UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Demonstrações Geométricas no Ensino Fundamental: Uma Proposta Didática para as Séries Finais

Fabrícia Omena Rocha

Maceió, maio de 2015

Instituto de Matemática

PROFMAT

FABRÍCIA OMENA ROCHA

DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA AS SÉRIES FINAIS.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amauri da Silva Barros
Coorientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

Maceió
2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

R672d Rocha, Fabrícia Omena.
Demonstrações geométricas no ensino fundamental: uma proposta didática para séries finais / Fabrícia Omena Rocha. – Maceió, 2015.
75 f. ; il.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Coorientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

Bibliografia: f. 67-68.
Apêndices: f. 69-75.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Lógica matemática – Ensino e aprendizagem. 3. Geometria - Demonstrações. I. Título.

CDU: 514

FABRÍCIA OMENA ROCHA

Demonstrações Geométricas no Ensino Fundamental:
Uma Proposta Didática para as Séries Finais / Dissertação de Mestrado

Dissertação de mestrado Profissional, submetida em 15 de maio de 2015 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Gregório Manoel da Silva Neto
____
Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto (Presidente) – UFAL

Luis Guillermo Martinez M.
____
Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza – UFAL

Vicente Francisco de Souza Neto
____
Prof. Dr. Vicente Francisco de Souza Neto - UNICAP

A minha família por acreditar em mim, e sempre estar ao meu lado nas minhas decisões.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por cada conquista alcançada e por me fortalecer diante das adversidades;
Ao meu esposo Edvaldo e minha filha Maria Eduarda pelo apoio, carinho e paciência a mim sempre prestados;
A minha mãe, por promover minha educação e ser um exemplo em minha vida;
A minha irmã, pela colaboração e apoio sempre prestado;
A minha família pela colaboração constante a cada passo da minha caminhada;
Aos professores do PROFMAT, por todo o carinho e dedicação que tiveram conosco;
Aos meus amigos, turma PROFMAT 2013, por toda a solidariedade e companheirismo;
Ao grupo de Estudos, que mesmo diante dos maiores desafios fez da amizade e ajuda mútua o alicerce das nossas realizações;
Aos meus anjos que sempre torceram por mim e hoje estão na morada eterna, obrigada por acreditar em mim;
Aos meus companheiros de trabalho, pela paciência e pela colaboração na execução desse projeto;
Aos meus alunos, cada desafio vencido é um aprendizado construído.

Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... A Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria Matemática.

PÓLYA, George

RESUMO

Esse trabalho propõe uma sequência didática utilizando-se da Lógica Matemática como método de ensino. O ensino da matemática no Ensino Fundamental apresenta, dentre outras falhas, a ausência de metodologias que estabeleçam ligações entre os conteúdos estudados. Os alunos são “treinados” a responder mecanicamente as questões utilizando fórmulas prontas. O estudo da Lógica Matemática para o Ensino Fundamental privilegia o raciocínio lógico dos alunos, bem como constrói esse elo tão necessário no processo de ensino aprendizagem, além de favorece o pleno desenvolvimento das habilidades matemática e de compreensão de mundo. O aluno tem a oportunidade de estabelecer ligações entre os conceitos estudados e justificar os cálculos realizados, fortalecendo o aprendizado e auxiliando na memorização dos conceitos Nesse contexto, a proposta didática traz a lógica associada aos conceitos de geometria, o aluno torna-se responsável pelo seu aprendizado. Refazendo os passos de Euclides, Pitágoras e Tales, trazendo a problemática e reconstruindo as demonstrações realizadas por eles. A escolha dos conceitos geométricos se deu devido a inutilização, muitas vezes, desses conteúdos decorrente de outras problemáticas. O ensino da geometria se resume a contextualização de atividades de aritmética ou de álgebra. Reconstruir conceitos a partir de sua história ou na manipulação de objetos estimula o raciocínio e promove o desenvolvimento cognitivo, tão almejado por professores das diversas modalidades da educação.

Palavras-chave: Atividades Matemáticas. Ensino-aprendizagem.*Lógica matemática.* Demonstrações. Geometria.

ABSTRACT

This paper proposes a teaching sequence using the Mathematical Logic as a teaching method. The teaching of mathematics in primary education has, among other flaws, the lack of methodologies to establish links between the contents studied. Students are "trained" to mechanically answer questions using standard formulas. The study of mathematical logic for Elementary School emphasizes logical thinking of students as well as build this bond as required in the process of teaching and learning, and encourages the full development of mathematical skills and understanding of the world. The student has the opportunity to make connections between the concepts studied and justify the calculations made, strengthening learning and helping to memorize the concepts that context, the didactic proposal brings the logic associated with geometry concepts, the student becomes responsible for their learning. Retracing the steps of Euclid, Pythagoras and Thales, bringing the problems and rebuilding the statements made by them. The choice of geometric concepts was due to destruction often such content related to other issues. The teaching of geometry comes down to context of arithmetic or algebra activities. Rebuild concepts from its history or handling of objects stimulates thinking and promotes cognitive development, as desired by teachers of various forms of education.

Keywords: Mathematical activities. Teaching and learning . Mathematical logic. Statements. Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A problemática atual, propulsora das mudanças educacionais e estimuladora de pesquisas em educação, corresponde à busca pelo desenvolvimento da capacidade de aprender a aprender dos alunos nos diferentes níveis da Educação Básica. Repassar conteúdo nem sempre é finalizado da maneira que se deve, o professor ministra sua aula, mas o aluno não aprende. Apenas reproduz fórmulas e cálculos, sem saber para que serve ou em que será útil a ele.

O ensino da matemática nas séries finais do Ensino Fundamental estabelece uma relação entre os conteúdos ministrados nas séries anteriores e os que serão ministrados no Ensino Médio. O uso de notações matemáticas durante as aulas e atividades deve ser constante e processual. Deve-se apresentar ao aluno, gradativamente, as relações lógicas e as notações usuais, bem como, iniciar o hábito de escrever matemática durante as resoluções dos problemas propostos.

Durante sua formação, o aluno precisa obter habilidades e estratégias que lhe proporcionem a apreensão, por si mesmos, de novos conhecimentos prontos e acabados inerentes à cultura, ciência e sociedade no qual está inserido. Visando prepará-lo para ser um ente atuante nesta sociedade, é necessário contextualizar o conhecimento, atualizar questões que perduram durante gerações e que torna imprescindível descobri-las, compreendê-las e solucioná-las.

A pesquisa realizada por GRAVINA (1996) constatou que estudantes têm chegado à universidade sem terem atingido os níveis mentais superiores de dedução e rigor, apresentando até mesmo pouca compreensão dos objetos geométricos, confundindo propriedades do desenho com propriedades do objeto. E quanto ao conhecimento de axiomas, definições, propriedades e teoremas estes são conceitos confusos, apresentados sem hierarquização ou ordem pelos discentes.

A necessidade de inserir o rigor da escrita matemática no ensino fundamental fundamenta-se nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacional) e abrange todos os ciclos. A escolha em trabalhar com Geometria se deu devido à escassez desse conteúdo nos planejamentos dos professores do Ensino Fundamental desde os primeiros ciclos. É comum, os professores “deixarem de lado” ou “só citarem” os conceitos geométricos e enfatizar a aritmética.

Segundo os PCNs, especificamente para o 3º ciclo – 6º e 7ºanos do ensino fundamental – é valorizado o desenvolvimento do pensamento geométrico, sendo este possibilitado com a “exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução”.

Já para o 4º ciclo – 8º e 9ªanos do ensino fundamental – é necessário destacar alguns objetivos específicos, nos PCN de matemática:

> Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: – interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano; – produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança; – ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

Baseando-se nesta problemática, a proposta didática contida nessa dissertação tem como objetivo viabilizar a inserção da lógica matemática no ensino fundamental, respeitando as especificidades e limitações dessa fase do processo do ensino da matemática. Ao mesmo tempo ofertar um ensino da geometria mais abrangente, preenchendo as lacunas deixadas nas séries anteriores.

No segundo capítulo os teóricos viabilizam a metodologia de ensino e propõe sua utilização nos diversos níveis da educação básica, trabalhar relações de lógica e demonstrações geométricas é incentivar o raciocínio dedutivo, considerando a experiência e o conhecimento proveniente da vida do aluno. O que é enfatizado por estudiosos desta problemática, autores renomados discutem e afirmam a legitimidade da proposta metodológica.

No terceiro capítulo, são abordados os conhecimentos em geometria necessários para a proposta didática, fazendo uso de linguagem clara e simples, visando discentes do ensino fundamental e sua ampla compreensão, respeitando suas limitações e sua imaturidade.

O quarto capítulo contempla a proposta didática e todos os conceitos e objetivos inerentes a ela. Os conceitos de lógica, as notações matemáticas, os métodos de avaliação, a história da matemática, imprescindível na aplicabilidade da proposta, todos são expostos e comentados de acordo com a série indicada.

As aplicações da proposta compõem o quinto capítulo. Lá repousam as atividades aplicadas, as percepções dos alunos e as considerações da professora. Constitui o registro de quase cinco meses de aulas,desde a atividade inicial que contemplava as notações matemáticas e os conceitos de lógica até as demonstrações dos Teoremas de Tales e Pitágoras. Todas as atividades aplicadas constam em apêndice.

A dissertação tem como alicerce o ensino da matemática e se estrutura baseando-se na compreensão dos conceitos através da construção do conhecimento permeando a lógica e a argumentação nas resoluções de problemas. Desmistificar a matemática é o primeiro passo para torná-la acessível a todos. Mostrar que a disciplina não é feita apenas de números, mas de raciocínio. Pensar, ponderar, arguir, expor e formalizar são etapas importantes do processo da construção do saber matemático.

Quando acontece o questionamento e a solução é construída, o resultado possibilita o desenvolvimento de táticas, mostra a pluralidade de caminhos para a solução de um único problema. Reflete em sua vivência e evidencia seu desenvolvimento cognitivo. O aluno que é estimulado, ele é audaz, questionador, possui raciocínio lógico-matemático aguçado, aprende a aprender.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Ao longo do tempo, a matemática foi construída através da resolução de problemas reais. Para todo problema real era atribuído um modelo matemático que se legitimava após ser demonstrado através de outros conceitos matemáticos. A investigação matemática como proposta didática para as séries finais do Ensino Fundamental propõe transpor a apresentação de fórmulas prontas e teoremas e trabalhar o desenvolvimento de ideias e conjecturas matemáticas. Trata-se de construir o conhecimento, ressaltando a linguagem e o formalismo matemático.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998) para o ensino fundamental orientam o estudo de teoremas, enfatizando a importância da demonstração em matemática e privilegiando as conjecturas e suas relações vinculando-as com o discurso teórico, assim como, na representação plana das figuras espaciais e as principais funções do desenho.

A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos PCNs para o ensino fundamental e para o ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica. Com a inserção dessa prática nas séries finais do Ensino Fundamental (3º e 4º ciclos), faz-se necessário que seja estudado, também, lógica e as relações existentes entre os conteúdos, bem como os conceitos de geometria imprescindíveis para a elaboração da proposta didática.

Segundo Boero (1996), o processo mental subjacente à produção de afirmações e provas por alunos de 9° ano é válido e possível, pois neste nível de escolaridade, eles podem produzir teoremas (conjecturas e provas) se eles forem colocados sob condições de construir um processo com as seguintes características:

• durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas;

• durante o estágio seguinte da prova, o estudante organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas (“argumentos”) produzidas durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica.

Além da ênfase na compreensão do raciocínio lógico, faz-se necessário a busca por uma melhor compreensão do que vem a ser uma prova matemática.

Geralmente, a demonstração é considerada como um procedimento de validação, caracterizando a matemática e a distinguindo-a das ciências experimentais.

A aprendizagem da demonstração, para Durval (1995), consiste primeiramente na conscientização de que se trata de discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural. Durante o processo a consciência do que é uma demonstração somente ocorre numa articulação de dois registros, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural. Essa tomada de consciência surge da interação entre a representação não discursiva produzida e a do discurso expresso.

Segundo Balacheff (1999), existe uma relação complexa e construtiva entre argumentação e demonstração. As dificuldades para ensinar e aprender a demonstração em Matemática decorrem do contrato didático entre as posições do aluno e professor.

Balacheff(1982) caracteriza a distinção entre explicação, prova e demonstração. Assim, explicação é um discurso que oferece uma ou várias razões para tornar compreensível uma afirmação. Prova corresponde a uma explicação aceita por uma comunidade num dado momento. E, demonstração é uma prova aceita pela comunidade matemática. Hoje, na comunidade dos matemáticos, prova é sinônimo de demonstração.

Para Balacheff (1987), as provas são divididas em duas categorias: pragmáticas e intelectuais. As primeiras apóiam-se sobre conhecimentos práticos, utilizando-se recursos de ação, por exemplo, desenhos, envolvendo habilidades de observação de figuras, enquanto que as provas intelectuais, não envolvem ações, e sim formulações e relações entre as propriedades em questão. A passagem das provas pragmáticas para as intelectuais é marcada por uma evolução dos meios da linguagem.

A aprendizagem da prova, segundo Balacheff, ocorre através da passagem pelas quatro etapas de desenvolvimento abaixo, sendo classificadas as três primeiras, como provas pragmáticas e a última como prova intelectual (1987, p.163-166):

1. *Empirismo ingênuo*: quando o aluno conclui que uma afirmação é verdadeira observando um pequeno número de casos.

2. *Experiência crucial*: quando o aluno testa um exemplo com certas características para verificar sua validade para um caso específico e se for confirmado, conclui-se seu caráter geral.

3. *Exemplo genérico*: quando a validação de uma afirmação é feita pela realização de operações ou transformações de um objeto, sendo este representativo de uma classe, com propriedades características e uma estrutura significativa da mesma, tornando-se visível a veracidade do problema em questão.

4. *Experiência mental*: quando a validação é feita com uma linguagem e uma construção cognitiva mais complexa, não fazendo uso de casos particulares.

A abordagem matemática através de provas e demonstrações acontece de diversas maneiras e sob diversas óticas. No entanto, a prova matemática está relacionada a um processo de validação de um fato matemático e o registro de uma demonstração deve ser apoiado em fatos matemáticos comprovados. O conjunto organizado desses fatos deve comprovar deforma indiscutível algum tipo de proposição matemática, seu encadeamento lógico deve convencer qualquer leitor da veracidade da proposição, e só assim, poderá ser considerada demonstrada.

De acordo com Villiers (2002), apesar de acontecer no ensino da matemática a abordagem das demonstrações como um recurso para eliminar dúvidas, existem outras funções para esse recurso em matemática:

I. Verificação: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;

II. Explicação: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;

III. Descoberta: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;

IV. Comunicação: negociação do significado de objetos matemáticos;

V. Desafio intelectual: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;

VI. Sistematização: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

A aplicação desse processo no ensino da geometria proporciona um aprendizado significativo, enriquecendo-o por mostrar ao aluno as relações existentes entre os conceitos geométricos e como os conhecimentos anteriores ajudam a construir novos conhecimentos.

2.1 A Teoria de Parzysz

Bernard Parzysz[1] sugere quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico, baseando-se nas idéias de Van Hiele (1984), sintetizando-as em níveis. Os níveis 0 e 1 correspondem a uma geometria denominada “geometria concreta”, cujos objetos são materializados. Os níveis 3 e 4, correspondem ao que ele chama de “geometria teórica”, onde os objetos de estudo são conceituais. No nível 2, Parzysz classifica-o como o nível-chave entre os dois tipos de geometria, concreta e teórica, pois é possível encontrar neste nível elementos destas duas geometrias descritas, apresentando um conflito entre o sabido e o percebido.

O modelo de Parzysz fundamenta-se, por um lado na natureza dos objetos em jogo (físico x teórico) e, por outro, nos modos de validação (perceptivo x lógico-dedutivo). Dividindo em três grupos: Geometria Não-axiomática, a qual se apóia em situações concretas (G0), ou seja, parte da realidade; e a Geometria Axiomática na qual ocorre a concepção de um esquema da realidade (G2) em que as definições fazem sentido e os resultados passam a ser validados com técnicas dedutivas. que são idealizadas para constituir o “espaço-gráfico” (G1).

Destacaremos abaixo, as quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico segundo Parzysz, com o objetivo de complementar e organizar as informações discutidas até aqui.

Nível G0 (Geometria Concreta): nesse nível parte-se da realidade, do concreto. As figuras são identificadas unicamente pelo seu aspecto geral. É uma geometria não-axiomática.

Nível G1 (Geometria Espaço-Gráfica): é a construção do “espaço-gráfico” cuja realização se dá em função das situações concretas, por exemplo, desenhos produzidos numa folha ou numa tela de um computador. Nesse nível o aluno consegue discernir as propriedades das figuras, mas ainda sem poder explicá-las. As técnicas usadas para a resolução de exercícios podem ser relacionadas à utilização de instrumentos como régua, compasso, transferidor e esquadro. É uma geometria não-axiomática.

[1] Pesquisador francês e professor emérito da Paris Université Diderot. Sua pesquisa está direcionada ao ensino da geometria e aleatória.

Nível G2 (Geometria Proto-axiomática): nesse nível os conceitos são objetos teóricos e as demonstrações dos teoremas são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo; os objetos e o caminho da validação são “localmente” os mesmos que na geometria axiomática, mas não há necessidade de explicitar um sistema de axiomas. As técnicas utilizadas referem-se a objetos geométricos cuja existência é assegurada pelas definições, axiomas e propriedades consideradas.

Nível G3 (Geometria Axiomática): nesse nível os axiomas são explicitados completamente. O aluno é capaz de se situar nos diferentes sistemas axiomáticos, bem como de compará-los.

Parzysz (2000) considera que nessa articulação entre os níveis G1 e G2 a gestão do salto conceitual entre elas é um elemento essencial na problemática do ensino obrigatório da Geometria, devendo ser fixados os conceitos em jogo e sua articulação.

