UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS – DCEN

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ACÁCIO LIMA DE FREITAS

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA: Uma proposta para licenciatura em matemática e a utilização de jogos de recorrência

MOSSORÓ – RN
2015

ACÁCIO LIMA DE FREITAS

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA: Uma proposta para licenciatura em matemática e a utilização de jogos de recorrência

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Ciências Exatas e Naturais – DCEN da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof.º Dr.º Antonio Ronaldo Gomes Garcia.

MOSSORÓ – RN
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Sistema de Bibliotecas

ACÁCIO LIMA DE FREITAS

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA: Uma proposta para licenciatura em matemática e a utilização de jogos de recorrência

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Ciências Exatas e Naturais – DCEN da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 21 de Maio de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof.º Dr.º Antonio Ronaldo Gomes Garcia (Orientador)

Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof.º Dr.º Walter Martins Rodrigues

Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof.º Dr.º Aleksandre Saraiva Dantas

Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Às quatro mulheres importantes na minha vida: Maura Vitória de Freitas (mãe), Verônica Maria Silva de Freitas Lima (esposa), Maria Vitória Silva Freitas (filha) e Ana Maria Silva Freitas (filha).

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as bênçãos que me concedeu nesta vida.

Ao Prof.º Dr.º Antônio Ronaldo Gomes Garcia pela orientação.

Aos membros da banca, Prof.º Dr.º Antonio Ronaldo Gomes Garcia, Prof.º Dr.º Walter Martins Rodrigues, Prof.º Dr.º Aleksandre Saraiva Dantas pelas orientações.

À Universidade Estadual do Ceará (UECE) pela concessão do afastamento para cursar o mestrado.

Ao corpo docente do mestrado pela condução dos trabalhos e pelo zelo com as atividades.

A minha família, principalmente a minha esposa.

A meus pais, pela acolhida.

RESUMO

A proposta de trabalho em Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), embora seja pensamento de alguns, não se trata de confundir objetos com objetivos, nem de atrair o aluno pelo material em si. Antes de tudo, conduz-se por uma proposta motivadora em que os recursos didáticos possam aproximar o aluno do estudo e despertar o interesse por situações-problemas que o desafie e, assim, exigir conhecimentos matematicamente elaborados. A perspectiva da dissertação é mostrar que a ideia do LEM não é recente, que os documentos da reforma do ensino médio defendem sua inserção nas escolas e que os cursos de licenciatura plena em matemática devem possuir seus LEM na formação inicial do professor e, por fim, colaborar com uma proposta concreta de criação de um LEM nas Licenciaturas. Das muitas possibilidades de se trabalhar em um LEM, o foco foi o uso da recorrência como tema para desenvolver e descobrir padrões através de jogos, com aplicações no jogo Anéis Chineses. A partir das leituras e pesquisa em livros especializados na área de matemática e educação matemática, traça-se um plano de abordagem do tema LEM, seguindo a perspectiva da sua concepção, da sua importância através da indicação do uso em sala de aula pelos documentos da reforma do Ensino Médio e de uma proposta de trabalho com o LEM nas licenciaturas, dentro da prática como componente curricular. Como prática de atividade no LEM, estuda-se a descrição matemática de modelos que quantificam os movimentos do jogo conhecido como Anéis Chineses. Escolhe-se este jogo por ser pouco conhecido em nosso meio e ter despertado a curiosidade de alguns matemáticos, como Cardano em 1550, John Wallis em 1685 e Edouard Lucas em 1891. Das fontes estudadas, a proposta do uso de LEM nas escolas é uma ideia defendida desde o século XIX. As licenciaturas em matemática vêm descobrindo a necessidade de inserir em seus projetos pedagógicos o LEM, e o jogo Anéis Chineses gera várias possibilidades de construção de modelos de recorrências. Apesar da ideia não ser recente, a sua implantação não teve sua importância devida, tanto nas escolas como nas licenciaturas em matemática, mesmo assim espera-se contribuir para despertar o interesse pelo tema.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Laboratório de matemática. Jogos de Recorrência.

ABSTRACT

The purpose of work in the laboratory of mathematics teaching (LMT), although it is someone´s thought, neither it doesn´t deal to confuse objects with goals, nor to attract students by the material itself. Before of all, leads by a motivating purpose in which the didactic resources can approach the student the study and awake the interest for problem situations that challenge him/ her and, thus, require mathematically elaborated knowledge. The prospect of the dissertation is to show that the idea of the LMT is not recent, that the documents the high school reform defend its insertion in schools and that the full degree in mathematics should own their LMT on teacher ´s initial formation and, finally, collaborate with a concrete purpose of creating a LMT in the degrees. Of the many possibilities of working at a LMT, the focus was the use of recurrence as issue to develop and discover patterns through the games, with applications in the Chinese Rings Game.From the readings and research in specialized books in the mathematics area and mathematics education, construct a plan of approach of the LMT issue, following the prospect of their conception, their importance through the indication of the use in the classroom by documents of the high school reform and a work purpose with the LMT in degrees, within the practice as curricular component. As practice activity in LMT, it studies the mathematical description of models that quantify the game movements known like Chinese Rings. It chooses this game for being little known in our environment and have awoken the curiosity of some mathematicians such as Cardano in 1550, John Wallis in 1685 and Edouard Lucas in 1891. From the studied sources, the purpose of use of LMT in the schools is an idea defended since the 19th century. The degrees in mathematics have been discovering the necessity to insert in their pedagogical projects the LMT, and the Chinese Rings Game generates several possibilities of construction recurrences models. Despite of the idea not to be recent, its introduction did not have its due importance, both in schools and in degrees in mathematics, even so it is expected to contribute to awake interest in the topic.

Keywords: Mathematics Teaching. Math Laboratory. Recurrences Games.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Anéis Chineses..44
Figura 2 - Artefato com a haste liberada...52
Quadro 1 - Movimentos para retirar a haste dos anéis......................................54
Quadro 2 - Movimentos para retirar a haste dos anéis......................................56
Quadro 3 - Movimentos para retirar a haste dos anéis......................................57
Quadro 4 - Movimentos para retirar a haste dos anéis......................................58
Quadro 5 - Movimentos para colocar a haste nos anéis....................................66
Quadro 6 - Movimentos de retirar e colocar a haste..67
Quadro 7 - A quantidade de movimentos de cada anel.....................................68

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CA_n	Colocar a n-ésima argola (anel)
CNE/CP	Conselho Nacional de Educação – Conselho Pleno
ICMI	International Commission on Mathematical Instruction
LEA	Laboratório de Ensino de Álgebra
LEG	Laboratório de Ensino de Geometria
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
LEMDP	Laboratório de Ensino de Materiais Didáticos Pedagógicos
LET	Laboratório de Ensino de Tecnologias
LPEM	Laboratório de Pesquisa em Educação Matemática
MEC	Ministério de Educação e Cultura
OCNEM	Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
TA_n	Tirar a n-ésima argola (anel)
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..13

1 LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA – LEM..................16

1.1 Concepções de LEM...16

1.2 Em Defesa das Escolas Possuírem um LEM..20

1.3 As Universidades e o LEM..25

2 A FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR E O LEM............................29

2.1 A Formação do Professor e o LEM na Matriz Curricular..........................29

2.2 Uma Proposta de Criação das Disciplinas de LEM.................................30

2.2.1 Laboratório de Ensino de Álgebra – LEA..32

2.2.2 Laboratório de Ensino de Geometria – LEG.......................................34

2.2.3 Laboratório de Ens. de Mat. Didáticos Pedagógicos – LEMDP..........37

2.2.4 Laboratório de Ensino de Tecnologias – LET....................................39

2.2.5 Laboratório de Pesquisa em Educação Matemática – LPEM.............41

3 O LEM E A DIVERSIDADE DE MATERIAIS DIDÁTICOS......................43

3.1 A Busca por Fontes de Pesquisa...45

3.2 Os Anéis Chineses – O Contexto Histórico...47

4 O ESTUDO MATEMÁTICO DO JOGO ANÉIS CHINESES....................49

4.1 Ideias Básicas de Recorrência...49

4.1.1 Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes...49

4.1.1.1 Teorema 1...49

4.1.1.2 Teorema 2...50

4.1.2 Recorrências lineares de segunda ordem não homogêneas, com coeficientes constantes...50

4.1.2.1 Teorema 3...51

4.2 Cálculos da Quantidade de Movimentos dos Anéis................................52

4.2.1 Cálculo do total de movimentos dos anéis, para retirar a haste........52

4.2.1.1 Teorema 4...60

4.2.1.2 Teorema 5...62

4.2.1.3 Teorema 6...63

4.2.2 Cálculo do total de movimentos dos anéis, para colocar a haste.....65

4.2.3 Cálculo da quantidade de movimentos de cada anel.........................68

4.2.3.1 Teorema 7..70
4.2.3.2 Teorema 8..73
CONCLUSÃO..76
REFERÊNCIAS..78
APÊNDICES...82
APÊNDICE A - EMENTÁRIO PARA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE ENSINO DE ÁLGEBRA..82
APÊNDICE B - EMENTÁRIO PARA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE ENSINO DE GEOMETRIA...83
APÊNDICE C - EMENTÁRIO PARA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATERIAIS DIDÁTICOS E PEDAGÓGICOS.......................84
APÊNDICE D - EMENTÁRIO PARA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE ENSINO DE TECNOLOGIAS..85
APÊNDICE E - EMENTÁRIO PARA DISCIPLINA LABORATÓRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA...86

INTRODUÇÃO

A importância do conhecimento matemático na formação do cidadão no mundo de hoje é defendida como sendo de igual importância a língua materna, basta comparar sua carga horária no currículo escolar com outras áreas do conhecimento. Assim, a necessidade de um cuidado com o ensino-aprendizagem dessa área do conhecimento se faz necessária, pois é possível identificar obstáculos que dificultam o aprendizado da linguagem matemática ao longo dos anos escolares. Este cuidado começa com a formação inicial do professor e vai até a sua prática em sala de aula com os valores e métodos para ensinar matemática.

Na escola, local da sua prática de ensino e aprendizagem, a escolha dos conteúdos, a forma de trabalhar com os conteúdos e o planejamento do projeto pedagógico podem contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação e investigação. Para alcançar tais objetivos, o fazer didático-pedagógico dos professores de matemática em sala de aula deve contar com recursos didáticos. O planejamento da escolha dos conteúdos e dos métodos a serem ensinados e a sua formação continuada, no aspecto da leitura e da pesquisa, devem ser incentivados pelos dirigentes das escolas e comunidade em geral. Nesta perspectiva é que se propõe o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) na escola, como um espaço para aulas de matemática, para planejamento e criação de projetos, para criação de atividades experimentais, para formação continuada dos professores, para produção de recursos didáticos que vão desde os materiais concretos (artefatos) a situações didáticas que facilitem e tornem o aprendizado da matemática algo significativo e atrativo para o aluno, despertando o seu interesse pelo estudo da matemática.

Trata-se da perspectiva do LEM não só como um espaço didático-pedagógico e metodológico, mas também como atitude do professor de refletir sobre sua práxis pedagógica escolar de ensino e aprendizagem da matemática. Busca-se conhecer pela pesquisa, através das leituras em livros da área, se esta ideia é recente e o que é um laboratório de matemática. Na busca de defender sua existência na escola, damos ênfase a um documento da reforma do Ensino Médio, as “Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio”. Propõe-se ainda a implantação do LEM nos Cursos de Licenciatura Plena em Matemática, fortalecendo, assim, a formação inicial do professor e, para isto, é dada uma sugestão concreta de sua implantação e criação.

Em uma segunda etapa do trabalho, a da prática de atividade laboratorial, apresenta-se o jogo Anéis Chineses. Aborda-se o histórico e as orientações de como atingir o objetivo do jogo, que é liberar uma haste de metal que está presa pelos anéis ou, caso contrário, prender a haste que inicialmente pode estar livre. Para entender o jogo e dele tirar ideias matemáticas, apresentam-se vários quadros sequenciais com a movimentação dos anéis que se resume em tirar ou colocar cada anel passando por dentro da haste. Dividem-se os quadros em duas etapas, na primeira retratam-se os passos que devemos seguir com os anéis para retirada da haste presa aos anéis e na segunda parte apresenta-se a sequência de movimentos a serem dados para colocação da haste a ser presa pelos anéis. Trata-se também do jogo matematicamente, com modelos de recorrência que quantificam a quantidade de movimentos dos anéis para retirada ou recolocação da haste no artefato, e várias outras situações. No final, comparam-se dois quadros (quadro 1 e o quadro 5), onde o primeiro deles representa os movimentos dos anéis para retirada da haste e o segundo representa os movimentos dos anéis para recolocação da haste, estuda-se a através do quadro 7, a quantidade de movimentos de cada anel de forma individual e quantifica-se através de um modelo matemático (teorema 8) a quantidade de movimentos de cada anel individualmente para qualquer artefato, com uma quantidade qualquer de anéis.

