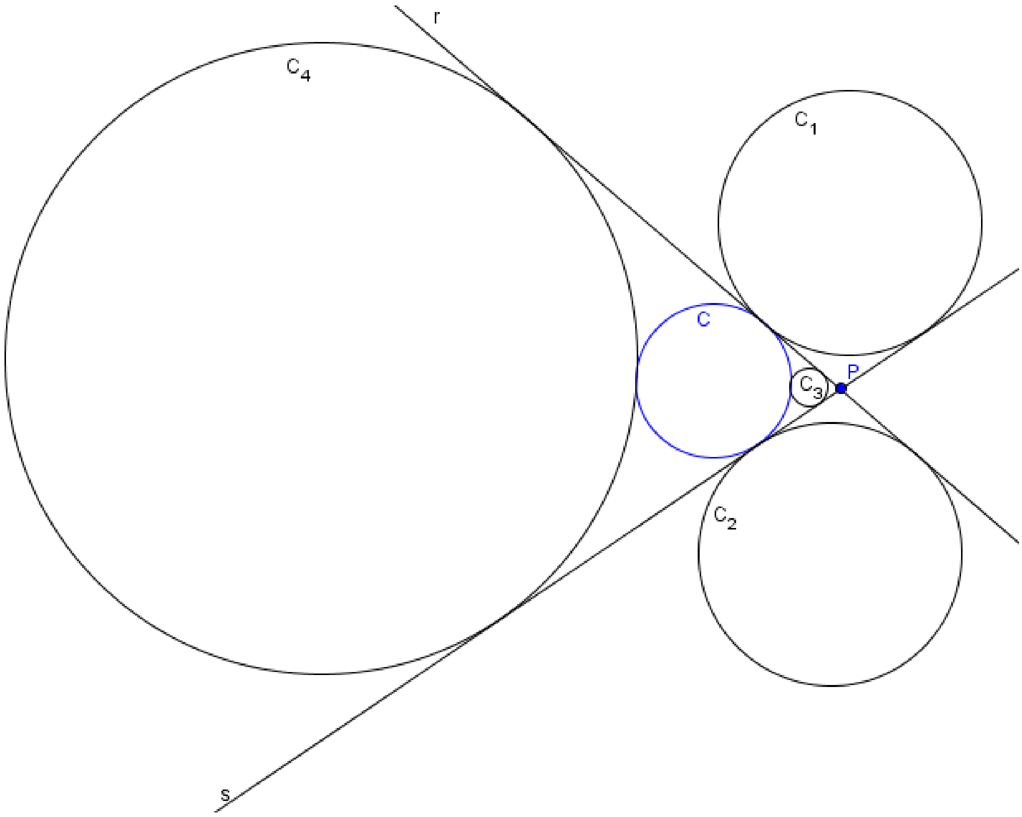
Nesta situação há quatro soluções, somente tangentes externas, pois somente a circunferência C satisfaz o problema interno. Os pontos de tangência com a circunferência C são os próprios pontos de tangência entre C com as retas r e s (pontos T_1 e T_2, respectivamente), e as interseções da bissetriz b_1 com C (pontos T_3 e T_4).



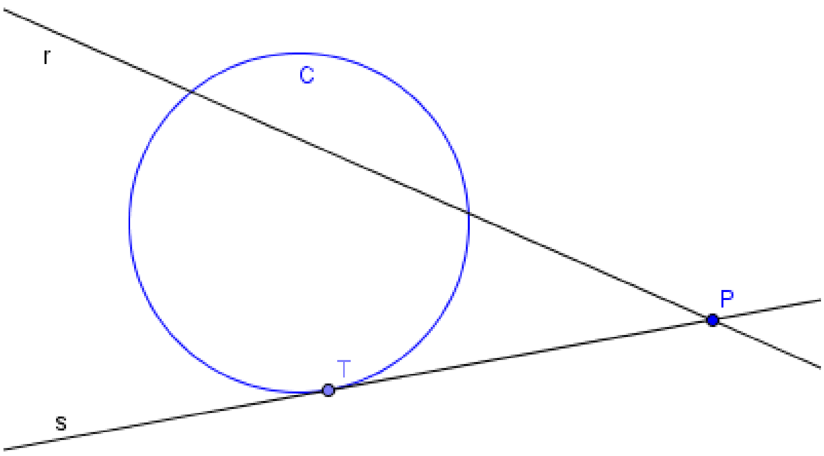
Para construir $C_3\ e\ C_4$, traçamos duas perpendiculares à bissetriz b_1 nos pontos $T_3\ e\ T_4$, e marcamos nas interseções com a reta r os pontos $A_1\ e\ A_2$. Trace as duas circunferências auxiliares D e D', com centros em $A_1\ e\ A_2$, e raios $\overline{A_1T_3}\ e\ \overline{A_2T_4}$ respectivamente. A interseção de r com D e D', os pontos $T_5\ e\ T_6$, são os pontos de tangência das soluções $C_3\ e\ C_4$ com a reta r. Agora, para encontrar os centros $O_3\ e\ O_4$, basta traçar as perpendiculares a r nos pontos $T_5\ e\ T_6$, respectivamente.



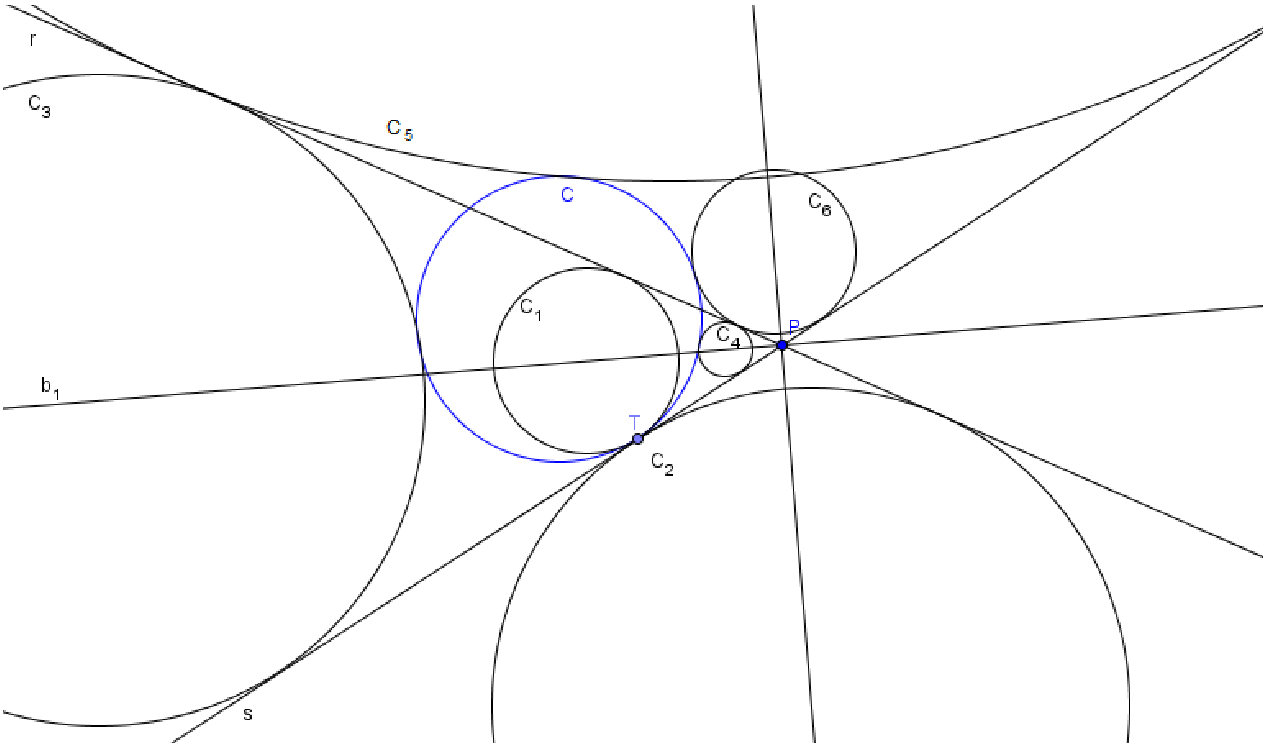
Portanto as quatro soluções são:



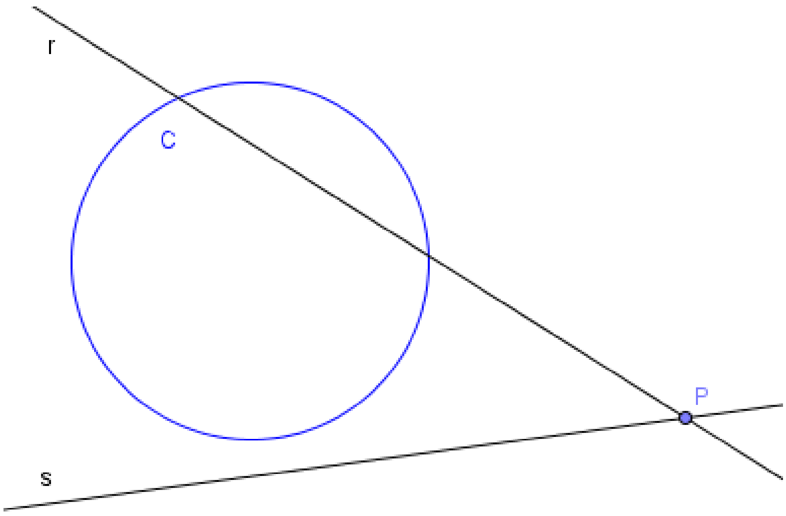
5ª situação: A reta r é secante a C e a reta s é tangente a C, no ponto T.



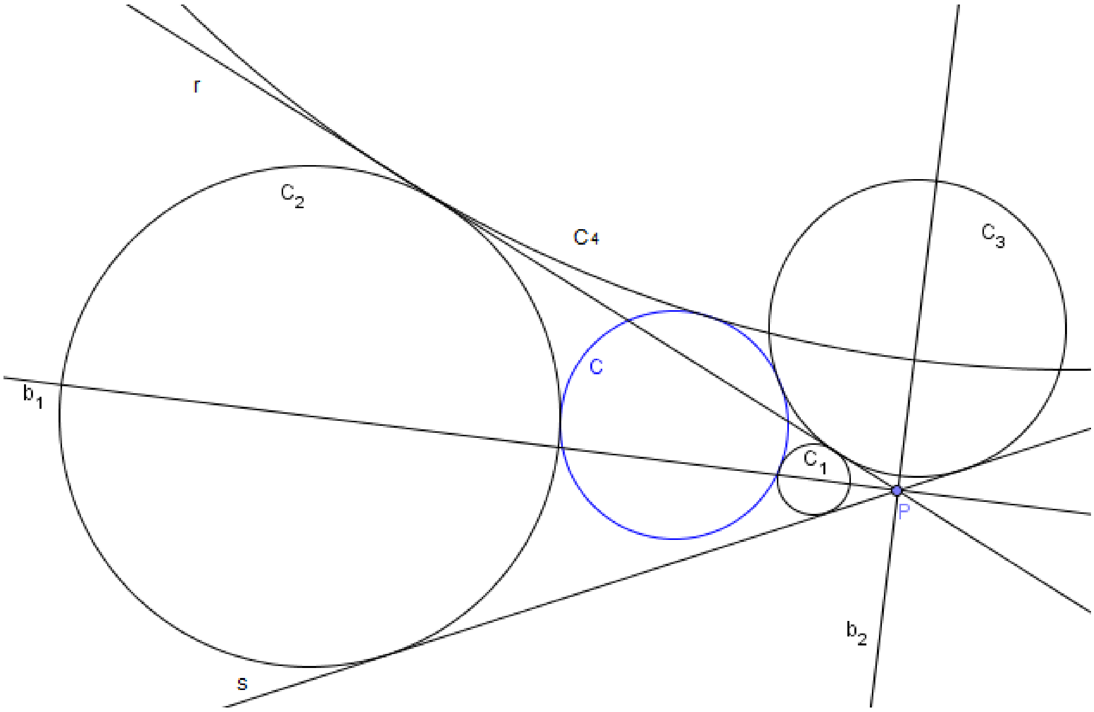
Nesta situação há seis soluções, diferentemente das oito soluções construídas na situação em que ambas as retas são secantes a C. Desaparecem duas das soluções: uma, que era tangente interna à circunferência C; e outra, que se situava abaixo da reta s.



6ª situação: A reta r é secante a C e a reta s é externa à circunferência C.



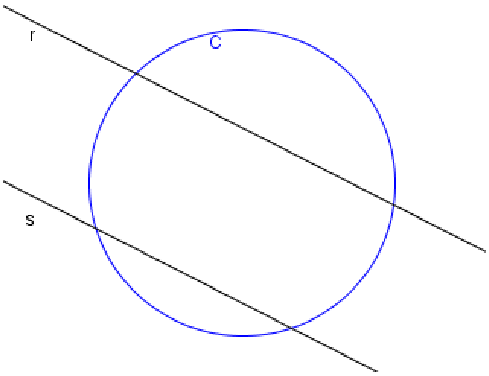
Nesta situação, há quatro soluções, devido ao fato de não haver nenhuma solução abaixo da reta s e nenhuma interna à circunferência C. As construções são iguais às da 1ª situação desta seção.



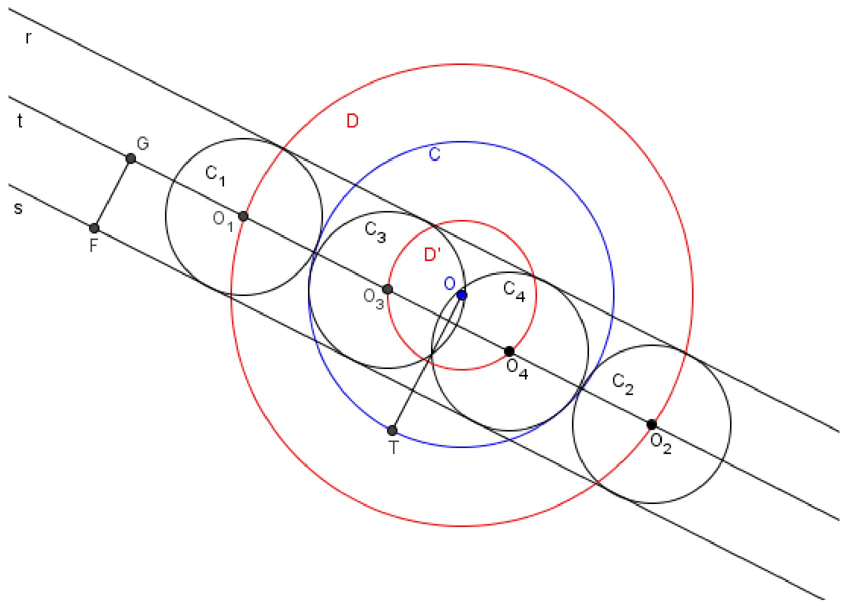
Caso 2. As retas são paralelas.

Nesse caso, seus centros pertencerão à reta t, paralela a r e a s, cuja distância de r a t é igual à distância de s a t.

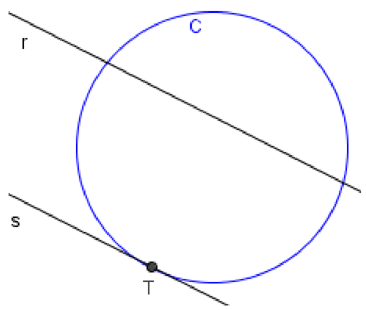
1ª situação: As retas são secantes a C.



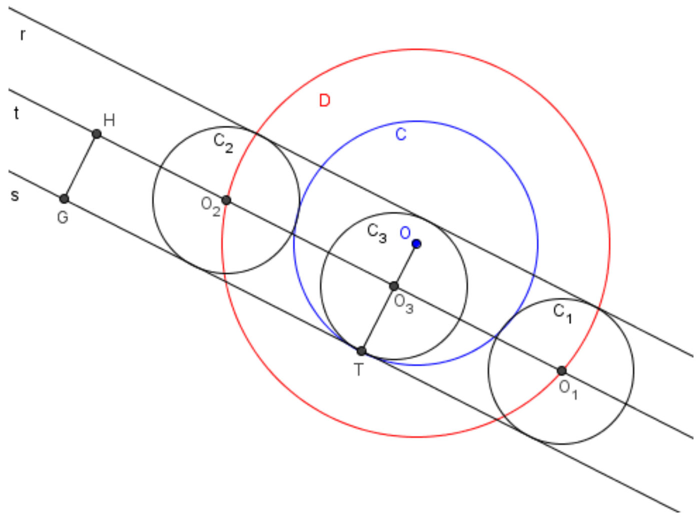
Nesta situação, temos quatro soluções. Todas as circunferências-solução tem raio igual à distância de r a t. A construção abaixo fala por si mesma, no sentido que a justificativa de porque o método funciona é muito evidente.



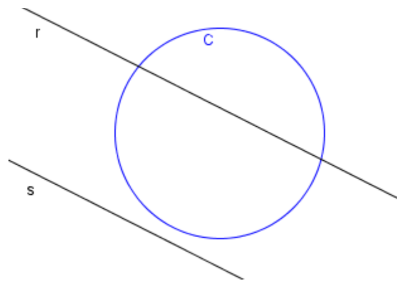
2ª situação: Uma reta é secante e a outra é tangente à circunferência.



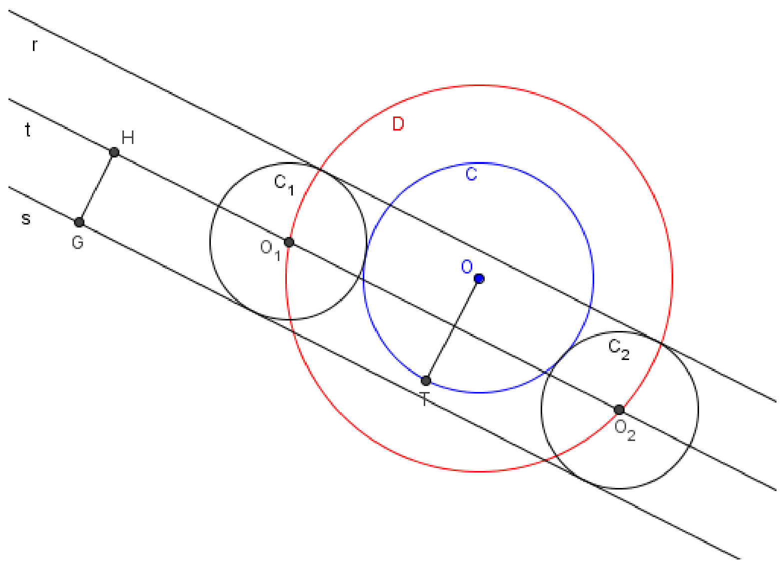
Nesta situação temos três soluções. A construção é da mesma forma que a anterior, com exceção que só há uma solução interna, pois o único ponto de tangência que satisfaz a condição de ser solução é o ponto T.



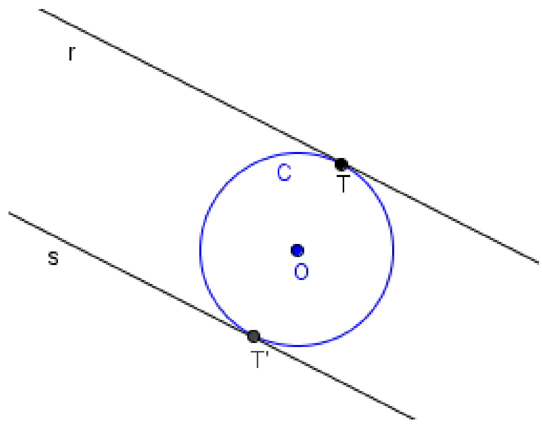
3ª situação: Uma reta é secante e a outra é externa à circunferência.



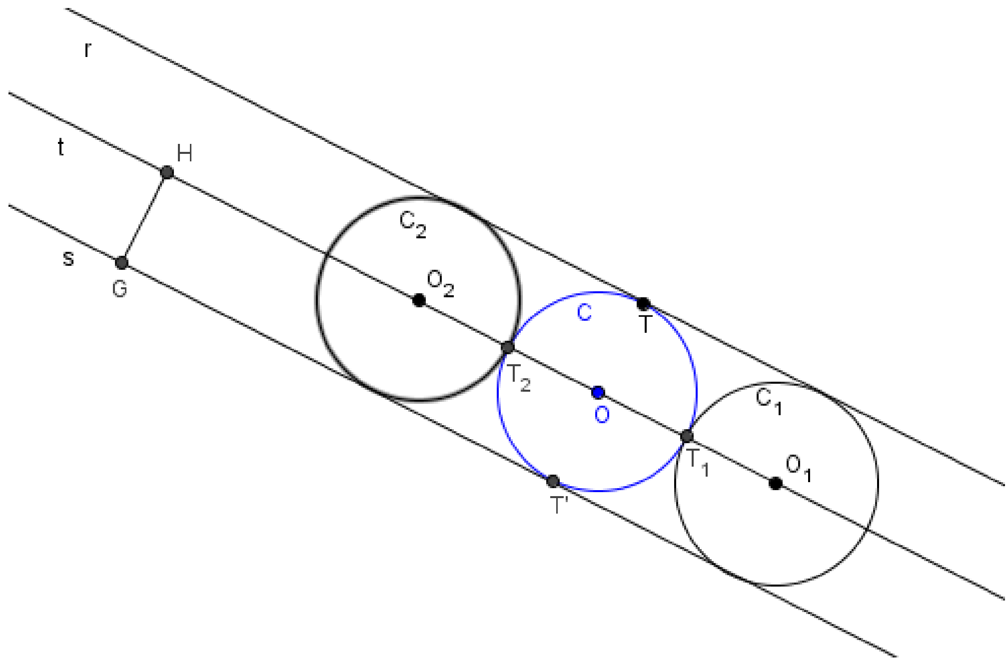
Nesta situação temos duas soluções, pois nenhuma circunferência interna à circunferência C vai ser tangente à reta externa. Portanto, a construção é semelhante a da 1ª situação.



4ª situação: As retas r e s são tangentes à circunferência C, nos pontos T e T', respectivamente.



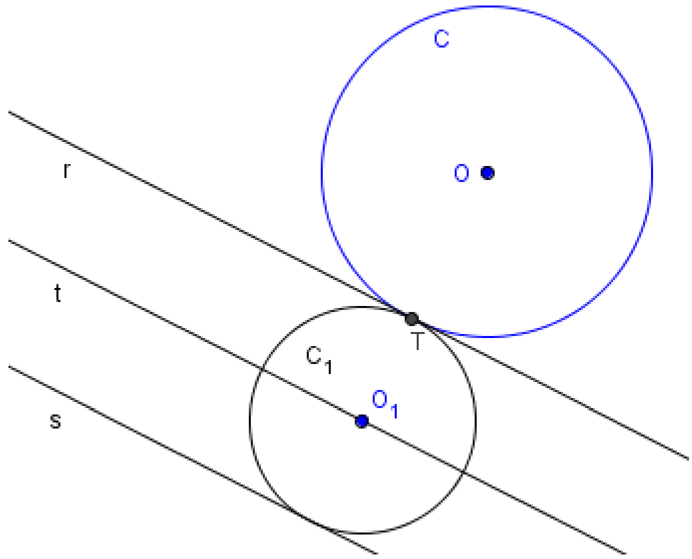
Nesta situação temos duas soluções, que podem ser vistas a seguir.



5ª situação: Uma reta é tangente e a outra é externa à circunferência.

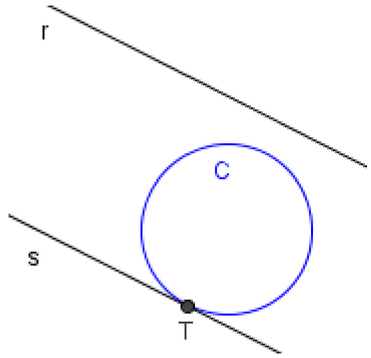
Nesta situação temos dois formatos diferentes quanto à posição da circunferência C:

5.1- A circunferência C está em lado oposto a uma das retas em relação à outra reta.

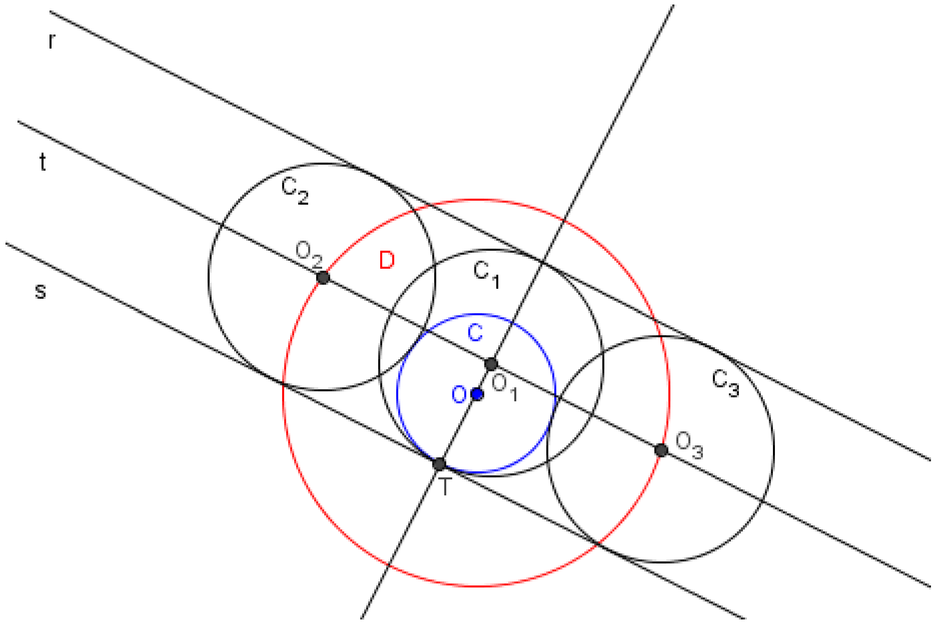


Nesta situação há somente uma solução.

5.2- A circunferência está entre ambas às retas.