2.2 O *Ensino da Geometria no Ensino Fundamental*

O ensino da matemática no Ensino Fundamental, de acordo com os PCNs (1998), se divide em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. O ensino da geometria abrange três dos quatros blocos, servindo de veículo para o desenvolvimento de habilidades e competências, dentre elas a percepção espacial e a resolução de problemas, oferecendo aos alunos “as oportunidades de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair” (SHERARD III, 1981). Oportunidades que otimizam o desenvolvimento do pensamento crítico e autônomo dos alunos (PAVANELLO, 1993). Ainda sobre essa potencialidade da Geometria, Freudenthal (1973), diz que:

> A Geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender como matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possam de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e descoberta. (p.407)

A Geometria está relacionada, também, à formação humana. Sua constante presença na arte e na cultura proporciona, ao homem, uma compreensão maior das construções humanas e da natureza. Sendo assim, podemos destacar dois objetivos básicos do estudo da Geometria segundo Fonseca e David (s.d.): O desenvolvimento da capacidade de medir e o desenvolvimento da capacidade de pesquisar regularidades. O primeiro é abordado com ênfase no Ensino Fundamental, o segundo, pouco utilizado na Educação Básica, constitui de ferramenta fundamental para a transformação do aluno passivo em ser atuante que constrói seu próprio aprendizado.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - (BRASIL, 1997, p. 55):

> "Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive".

Por outro lado, a Geometria corresponde ao conteúdo menos explorado no ensino fundamental, ocasionando em sua inserção nos demais ramos da Matemática como exercícios aplicados de aritmética e álgebra. Sendo trabalhado com ênfase apenas no 9º ano do Ensino Fundamental, quando são estudados os principais teoremas e suas aplicações tais como,Teoremas de Tales e Semelhança de Triângulos, e Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo.

No Brasil, alguns argumentos podem ser usados para tentar justificar essas dificuldades, pois pesquisas realizadas por vários autores, entre eles: Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) constataram um abandono do ensino da geometria nas aulas de matemática. Para Nasser (1994), **....“***Nas últimas décadas, uma necessidade de modificações no ensino da geometria cresceu ao redor do mundo, devido às dificuldades encontradas e ao fraco desempenho mostrado por alunos secundários em geometria”.*

Usiskin (1994, p.37) enfatiza que “a geometria é importante demais no mundo real e na Matemática para ser apenas um território de metade dos alunos da escola secundária”. Eves (1993, p.28) também observa que “as imagens geométricas sugeridas frequentemente levam a resultados e estudos adicionais, dotando-nos de um instrumento poderoso de raciocínio indutivo e criativo”. Mesmo em face dessas constatações, o ensino da Geometria na Educação Básica continua escasso e como consequência o baixo desempenho dos alunos do Ensino Básico e do Ensino Médio, em Matemática, sobretudo, quando o problema envolve o ensino da Geometria. Esta negligência vem prejudicando o ensino de geometria e interferindo de forma negativa na dialética entre o abstrato e o concreto, como sugere LUZ (2005, p.24).

Diante da problemática quanto ao ensino da Geometria, aliando-se a ausência de conceitos lógicos na formação dos alunos da Educação Básica, propõe-se, entre outros recursos, utilizar-se da formalização matemática e conceitos lógicos, além da utilização da história da matemática para apresentar uma sequência didática para o ensino da geometria nas séries finais (último ciclo) do Ensino Fundamental.

3 BASE CONCEITUAL DE MATEMÁTICA: GEOMETRIA

Neste capítulo abordaremos os conceitos de geometria utilizados na sequência didática. Utilizando-se da história da matemática e de demonstrações através da construção de figuras, traçaremos as diretrizes conceituais da sequência iniciando com os conceitos euclidianos de posição relativa entre duas retas; ângulos e triângulos; e, encerrando com os Teoremas de Tales e de Pitágoras.

As definições, teoremas, argumentações e demonstrações contidas neste capítulo foram elaboradas para atender as necessidades de alunos das séries finais e de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental.

3.1 Posição relativa entre duas retas

Em seu registro sobre Geometria, Euclides[2] denominou de **elementos primitivos** ou **noções primitivas** a ideia de elementos geométricos dos quais não existe definição, são eles: ponto, reta e plano. Ficando assim denominados e conceituados:

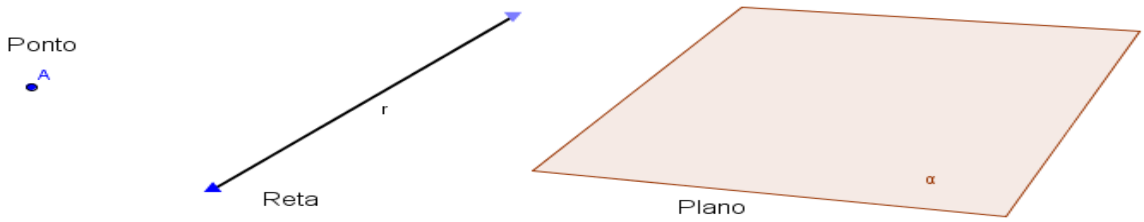
- Os **pontos** não têm dimensões. Eles estão presentes em todas as figuras geométricas. Para nomeá-los, usamos letras maiúsculas do nosso alfabeto (Vide figura 1).
- As **retas** não têm espessura e são ilimitadas nos dois sentidos; por isso, para representar uma reta, desenhamos apenas parte dela. Em uma reta, há infinitos pontos. Para nomeá-la, podemos usar letras minúsculas do nosso alfabeto ou as letras maiúsculas de dois pontos pertencentes a ela (Vide figura 1).
- Os **planos** não têm espessura e são ilimitados em todas as direções, por isso, para representá-los, também desenhamos apenas parte deles. Um plano tem infinitos pontos e infinitas retas. Para nomeá-lo, usamos letras gregas minúsculas, como α (alfa) e β (beta) (Vide figura 1).

Atualmente, existem outros conceitos para os elementos primitivos que são encontrados em outros segmentos da geometria (geometria projetiva, por exemplo),

[2] Vide pág.44

mas são incompatíveis com o nível da educação básica. Portanto, serão utilizados os conceitos segundo Euclides.

Figura 1 - Representação dos elementos primitivos: ponto, reta e plano

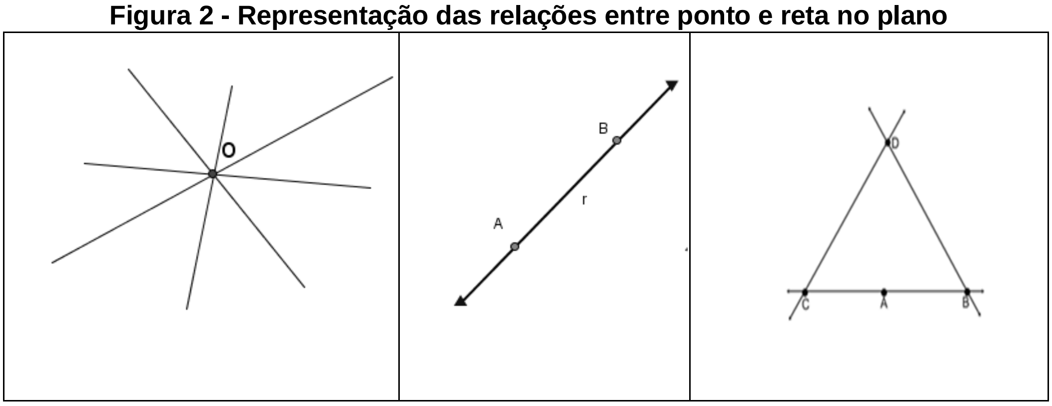


Fonte: autora, 2015.

Após a conceituação dos elementos primitivos, podemos afirmar que o estudo será realizado no plano e, algumas relações entre ponto e reta e entre retas podem ser apresentadas. Entre pontos podemos citar três relações entre pontos e retas:

1. Considere um ponto pertencente a um plano. Por esse ponto, podemos traçar tantas retas quantas quisermos, ou seja, por esse ponto passam infinitas retas.
2. Considere agora dois pontos distintos, pertencentes a um mesmo plano. Por esses pontos, podemos traçar uma única reta[3].
3. Considere três ou mais pontos distintos. Eles podem pertencer a uma mesma reta, e neste caso dizemos que eles estão alinhados (que estão em uma mesma linha, em fila), ou, caso não pertençam a mesma reta, estes três pontos determinam o próprio plano que os contém.

Figura 2 - Representação das relações entre ponto e reta no plano



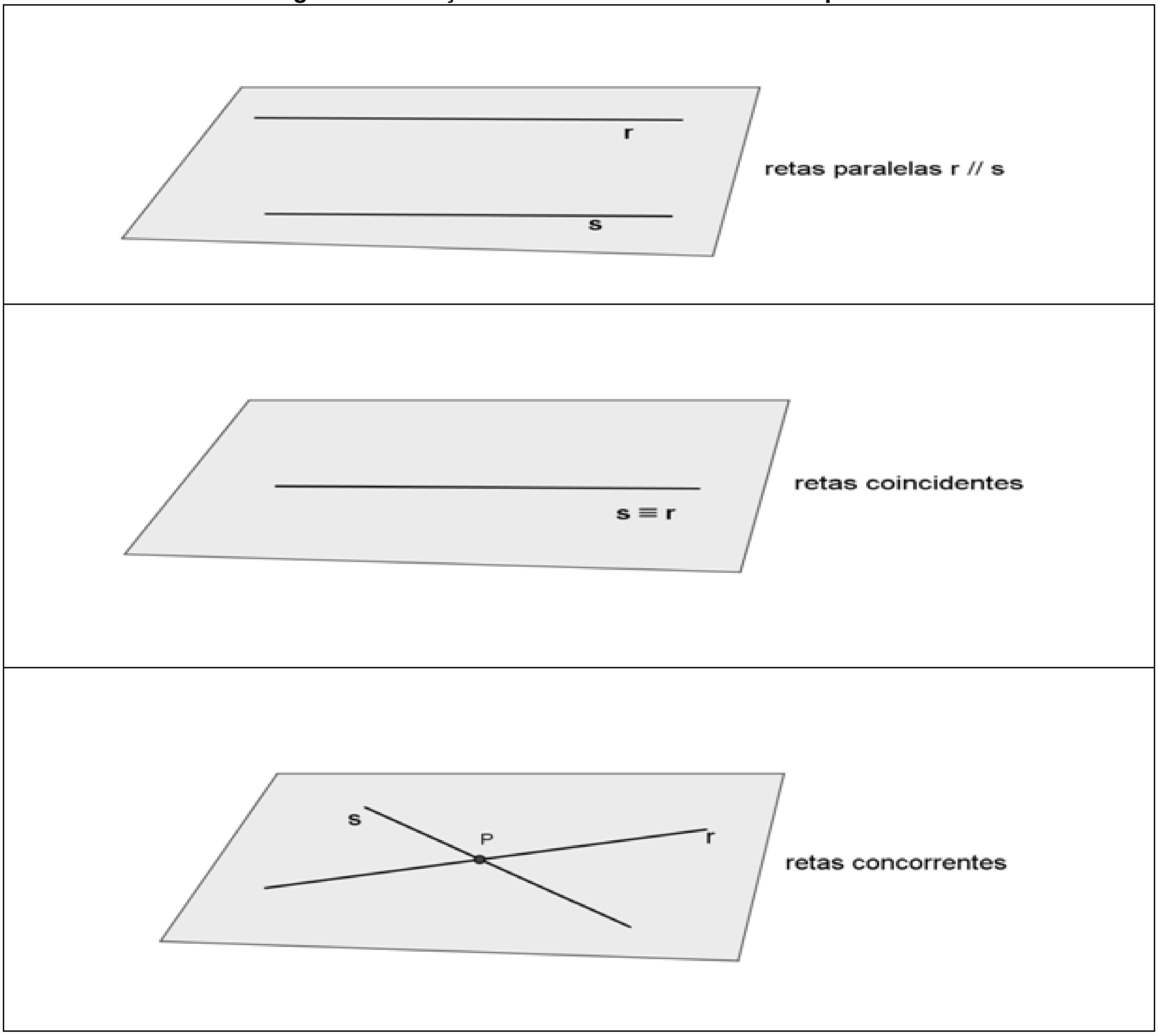
Fonte: autora, 2015.

[3] Verificação do axioma foi construída pelos alunos: suponha, por absurdo, que por dois pontos passem duas retas. Concluíram que só seria possível se as duas retas fossem coincidentes.

Retas contidas no mesmo plano são denominadas retas coplanares. Em relação ao plano, as retas podem estar em diferentes posições. Essas posições dividem as retas em três categorias: retas paralelas, retas concorrentes e retas coincidentes.

As *retas paralelas* não se cruzam, ou seja, não tem pontos em comum. Quando as retas se cruzam, em um único ponto, elas são denominadas *retas concorrentes*. Um caso particular de retas concorrentes são as denominadas retas perpendiculares, as quais formam ângulos retos entre si (quatro, na realidade). E, quando as retas possuem todos os pontos em comum, são chamadas de *retas coincidentes*.

Figura 3 - Posição relativa entre duas retas no plano.



Fonte: autora, 2015.

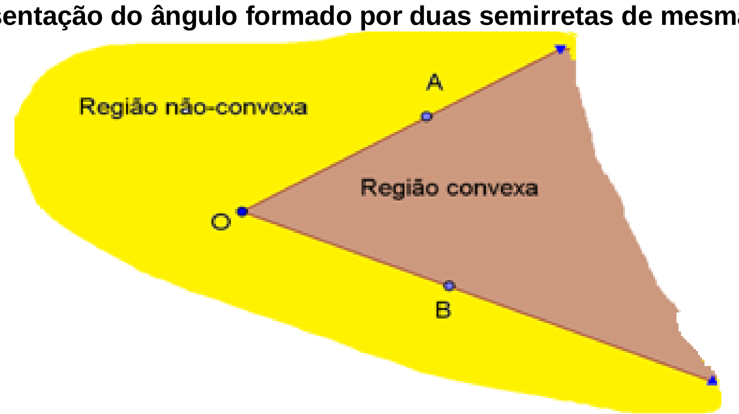
Um conjunto finito de retas paralelas (com duas ou mais retas) é denominado feixe de retas paralelas. Para conceituar ângulos usaremos a definição de retas concorrentes.

3.2 Ângulos e Triângulos

Considerando semirreta como a secção da reta determinada por um ponto pertencente a reta, denominamos esse ponto de origem da semirreta. De uma maneira simples, podemos definir ângulos como a região do plano determinada por duas semirretas de mesma origem.

Observando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, na figura 4, percebe-se que elas determinam duas regiões no plano que as contém, cada região forma um ângulo. Para evitar confusões, durante a exibição do problema devemos especificar a região do ângulo que estamos considerando. Indicamos esse ângulo por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$ ou, simplesmente $\hat{O}$.

Figura 4 - Representação do ângulo formado por duas semirretas de mesma origem.



Fonte: autora, 2015.

As unidades de medida de um ângulo mais usadas são o grau (representado pelo símbolo º) e o radiano (rad). No ensino fundamental, é conveniente usar como medida de um ângulo o grau. O instrumento utilizado para medir um ângulo é o transferidor (vide figura 5).

As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do triângulo. Chamamos de **ângulo raso** o ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta. Quando duas retas se intersectam formando quatro ângulos iguais, cada um desses ângulos é chamado de **ângulo**

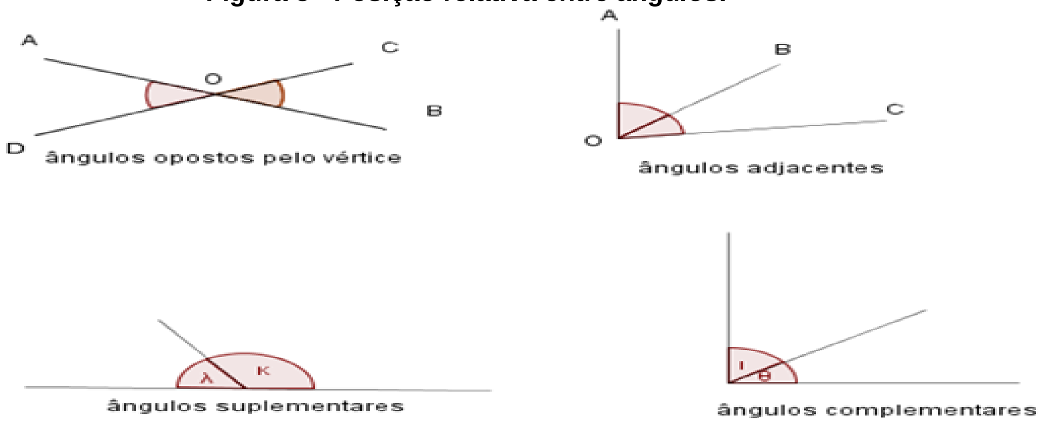
reto e, tais retas são chamadas de perpendiculares. E o **ângulo nulo** é constituído de duas semirretas coincidentes.

Assim, na unidade de medida graus, um ângulo reto mede 90º; o ângulo cuja medida é inferior a medida de um ângulo reto e superior a 0º (ângulo nulo) é chamado **ângulo agudo**; aquele cuja medida é maior que a de um ângulo reto e menor que a de um ângulo raso é denominado de **ângulo obtuso**. O ângulo raso mede 180º, enquanto o ângulo nulo mede 0º.

Quanto às posições relativas entre dois ângulos, podemos explicitar 5 (cinco) posições, sendo elas:

1. Dois ângulos que têm vértice e um dos lados em comum são denominados **ângulos consecutivos**;
2. Dois ângulos são chamados **ângulos adjacentes** quando são consecutivos e não possui pontos internos em comum;
3. Quando a soma das medidas de dois ângulos é igual a um ângulo reto, os ângulos são denominados **ângulos complementares**;
4. Quando a soma das medidas de dois ângulos é igual a um ângulo raso, os ângulos são denominados **ângulos suplementares**;
5. Dois ângulos com vértice comum, cujos lados de um deles são as semirretas opostas aos lados do outro, são denominados **ângulos opostos pelo vértice**. Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes[4].

Figura 5 - Posição relativa entre ângulos.

