Michely de Melo Pellizzaro

Números Naturais via Teoria Ingênua dos Conjuntos

Florianópolis

Junho de 2015

Michely de Melo Pellizzaro

Números Naturais via Teoria Ingênua dos Conjuntos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção do grau de Mestre em Matemática com Área de Concentração PROFMAT-UFSC associado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Departamento de Matemática

Programa Profissionalizante em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari

Florianópolis

Junho de 2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pellizzaro, Michely de Melo
Números Naturais via Teoria Ingênua dos Conjuntos / Michely de Melo Pellizzaro ; orientador, Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari - Florianópolis, SC, 2015.
49 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Teoria dos Conjuntos.. 3. Números Naturais.. 4. Artimética.. I. Mortari, Prof. Dr. Fernando de Lacerda . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Michely de Melo Pellizzaro

Números Naturais via Teoria Ingênua dos Conjuntos

Esta dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora em Exercício do Curso
Banca Examinadora

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari
Universidade Federal de Santa Catarina
(Orientador)

Prof. Dr. Gilles Gonçalvez de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Giuliano Boava
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Felipe Vieira
Universidade Federal de Santa Catarina - Blumenau

Florianópolis, Junho de 2015

À pessoa que acreditou, incentivou e abdicou inúmeros fins de semana para que esse sonho fosse possível: Jean Rodrigo Voltolini.

Agradecimentos

Ao concluir esse sonho, lembro-me de muitas pessoas a quem devo agradecer pois esta conquista concretiza-se com a contribuição de cada uma delas, seja direta ou indiretamente.

Primeiramente, agradeço a Deus por estar sempre presente na minha vida, e tornar tudo possível.

Aos meus pais Fátima e Rui, que acreditaram e incentivaram a realização desse sonho, me monstrando sempre que a educação e o estudo são os melhores caminhos a serem seguidos.

Ao meu noivo Jean, por me acompanhar durante todas as viagens aos fins de semana e por sempre me ouvir e entender que às vezes foi necessário abrir mão de outros planos para que esse fosse concretizado. Quaisquer palavras jamais conseguirão expressar a admiração que tenho por ti!

À minha cunhada Bruna, pelas estadias aos fins de semana e curso de verão.

A todos os professores que contribuíram para minha formação, especialmente ao professor Fernando Mortari, por todos os encontros aos fins de semana, discussões online e toda orientação a que devo esse trabalho.

A todos os colegas professores e diretores que entenderam a minha ausência em várias atividades escolares ao longo desses dois anos.

À CAPES pelo apoio financeiro ao longo do curso.

"Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino".

(Leonardo da Vinci)

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma breve introdução à Teoria dos Conjuntos a fim de definir os números naturais e demonstrar suas propriedades aritméticas, utilizando uma linguagem acessível a um aluno de graduação. Inicialmente são introduzidos os principais axiomas da Teoria Ingênua dos Conjuntos utilizados neste trabalho. Após, é feita a definição do conjunto dos números naturais. A partir disso, no terceiro capítulo, são enunciados e demonstrados os axiomas de Peano. No quarto capítulo, são definidas as operações de adição e multiplicação, bem como é feita a demonstração de suas propriedades aritméticas.

Palavras-chave: Teoria dos Conjuntos. Números Naturais. Aritmética.

Abstract

The goal of this work is to give a brief introduction to Set Theory in order to define the natural numbers and to prove some of their arithmetic properties, using language that is accessible to undergraduate students. First, the main axioms in Naive set theory used in this work are presented. Later, the set of natural numbers is defined. From this, in the third chapter, the Peano axioms are listed and proved. In the fourth chapter, the operations of addition and multiplication are defined, and some of their properties are verified.

Key-words: Set Theory. Natural Numbers. Arithmetic.

Sumário

Introdução

Independente da área que um estudante de matemática escolha estudar, em algum momento ele irá se deparar com a teoria elementar dos números. É usual admitir a existência do conjunto dos números naturais já munido das duas operações de adição e multiplicação. Neste trabalho, apresentamos a teoria básica dos conjutos para então fazer a construção dos números naturais de maneira breve, utilizando uma linguagem elementar e, com a demonstração de alguns resultados, provar as propriedades de adição e multiplicação nos números naturais. Objetivamos assim mostar que a construção dos números naturais, bem como a demonstração das suas propriedades aritméticas, também podem ser apresentadas ao aluno de graduação sem maiores dificuldades, pois com o conhecimento da teoria básica de conjutos é possível entender os itens em questão.

No primeiro capítulo, introduzimos a teoria básica dos conjuntos. Neste capítulo, estudaremos de forma introdutória a teoria ingênua dos conjuntos abordando os axiomas da extensão, especificação, paridade e união que nos auxiliarão nas futuras explicações que serão dadas. Uma leitura do livro Teoria Ingênua dos Conjuntos de Paul Halmos, pode contribuir com o leitor que deseja se aprofundar neste assunto.

No segundo capítulo, definimos números naturais por meio de conjuntos e com o auxílio da definição de sucessor. Através do enunciado do axioma da infinitude e de duas proposições auxiliares, também abordados nesse capítulo, é possível então definirmos o conjunto dos números naturais.

No terceiro capítulo, enunciamos os axiomas de Peano. Como tais axiomas são vistos como proposições dentro da teoria de conjuntos abordada, provamos esses axiomas com o auxílio de dois resultados. Um desses axiomas é conhecido como princípio da indução matemática.

Além deste princípio ser uma ferramenta muito usual para demonstrações matemáticas, ele nos permite fazer definições recursivamente. Para isso precisamos do auxílio do teorema da recursividade, enunciado e provado também neste capítulo.

Dando continuidade ao trabalho, definimos as operações de adição e multiplicação nos números naturais e provamos, com o auxílio de alguns resultados complementares, as suas propriedades aritméticas.

1 TEORIA BÁSICA DOS CONJUNTOS

1.1 NOÇÕES INICIAIS

Os primeiros estudos feitos sobre teoria dos conjuntos recebem o nome de Teoria Ingênua dos Conjuntos. Em tal teoria, não é feita uma definição formal de conjunto, é dada apenas uma noção intuitiva. Basicamente, é como o que é feito em geometria elementar, onde não se define ponto e reta, apenas descreve-se o que pode ser feito com eles.

Entendemos por conjunto, algo que possui elementos ou membros quaisquer. Por exemplo, podemos ter um conjunto onde os elementos são livros, outro conjunto onde os elementos são lápis e assim por diante. É importante ressaltar que, por vezes, podemos ter um conjunto como elemento de outro conjunto. Por exemplo, uma reta é um conjunto de pontos. O conjunto de todas as retas no plano é um conjunto de conjuntos (de pontos).