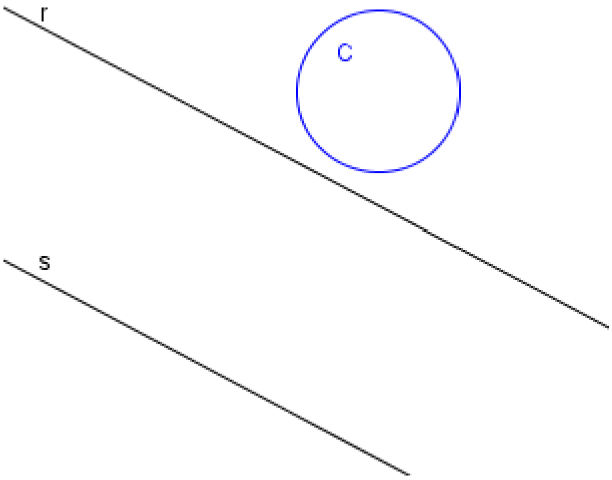
Nesta situação há três soluções. Uma solução tem como tangente interna a circunferência C, no ponto T. As outras duas soluções são externas à circunferência C e construídas do mesmo modo que na 1ª situação desta seção.



6ª situação: As retas são externas à circunferência.

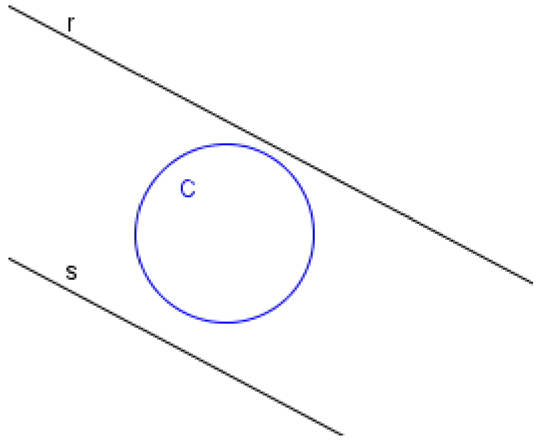
Como na situação acima, temos dois formatos conforme a posição da circunferência C:

6.1- A circunferência C está no lado oposto a uma das retas em relação à outra reta.

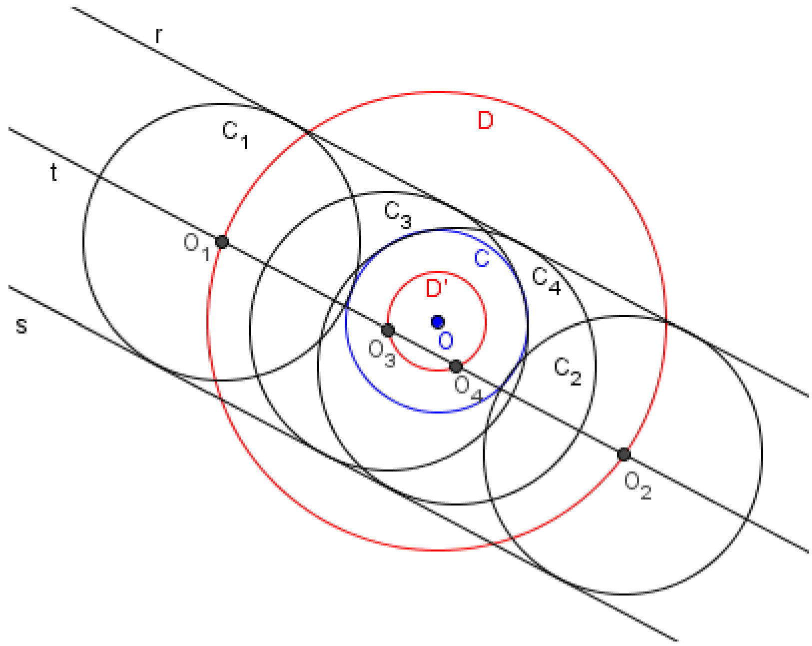


Nesta situação não há solução.

6.2- A circunferência está entre ambas às retas.



Nesta situação temos quatro soluções. Duas delas são externas à circunferência C e duas têm a circunferência C tangenciando internamente as soluções. Para construí-las, basta seguir os passos da 1ª situação desta seção.



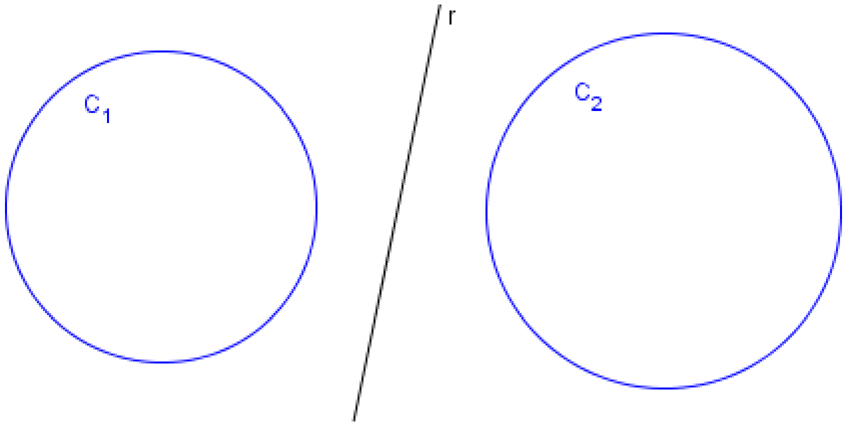
2.9. RCC

Caso1. As circunferências são externas.

1ª situação: a reta é externa a ambas as circunferências.

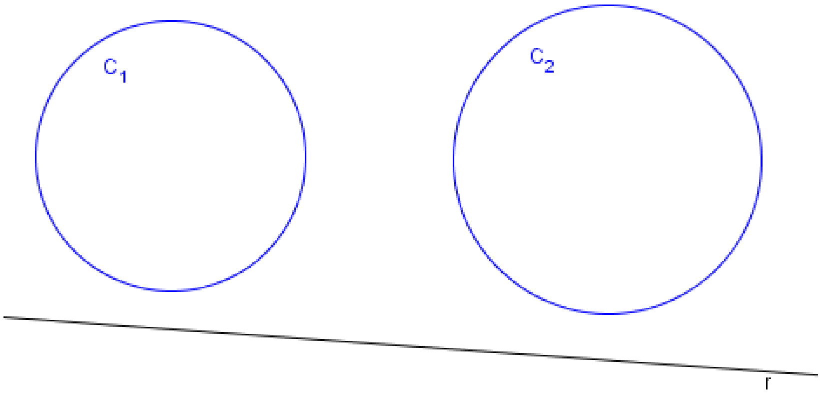
Isso pode acontece de duas formas:

1.1- As duas circunferências C_1 e C_2 estão em regiões opostas em relação à reta r.



Nesta situação não há solução.

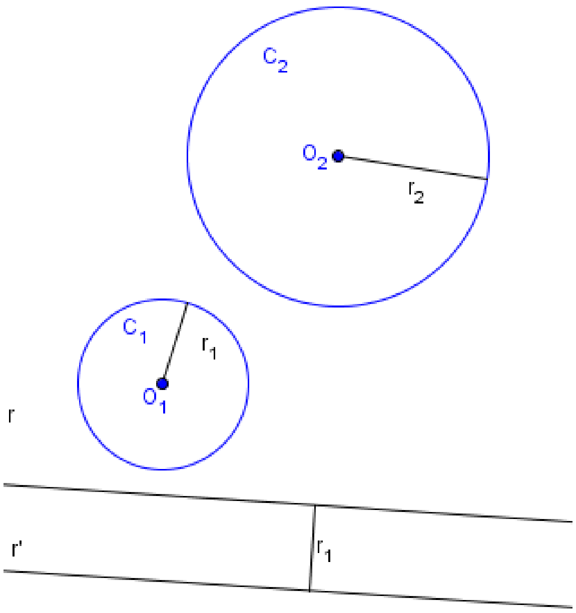
1.2- As duas circunferências C_1 e C_2 estão do mesmo lado em relação à reta r, com raios iguais a r_1 e r_2, respectivamente, tais que $r_1 \leq r_2$.



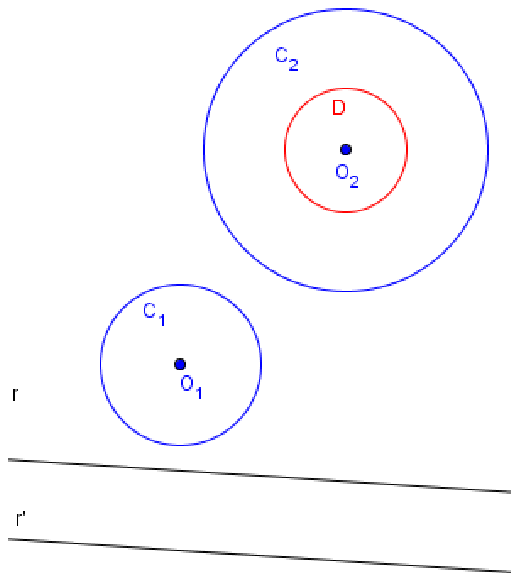
Nesta situação temos oito soluções diferentes. A construção reduz o problema para PRC, por redução do círculo menor a um ponto, concomitantemente à redução do círculo maior a um círculo de raio igual à diferença dos raios originais e à translação da reta no mesmo valor, ou à ampliação do círculo maior a um círculo de raio igual à soma dos raios originais etc. Esses procedimentos podem ser acompanhados passo a passo a seguir, os quais também podem ser vistos em [7].

1ª e 2ª soluções.

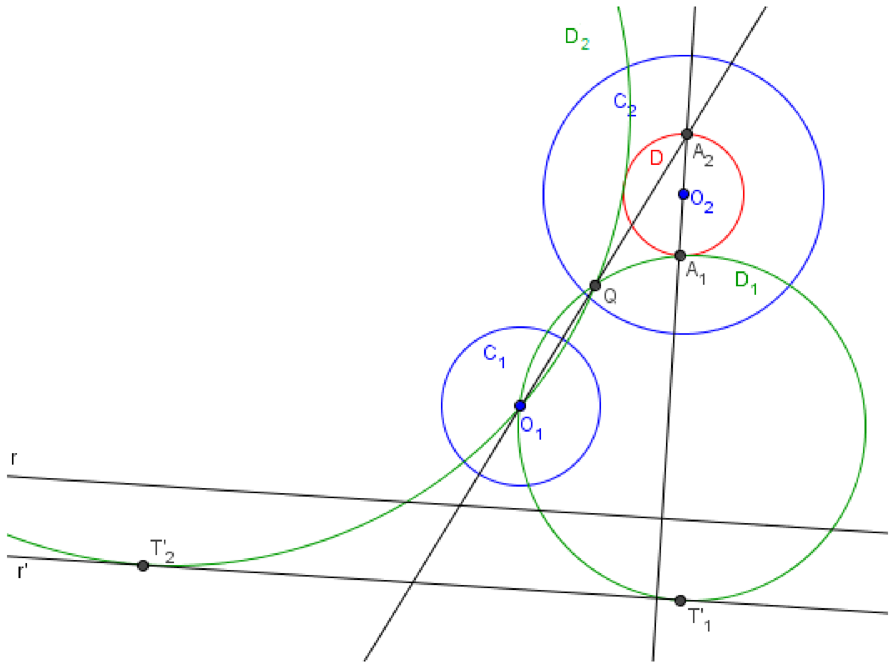
a) Trace uma reta auxiliar r’ paralela à reta r na região que não há circunferências, cuja distância a r seja igual a r_1;



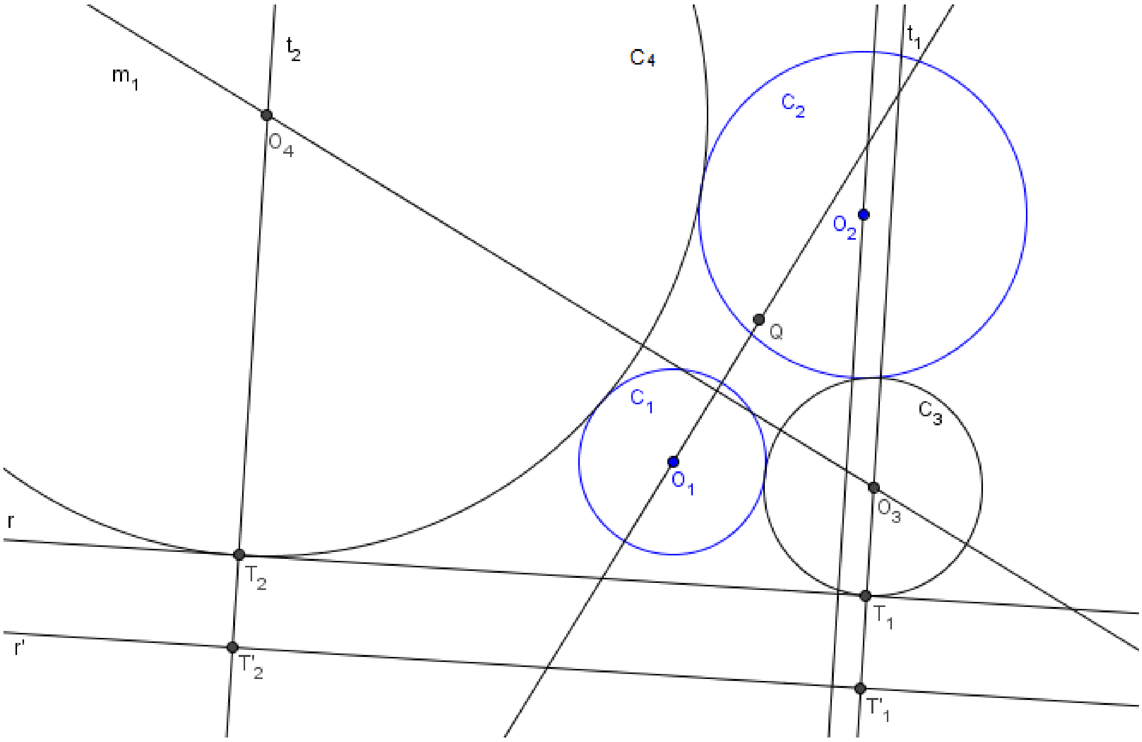
b) Trace uma circunferência auxiliar D com centro em O_2e raio igual a $r_2 - r_1$;



c) Construa duas circunferências D_1 e D_2, soluções de PRC para o ponto O_1, a reta r' e a circunferência D. Marque os pontos T'_1 e T'_2 nas interseções de D_1 e D_2 com r', respectivamente.

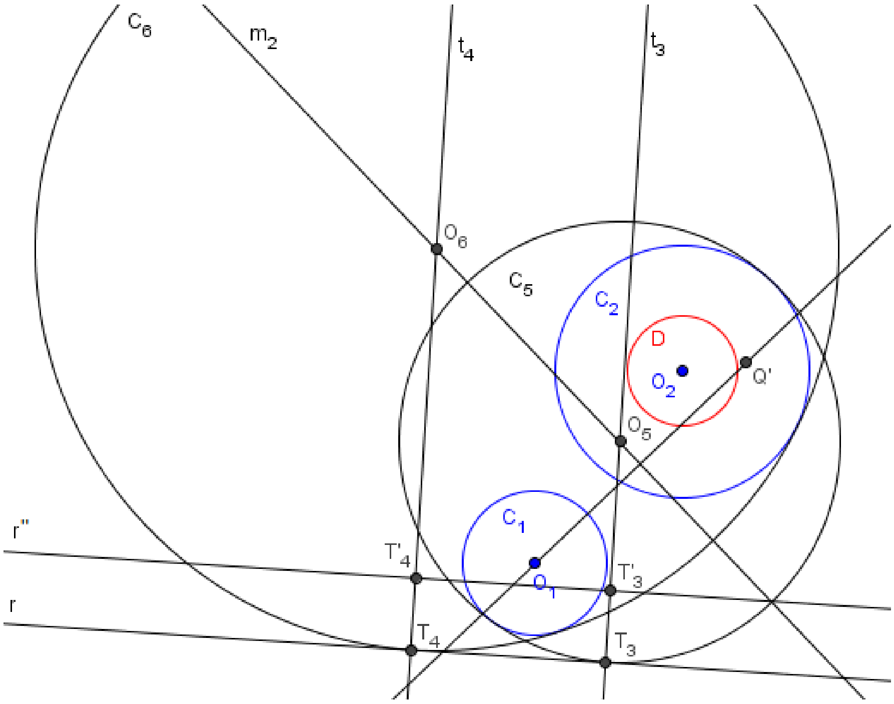


d) Trace as perpendiculares à reta r, t_1 e t_2, pelos pontos T'_1 e T'_2, respectivamente, e marque os pontos T_1 e T_2, interseções das perpendiculares com r. Traçamos a mediatriz m_1 de $\overline{O_1Q}$, e marcamos nas interseções de m_1 com $t_1\ e\ t_2$ os pontos $O_3\ e\ O_4$, respectivamente. Agora, basta traçar as circunferências-solução $C_3\ e\ C_4$, de centros $O_3\ e\ O_4$ e raios iguais $\overline{T_1O_3}\ e\ \overline{T_2O_4}$.

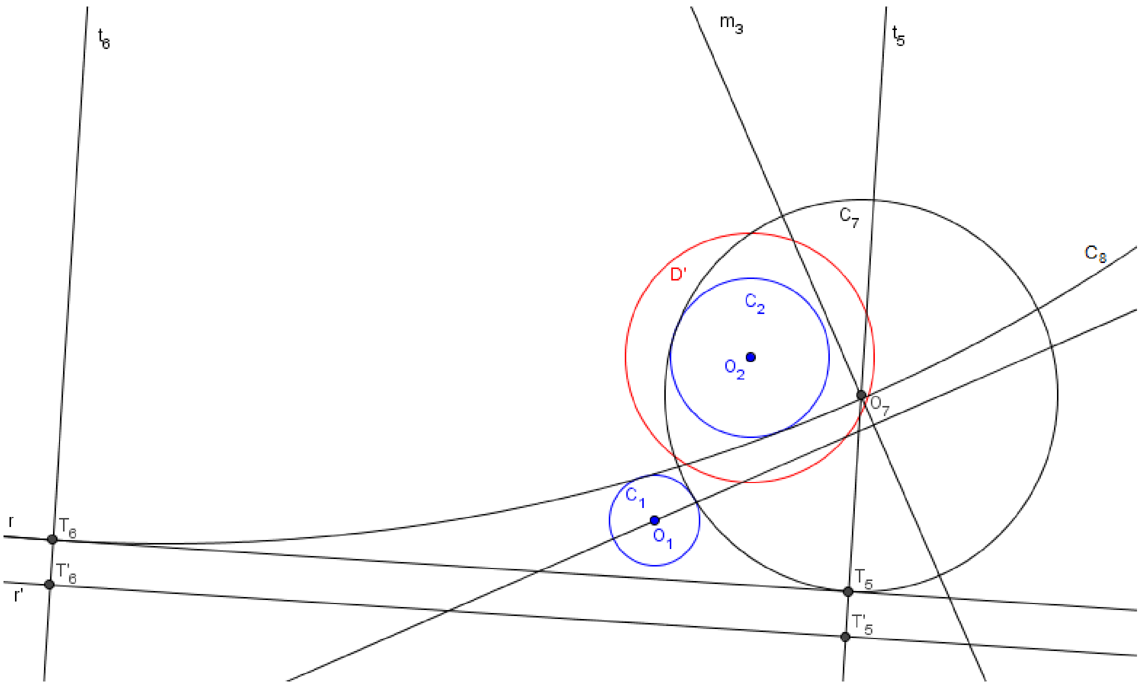


As próximas soluções são construídas conforme as soluções no caso PRC com uma reta auxiliar r'' paralela a r, cuja distância a r é r_1, e que está na mesma região da reta onde estão as circunferências. Vamos considerar ainda uma circunferência auxiliar D' com centro em O_1 e raio igual a $r_2 + r_1$.

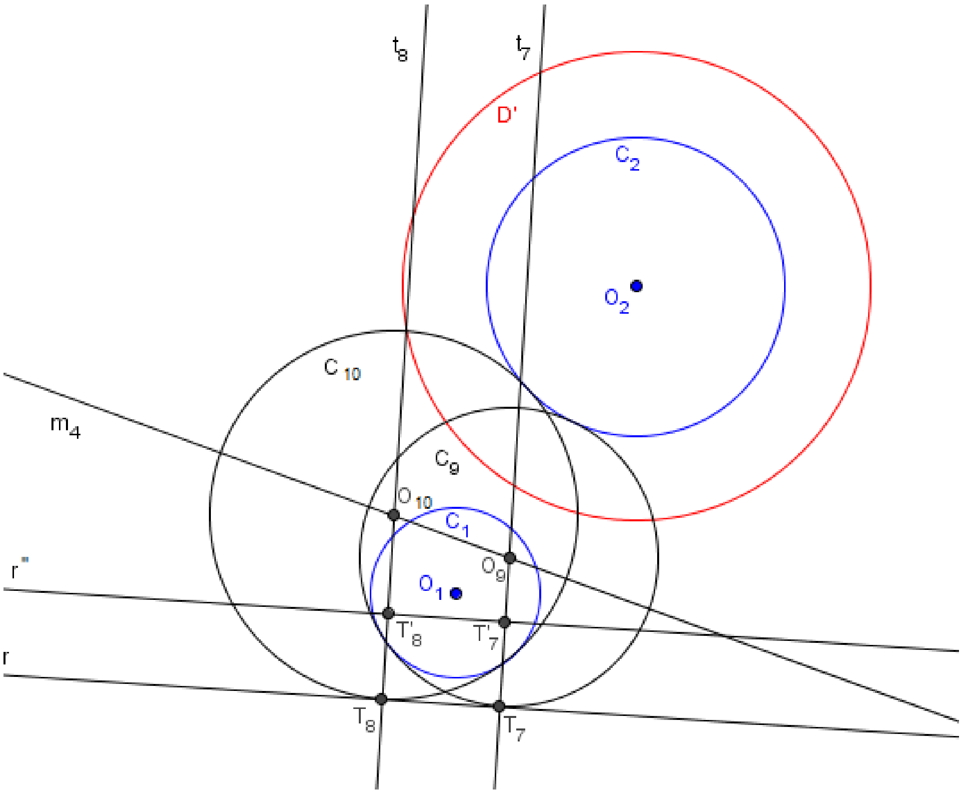
3ª e 4ª soluções. Vamos usar o caso PRC para o ponto O_1, a reta r'' e a circunferência D.



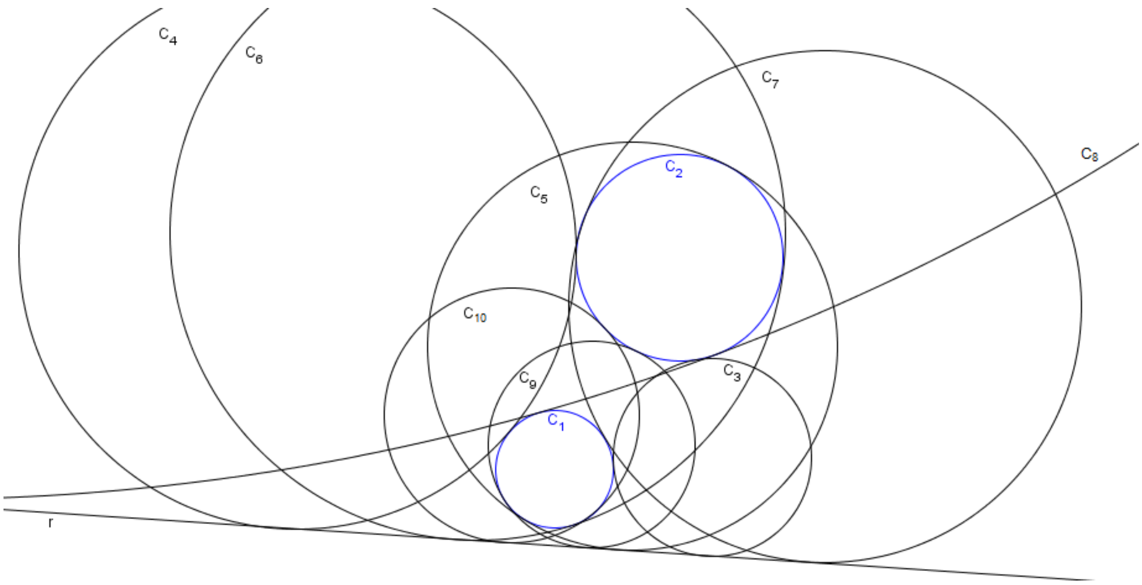
5ª e 6ª soluções. Vamos usar o caso PRC para o ponto O_1, a reta r' e a circunferência D'.



7ª e 8ª soluções. Vamos usar o caso PRC para o ponto O_1, a reta r'' e a circunferência D'.



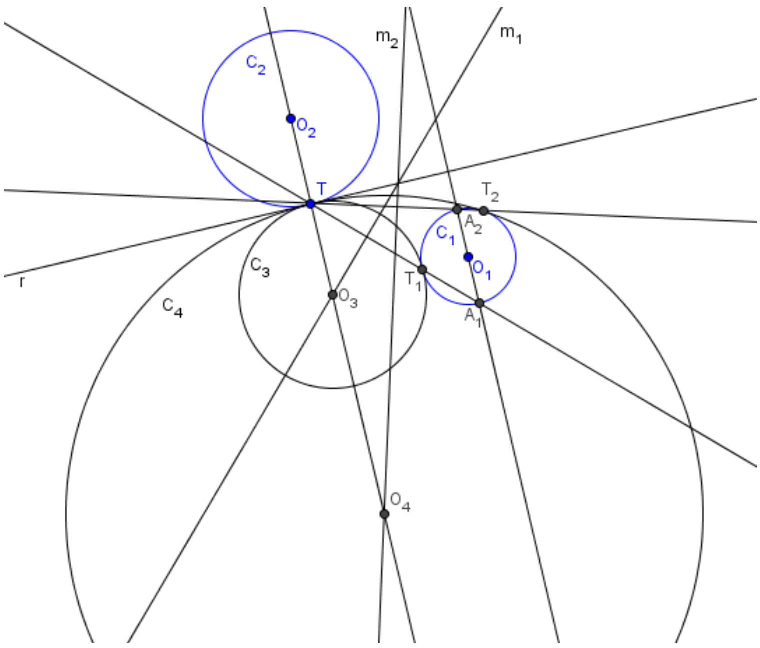
Todas as soluções podem ser vistas a seguir.



2ª situação: a reta é externa à circunferência C_1 e tangente à circunferência C_2 no ponto T.

2.1- As duas circunferências C_1 e C_2 estão em regiões opostas em relação à reta r.