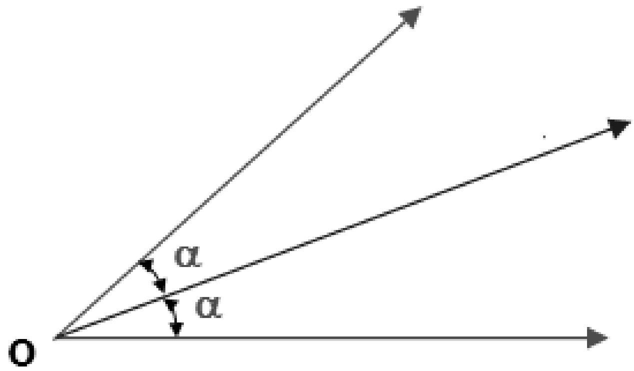


Fonte: autora, 2015.

[4] Demonstração da congruência entre ângulos opostos pelo vértice realizado pelos alunos através de ângulos suplementares.

A bissetriz de um ângulo é a semirreta que tem origem no vértice do ângulo e o divide em dois ângulos congruentes (que possuem a mesma medida). As bissetrizes dos ângulos retos formados por duas retas perpendiculares são perpendiculares entre si.

Figura 6 – Bissetriz de um ângulo.

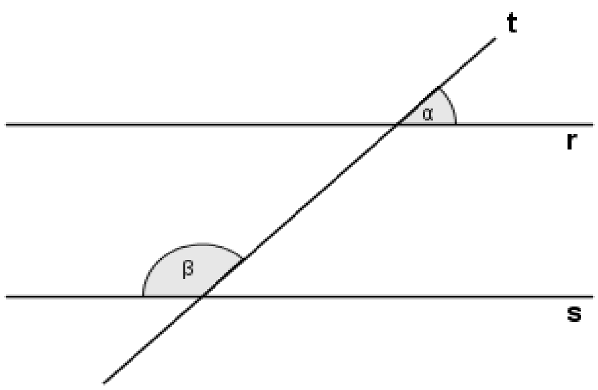


Fonte: autora, 2015.

3.2.1 Os ângulos formados por uma reta transversal

Podemos inserir a ideia de reta transversal e a relação existente entre os ângulos formados pela intersecção dessas retas com retas paralelas. Sejam **r** e **s** duas retas distintas contidas no mesmo plano e **t** uma reta concorrente com **r** e com **s**, dizemos que **t** é uma reta transversal.

Figura 7 - Reta transversal.

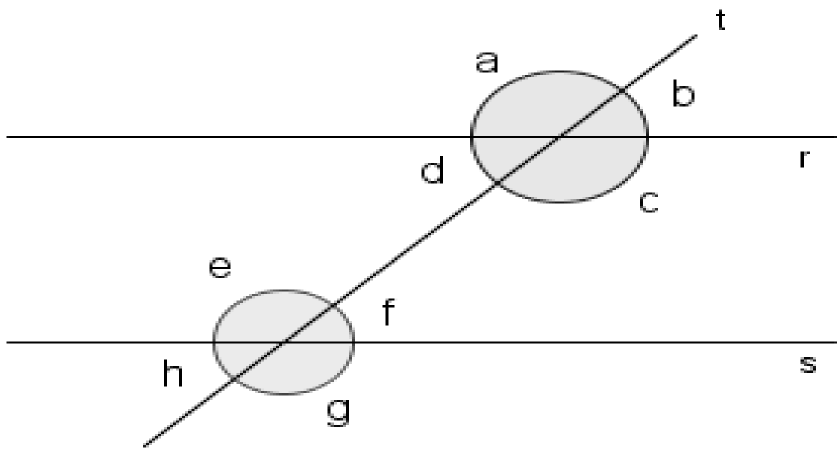


Fonte: autora, 2015.

Usaremos as informações sobre ângulos opostos para estudar as relações entre oito ângulos formados por uma transversal que corta duas retas quaisquer.

Observe as retas **s**, **r** e **t** na figura 8, em que **t** é transversal às retas **s** e **r**.

Figura 8 - Ângulos na reta transversal.



Fonte: autora, 2015.

Como as retas **r** e **t** são concorrentes, assim como as retas **s** e **t**, temos:

- $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são opostos pelo vértice; portanto $\hat{a} \equiv \hat{c}$;
- $\hat{b}$ e $\hat{d}$ são opostos pelo vértice; portanto $\hat{b} \equiv \hat{d}$;
- $\hat{e}$ e $\hat{g}$ são opostos pelo vértice; portanto $\hat{e} \equiv \hat{g}$;
- $\hat{h}$ e $\hat{f}$ são opostos pelo vértice; portanto $\hat{h} \equiv \hat{f}$.
- $\hat{b}$ e $\hat{c}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$, $\hat{d}$ e $\hat{a}$, $\hat{a}$ e $\hat{b}$, $\hat{f}$ e $\hat{g}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$, $\hat{h}$ e $\hat{e}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$, são adjacentes suplementares; portanto a soma desses pares de ângulos é 180º.

Ainda observando a figura 8, temos pares de ângulos congruentes, que estão do mesmo lado da transversal, sendo um deles na região interna e o outro na região externa ($\hat{c}$ e $\hat{g}$, $\hat{b}$ e $\hat{f}$, $\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{d}$ e $\hat{h}$), denominados **ângulos correspondentes**.

Os **ângulos alternos** são aqueles que estão em lados opostos em relação à transversal e não são adjacentes. Os ângulos alternos determinados por duas retas paralelas e uma transversal são dois pares internos ($\hat{d}$ e $\hat{f}$,$\hat{c}$ e $\hat{e}$, na figura 9) e externos ($\hat{a}$ e $\hat{g}$, $\hat{b}$ e $\hat{h}$, na figura 9) são congruentes.

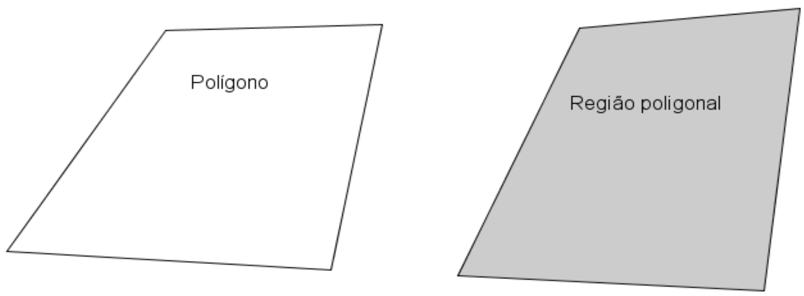
Na mesma figura 9 encontramos, ainda, **ângulos colaterais**, aqueles que estão no mesmo lado em relação à transversal e não são adjacentes. A transversal quando corta duas paralelas determina quatro pares de ângulos colaterais, sendo dois pares de ângulos colaterais internos ($\hat{d}$ e $\hat{e}$, $\hat{c}$ e $\hat{f}$) e ângulos colaterais externos ($\hat{a}$ e $\hat{h}$, $\hat{b}$ e $\hat{g}$).

3.2.2Triângulos

O triângulo é o elemento essencial da estruturação matemática dessa proposta de atividade. Sua importância e sua utilização na história e em problemas cotidianos deve ser ressaltada e trabalhada de acordo com o nível de cada série.

Iniciaremos o estudo dos triângulos com a ideia de polígono. Por definição, denomina-se polígono a figura plana formada por três ou mais segmentos de reta que se intersecta dois. Esses segmentos formam a linha poligonal separando o plano que o contém em duas regiões: a região externa e a região interna do polígono.

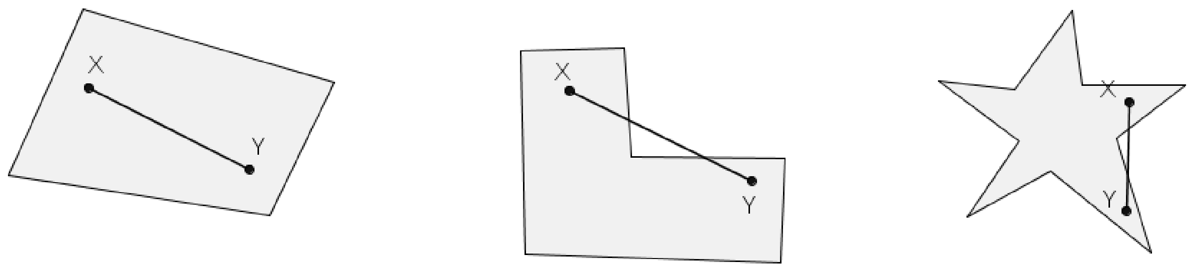
Figura 9 - Polígonos e região poligonal



Fonte: autora, 2015.

Os polígonos podem ser: convexos, quando todos os segmentos de reta com extremos no interior de um polígono tiverem todos os pontos situados no interior desse polígono; e, não convexo, se um segmento de reta tem extremos no interior de um polígono, mas nem todos os pontos do segmento estão situados no interior desse polígono.

Figura 10 - Polígonos convexos e não convexos

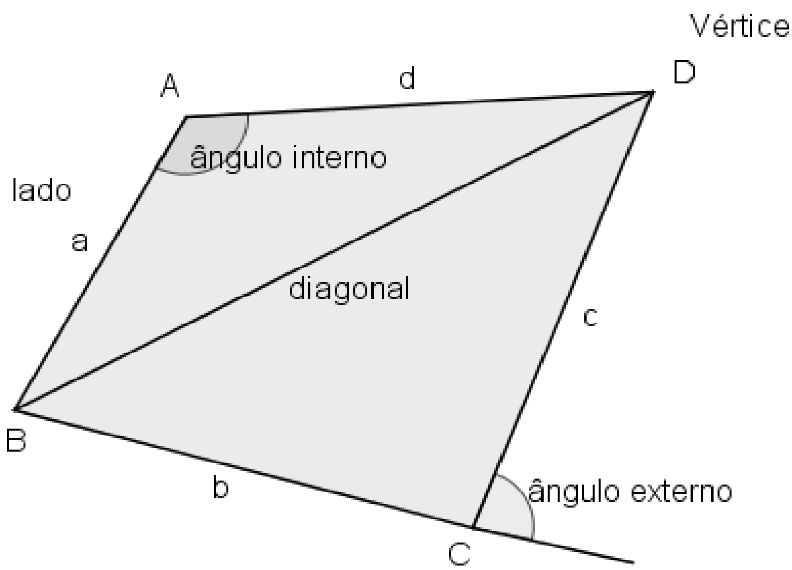


Fonte: autora, 2015.

Todo polígono tem os seguintes elementos:

- Os segmentos de reta que limitam o polígono chamam-se **lados**.
- Cada par de lados adjacentes de um polígono encontra-se em um ponto, denominado **Vértice**.
- Cada um dos segmentos de reta cujas extremidades são vértices que não pertencem a um mesmo lado tem o nome de **diagonal**.
- Cada um dos ângulos formados por um par de lados do polígono chama-se **ângulo interno**.
- Cada um dos ângulos adjacentes suplementares a cada ângulo interno do polígono é conhecido como **ângulo externo** do polígono.

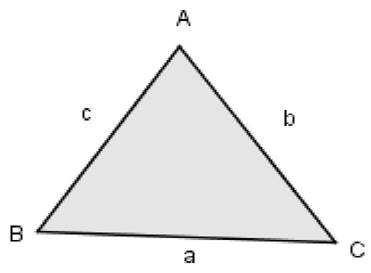
Figura 11 - Polígono convexo e seus elementos



Fonte: autora, 2015.

Considere três pontos A, B e C no plano. Caso sejam colineares (C estiver sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$) formam uma reta, ao contrário (não colineares) formam um **triângulo**. Possui três lados, três vértices e três ângulos internos e não tem diagonal.

Figura 12 - O triângulo ABC de vértices A, B, C



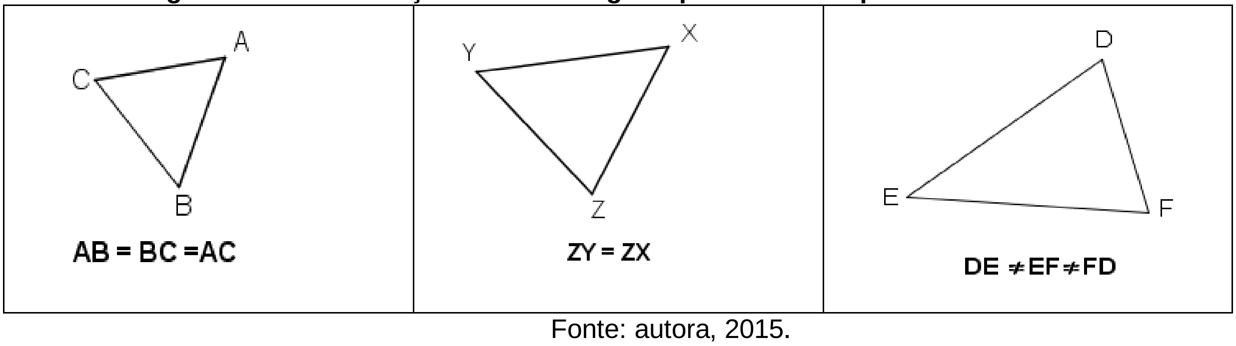
Fonte: autora, 2015.

Em relação a um triângulo genérico ABC (figura 13), AB, AC e BC (ou seus comprimentos) são os lados do triângulo, sendo seus comprimentos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. A soma dos lados do triângulo é o seu perímetro.

Uma relação importante quanto aos lados de um triângulo é conhecida como desigualdade triangular. Na qual, a medida de qualquer lado do triângulo sempre será menor que a soma da medida dos outros dois lados.

Os triângulos possuem nomes diferentes dependendo dos lados e, ou dos ângulos. Em relação aos lados podem ser: eqüilátero (todos os lados iguais e todos os ângulos iguais), isósceles (dois lados iguais e um diferente, os ângulos formados pelos lados iguais e o lado diferente tem a mesma medida), escaleno (todos os lados e ângulos têm medidas diferentes).

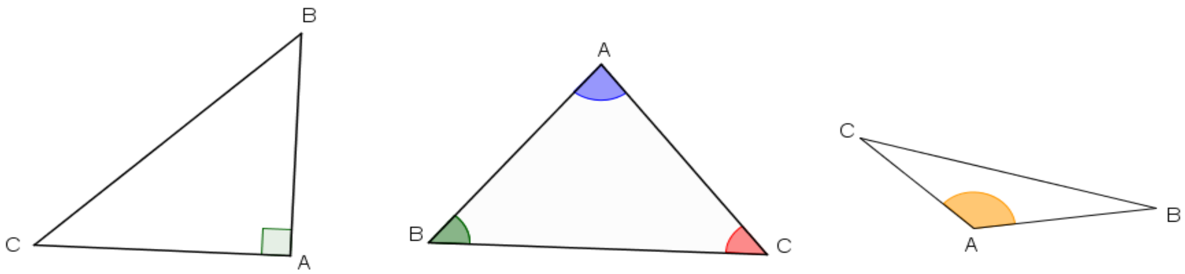
Figura 13 - Classificação de um triângulo quanto ao comprimento dos lados



Fonte: autora, 2015.

Quanto aos ângulos internos podemos classificar os triângulos como: **acutângulo** (todos os ângulos internos são agudos), **retângulo** (possui um dos ângulos internos com medida igual a 90º) e **obtusângulo** (possui um dos ângulos com medida superior a 90º).

Figura 14 - Classificação de triângulo de acordo com as medidas dos ângulos internos



Retângulo Acutângulo Obtusângulo

Fonte: autora, 2015.

No triângulo, quando acontece o prolongamento de um dos lados a partir de um dos vértices nota-se o aparecimento de ângulos formados pelos lados desse triângulo com o prolongamento, são chamados de ângulos externos de um triângulo. Os quais possuem relações importantes. Assim, temos, quanto aos ângulos do triângulo:

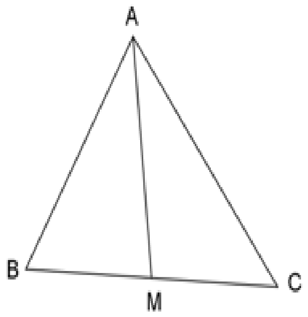
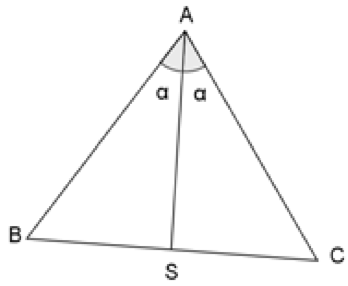
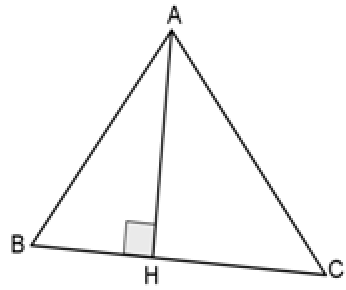
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.
- No triângulo eqüilátero os ângulos internos possuem mesma medida 60º.
- A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele[5].

No triângulo podemos ainda perceber três elementos importantes:

- **Altura**: é segmento de reta determinado por um vértice e pela intersecção da reta que contém o lado oposto a esse vértice, com a perpendicular a ela traçada por esse vértice.
- **Bissetriz**: é a semirreta que tem origem em um dos vértices do triângulo e divide o ângulo correspondente a esse vértice em dois ângulos congruentes.
- **Mediana**: é o segmento de reta que tem uma extremidade num dos vértices do triângulo e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

[5] Demonstração realizada pelos alunos usando o conceito de ângulos suplementares e soma dos ângulos internos de um triângulo.

Figura 15–Mediana, bissetriz e altura de um triângulo

		
AM é a mediana relativa ao vértice A	AS é uma bissetriz do triângulo ABC	AH é a altura relativa ao vértice A

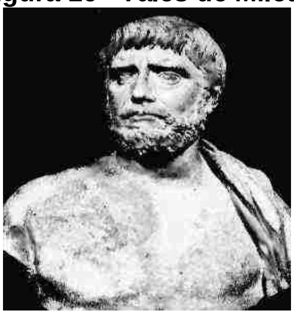
Fonte: autora, 2015.