Um dos principais conceitos da teoria de conjuntos é o que fala de **pertinência**, denotado pelo símbolo $\in$ que é uma versão da letra grega epsilon. Escrevemos $x \in A$ para indicar que x é um elemento do conjunto A, ou seja, x pertence ao conjunto A. Também, o símbolo $\notin$ serve para indicar que um elemento x não pertence a um conjunto A, e escreve-se $x \notin A$.

A relação de igualdade entre dois conjuntos A e B é simbolizada por $A = B$. De maneira semelhante, escreve-se $A \neq B$ para indicar que o conjunto A é diferente do conjunto B.

Existe uma importante relação entre a pertinência e a igualdade, acima descritas, expressa pelo axioma da extensão.

1.2 AXIOMA DA EXTENSÃO

Axioma 1.2.1. *(Axioma da Extensão) Dois conjuntos são iguais se e somente se eles têm os mesmos elementos.*

O axioma da extensão nos diz que não há como diferenciar dois conjuntos com os mesmos elementos.

Agora, dados conjuntos A e B, se todo elemento de A é também um elemento de B, dizemos que A é um subconjunto de B, ou B contém A ou ainda A está contido em B, e escrevemos:

$$A \subset B \text{ ou } B \supset A.$$

Note que a inclusão e a igualdade satisfazem as propriedades reflexiva e transitiva. De fato, todo conjunto contém a si mesmo ($A \subset A$), ou seja, a inclusão é reflexiva. No mesmo sentido, a igualdade também é reflexiva. Também, se A, B e C são conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$, ou seja, a inclusão é transitiva. No mesmo sentido, se A, B e C são conjuntos tais que $A = B$ e $B = C$ então $A = C$, ou seja, a igualdade também é transitiva.

Agora, sejam A e B conjuntos. Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então isso significa que os conjuntos A e B têm os mesmos elementos e, pelo axioma da extensão, são iguais. Portanto, pode-se dizer que a inclusão é anti-simétrica. Note que o mesmo também ocorre para a igualdade que é trivialmente anti-simétrica, já que se $A = B$ e $B = A$, então $A = B$.

Em vista disso, pode-se reformular o axioma da extensão através do seguinte enunciado: Sejam A e B conjuntos, então $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

1.3 AXIOMA DA ESPECIFICAÇÃO

Axioma 1.3.1. *(Axioma da Especificação) Para todo conjunto A e toda condição $S(x)$ corresponde um conjunto B cujos elementos são exatamente aqueles elementos x de A para os quais $S(x)$ é válida.*

O axioma da especificação nos diz que, dado um conjunto e uma sentença na variável livre x, podemos obter um novo conjunto formado pelos elementos x de A que satisfazem tal sentença. Pode-se expressar o axioma da especificação como B é conjunto tal que $B = \{x \in A : S(x)\}$. Ou seja, novamente percebe-se que B é o conjunto dos elementos x de A tais que $S(x)$ é válida. Note que, pelo axioma da extensão, esse novo conjunto B é determinado de maneira única. Por exemplo, seja A o conjunto de todos os mamíferos e considere $S(x)$ a sentença tal que x é leão. Então, B é o conjunto dos mamíferos que são leões.

Uma interessante aplicação do axioma da especificação é o paradoxo de Russell, que serve para mostrar que não existe um conjunto que contenha todos os conjuntos como seus elementos. De fato, seja A um conjunto arbitrário e considere a condição $S(x)$ dada por $x \notin x$. Pelo axioma da especificação, existe o conjunto $B = \{x \in A : x \notin x\}$. Prova-se então que $B \notin A$, ou seja, nenhum conjunto A tem todos os conjuntos como seus elementos. De fato, suponha que $B \in A$. Sendo B um elemento do conjunto A, podemos nos perguntar se $B \in B$, já que B é subconjunto de A. Observe que se $B \in B$, então pela definição de B temos que $B \in A$ e $B \notin B$, o que é absurdo. Agora, se $B \notin B$, então B não satisfaz a condição para pertencer a B ($B \notin B$) e portanto $B \in B$, o que é novamente absurdo. Segue então, que $B \notin A$.

Quando estudamos teoria dos conjuntos, assumimos a existência de um conjunto. Agora, usando os axiomas descritos até aqui vamos provar a existência de um conjunto que não possui elementos. Seja A um conjunto arbitrário e considere $S(x)$ a condição $x \neq x$. Pelo axioma da especificação, existe o conjunto $B = \{x \in A : x \neq x\}$. Note que o conjunto B não possui elementos. De fato, se $y \in B$ segue que $y \in A$ e $y \neq y$, o que é um absurdo pois $y = y$. Logo, B não possui elementos.

Uma questão importante a ser refletida nesse momento é que existem vários conjuntos com um ou dois ou mais elementos. Então, com esse mesmo raciocínio, seria intuitivo pensar que existem vários conjuntos sem nenhum elemento. Porém, o axioma da extensão garante que existe apenas um único conjunto sem elementos. De fato, suponha que B e C sejam conjuntos sem elementos e que $B \neq C$. Pelo axioma da extensão, deve existir um elemento $x \in B$ tal que $x \notin C$ ou vice-versa, o que é absurdo pois nenhum dos dois conjuntos B e C possui elemento algum. Portanto, $B = C$ e assim existe apenas um único conjunto sem elementos. Tal conjunto é chamado de *conjunto vazio* e denotado por $\varnothing$.

Tudo o que temos até o momento é que existe um conjunto e existe o conjunto vazio. Vamos enunciar um novo axioma para continuar o estudo da teoria dos conjuntos.

1.4 AXIOMA DA PARIDADE

Axioma 1.4.1. *Para dois conjuntos quaisquer existe um conjunto a que ambos pertencem.*

O axioma da paridade nos diz que, dados dois conjuntos a e b, existe um conjunto B tal que a e b pertencem a B, ou seja, para quaisquer dois conjuntos existe um conjunto que contém ambos como elementos. Na verdade, existe um conjunto que contém ambos como elementos e nada mais. De fato, se B é um conjunto tal que $a \in B$ e $b \in B$, então aplicando o axioma da especificação para B com a sentença "$x = a$ ou $x = b$", temos:

$$B' = \{x \in B : x = a \text{ ou } x = b\}.$$

Observe que por definição B' possui apenas a e b como elementos e que o axioma da extensão garante que B' é o único tal conjunto. Denotamos este conjunto por $\{a, b\}$ ou por $\{b, a\}$, chamado de *par* (não ordenado) formado por a e b.