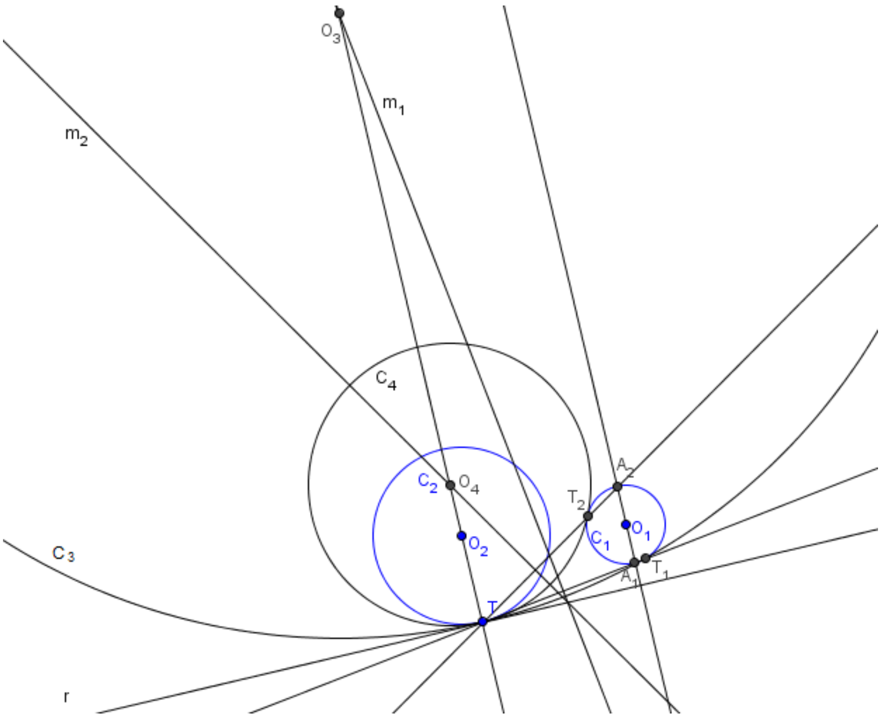
Nesta situação, temos duas soluções: existem duas circunferências tangentes à circunferência C_1 (tangente interna e tangente externa) que passam pelo ponto T. A construção é feita da mesma forma que em PRC, Caso 3, 4ª situação.



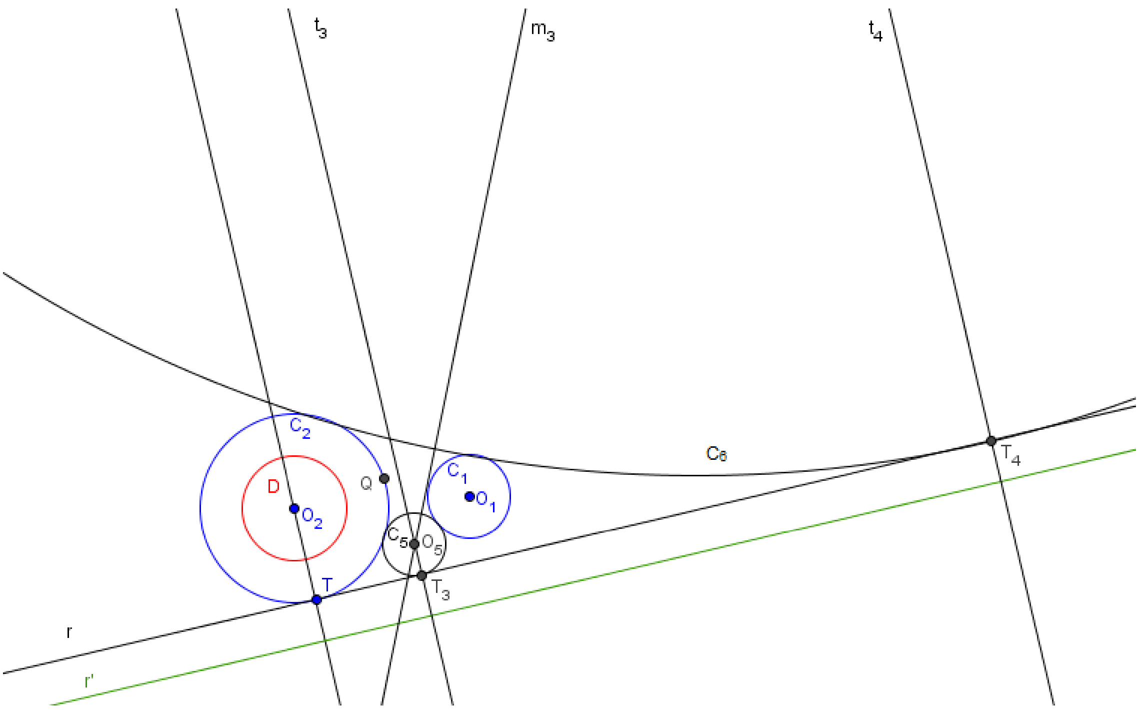
2.2- As duas circunferências C_1 e C_2 estão na mesma região em relação à reta r.

Nesta situação, há seis soluções. Duas delas são construídas do mesmo modo que na situação acima, e ambas as soluções têm a circunferência C_2 no interior das soluções. As outras quatro soluções são tangentes externas à circunferência C_2 e são construídas da mesma forma que no Caso 1, 1ª situação desta seção.

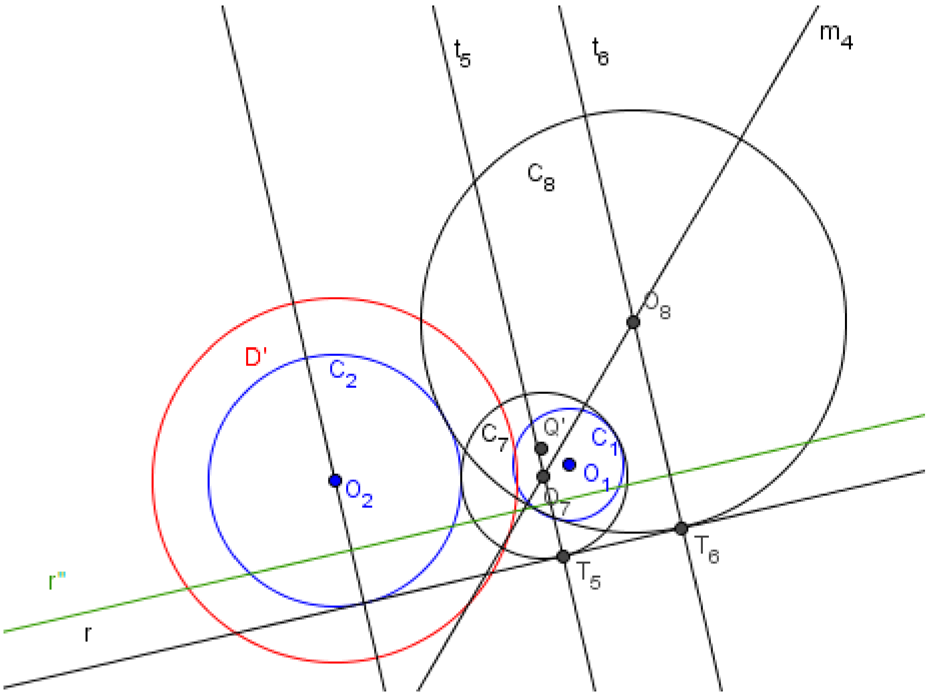
1ª e 2ª soluções.



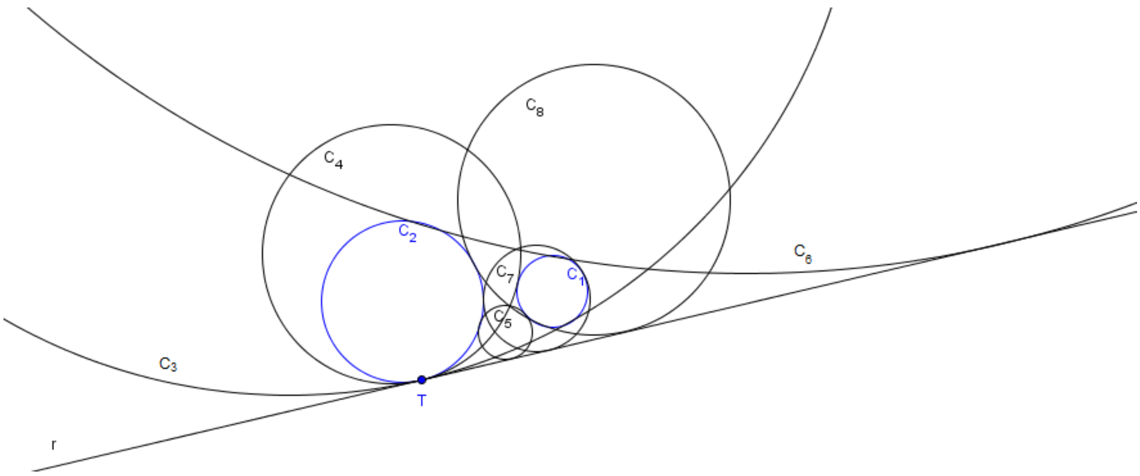
3ª e 4ª soluções.



5ª e 6ª soluções.

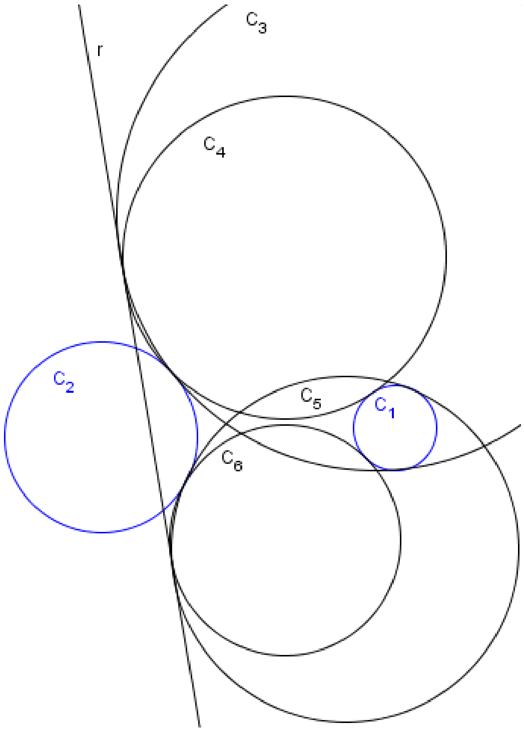


A seguir, podemos ver todas as seis soluções.



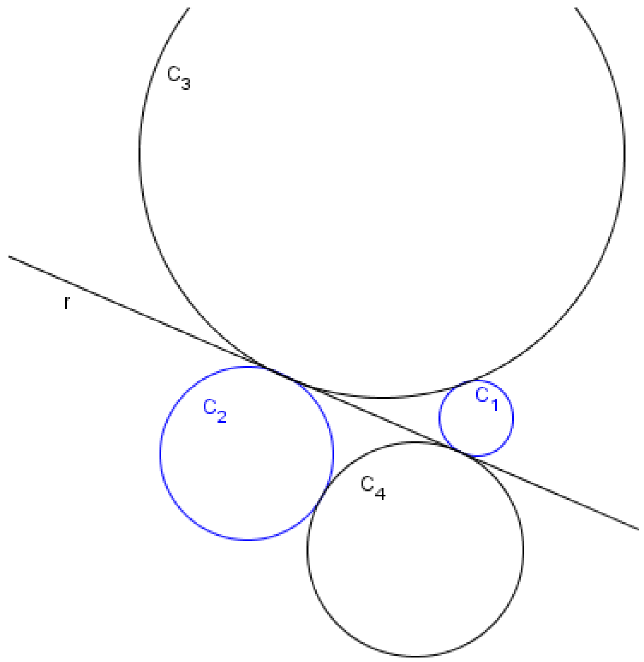
Obs. A partir de agora, iremos apenas mostrar as soluções das diversas situações de RCC que restam. Essas situações são construídas da mesma forma que as construções acima. Portanto, iremos mostrar nas situações seguintes apenas o número de soluções e suas formas.

3ª situação: a reta é externa a uma circunferência e secante à outra. São quatro soluções, que podem ser vistas a seguir.



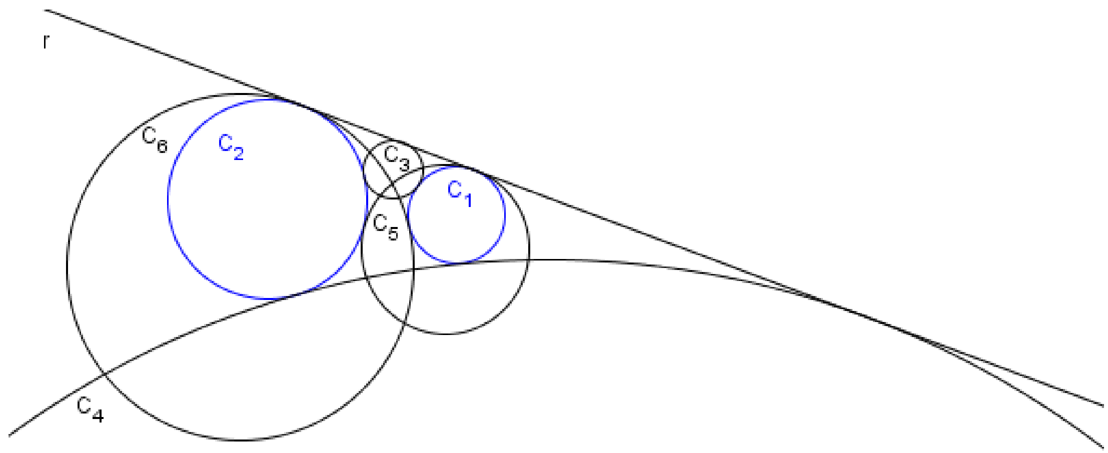
4ª situação: a reta é tangente a ambas as circunferências.

4.1- As circunferências estão em regiões opostos em relação à reta r. Temos duas soluções (não considerando a reta r como solução).

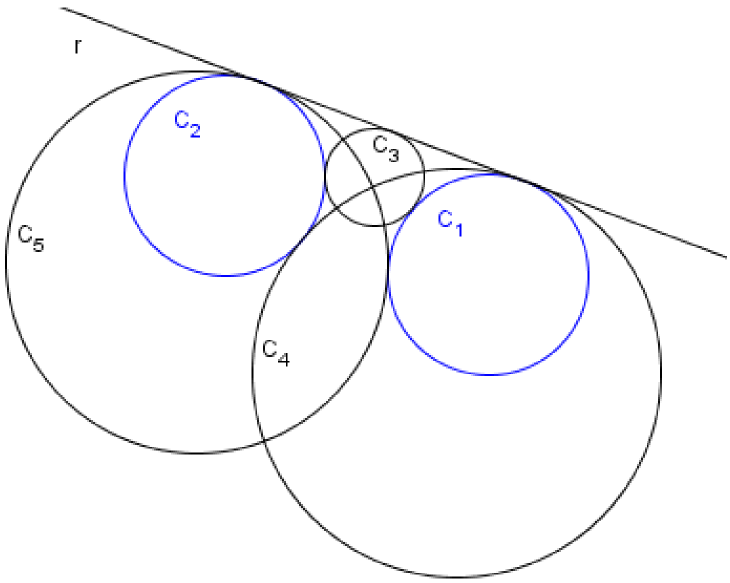


4.2- As circunferências estão no mesmo lado em relação à reta r.

Nesta situação, para $r_1 \neq r_2$, temos quatro soluções.

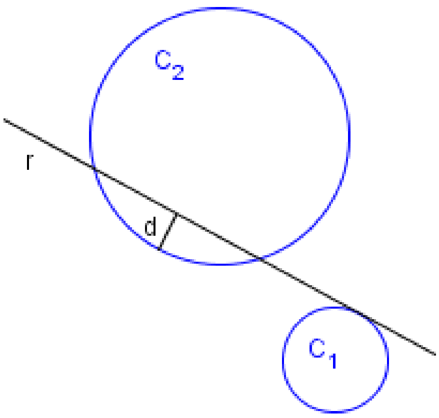


Mas, para $r_1 = r_2$, temos três soluções.

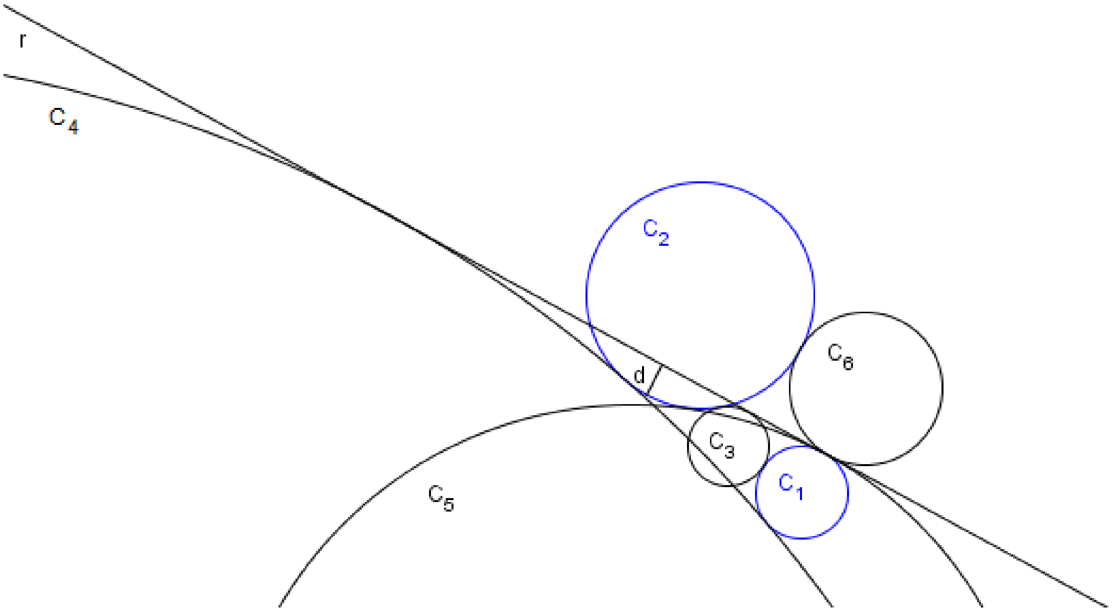


5ª situação: a reta r é tangente à circunferência C_1 e secante a C_2.

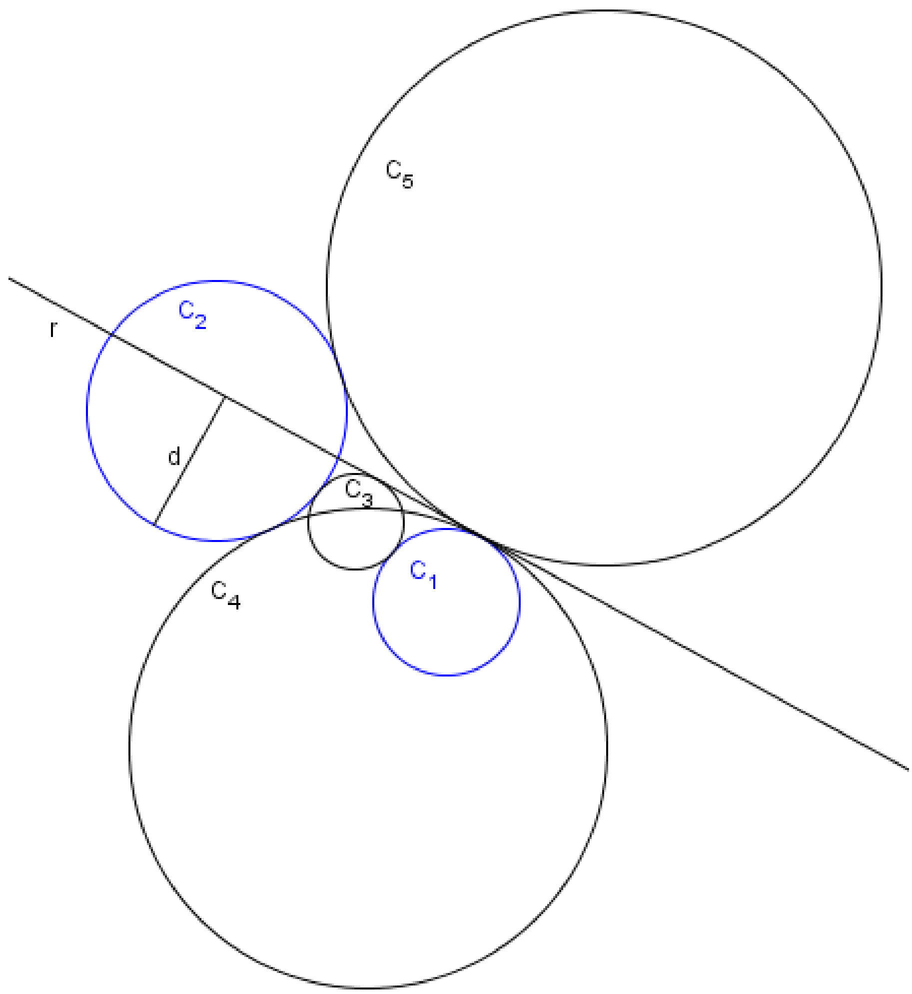
Vamos chamar de d a altura do segmento circular delimitado pela reta r e a circunferência C_2, no mesmo lado que está a circunferência C_1, como se vê na figura abaixo.



Para d ≠ $(2.r_1)$, temos quatro soluções.

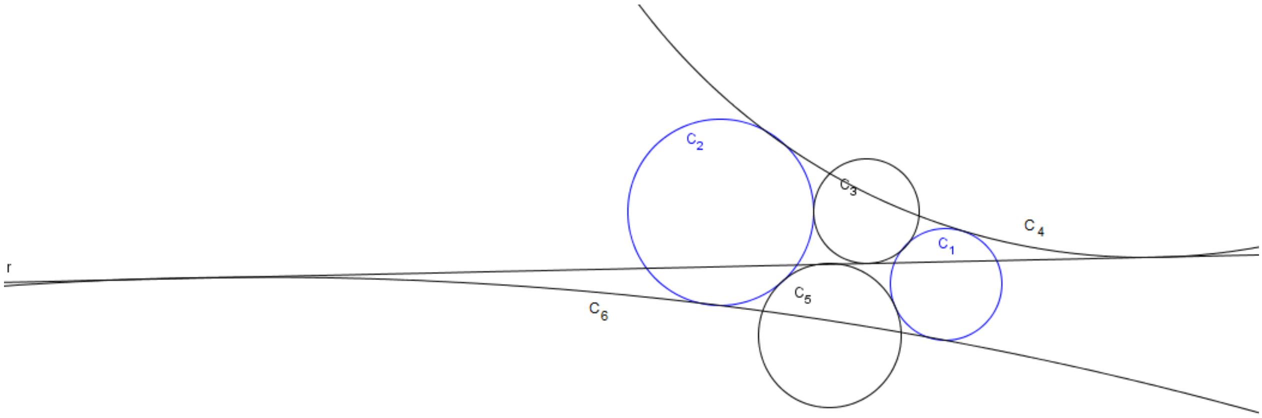


Para d= $2.r_1$, temos três soluções.



6ª situação: a reta é secante a ambas as circunferências.

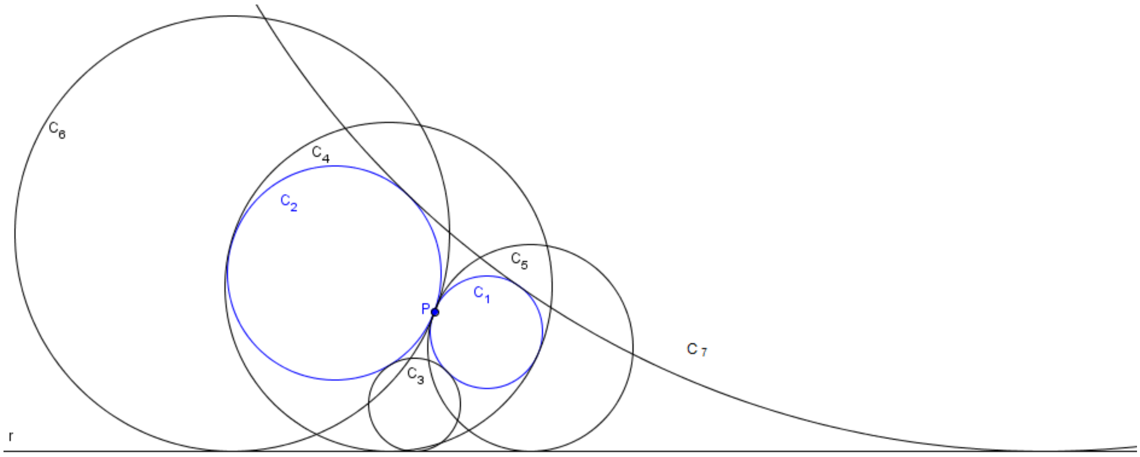
O máximo de soluções desta situação é quatro. Duas soluções coincidem se as alturas dos segmentos circulares delimitados pela reta r e as circunferências $C_1 e\ C_2$ (num mesmo lado em relação a r) forem iguais. Podemos ter três soluções quando em um dos semiplanos as distâncias máximas são iguais, e duas soluções quando nos dois semiplanos as distâncias máximas são iguais. Mostraremos abaixo a situação que tem quatro soluções.



Caso 2. As circunferências são tangentes externas no ponto P.

1ª situação: a reta é externa a ambas as circunferências.

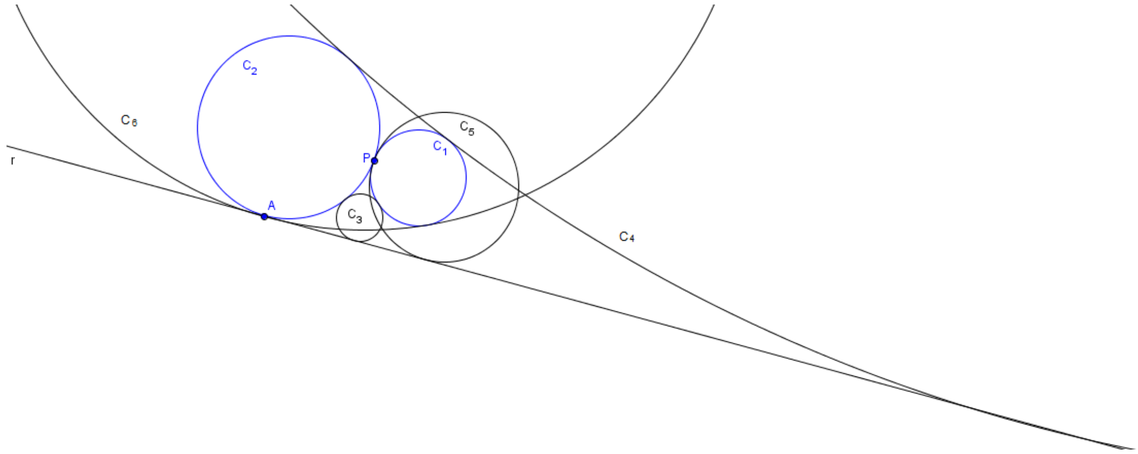
Temos cinco soluções.