Na realização do trabalho, foram consultadas fontes variadas de livros e periódicos em matemática, bem como de educação matemática que fundamentassem teoricamente alguns questionamentos como: O que é um laboratório de matemática? A ideia de um LEM é recente? É importante a escola possuir um laboratório de matemática? Como inserir e construir uma proposta de LEM na formação inicial do professor nos cursos de licenciatura plena em matemática? Como modelar e produzir matemática através do jogo Anéis Chineses que seja acessível a professores e alunos do ensino médio? Buscando respostas a estas perguntas, reuniu-se uma bibliografia que foi consultada e foram feitas citações de alguns livros ao longo do trabalho. Já a ideia fundamental que gerou estas reflexões veio da experiência do autor na sua prática educativa em matemática, dentro da sala de aula da educação básica e da sala de aula na formação inicial do professor de matemática na universidade.

Portanto, em linhas gerais, este trabalho fará no capítulo 1 uma apresentação sobre LEM, enfatizando concepções e pontos de vista na sua defesa de existência nas escolas e universidades. No capítulo 2, a ênfase é a formação inicial do professor de matemática e a proposta de criação de um LEM nos cursos de licenciatura plena em matemática. No capítulo 3, aborda-se o jogo Anéis Chineses, como fonte de inspiração para um trabalho laboratorial. Dando ênfase as fontes de pesquisa e seu histórico. O capítulo 4 explora o tema recorrência, em que se apresenta um resumo do conteúdo a ser utilizado e aplica-se na criação de modelos matemáticos que estudam o jogo.

1 LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA – LEM

1.1 CONCEPÇÕES DE LEM

Desde muito cedo, nossas crianças têm contato com ideias de matemática e de língua portuguesa, tendo início com a alfabetização das letras e dos números. Assim, estuda-se, ao longo de sua formação básica, tanto a língua materna quanto linguagem matemática com uma mesma carga de atividade. A importância das duas disciplinas para o currículo escolar tem o mesmo peso social. Desta forma, pode-se afirmar que a matemática possui uma função social e, sem querer aprofundar o tema, poderíamos citar o pensamento do professor Morris Kline, quando enfaticamente afirma:

> [...] a matemática não é um corpo de conhecimento auto-suficiente isolado. Ela existe primariamente para ajudar o homem a compreender e dominar o mundo físico e, até certo ponto, o mundo econômico e social. A matemática serve a fins e propósitos. Se ela não tivesse esses valores, não receberia nenhum lugar no programa escolar. Por ser ela extraordinariamente útil é que está em grande demanda e recebe tanta ênfase hoje em dia [...] (KLINE, 1976, p.102).

Pela sua importância no contexto social é que existe uma preocupação com o seu ensino e aprendizagem. Assim, sua aprendizagem passa a ser uma prioridade para a formação do cidadão e para o crescimento social de uma nação. Mas como atingir os anseios e os interesses dos nossos alunos em aprender esta linguagem capaz de interpretar o mundo em que vivemos se estamos imersos em uma era tecnológica que desperta nos nossos jovens outras prioridades de descobertas no uso e no entretenimento? Necessita-se apontar para algo de inovador no contexto do ensino-aprendizagem da matemática, não um método de ensino, mas uma atitude de procurar despertar no aluno o prazer pelo estudo desta área do conhecimento, através de ações práticas e oportunidades de envolver o aluno na construção do seu saber matemático. Defende-se o LEM na concretude de um espaço delineado ao ambiente matemático que gere atitudes e propostas de ensino-aprendizagem inovadoras e elucidadas pelas pesquisas em Instrução Matemática. Este espaço caracteriza-se não somente por ser um espaço físico, mas um espaço de novas atitudes de ensino e oportunidades didáticas para a aprendizagem da matemática. No que diz respeito ao aspecto físico, a escola deve reservar uma sala para o ambiente do LEM, que deve se organizar para atender as necessidades individuais e coletivas, e neste caso sugerimos mesas e carteiras de forma que permitam a possibilidade de atividades não somente coletivas, mas também individualizadas, como aplicações de competições olímpicas de matemática. A decoração desse espaço faz-se necessária para que caracterize o espaço como um ambiente para o estudo de matemática e o aluno se sinta envolvido pelo design da sala, deixando uma aparência de que naquele espaço todos se identificam com a matemática. Para tanto, sugere-se uma comunicação visual com pôsteres temáticos de matemática, com aplicações desta ciência, como: Matemática e a Arte, Matemática e as Tecnologias, Matemática e a Natureza, História da Matemática, entre outros (frases, citações de matemáticos e fórmulas). Defende-se, também, o uso de um painel-mural de matemática na parte externa da sala, não somente identificando a sala do LEM, mas para que todas as atividades e informações no que concerne à matemática da escola sejam divulgadas neste espaço. No aspecto das novas atitudes de ensino e oportunidades didáticas, o LEM deve ter apoio em materiais manipulativos, artefatos, jogos, tecnologias, acervos de filmes e documentários, livros e paradidáticos de matemática, além de projetos e ações que deem oportunidade aos alunos de desenvolverem uma cultura de estudo em matemática. Desta forma, o LEM configura-se como, “o lugar da escola onde os professores estão empenhados em tornar a matemática mais compreensível aos alunos” (LORENZATO, 2006, p.7).

Neste trabalho, a concepção de LEM não é somente um espaço físico de depósito de materiais didáticos e pedagógicos, mas um local da escola, como afirma Lorenzato (2006), reservado para aulas regulares de matemática; um espaço para tirar dúvidas dos alunos e aplicações de avaliação; para professores planejarem suas aulas ou ainda um espaço reservado a exposições; para planejamento de olimpíadas de matemática; sala de vídeo e de debates de documentários em matemática. Portanto, um local para criação e desenvolvimento de atividades experimentais, com produção de materiais práticos e teóricos para o aprimoramento da prática pedagógica dos professores em sala de aula; reuniões da comunidade de pais de alunos que estão envolvidos em projetos e cursos de matemática voltados para as olimpíadas; reuniões com alunos nos preparativos para realização e participação em amostras de ciências e matemática.

Dentre as várias concepções de laboratório abordado por Lorenzato, concordamos quando ele caracteriza o LEM como espaço,

> Especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento, mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas. Neste caso, o professor pode precisar de diferentes materiais com fácil acesso. Enfim, o laboratório de ensino de matemática, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjeturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender (LORENZATO, 2006, p.7).

Quando se fala do LEM como espaço físico e didático do ensino da matemática, deseja-se suscitar entre o ideal e o que é possível ser feito na escola, com isto esperamos não desmotivar a escola. Na realidade, defende-se o LEM não somente como este espaço físico e didático ideal, mas como precursor de uma atitude inovadora do trabalho do professor, que poderá disponibilizar a própria sala de aula, a quadra de esportes ou o pátio da escola para uma prática de trabalho que se chama de prática de atitude experimental. “Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático” (LORENZATO, 2006, p.7).

É fato que a prática experimental do ensino de matemática é defendida por vários pesquisadores. O pensamento de um trabalho laboratorial em matemática é proposto por D’Ambrósio (2000, p.95), quando ele diz “para muitos, isso soa estranho. Matemática experimental? O caráter experimental da matemática foi removido do ensino e isso pode ser reconhecido como um dos fatores que mais contribuíram para o mau rendimento escolar”. No livro O Fracasso da Matemática Moderna, Kline afirma:

> Pode-se fortalecer incomensuravelmente a abordagem intuitiva incorporando-se numa sala de aula de matemática o que frequentemente se chama Laboratório de Matemática. Este consistiria em dispositivos de várias espécies que podem ser usados para demonstrar acontecimentos físicos, dos quais se possam inferir resultados matemáticos (KLINE, 1976, p.193).

O pensamento sobre um ensino de matemática em que os conceitos e conteúdos a serem ensinados possam ter algum significado para o aluno não é uma proposta nova, mesmo assim as dificuldades encontradas pelos professores para uma tomada de atitude diante da prática do LEM vão desde as deficiências da sua formação até a escassez de livros e materiais didáticos que tratem do assunto. Talvez por isto, Kline (1976, p.195) afirma "[embora] a idéia de um Laboratório de Matemática não seja nova, ele não tem sido usado em larga escala, tampouco se tem prestado atenção à invenção de dispositivos hábeis e úteis".

Realmente, a ideia de laboratório de matemática não é nova, pode-se encontrar uma referência ao uso de um LEM como metodologia de ensino, no Brasil, intitulado "O Método do Laboratório em Matemática", no segundo volume do livro "Didática da Matemática", publicado no ano de 1962, escrito por Malba Tahan, pseudônimo do catedrático Júlio César de Mello e Souza. Neste trabalho, o professor Júlio César apresenta várias metodologias de ensino de Matemática, dentre elas o laboratório de Matemática que ele toma como método de ensino. A ênfase no chamado método do laboratório para o ensino é que, segundo o autor Tahan (1962, p.61) "o ensino da matemática é apresentado ao vivo, com auxílio de material adequado à maior eficiência da aprendizagem". Na sua obra, ele fornece informações de como montar um laboratório em uma escola, apresenta exemplos do uso de recursos didáticos no ensino de matemática, vantagens e desvantagens do método de laboratório e ainda apresenta um pequeno histórico do uso deste recurso didático no Brasil ao longo dos anos. Dando continuidade à ordem cronológica, o autor cita ainda o professor Euclides Roxo[1], que já chamava a atenção para o Método do Laboratório de Matemática, em 1929.

> Esses recursos, aliados ao método heurístico, permitem a experimentação e auxiliam a self-discovery, além de concorrer para dar vivacidade e interesse ao ensino e um certo apoio concreto e, talvez, um tanto divertido, ao raciocínio do adolescente, ajudando-o a galgar, o mais suavemente possível, a íngreme rampa da abstração matemática. (ROXO, 1929, apud TAHAN, 1962, p.77-78).

No seu livro, Tahan (1962, p.76) relata que "a ideia de aplicar o método do laboratório, especialmente para certos capítulos da Geometria, já é bem antiga. As primeiras tentativas, nesse sentido, foram feitas na França, em 1877". Este fato reforça a ideia de que a busca por um ensino e aprendizagem da matemática que

[1] Euclides de Medeiros Guimarães Roxo (1890-1950). Foi professor substituto e Diretor do Externato do Colégio Pedro II. Foi catedrático do Instituto de Educação; diretor do ensino secundário do Ministério da Educação e Saúde, participante do Conselho Nacional de Educação e presidente da Comissão Nacional do Livro Didático.

desperte no aluno um desejo por aprender e que o uso de instrumentos didáticos facilita na compreensão de alguns conceitos remontam a tempos em que as interferências do mundo moderno não eram fatores desfavoráveis na competição entre estudo e entretenimento, e mais, que aprender matemática requer esforços de quem ensina e de quem aprende em qualquer época.

Para finalizar, cita-se uma obra traduzida do original “The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary Shool”, do professor de didática da matemática da Universidade de Chicago, J. W. A. Young, 19ª impressão, 1929, por Carlos Luzuriaga para o espanhol cujo título foi “Fines, Valor y Metodo de La Enseñanza Matematica em La escola primaria y secundaria”. Encontra-se nesta obra um capítulo dedicado ao método de Laboratório. No capítulo V do livro, intitulado “El movimento de Perry: El Método de Laboratorio”, Young (1947, p.121), relata as tendências do método de laboratório na Inglaterra e nos Estados Unidos que prometia exercer uma benéfica influencia sobre o ensino de matemática. Ao longo do capítulo, o autor tece considerações sobre: o interesse do aluno pelo estudo da matemática, o concreto e o abstrato nos conceitos matemáticos, a relação da Física com a Matemática, e aqui observamos indícios do que chamamos hoje de contextualização e interdisciplinaridade, e ideias e sugestões de trabalhos laboratoriais para sala de aula, bem como de materiais a serem utilizados. Reforça que o “método de laboratório para o ensino de matemática implica na existência de um laboratório de matemática” (YOUNG, 1947, p.150). Entre as concepções apresentadas de laboratório de matemática, tem-se em comum que o objetivo é facilitar e incentivar o estudo da matemática através de instrumentos e recursos didáticos que promovam o ensino e aprendizagem desta área do conhecimento, tão fascinante para alguns e tão amedrontadora para outros, e que, para isto, é necessária uma sala ambiente. Além disso, um projeto didático pedagógico de trabalho que contemple as ideias e sugestões da prática e da pesquisa em educação matemática.