3.3 Teorema de Tales

Tales de Mileto foi um dos primeiros matemáticos gregos e, segundo relatos históricos, teria vivido nos séculos VII e VI a.C. sendo influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Considerado por muitos o pai da geometria demonstrativa, Tales é considerado o primeiro matemático a dar uma contribuição à organização da geometria.

O Teorema que leva seu nome tem autoria questionável, pois o mesmo já teria sido registrado por outras civilizações. Mas devido a sua fama, o filósofo Tales nomeou o teorema cuja demonstração foi feita através da resolução de um problema real.

Figura 16 - Tales de Mileto

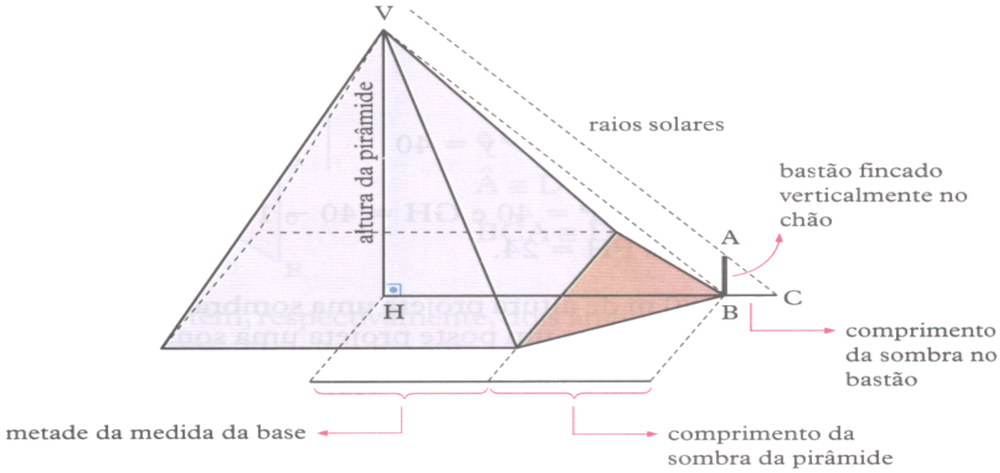


Fonte: PUCSP[6]

[6] Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/>

Diz a lenda que, em sua viagem para o Egito, Tales foi questionado sobre a altura de uma das pirâmides. Com um bastão de altura conhecida e sabendo a medida do comprimento das sombras da pirâmide e do bastão, Tales determinou a altura de uma das pirâmides do Egito. O feito foi realizado utilizando-se de semelhança de triângulos.

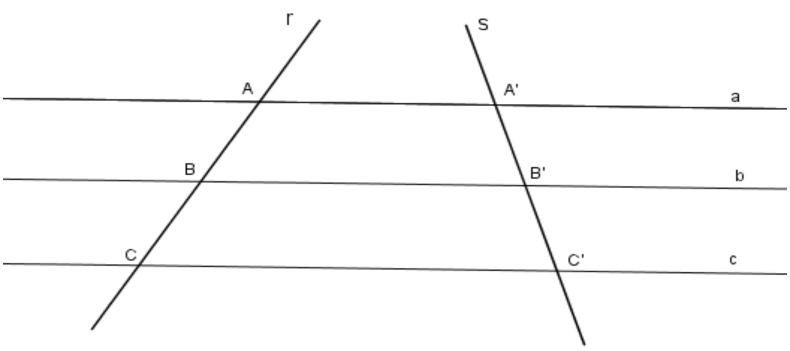
Figura 17 - Demonstração feita por Tales de Mileto



Fonte: Universodamatematica[7]

O Teorema, também conhecido como o teorema dos feixes de retas concorrentes, cujo enunciado clássico é: “Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais”. Esse resultado envolve paralelismo e proporcionalidade e é estudado no último ano do ensino fundamental.

Figura 18 - Teorema de Tales



Fonte: autora, 2015.

[7] Disponível em < http://universodamatematicaface.blogspot.com.br>

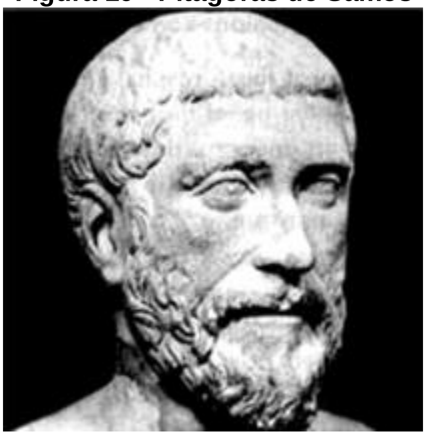
A demonstração do Teorema contida nesta proposta didática é conhecida como “prova incompleta dos pitagóricos”, que supõe todos os segmentos comensuráveis (*Dois segmentos AB e CD são comensuráveis se existem um segmento u e dois inteiros m e n tais que* $AB = m\,.u$ *e* $CD = n.u$). Proposta compatível com a educação básica e exposta nos livros didáticos tanto do ensino fundamental quanto o do médio.

O Teorema de Tales é amplamente usado na semelhança de triângulos e em resoluções de problemas. Toda a geometria utilizada nos seminários,bem como as construções geométricas,vislumbrava enunciar o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras, que iremos expor a seguir.

3.4 Teorema de Pitágoras

Não se sabe ao certo se Pitágoras de Samos realmente existiu. Relatos históricos datam seu nascimento em torno de 570 a.C., cerca de 50 anos após o nascimento de Tales de Mileto. Teria sido filho de rico comerciante e pôde viajar pelo Egito, pela Babilônia e talvez tenha ido até a Índia, onde provavelmente teve seu primeiro contato com a matemática.

Figura 19 - Pitágoras de Samos



Fonte: Lages Lima (2013), Temas e problemas elementares, pág.70

Ao retornar para a Grécia, fundou a escola Pitagórica, uma sociedade secreta que estudava religião, filosofia, política, música, astronomia e matemática. O lema da escola era “Tudo é número”. Eles procuravam explicar tudo o que existia na natureza através dos números. Mesmo após a morte de Pitágoras, ocorrida por volta de 500 a.C., a sociedade dos pitagóricos perdurou por mais quatro séculos.

Dentre muitas outras descobertas matemáticas, o teorema cujo enunciado é: “A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que tem como lado cada um dos catetos”, atribuí-se autoria a Pitágoras. Porém, esse mesmo teorema é encontrado em outros registros de outras civilizações, tais como os babilônios, que já faziam uso desse teorema para resolver problemas práticos.

Figura 20 - Plimpton, tablete de barro babilônico contendo o Teorema de Pitágoras

Fonte: Lages Lima (2013), Temas e problemas elementares, pág.72

Além de ser citado em diversos registros históricos de diferentes regiões, esse intrigante Teorema vem motivando pessoas de diferentes épocas e lugares a demonstrá-lo. A demonstração trabalhada nessa sequência didática é a mesma cuja autoria é creditada a Pitágoras, decompondo e reconstruindo quadrados. Selecionamos algumas demonstrações que foram apreciadas pelos alunos.

3.4.1 Outras Demonstrações do Teorema de Pitágoras

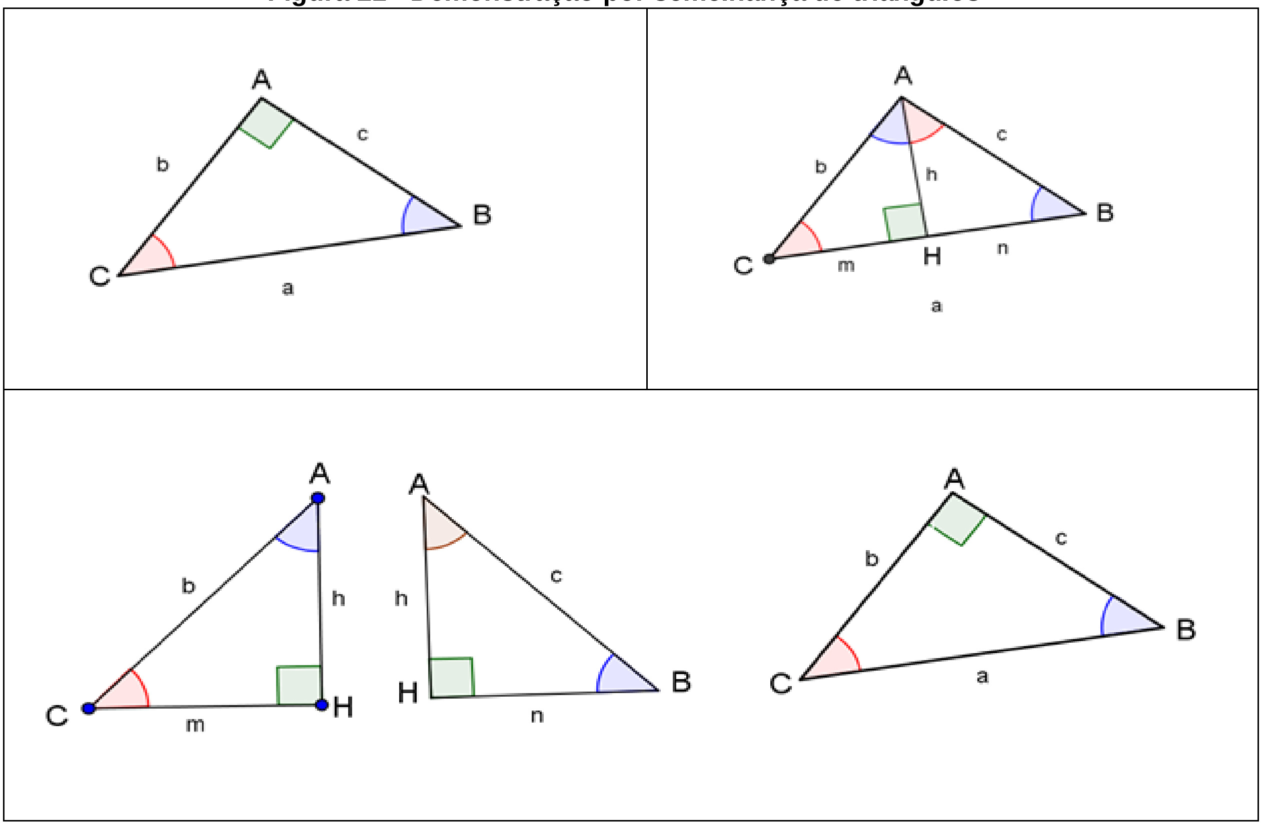
No tempo de Pitágoras as descobertas não eram divulgadas, não se sabe ao certo qual foi à demonstração dada pelos membros da escola pitagórica ao teorema de Pitágoras. O professor de matemática norte-americano Elisha Scott Loomis durante 20 anos colecionou demonstrações do Teorema de Pitágoras e organizou-as no livro “A Proposição de Pitágoras” (T*he Pythagorean Proposition*). A primeira edição continha 230 demonstrações, a segunda, 370 demonstrações. Atualmente conta-se por volta de 400 demonstrações.

Loomis classifica as demonstrações em algébricas, baseada nas relações métricas nos triângulos retângulos; e em geométricas, baseada em comparações de áreas. Limitaremos-nos a expor as geométricas, por ser de fácil compreensão para alunos do ensino fundamental. Selecionamos algumas dessas demonstrações.

3.4.1.1 A Demonstração por semelhança

A demonstração mais frequente e mais conhecida baseia-se na semelhança de triângulos. A partir do triângulo retângulo ABC (vide figura 21), retângulo em A, traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo ABC (caso dos dois ângulos agudos congruentes). Assim, os lados correspondentes são proporcionais.

Figura 21 - Demonstração por semelhança de triângulos



Fonte: autora, 2015.

Da proporcionalidade dos lados tem-se as igualdades:

1. $b.h = c.m$ e $c.h = b.n$ (triângulos AHC E AHB);
2. $a = m + n$ (ponto H divide a hipotenusa em m e n);

3. $c^2 = an$ (triângulos ABC e AHB).

Daí, realizando operações algébricas usando os itens 1. e 2., temos:

$$c^2.a = n.c^2 + n.b^2 \Rightarrow c^2.a = n.(c^2 + b^2)$$

Usando o item 3, fazendo a substituição necessária e as operações convenientes que $a^2 = c^2 + b^2$.

3.4.1.2 A Demonstração do Presidente

A partir de um trapézio retângulo de lados b, $a + b$ e a, dividido em três triângulos retângulos, James Abram Garfield (1831-1881), general que foi presidente dos Estados Unidos e gostava de matemática, demonstrou o Teorema de Pitágoras.

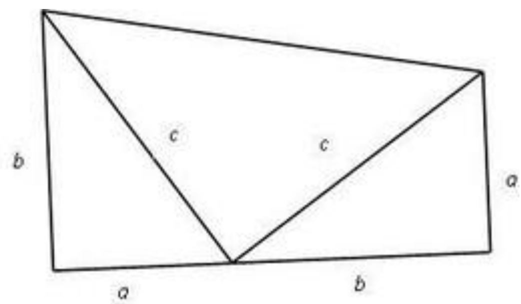
Na ocasião, Garfield usou diferença de áreas. A área do triângulo retângulo de catetos de medida c corresponde a diferença de área do trapézio e dos triângulos congruentes (conforme figura 22). Assim, temos:

$$\frac{c^2}{2} = \left[\frac{(a+b).(a+b)}{2}\right] - \frac{a.b}{2} - \frac{a.b}{2}$$

Desenvolvendo as operações necessárias, a equação de Pitágoras se revela.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Figura 22 - Demonstração usando trapézio retângulo

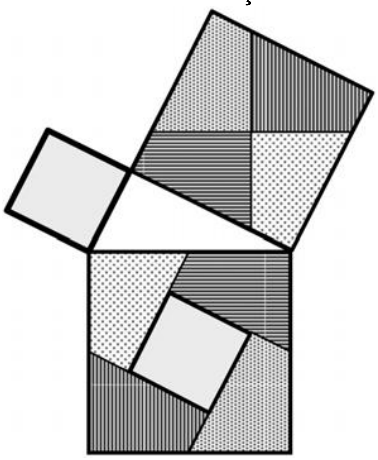


Fonte: Lages Lima (2012), Meu Professor de Matemática e outras histórias, pág.62

3.4.1.3 A Demonstração de Perigal

Utilizando a soma de quadrados e o recurso geométrico, Henry Perigal, um livreiro de Londres, publicou uma demonstração do Teorema de Pitágoras em 1873. Foi uma forma simples de mostrar que a soma dos quadrados construídos sobre os catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Figura 23 - Demonstração de Perigal



Fonte: Desconhecido

Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

4 PROPOSTA DIDÁTICA

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou sua construção."

Paulo Freire

Proporcionar ao aluno a experiência de conhecer e demonstrar a veracidade de um argumento matemático tornou-se o eixo norteador da sequência didática que compõe esse texto. Escolhemos a Geometria como base para desenvolver essas atividades por sua natureza construtivista e visual, além de ser o primeiro contato que os alunos têm com argumentos de demonstração.

Neste capítulo desenvolveremos a proposta didática, composta da escolha conveniente dos conteúdos, a metodologia utilizada e o processo de avaliação. Escolhemos o 4° ciclo do Ensino Fundamental, mas precisamente o 9° ano, última série do ciclo. Porque nesta série se dá o aprendizado de dois teoremas importantes para a geometria: o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras.

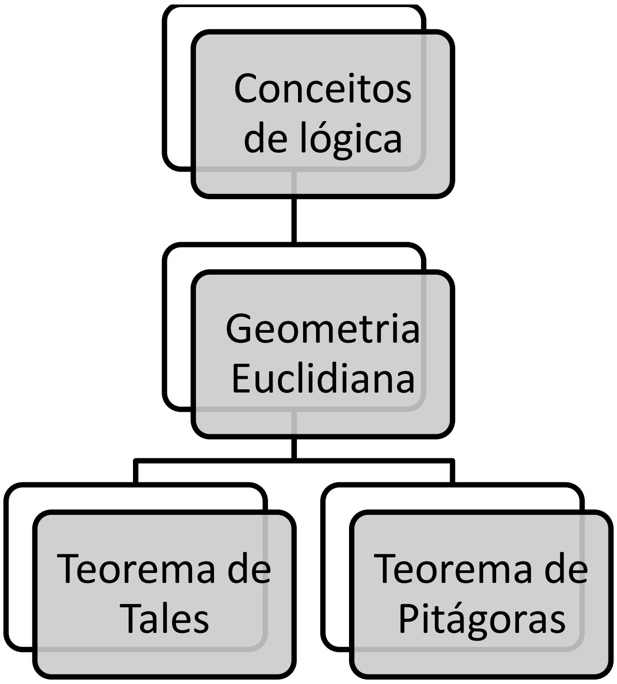
A sequência é composta de 30 (trinta) aulas de sessenta minutos cada, divididas da seguinte maneira: 6 (seis) aulas para a atividade de Lógica Matemática, 4 (quatro) aulas para a avaliação da aprendizagem; 20 (vinte) aulas para as atividades de Geometria Plana, sendo 12 (doze) aulas para Teorema de Tales e 8 (oito) aulas para o teorema de Pitágoras, incluindo as avaliações de aprendizagem.

Foram usadas diversas metodologias, aulas expositivas, pesquisa, apresentação de seminários, construção com régua e compasso, atividades fotocopiadas, uso de material concreto (oficina), socialização de ideias a respeito do conteúdo. Durante todo o processo foi priorizado o saber do aluno, ele foi o autor principal da construção e suas opiniões ouvidas e registradas.

A construção com régua e compasso se deu através da intervenção da professora no processo. Sempre que necessário os alunos recorriam ao desenho geométrico através do uso de régua e compasso.

Os discentes foram avaliados continuamente, observando a multiplicidade das atividades e o desempenho individual de cada aluno. A proposta seria, inicialmente, a observação e o preenchimento das atividades, porém surgiram outras vertentes durante a execução da sequência. A participação efetiva dos alunos e seu desenvolvimento a cada atividade foi imprescindível para avaliar a sequência didática e a plenitude de seu aprendizado.