Obs. Podemos ter uma solução a menos, se a reta tangente externa às duas circunferências que é mais exterior em relação a r, for paralela a r.

2ª situação: a reta é externa a C_1 e tangente a C_2, em A.

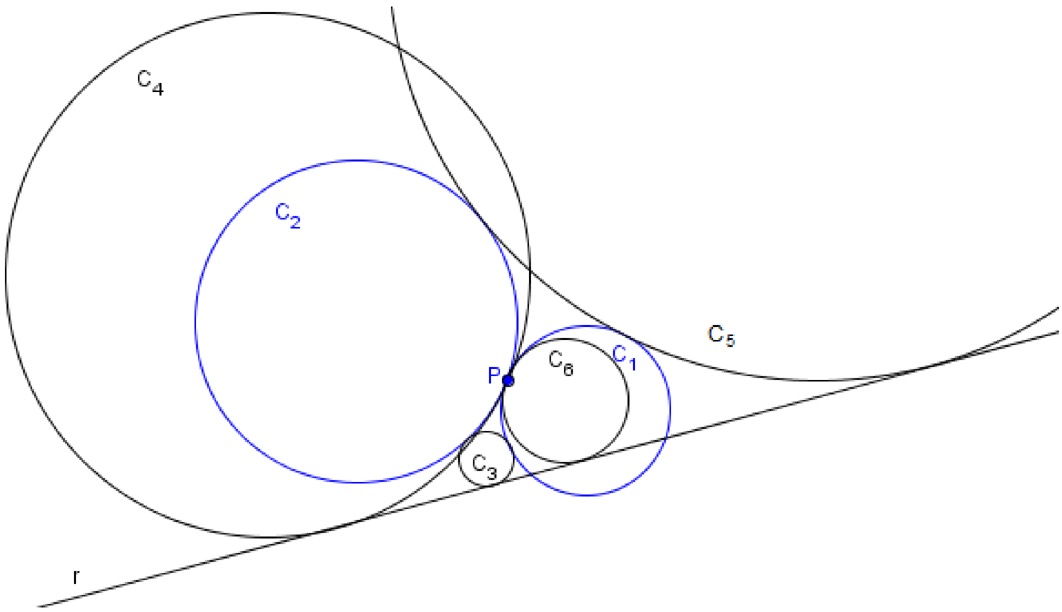
Temos quatro soluções.



Obs. Podemos ter uma solução a menos, no caso análogo ao da observação anterior.

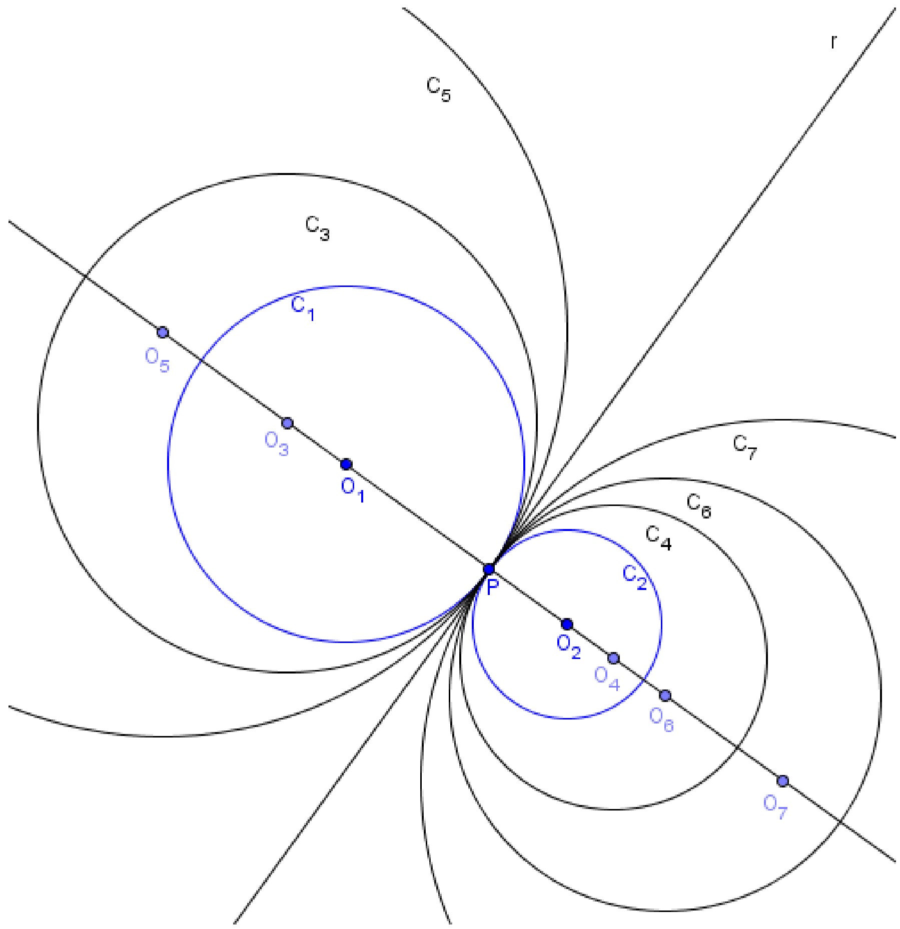
3ª situação: a reta é externa a uma circunferência e secante à outra.

Temos quatro soluções.

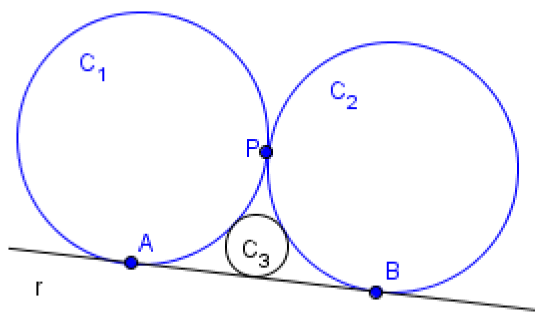


4ª situação: a reta é tangente a ambas as circunferências. Seja A a interseção de C_1 com r. Seja B a interseção de C_2 com r.

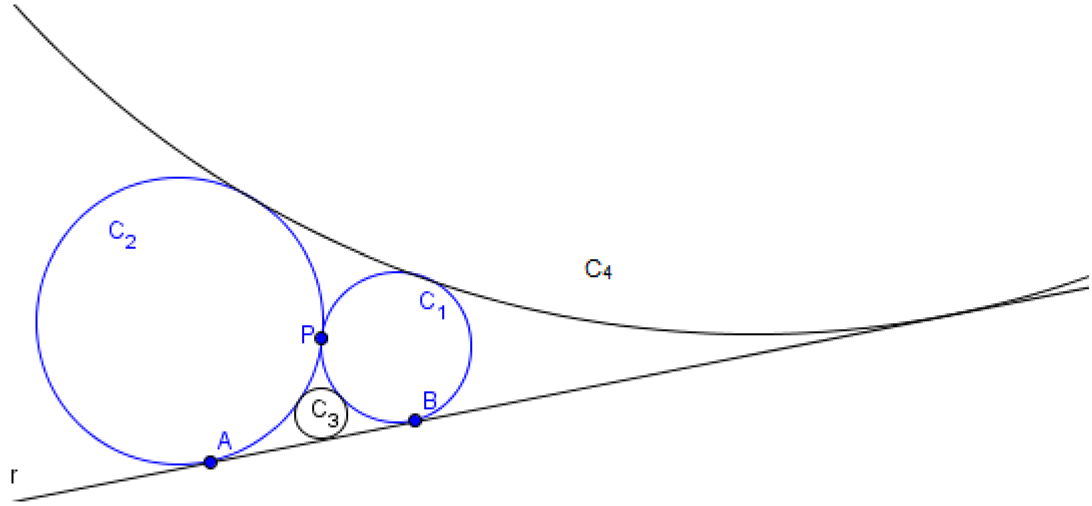
4.1- Caso $P = A = B$. Temos infinitas soluções (Esse caso é idêntico a PCC, com o ponto P pertence a ambas as circunferências, e as circunferências $C_1 \; e \; C_2$ são tangentes externas).



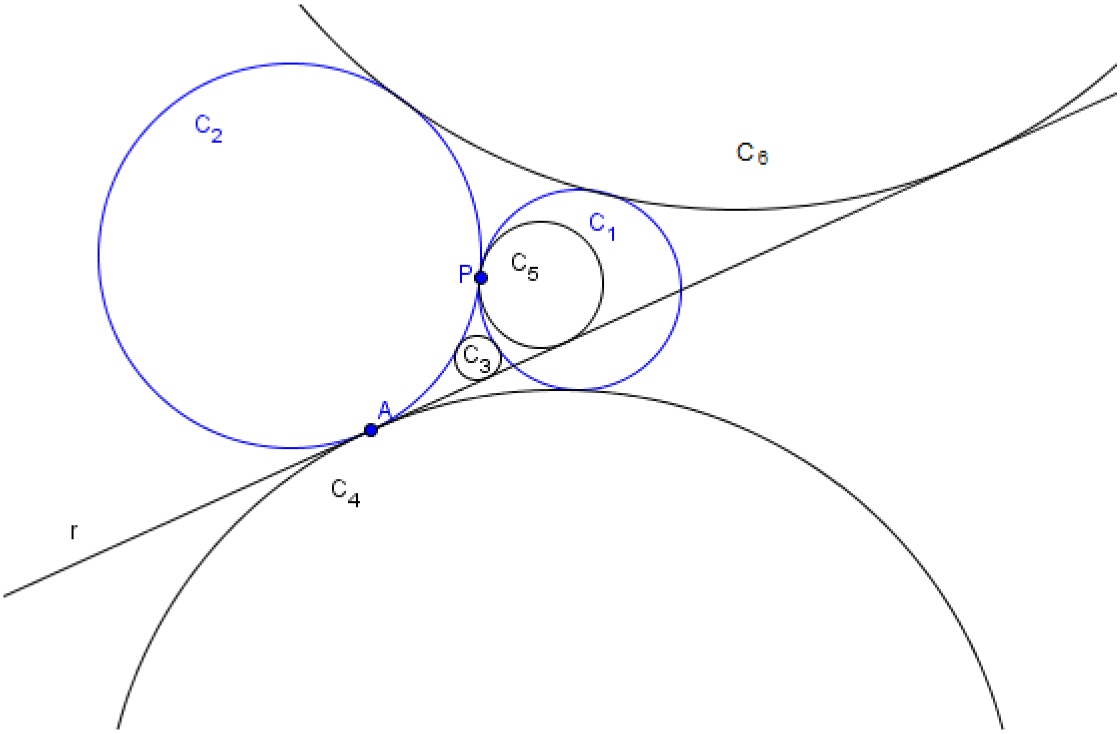
4.2- Caso $P \neq A \neq B$, com os raios das circunferências iguais. Temos uma solução (não vamos considerar como soluções do problema a reta r e as circunferências C_1 e C_2,).



4.3- Caso $P \neq A \neq B$, com raios das circunferências diferentes. Temos duas soluções.



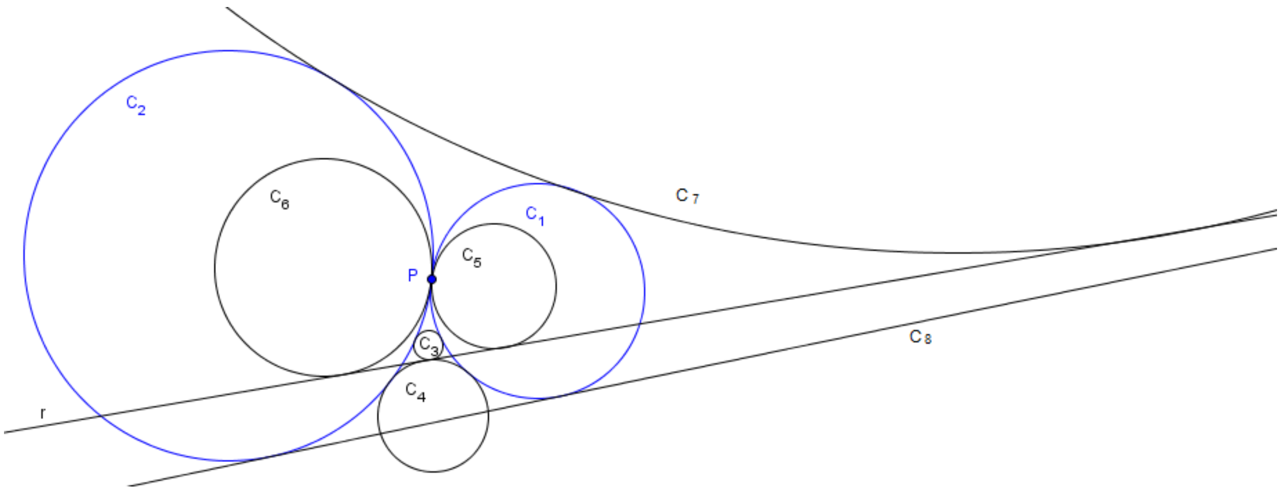
5ª situação: a reta é tangente a uma circunferência e secante à outra. Temos quatro soluções.



Obs. Uma solução desta situação acima pode sumir, caso exista uma reta tangente a C_1 e a C_2, que seja paralela à reta r.

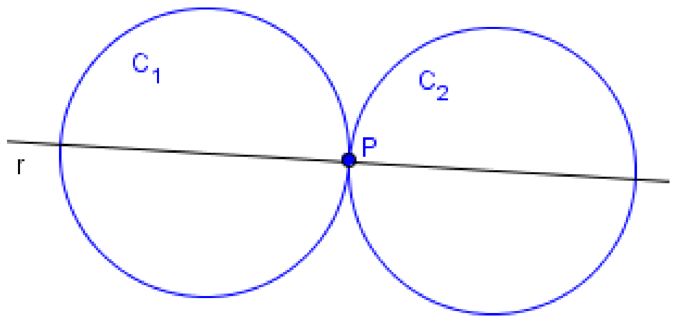
6ª situação: a reta é secante a ambas as circunferências.

Temos seis soluções.



Obs.

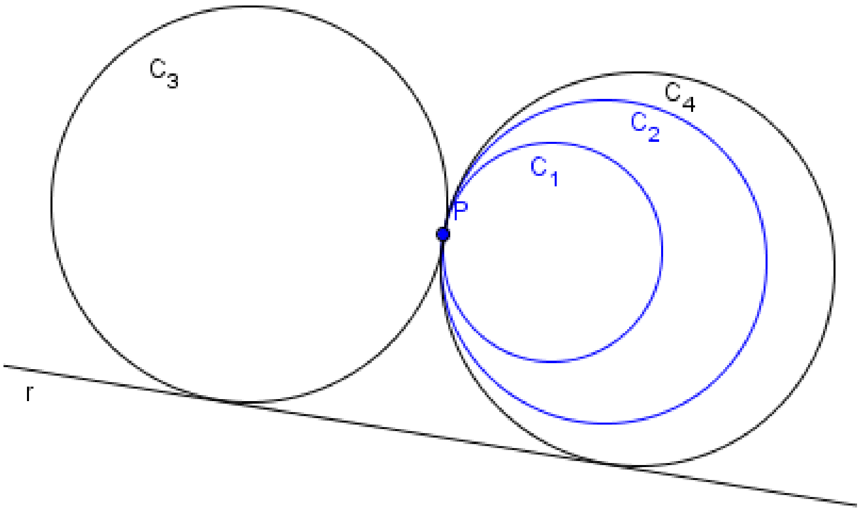
1. Uma solução desta situação acima pode sumir, caso exista uma reta tangente a C_1 e a C_2, que seja paralela à reta r.
2. Caso existam duas retas paralelas a r que sejam tangentes a C_1 e a C_2, somem duas soluções;
3. Caso a reta r passe pelo ponto P, somem quatro soluções;
4. Caso aconteçam as observações 2 e 3 acima, o problema não tem solução, como é visto a seguir.



Caso 5. As circunferências são tangentes internas no ponto P, com C_1 interna a C_2.

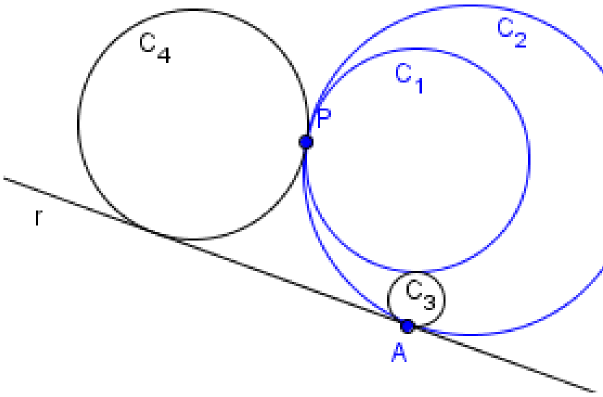
1ª situação: a reta r é externa a ambas as circunferências.

Temos duas soluções.



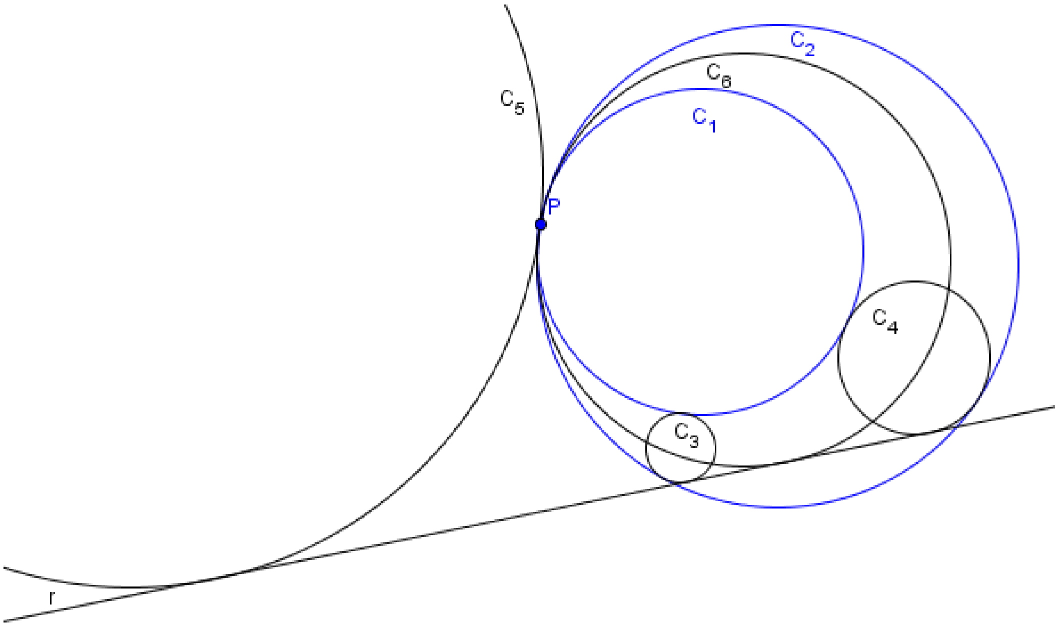
2ª situação: a reta r é externa a C_1 e tangente a C_2.

Temos duas soluções (não consideramos C_2 como solução).



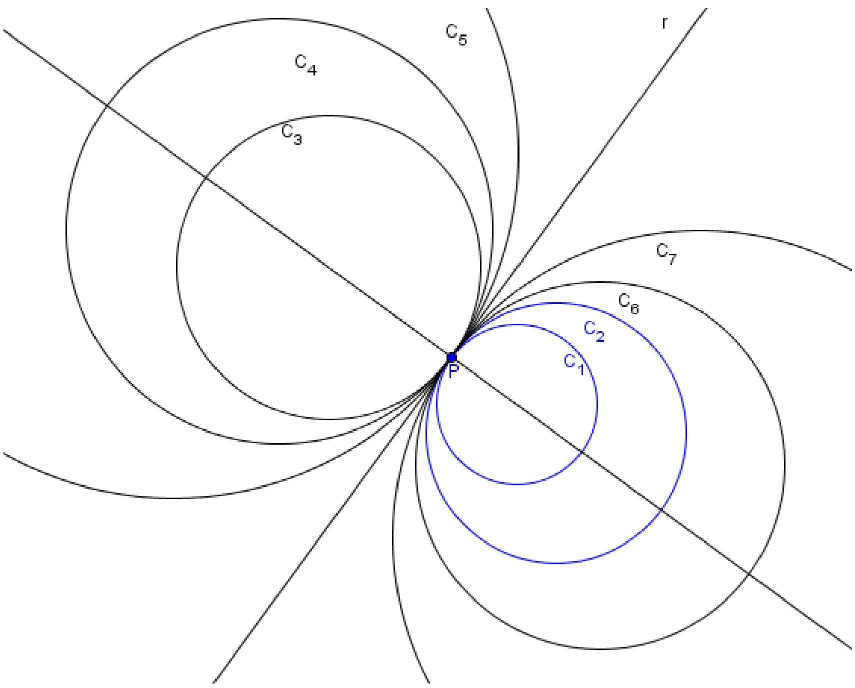
3ª situação: a reta r é externa a C_1 e secante a C_2.

Temos quatro soluções.



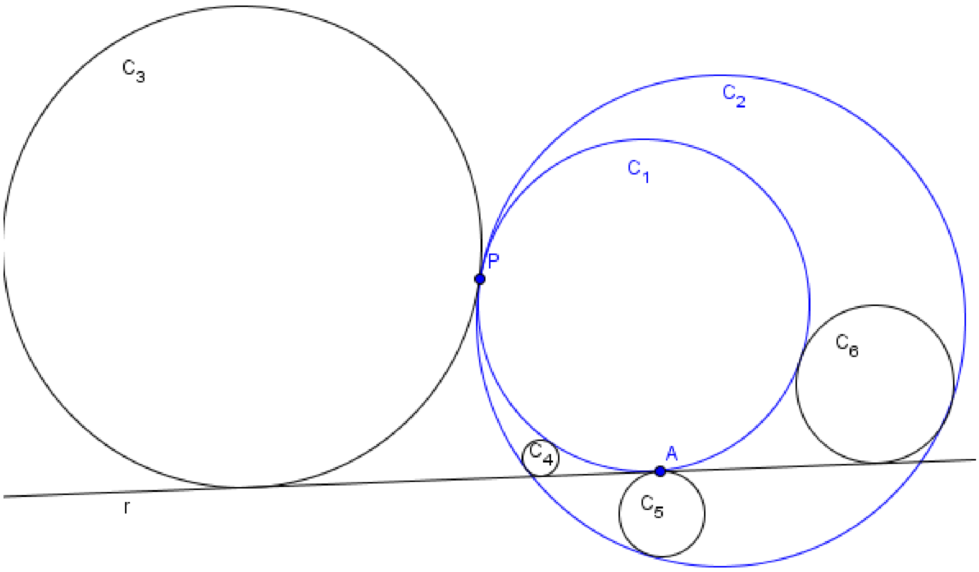
4ª situação: a reta r é tangente a ambas as circunferências.

Nesta situação, temos infinitas soluções.



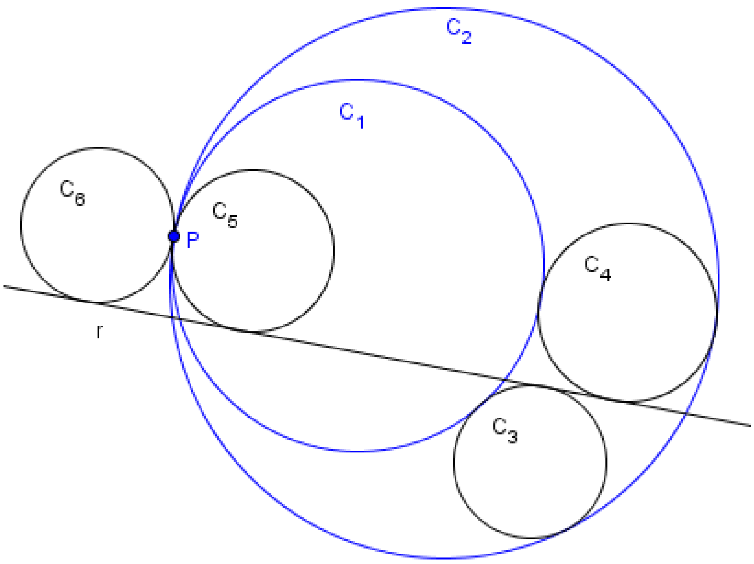
5ª situação: a reta r é tangente a C_1, no ponto A, e secante a C_2.

Temos quatro soluções.



6ª situação: a reta r é secante a ambas as circunferências.

Temos quatro soluções.

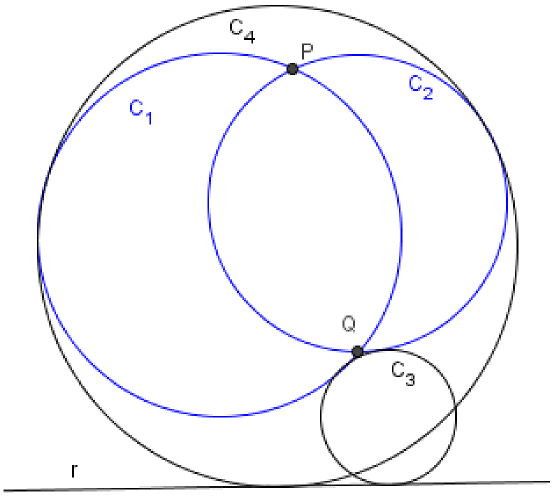


Obs. Nesta situação, caso a reta r passe pelo ponto P, irão sumir duas soluções.

Caso 4. As circunferências são secantes. O ponto P e Q são as interseções de C_1 com C_2.