1.2 EM DEFESA DAS ESCOLAS POSSUÍREM UM LEM

Além da importância para o ensino e a aprendizagem da matemática, defendida por vários estudiosos e professores de matemática, de que forma pode-se estender a uma argumentação que leve em defesa de as escolas possuírem um

LEM para o ensino básico de nível fundamental e médio, que traria um contexto de oportunidades de diálogos e argumentos que sugerisse de forma mais consciente e consistente a defesa do LEM? Sabe-se que a produção acadêmica voltada para o ensino e aprendizagem de matemática nesta área é vasta, não em defesa do uso do laboratório, mas da perspectiva do ensino e aprendizagem de matemática voltada para este nível de escolaridade. Por outro lado, constrói-se a perspectiva das escolas possuírem um LEM dentro do contexto do Ensino Médio, pois se trata de um campo menos explorado.

Muitas mudanças sociais, econômicas e tecnológicas aconteceram nessas últimas décadas. Mudanças estas que exigem novas atitudes e habilidades para um mercado de trabalho de um mundo globalizado. Surge, assim, uma preocupação com a formação dos nossos jovens quanto ao conhecimento de matemática adquirido na escola. Por isso questiona-se: Dão conta hoje os currículos escolares de formar cidadãos para estas mudanças? Será que a escola e seus métodos garantem hoje o cidadão e o profissional de que a sociedade necessita? Sociedade esta de instabilidade em que as pessoas vão precisar de algo diferente, como habilidade de adquirir novos conhecimentos o tempo todo, de tomar decisões e de resolver problemas. Quantos currículos escolares de matemática já ficaram obsoletos e nem se deu conta? Não por falta de orientação, mas talvez por falta de atitude ou dificuldade de mudanças. Já que nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, nos conhecimentos de matemática a uma confirmação de que não falta orientação, “Visando à contribuição ao debate sobre as orientações curriculares, este documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular” (BRASIL. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. v.2, 2006, p.69). Observa-se, neste caso, uma preocupação no propósito de mudanças e reestruturação do fazer didático e pedagógico no ensino de matemática para o nível médio.

Este mesmo documento relata que o ensino e aprendizagem em matemática devem desenvolver competências e habilidades que dê ênfase ao pensar matematicamente e, para isto, “é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdo a serem trabalhados” (BRASIL. OCNEM: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. v.2, 2006, p.70).

Nas questões relativas à metodologia de trabalho, percebemos que a orientação do processo de ensino-aprendizagem de matemática tem fundamentação nos conhecimentos da didática da matemática francesa, quando cita:

> Para o entendimento da complexidade que permeia uma situação didática, iniciamos falando, de forma resumida, de duas destacadas concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática e prosseguimos com a introdução de alguns conceitos, tais como contrato didático, contrato pedagógico, transposição didática, contextualização, que tratam de explicar alguns dos fenômenos que fazem parte da situação didática (BRASIL. OCNEM: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. v.2, 2006, p.80).

Assim, sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática, um diferencial é apresentado quando coloca no aluno uma parcela de responsabilidade sobre sua aprendizagem, já que o aluno passa a ser o pivô desse processo. Nesta metodologia, a aprendizagem de conceitos matemáticos se dá pela construção do conhecimento feito pelo próprio aluno. Para isto, o aluno é colocado diante da resolução de problemas, diferentemente do processo que tradicionalmente ocupou e ainda prevalece nas nossas escolas que é a transmissão de conhecimentos, que define uma concepção de trabalho cujo esquema é conceito, exemplo e exercício. Percebemos assim uma orientação inovadora que rompe com o tradicional e cuja preocupação não se dá pela quantidade de conteúdos de matemática que o aluno na maioria das vezes passa a memorizar, sem ter uma propriedade de entendimento e de significado do fazer matemático desses conteúdos, mas pela qualidade dos conteúdos, ou seja, conteúdos capazes de fazer o aluno desenvolver a capacidade de resolver problemas, proporcionando hábitos de investigação e de criatividade. Dentro deste aspecto inovador, dá-se ênfase à contextualização, que, segundo as orientações curriculares, não deve ser feita de qualquer maneira,

> [...] visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola (BRASIL. OCNEM: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. v.2, 2006, p.83).

Uma forma clara de trabalhar com contextualização é através da resolução de problemas, não problemas “exercícios” como conhecemos da maioria dos livros didáticos, mas com problemas que se chamam de problemas abertos, por serem problemas que levam a definir novos conceitos para a sua resolução. Uma forma de percebermos as situações problemas que levam à contextualização é com a história da matemática. Conforme lemos, “A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática” (BRASIL. OCNEM: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. v.2, 2006, p. 86). Assim, o papel da história da matemática no ensino e aprendizagem da mesma pode ser aceito como um importante veículo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos, mesmo porque se pode estabelecer em grande parte uma relação entre etapas do desenvolvimento da matemática e a evolução da humanidade.

Outro aspecto de mudança que clama por uma inserção na escola é o uso de tecnologias. É perceptível a sociedade de hoje envolvida pelas tecnologias de informação e comunicação que exigem dos indivíduos habilidades para o uso e manuseio no seu dia–a–dia. Esta realidade social faz parte da vida dos alunos que possuem uma relação muito próxima com estas tecnologias. Desta forma, como fazer uso destes recursos como instrumento didático-pedagógico para o ensino e aprendizagem da matemática? Nesta direção, “é importante contemplar uma formação escolar em dois sentidos, ou seja, a matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a matemática” (BRASIL. OCNEM: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, v.2, 2006, p.87). Assim, ferramentas tecnológicas como calculadoras e planilhas eletrônicas são algumas das tecnologias que podem ser exploradas nestes dois sentidos. Já a ferramenta que conduz tecnologia para a matemática seria, por exemplo, softwares educativos voltados para o contexto do ensino de álgebra e de geometria. Não se pode deixar de citar um recurso tecnológico que possui um valor educativo grande: o vídeo. O uso correto de filmes e documentários pode levar a grandes debates e projetos de pesquisa. Assim, traçados os objetivos de um projeto de trabalho, pode-se inserir as tecnologias como recursos que podem ajudar a caminhar na descoberta de novos conhecimentos.

Dando continuidade à argumentação com referências nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, v.2, 2006, surge o tema “organização curricular e projeto político – pedagógico”. Observa-se que a proposta de organizar o currículo passa pela integração dos conhecimentos entre duas ou mais disciplinas, diferentemente do processo tradicional, que trabalha o conhecimento com as disciplinas de forma individual. Esta proposta de trabalho necessita de uma postura coletiva por parte dos professores e, também, de projetos integrados entre conhecimentos afins. A palavra de ordem neste contexto é interdisciplinaridade. Esta é uma estratégia pedagógica que visa assegurar aos alunos a compreensão dos fenômenos naturais e sociais. Espera-se nesta estratégia de ensino que os professores não só trabalhem de forma individualizada o conhecimento da sua disciplina, mas que, também, articulem-se de maneira que haja uma interação entre os conhecimentos que ora são ensinados, provocando um diálogo e uma interação entre os conhecimentos.

Observa-se que as OCNEM (2006) organiza e orienta os professores numa perspectiva de executar ações em sala de aula. Inicialmente organiza os conteúdos em blocos e prioriza determinados aspectos da importância de alguns conteúdos na formação do aluno e rompe com a linearidade dos conteúdos. Quanto às questões metodológicas, traz posições relativas às pesquisas em educação matemática, como contrato didático e transposição didática. O uso das tecnologias se faz presente como ferramenta de recurso didático e reforça o uso da interdisciplinaridade na organização curricular e no projeto político-pedagógico das escolas.

Finalizando, as OCNEM: Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias (v.2, 2006) sugere ainda temas complementares como temas estruturadores de trabalho interdisciplinar apontando sugestões de conteúdos e formas de trabalho. Na condução das orientações, apresenta tópicos do conteúdo de matemática, enfatizando o trabalho com projetos, e faz referência a trabalhos em laboratório de matemática.

> São apresentados, a seguir, tópicos que podem servir muito bem aos propósitos das feiras e dos clubes de ciências, ou para atividades em laboratório de matemática, ou ainda para compor, de forma interdisciplinar, a parte diversificada do currículo. Alguns desses tópicos também servem para trabalhar as aplicações matemáticas. Em outros tópicos, tem-se o aspecto artístico e lúdico no trabalho de construção de modelos concretos ilustrativos (BRASIL. OCNEM: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. v.2, 2006, p.92).

Este importante documento da reforma do Ensino Médio se coloca diante da necessidade das escolas de possuírem seus laboratórios de matemática, quando enfatiza uma nova organização dos conteúdos, aponta metodologias relativas às pesquisas em educação matemática, sugere o uso das tecnologias como ferramenta de recurso didático e propõe que os projetos políticos pedagógicos contemplem os princípios da contextualização e da interdisciplinaridade dos conteúdos e das disciplinas. Assim, a necessidade do laboratório de matemática na escola deve existir não somente como espaço físico, mas como um espaço de atitude de mudança de paradigma no fazer didático e pedagógico do ensino e aprendizagem da matemática.

Necessita-se, assim, de debates e propostas advindos da pesquisa em educação matemática e da experiência da práxis, além de projetos bem sucedidos para que possamos amadurecer a ideia nas escolas do trabalho através do uso e da prática laboratorial no ensino de matemática.

1.3 AS UNIVERSIDADES E O LEM

Se for a favor das escolas possuírem seus laboratórios de matemática, então surge uma nova perspectiva que devemos levar em conta, o professor. Os professores que desenvolveram atividades de trabalho nos laboratórios foram preparados na sua formação inicial para este desafio? Hoje se percebe uma abertura para uma formação matemática em que o educando tem oportunidade de refletir sobre a formação e a atuação do professor de matemática, mas será que sempre foi assim? Em um passado bem recente, é fácil encontrar pesquisadores que afirmem que existia uma resistência de não aceitação para uma abertura da formação didática em matemática:

> [...] a formação específica nos cursos de Licenciatura em Matemática é realizada, de modo geral, com seu referencial centrado na prática do matemático profissional e não na prática do professor de ensino fundamental e médio (SOARES, FERREIRA & MOREIRA, 1997, p. 25).

Queixar-se de que não temos professores voltados para um trabalho laboratorial de ensino de matemática nas escolas é não culpar o professor, mas sua formação, pois:

> O método tradicional vigente, no Ensino da Matemática na Universidade, tem se constituído, "grosso modo", no único método pelo qual a Matemática é ensinada. Isso tem feito com que, sistematicamente, a aprendizagem da Matemática se tenha tornado uma questão de repetição do processo pelo qual alguns alunos triunfam e a maioria fracassa (SOUZA, CABRAL et al.,1991, p.91).

Pode-se enfatizar algo que é pertinente nessa questão: os cursos de licenciatura têm se constituído, na maioria das vezes, como apêndices dos cursos de bacharelados. Observa-se uma exagerada preocupação com conteúdos específicos da área de trabalho, que dão ênfase à formação do pesquisador na área, ficando relegado ao segundo plano à construção da formação do professor desta área.

Em virtude do exposto acima, que transformação necessita-se iniciar nos cursos de formação de professores de matemática, antes de se falar em laboratório de matemática nas escolas? As licenciaturas em matemática, como prioridade, devem possuir seus laboratórios. Assim, os LEMs assumem uma responsabilidade de romper com atitudes e concepções pragmáticas, unicamente na vertente da pesquisa em matemática, pois entendemos que o professor é um educador, um mediador, um construtor de sonhos, um idealista, um modificador da realidade social e também um pesquisador da sua prática educacional.