Agora, partindo do fato de $\varnothing$ ser um conjunto, podemos formar o par não ordenado $\{\varnothing, \varnothing\}$. Esse par não ordenado é formado apenas pelo conjunto $\varnothing$ e pode ser denotado por $\{\varnothing\}$. De modo mais geral, suponha a um conjunto. Podemos formar o par não ordenado $\{a, a\}$. Novamente, esse par não ordenado é formado apenas pelo conjunto a e pode ser denotado por $\{a\}$. Portanto, com o axioma da paridade, pode-se assegurar que dado um conjunto A qualquer, existe um conjunto B cujo único elemento é o conjunto A.

Dessa forma, pode-se garantir a existência de um grande número de conjuntos, como por exemplo: $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$, $\{a, \{a\}\}$ e etc. Note que, pelo axioma da extensão, os conjuntos formados são diferentes entre si.

1.5 AXIOMA DA UNIÃO

Antes de enunciarmos o axioma da união, vale observar que na teoria ingênua dos conjuntos *coleção* é sinônimo de conjunto.

Axioma 1.5.1. *Para toda coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos existe um conjunto B que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos da dada coleção.*

O axioma da união nos diz que para toda coleção $\mathcal{C}$ existe um conjunto B tal que se $x \in X$, para algum X em $\mathcal{C}$, então $x \in B$. Note que o conjunto B pode conter elementos que não pertençam a nenhum dos conjuntos X da coleção $\mathcal{C}$. Portanto, vamos aplicar o axioma da especificação no conjunto B com a condição $S(x) : x \in X$ para algum X em $\mathcal{C}$ e formar o conjunto:

$$\cup\mathcal{C} = \{x \in B : x \in X \text{ para algum } X \text{ em } \mathcal{C}\}.$$

Note que o axioma da extensão garante que o conjunto $\cup\mathcal{C}$ fica determinado de uma única maneira.

O conjunto $\cup\mathcal{C}$ assim definido é denominado união da coleção $\mathcal{C}$ de conjuntos.

Agora, usando o axioma da paridade e o axioma da união, podemos definir a união de dois conjuntos A e B de tal forma que, dados dois conjuntos A e B, pelo axioma da paridade existe o conjunto $\{A, B\}$. Pelo axioma da união, temos o conjunto $\cup\{A, B\}$. Tal conjunto é definido como a união de dois conjuntos A e B e é denotado por $A \cup B$. Portanto, pode-se escrever: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

2 NÚMEROS

2.1 DEFINIÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS

Definir um número natural como um conceito primitivo, ou como uma simples noção de grandeza, é muito comum porém um tanto quanto incômodo. Ao tentar definir o que é número surgem algumas questões filosóficas que, há muito tempo, já foram questionadas. Apenas por volta do início do século XX é que as mudanças ocorridas na lógica e nos fundamentos da matemática deram o devido rigor à definição de número. Uma leitura do livro Logicomix, cuja referência encontra-se nas referências bibliográficas deste trabalho, pode contribuir com o leitor que deseja se aprofundar no assunto.

Visto que, dentro da teoria ingênua de conjuntos, considera-se a existência de um conjunto (o conjunto vazio), e a partir deste formam-se outros conjuntos por meio dos axiomas da teoria dos conjuntos, é conveniente abordar o conceito de número como algo associado a um conjunto.

Portanto, a primeira definição a ser feita é a do número 0. Considere 0 como sendo um conjunto com zero elementos, ou seja, $0 = \emptyset$.

Agora, dado um conjunto x, defina o *sucessor de* x como sendo o conjunto $x^+ = x \cup \{x\}$. Ou seja, o sucessor de x é o conjunto obtido pelo acréscimo de x aos elementos de x.

A partir da definição de sucessor, pode-se definir o *número* 1 como sendo o sucessor de 0 (conjunto vazio), ou seja:

$$1 := 0^+ = 0 \cup \{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

Note que a última igualdade é justificada pelo fato de que $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ é o conjunto cujos elementos são precisamente os elementos de $\emptyset$ ou de $\{\emptyset\}$. Como $\emptyset$ não tem elementos e $\{\emptyset\}$ possui apenas o $\emptyset$ como elemento, segue que $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ possui apenas o conjunto $\emptyset$ como elemento, isto é, $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.

Da mesma forma, definem-se os *demais números* como segue:

$$
\begin{gathered}
2 := 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{1\} = \{\emptyset, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}, \\
3 := 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}, \\
4 := 3^+ = 3 \cup \{3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \cup \{3\} = \\
\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = \{0, 1, 2, 3\}.
\end{gathered}
$$

Seguindo este processo, pode-se afirmar informalmente que um número natural é definido como o conjunto dos números naturais menores do que ele. Contudo, ainda falta formalizar o conjunto dos números naturais.

Ao continuar a construção feita acima para números naturais indefinidamente, não seria possível afirmar, com as ferramentas que se tem até agora, se a construção obtida seria, ou não, um conjunto. Isso decorre do fato de que, na teoria contruída até agora, não foi admitida a existência de um conjunto infinito.

Através de um novo axioma, pode-se obter o conjunto dos números naturais. Porém, antes de enunciá-lo, faz-se necessário a definição de *conjunto sucessor*.

Um conjunto A é um *conjunto sucessor* quando:

(i) $0 \in A$;

(ii) $x^+ \in A$ sempre que $x \in A$.

Portanto, um conjunto sucessor A deve conter o sucessor de qualquer elemento de A.

2.2 AXIOMA DA INFINITUDE

Axioma 2.2.1. *(Axioma da Infinitude) Existe um conjunto que contém o* 0 *e o sucessor de cada um dos seus elementos.*

O axioma da infinitude garante a existência de um conjunto sucessor como definido anteriormente.

Para formalizarmos a definição de números naturais, precisaremos enunciar duas proposições auxiliares. Para isso, é necessário compreender primeiramente o conceito de intersecção de conjuntos.

Da mesma forma que definimos a união de dois conjuntos A e B, é possível definirmos a intersecção desses conjuntos. Para isso, suponha que A e B sejam conjuntos quaisquer. A *intersecção* de A e B é o conjunto $A \cap B$ definido por $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$. Note que, se $x \in A \cap B$, então necessariamente $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $A \cap B \subset \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$. Ainda, se $x \in \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ então $x \in A$ e $x \in B$ e, portanto, $x \in A \cap B$. Logo $\{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \subset A \cap B$ e segue que $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Agora, vamos enunciar e demonstrar as proposições auxiliares. Aqui, abordaremos o conceito de família. Uma leitura do livro Teoria Ingênua dos Conjuntos de Paul Halmos, pode contribuir com o leitor que deseja se aprofundar nesse conceito.