A sequência ficou assim estabelecida:



4.1 Lógica Matemática

Segundo LIMA (2012, pág. 415), a Lógica é o estudo das leis do pensamento, a análise e classificação das formas de raciocínio e sua validade. O estudo da lógica no Ensino Fundamental, além de melhorar a compreensão matemática, aperfeiçoa outros conhecimentos nas demais disciplinas.

Preconizada por Leibniz, a abordagem da lógica iniciou no século XVII, mas teve suas origens no século IV a.C., com Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.). A obra de Aristóteles sobre lógica predominou por mais de dois milênios, considerado como o *Período Clássico*.

A adequação do estudo da lógica para o Ensino Fundamental (correspondente a esta sequência didática) contemplou apenas a simbologia matemática, os conceitos e os tipos de demonstrações. Visando otimizar os resultados, a lógica formal não foi totalmente abordada.

O ensino da lógica matemática se inicia com a compreensão e utilização de notação matemática. Durante a atividade foi exposto os símbolos necessários para os conteúdos que seriam ministrados. Para tanto, foi confeccionada uma tabela contendo as principais notações utilizadas no estudo da geometria.

O cuidado com a maneira que são lidas as notações e em qual operação matemática elas se aplicam foi realizado em todas as aulas, pois é notório a importância da clareza e concisão. Segundo Morais Filho (2006), o principal intuito do aprendizado dessas notações é facilitar a manipulação e a memorização dos conteúdos.

Os símbolos foram escolhidos de forma a facilitar as demonstrações feitas posteriormente. Alguns símbolos matemáticos eram conhecidos dos alunos, tais como os que representam os conjuntos numéricos e os responsáveis pela tricotomia (igualdade, diferença, maior/menor que). A partir da exposição dos símbolos foi realizada uma atividade dirigida contendo símbolos matemáticos e expressões, com o intuito de que o aluno soubesse transcrever frases para a linguagem matemática. Outros símbolos foram expostos gradativamente conforme avançava-se com os conteúdos, dentre eles o que representa o paralelismo entre as retas e o que representa a perpendicularidade entre as retas.

Os conceitos iniciais de lógica foram expostos gradativamente, ressaltando aplicações práticas do cotidiano dos alunos. Sendo abordados os conceitos de: axioma, definição, argumento, proposição e teorema, que segundo MORAIS FILHO (2006), podem ser conceituados como:

1. **Axioma**: Sentença que se admite verdadeira e é usada como base para desenvolver um sistema.

2. **Definição:** definir é dar nomes a objetos matemáticos, mediantes determinadas propriedades interessantes que possuam.

3. **Argumento:** conjunto de uma ou mais sentenças que usa a lógica do sistema para mostrar como se chegou a uma sentença específica.

4. **Proposição:** Sentença cuja veracidade (ou falsidade) deve ser demonstrada por meio de um argumento.

5. **Teorema:** Sentença que se provou ser verdadeira. Todo teorema é uma sentença da forma “Se P então Q”, em que P é a hipótese e Q é a tese.

Também foram abordados os conceitos de Lema e corolário, que de acordo com Morais Filho (2014) podem ser definidos como:

6. **Lema:** Teorema auxiliar ou introdutório, utilizado na demonstração de um outro teorema que lhe sucede.
7. **Corolário:** é um teorema deduzido de outro que acabou de ser provado.

Os conceitos 4, 5, 6 e 7, necessitam de uma sequência de sentenças que comprova a veracidade de uma tese, o que chamamos de prova (ou demonstração). As provas ou demonstrações podem ser:

1. **Prova direta:** que parte das afirmações iniciais que constituem a hipótese e, por meio de argumentos válidos, confirma a veracidade da sentença final.
2. **Prova indireta:** supõe-se, inicialmente, que a tese seja falsa. Então, usando argumentos válidos, chega-se a uma sentença contrária alguma das afirmações contidas na hipótese; portanto, a suposição original deve ser falsa.
3. **Prova por indução:** Método usado em sentenças formuladas em função dos números inteiros. É válido para o primeiro elemento do conjunto, supõe-se válido para qualquer número e prova-se que é válido para o seu sucessor. Logo, é válido para todo elemento do conjunto[8].
4. **Prova por exaustão:** prova feita explorando-se todos os casos possíveis sem encontrar contradições.
5. **Prova por inspeção:** prova na qual às sentenças são apresentadas na forma de diagramas.

O processo de avaliação é feito continuamente através da observação nas discussões e nas apresentações, além de atividades propostas com uma diversidade de questões.

4.2 Geometria Euclidiana Plana

Nas civilizações antigas o uso dos conceitos geométricos estava ligado à produção de alimentos, o armazenamento desses alimentos e a divisão de terras.

Durante séculos a geometria foi apresentada apenas na prática, sem preocupar-se com o registro. Havia um problema real que era resolvido, elaborava-

[8] Ver Axiomas de Peanno, página 52.

se uma conjectura e divulgava-se boca a boca os resultados. Um matemático grego chamado Euclides mudou tudo isso. Foi Euclides (aproximadamente 365-300 a.C) que mudou a maneira de estudar matemática. Fundador da Escola de Alexandria, Euclides reuniu trabalhos de outros matemáticos as suas demonstrações e teoremas e escreveu “Os elementos”, uma coletânea composta de 13 livros. Neles encontravam-se resultados de Geometria e Teoria dos Números.

Figura 24- Edição grega dos Elementos do Século IX (Museu do Vaticano).

Fonte: Grupo de História e Teoria da Ciência[9]

Após Euclides, muitos matemáticos criaram conjecturas[10] e desenvolveram suas teorias através da linguagem lógica e das demonstrações. Como o ensino da Geometria Euclidiana inicia no Ensino Fundamental, iniciamos a sequência didática com os conceitos primitivos de ponto, reta e plano, seguidos pelos axiomas de incidência de Euclides, a saber:

Axioma I_1: Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem a reta.

Axioma I_2: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

[9] Disponível em <http://www.ghtc.usp.br>

[10] Sentença que, embora tenha muitas evidências de que seja verdadeira, ainda não foi provada ser verdadeira ou falsa.

Proposição 1.1: Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

A partir daí foram estudados as posições relativas entre duas retas e conceitos de ângulos, pressupostos necessários para o aprendizado do Teorema de Tales e de Pitágoras. Para esses conteúdos os alunos realizaram pesquisas e organizaram seminários com duração de 40 minutos cada. A ênfase na pesquisa e na elaboração de uma apresentação em grupo, fez com que os alunos tivessem contato com diversas fontes (internet, livros, revistas matemáticas) e múltiplas maneiras de apresentação de um mesmo conceito.

As atividades referentes ao Teorema de Tales fizeram alusão a história da matemática e a demonstração do Teorema foi feita gradativamente usando os conhecimentos adquiridos nos seminários.

A demonstração do Teorema de Pitágoras seguiu através da manipulação de quadrados e triângulos, refizemos a demonstração atribuída a Pitágoras. Através de uma oficina geométrica e a sequência de um questionário, os alunos compreenderam a relação entre catetos e hipotenusa.

É um conjunto de folhas de resposta que acompanha cada atividade nas quais podem ser feitas anotações e cálculos necessários à resolução do problema. Esse conjunto pode ser distribuído para a turma como material de apoio na execução e finalização das atividades.

Além de subsidiar a resolução das etapas do problema, a folha do aluno sugere um plano de execução da atividade, com observações, lembretes, dicas ou informações complementares, cujo objetivo é auxiliar o aluno a resolver a atividade ou compreender melhor os conteúdos estudados.

Sendo assim, de acordo com a necessidade, o professor pode utilizar ou não a folha do aluno

5 ATIVIDADES EM SALA DE AULA

A pesquisa foi realizada na Escola Municipal de Educação Básica Dom Pedro I, município de Rio Largo – AL, no turno vespertino, no período de julho a novembro de 2014, com 54 alunos distribuídos em duas turmas de 9º ano.

O período escolhido corresponde ao 3º e 4º bimestre, na ocasião conteúdos referentes à aritmética e álgebra foram ministrados nos bimestres anteriores. Os conhecimentos necessários aos cálculos de área, perímetro e proporção já haviam sido adquiridos. A análise das atividades se deu através da observação e registro das demonstrações teóricas e práticas. As falas dos alunos serão citadas, porém, seus nomes serão preservados. As citações serão feitas acompanhadas das letras A ou B, referentes às turmas A e B, com numeração de 1 a 28 (turma A) e de 1 a 26 (turma B).

Objetivando a aprendizagem através da construção do conhecimento geométrico utilizando a história da matemática, noções de lógica, materiais manipuláveis e exposição de ideias, os alunos aprenderam a justificar suas resoluções, não apenas efetuar cálculos.

5.1 Atividade: Lógica Matemática

O objetivo dessa atividade é inserir no currículo do aluno a linguagem matemática, trabalhando a simbologia e os termos referentes à lógica matemática. Esta atividade iniciou-se com a apresentação da linguagem simbólica, enfatizando os símbolos necessários para as demonstrações e ressaltando os que já eram de conhecimento dos alunos, tais como os que representam os conjuntos numéricos e a tricotomia (igualdade, maior que e menor que).

A construção da atividade se deu em 6 (seis) aulas de 60 (sessenta) minutos cada, dividido em dois momentos: um em que foi trabalhado a linguagem simbólica (3 aulas) e um outro quando foi trabalhado a lógica matemática e os argumentos essenciais para a construção da teoria e de demonstrações matemáticas(3 aulas). O material utilizado foi composto de atividades fotocopiadas, quadro branco, pincel, compasso, régua, transferidor e esquadro.

5.1.1 Atividade Escrita Matemática

A aula iniciou-se com uma introdução histórica, enfatizando a escrita da matemática em várias civilizações antigas e como se deu a composição da linguagem que se usa atualmente. Os alunos receberam uma atividade[11] com uma tabela contendo os símbolos que seriam utilizados e uma atividade de escrita e tradução de frases e linguagem matemática.

Tabela 1 - Símbolos Matemáticos

SÍMBOLO	COMO SE LÊ	SÍMBOLO	COMO SE LÊ
$\exists$	Existe; Existe um; Existe pelo menos um	$\Rightarrow$	Implica (que); acarreta
$\forall$	Para todo; Qualquer que seja;Para cada	$\Leftrightarrow$	Se, e somente se; equivalente (no caso de proposições)
$\leq$	Menor (do) que ou igual a	$<$	Menor (do) que
$\geq$	Maior (do) que ou igual a	$>$	Maior (do) que
$\approx$ $\cong$	Aproximadamente	$\equiv$	Equivalente a; Côngruo a
$\sim$	Semelhante	**;** **|**	Tal que; Tais que
$\in$	Pertence	$\cup$	União
$\emptyset$	Conjunto Vazio	$\cap$	Interseção
$\therefore$	Então; Portanto; Logo; Donde	$\stackrel{\text{def}}{=}$ $:=$	Por definição

Fonte: autora, 2015.

Durante a atividade os alunos tiveram quatro momentos importantes: o primeiro, quando foram apresentados à tabela de símbolos; o segundo, no início da atividade quando começaram a fazer uso de tais símbolos; o terceiro momento caracteriza a leitura de símbolos matemáticos e a maneira como os alunos identificam e interpretam a junção desses símbolos; e o quarto momento no qual o aluno vai criar, de acordo com sua vivência e seu conhecimento matemático sentenças matemáticas verdadeiras usando notação matemática e frases comuns.

[11] Vide apêndice A

A exposição e a compreensão do quadro 1 através das duas primeiras questões da atividade aconteceram em duas aulas, enquanto que a criação das sentenças foi solicitada como atividade de casa. No dia seguinte, os alunos trouxeram suas sentenças e expuseram para o grupo, indo ao quadro e escrevendo suas sentenças e solicitando do grupo a leitura correta. Na ocasião, a turma se manifestava caso não concordasse quanto à veracidade da sentença do colega, mostrando que o conhecimento referente a sentenças matemáticas foi compreendido em sua totalidade.

5.1.2 Atividade Noções de Lógica

Citando novamente o contexto histórico, iniciamos a aula com uma descrição sobre a matemática grega e seus representantes mais importantes: Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) considerado o fundador da lógica; Pitágoras (571 a.C. – 495 a.C.), com sua escola pitagórica, responsável por descobertas matemáticas importantes, dentre elas o teorema que leva seu nome; Euclides (325 a.C. – 265 a.C.) autor de Os Elementos, coletânea de 13 livros sobre matemática, contendo demonstrações matemáticas; e Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.),cujo teorema que leva seu nome e sua demonstração prática permeia o ensino da geometria da educação básica. Na aula ressaltamos a importância da escrita matemática ao longo da história e a relevância da obra de Euclides para a matemática atual.

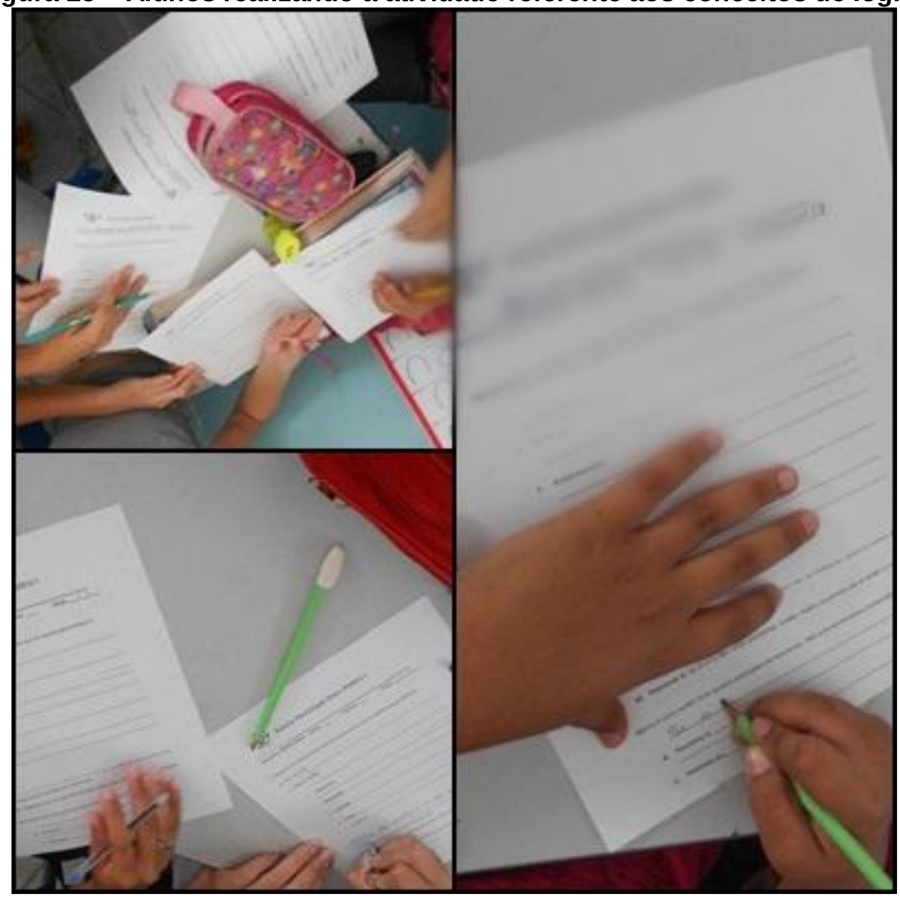
Em seguida, foram relatados os conceitos referentes à escrita matemática, iniciando com definição e concluindo com o conceito de teorema. Enfatizando a construção de um teorema (hipótese e tese). A exposição se deu através de exemplos práticos.

Na ocasião, solicitou-se dos alunos que explicassem para alguém que não tinha tido nenhum contato com a matemática o que é um triângulo. A discussão iniciou-se com a frase: “Um triângulo é uma coisa de três lados” (Aluno A21). A cada definição, os alunos rebatiam que aquilo não era uma definição exata, que deixava abertura para erros. Em um determinado momento da aula, a aluna A26 expôs que “um triângulo seria uma forma geométrica de três lados retos.” A partir daí foi construída a definição de triângulo.

> Um triângulo é formado por três pontos que não pertencem a mesma reta e pelos três segmentos determinados por esses três pontos. Os três pontos são chamados *vértices* do triângulo e os segmentos, *lados* do triângulo. (BARBOSA, 2012, p.4)

A diferença entre definição e teorema[12] foi explicada, bem como a necessidade de demonstrar a tese de um teorema. Nesse momento, cada aluno recebeu uma folha de papel A4 contendo a atividade[13] referente ao conteúdo ministrado. A atividade continha três questionamentos: atribuir significado aos conceitos de lógica, identificar a hipótese e a tese em um teorema e a criação livre de teoremas, sentenças contendo uma hipótese (algo verdadeiro) e uma tese (algo a ser provada sua veracidade).

Figura 25 – Alunos realizando a atividade referente aos conceitos de lógica



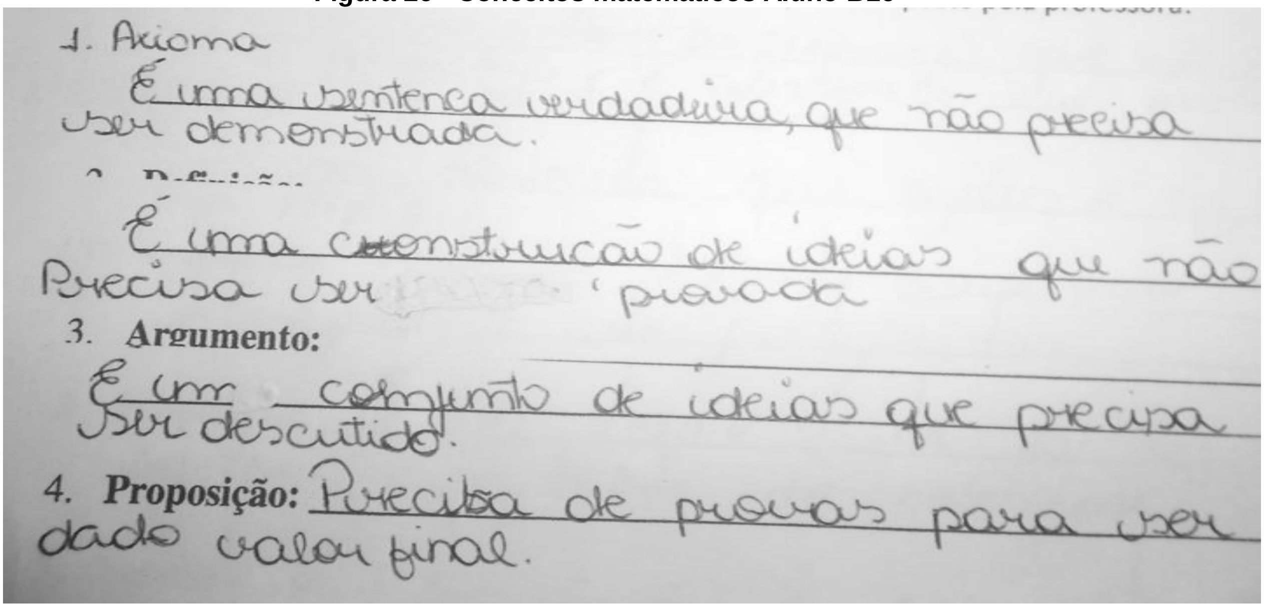
Fonte: autora, 2015.