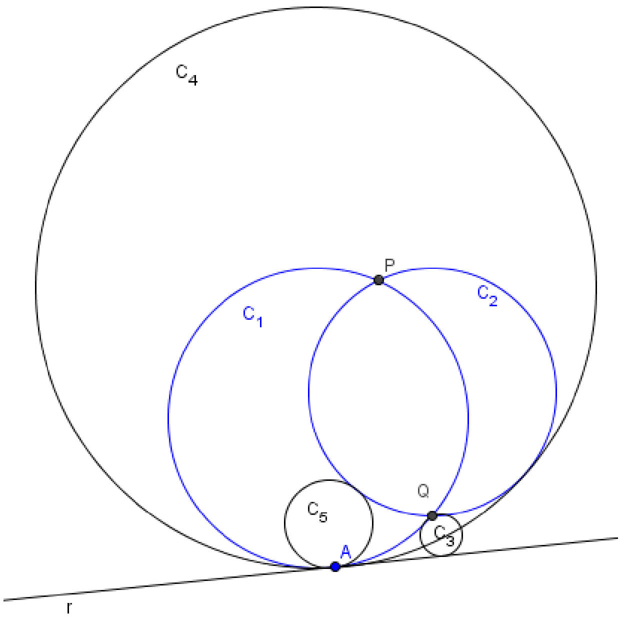
1ª situação: a reta é externa a ambas as circunferências.

Temos duas soluções.



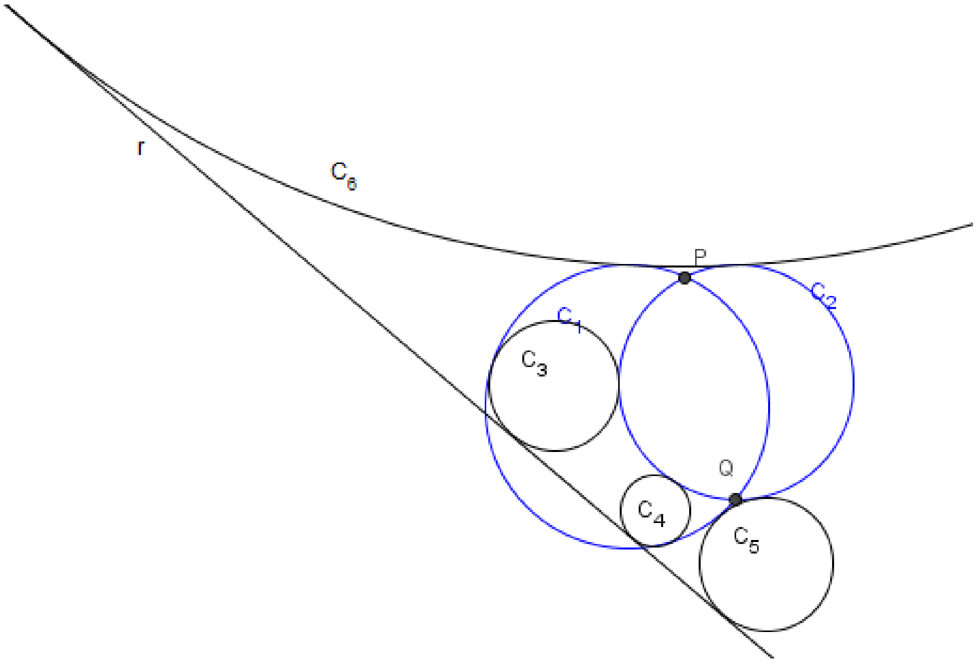
2ª situação: a reta é externa a uma circunferência e tangente à outra.

Temos três soluções.



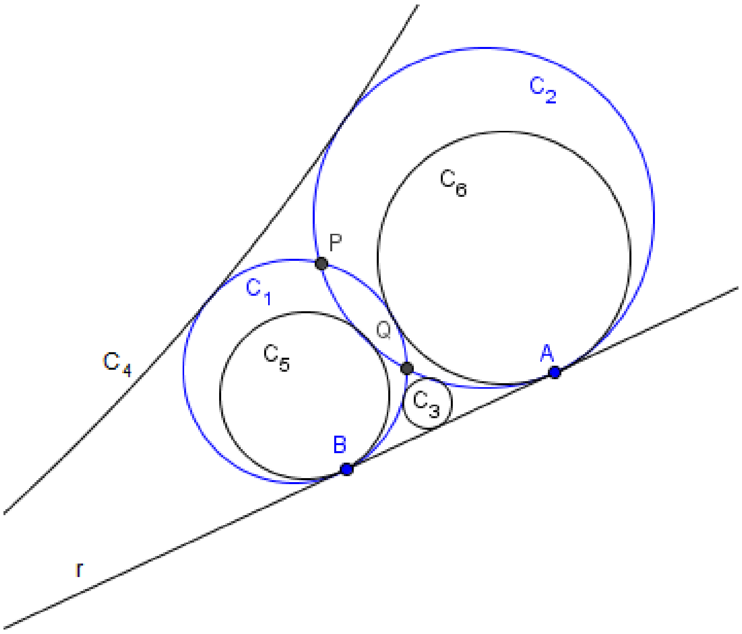
3ª situação: a reta é externa a uma circunferência e secante à outra.

Temos quatro soluções.



4ª situação: a reta é tangente a ambas as circunferências.

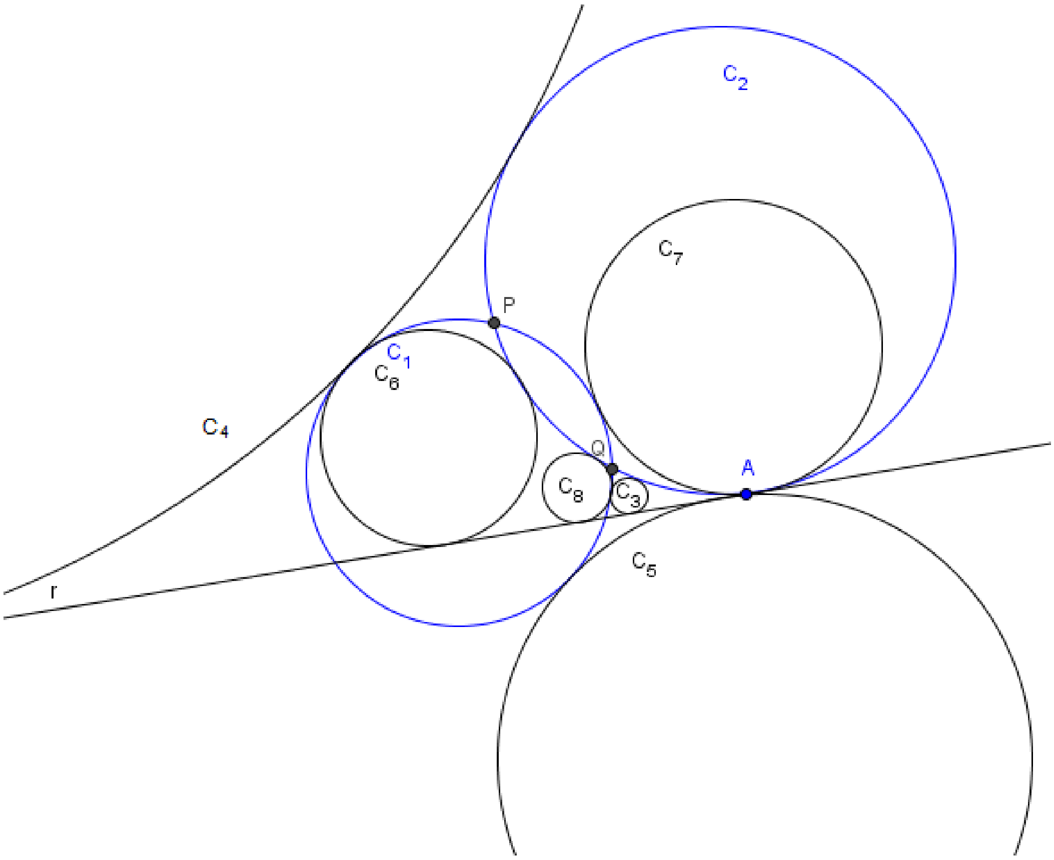
Temos quatro soluções.



Obs. Nesta situação, caso exista uma reta s tangente a C_1 e C_2, diferente de r, tal que r e s são paralelas, uma solução acima irá desaparecer.

5ª situação: a reta é tangente a uma circunferência e secante à outra.

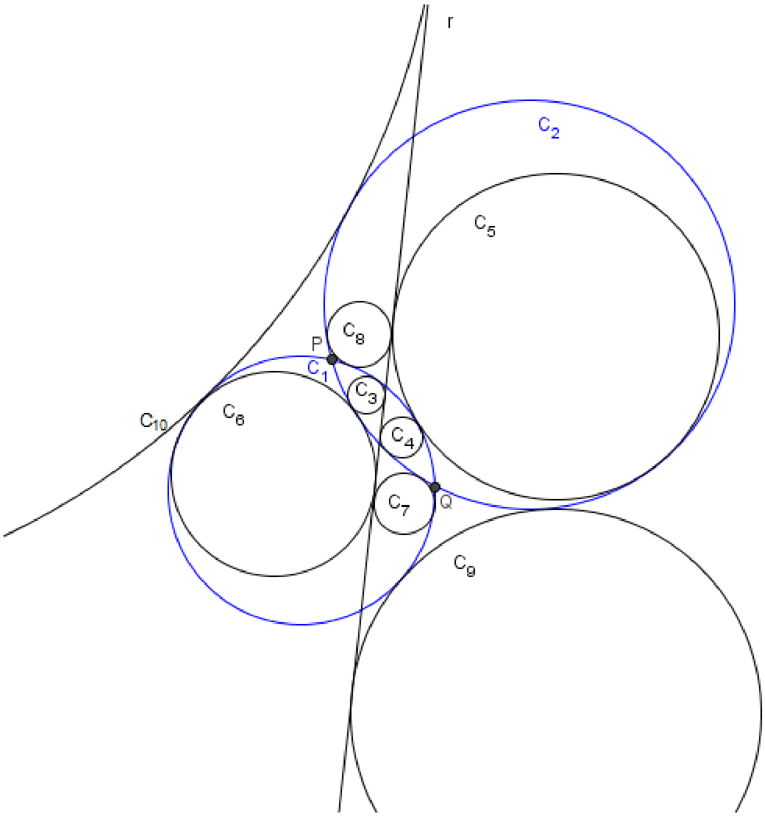
Temos seis soluções.



Obs. A observação acima também é válida nesta situação.

6ª situação: a reta é secante a ambas as circunferências.

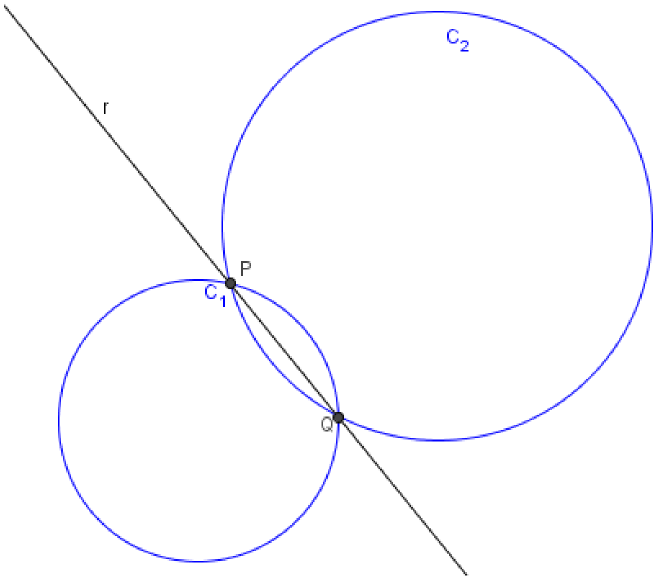
Temos oito soluções.



Obs.

1. Nesta situação, se a reta r passar por P (ou Q), então irão sumir quatro soluções.

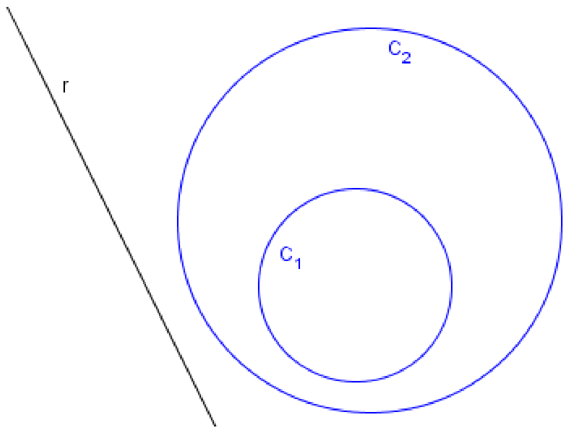
2. Se r = $\overleftrightarrow{PQ}$, então não há solução.



Caso 5. A circunferência C_1 é interna à circunferência C_2.

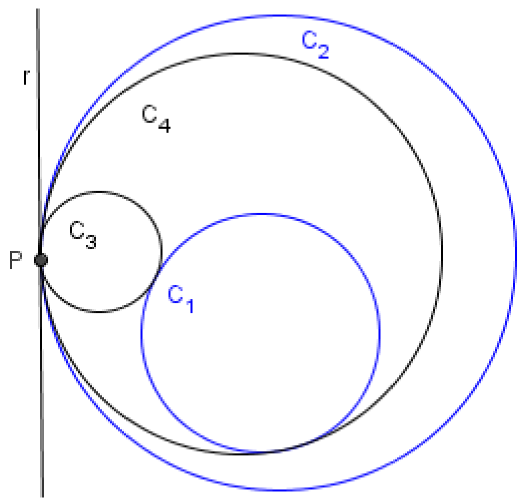
1ª situação: a reta é externa a ambas as circunferências.

Não temos solução.



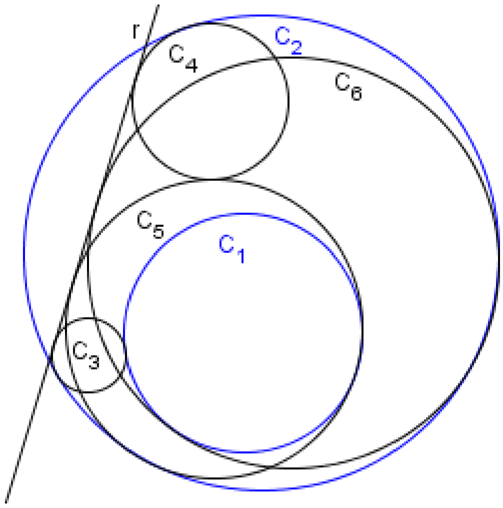
2ª situação: a reta r é externa a C_1 e tangente C_2, no ponto P.

Temos duas soluções.



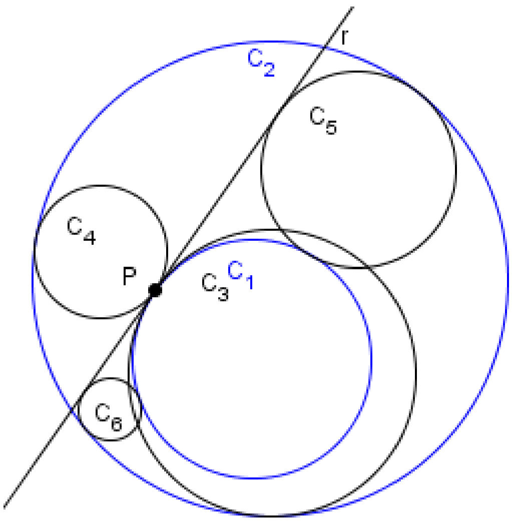
3ª situação: a reta r é externa a C_1 e secante C_2.

Temos quatro soluções.



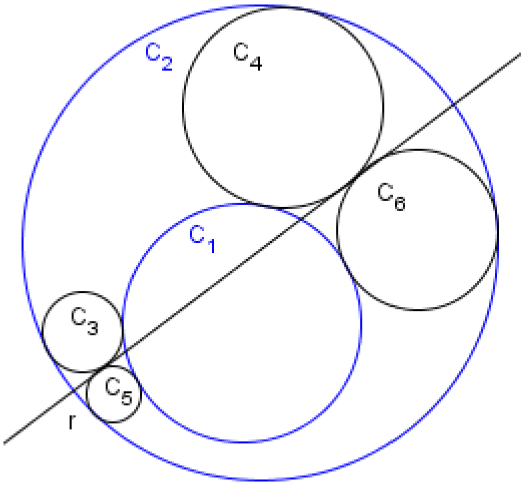
4ª situação: a reta r é tangente a C_1, no ponto P, e secante C_2.

Temos quatro soluções.



5ª situação: a reta é secante a ambas as circunferências.

Temos quatro soluções.



C_2
C_4
C_6
C_1
C_3
C_5
r

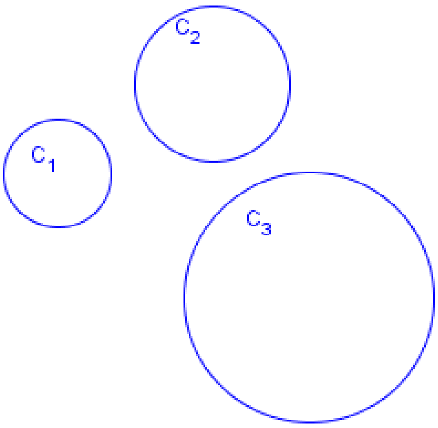
2.10. CCC

Esse último caso foi o mais discutido ao longo da história do problema de Apolônio. As construções das soluções variam de acordo com as posições relativas das circunferências, que serão discutidas a seguir. As construções não são muito diferentes das apresentadas até aqui, pois podemos transformar o problema de tal forma que o problema recaia em algum dos casos já discutidos anteriormente.

Obs. Excepcionalmente, neste caso, em particular, vamos usar a letra W para os pontos dos centros e S para as circunferências-solução. Vamos separar os casos conforme as posições relativas entre as duas circunferências $C_1 \; e \; C_2$, estudando as diversas situações da circunferência C_3.

Caso 1. As circunferências $C_1 \, e \, C_2$ são externas, de raios $r_1 \; e \; r_2$, respectivamente.

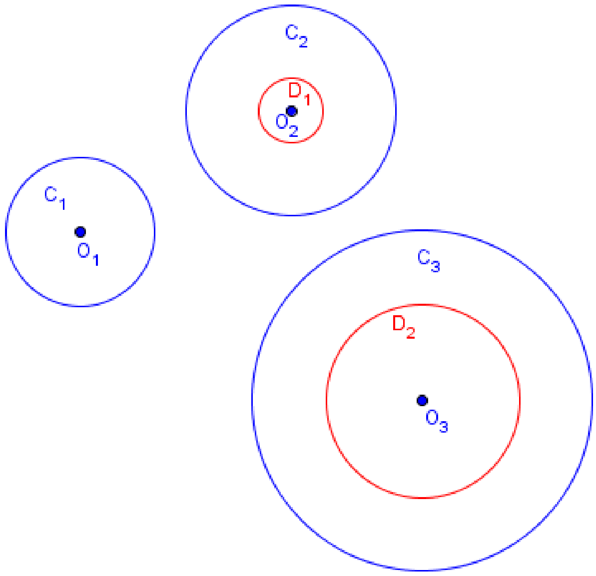
1ª situação: A circunferência C_3, de raio igual a r_3, é externa a ambas as circunferências.



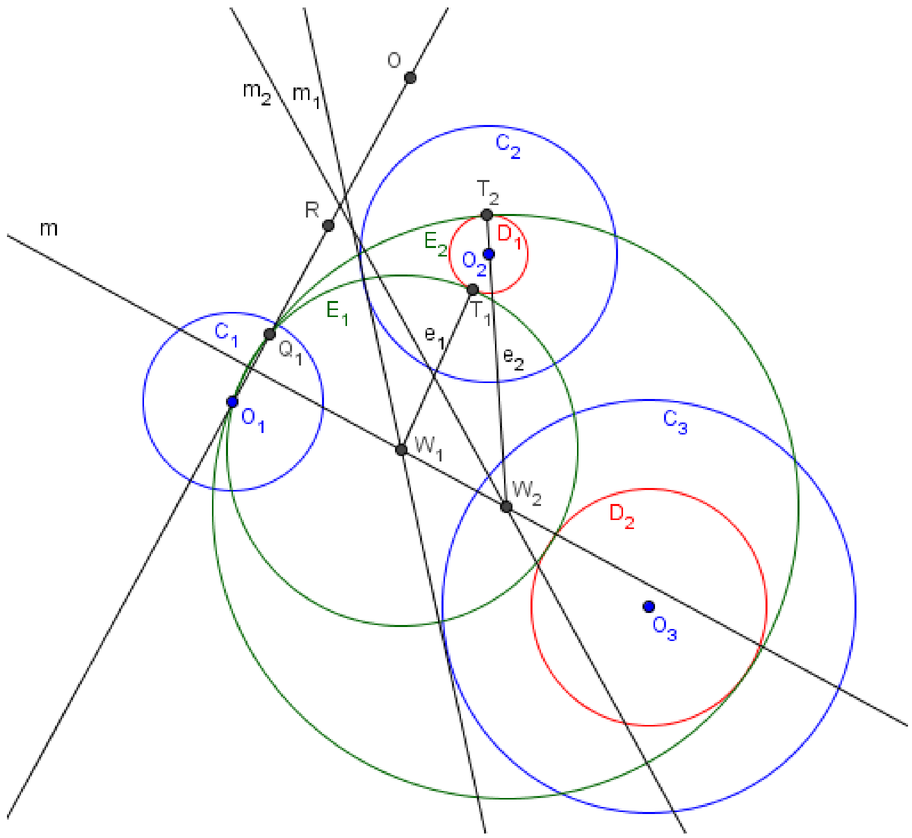
Neste caso, temos oito soluções, pois em um ponto de uma circunferência ela pode ter dois tipos de circunferências tangentes a ela, com ela interna e com ela externa. Como são três circunferências haverá no máximo $2^3 = 8$ soluções. Vamos fazer as construções em pares de soluções, como nos casos da seção anterior. Um deles será feito passo a passo, pois cada um dos pares de soluções pode ser reduzido ao caso PCC nas suas variações, como se pode ver em [5], por exemplo. Consideremos $r_1 \leq r_2 \leq r_3$.

1ª e 2ª soluções. Primeiramente, subtrai-se r_1 dos demais raios. Então:

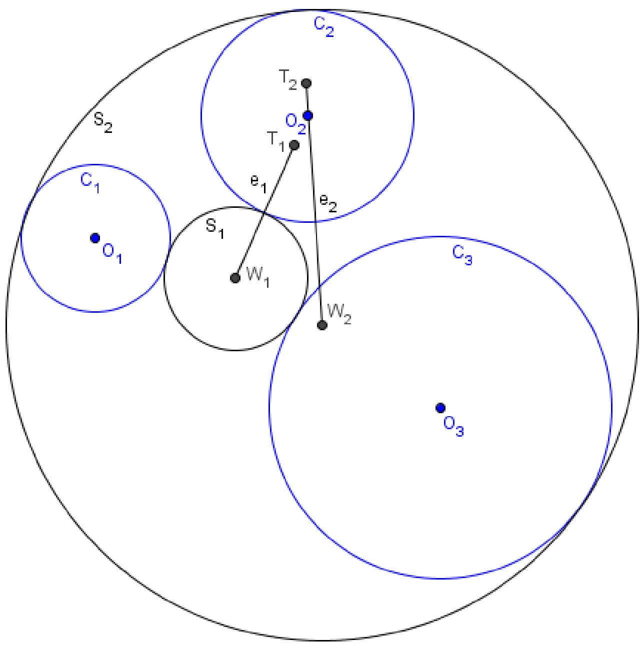
a) Construa duas circunferências auxiliares $D_1 \, e \, D_2$, de centros $O_2 \, e \, O_3$ e raios iguais a $(r_2 - r_1) \, e \, (r_3 - r_1)$, respectivamente;



b) Construa duas circunferências auxiliares $E_1 \, e \, E_2$, com raios iguais a $e_1 \, e \, e_2$, respectivamente, que sejam soluções do problema PCC com centro homotético externo O, para o ponto O_1 e as circunferências $D_1 \, e \, D_2$. Os centros das circunferências $E_1 \, e \, E_2$ são os pontos $W_1 \, e \, W_2$;

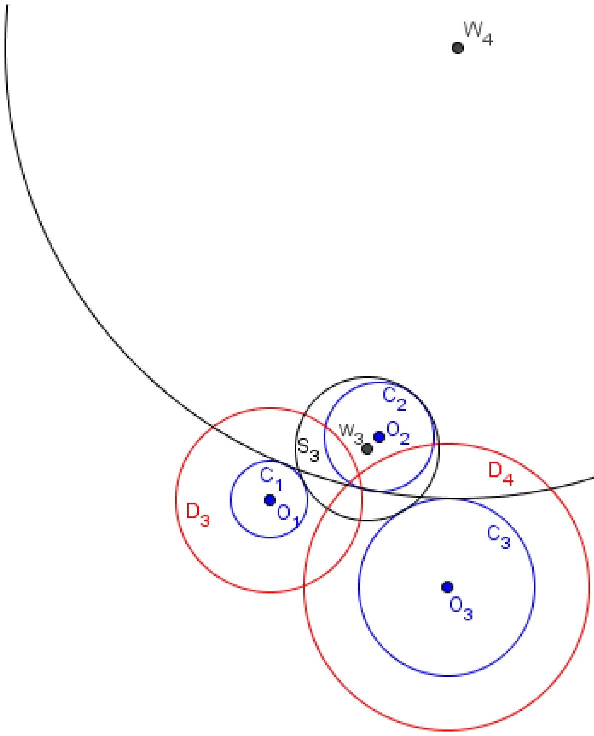


c) Agora, basta traçar S_1 de centro em W_1 e raio igual a $(e_1 - r_1)$, e traçar S_2 de centro em W_2 e raio igual a $(e_2 + r_1)$.

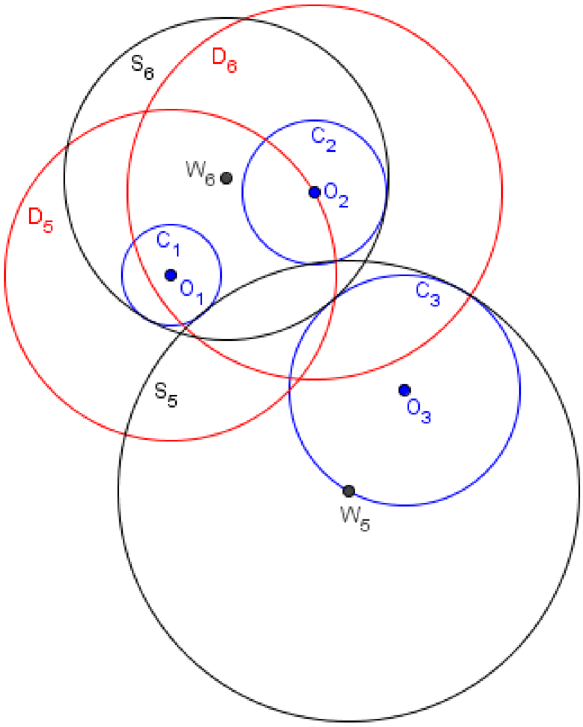


As outras soluções seguem a mesma ideia, com exceção da construção das circunferências auxiliares D_i ($i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$).