Proposição 2.2.1. *Seja A conjunto sucessor. Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ família de todos os conjuntos sucessores contidos em A. Então,*

$$\bigcap_{i\in I} A_i$$

é conjunto sucessor.

Demonstração: Seja $\{A_i\}_{i\in I}$ família de todos os conjuntos sucessores contidos em A. Então, para todo $i \in I$, temos que $0 \in A_i$ e $x^+ \in A_i$ sempre que $x \in A_i$. Logo, $\bigcap_{i\in I} A_i$ é conjunto sucessor pois $0 \in \cap A_i$ e $x^+ \in \cap A_i$, sempre que $x \in \cap A_i$.

Definimos então, o conjunto $\omega := \bigcap_{i\in I} A_i$.

Proposição 2.2.2. *Sejam A conjunto sucessor e ω o conjunto definido acima. Então, ω é subconjunto de todo conjunto sucessor.*

Demonstração: Seja B conjunto sucessor arbitrário. Então, $A \cap B$ é conjunto sucessor. Como $A \cap B \subset A$, segue que $A \cap B$ é um dos conjuntos que se encaixam na definição de ω. Portanto, $\omega \subset A \cap B$ e assim $\omega \subset B$.

Note que a proposição provada acima, garante que ω é o menor dos conjuntos sucessores e o axioma da extensão garante que ω é o único conjunto sucessor que está contido em qualquer outro conjunto sucessor. A partir desse conjunto, definimos *número natural* como sendo um elemento de ω. Com isso, ω pode ser visto como o conjunto de todos os números naturais.

Agora, definido o conjunto dos números naturais em teoria de conjuntos, pode-se aplicar este conceito em diversas demonstrações, bem como na demonstração das propriedades aritméticas dos números naturais.

3 AXIOMAS DE PEANO

3.1 AXIOMAS DE PEANO

Em uma teoria matemática, novos conceitos são introduzidos e definidos a partir de conceitos anteriores. Estes conceitos anteriores podem ser conceitos primitivos que são aceitos sem nenhuma definição formal. Como exemplos podemos citar o conceito de ponto na geometria plana e até mesmo o conceito de conjunto na teoria de conjuntos. Estes conceitos primitivos também podem ser axiomas, ou seja, afirmações que se tornam verdadeiras sem nenhuma demonstração.

Peano assume a existência de um conjunto $\mathbb{N}$ e uma função $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denominada função sucessor, tais que:

(P_1) $0 \in \mathbb{N}$, ou seja, existe um elemento em $\mathbb{N}$, denominado zero e denotado por 0.

(P_2) $0 \notin Im(\tau)$, ou seja, zero não é sucessor de nenhum número natural.

(P_3) Seja $A \subset \mathbb{N}$ subconjunto tal que:

(i) $0 \in A$;

(ii) para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \in A$, então $\tau(n) \in A$.

Então $A = \mathbb{N}$.

(P_4) τ é injetora, ou seja, se $m, n \in \mathbb{N}$ e $\tau(m) = \tau(n)$ então $m = n$.

O axioma (P_3) é conhecido como princípio de indução matemática.

Dentro da teoria de conjuntos desenvolvida até agora, é possível demonstrar os axiomas de Peano. É importante ressaltar que abordaremos os axiomas de Peano como proposições e demonstraremos tais proposições a partir da teoria apresentada até aqui. Para isso, considere o conjunto $\mathbb{N}$, que Peano assumiu que existia, como sendo o conjunto ω definido nesta teoria. Também, considere o elemento 0 como sendo $0 = \emptyset$ e n^+ como sendo o sucessor de um número natural n. Aqui, abordaremos o conceito de função. Uma leitura do livro Teoria Ingênua dos Conjuntos de Paul Halmos, pode contribuir com o leitor que deseja se aprofundar nesse conceito.

Pelo fato de ω ser um conjunto sucessor, tem-se que $0 \in \omega$, o que comprova (P_1).

Também pelo fato de ω ser um conjunto sucessor, tem-se que se $n \in \omega$ então $n^+ \in \omega$. Defina a função $\tau : \omega \to \omega$ por $\tau(n) = n^+$.

Note que $0 \notin Im(\tau)$. De fato, seja n um elemento de ω. Então, n^+ é conjunto não vazio, pois $n^+ = n \cup \{n\}$ e assim $n \in n^+$. Mas 0 é o conjunto vazio. Logo, $n^+ \neq 0$ e 0 não é sucessor de nenhum elemento de ω, o que comprova (P_2).

Agora, em (P_3), seja $A \subset \mathbb{N}$ subconjunto tal que $0 \in A$, e $\tau(n) \in A$ sempre que $n \in A$. Note que isto diz que A é um conjunto sucessor, pois $\tau(n) = n^+$ para todo $n \in \mathbb{N} = \omega$. Como ω é o menor conjunto sucessor, $A \subset \omega$ e A é conjunto sucessor, vemos que necessariamente $\omega \subset A$, donde $A = \omega = \mathbb{N}$, o que comprova (P_3).

Para demonstrar (P_4), precisamos enunciar e provar duas proposições auxiliares.

Proposição 3.1.1. *Cada elemento de um número natural é, deste, um subconjunto.*

É importante ressaltar que, na teoria construída até agora, números naturais foram definidos como conjuntos. Portanto, quando se trata de elemento de um número natural, entende-se como o elemento do conjunto que é definido como um número natural.

Demonstração: Esta demonstração é feita por indução, princípio P_3 de Peano já demonstrado.

Seja T o conjunto dos números naturais que satisfazem o enunciado, isto é, $T := \{y \in \omega : x \subset y, \forall x \in y\}$. Provaremos que $T = \omega$.

Para tanto, basta provarmos que T é um conjunto sucessor. Com efeito, note primeiramente que $0 \in T$, pois caso $0 \notin T$, existirá $x \in \emptyset$ tal que $x \subset \emptyset$, o que é absurdo, pois $\emptyset$ não possui elementos. Portanto, $0 \in T$.