Defende-se, sim, o professor como um pesquisador, mas um investigador da sua prática e de seu fazer didático-pedagógico, que caracteriza a pesquisa como uma pesquisa-ação. Assim, o ensino da matemática no laboratório requer por parte dos professores mudanças de atitudes e da sua prática. Essas mudanças vão desde a disposição dos alunos na sala de aula até a forma como avalia esses alunos. Em um ambiente laboratorial, os professores universitários devem proporcionar aos seus alunos (na sua formação inicial) questionamentos e situações problemas em matemática que os levem a ler, investigar, produzir e registrar, tudo isso com participação ativa dos colegas, sendo o professor o mediador desta participação. Neste trabalho, os professores universitários precisam de um planejamento que inclua os conteúdos a serem aprendidos; a metodologia de abordagem dos conteúdos; os recursos didáticos para o trabalho; a dinâmica da sala aula; os questionamentos a serem levantados para as investigações a serem feitas; a forma de registro das informações adquirida pelos alunos e o processo de avaliação da aprendizagem dos mesmos. Assim, pela experiência adquirida na sua formação inicial, espera-se que este professor exerça, na sua prática, ações na sala de aula das escolas que atendam às novas demandas que pedem as reformas. Tem-se uma nova perspectiva advinda do movimento da pesquisa em educação matemática nas universidades que são os LEM. Surge como um diferencial na formação dos professores. Estes espaços de reflexão, formação e pesquisa na educação matemática estão espalhados por várias Universidades brasileiras. Consultando a página da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), encontramos uma lista de laboratórios em várias universidades, divididos por regiões:

> **Região Norte:**
> Laboratório de Educação Matemática (LEMAT) - Universidade Federal de Tocantins.
> **Região Nordeste:**
> Laboratório de Ensino de Matemática (LEMA) - Universidade Federal da Bahia.
> Laboratório de Ensino da Matemática - Universidade Federal de Pernambuco.
> Laboratório de Educação Matemática (LEDUM) - Universidade Federal do Ceará.
> Laboratório de Ensino da Matemática (LEMUFRN) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
> Laboratório de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática (LEPEM) - Universidade Federal da Paraíba.
> **Região Centro-Oeste:**
> Laboratório de Educação Matemática - Universidade Federal de Goiás
> **Região Sudeste:**
> Laboratório de Ensino de Matemática - Universidade de Campinas.
> Laboratório de Matemática - Universidade Federal de Uberlândia.
> Laboratório de Geometria (LEG) - Universidade Federal Fluminense.
> Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) - Universidade de São Paulo.
> Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) - Universidade Estadual Paulista - Rio Claro/SP.
> Laboratório de Matemática - Universidade Estadual Paulista - São José do Rio Preto/SP.
> Laboratório de Matemática (LABMAT) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.
> Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências (LIMC) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
> Laboratórios de Educação Matemática (LIG - LCI - LABMA - LES - LDMM) - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
> Laboratório de Educação Matemática (LABEM) - Universidade Federal Fluminense.
> Laboratório de Estudos de Matemática e Tecnologias (LEMAT) - Universidade Federal de São Carlos.
> **Região Sul:**
> Laboratório de Matemática - Universidade de Blumenau.
> Laboratório de Estudos de Matemática e Tecnologias (LEMAT) - Universidade Federal de Santa Catarina.
> Laboratório Virtual de Matemática - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. (SBEM, 2014).

Este é um retrato promissor da grande demanda de surgimentos de laboratórios de ensino de matemática nos diversos cursos de licenciatura, fruto da nova perspectiva da formação do educador matemático e da pesquisa em educação matemática. Como já afirmamos, é evidente que a qualidade das pesquisas em educação matemática faça surgir a necessidade de um espaço delineado pelas linhas de investigação. Assim, cada laboratório nasce e produz as pesquisas das áreas de investigação do grupo de pesquisa e da formação daqueles que o propõem, nada mais do que coerente. Convêm cuidados para que não se tornem meros reprodutores de ações voltadas para pesquisa universitária em educação matemática e descuidem do propósito maior que é a instrumentalização da formação do professor de matemática para escola básica.

2 A FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR E O LEM

2.1 A FORMAÇÃO DO PROFESSOR E O LEM NA MATRIZ CURRICULAR

Inicia-se com um questionamento: como inserir na matriz curricular dos cursos de licenciatura plena em matemática o laboratório de ensino de matemática? No que diz respeito à formação docente, as atuais diretrizes da Lei nº 9.394/96 impõem a necessidade de se repensar a formação de professores no país.

Na continuidade da adaptação às reformas segundo BRASIL; MEC (Parecer CNE/CP 2/2002, Diário Oficial da União, Brasília, 04 de março de 2002), seção 1, p.9), os cursos de formação de professores da Educação Básica, em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, será efetivada mediante a integralização de, no mínimo, 2.800 (duas mil e oitocentas) horas, nas quais a articulação teoria-prática garanta, nos termos dos seus projetos pedagógicos, dentre outras dimensões, 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, vivenciadas ao longo do curso. Esta necessidade faz com que um novo projeto político-pedagógico para os cursos de licenciatura em matemática seja repensado. A implantação dessa exigência legal remete a explicar as concepções sobre formação de professores e, mais especificamente, sobre o que está sendo chamado de “prática como componente curricular”. Esta relação mais ampla entre teoria e prática recobre múltiplas maneiras do seu acontecer na formação docente. Ela abrange, então, vários modos de se fazer a prática tal como expostos no Parecer CNE/CP 9/2001.

> Uma concepção de prática mais como componente curricular implica vê-la como uma dimensão do conhecimento que tanto está presente nos cursos de formação, nos momentos em que se trabalha na reflexão sobre a atividade profissional, como durante o estágio, nos momentos em que se exercita a atividade profissional (BRASIL. MEC. Parecer CNE/CP 9/2001, Diário Oficial da União, Brasília, 18/01/2002, p. 23).

Assim, há que se distinguir, de um lado, a prática como componente curricular e, de outro, a prática de ensino e o estágio obrigatório definidos em lei. Desse modo, a primeira é mais abrangente, pois contempla os dispositivos legais e vai além deles. Entende-se que estas 400 (quatrocentas) horas trazem para a formação do professor a dimensão metodológica, didática e pedagógica do trabalho dos conteúdos e dos conceitos de matemática em sala de aula. Portanto, faz-se a proposta que, na matriz curricular do curso de licenciatura plena em matemática, no espaço das 400 horas, a prática como componente curricular dê espaço a uma lista de disciplinas de laboratório de ensino, a saber:

- Laboratório de ensino de álgebra - LEA;
- Laboratório de ensino de geometria - LEG;
- Laboratório de ensino de materiais didáticos pedagógicos – LEMDP;
- Laboratório de ensino de tecnologias – LET;
- Laboratório de pesquisa em educação matemática – LPEM;

A prática deve ser planejada quando da elaboração do projeto pedagógico e o seu acontecer deve se dar desde o início da duração do processo formativo e se estender ao longo de todo o seu processo. Ela converge conjuntamente para a formação da identidade do professor como educador.

2.2 UMA PROPOSTA DE CRIAÇÃO DAS DISCIPLINAS DE LEM

Após reconhecer a possibilidade de transformar as 400 horas de prática como componente curricular em disciplinas de laboratório, é possível tornar concreta esta ideia.

Na proposta curricular, a prática como componente curricular estará distribuída em cinco disciplinas a partir do segundo semestre do curso, perfazendo um total de 408 horas. Essas disciplinas objetivam fundamentar teoricamente e metodologicamente os conteúdos apreendidos em semestres anteriores, também refletir sobre conteúdos na educação básica, como um exercício de articular a teoria ao fazer didático e pedagógico. Cada disciplina com créditos de teoria e créditos de prática. Os créditos de teoria dizem respeito ao cumprimento de atividades presenciais do professor com os alunos em sala de aula com referência no ementário da disciplina. Os créditos práticos dizem respeito ao restante dos créditos que os alunos devem cumprir fora de sala de aula para atender aos objetivos da disciplina e do seu fazer didático-pedagógico e metodológico. São as seguintes disciplinas que fazem do conjunto das disciplinas que compõe a Prática como Componente Curricular: LEA; LEG; LEMDP; LET e o LPEM. Para estas disciplinas, fica determinado que a matrícula dos alunos deva obedecer ao máximo de vinte alunos por turma, pois a demanda dos trabalhos exige qualidade, acompanhamento, produção e apresentação das atividades. Caso a demanda de alunos por disciplina seja além de 20 alunos, deverá a coordenação oferecer mais de uma disciplina no semestre da demanda. O último Laboratório é o de pesquisa e dentre outros objetivos, estimula a pesquisa e qualifica-o para a produção do trabalho de conclusão do curso. Assim, faz-se necessário que, para esta disciplina (Laboratório de Pesquisa em Educação Matemática), a matrícula se dê para o máximo de 10 alunos por disciplina.

Para se conhecer a proposta, é importante expor parte da inspiração para o planejamento das disciplinas de laboratório, que nasce do conhecimento na União Internacional de Matemática (IMU), uma organização científica, com o objetivo de promover a cooperação internacional em matemática, que possui comissões, dentre elas a Comissão Internacional de Instrução Matemática (CIIM). Esta comissão foi estabelecida no IV Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma, em 1908. Após interrupção das atividades em torno das duas Guerras Mundiais, ICMI (sigla em inglês) foi reconstituída em 1952. Fundada para promover esforços com o objetivo de melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem da matemática em todo o mundo, a Comissão Internacional de Instrução Matemática cumpre sua missão através de programas internacionais de atividades e publicações que promovem a colaboração, intercâmbio e difusão de ideias e informações sobre tudo nos aspectos da teoria e prática da educação matemática contemporânea. O presidente fundador da CIIM foi o distinto matemático alemão Felix Klein (1849-1925), para quem a educação matemática foi de um profundo interesse ao longo da sua carreira.

A proposta de trabalho nas disciplinas de laboratório está dividida em três momentos: fundamentação teórica didática e pedagógica, fundamentação metodológica e atividades complementares. Compreende-se por fundamentação teórica didática e pedagógica como o momento de formação teórica e reflexiva no qual o aluno é levado a refletir e discutir alguns questionamentos relativos ao ensino e aprendizagem de matemática, através da leitura de textos (artigos científicos de periódicos e capítulos de livros) previamente selecionados pelo professor da disciplina dentro do objetivo da importância da formação do professor de matemática e da sua atuação na prática de sala de aula no que diz respeito ao ensino dos conceitos e conteúdos de matemática. O segundo momento de trabalho nas disciplinas está relacionado ao que se chama de fundamentação metodológica e compreende-se como o momento da formação voltado para a discussão e o entendimento de conceitos e conteúdos referentes ao currículo da escola básica, dentro de cada disciplina. Neste momento, o professor da disciplina deve priorizar conceitos e conteúdos que as pesquisas em educação matemática apontam como obstáculos de aprendizagem, assim como orientações sobre metodologias e abordagens de ensino de determinados conteúdos. Como terceira e última parte dos trabalhos nas disciplinas, tem-se as atividades complementares. Estas atividades devem ser compostas de duas ações realizadas em grupo de dois alunos. A primeira é um seminário temático, com os temas escolhidos pelo professor, que divide em sala com os alunos. Este seminário deve ser produzido para ser apresentado em sala de aula, com uma cópia do trabalho de pesquisa a ser entregue no dia da apresentação. A segunda ação é a produção de uma atividade (uma proposta interdisciplinar, produção de materiais didáticos para sala de aula, adaptação para sala de aula de uma pesquisa, produção de uma aula de campo e outros) que possa ser executada na sala de aula da educação básica, dentro da perspectiva do que foi estudado na disciplina.

Apresenta-se de forma individualizada cada proposta de trabalho por disciplina que irá compor as horas da prática como componente curricular.

2.2.1 Laboratório de Ensino de Álgebra - LEA

Esta disciplina será ofertada no segundo semestre e possui dois créditos teóricos e dois créditos práticos, não tendo nenhuma disciplina como pré-requisito.

A primeira parte: fundamentação teórica didática e pedagógica. Os questionamentos escolhidos para nortearem esta primeira parte da formação foram levantados da conferência “The Future of the Teaching and Learning of Algebra” promovida pela International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) em conferência de estudo realizado em Melbourne, Austrália, em dezembro de 2001, que se tornou uma publicação. De STACEY, CHICK e KENDAL (2004), temos os questinamentos: Por que é aconselhável e/ou necessário ensinar Álgebra? O que deve ser ensinado em Álgebra? Como deveríamos ensinar Álgebra? O que é pensamento Algébrico? Como ele se desenvolve? O que significa falar de álgebra como uma linguagem e quais são as implicações de tal perspectiva? Outros que acrescentamos: Como a história da álgebra pode ajudar a identificar obstáculos epistemológicos na aprendizagem da álgebra e caracterizar rupturas no desenvolvimento de noções algébricas? O que é álgebra no currículo da escola básica? Quais os erros comuns em álgebra que os alunos cometem sempre?