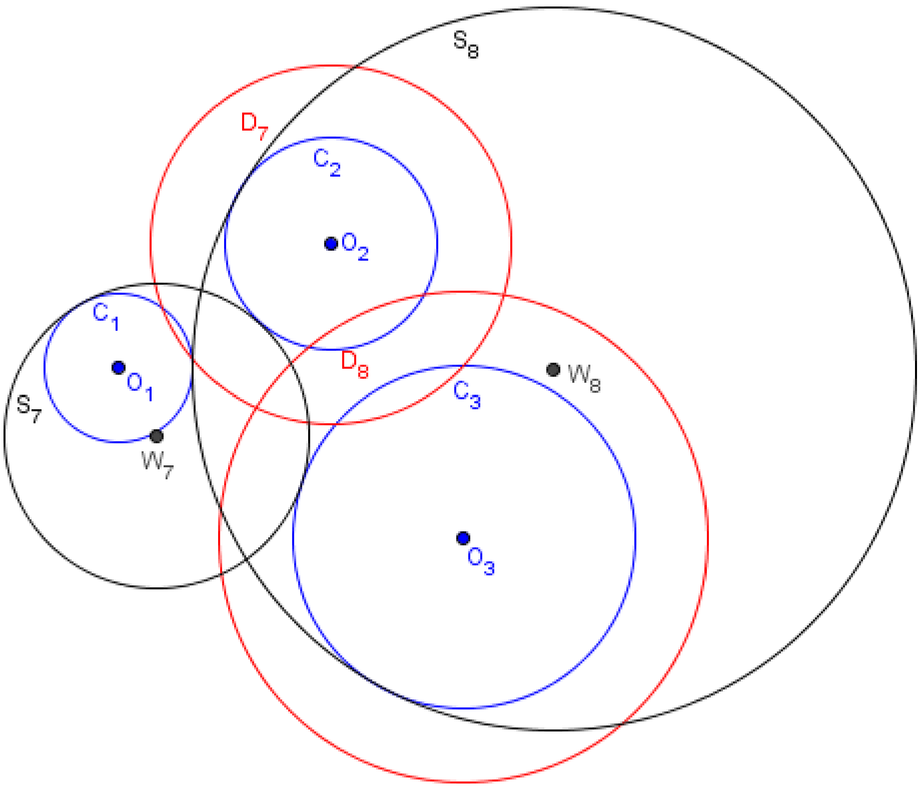
3ª e 4ª Soluções. Adicione r_2 aos demais raios.



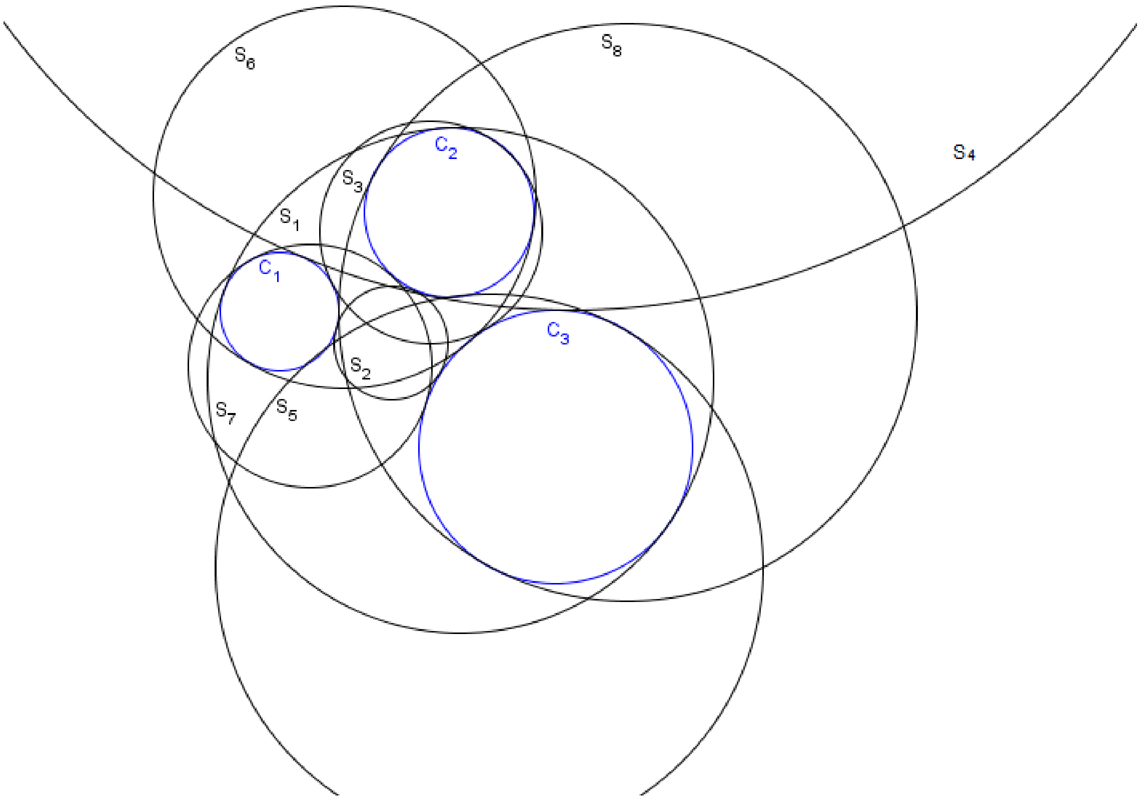
5ª e 6ª soluções: Adicione r_3 aos demais raios.



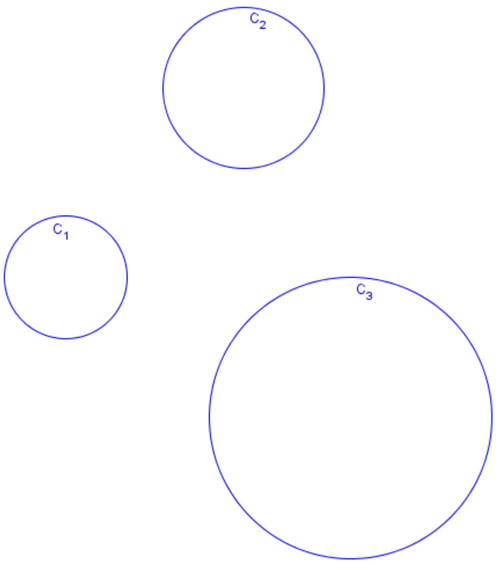
7ª e 8ª soluções. Adicione r_1 aos demais raios.



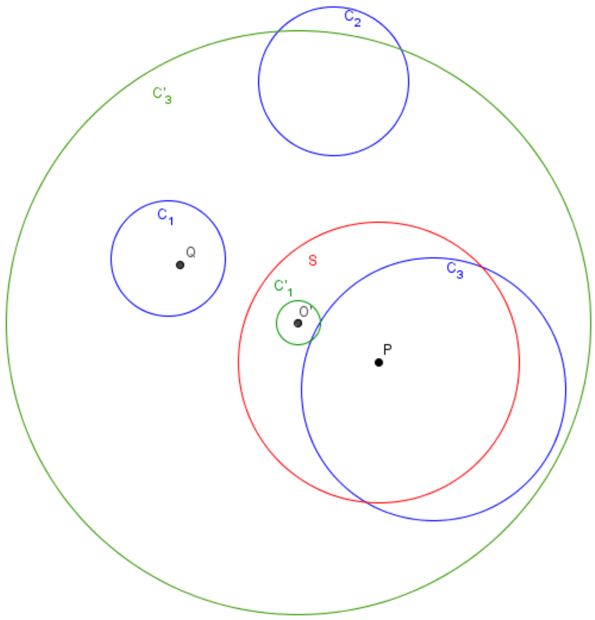
Todas as soluções podem ser vistas a seguir.



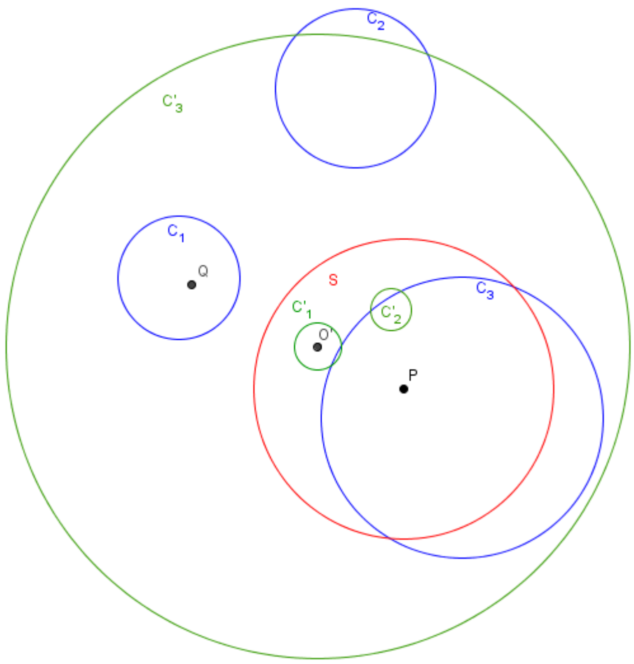
Agora, vamos apresentar outra resolução deste caso usando o método de inversão no caso de três circunferências externas.



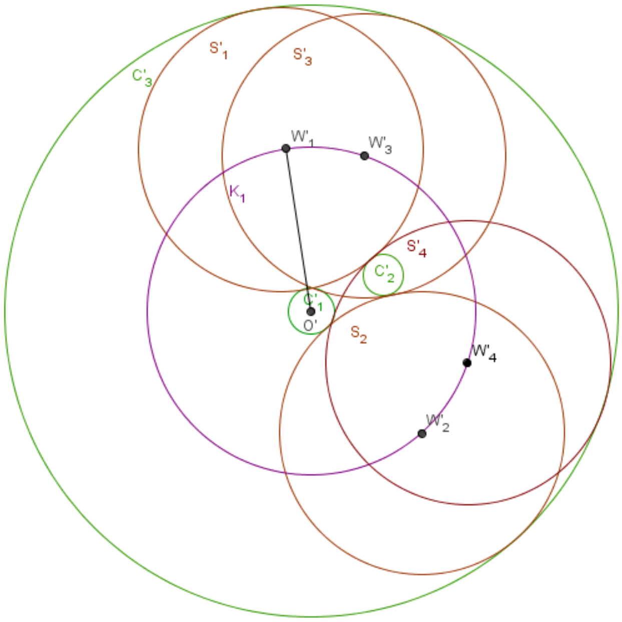
a) Escolhemos duas delas, $C_1\ e\ C_3$, para transformá-las em circunferências concêntricas, $C'_1\ e\ C'_3$, inversões de $C_1\ e\ C_3$ em relação a uma circunferência S;



b) Determine a circunferência C'_2, inversão de C_2 em relação à circunferência S;

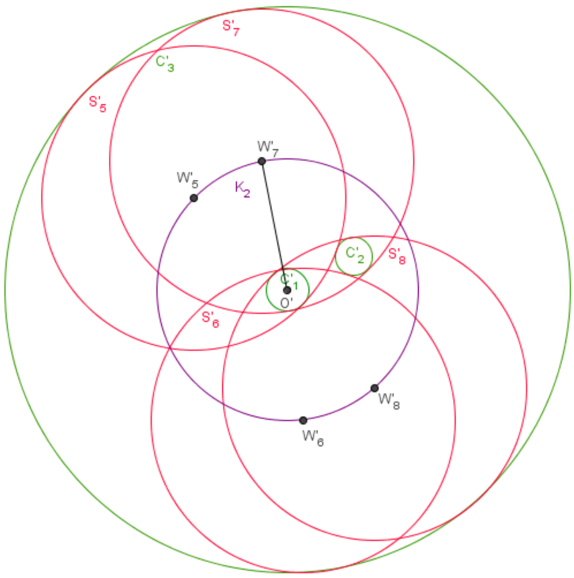


c) Temos quatro soluções externas à circunferência C'_1;



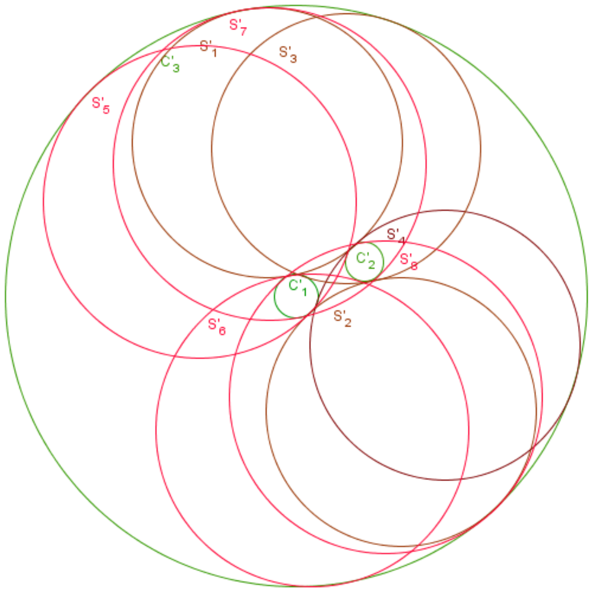
Obs. Note que os centros das circunferências de inversão pertencem à circunferência K_1, pois o raio desta circunferência é a metade da soma dos raios de $C'_1\ e\ C'_3$.

d) Temos quatro soluções internas à circunferência C'_1:

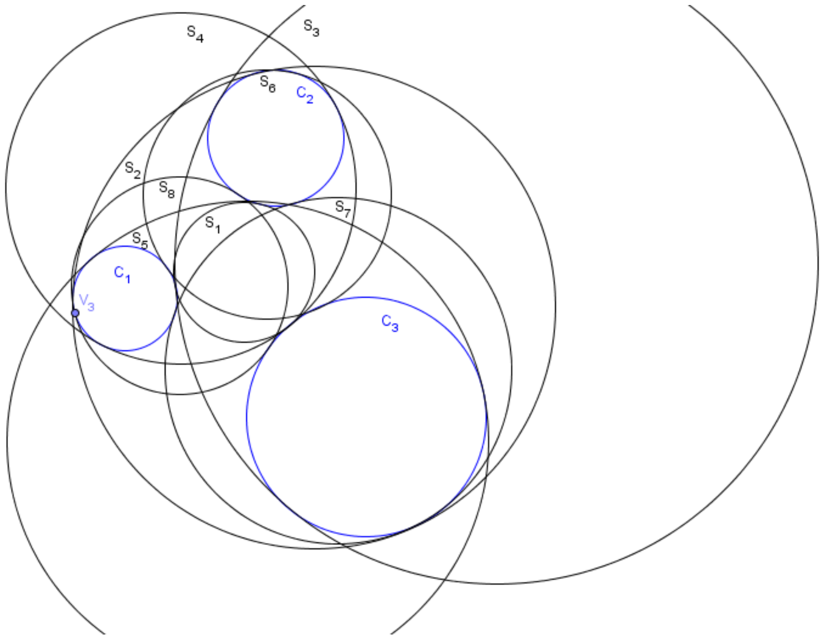


Obs. Note que os centros das circunferências de inversão pertencem à circunferência K_1, pois o raio desta circunferência é a metade da diferença dos raios de $C'_3\ e\ C'_1$.

Todas as soluções inversas podem ser vistas a seguir.



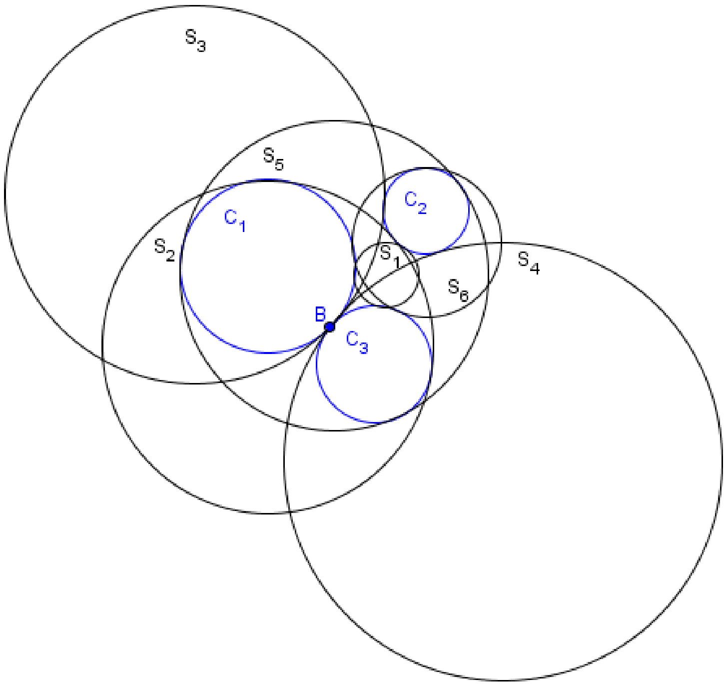
e) Fazendo as inversões de cada uma das soluções S'_i (com $i\ \in\ \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$) em relação à circunferência S, temos as soluções para as circunferências $C_1, C_2\ e\ C_3$:



Obs. A partir de agora, iremos apenas mostrar as soluções das diversas situações de CCC que restam. Essas situações são construídas da mesma forma que as construções acima. Portanto, iremos mostrar nas situações seguintes apenas o número de soluções e suas formas.

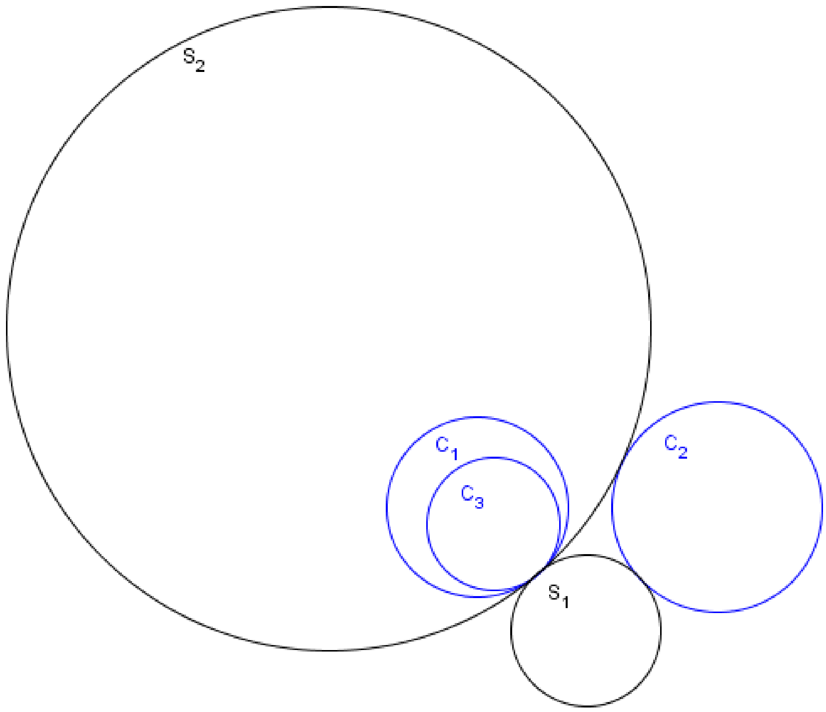
2ª situação: A circunferência C_3 é tangente externa somente à circunferência C_1 (ou à circunferência C_2).

Temos seis soluções.



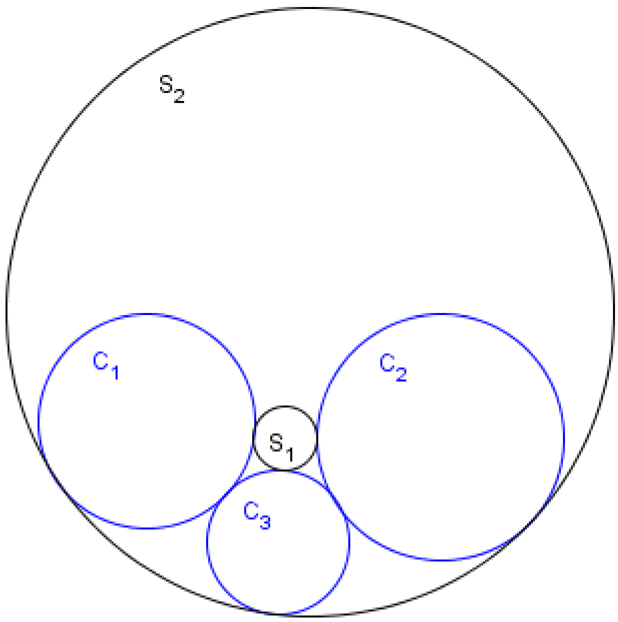
3ª situação: a circunferência C_3 é tangente interna à circunferência C_1 (ou à circunferência C_2).

Temos Duas soluções.



4ª situação: A circunferência C_3 é tangente externa a ambas as circunferências.

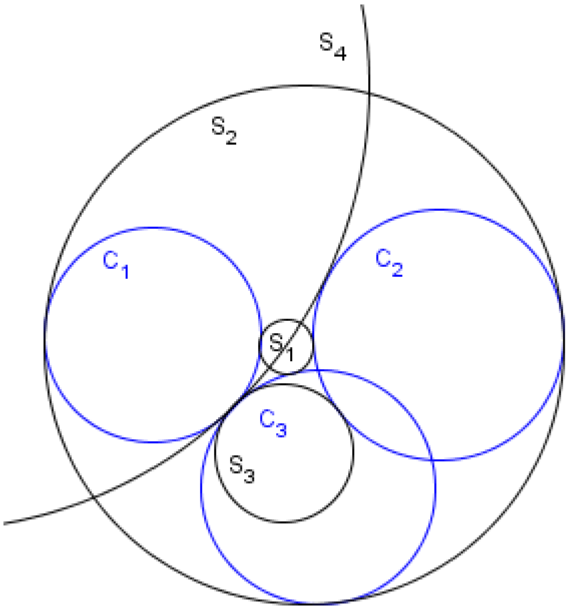
Temos duas soluções.



Obs. Nesta situação, podemos ter reta tangente às três circunferências, como solução do problema.

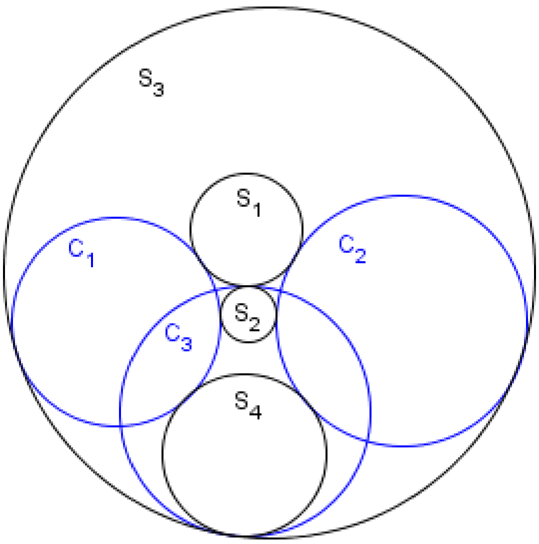
5ª situação: a circunferência C_3 é tangente externa a C_1 e secante a C_2.

Temos quatro soluções.



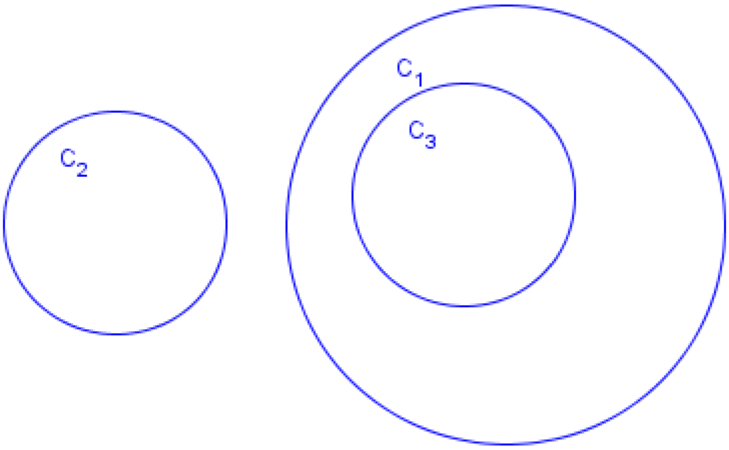
6ª situação: a circunferência C_3 é secante a ambas as circunferências.

Temos quatro soluções.



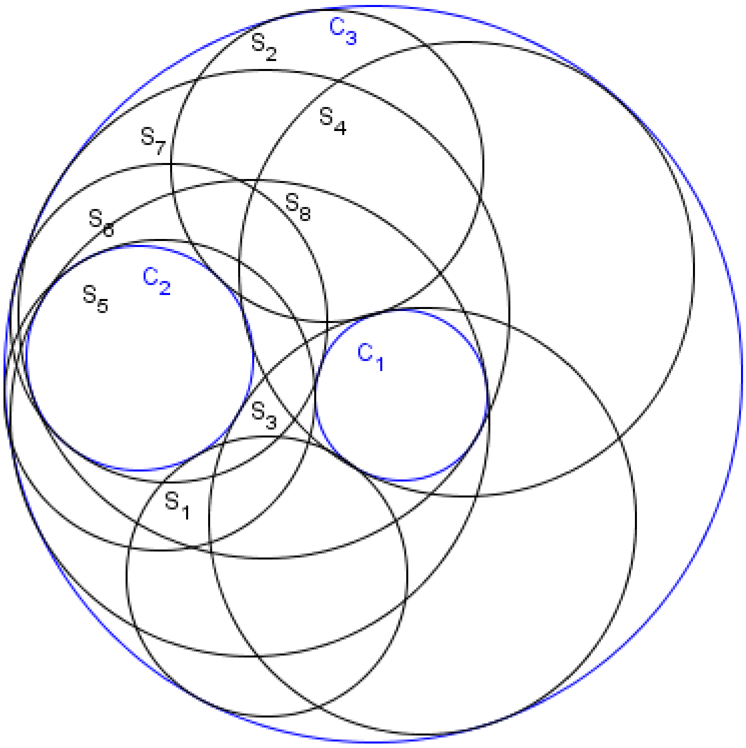
7ª situação: C_3 é interna a C_1 (ou à circunferência C_2).