Seja $n \in T$. Note que se $x \in n^+$ então $x \subset n^+$. De fato, tome $x \in n^+$ qualquer. Há dois casos para considerar. Quando $x = n$, note que, como $n^+ = n \cup \{n\}$, segue que $x = n \subset n^+$. Logo, $x \subset n^+$. Quando $x \neq n$, temos $x \in n$, pois $n^+ = n \cup \{n\}$. Visto que $n \in T$, de $x \in n$ conclui-se que $x \subset n$, e de $n \subset n^+$ temos $x \subset n^+$.

Portanto, T é conjunto sucessor. Como $T \subset \omega$, segue que $T = \omega$, pois ω é o menor conjunto sucessor. Logo, dado $n \in \omega$ qualquer, temos que $x \subset n$, $\forall x \in n$.

Proposição 3.1.2. *Nenhum número natural é um subconjunto de qualquer um de seus elementos.*

Demonstração: É equivalente mostrar que se $n \in \omega$ e $x \in n$ então $n \not\subset x$. Esta demonstração é feita por indução.

Considere S o conjunto dos números naturais que satisfazem o enunciado, ou seja, $S := \{n \in \omega : n \not\subset x, \forall x \in n\}$.

Note primeiramente que $0 \in S$. De fato, temos que $0 \in \omega$. Também, 0 não é subconjunto de seus elementos, pois 0 é o conjunto vazio e não possui elementos. Logo, $0 \in S$.

Note também que se $n \in S$ então $n^+ \in S$. Com efeito, seja $n \in S$. Perceba que $n \subset n^+$ propriamente, pois $n^+ \neq n$. Logo, $n^+ \not\subset n$. Tome $x \in n$ qualquer. Mostraremos que $n^+ \not\subset x$. Para isso, suponha $n^+ \subset x$. Então, como $x \in n$, segue da Proposição 3.1.1 que $x \subset n$. Portanto, $n^+ \subset x \subset n$, o que é absurdo. Logo, $n^+ \not\subset x$ e, como $n^+ = n \in \{n\}$, então $n^+ \in S$.

Agora, vamos demonstrar (P_4): τ é injetora, ou seja, se $m, n \in \mathbb{N}$ e $\tau(m) = \tau(n)$ então $m = n$ ou, de forma equivalente, "*se n e m estão em ω e se $n^+ = m^+$, então $n = m$*".

Suponha que n e m estejam em ω e que $n^+ = m^+$. Visto que $n^+ = n \cup \{n\}$ e $m^+ = m \cup \{m\}$, temos que:

- $n \in n^+$ e então $n \in m^+$, pois $n^+ = m^+$ por hipótese. Segue que $n \in m$ ou $n = m$.

- $m \in m^+$ e então $m \in n^+$. Segue que $m \in n$ ou $m = n$.

Se $m = n$, então não há o que provar.

Se $m \neq n$, então $n \in m$ e $m \in n$. Pela Proposição 3.1.1, segue que $n \subset m$ e $m \in n$, o que é absurdo pela Proposição 3.1.2, pois nenhum número natural é um subconjunto de qualquer um de seus elementos. Logo, $n = m$.

3.2 TEOREMA DA RECURSIVIDADE

A seguir, iremos enunciar e demonstrar um importante teorema que nos auxiliará na definição das operações de adição e multiplicação dos números naturais que será feita adiante. Aqui, abordaremos os conceitos de relação, função e produto cartesiano. Uma leitura do livro Teoria Ingênua dos Conjuntos de Paul Halmos, pode contribuir com o leitor que deseja se aprofundar nesses conceitos.

Teorema 3.2.1 (Teorema da Recursividade)**.** *Se a é um elemento de um conjunto X, e se f é uma função de X para X, então existe uma função u de ω para X tal que $u(0) = a$ e tal que $u(n^+)=f(u(n))$ para todo n em ω.*

Demonstração: Sejam $a \in X$ e $f : X \to X$ uma função. Vamos mostrar a existência de uma função u.

Considere a coleção $\mathcal{C}$ de todas as relações de ω em X, ou seja, subconjuntos de $\omega \times X$ que satisfazem as propriedades $u(0) = a$ e $u(n^+) = f(u(n))$.

(i) Para uma relação $A \subset \omega \times X$, a condição $(0, a) \in A$ diz que 0 é levado em a pela relação A.

(ii) Se $u(n) = x$, a condição $(n^+, f(x)) \in A$ sempre que $(n, x) \in A$ diz que se n é levado em x por A, então n^+ é levado em $f(x)$ por A.

A função cuja existência queremos provar deve ser um elemento da coleção $\mathcal{C}$. Vamos provar então que $u \in \mathcal{C}$.

Primeiramente, note que a coleção $\mathcal{C}$ é não vazia pois $\omega \times X$ satisfaz as propriedades (i) e (ii). De fato,

- $(0, a) \in \omega \times X$ pois $0 \in \omega$ e $a \in X$, por hipótese.
- $(n^+, f(x)) \in \omega \times X$ sempre que $(n, x) \in \omega \times X$, pois já vimos que se $n \in \omega$ então $n^+ \in \omega$ e se $x \in X$ então $f(x) \in X$ já que $f : X \to X$.

Também, cada elemento de $\mathcal{C}$ é um subconjunto de $\omega \times X$. Tome agora a intersecção de todos eles e chamemos a relação resultante de u. Note que, $(0, a) \in u$ pois $(0, a)$ está em todo o conjunto da coleção $\mathcal{C}$ e, portanto, na intersecção deles. E ainda, $(n^+, f(x)) \in u$ sempre que $(n, x) \in u$, pois (n, x) está em todo conjunto da coleção $\mathcal{C}$ e, consequentemente $(n^+, f(x))$ também. Portanto, se (n, x) está na intersecção, $(n^+, f(x))$ também está.

Logo, concluímos que $u \in \mathcal{C}$.

Agora, vamos provar que u é um função. Essa prova é feita por indução.

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todos os números naturais n para os quais $(n, x) \in u$ para um único x.

- $0 \in \mathcal{S}$

  Suponha que $0 \notin \mathcal{S}$. Então, existem $a, b \in X$, $b \neq a$, tal que $(0, b) \in u$ e $(0, a) \in u$. Considere o conjunto $u - \{(0, b)\}$. Note que este conjunto contém $(0, a)$ pois $a \neq b$ e, se contém (n, x) então também contém $(n^+, f(x))$, pois uma vez que $n^+ \neq 0$ (0 não é sucessor de nenhum número) o elemento $(0, b)$ não é igual a $(n^+, f(x))$. Ou seja, $u - \{(0, b)\} \in \mathcal{C}$. Mas isso contradiz o fato de u ser o menor conjunto de $\mathcal{C}$, pois é dado pela intersecção de todos os conjuntos de $\mathcal{C}$. Logo, $0 \in \mathcal{S}$.