O objetivo com esta primeira parte é fazer leituras na busca por respostas a estas perguntas de maneira que o aluno adquira a capacidade de conceber as funções da educação algébrica no ensino básico. Também fornecer informações para que estes possam realizar na sala de aula um ensino de álgebra com mais significado (noções que façam sentido na compreensão dos conceitos e técnicas a serem aplicadas), buscando entender e se fazer compreendido nos diversos aspectos da dimensão da álgebra (concepções como aritmética generalizada, estudo de relações entre grandezas, estudo de procedimentos para resolver problemas, estudo de estruturas). Nesta parte do trabalho, o professor propõe textos (artigos) escolhidos na perspectiva de que o aluno possa ler e adquirir conhecimentos de base teórica para fundamentação e compreensão do ensinar álgebra.

A segunda parte: fundamentação metodológica. Nessa fase, o intuito é de propiciar discussões sobre quais atividades (situações problemas) podem exemplificar o processo da educação algébrica levantada na parte teórica. Para orientar o trabalho na disciplina indica-se Tinoco (2008). Nele, encontram-se várias situações problemas que, aplicadas e refletidas, irão ajudar na compreensão dos diversos aspectos da álgebra. Outra referência que irá ajudar também nos trabalhos da disciplina é a publicação Gomes (2013).

Como terceira e última parte dos trabalhos na disciplina do LEA, tem-se as atividades complementares. Estas atividades são compostas de duas ações realizadas em grupo de dois alunos. São dois seminários temáticos: utilização de jogos no ensino de álgebra e o estudo dos erros comuns em álgebra. Os seminários são orientados pelo professor da disciplina. Os alunos realizam as pesquisas e montam suas palestras em slide. Neste momento, deseja-se que os alunos socializem suas leituras e participem de forma a interagirem entre eles sobre suas descobertas e suas dificuldades. Os temas são importantes no aspecto prático do fazer pedagógico em sala de aula. Os jogos podem ter uma função de fixação de conteúdos e o erro é um tema que merece uma reflexão, pois dele podemos concluir várias formas de ajudar os alunos a corrigir esses erros e, ao mesmo tempo, mostram as possíveis causas das dificuldades dos estudantes para aprender álgebra.

2.2.2 Laboratório de Ensino de Geometria - LEG

Esta disciplina será ofertada no terceiro semestre, possui dois créditos teóricos e dois créditos práticos e tem como pré-requisito a disciplina geometria euclidiana.

A primeira parte: fundamentação teórica didática e pedagógica. Os questionamentos escolhidos para nortearem esta primeira parte da formação foram levantados durante a conferência “Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century” promovida pela International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) em setembro de 1995 na Itália. De Mammana e Villani (1998), temos os questinamentos: Por que é aconselhável e/ou necessário ensinar Geometria? O que deve ser ensinado? Como se deve ensinar Geometria? O que é pensamento geométrico? Como ele se desenvolve? Tradicionalmente, a geometria é a disciplina onde se “provam teoremas”. Será que a prova de teoremas deve se limitar à Geometria? Que mudanças podem e devem ser feitas no ensino e na aprendizagem da Geometria na perspectiva de ampliar o acesso a materiais concretos? Como avaliar conhecimentos geométricos? O que se poderia trabalhar conjuntamente com outras disciplinas? A importância das discussões sobre os questionamentos acima citados se dá a fim de que os futuros docentes possam perceber a relevância da geometria dentro da formação dos indivíduos e quais habilidades e competências poderão deixar de ser desenvolvidas caso este ramo da matemática não seja trabalhado adequadamente nos diversos níveis de ensino.

Outro fator relevante é que, mesmo que queiram os professores, nunca serão simples transmissores de conhecimentos, pois suas concepções influenciarão no planejamento e na execução de atividades em sala de aula (BARRANTES e BLANCO, 2004). Partindo desse pressuposto, os autores ainda afirmam que:

> [...] para aprender a ensinar matemática, devem considerar-se as exigências que proveem das próprias concepções e conhecimentos sobre Matemática, sobre o seu ensino-aprendizagem e todas as influências externas, envolvidas na educação. Todas elas formam parte do conhecimento profissional e deverão ser trabalhados em processos

> reflexivos de formação, partindo, em qualquer caso, das concepções dos professores em formação, pois essas, junto aos seus conhecimentos, vão caracterizar o seu futuro como professores de Matemática (BARRANTES e BLANCO, 2004, p.30).

Desse modo, um trabalho a partir da discussão de alguns questionamentos relacionados ao processo de ensino-aprendizagem de Geometria pode auxiliar na mudança de algumas concepções erradas dos futuros professores sobre o tema e possivelmente influenciá-los positivamente em suas respectivas práticas docentes. Para isto, o professor deve, através da pesquisa em periódicos, sugerir os artigos para leitura dos alunos que contemplem a possibilidade de respostas a estas perguntas.

A segunda parte: fundamentação metodológica. Nessa fase do trabalho, o intuito é propiciar discussões sobre alguns questionamentos relativos ao processo de demonstração em geometria e retomar alguns conceitos da geometria euclidiana a partir do estudo das demonstrações de alguns teoremas. O que norteia o trabalho do professor são os questionamentos propostos por Fetissov (1985, p.5), em seu livro “A demonstração em geometria”, são eles: O que é uma demonstração? Para que é necessária a demonstração? Como deve ser feita a demonstração? Que afirmações geométricas se podem aceitar sem demonstração? Como uma complementação para o entendimento histórico da problemática com o quinto postulado de Euclides, o que há de errado com o quinto postulado de Euclides? (FOSSA, 2001, p.93).

Encontra-se, nas pesquisas em educação matemática, justificativa para o estudo das demonstrações em geometria, realizado no Laboratório de ensino de geometria, devido ao fato de que o processo de demonstração “[...] requer coordenação de uma série de competências para identificar suposições ou organizar argumentos lógicos, ou ainda, porque prova sugere sempre uma ambiguidade, seja ela uma verificação ou ainda uma explicação” (BUSQUINI, 2003, p.28). Desse modo, considera-se necessário não apenas um trabalho com demonstrações voltado para a compreensão dos aspectos conceituais de uma demonstração, mas, sobretudo de outros aspectos como: necessidade e importância de uma demonstração e de como estas devem ser feitas. A importância das discussões na disciplina sobre a demonstração em geometria, durante a formação inicial de professores, justifica-se porque a demonstração, além de importante para a compreensão da prática científica em Matemática, deve ser trabalhada:

> [...] não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visão panorâmica nos modos de produção e manutenção da "ideologia da certeza" para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais (GARNICA, 2002, p.75).

Nessa perspectiva, deseja-se que o futuro docente compreenda a importância da demonstração na organização rigorosa da geometria euclidiana como um sistema axiomático e para a garantia do caráter geral de uma afirmativa demonstrada (FETISSOV, 1985).

Como terceira parte dos trabalhos na disciplina do LEG, tem-se as atividades complementares. Estas atividades são compostas de duas ações realizadas em grupo de dois alunos. São dois seminários temáticos, cujos temas são: utilização de materiais concretos no ensino e aprendizagem de geometria e uma proposta interdisciplinar entre a Geometria e outras áreas do conhecimento. Os seminários são orientados pelo professor da disciplina que auxilia os alunos em realizar suas pesquisas e montarem suas palestras em slide. Encontra-se fundamentação teórica nas pesquisas para estas ações em dois questionamentos levantados no documento "Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 st Century"; Que mudanças podem e devem ser feitas no ensino e na aprendizagem da Geometria na perspectiva de ampliar o acesso a materiais concretos? O que se poderia trabalhar conjuntamente com outras disciplinas? Essa expectativa de trabalho pode fazer com que, caso estes não tenham oportunidade de discutir sobre as potencialidades e limitações dos materiais concretos durante sua formação inicial ou continuada, utilizem sem se atentarem para sua fundamentação teórica e acabem usando-os com finalidades neles próprios. Em relação ao seminário de interdisciplinaridade entre a geometria e outras áreas do conhecimento, compreende-se que historicamente a geometria é rica em situações de aplicações práticas e que é possível estabelecer conexões com outros ramos da matemática e outras áreas do conhecimento. Assim, tem-se a oportunidade de explorar o tema da interdisciplinaridade que se encontra tão presente nos documentos da reforma do

Ensino Médio e fazer o aluno compreender que a interdisciplinaridade acontece quando duas ou mais disciplinas relacionam seus conteúdos para aprofundar o conhecimento e levar dinâmica ao ensino.

2.2.3 Laboratório de Ensino de Materiais Didáticos Pedagógicos - LEMDP

Após o aluno já ter cursado as disciplinas de LEA e a de LEG, apresenta-se no quarto semestre o LEMDP, disciplina com dois créditos teóricos e três créditos práticos, tendo como pré-requisito a disciplina de didática geral.

A primeira parte: fundamentação teórica didática e pedagógica. Este é o momento de os alunos conhecerem as posições defendidas pelos pesquisadores em educação matemática sobre o uso de recursos didáticos do tipo materiais concretos em sala de aula. Os questionamentos escolhidos para nortearem esta primeira parte da formação foram levantados em grande parte do livro LORENZATO (2006). O que são materiais didáticos e os materiais didáticos manipulativos? Qual a diferença entre um material didático estático ou dinâmico? Para que utilizar um material didático e em que momento da aula ele deve ser utilizado? Um material didático é capaz de construir um conceito ou apenas reafirma o conceito? O modo de utilizar um material didático depende da concepção que os professores têm a respeito da matemática e de sua forma de como ensinar? Uma boa escolha dos artigos científicos em busca de respostas a estas perguntas e a leitura com reflexão dos temas abordados tornará o aluno apto a fazer um diagnóstico de quando realmente os materiais ajudam no processo de ensino e aprendizagem e/ou quando atrapalham. Ademais, tornar-se-á crítico de um eventual modismo de uso dos materiais didáticos (artefatos e/ou materiais manipulativos) em sala de aula.

Nesta segunda etapa do trabalho, com a organização da fundamentação metodológica, o objetivo é propiciar discussões sobre a criação, confecção e manuseio de recursos didáticos para sala de aula, que vão desde um bom plano de aula com inserção de materiais concretos até ao desenvolvimento de projetos de contextualização e interdisciplinaridade. Também, nesta etapa, convém que o aluno tenha contato com posições contrárias ao uso de materiais didáticos na sala de aula. Para isto, o aluno deve fazer leitura de artigos científicos que contenham questionamentos do tipo: Será mesmo que para aprender matemática necessita-se de materiais concretos e jogos na sala de aula? Outro questionamento é quanto ao uso dos jogos: Jogos atrapalham ou ajudam na aprendizagem da matemática? Como ajuda e quando atrapalha? O aluno deve ter a oportunidade dentro da sala de aula de uma experiência com a confecção de materiais didáticos e o contato com diversos outros materiais. Outros temas: o estudo e a produção de materiais teóricos e práticos para aulas interdisciplinares entre matemática e outras áreas do conhecimento; conhecer exposições temáticas como: matemática e a música, matemática e arte, matemática e tecnologias, matemática e jogos, matemática e profissões, matemática e sua história, matemática e o tempo, e outras diversas, e compreender como explorar estes espaços didáticos como forma de ensino e aprendizagem de matemática. Estimular o aluno na produção de cadernos de textos de matemática lúdica que contenha enigmas, paradoxos, problemas interessantes, matemática aplicada ao cotidiano e outros. Conhecer projetos de olimpíadas de matemática e pesquisar problemas em que, para uma melhor visualização e/ou compreensão do problema e de sua solução, é possível fazer uso de materiais didáticos. São diversos os apelos pelo uso de recursos didáticos, resta o professor valorizar aquilo que realmente importa para a formação inicial do professor, desmistificando a supervalorização dos materiais didáticos e colocando-os a sua real importância dentro do contexto do ensino aprendizagem da matemática.