Não há solução.



8ª situação: C_3 contém em seu interior C_1 e C_2.

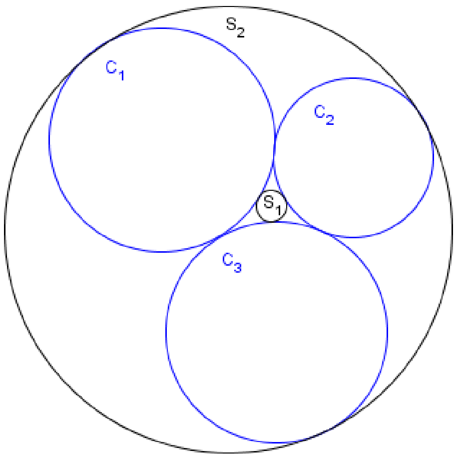
Temos oito soluções.



Caso 2. As circunferências C_1 e C_2 são tangentes externas, em um ponto P.

1ª situação: a circunferência C_3 é tangente externa às duas.

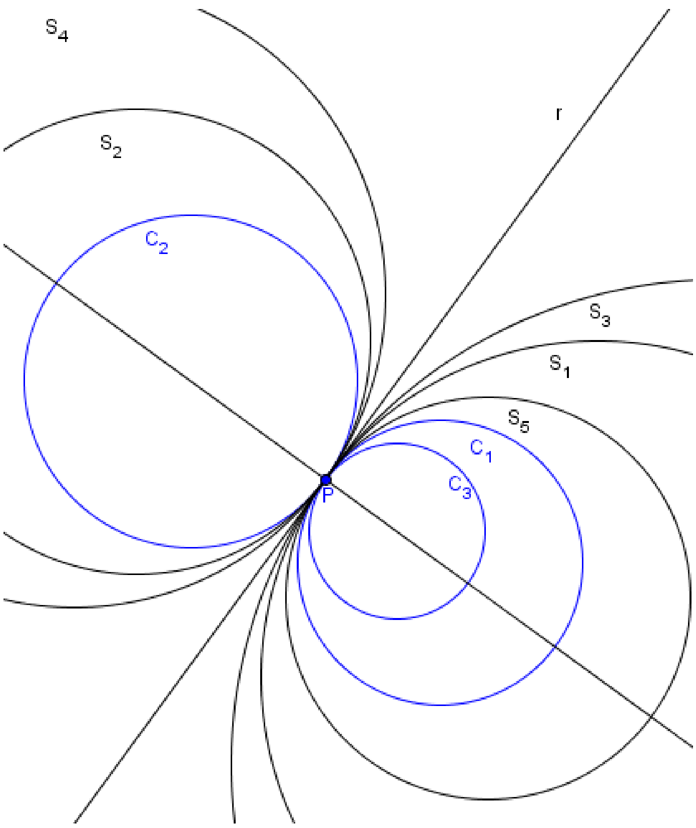
Temos duas soluções.



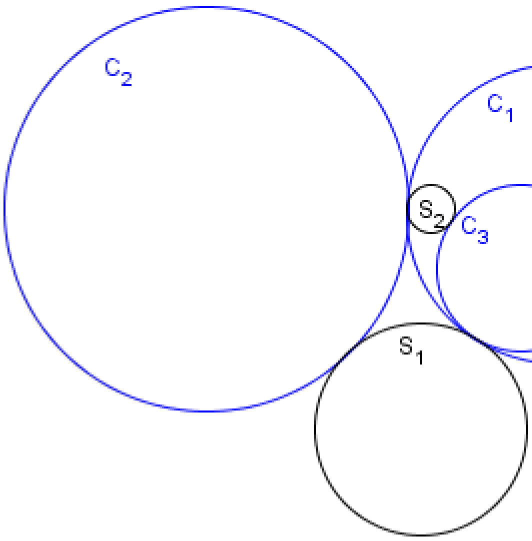
2ª situação: a circunferência C_3 é tangente interna a C_1 (ou a C_2).

2.1- C_3 é tangente interna a C_1 no ponto P.

Temos infinitas soluções.

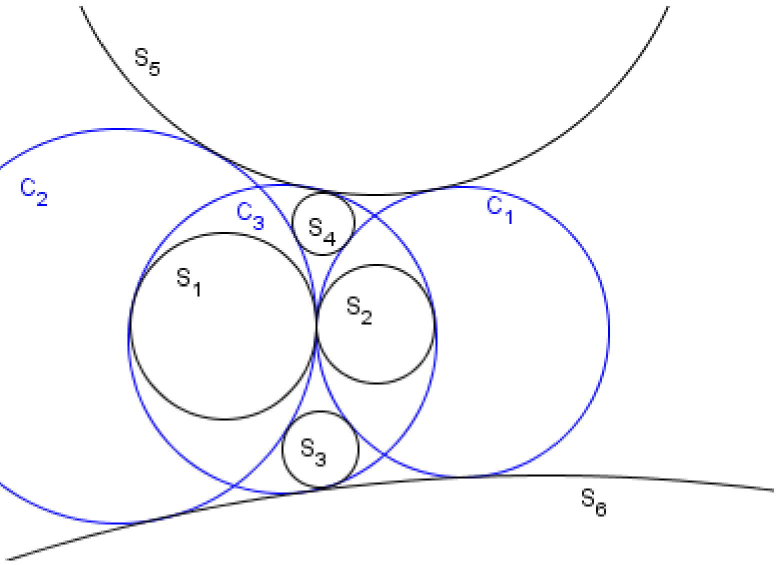


2.2- C_3 é tangente interna a C_1 em um ponto diferente de P.



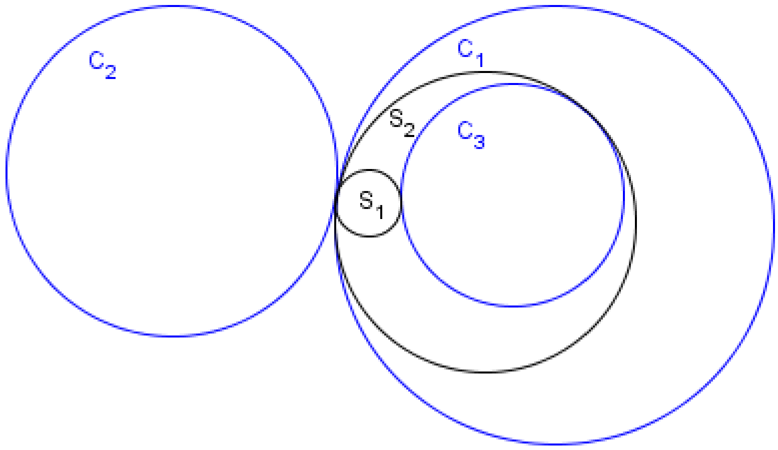
3ª situação: C_3 é secante a ambas as circunferências.

Temos seis soluções.



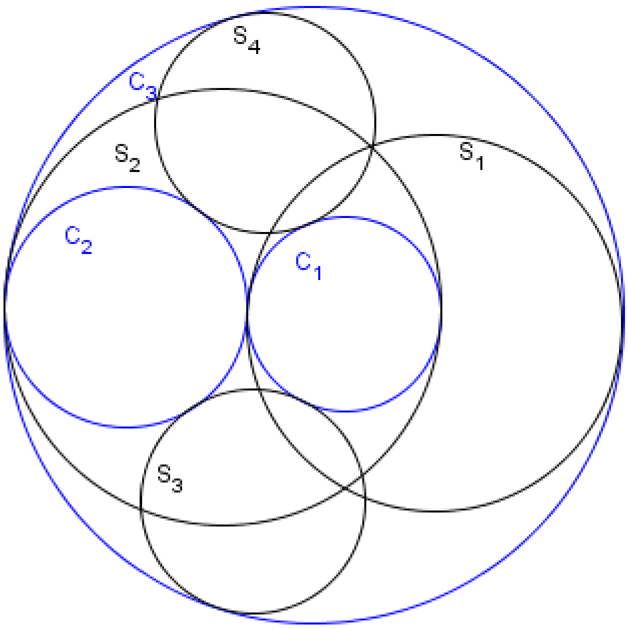
4ª situação: C_3 é interna à C_1 (ou a circunferência C_2).

Temos duas soluções.



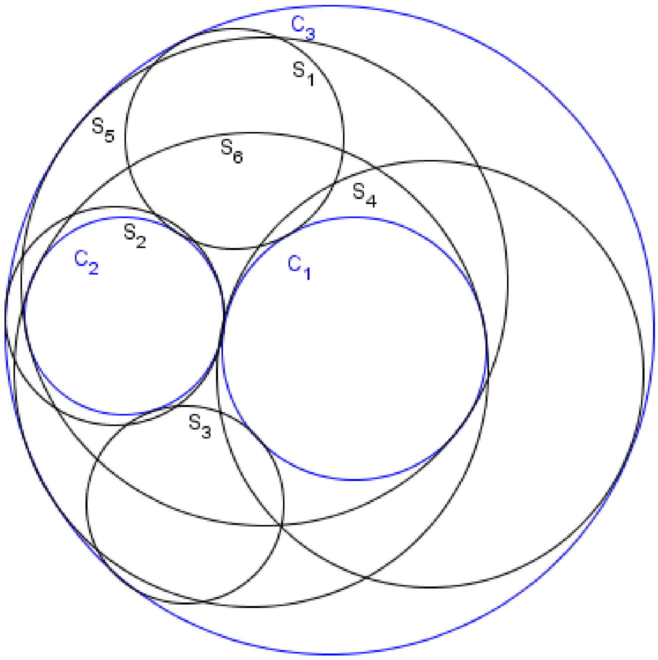
5ª situação: C_3 contém em seu interior C_1 e C_2 e é tangente a C_2.

Temos quatro soluções.



6ª situação: C_3 contém em seu interior C_1 e C_2.

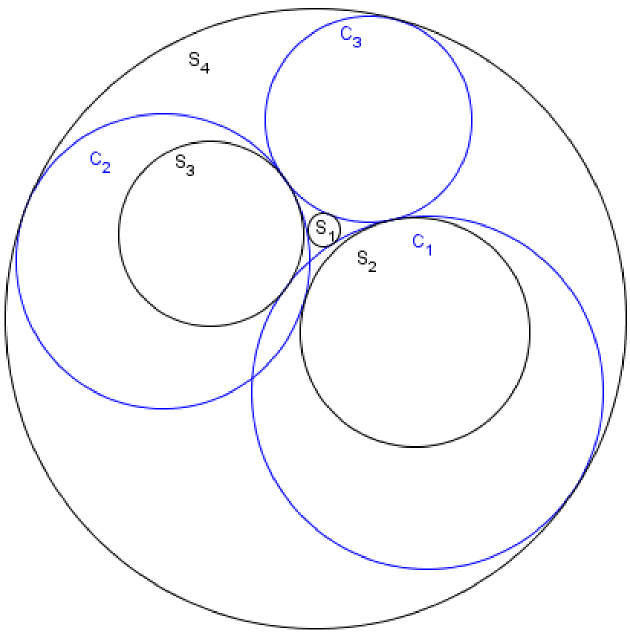
Temos seis soluções.



Caso 3. As circunferências $C_1\ e\ C_2$ são secantes, nos pontos P e Q.

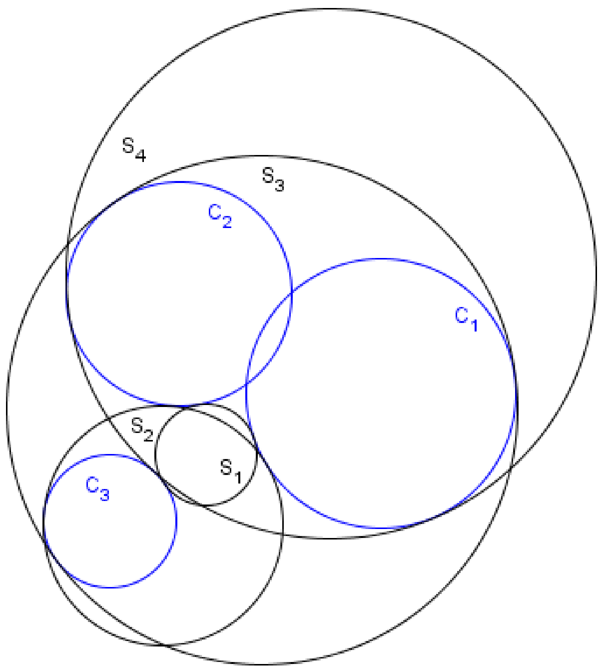
1ª situação: a circunferência C_3 é tangente externa a ambas.

Temos quatro soluções.



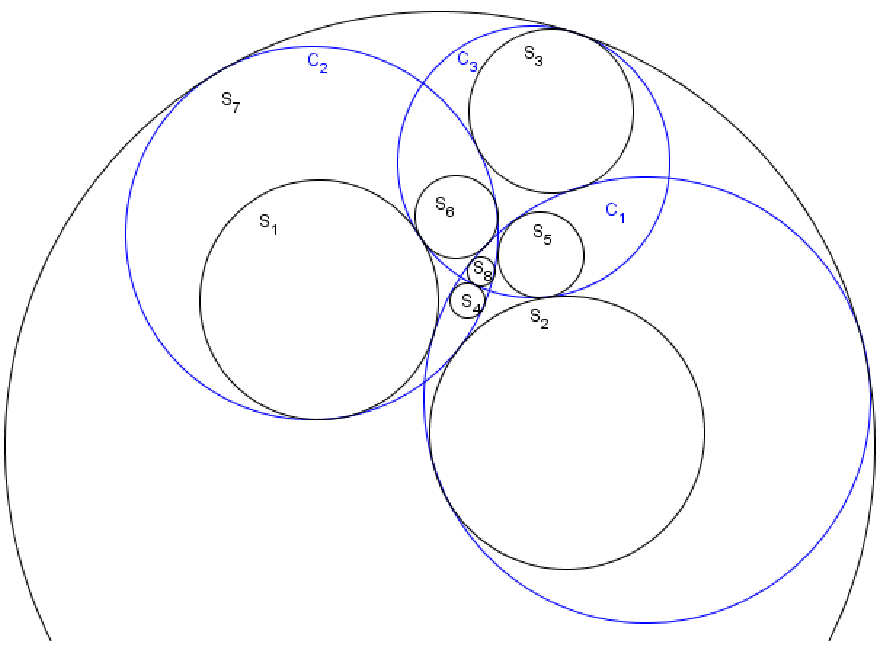
2ª situação: C_3 é externa a ambas as circunferências.

Temos quatro soluções.



3ª situação: C_3 é secante a ambas as circunferências.

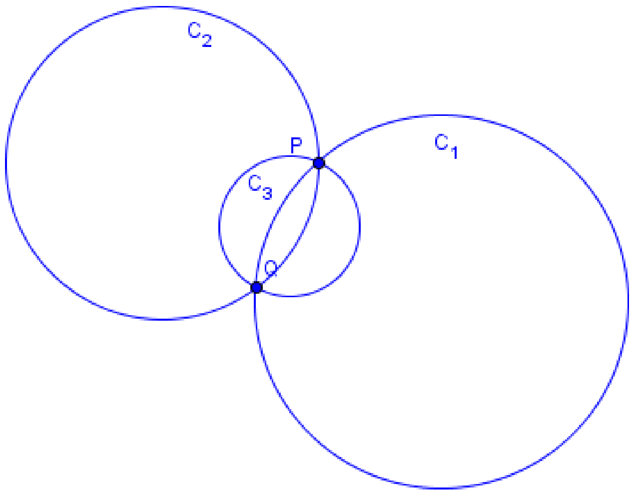
Temos oito soluções.



Obs.

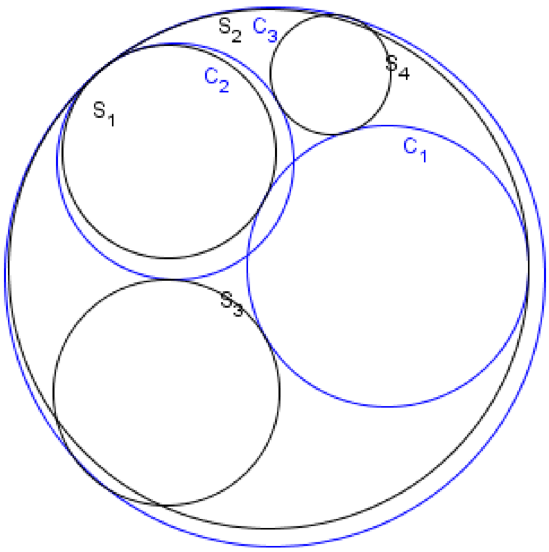
1. Se a circunferência C_3 passar por um dos pontos P ou Q, então irão desaparecer quatro soluções.

2. Se a circunferência C_3 passar por um dos pontos P e Q, então não temos solução, como pode ser visto abaixo.



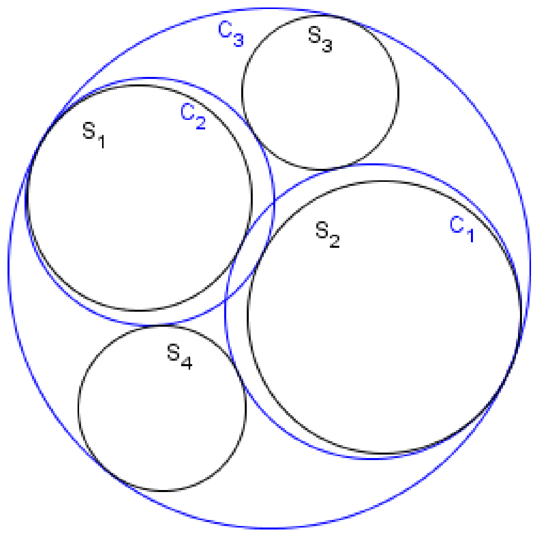
4ª situação: C_3 contém em seu interior C_1 e C_2, e é tangente a C_2.

Temos quatro soluções.



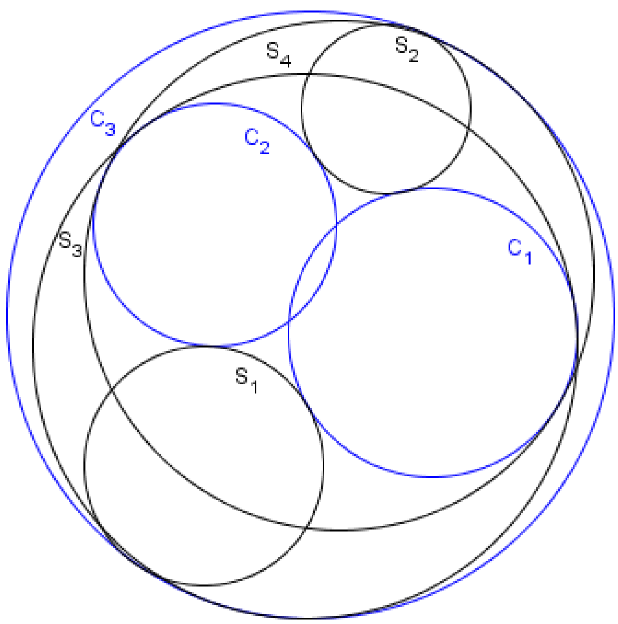
5ª situação: C_3 contém em seu interior C_1 e C_2, e é tangente a ambas as circunferências.

Temos quatro soluções.



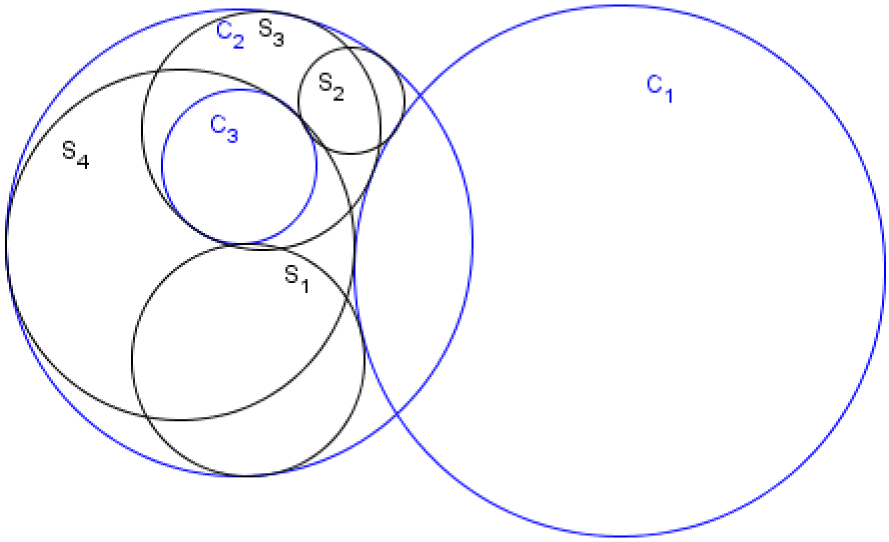
6ª situação: as circunferências C_1 e C_2 são interiores a C_3.

Temos quatro soluções.



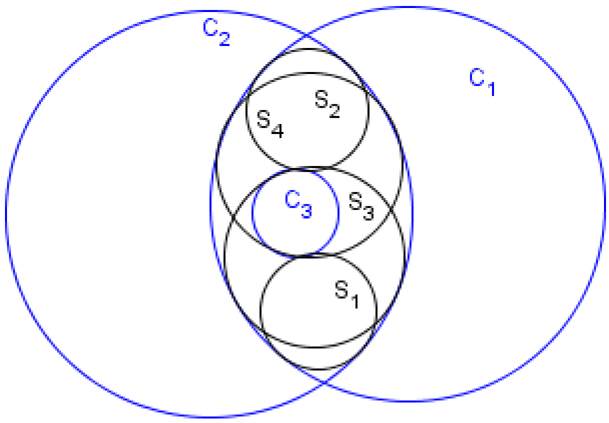
7ª situação: C_3 é interior somente a C_1.

Temos quatro soluções.



8ª situação: C_3 é interior a ambas as circunferências.

Temos quatro soluções.

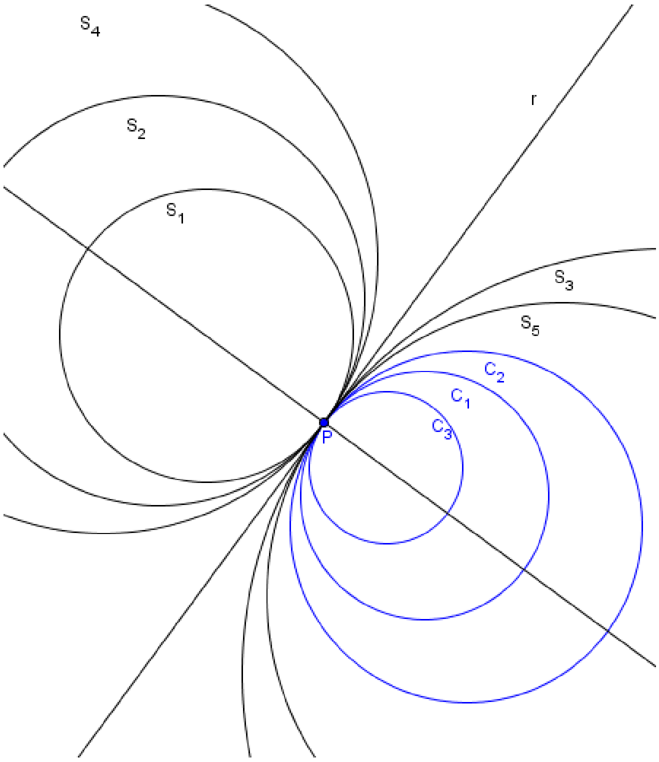


Caso 4. A circunferência C_1 é tangente interna de C_2, no ponto P.

1ª situação: C_3 é tangente interna de C_1, no ponto Q.

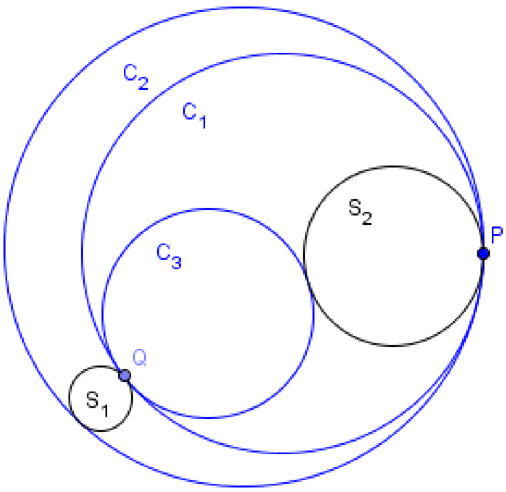
1.1-P = Q.

Temos infinitas soluções.



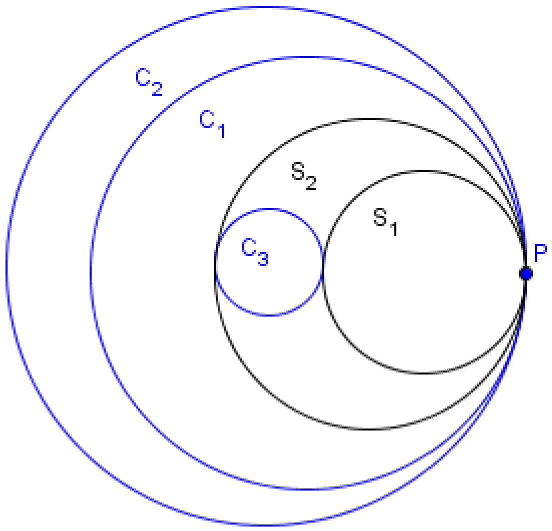
1.2-P ≠ Q.

Temos duas soluções.