[12] Os conceitos usados para definição e teorema encontram-se no capítulo 4, pag.52
[13] Vide Apêndice B

Os alunos formaram grupos, apesar da atividade ser individual, para discutirem e socializar os conceitos entre os colegas do grupo, para só então ser compartilhado com a classe. Durante todo o processo os alunos foram monitorados, podendo haver intervenção da professora a qualquer momento da atividade.

Após responderem à atividade proposta, os alunos de cada grupo compartilharam com o restante da turma os resultados obtidos e, para isto os alunos sentaram-se em círculo de modo que todos ficassem de frente para todos e era sorteado um aluno para expor os conceitos. À medida que os conceitos eram expostos, havia uma discussão. Os alunos quando discordavam da resposta do colega, rebatiam usando suas anotações. Sendo que algumas das respostas aceitas pelo grupo serão descritas nas figuras 3 e 4.

Figura 26 - Conceitos matemáticos Aluno B16



1. Axioma
É uma sentença verdadeira, que não precisa ser demonstrada.

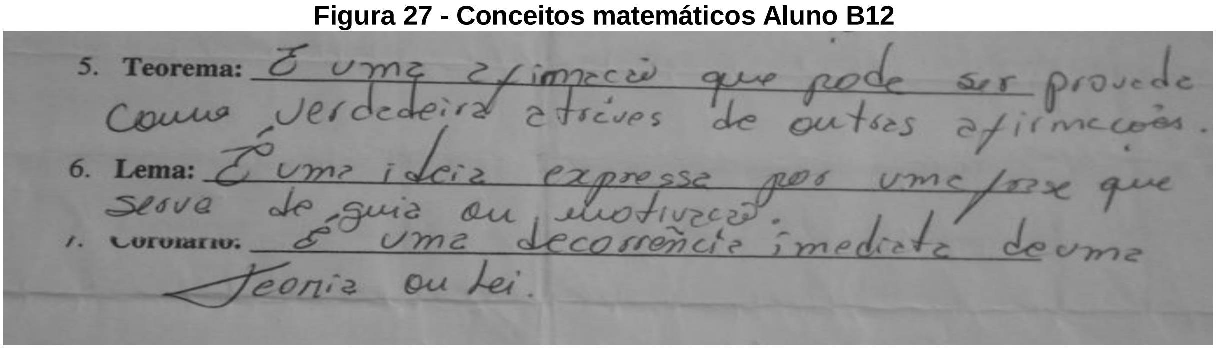
É uma construção de ideias que não precisa ser provada

3. **Argumento:**
É um conjunto de ideias que precisa ser discutido.

4. **Proposição:** Precisa de provas para ser dado valor final.

Fonte: autora, 2015.

Figura 27 - Conceitos matemáticos Aluno B12



5. **Teorema:** É uma afirmação que pode ser provada como verdadeira através de outras afirmações.

6. **Lema:** É uma ideia expressa por uma frase que serve de guia ou motivação.

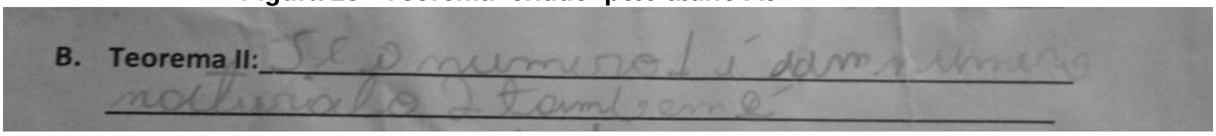
7. **Corolário:** É uma decorrência imediata de uma teoria ou lei.

Fonte: autora, 2015.

Após a discussão, foram entregues aos alunos os conceitos com seus respectivos significados[14],para que os alunos comparassem as suas respostas com as definições dadas por matemáticos. Além disso, foram estudados os diversos tipos de demonstrações (provas) matemáticas, incluindo contra-exemplo, prova indireta (demonstração por absurdo), por inspeção e por exaustão.

Quanto à atividade referente a teoremas, os alunos conseguiram identificar a hipótese e a tese sem grandes dificuldades, ficando essa para a construção dos teoremas. Apesar da diversidade de teoremas criados, a percepção de tese e hipótese ficou clara.

Figura 28 - Teorema ‘criado’ pelo aluno A3



Fonte: autora, 2015.

Um dos exemplos mais significativo foi o exposto pelo aluno A3, “Se o número 1 é um número natural, o 2 também é”. Os alunos justificaram o teorema com a ideia de sucessor, excelente momento para apresentar os axiomas de Peano[15], sendo eles:

a) Todo número natural tem um único sucessor;
b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;[16]
d) Seja X um subconjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Ressaltando o último axioma de Peano, conhecido como axioma da indução, importante método de demonstração matemática. Os teoremas criados mostraram que os alunos conseguiam distinguir a hipótese da tese, além disso, a todo

[14] Os conceitos a qual se refere consta no capítulo 3
[15] Giuseppe Peano (1858 – 1932), matemático italiano responsável pela descrição do conjunto dos números naturais a partir de 4 axiomas, sendo um deles (o mais importante) conhecido como axioma da indução.
[16] Os alunos dessas turmas foram acompanhados pela mesma professora desde o 7° ano. Portanto, eles aprenderam que os números naturais iniciam no número um.

momento havia o questionamento da veracidade dos teoremas apresentados. Um dos argumentos mais usados na exposição, pelos alunos, era o exemplo que não validava a proposição feita (contraexemplo).

5.2 Atividade: Paralelismo e Retas Transversais, Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos

Ao término da sexta aula da sequência didática, os alunos foram convidados a realizar uma pesquisa e preparar seminários com temas referentes a retas, ressaltando o uso dos conceitos de lógica estudados. E, caso necessário, deveriam apresentar uma demonstração matemática.

Foram necessárias 7 (sete) aulas de 60 minutos cada para a composição das atividades. Das quais:

- 3 (três) foram usadas no seminário sobre posição relativa entre duas retas;
- 2 (duas) foram usadas no seminário sobre ângulos e triângulos;
- 2 (duas) usadas para a atividade sobre o Teorema de Tales.

Os alunos fizeram uso dos materiais fornecidos pela escola para preparar o seminário, sendo eles: cartolina, régua, compasso, transferidor, papel 40Kg, dentre outros. A pesquisa foi feita em casa, mas a preparação do seminário se deu na sala de aula.

O objetivo dessa atividade é conhecer e construir as geometrias de posição e plana, através de pesquisa, demonstração e construção geométrica. Muitas vezes o compasso e a régua auxiliaram na visualização das aplicações geométricas, além da intervenção constante da professora, relacionada tanto a exibição do conteúdo quanto às atividades manipuláveis ou diagnósticas.

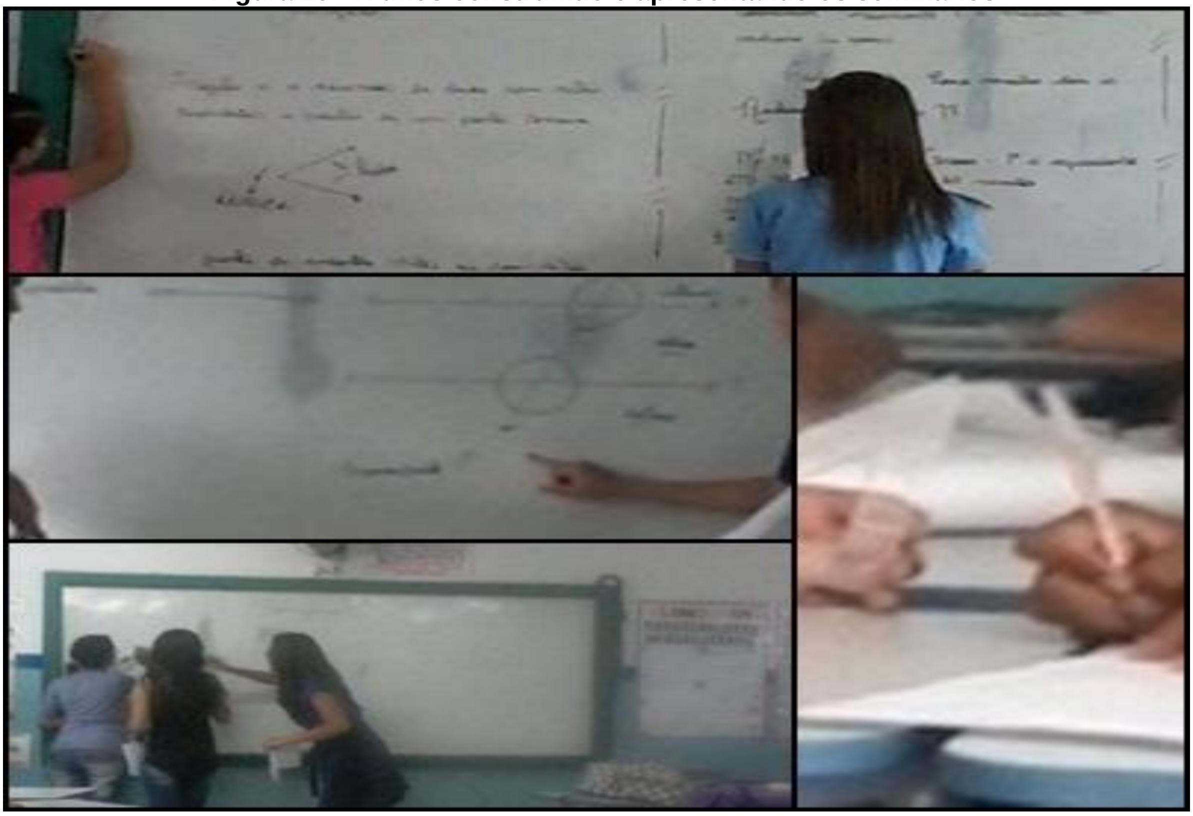
5.2.1 Seminários: Posições relativas entre duas retas, ângulos e triângulos

A preparação dos seminários foi desempenhada em sala, em grupos de 5 (cinco) a 7 (sete) alunos. Cada grupo sorteou um tema, realizou a pesquisa, escolheu a forma que seria exposta para os demais colegas e o material necessário a ser utilizado. Em seguida, foi definida a ordem das apresentações, iniciando com a apresentação dos axiomas de incidência e de ordem, apresentados na teoria de Euclides e concluindo com retas transversais.

Assim, as apresentações aconteceram na seguinte sequência: axiomas de incidência e ordem de Euclides, posição relativa entre ponto e reta, posição relativa entre duas retas (foi dividido em dois grupos: paralelas e concorrentes), ângulos e retas transversais, e triângulos.

A atividade decorreu construtivamente, os conteúdos se relacionavam e se interligavam. A intervenção era constante, seja para auxiliar nos desenhos com régua e compasso, seja com a notação utilizada ou com a condução da apresentação.

Figura 29 - Alunos construindo e apresentando os seminários

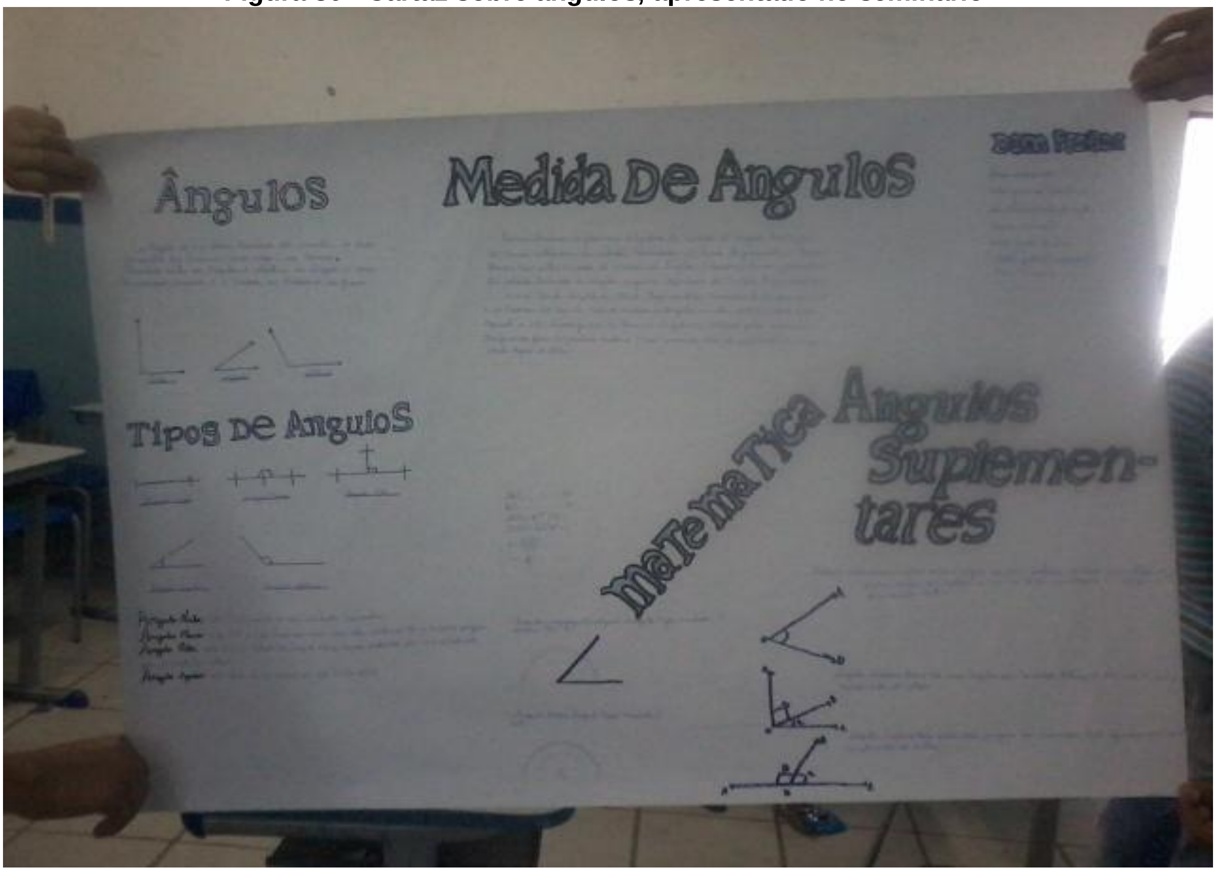


Fonte: autora, 2015.

Entre as apresentações, foram preenchidas as lacunas do conteúdo durante a pesquisa e, também, foi dada ênfase nas demonstrações, através do desenho geométrico ou prova direta e indireta, o que aconteceu em todas as exposições. A culminância se deu através de uma mesa redonda, na qual alunos selecionados dos grupos juntamente com a professora respondiam os questionamentos feitos pela turma.

Dentre as principais dúvidas e questionamentos, a posição relativa das retas e a relação entre retas e ângulos foram destaque. Porém, os próprios alunos sanaram as dificuldades dos colegas fazendo uso de artifícios práticos. Usavam canetas, lápis, palitos de pirulitos, até mesmo o próprio compasso para mostrar como retas formavam ângulos. Na ocasião, a professora interveio e, utilizando garrote e palitos de churrasco, construiu duas retas concorrentes para mostrar aos alunos os ângulos entre duas retas concorrentes.

Figura 30 - Cartaz sobre ângulos, apresentado no seminário



Fonte: autora, 2015.

Ao concluir a sequência das apresentações, os alunos realizaram uma atividade supervisionada para avaliar os conhecimentos adquiridos. O processo avaliativo se deu em 2 (duas) aulas, enfatizando sempre a opinião do aluno a respeito do tema.

Mediante o aprendizado dos conhecimentos geométricos necessários, os alunos foram apresentados ao Teorema de Tales.

5.2.2 Atividade Teorema de Tales

A atividade foi dividida em três partes: a primeira envolvia a construção dos segmentos proporcionais usando régua e compasso; na segunda, a aula foi organizada a partir do momento histórico e refeito os passos de Tales; e, na última, os alunos foram desenvolvendo a prova do Teorema através da relação entre ângulos no feixe de retas paralelas, cortada por transversais, usando congruência de triângulos.

Nesta sequência, o objetivo era que os alunos compreendessem os elementos que compõem o Teorema de Tales, um a um, através das relações já estudadas durante o ano letivo e nas séries anteriores. Foram necessárias 5 (cinco) aulas de 60 (sessenta) minutos cada, para a realização da atividade. E mais uma aula para a avaliação de sondagem, composta de uma lista de problemas envolvendo o Teorema de Tales, na qual os alunos deveriam, além de expor os cálculos, justificar o uso das proporções e as propriedades utilizadas.

A primeira atividade ocorreu logo após a verificação de aprendizagem a respeito dos seminários, durando uma aula de 60 minutos e os materiais utilizados foram fornecidos pela escola, sendo eles réguas, compasso, transferidor, papel A4.