- $n \in \mathcal{S} \Rightarrow n^+ \in \mathcal{S}$

  Suponha que $n \in \mathcal{S}$. Então, existe um único $x \in X$ tal que $(n, x) \in u$. Como $(n, x) \in u$, então $(n^+, f(x)) \in u$, pela propriedade (ii).

  Se $n^+ \notin \mathcal{S}$, então $(n^+, y) \in u$ para $y \neq f(x)$. Considere o conjunto $u - \{(n^+, y)\}$. Note que este conjunto contém $(0, a)$ pois $0 \neq n^+$. Agora, seja $(m, t) \in u - \{(n^+, y)\}$. Note que se $m = n$, então $t = x$ e dado $(n, x) \in u - \{(n^+, y)\}$ segue que $(n^+, f(x)) \in u - \{(n^+, y)\}$ pois $f(x) \neq y$. Se $m \neq n$, então dado $(m, t) \in u - \{(n^+, y)\}$ segue que $(m^+, f(t)) \in u - \{(n^+, y)\}$, pois $m^+ \neq n^+$.

  Logo, se $(m, t) \in u - \{(n^+, y)\}$ então $(m^+, f(t)) \in u - \{(n^+, y)\}$.

Logo, temos que $u - \{(n^+, y)\} \in \mathcal{C}$. Mas isso contradiz novamente o fato de u ser o menor conjunto de $\mathcal{C}$. Portanto, $n^+ \in \mathcal{S}$.

Assim, u é uma função e satisfaz as condições dadas.

Como mencionado anteriormente, usaremos o teorema da recursividade para definir adição e multiplicação em ω. Se o teorema permitisse mais de uma função satisfazendo a propriedade desejada, teríamos concebivelmente diversas operações de adição e multiplicação diferentes. Portanto, ainda falta mostrar que a função cuja existência é garantida pelo teorema da recursividade é a única com a propriedade desejada.

Proposição 3.2.1. *A função cuja existência é garantida pelo teorema da recursividade é única.*

Demonstração: Sejam X conjunto, a um elemento de X e f uma função tal que $f : X \to X$. Considere funções $u, v : \omega \to X$ tais que $u(0) = a$, $u(n^+) = f(u(n))$ para todo $n \in \omega$, $v(0) = a$ e $v(n^+) = f(v(n))$ para todo $n \in \omega$.

Vamos mostrar que u e v são a mesma função utilizando o princípio da indução matemática.

Note que as funções u e v possuem o mesmo domínio e contradomínio. Logo, para provamos que são a mesma função basta provarmos que possuem a mesma lei de formação, ou seja, basta provarmos que $u(n) = v(n)$, para todo $n \in \omega$.

Considere o conjunto $A = \{n \in \omega : u(n) = v(n)\}$. Note que queremos mostrar que $A = \omega$. Como $A \subset \omega$, basta mostrarmos que A é um conjunto sucessor, ou seja, precisamos mostrar que $0 \in A$ e se $n \in A$ então $n^+ \in A$.

Por hipótese, $u(0) = a$ e $v(0) = a$, logo $u(0) = v(0)$ e portanto $0 \in A$.

Suponha que $n \in A$. Então, para esse n vale $u(n) = v(n)$. Também, $u(n^+) = f(u(n)) =$ e $v(n^+) = f(v(n))$, por hipótese. Portanto, $u(n^+) = f(u(n)) = f(v(n)) = v(n^+)$, donde $u(n^+) = v(n^+)$. Portanto, $n^+ \in A$.

E assim, pelo princípio da indução matemática, segue que $A = \omega$, ou seja, $u(n) = v(n)$, para todo $n \in \omega$.

Agora, podemos definir as operações de adição e multiplicação em ω.

4 ARITMÉTICA

4.1 ADIÇÃO PARA NÚMEROS NATURAIS

Tendo em vista a definição do conjunto dos números naturais e o teorema da recursividade, pode-se definir a adição para números naturais e provar suas propriedades aritméticas.

Tome $m \in \omega$ qualquer. O que viria a ser $m+1$, $m+2$, $m+3$,...?

Intuitivamente, $m + 0$ é simplesmente m. Quanto ao $m + 1$, pensamos que ele deve ser o número natural que vem logo após o m. Em termos de conjuntos, $m + 1$ seria então o conjunto sucessor de m, ou ainda $m + 1 = m^+$. Concluímos então que o conjunto sucessor m^+ pode ser interpretado como $m + 1$.

Seguindo a mesma ideia intuitiva, $m+2$ deve ser o natural que vem logo após o $m+1$, ou seja, $m+2 = (m+1)^+ = (m^+)^+$. Portanto, podemos concluir que $m + 2$ é o sucessor do sucessor de m.

Da mesma forma, $m+3$ seria o sucessor do sucessor do sucessor de m e assim por diante.

Agora que já temos uma ideia intuitiva do que é adição nos números naturais, gostaríamos de formalizar esse conceito em teoria de conjuntos. Para definirmos adição, tomamos $m \in \omega$ fixo e vamos definir "$m + n$", para todo $n \in \omega$.

Essa definição é feita utilizando o teorema da recursividade. Para isso, tome no teorema da recursividade $X = \omega$, $f : \omega \to \omega$ a função dada por $f(n) = n^+$ para todo n e $a = m$. O teorema garante a existência de uma única função $u : \omega \to X$ (note que $X = \omega$ nesse caso) tal que:

- $u(0) = m$. Note que isto é o mesmo que dizer que $m + 0 = m$;
- $u(n^+) = f(u(n)) = (u(n))^+$, para todo $n \in \omega$.

Podemos denotar a função u por S_m e $S_m : \omega \to \omega$ é usada portanto para definir a adição. Por definição, $m + n := S_m(n)$, para todo $n \in \omega$.

Definição 4.1.1. *Sejam $m, n \in \omega$. Definimos a soma de m com n, denotada por $m + n$, como o natural*

$$m + n := S_m(n),$$

em que $S_m(n)$ é a função vista acima.

4.1.1 PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DA ADIÇÃO

As propriedades aritméticas da adição são demonstradas através do princípio de indução matemática (axioma (P_3) de Peano). Serão demonstradas as propriedades associativa, comutativa e elemento neutro da adição.

Propriedade 4.1.1. *(Associatividade da Adição) Sejam k, m e n números naturais. Então, $(k + m) + n = k + (m + n)$.*

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre n. Sejam k e m números naturais fixos.