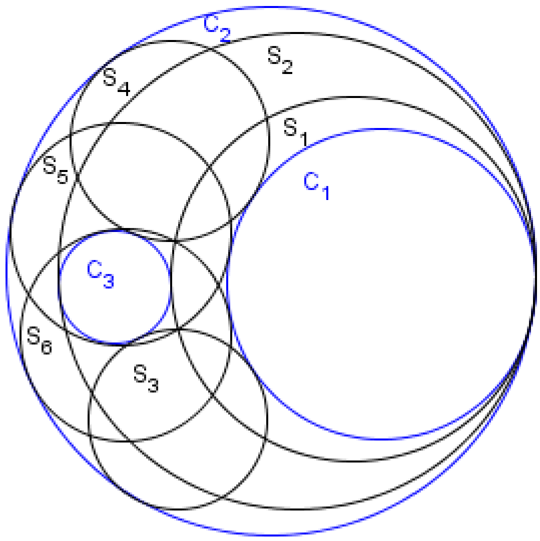
2ª situação: C_3 é interior a C_1.

Temos duas soluções.



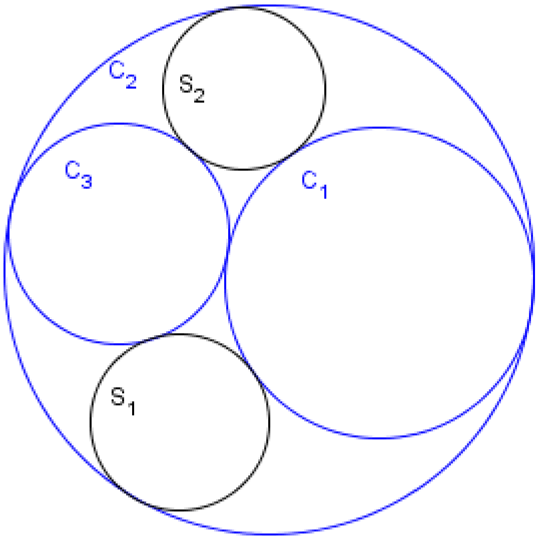
3ª situação: C_3 é interna a C_2 e externa a C_1.

Temos seis soluções.



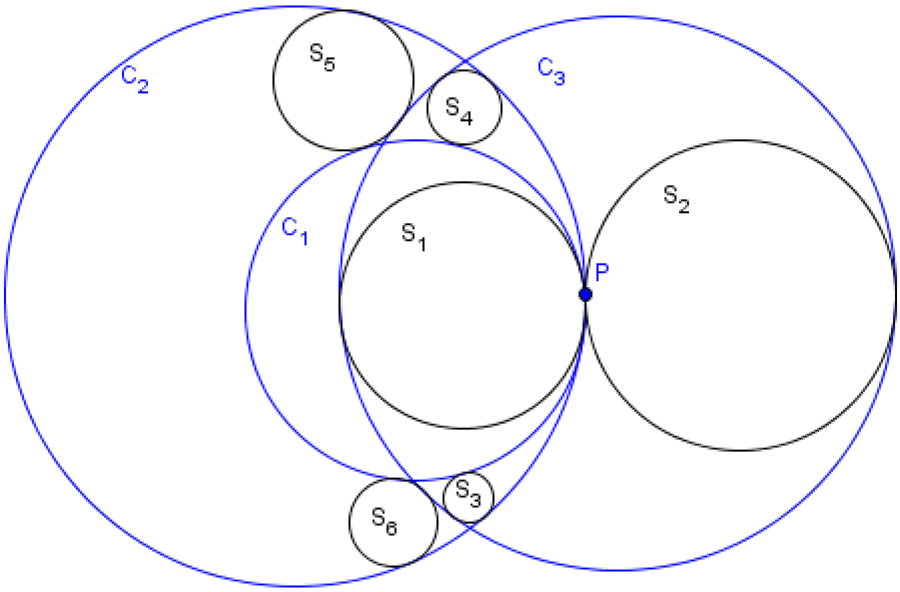
4ª situação: C_3 é tangente interna a C_2 e tangente externa a C_1.

Temos duas soluções.



5ª situação: C_3 é secante a ambas as circunferências.

Temos seis soluções.

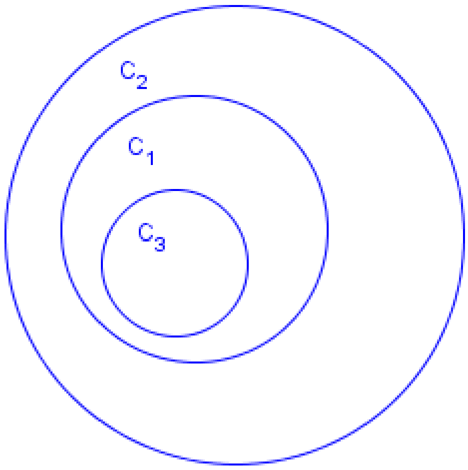


Obs. Se a circunferência C_3 passar pelo ponto P, então irão desaparecer quatro soluções.

Caso 5. A circunferência C_1 é interna à circunferência C_2.

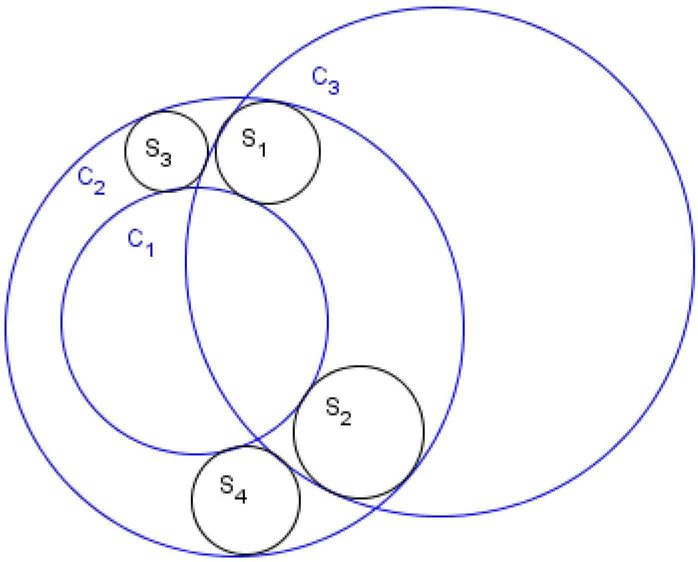
1ª situação: a circunferência C_3 é interna a C_1.

Não temos solução.



2ª situação: C_3 é secante a ambas as circunferências.

Temos quatro soluções.



Obs. Este caso não se divide em muitas novas situações, pois algumas já foram contempladas nos outros casos acima.

APÊNDICE A – ENUMERAÇÃO DE SOLUÇÕES DO PROBLEMA DE APOLÔNIO

O problema de estabelecer quais são todas as soluções para todas as configurações do problema de Apolônio só foi inteiramente resolvida em 1983, com o trabalho de Bruen, Fisher e Wilker [9]. Nesse trabalho, os autores optaram em sistematizar as configurações do problema no plano euclidiano e no plano inversivo. As tentativas anteriores pecavam na redundância e no esquecimento de alguma configuração, como no trabalho extensivo de Muirhead [11] no final do século XIX.

Neste trabalho, optamos pela sistematização no plano euclidiano, usando primeiramente a classificação do problema a partir da combinação dos 3 objetos (ponto, reta e circunferência), o que resulta em 10 casos. Então, tentamos classificar os casos em função do contraste entre secância e paralelismo, no caso de retas; entre dois pontos em comum (secância), um ponto em comum (tangência) e nenhum ponto em comum, no caso de reta e circunferência; secância, tangência, interioridade e exterioridade, no caso de duas circunferências. Embora redundante essa classificação é a mais próxima do universo dos alunos de ensino fundamental e médio, pois o plano inversivo não é introduzido aos alunos no ensino de geometria. Contudo, diferentemente de Muirhead, que considerava que objetos coincidentes pudessem ser soluções, neste trabalho não contamos assim. Por exemplo, no caso de três círculos tangentes, sem um ponto em comum aos três, Muirhead considerava cada uma das circunferências como sendo também solução do problema, aumentando o número de soluções de dois (segundo a nossa contagem) para cinco.

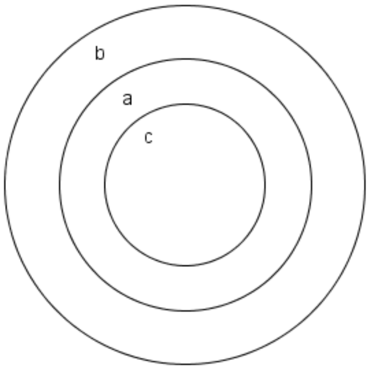
As tabelas 1 e 2, que aparecem adiante, são as tabelas que compactam as configurações possíveis entre os três objetos. Na tabela 2, que trata das configurações no plano inversivo, todos os objetos são, na notação dos autores, i-circunferências, isto é, retas ou circunferências que são resultados de inversões. Sem perda de generalidade, essa classificação leva em conta três resultados relativos ao processo de inversão:

1º. Um par de i-circunferências disjuntas pode ser invertido para um par de circunferências concêntricas.

2º. Um par de i-circunferências secantes pode ser invertido para um par de retas secantes.

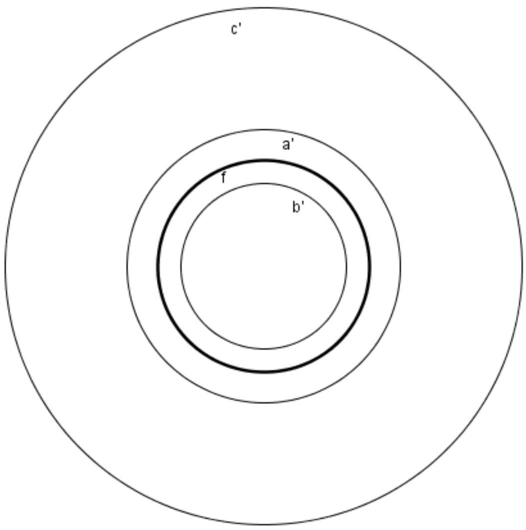
3º. Um par de i-circunferências tangentes pode ser invertido para um par de retas paralelas.

Assim, por exemplo, as três i-circunferências concêntricas, que aparecem na primeira coluna da Tabela 2, como abaixo,

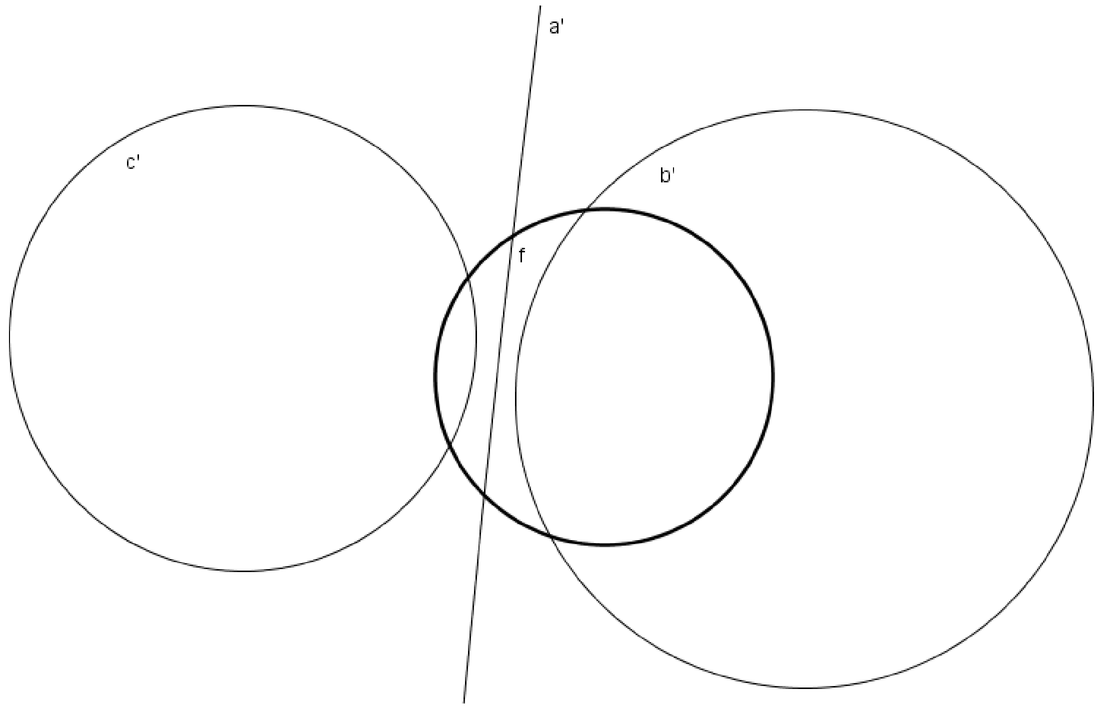


correspondem aos seguintes casos (todos sem solução), pela inversão em relação à respectiva circunferência f:

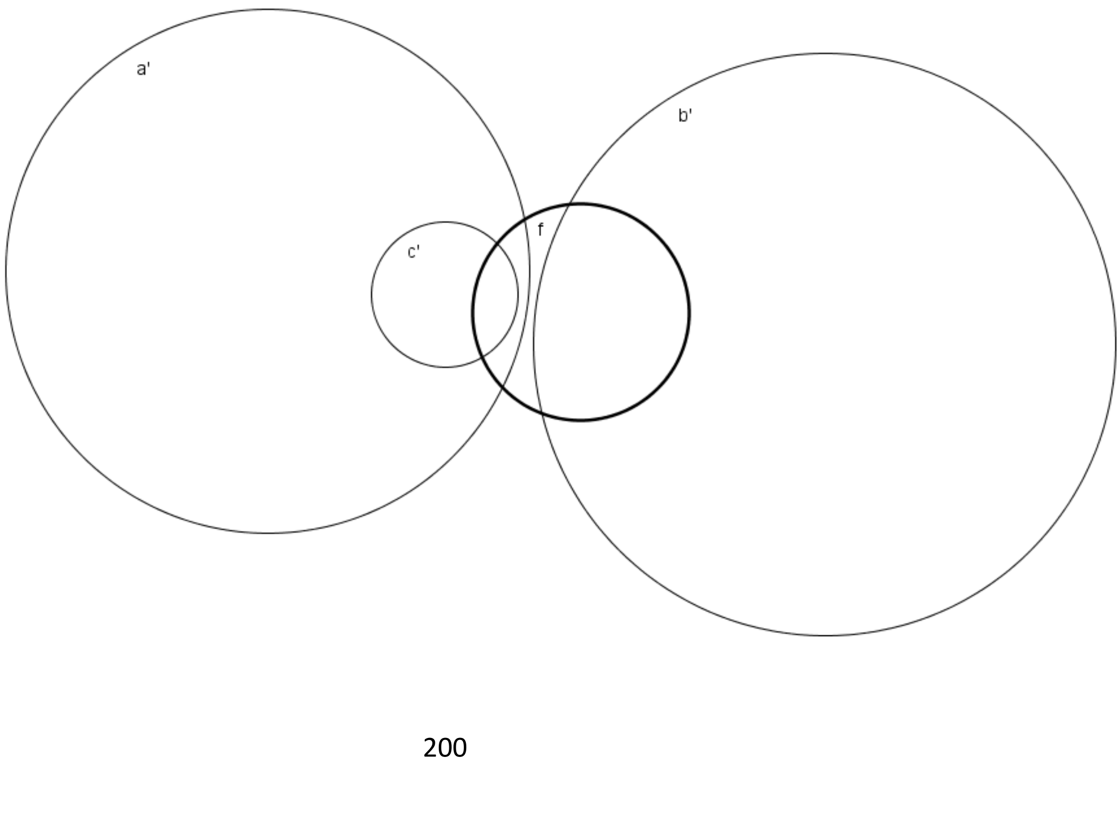
Caso 1: três circunferências concêntricas.



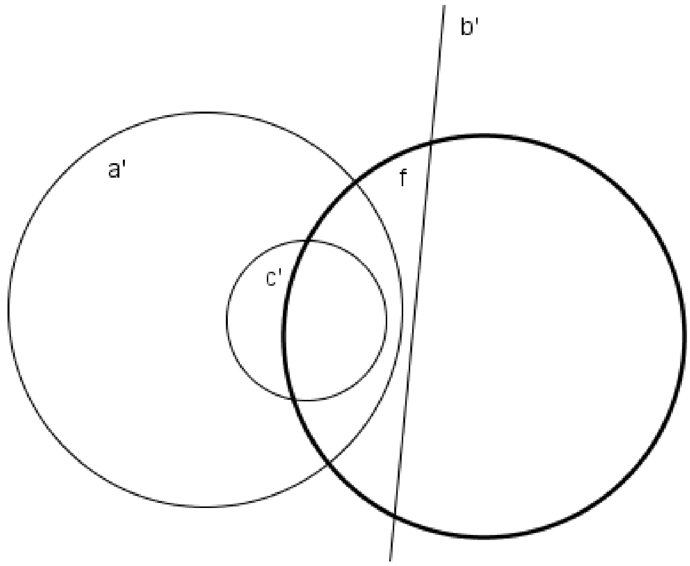
Caso 2: duas circunferências disjuntas e uma reta entre elas.



Caso 3: três circunferências disjuntas duas a duas, com uma interior a uma das outras.



Caso 4: duas circunferências disjuntas, uma interna a outra, mais uma reta externa a ambas.



Na tabela 2, podemos ver os outros 17 casos no plano Inversivo da sistemática dos autores de [9]. Devemos levar em conta que cada um desses casos pode representar a inversão de várias configurações no plano euclidiano de retas e circunferências, os quais correspondem às configurações analisadas neste trabalho nos casos RRR, RRC, RCC e CCC.

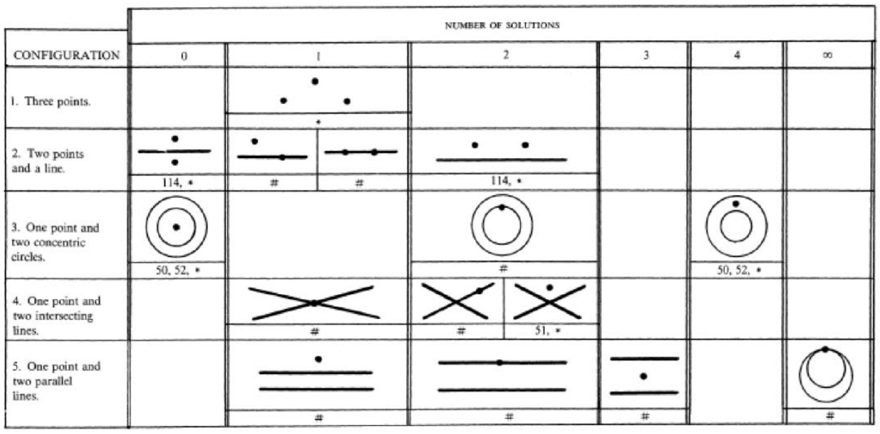


TABLE 1. The fifteen canonical forms in which at least one of the given objects is a point. Numbers below a configuration refer to Figures 50–114 in Muirhead's classification [9]; an asterisk refers to his Table IV. The symbol # indicates that the configuration is not considered in [9].

Tabela 1 – número de soluções, considerando-se o plano euclidiano.

This content downloaded from 150.162.42.43 on Wed, 27 May 2015 21:44:51 UTC
All use subject to JSTOR Terms and Conditions

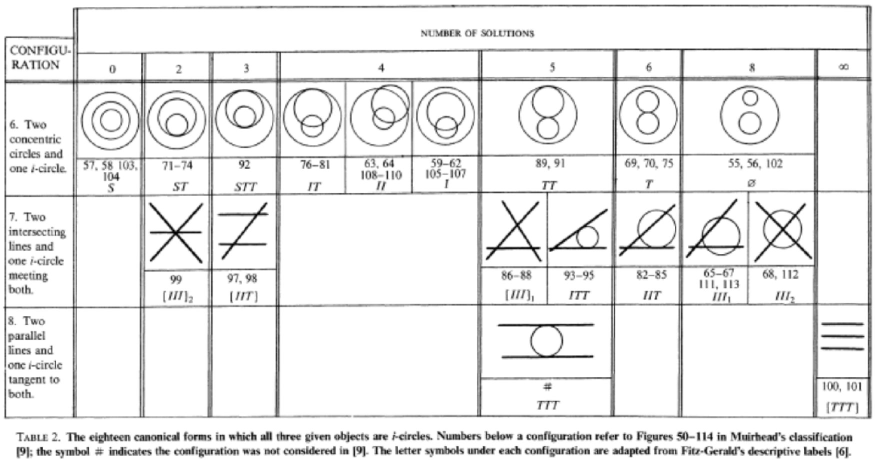


TABLE 2. The eighteen canonical forms in which all three given objects are i-circles. Numbers below a configuration refer to Figures 50–114 in Muirhead's classification [9]; the symbol # indicates the configuration was not considered in [9]. The letter symbols under each configuration are adapted from Fitz-Gerald's descriptive labels [6].

Tabela 2 – número de soluções, considerando-se o plano inversivo.

APÊNDICE B – PLANO DE AULA

INSTITUTO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA.

FLORIANÓPOLIS – SANTA CATARINA.

PROFESSOR: JAISON GASPERI

PÚBLICO ALVO: 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

PLANO DE AULA

TEMA

O Problema de Apolônio.

OBJETIVO

Nosso objetivo nesta aula é que os estudantes utilizem noções de geometria clássica, usando software GeoGebra [2], na resolução do problema de Apolônio, relacionando esses conceitos com estudo das posições relativas de pontos e retas.

TEMPO DE DURAÇÃO: 90 min (2 horas/aula).

CRONOGRAMA DE TRABALHO

1. Apresentação e explanação inicial do assunto a ser abordado (5 min);
2. Explicações e Exposições do tema de forma oral, relacionando os assuntos, apresentando o Problema e exemplos práticos, levantando questionamentos (25 min);
3. Apresentar e resolver exercícios, demonstrando todos os passos de maneira dialogada para os casos PPP, PPR, PRR e RRR. Usaremos nesse procedimento o software GeoGebra como ferramenta de construção, corroboração e visualização (45 min);

4. Considerações finais e abertura para perguntas e questionamentos (15 min).

TÓPICOS DO CONHECIMENTO:

- Posições relativas dos pontos no plano (linearidade e não linearidade);

- Posições relativas entre retas;

- Posições relativas entre ponto e circunferência;

- Posições relativas entre reta e circunferência;

- Relações métricas na circunferência;

- Construções geométricas básicas.

RECURSOS DIDÁTICOS

-Quadro branco e caneta;

-Computadores (com software GeoGebra);

AVALIAÇÃO

Será avaliada a participação dos estudantes nas construções e nas discussões em aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. J. Greenberg. Euclidian and Non-Euclidian Geometries, 2ª Ed.. New York: W. H. Freeman and Company, 1980.

[2] GeoGebra: http://www.geogebra.org.

[3] J. L. R. Pinho, E. Batista, N. T. B. Carvalho. Geometria I. 2. Ed.. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010.

[4] L. H. Bezerra. Problema de Apolônio de Perga. Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina 12, 80 – 84, 2015.

[5] M. I. Sarmento. Um passeio proveitoso pelos currículos de Apolônio. Dissertação de Mestrado do Curso do Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2007.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, resolvemos todos os casos do Problema de Apolônio por meio da geometria clássica, assim como por meio de transformações geométricas. No entanto, mais importante do que a resolução do problema propriamente dito foram os caminhos percorridos para encontra-la. Nesse processo pesquisamos várias fontes de resolução, que enriqueceram o trabalho. A resolução de problemas geométricos traz um importante desenvolvimento do raciocínio lógico. Além disso, o uso de um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra [2], facilitou a visualização e a corroboração de métodos de construção. O GeoGebra contém a transformada de inversão como uma de suas ferramentas padrão, o que facilitou resolver os problemas no plano Inversivo.

O uso de transformações geométricas, como inversão, homotetia etc, fez com que problemas complexos se transformassem em problemas cujas soluções eram mais simples. Um exemplo de transformação geométrica pode ser visto no problema RRC, Caso 1, 1ª situação, que foi transformado no problema PRC para se chegar à solução do primeiro. Para mim, essa resolução é inteligente e bela, reflete uma percepção apurada do problema. Outro exemplo é o problema CCC, que foi transformado para uma das situações do problema PCC, que por sua vez foi transformada no caso PPC. Para se chegar a todas essas resoluções, foram anos de trabalhos de vários matemáticos, o que resultou nesta dissertação. Sem o uso de um *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, o trabalho seria quase que impossível de ser concluído em tempo hábil. Por exemplo, só para fazer inversão de um ponto são necessários cinco passos com régua e compasso; para fazer a inversão de uma circunferência temos que fazer a inversão de três pontos; e para construir a solução do problema CCC temos que fazer a inversão de dezoito circunferências. Portanto, a conclusão deste trabalho foi em grande parte devido ao apoio computacional dado por esses softwares. Lembremos que há também outros programas: Cabri-Géomètre (http://www.cabri.com.br), Tabulae (http://tabulae.net), C.a.R (http://car.rene-grothmann.de/doc-en) etc.

Este trabalho teve como um dos objetivos apresentar os procedimentos de construção das soluções, passo a passo, para facilitar a compreensão, numa linguagem que alunos do ensino médio possam acompanhar. Espero que futuramente estes meus estudos possam servir para outras pessoas, para que se sintam motivadas a estudar o Problema de Apolônio, como vários matemáticos o fizeram por mais de dois mil anos.

REFERÊNCIAS

[1] M. J. Greenberg. Euclidian and Non-Euclidian Geometries, 2ª Ed.. New York: W. H. Freeman and Company, 1980.

[2] GeoGebra: http://www.geogebra.org.

[3] A. C. M. Neto. Geometria. 1ª Ed.. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[4] J. L. R. Pinho, E. Batista, N. T. B. Carvalho. Geometria I. 2. Ed..Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010.

[5] K. McDonald. A solution to the problem of Apollonius, 1964 (http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/papers/apollonius_051964.pdf).

[6] A. C. C. Munaretto. Resolução do Problema de Apolônio por meio de Inversão: um roteiro de estudo para a formação de Professores em Geometria. Monografia de Especialização do Curso de Pós-Graduação em Expressão Gráfica da UFPR, Curitiba, 2010.

[7] M. I. Sarmento. Um passeio proveitoso pelos currículos de Apolônio. Dissertação de Mestrado do Curso do Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2007.

[8] L. H. Bezerra. Problema de Apolônio de Perga. Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina 12, 80 – 84, 2015.

[9] A. Bruen, J. C. Fisher and J. B. Wilker.Apollonius by inversion.Mathematics Magazine 56 (2), 97-103, 1983.

[10] N. A. Court. The problem of Apollonius.The Mathematics Teacher 54 (6), 444-452, 1961.

[11] R. P. Muirhead. On the Number and Nature of the Solutions of theApollonian Contact Problem.Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 14, 135–147, 1896.