Após a compreensão de retas, ângulos; e fazendo uso dos conceitos de razão e proporção estudados no 8° ano do Ensino Fundamental, os alunos receberam papel, régua e compasso. Foi solicitado que eles desenhassem um feixe de retas paralelas (contendo três retas, para a compreensão plena da proporcionalidade, usamos o número mínimo de retas necessário), que foi realizado usando régua e compasso. E, logo após, cortassem esse feixe com duas transversais, assinalando os pontos em comum às retas com letras maiúsculas do nosso alfabeto. A atividade foi supervisionada pela professora para constatar o paralelismo das retas, certificando-se que a atividade teria êxito.

Em seguida, com o uso de uma régua, os alunos mediram os segmentos formados pela intersecção das retas e preencheram a tabela (vide quadro 2). Na ocasião houve intervenção da professora com relação à medição exata com o uso da régua, tomando o cuidado de iniciar a medida com o zero. A partir daí, foi solicitado que os alunos comparassem os segmentos a partir de suas medidas.

Tabela 2 - Atividade Teorema de Tales

Segmento	Medida (cm)
AB	
BC	
AC	
DE	
EF	
DF	

Fonte: autora, 2015.

A percepção referente à proporcionalidade foi feita a partir da observação dos dados e das razões entre os termos. Daí foi inserido o conceito de proporcionalidade entre os segmentos. Os alunos debateram e concluíram que existia proporcionalidade entre os segmentos formados pelas retas transversais.

Em seguida, o contexto histórico foi inserido. O problema de Tales de Mileto foi exposto e cada aluno recebeu uma atividade[17] copiada a ser preenchida individualmente. Os alunos realizaram a atividade e o Teorema de Tales pode ser enunciado.

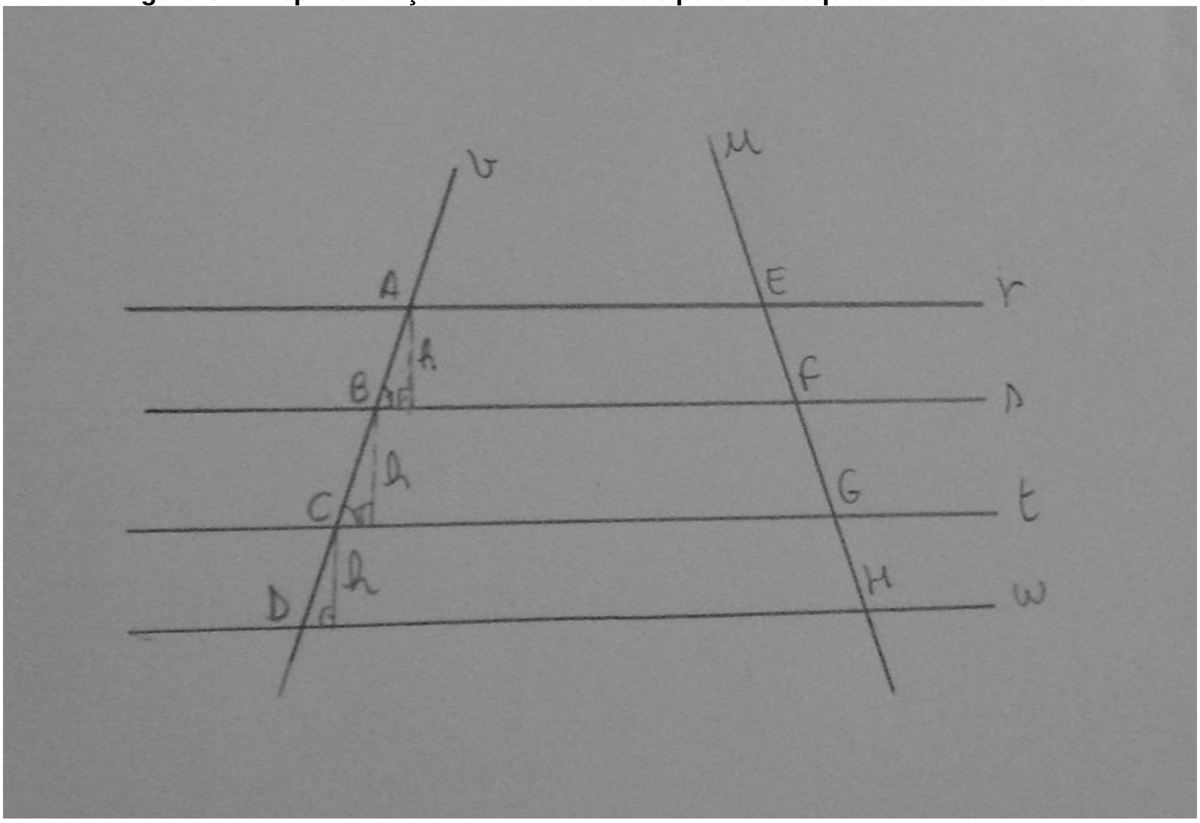
Assim, a última atividade foi proposta, uma sequência de exercícios, iniciando-se com o esboço da situação-problema do Teorema de Tales. Traçando um feixe de retas paralelas equidistantes entre si e, em seguida, cortando-as com

[17] Vide apêndice C

uma transversal. Solicitou-se da turma que formassem triângulos usando a projeção dos pontos de intersecção da transversal com cada uma das retas do feixe. Lembrando-se sempre de usar as notações cabíveis para retas e pontos.

Logo após, os alunos perceberam que formaram-se três triângulos congruentes, pois cada triângulo apresentava além do ângulo reto em comum e a altura formada pela projeção dos pontos de intersecção, os ângulos correspondentes que eles aprenderam durante as apresentações dos seminários. Portanto AB = BC = CD, logo a razão entre os segmentos seria um.

Figura 31 - Representação do feixe de retas paralelas eqüidistantes aluno A5



Fonte: autora, 2015.

O mesmo foi realizado com a outra transversal. E os resultados para surpresa de todos, resultava em razão um. A partir daí, foi solicitado dos alunos que retornassem a atividade inicial (a primeira na sequência do Teorema de Tales) e que dividissem os segmentos da mesma reta determinados pelas intersecções em partes iguais. Nesta ocasião eles já perceberam que havia uma proporcionalidade entre os segmentos. A demonstração seguiu utilizando os conceitos de razão e proporção.

Encerrando a sequência, os alunos foram submetidos a uma avaliação contendo questões envolvendo aplicações do Teorema de Tales que deveriam ser respondidas justificando o uso da proporcionalidade.

5.3 Atividade: Teorema de Pitágoras

Para a aula sobre o teorema de Pitágoras, foi escolhida uma atividade baseada no uso de material concreto, objetivando a construção do conceito através da manipulação de elementos geométricos. Foram necessárias quatro aulas de 60(sessenta) minutos cada, divididas em duas aulas para a oficina e preenchimento do questionário; uma aula para a exposição de outras demonstrações do teorema de Pitágoras e, a última para realização de atividades de sondagem.

No ensejo, as relações métricas foram construídas através de dobraduras e, ou, fazendo uso do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Tales. Utilizamos de mais duas aulas, uma para a atividade expositiva e outra para atividade de sondagem.

5.3.1 Atividade Teorema de Pitágoras

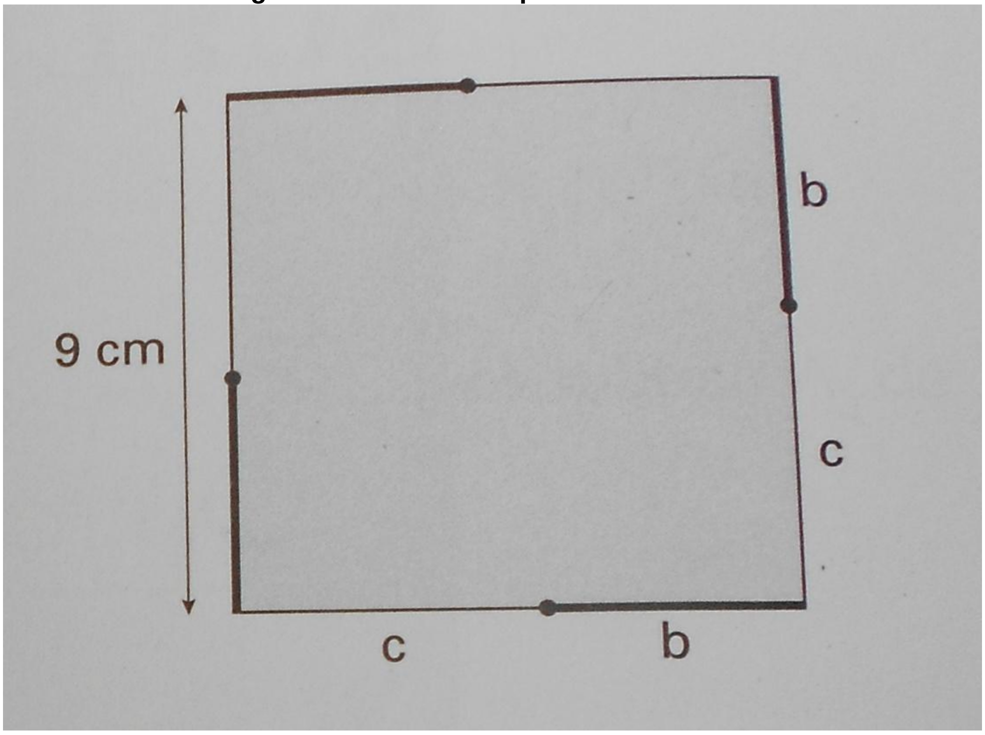
Os alunos se reuniram em grupos de no máximo cinco alunos (em virtude da quantidade de material), porém a atividade foi realizada individualmente. Cada grupo recebeu régua, tesoura sem ponta, esquadro, folha de papel A4 e um cartão de cartolina colorida nas dimensões 25cm x 30cm.

Figura 32 - Material usado na atividade sobre Teorema de Pitágoras

Fonte: autora, 2015.

Inicialmente foi solicitado que cada aluno desenhasse e recortasse, na cartolina colorida, um quadrado de 9 cm de lado, conforme figura 34. Na ocasião foram enfatizadas as propriedades de um quadrado e, sua construção através de dobraduras ou utilizando esquadro e régua.

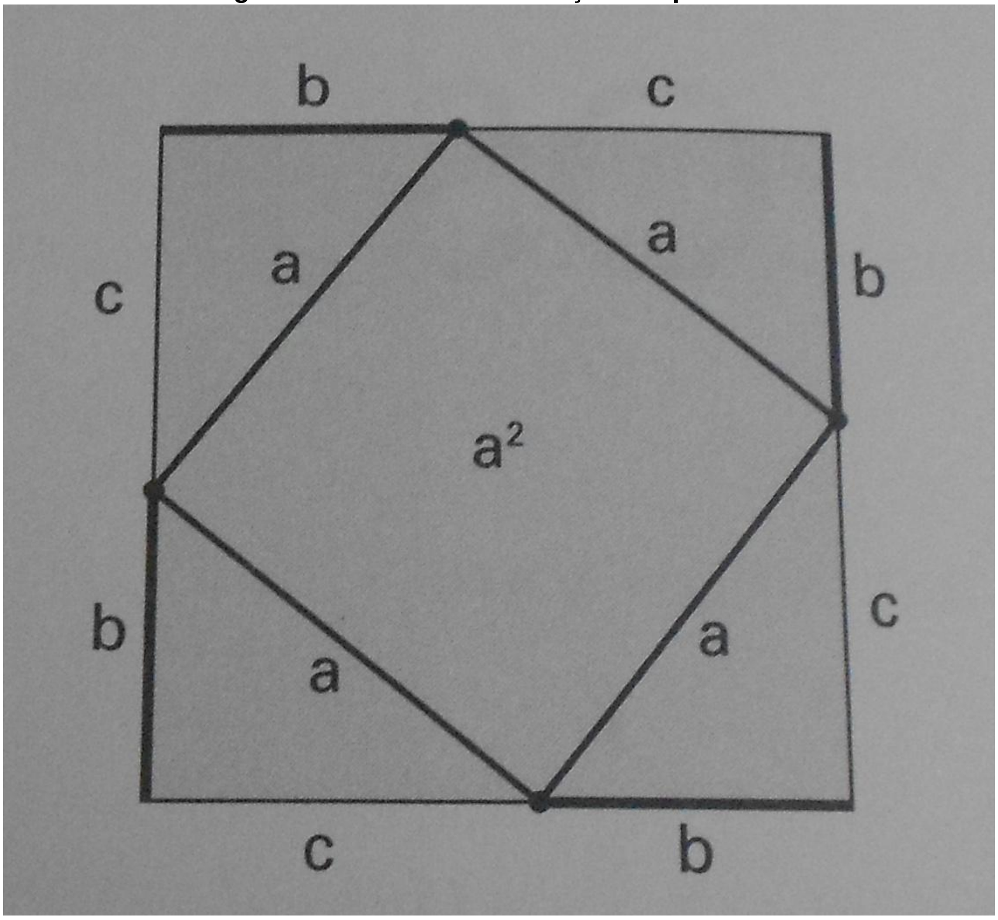
Figura 33 - Modelo do quadrado de lado 9cm



Fonte: Trambaiolli Neto (1996), Suplemento de Trabalhos e Outros Desafios, página 2

E, a partir de cada vértice marcasse nos lados correspondentes 5cm a partir de cada vértice. Em seguida, os pontos marcados deveriam ser marcados formando um quadrilátero central, conforme figura 35. Ao concluir a tarefa solicitada os alunos foram questionados sobre qual figura central apareceu. Apesar da unanimidade na afirmação de ser um quadrado a figura central, foi solicitado que justificassem a afirmativa. Dentre as justificativas, prevaleceu a da aluna A27, “os lados possuem mesma medida e, utilizando o esquadro dá para ver os quatro ângulos retos.”

Figura 34 - Modelo da marcação no quadrado



Fonte: Trambaiolli Neto (1996), Suplemento de Trabalhos e Outros Desafios, página 2.

Após a confirmação da figura central, os alunos responderam, individualmente, as questões 02 e 03 da atividade[18]. Em seguida, foi proposto o recorte da figura nas marcações feitas e, assim, o desmembramento do quadrado inicial em cinco figuras geométricas. Nesse instante, a questão referente à relação entre os ângulos foi levantada e todos haviam compreendido que os quatro triângulos seriam congruentes. Segundo o aluno A2, “Todos os lados têm a mesma medida, né? Esse é um caso de congruência, o L.L.L.”; já o aluno A27 ressaltou que “poderia, também, ser um caso de L.A.L., os dois lados que a gente já conhece e o ângulo reto”.

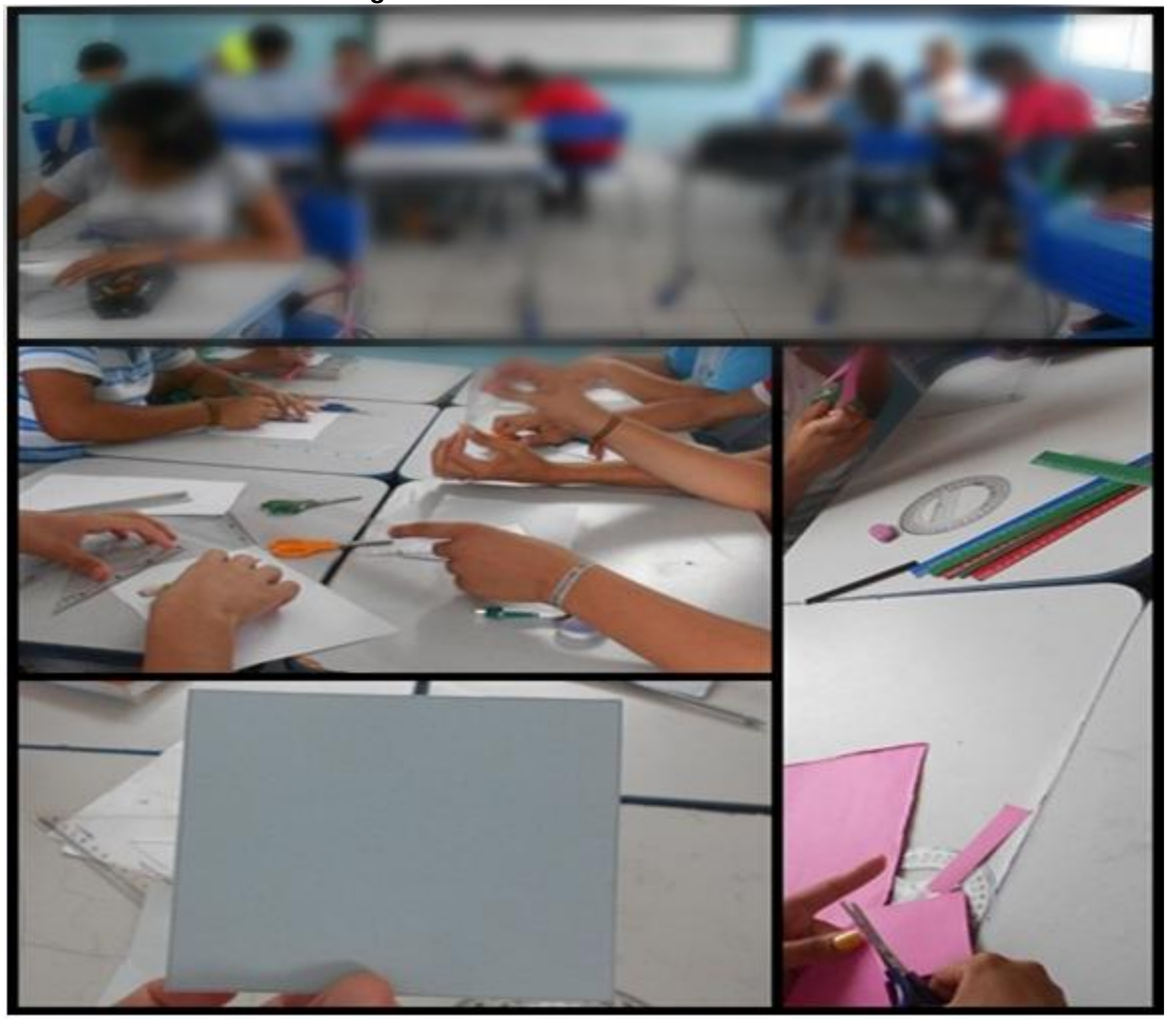
Quanto à figura central (chamado de “quadrado menor”), foi calculada a sua área usando a diferença entre áreas, com a ajuda das soluções das questões 02 e 03. Em seguida, (questão 06) foi calculado o lado do quadrado usando uma simples

---

[18] Vide apêndice D

operação aritmética (radiciação), apesar de ser um número irracional, com o uso de aproximação os alunos conseguiram confirmar usando uma régua.