(i) Vamos mostrar que a propriedade é válida quando $n = 0$. Note que:

$(k+m)+0 = k+m$, por definição. Também, $k+(m+0) = k+m$. Logo, $(k + m) + 0 = k + (m + 0)$ e a propriedade é válida para $n = 0$.

(ii) Suponha que a propriedade seja válida para algum n natural, ou seja, é verdade que $(k + m) + n = k + (m + n)$.

Vamos mostrar que a propriedade vale para n^+, ou seja, $(k + m) + n^+ = k + (m + n^+)$. Temos:

$(k + m) + n^+ = S_{k+m}(n^+) = (S_{k+m}(n))^+ = ((k + m) + n)^+$, por definição;

$= (k + (m + n))^+$, pela hipótese de indução;

$= k + (m + n)^+$, por definição;

$= k + (m + n^+)$, por definição.

Portanto, está provada a propriedade.

Propriedade 4.1.2. *(Elemento Neutro da Adição) O número natural* 0 *é elemento neutro para a operação de adição em* ω*, isto é, para todo* $n \in \omega$ *vale que* $n + 0 = 0 + n = n$*.*

Demonstração: Por definição, tem-se que $n + 0 = n$.

Vamos mostrar agora que $0 + n = n$. A demonstração é feita por indução sobre n.

(i) Seja $n = 0$. Então, $0 + 0 = 0$ é verdade por definição.

(ii) Suponha que o resultado é válido para algum n natural, ou seja, é verdade que $0 + n = n$. Mostremos que o resultado é válido para n^+, ou seja, $0 + n^+ = n^+$. Temos:

$0 + n^+ = (0 + n)^+$, por definição;

$= n^+$, pois, pela hipótese de indução, $0 + n = n$.

Portanto, está provada a propriedade.

Antes de demonstrar a comutatividade da adição, precisa-se demonstrar um lema.

Lema 4.1.1. *Sejam m, n números naturais. Então, $m^+ + n = (m+n)^+$.*

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre n.

(i) Seja $n = 0$. Então, $m^+ + 0 = m^+$, por definição. Mas, $m^+ = (m+0)^+$, pois $m = m+0$ também por definição. Logo, $m^+ + 0 = (m+0)^+$.

(ii) Suponha que o resultado seja válido para algum n natural, ou seja, é verdade que $m^+ + n = (m+n)^+$. Mostremos que o resultado é válido para n^+, ou seja, $m^+ + n^+ = (m + n^+)^+$. Temos:

$$\begin{aligned} m^+ + n^+ &= (m^+ + n)^+, \text{ por definição;} \\ &= ((m+n)^+)^+, \text{ pela hipótese de indução;} \\ &= (m+n^+)^+, \text{ por definição.} \end{aligned}$$

Propriedade 4.1.3. *(Comutatividade da Adição) Sejam m, n números naturais. Então, $m + n = n + m$.*

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre m. Considere n número natural fixo.

(i) Seja $m = 0$. Então, $0 + n = n = n + 0$, pela propriedade do elemento neutro.

(ii) Suponha que o resultado seja válido para algum m, ou seja, é verdade que $m + n = n + m$. Mostremos que o resultado é válido para m^+, ou seja, $m^+ + n = n + m^+$. Temos:

$$m^+ + n = (m+n)^+, \text{ pelo lema 4.1.1;}$$

$= (n + m)^+$, pela hipótese de indução;

$= n + m^+$, por definição.

Portanto, está provada a propriedade.

4.2 MULTIPLICAÇÃO PARA NÚMEROS NATURAIS

De maneira semelhante ao que foi feito para definir adição, é possível definir a multiplicação para os números naturais e provar suas propriedades aritméticas.

Tome $m \in \omega$ qualquer. O que seria intuitivamente $m \cdot 1$, $m \cdot 2$, $m \cdot 3$, ...?

Intuitivamente, pensamos que $m \cdot 1$ é o próprio m. Quanto ao $m \cdot 2$, pensamos que é o natural resultante da soma $m + m$. Ou ainda, $m \cdot 2 = m \cdot 1 + m = m + m$. Seguindo a mesma ideia intuitiva, $m \cdot 3$ deve ser o natural resultante da soma $m + m + m$, ou ainda, $m \cdot 3 = m \cdot 2 + m = m \cdot 1 + m + m = m + m + m$. Note que aqui faz sentido falarmos na operação $m+m+m$, pois já provamos anteriormente que a adição é associativa.

Com a ideia intuitiva formada acima e utilizando os conceitos estudados até agora em teoria dos conjuntos, vamos formalizar o conceito da operação de multiplicação. Para isso, tomamos $m \in \omega$ fixo e definimos "$m \cdot n$", para todo $n \in \omega$.

A definição de multiplicação também é feita utilizando o teorema da recursividade. Tome no teorema da recursividade $X = \omega$, $f : \omega \to \omega$ a função dada por $f(n) = n + m$ e $a = 0$. O teorema garante a existência de uma única função $u : \omega \to \omega$ tal que:

- $u(0) = 0$;
- $u(n^+) = f(u(n)) = u(n) + m$, para todo $n \in \omega$.

Vamos denotar a função u por P_m e $P_m : \omega \to \omega$ é a função usada para definir multiplicação.

Definição 4.2.1. *Sejam $m, n \in \omega$. Definimos a multiplicação de m com n, denotada por $m \cdot n$, como o natural*

$$m \cdot n := P_m(n),$$

em que $P_m(n)$ é a função vista acima.

Frequentemente, o ponto $\cdot$ é omitido. Portanto, entende-se que $mn = m \cdot n$, para quaisquer $m, n \in \omega$.

4.2.1 PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

As demonstrações das propriedades aritméticas da multiplicação são muito parecidas com aquelas feitas nas propriedades da adição, porém com algumas adaptações.

As propriedades da multiplicação que serão demonstradas são as propriedades distributiva, associativa, comutativa e elemento neutro da multiplicação.

Propriedade 4.2.1. *(Distributividade da Multiplicação) Sejam k, m e n números naturais. Então, $k(m + n) = km + kn$.*

Demonstração: A demonstração desta propriedade é feita por indução sobre n. Considere k e m números naturais fixos.

(i) Seja $n = 0$. Então, $k(m+0) = km$, pela definição da adição.

Por outro lado, $km + k \cdot 0 = km + 0$, pela definição da multiplicação. Segue que $km + k \cdot 0 = km$.