Como terceira e última parte dos trabalhos na disciplina do LEMDP, tem-se as atividades complementares. Estas atividades são compostas de duas ações (atividades) realizadas em grupo de dois alunos. Indicam-se seminários temáticos, com temas voltados para a aplicação do uso dos materiais didáticos. Neste momento, cada grupo deve preparar um plano de aula escolhendo o conteúdo e o material didático para o uso no ensino e aprendizagem do mesmo. Cada grupo apresenta seu seminário aos demais da turma. Outra proposta de trabalho é a turma organizar uma exposição temática de matemática, onde não só poderiam expor, nas diversas escolas da região, como também organizar uma competição de jogos de tabuleiro com os alunos do curso de matemática, ou ainda planejar uma olimpíada de matemática com algumas escolas da região. As ideias são muitas e outras podem ser sugeridas. O importante é envolver e socializar os alunos em torno de uma atividade em que todos participem, pesquisem, criem e tornem publica a atividade. Lembrando que a forma como se avalia as atividades são importantes, pois a partir do seu referencial o aluno terá também uma concepção de como avaliar quando estiver em sala de aula. Assim, o professor deve planejar como avaliar a atividade e tornar público para os alunos.

2.2.4 Laboratório de Ensino de Tecnologias - LET

Nesta disciplina de laboratório estudaremos as TICs (tecnologias de informação e comunicação). Esta etapa do trabalho se encontra no quinto semestre do curso de licenciatura em matemática. Vale lembrar que o aluno já deve ter cursado as disciplinas de LEA, LEG e o LEMDP. Embora estas disciplinas não sejam pré-requisito para este novo laboratório, mas, ao fazê-las, o aluno adquire competências que ajudarão na reflexão desta última. Propõe-se como pré-requisito para esta disciplina as seguintes disciplinas: geometria euclidiana e iniciação a ciência da computação.

A primeira parte: fundamentação teórica didática e pedagógica. A reflexão sobre tecnologias e ensino terá como referencial teórico o livro de Ponte e Canavarro (1997). Nesta parte da disciplina, como nas outras, o aluno fará leituras direcionada a responder os questionamentos levantados pelo professor da disciplina. Estes questionamentos são propostos no primeiro dia de aula, tal como as sugestões de leitura dos artigos científicos na tentativa de responder aos questionamentos levantados. No caso em questão, o livro tem uma importância diferenciada, pois sua própria leitura responde em grande parte as indagações levantadas. Mas nada impede que o professor da disciplina complemente as leituras, assim neste como nos outros laboratórios. Quanto aos questionamentos, dividem-se em três grupos, onde cada grupo de perguntas será norteado por um tema, a saber: 1º tema: as tecnologias de informação e comunicação na sociedade e na escola; 2º tema: as tecnologias de informação e comunicação e a matemática; 3º tema: as tecnologias de informação e comunicação e a educação matemática. Os questionamentos para o primeiro tema são: Quais as implicações das tecnologias de informação e comunicação nas atividades profissionais, na cidadania, na cultura e na educação? Quais os argumentos que se pode utilizar na defesa do uso do computador, do vídeo e da calculadora como contexto de aprendizagem? Qual é a perspectiva dominante (tendências) das tecnologias de informação e comunicação na formação dos professores? Questionamentos do segundo tema: Quais as principais necessidades que levaram ao desenvolvimento de poderosos instrumentos de cálculo e aos domínios do conhecimento humano que contribuíram para sua construção? Indicar a influência que o computador tem tido no desenvolvimento de novos domínios e de novas linhas de investigação em campos já estabelecidos da matemática e da educação matemática. E finalizando esta etapa, com os questionamentos do terceiro tema: Quais as principais tendências do uso das tecnologias de informação no ensino da matemática? Quais as principais tendências do uso das tecnologias de comunicação no ensino da matemática? Esta é a proposta de reflexão inicial para a formação teórica das tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática.

A segunda parte: fundamentação metodológica. Dentre as várias possibilidades do uso de tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática, faz-se um recorte e priorizar-se-á para estudo e reflexão o software, a calculadora e o vídeo. No software, deve se concentrar no Geogebra, pois, além de ser um software livre, é hoje um dos mais populares na área do ensino da matemática no Brasil; quanto à calculadora é dada preferência a simples, aquela que possui no mínimo as quatro operações básicas, pois é de fácil acesso e aquisição por parte de todos os alunos. Finalizando na priorização dos recursos tecnológicos, temos o uso do vídeo na sala de aula, cuja justificativa desta escolha tecnológica se dá por conta do projeto “TV Escola” do governo federal.

Portanto, além do aluno conhecer de modo prático o uso destes recursos tecnológicos, este também fará algumas leituras relativas a estas escolhas. São estas as perguntas que propomos:

Como usar a televisão criticamente a serviço da educação? Quais são os diversos tipos de softwares susceptíveis de utilização no ensino de matemática e as suas características gerais? Quais os tipos fundamentais de calculadoras com interesse educativo, distinguindo as suas respectivas características? Quais os tipos de séries de vídeos produzidos sobre matemática e as suas características principais? Reflita as diversas formas de utilização da calculadora simples, da utilização do computador e da televisão na sala de aula. Estas leituras complementares vão fundamentar esta segunda etapa do trabalho do professor da disciplina, pois, neste tempo, o professor estará discutindo com os alunos metodologias de trabalho com o uso da calculadora simples, do software Geogebra e do vídeo. Como as possibilidades são muitas, apresenta-se algumas propostas quanto ao uso de cada tecnologia. No que diz respeito à calculadora simples, proponho que o professor dê ênfase sobre a importância dos diversos tipos de cálculo (cálculo escrito, cálculo de estimativa, cálculo mental e o cálculo com o uso da calculadora) e nos objetivos que devem nortear o professor de levar aos alunos o uso da calculadora na sala de aula. Quanto ao software Geogebra, que o professor priorize, além do domínio da ferramenta, a construção de conceitos da geometria e o estudo dos gráficos de funções. Para a atividade do uso do vídeo, indica-se o conhecimento dos projetos “Como Fazer?” e “Sala de Professor” da TV Escola, canal do MEC (Ministério de Educação e Cultura).

Como terceira e última parte dos trabalhos na disciplina do LET, temos as atividades complementares. Na atividade complementar o professor da disciplina dará preferência ao desenvolvimento de atividade pelo aluno para sala de aula nas três tecnologias.

2.2.5 Laboratório de Pesquisa em Educação Matemática – LPEM

Este último laboratório está previsto para matriz curricular do curso de licenciatura plena em matemática para o sexto semestre. Neste momento, espera-se que os alunos já possuam uma carga de conhecimentos advindas das leituras e reflexões das disciplinas de laboratórios e, assim, estejam previamente preparados para enfrentarem a disciplina de LPEM. Ainda, para uma boa fundamentação na realização da sua formação inicial do educador matemático, propõe-se que o curso deva oferecer, além das disciplinas da formação específica em matemática, já nos semestres iniciais, as disciplinas metodologia da pesquisa e investigação em educação matemática e a produção escrita em língua portuguesa. Sugere-se que tais disciplinas tenham sido ofertadas já no primeiro semestre. Voltando à disciplina do laboratório de pesquisa em educação matemática, esta terá importância não somente para o aluno conhecer as tendências das pesquisas na área, como também participar da experiência de pesquisar e produzir nesta tão emergente área do conhecimento. Assim, um dos objetivos da disciplina é preparar os discentes que desejam desenvolver seu trabalho de conclusão de curso na área de educação matemática, voltada para o ensino e a aprendizagem da matemática e que estejam com condições teóricas e práticas de desenvolverem um bom trabalho neste campo do saber humano.

A primeira parte: fundamentação teórica. Para a fundamentação teórica, indicam-se duas fontes citadas na bibliografia proposta no ementário da disciplina: “Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos” e “Fundamentos da didática da matemática”. No primeiro livro, Lorenzato e Fiorentini (2006) fundamenta a pesquisa em educação matemática, e traz um histórico da pesquisa em educação matemática no Brasil. O segundo, Almouloud (2007) traz uma fundamentação das linhas de pesquisa em didática da matemática francesa. Nesta etapa, os discentes fazem um fechamento de suas leituras tendo conhecimento das principais linhas de investigação da didática da matemática francesa: teoria das situações didáticas, contrato didático, erro, noção de obstáculo, engenharia didática, representação semiótica e dialética ferramenta-objeto. O objetivo não é aprofundar as leituras, mas que os alunos tenham uma visão geral do objetivo de cada linha de trabalho. Durante as leituras, os alunos são colocados diante da perspectiva do desenvolvimento de um projeto de pesquisa em um tema de sua livre escolha.

A segunda parte: fundamentação metodológica da disciplina. É a fase não somente da produção e da escrita do projeto, mas do inicio da realização da pesquisa. Neste momento de trabalho, os alunos deverão realizar sua pesquisa e finalizá-la.

Finaliza-se assim a proposta das 400 horas divididas em cinco disciplinas laboratoriais que conjuntamente com seus pré-requisitos e as demais disciplinas do conjunto das específicas de conteúdo matemático trazem uma perspectiva na tentativa de melhorar a formação inicial do professor. Nas disciplinas, definem-se os créditos teóricos e os créditos práticos, mas não se define no número de horas para os créditos, ficando a cargo a quantidade de horas aulas por crédito de acordo com cada universidade que adotar esta estratégia de ensino. Deseja-se enfatizar que temas como história da matemática e resolução de problemas merecem também um espaço na matriz curricular. Observa-se que finalizamos os laboratórios no sexto semestre, período em que os alunos já devem ter iniciado as disciplinas de estágio supervisionado, podendo, assim, usar todo o conhecimento adquirido para colocar em sua prática sala de aula.

No apêndice deste trabalho, dá-se uma proposta de ementa para todas as disciplinas de laboratório, que visa nortear os procedimentos da criação das disciplinas na matriz curricular.

3 O LEM E A DIVERSIDADE DE MATERIAIS DIDÁTICOS

A partir das concepções de LEM apresentadas neste trabalho, pode-se perguntar: como iniciar a construção de um laboratório? Primeiramente, faz-se necessário um espaço físico disponível – uma sala. Depois, muita disposição e empenho da comunidade de professores de matemática da escola. Muitos dos materiais podem ser confeccionados e outros adquiridos em locais especializados em produção de recursos didáticos para o ensino de matemática. Segundo Tahan (v.2, 1962, p.64), um bom laboratório deve ter: sala; móveis; material do professor (pincel, lousa, folhas de papel de diferentes cores, fita adesiva, cola, tesoura, palitos, trena, cartolina, canudos, tapinhas e outros); material bibliográfico; instrumentos de desenho; instrumentos de cálculo; modelos de figuras geométricas planas e sólidos; geo-plano; tangran; jogos de tabuleiro e muitos outros materiais. Segundo a listagem de seu livro, são 68 itens em que ele comenta sobre os materiais que deve possuir um laboratório. Além das propostas e ideias a serem desenvolvidas no laboratório, ele reserva em seu livro um espaço de quatro capítulos para falar dos jogos.

Seguindo hoje as tendências de ensino, não podemos deixar de contemplar no espaço do laboratório as tecnologias, tanto de informação como de comunicação. Assim, calculadoras, computadores, filmadoras, projetores, software e vídeos devem compor o acervo dos materiais do laboratório. A realidade é que hoje se dispõem de muitas possibilidades tanto de materiais didáticos, quanto de propostas de trabalho, basta que façamos uma pesquisa na internet e visitemos sites de depósitos de atividades para sala de aula.

Diante das muitas possibilidades de materiais para laboratório, neste trabalho apresentar-se-á o jogo Anéis Chineses (Fig. 1). Inicialmente, responde-se ao questionamento: Qual a motivação pelo uso desse jogo? Ou ainda, o que levou a escolher este jogo para estudo? Motivado pelas leituras em matemática, tive contato com o livro “Matemática e Imaginação” que me despertou a curiosidade em alguns temas de matemática. O jogo Anéis Chineses é pouco conhecido em nosso meio educacional e, antes de ler este livro, eu não o conhecia.

Figura 1 – Anéis Chineses

Fonte: Elaborada pelo autor.

Foi uma passagem do livro que me despertou não somente a curiosidade, mas também um desafio. Os autores do livro Matemática e Imaginação, Kasner e Newman (1968, p.166), chamam o jogo de quebra-cabeça chinês das argolas e comentam que o matemático Cardano o conhecia. Mas foi outra passagem que chamou mais atenção. Quando os autores descrevem sobre o objetivo do jogo, eles mencionam:

> [...] para remover a quinta argola, a primeira, segunda, terceira devem estar fora da barra e a quarta, nela. Se a posição de todas as argolas, na ou fora da barra, for escrita na notação binária, 1 designando uma argola que está fora e 0 uma que está na barra, a determinação matemática do número de movimentos necessários para remover um determinado número de argolas não é muito difícil. A solução, sem o auxilio da notação binária, à proporção que aumenta o número de argolas, estaria completamente além da capacidade imaginativa de qualquer um (KASNER e NEWMAN, 1968, p.167).