Figura 35 - Alunos realizando a atividade

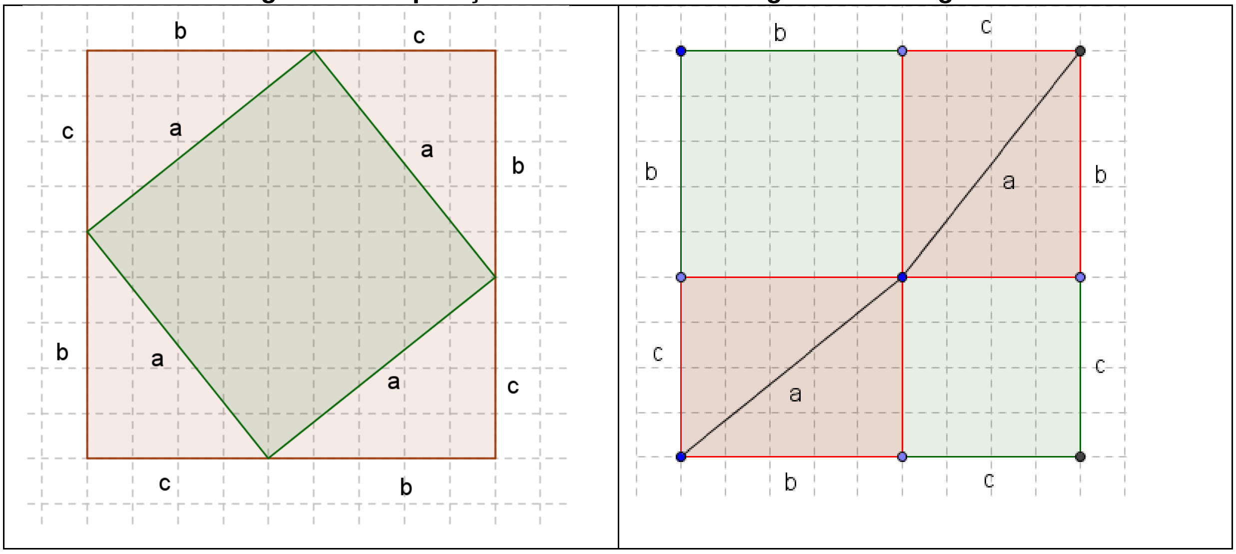


Fonte: autora, 2015.

A partir desse momento, os alunos foram questionados sobre a relação entre os lados dos triângulos e a área do quadrado central. A professora utiliza o software geogebra para comparar o quadrado central com os dois quadrados formados pelos catetos do triângulo. Os alunos auxiliam na condução da aula, pois são questionados continuamente durante a construção conforme figura 12. Dentre os questionamentos estão: Quais os lados do triângulo retângulo? Qual a área do quadrado de lado 5cm? E o de lado 4cm? O que ocorreria se colocássemos o quadrado de área 25cm² dentro do quadrado de área 41cm²? O que sobraria (quanto à área)?

À medida que o desenho se formava, os alunos começavam a deduzir o que estava acontecendo.

Figura 36 - Exposição do Teorema de Pitágoras no Geogebra



Fonte: autora, 2015.

Assim, os elementos do triângulo retângulo foram devidamente nomeados. Não eram mais chamados de lados do triângulo, mas de catetos e hipotenusa. Os alunos foram instigados a tentar enunciar o Teorema de Pitágoras usando as notações já conhecidas.

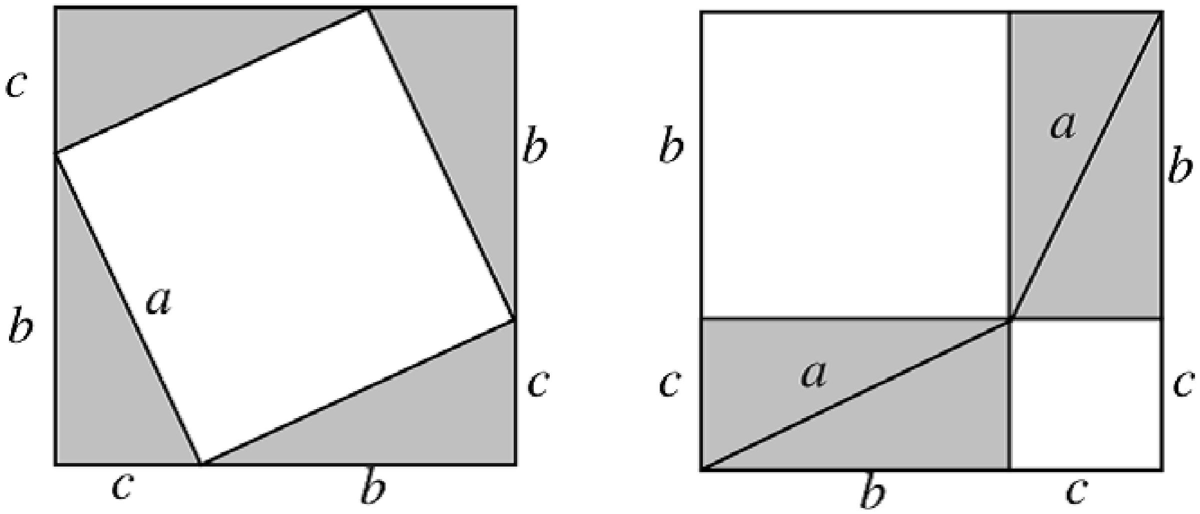
Muitas relações foram estabelecidas e todos queriam participar. Dentre as falas, destacaram-se a de dois alunos, são elas: “Se elevar ao quadrado as medidas do cateto e depois somar, achamos o quadrado da hipotenusa” (Aluna A25), “A medida da hipotenusa elevada ao quadrado dá o mesmo valor da soma dos quadrados dos catetos, né?” (aluno B12).

Até que o Teorema foi devidamente enunciado.

> Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa (a) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (b e c). (DANTE, 2012,p.180)

Na ocasião foi mostrado aos alunos como Pitágoras demonstrou o Teorema usando o mesmo artifício que eles usaram na composição da atividade. De posse do recorte que eles fizeram compuseram um novo quadrado, conforme a figura 39.

Figura 37 - Demonstração por Pitágoras



Fonte: Lages Lima (2013), Temas e problemas elementares, pág.75

As duas últimas questões da atividade relativa ao Teorema de Pitágoras foram realizadas em casa e discutidas na aula posterior, quando ocorreu a exposição de outras demonstrações do Teorema de Pitágoras, finalizando com uma atividade de sondagem contendo aplicações do Teorema de Pitágoras.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática como objeto de aprendizagem, apresenta-se, em muitas escolas, inflexível, descontextualizada e imutável, tornando o aluno mero expectador de seu conhecimento. A aprendizagem mediante reprodução de um modelo preestabelecido pelo professor transforma o aluno em coadjuvante de um processo que é seu, é o seu conhecimento que está sendo formado.

No embate a essa metodologia, a inserção da lógica-matemática no currículo fomenta a percepção e a construção do conhecimento, exalta as experiências oriundas dos alunos, associando-se a construção histórica dos conceitos.Socializando idéias e construindo conceitos, assim o aluno passa a ser o agente atuante de seu próprio saber, ele pensa, discute, relaciona, soluciona e compartilha seu saber com seus colegas, tudo intermediado pelo professor que se torna condutor da formalização do conhecimento de seus discentes.

Analogamente, a história proporciona aos docentes situações construtoras de conceitos, definições e teoremas, possíveis de serem utilizadas como propulsora da concepção de um conteúdo. Questões que atravessam o tempo e continuam atuais, presentes no cotidiano do homem contemporâneo.

O mundo atual desencadeia na vida dos indivíduos, cada vez mais, problemas mais complexos, e é necessário possuir raciocínio prático e formação lógica compatível. Esse conhecimento advém do saber matemático que se impregna na sociedade moderna e constitui fator importante para a obtenção de cidadãos conscientes e preparados para solucionar os problemas cotidianos.

A proposta aplicada nas duas turmas do 9° ano do Ensino Fundamental enalteceu o conhecimento geométrico dos alunos e transformaram sua forma de resolver problemas matemáticos. Eles não mais usariam apenas fórmulas e artifícios para decorá-las, eles a construíam. Demonstraram que o conhecimento era gradativo, os conceitos se firmavam à medida que os alunos completavam o quebra-cabeça, interligando os conteúdos e descobrindo a magia da matemática, a cada etapa que se concluía um saber era adquirido.

É notória a ligação existente entre os conteúdos matemáticos, em uma atividade utilizando-se três ou mais conceitos. Na proposta os alunos aprenderam a manusear instrumentos geométricos, utilizar o sistema de medidas, realizar pesquisas, fazer uso de conceitos já estudados para justificar novos conceitos.

Independente do nível da educação básica, o saber construído enaltece o espírito e desenvolve a auto-estima e a autonomia, elementos essenciais para a construção de um ser humano consciente e participativo na sociedade em que vive. Pois o conhecimento adquirido com autonomia permanece por toda a vida e torna-se estrutura viva dos conceitos próprios do indivíduo.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, Nicolas. **Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics**, v.18, n. 2, p. 147 - 176, 1987.

BALACHEFF, Nicolas. **Preuve et demonstration au collège**. RDM, 3(3), p. 261 - 304, 1982.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. 11. ed. – Rio de janeiro: SBM, 2012.

BARROSO, Juliane Matsubara; obra coletiva. **Conexões com a matemática.** V.3., 1. ed. Editora Moderna: São Paulo, 2010.

BITTAR, Marilena. **A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática**. In Educar em Revista, n. Especial 1/2011, p. 157-171. Editora UFPR. Curitiba, 2011.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação Matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**.Brasília: MEC, SEB, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **PCN+ Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, SEB, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, SEF, 1998.

CORREIA DE SÁ, Carlos; ROCHA, Jorge (Editores).**Treze Viagens pelo Mundo da Matemática.**2. ed. SBM: Rio de Janeiro, 2012.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 2003.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Suisse: Peter Lang S. A., 1995.

FONSECA, Maria da Conceição F.R ET al. **O Ensino da Geometria na Escola Fundamental: três questões para a formação do professor nos ciclos iniciais**. 3. ed. Campinas, Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, Elon Lages; WAGNER Eduardo; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto Cesar. **Temas e problemas elementares**. COLEÇÃO PROFMAT. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MENDES, Iran Abreu. Coleção Contextos da Ciência. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** 2. ed. Editora Livraria da Física: São Paulo,2009.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Manual de Redação Matemática** 1. ed. SBM: Rio de Janeiro, 2014.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um convite à matemática: fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades.** 1. ed. EDUFCG: Campina Grande, 2011.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria. (Coleção PROFMAT; 09). Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. Coleção Tendências em educação Matemática, 3. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa.** 3. ed. Editora Autêntica: Belo Horizonte,2011.

PARZYSZ, Bernard. '**Knowing' vs 'seeing'. Problems of the plane representation of space geometry figures, in Educational Studies in Mathematics,** 19: 79-92, 1988.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Coleção Tendências em educação Matemática, 7. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 2. ed. Editora Autêntica: Belo Horizonte, 2009.

PROJETO ARARIBÁ: **Matemática**: ensino fundamental/ Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática**/ Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira Carvalho. (Coleção PROFMAT; 03). Rio de Janeiro: SBM, 2012.

TRAMBAIOLLI NETO, Egídio. Série o contador de histórias e outras histórias da matemática. **Os peregrinos.** Editora FTD: São Paulo, 1996.

APÊNDICE A– Folha do aluno da atividade 1

Aluno: ____

Disciplina:Matemática Série: ___ Turma: ___ Data:___/__/___

TABELA DE NOTAÇÕES

SÍMBOLO	COMO SE LÊ	SÍMBOLO	COMO SE LÊ
$\exists$	Existe; Existe um; Existe pelo menos um	$\Rightarrow$	Implica (que); acarreta
$\forall$	Para todo; Qualquer que seja;Para cada	$\Leftrightarrow$	Se, e somente se; equivalente (no caso de proposições)
$\leq$	Menor (do) que ou igual a	$<$	Menor (do) que
$\geq$	Maior (do) que ou igual a	$>$	Maior (do) que
$\approx$ $\cong$	Aproximadamente	$\equiv$	Equivalente a; Côngruo a
$\sim$	Semelhante	; |	Tal que; Tais que
$\in$	Pertence	$\cup$	União
$\emptyset$	Conjunto Vazio	$\cap$	Interseção
$\therefore$	Então; Portanto; Logo; Donde	$\stackrel{\text{def}}{=}$ $:=$	Por definição

OBSERVAÇÃO: A negação dos termos se dá através do corte dos símbolos. Exemplos: $\nexists$ (não existe); $\notin$ (não pertence), etc.

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) Transcreva para a linguagem simbólica matemática as sentenças a seguir:

a) “x é um número real, tal que x é maior que 5.”

____

b) “Para todo número natural, existe um outro número natural maior que ele.”

____

c) “Dois triângulos cujos vértices são A, B, C e D, E, F, respectivamente, são congruentes, se e somente se os lados correspondentes possuem a mesma medida.” (Faça um esboço das figuras)

____

2) Escreva o significado das sentenças que estão expressas em símbolos:

a) $\{x \in \mathbb{Z} / 5 \leq x < 8\}$

____

b) $\left\{\exists\, n \in \mathbb{Q} / n = \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z}\right\}$

____

3) Agora é com você! Crie 3 sentenças verdadeiras e escreva-as das duas formas!!

a) ____

____

____

b) ____

____

____

c) ____

____

____

APÊNDICE B– Folha do aluno da atividade 2

Aluno: ____

Disciplina:Matemática   Série: ___   Turma: ___   Data:___/__/___

ATIVIDADE I: CONCEITOS MATEMÁTICOS

Estabeleça os conceitos matemáticos de acordo com o que foi exposto pela professora:

1. **Axioma**: ____
   ____

2. **Definição:** ____
   ____

3. **Argumento:** ____
   ____

4. **Proposição:** ____
   ____

5. **Teorema:** ____
   ____

6. **Lema:** ____

7. **Corolário:** ____

Um Teorema é constituído de hipótese e tese. Dados os teoremas abaixo, circule a hipótese e grife a tese:

a) **Teorema 1:** Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

b) **Teorema 2:** Se m e n são retas paralelas, então, todos os pontos de m estão à mesma distância da reta n.

Agora é com você!! Crie quatro exemplos de teoremas. Não precisa envolver matemática!!

A. **Teorema I:** ____
____

B. **Teorema II:**____
____

C. **Teorema III:**____
____

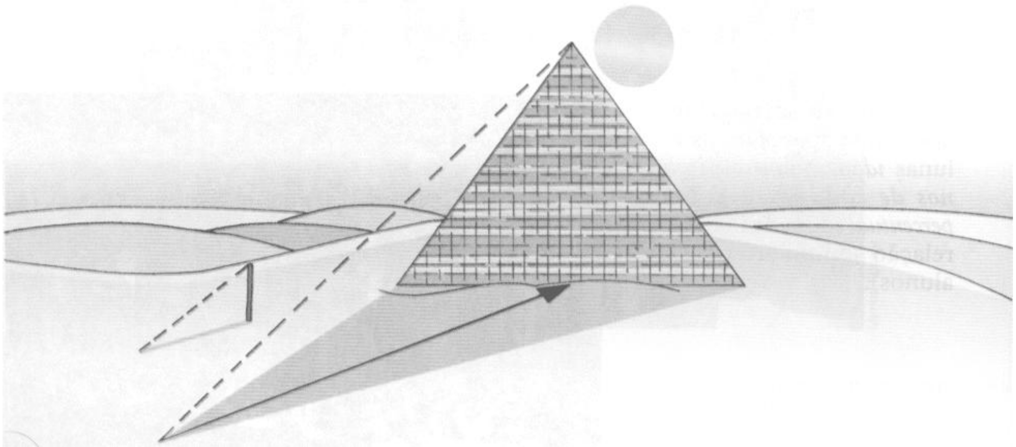
APÊNDICE C– Folha do aluno da atividade 3

Aluno: ____

Disciplina:Matemática Série: ___ Turma: ___ Data:___/__/___

ATIVIDADE : TEOREMA DE TALES

Observando a figura abaixo, resolva o problema proposto a Tales de Mileto pelo Faraó Amásis:



Num dia quente, em uma cidade do Antigo Egito, o comerciante Tales foi indagado e desafiado a encontrar a altura da Grande Pirâmide de Quéops. Tendo apenas seus conhecimentos em proporcionalidades, um bastão e um jeito peculiar de medir distâncias, Tales fincou o bastão nas escaldantes areias do deserto, observou a altura do sol e a projeção das sombras da pirâmide e do bastão. Calculou a extensão das projeções e determinou:

- A sombra da pirâmide era de 160m;
- A sombra do bastão era de 2m;
- A altura do bastão era 1,6m.

Qual a altura da pirâmide de Quéops?

APÊNDICE D– Folha do aluno da atividade 4

Aluno: ____

Disciplina:Matemática Série: ___ Turma: ___ Data:___/__/___

ATIVIDADE : TEOREMA DE PITÁGORAS

1) Qual figura central apareceu? Justifique.

____

____

2) Qual a área do quadrado inicial?

____

3) Qual a área dos triângulos encontrados?

____

4) Qual a relação entre os triângulos?

____

____

5) Calcule a área do quadrado menor (induzindo a diferença de áreas).

6) Calcule o lado do quadrado menor.

7) Resolva a expressão $5^2 + 4^2$. Qual a relação dessa expressão com a aatividade que realizamos agora?

8) Forme quadrados com 4 triângulos e calcule a área.

9) Faça uma resenha sobre o teorema de Pitágoras