Portanto, $k(m + 0) = km + k \cdot 0$.

(ii) Suponha que a propriedade seja válida para algum n natural, ou seja, $k(m+n) = km + kn$. Vamos mostrar que a propriedade vale para n^+, ou seja, $k(m+n^+) = km + kn^+$. Temos:

$k(m+n^+) = k(m+n)^+$, pela definição da adição;

$= k(m+n) + k$, pela definição da multiplicação;

$= km + kn + k$, pela hipótese de indução;

$= km + kn^+$, pela definição da multiplicação em $kn + k$.

Portanto, está provada a propriedade.

Propriedade 4.2.2. *(Associatividade da Multiplicação) Sejam k, m e n números naturais. Então, $(km)n = k(mn)$.*

Demonstração: A demonstração desta propriedade é feita por indução sobre n. Considere k e m números naturais fixos.

(i) Seja $n = 0$. Então, $(km) \cdot 0 = 0$ por definição. Também, $k(m \cdot 0) = k \cdot 0 = 0$, por definição. Logo, $(km) \cdot 0 = k(m \cdot 0)$.

(ii) Suponha que a propriedade seja válida para algum n natural, ou seja, $(km)n = k(mn)$. Vamos mostrar que a propriedade vale para n^+, ou seja, $(km)n^+ = k(mn^+)$. Temos:

$(km)n^+ = (km)n + km$, pela definição da multiplicação;

$= k(mn) + km$, pela hipótese de indução;

$= k(mn + m)$, pela propriedade distributiva;

$= k(mn^+)$, pela definição da multiplicação.

Portanto, está provada a propriedade.

Antes de demonstrar a comutatividade da multiplicação, precisa-se demonstrar dois lemas auxiliares.

Lema 4.2.1. *Seja n um número natural. Então,* $0 \cdot n = 0$.

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre n.

(i) Seja $n = 0$. É verdade que $0 \cdot 0 = 0$, por definição.

(ii) Suponha que o resultado seja válido para algum n natural, ou seja, é verdade que $0 \cdot n = 0$. Mostremos que o resultado é válido para n^+, ou seja, $0 \cdot n^+ = 0$. Temos:

$0 \cdot n^+ = 0 \cdot n + 0$, pela definição da multiplicação;

$= 0 + 0$, pela hipótese de indução;

$= 0$, pela definição da adição.

Portanto, está provado o lema.

Lema 4.2.2. *Sejam m, n números naturais. Então,* $m^+ \cdot n = mn + n$.

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre n.

(i) Seja $n = 0$. Então, $m^+ \cdot 0 = 0$, por definição. Também, $m \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$, por definição.

Logo, $m^+ \cdot 0 = m \cdot 0 + 0$.

(ii) Suponha que o resultado seja válido para algum n natural, ou seja, é verdade que $m^+ \cdot n = mn + n$. Mostremos que o resultado é válido para n^+, ou seja, $m^+ \cdot n^+ = mn^+ + n^+$. Temos:

$m^+ \cdot n^+ = m^+ \cdot n + m^+$, por definição;

$= mn + n + m^+$, pela hipótese de indução;

$= mn + (n + m)^+$, pela definição da adição;

$= mn + (m + n)^+$, pela comutatividade da adição;

$= mn + m + n^+$, pela definição da adição;

$= mn^+ + n^+$, pela definição da multiplicação.

Portanto, está provado o lema.

Propriedade 4.2.3. *(Comutatividade da Multiplicação) Sejam m, n números naturais. Então, $mn = nm$.*

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre m. Considere n número natural fixo.

(i) Seja $m = 0$. Então, $0 \cdot n = 0$, pelo lema 4.2.1. Também, $n \cdot 0 = 0$, por definição.

Logo, $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$.

(ii) Suponha que o resultado seja válido para algum m natural, ou seja, é verdade que $mn = nm$. Mostremos que o resultado é válido para m^+, ou seja, $m^+ \cdot n = n \cdot m^+$. Temos:

$m^+ \cdot n = mn + n$, pelo lema 4.2.2;

$= nm + n$, pela hipótese de indução;

$= n \cdot m^+$, por definição.

Portanto, está provada a propriedade.

Propriedade 4.2.4. *(Elemento Neutro da Multiplicação) O número natural 1 é elemento neutro para a operação de multiplicação em ω,* *isto é, para todo* $n \in \omega$ *vale que* $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.

Demonstração: Note que $1 \cdot n = 0^+ \cdot n$ por definição. Mas $0^+ \cdot n = 0 \cdot n + n$, pelo resutado 4.2.2. Como $0 \cdot n = 0$ pelo resultado 4.2.1, segue que $0^+ \cdot n = 0 + n = n$. Logo, $1 \cdot n = n$.

Também, $n \cdot 1 = n \cdot 0^+$, por definição. Mas $n \cdot 0^+ = n \cdot 0 + n$, por definição. Como $n \cdot 0 = 0$ por definição, segue que $n \cdot 0^+ = 0 + n = n$. Logo, $n \cdot 1 = n$.

Portanto, $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$ e a propriedade está provada.

Conclusão

Como vimos, a teoria ingênua dos conjuntos mostra-se altamente ligada à generalização e à abstração, itens fundamentais para o desenvolvimento da matemática pura. Vemos que não apenas sua linguagem, mas também seus conceitos fundamentais encontram-se essencialmente ligados a praticamente todos os ramos da matemática.

Acreditamos que a construção dos números naturais, do ponto de vista da teoria ingênua dos conjuntos abordada neste trabalho, é compreensível a um aluno em início de graduação. Contudo, essa construção depende da teoria axiomática dos conjuntos, que é uma abordagem a parte. Isto dificulta um pouco, mas não impede, a exposição completa da construção formal. Entender ao menos as ideias principais da maneira exposta neste trabalho, é de fundamental importância na estruturação do conhecimento matemático de um aluno de graduação. Acreditamos que conhecer a construção, além da axiomática de Peano, torna mais consistente o conhecimento do conjunto dos números naturais e suas propriedades aritméticas e, por consequência, confere mais segurança aos estudos posteriores.

Como projeto futuro e continuação deste trabalho, é possível um maior aprofundamento nos axiomas da teoria dos conjuntos desenvolvendo novos conceitos como por exemplo os conceitos de números ordinais e cardinais.

Referências

DOXIADIS, Apostolos; PAPADIMITRIOU, Christos H.; DONNA, Annie di. **Logicomix:** uma jornada épica em busca da verdade. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

HALMOS, Paul R. **Teoria Ingênua dos Conjuntos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.