Tomado de certo grau de curiosidade, quando o autor relata que para uma quantidade maior de anéis a possibilidade de contar o movimento dos anéis sem o auxílio da notação binária ficaria quase impossível. Não no sentido de alcançar o objetivo do jogo e de contar a quantidade de movimentos dos anéis sem a notação binária, mas de conhecer que jogo seria este que Cardano faz referência e que impõe um grau de dificuldade extrema, e mais, que solução seria esta, dada pela notação binária, já que os autores do livro não mencionam.

3.1 A BUSCA POR FONTES DE PESQUISA

A busca começa na procura de fontes de consulta sobre o jogo. Encontra-se em língua portuguesa uma quantidade reduzida de fontes. Na busca, foram levantadas varias fontes, entre livros impressos e digitais. Cada fonte faz seu relato sobre o jogo dentro da perspectiva do autor e do objetivo do livro. Existem fontes que comentam de forma detalhada o jogo e outras que apenas o citam de forma muito resumida. Assim, cada uma da sua forma retrata o jogo, nelas encontramos, por exemplo: a origem histórica do jogo, como resolver o problema do jogo, comentários de outras fontes que fazem referência, o tratamento matemático de forma resumida. Abaixo, lista-se as fontes encontradas.

Livros impressos:

- KASNER, Edward e NEWMAN James. **Matemática e Imaginação**. Tradução de Jorges Fortes. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 1968. 347 p. (págs. 166 – 167).

- KRAITCHIK, Maurice. **Mathematical Recreations**. New York, Dover publications, 2ª ed.,1953. 330 p. (págs. 89 - 91).

- PICKOVER, Clifford A. **O Livro da matemática**. Tradução de Carlos Carvalho. Kerkdriel, Holanda; Librero, 2011. 528 p. (págs. 258 – 259).

Livros digitais:

- CARDANO, Gerolamo. **Mediolanensis Philosophi AC Medici Celeberrimi**. Nella edizione Sponium, tom. III, 1663. 713 p. (Cápitulo 15 – De inutilibus fubtilitatibus), paragrafo 2. pag. 587. Disponível em: http://www.europeana.eu/portal/search.html?query=edm_agent%3a%22http%3a%2f%2fd-nb.info%2fgnd%2f11863822X%22. Acesso em 20 de Abril de 2014.

- CARDANO, Gerolamo. **De Svbtilitate Mediolanensis Medici.** Libri XXI, Impressvm Norimberg per Iohan, Petreium, 1550. 371 p. (Cápitulo 15 – De incertigeneris aut inutilibus fubtilitatibus), paragrafo 2. pag. 294. Disponível em: https://archive.org/details/hin-wel-all-00000138-001. Acesso em 20 de Abril de 2014.

- BALL, W.W. Rouse. **Mathematical Recreations and Essays. Project Gutenberg's.** London: Macmillan and co., New York: the macmillan company, 4ª edição. 1905. p. 93. Disponível em: http://www.gutenberg.org/ebooks/26839, e http://www.gutenberg.org/ebooks/search/?query=Mathematical+Recreations+and+Essays. Acesso em 10 de Abril de 2014.

- DUDENEY, H. E., Project Gutenberg's - Amusements in Mathematics. Problem 417, p. 142, 1917. Disponível em: http://www.gutenberg.org/files/16713/16713-h/16713-h.htm. e https://archive.org/details/amusementsinmath00dude. Acesso em 20 de Abril de 2014.

- GARDNER, Martin. **Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments**. Ney York: W. H. Freeman and Company, 1986. 287 p. (págs. 11 – 27). Disponível em: https://bobson.ludost.net/copycrime/mgardner/gardner11.pdf. Acesso em 04 de Abril de 2014.

- GROS, Louis. **Théorie Du baguenodier, par um clerc de notaire lyonnais**. Lyon, 1872. Disponível em: http://books.google.com.br/books/about/Th%C3%A9orie_du_baguenaudier_par_un_clerc_de.html?id=EcoBJRekd-sC&redir_esc=y. Acesso em 20 de Abril de 2014.

- LUCA, Pacioli. **De Viribus Quantitatis.** Cap CVII: Do cavare et mettere una strenghetta salda in al quanti anelli saldi difficil caso. Pág.: 211 – 212. Disponível em: http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/2_113.html, ou ainda, http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/indice2.html. Acesso em 29 de Abril de 2014.

- LUCAS, Édouard. **Récréations Mathématiques.** Paris, Gauthier-villars et Fils, Imprimeurs-Libraires, v. 01, 1891. (Septième recreation, págs. 161 – 186). Disponível em: https://archive.org/details/recretionmatedou03lucarich. Acesso em 10 de Abril de 2014.

- OZANAM , Jacques. **Recreations Mathematiques et Physiques, ov l'on traite...**. nella edizione del 1723. IV volume. pág. 439. Disponível em: http://www.marianotomatis.it/biblioteca/index.php?action=LIST&filter=AUTH_Ozanam,%20Jacques. Acesso em 29 de abril de 2014.

- SANTOS, Carlos P., NETO João P. e SILVA Jorge N. **Matemática Recriativa + Puzzle Anéis Chineses**. Lisboa, Norprint impressão, 2007. Disponível em: http://jnsilva.ludicum.org/HMR14_15/hmr14_15.html. Acesso em 10 de Abril de 2014.

- SHKARSKY, D. O.; CHENTZOV, N. N. e YAGLOM, I. M. **The USSR Olympiad Problem Book: Selected problems and theorems of elementary mathematics.** Translated by John Maykovich. New York, 3rd ed/rev. and edited by Irving Sussman. Dover Publications, 1962. 464 p. (págs. 7 e 81 – 84). Disponível em: https://www.google.com.br/#q=the ussr olympiad problem book selected problems and theorems of elementary mathematics. Acesso em 04 de Abril de 2014.

- WALLIS, Johannis. **Tractatus de Algebra: historicus & practicus**. Operum Mathematicorum volumen alterum. Imprimatur: Henr. Aldrich, 1693. (Cap. CXI. págs 472- 478). Disponível em:

http://books.google.com.br/books/about/Johannis_Wallis_De_algebra_tractatus_his.html?id=EuzpN1t5SOcC&redir_esc=y. Acesso em 10 de Abril de 2014.

Após um breve contato com os livros, percebe-se outro fato interessante. O jogo Anéis Chineses seria estudado com o uso de recorrência, a exemplo de outro jogo bastante conhecido, “A torre de Hanoi”. Como no ensino médio, não se trata desse conteúdo, a não ser de casos particulares, como as progressões aritméticas e geométricas; percebe-se aqui uma oportunidade de explorar o jogo e contribuir com mais fonte de inspiração para o estudo desse conteúdo. Além do mais, como se trata de um jogo, desperta a curiosidade.

3.2 OS ANÉIS CHINESES – O CONTEXTO HISTÓRICO

De acordo com Pickover (2009, p.258), a lenda do jogo dos Anéis Chineses foi inventada por um general chinês Chu-ko Liang (181-234 d.C) para manter sua mulher ocupada, diminuindo sua tristeza, enquanto ele se ausentava por longos períodos, participando de batalhas. Embora segundo Dudeney (1917, problema 417, p. 142), na redação de seu problema puzzles 417, afirma que a origem do jogo é desconhecida e que foi Cardano que citou em seu livro. Quanto ao nome do jogo, segundo Gardner (1986, p. 15), na Itália, ele adquiriu o nome de “Cardans Anéis”, por volta do século XVI, quando Girolano Cardano apresentou pela primeira vez em seu livro “De Subtilitate libri”, publicado em 1550. Já no livro de Lucas (1891, p. 164 – 165), encontra-se um pequeno comentário sobre o que teria Cardano, escrito no capítulo 15 (sutilezas desnecessárias e incertas) de seu livro sobre o jogo. Ele fez uma descrição do instrumento, inclusive comenta que este instrumento era usado pelos agricultores como uma espécie de cadeado para bloquear sacos, caixas e malas. Ficou admirado com a sutileza do jogo, mas não fez nenhum tratamento matemático. Quanto a sua origem na Europa, deve-se ao manuscrito “De Viribus Quantitatis”, (LUCA, Pacioli. **De Viribus Quantitatis.** Cap CVII: Do cavare et mettere una strenghetta salda in al quanti anelli saldi difficil caso. Pág.: 211 – 212), que é a mais antiga descrição ocidental do jogo Anéis Chineses que se conhece. Este manuscrito foi escrito por volta de 1500 e é considerado a primeira obra dedicada inteiramente à Matemática Recreativa. O título pode traduzir-se por “O Poder dos Números” e contém na sua maior parte recreações numéricas. O livro está dividido em três partes: 1ª - Recreações Aritméticas; 2ª - Recreações

Geométricas e a 3ª e ultima parte Provérbios, Adivinhas e Truques de Magia. Muitos dos problemas e puzzles que se tornaram clássicos ocorrem aqui pela primeira vez. Contudo, Luca Pacioli afirma que a obra é uma coleção, levando a crer que se baseou parcialmente em criações alheias (SANTOS, NETO e SILVA, 2007, p. 20). O “De Viribus Quantitatis” é uma única cópia manuscrita de Luca Pacioli, contido no código 250 da Biblioteca da Universidade de Bolonha. Pacioli descreve dez jogos topológicos no final da parte dois (Recreações Geométricas) de seu livro (problemas 106 -116). Para o jogo dos Anéis Chineses, temos o problema 107, que se encontra no capítulo 17, páginas 211 e 212, (LUCA, p. 211). Existe hoje uma edição impressa do livro “De Viribus Quantitatis” pela editora italiana “Aboca Museum” em 2009, com 661 páginas. Por volta de 1693, o matemático Inglês John Wallis, detalha o quebra-cabeça em seu Tratado de Álgebra (p. 472), com o apoio de muitas ilustrações (LUCAS, 1891, p. 164 – 165). Entre os franceses, o jogo se chama de "Baguenaudier." Na literatura inglesa, ficou conhecido como Anéis Chineses. Em Veneza, foi chamado Sigillium Salomonis, ou Sigillo Salamone, o que significa Selo de Salomon, ver Ozanam (1723, p. 439). Ainda citado em Pickover (2009, p.258), que em “1872, Louis Gros, um magistrado Frances, demonstrou uma ligação explícita entre estes anéis e os números binários no seu folheto treórie da baguenodier”. O trabalho de Gros envolveu um dos primeiros exemplos daquilo o que se chama atualmente de Código de Gray. O código de Gray foi introduzido na década de 1930 pelo engenheiro Frank Gray.

4 O ESTUDO MATEMÁTICO DO JOGO ANÉIS CHINESES

Dar-se-á ênfase aos conceitos e conteúdos que serão usados para desenvolver o estudo sobre o jogo “Anéis Chineses”, e, dentro do contexto de recorrências, estudam-se as recorrências lineares de segunda ordem.

4.1 IDEIAS BÁSICAS DE RECORRÊNCIA

4.1.1 Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes

Define-se recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes as recorrências da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, onde $q \neq 0$, caso contrário, a recorrência é, uma recorrência de primeira ordem. Esta recorrência será associada a uma equação do segundo grau do tipo $r^2+pr+q=0$, que chama-se de equação característica da recorrência.

4.1.1.1 Teorema 1

Ver Lima (1998, p. 74). **Teorema 1**.

Se as raízes de $r^2+pr+q=0$ são r_1 e r_2 , então $\mathbf{a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n}$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Prova.

Substitui-se $\mathbf{a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n}$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

Portanto, tem-se, após as devidas simplificações, que $\mathbf{C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q)} + \mathbf{C_2 r_2^n \left(r_2^2 + pr_2 + q\right) = C_1 r_1^n . 0 + C_2 r_2^n . 0 = 0.}$ Portanto, note que se $r = r_1 = r_2$, então a sua solução torna-se $\mathbf{a_n = Cr^n}$, onde $C = C_1 + C_2$. Segue o resultado. ∎

4.1.1.2 Teorema 2

Ver Lima (1998, p. 75). **Teorema 2**.

Se as raízes de $r^2+pr+q=0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções das recorrências do tipo $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, são da forma $\mathbf{a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n}$, onde $\mathbf{C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}}$ e $\mathbf{C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}}$.

Prova.

Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determina-se as constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações $\begin{cases} \mathbf{C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1} \\ \mathbf{C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2} \end{cases}$, isto é, $\mathbf{C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}}$ e $\mathbf{C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}}$. Isso é possível, pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$, já que r_1 e r_2, são as raízes de $r^2+pr+q=0$ e $q \neq 0$, com $r_1 \neq r_2$.

Afirma-se que $\mathbf{y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n}$, para todo "n" natural, o que provará o teorema.

Com efeito, seja $\mathbf{z_n = y_n - (C_1 r_1^n + C_2 r_2^n)}$. Mostra-se que $z_n=0$, para todo n. Tem-se $\mathbf{z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q)}$. ∎

O primeiro parêntese é igual a zero porque $\mathbf{y_n}$ é a solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são as raízes de $r^2+pr+q=0$. Então $\mathbf{z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0}$.

E mais, como $\begin{cases} \mathbf{C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1} \\ \mathbf{C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2} \end{cases}$, e substituindo em z_n, tem-se $z_1 = z_2 = 0$.

Mas, se $\mathbf{z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0}$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$, para todo n e, portanto, segue o resultado.

4.1.2 Recorrências lineares de segunda ordem não homogêneas, com coeficientes constantes

Apresenta-se um teorema a seguir que permite desenvolver um processo para resolver algumas equações de recorrências não homogêneas.

4.1.2.1 Teorema 3

Ver Lima (1998, p. 79). **Teorema 3.**
Se a_n é uma solução particular da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então $x_n = a_n + y_n$ é uma solução geral da equação dada, desde que y_n seja uma solução geral da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, isto é, a homogênea a ela associada.

Prova.
Substituindo x_n por a_n+y_n na equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, e realizando as devidas simplificações, obtemos $(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n)$. Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, pois a_n é solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$. Portanto, a equação se transforma em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$. ■

Portanto, uma solução geral da equação é a soma de uma solução particular da não homogênea, mais uma solução geral da homogênea a ela associada.

Desta forma, tem-se que, pelo teorema acima, a solução de uma recorrência não homogênea está dividida em duas etapas: devemos primeiramente encontrar uma solução qualquer (particular) da equação não homogênea e depois a solução geral da equação homogênea, solução geral da equação é a soma da solução particular da não homogênea, mais a solução geral da homogênea a ela associada.

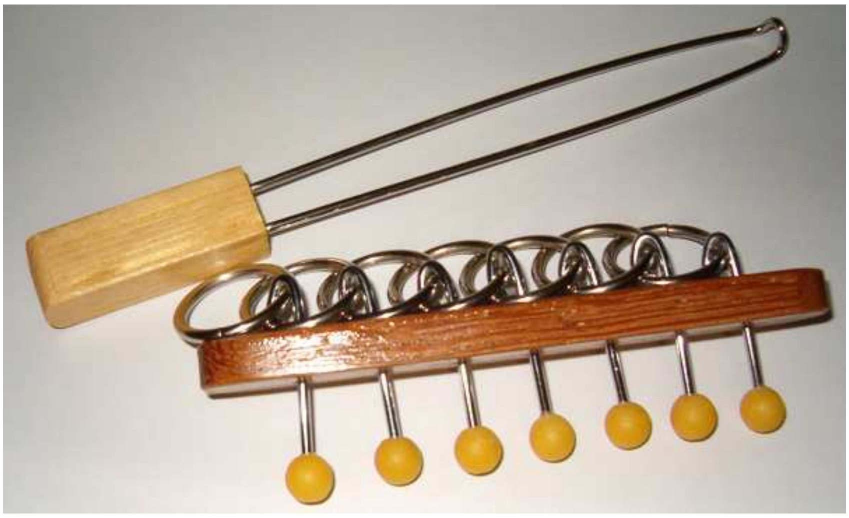
Os Teoremas 1, 2 e 3 são as bases necessárias para o que se propõe a seguir. É possível notar que a fórmula que dá a quantidade de movimentos nas argolas do jogo Anéis Chineses, para atingir seu objetivo, pode-se representar na equação da forma do teorema 3.

4.2 CÁLCULOS DA QUANTIDADE DE MOVIMENTOS DOS ANÉIS

4.2.1 Cálculo do total de movimentos dos anéis, para retirar a haste

O objetivo do jogo dos Anéis Chineses é retirar (liberar) uma haste de metal presa por anéis. Existem uma variedade de artefatos que diferem na quantidade de anéis, todos com o mesmo objetivo.

Figura 2 – Artefato com a haste liberada



Fonte: Elaborada pelo autor

Usa-se um jogo com sete anéis para investigação, conforme Fig. 2. Embora nas tabelas que serão apresentadas os cálculos cheguem a oito anéis. Cada anel limita a movimentação dos restantes, assim necessita-se de uma estratégia para a movimentação dos anéis. Parte-se da posição em que a haste de metal está presa por todos os anéis (Fig. 1), logo, como fazer para chegar à posição em que a haste está livre de todos os anéis? (Fig. 2). Observa-se inicialmente o seguinte:

a) O primeiro anel pode soltar-se e prender-se em qualquer momento. Para liberar este anel, basta que você passe este por dentro da haste. Assim, também se procede com outros anéis, quando se necessita da sua liberação.

b) Liberado inicialmente o primeiro anel, o próximo a ficar livre (ser liberado) é o terceiro, fazendo-se o mesmo procedimento do anel um.

c) Liberado inicialmente o segundo anel e consecutivamente o primeiro, o próximo a ser liberado é o quarto anel.

d) Liberado primeiramente o 1º anel, o próximo a ser liberado é o 3º anel e, após os devidos movimentos com os anéis um e dois, sendo liberado o 1º e o 2º anéis, o próximo na sequência é o quinto anel.

e) Liberado primeiramente o 2º anel e consecutivamente o primeiro, o próximo a ser liberado é o 4º anel, e depois dos devidos movimentos para liberar os anéis 1, 2 e 3, o próximo a ser liberado é o 6º anel.

Observa-se, assim, algo que sugere a existência de uma recorrência. Observa-se, também, que os movimentos iniciais parecem determinar uma sequência que gera a liberação de anéis de posições pares e de posições ímpares.

Estuda-se, agora, de forma mais detalhada estas observações e os movimentos dos anéis. Inicialmente os movimentos dos anéis, com o objetivo de retirar a haste presa nas argolas (anéis).

Para facilitar a investigação, registra-se o movimento dos anéis para liberação da haste de metal, ou fixação da mesma, de duas maneiras. A primeira notação: CA_n, indica, colocar a n-ésima argola (anel) presa na haste e a segunda notação: TA_n, representa, tirar a n-ésima argola (anel) presa na mesma haste, onde n é o número de anéis do jogo, que inicialmente trabalha-se (calcula-se) com um artefato de 8 anéis. Lembre-se que, para tirar um anel (TA), basta que você puxe a haste para trás, retire o anel de dentro da haste e passe este por dentro da haste de cima para baixo e, caso contrário, para colocar um anel preso na haste (CA) basta que você passe este por dentro da haste de baixo para cima, puxe a haste para trás e coloque o anel. Agora, estuda-se e registra-se uma sequência de movimentos de tirar e colocar argolas para uma quantidade fixa de anéis em um jogo, lembrando que o objetivo é liberar a haste dos anéis. Para efeito didático, vamos fazer os registros em uma tabela:

Quadro 1 - Movimentos para retirar a haste dos anéis. Primeiras conclusões

MOVIMENTOS CONSECUTIVOS PARA LIBERAR A HASTE DOS ANÉIS		
Nº de Anéis	**Movimentos dos anéis**	**Total**
1	$\mathbf{TA_1}$	**1**
2	$\mathbf{TA_2}-TA_1$	**2**
3	$\mathbf{TA_1}-\mathbf{TA_3}-CA_1-TA_2-TA_1$	**5**
4	$\mathbf{TA_2}-TA_1-\mathbf{TA_4}-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**10**
5	$\mathbf{TA_1}-\mathbf{TA_3}-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_5}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**21**
6	$\mathbf{TA_2}-TA_1-\mathbf{TA_4}-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_6}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**42**
7	$\mathbf{TA_1}-\mathbf{TA_3}-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_5}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_7}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**85**
8	$\mathbf{TA_2}-TA_1-\mathbf{TA_4}-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_6}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_8}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_7-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**170**

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, por exemplo, para um artefato de n=1 (um anel), retira-se uma vez este anel e a haste vai ser liberada, ou seja, $TA_1=1$ (quantidade de movimento igual a um). Para um artefato (jogo) que possua duas argolas (anéis), n=2, retira-se primeiramente o anel 2 e depois retira-se o anel 1, ou seja, $TA_2=1$ e $TA_1=1$, portanto um total de 2 movimentos para liberar a haste. Assim, continua-se com este procedimento de contagem e registro.

Após estudo no quadro acima, pode-se levantar algumas hipóteses iniciais, como por exemplo:

a) Quando a quantidade total de anéis no jogo é ímpar, tira-se primeiramente da haste o anel 1, mas quando a quantidade total de anéis no jogo é par, então tira-se inicialmente o anel 2.

b) A quantidade total de movimentos realizados anteriormente à liberação no n-ésimo anel é menor do que a quantidade total dos movimentos restantes, até a liberação total da haste.

c) Quando se retira primeiramente o anel 1, então libera-se uma sequência de anéis de ordem impar (tomando a posição inicial como sendo o anel de número 1, o segundo anel de número dois, e assim sucessivamente), o mesmo acontece quando liberamos inicialmente o anel de número 2, os demais anéis na sequência serão de números pares.

d) Tomando artefatos (jogos) com uma quantidade impar de anéis, por exemplo: n=1, n=3, n=5 e n=7, como no quadro 1. Observa-se que, na retirada (liberação da haste) do n-ésimo anel (último anel do artefato), a sequência de movimentos dos anéis realizados anteriormente à retirada desse anel se repete na movimentação de todos os anéis de um artefato (jogo) que possua um total de n-2 anéis. O mesmo acontecendo quando o artefato (jogo) tiver uma quantidade total de anéis par.

As conclusões nos revelam como devemos iniciar o jogo, já que a escolha da primeira retirada do anel depende da quantidade total de anéis do artefato. Continua-se a revelar outras situações, e para isto usam-se os mesmos registros da tabela anterior, dando ênfase a outras situações:

Quadro 2 - Movimentos para retirar a haste dos anéis. Segundas conclusões

MOVIMENTOS CONSECUTIVOS PARA TIRAR A HASTE DOS ANÉIS		
Nº de Anéis	**Movimentos dos anéis**	**Total**
1	TA$_1$	**1**
2	TA$_2$-TA$_1$	**2**
3	TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$	**5**
4	TA$_2$- TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$	**10**
5	TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$	**21**
6	TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_6$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$	**42**
7	TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_7$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_6$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$	**85**
8	TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_6$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_8$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_6$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_7$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_6$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-CA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$-TA$_5$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$-CA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_4$-CA$_1$-CA$_2$-TA$_1$.TA$_3$-CA$_1$-TA$_2$-TA$_1$	**170**

Fonte: Elaborado pelo autor

e) Aqui se percebe que, na sequência de movimentos realizados com os anéis para liberar a haste de um artefato (jogo) que contém uma quantidade de “n” anéis, contém a partir de certo movimento, a mesma sequência de movimentos dos anéis, realizados para liberar a haste de um artefato de “n-1” anéis, com n≥2. Assim, comparando a repetição dos movimentos, dos anéis, contamos uma mesma quantidade de movimentos. Observe no quadro 2, que destacou-se em vermelho parte dos movimentos dos anéis, de um artefato de “n” anéis, que repetem-se na mesma sequência total dos movimentos dos anéis de um artefato de “n-1” anéis.

Usando, ainda, a tabela, tira-se uma importante conclusão:

Quadro 3 - Movimentos para retirar a haste dos anéis. Terceiras conclusões

MOVIMENTOS CONSECUTIVOS PARA TIRAR A HASTE DOS ANÉIS		
Nº de Anéis	**Movimentos dos anéis**	**Total**
1	TA_1	**1**
2	TA_2-TA_1	**2**
3	$TA_1-\mathbf{TA_3}-CA_1-TA_2-TA_1$	**5**
4	$TA_2- TA_1-\mathbf{TA_4}-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**10**
5	$TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_5}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**21**
6	$TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_6}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**42**
7	$TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_7}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**85**
8	$TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{TA_8}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_7-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**170**

Fonte: Elaborado pelo autor

f) Percebe-se que, antes da retirada do anel de número "n", todos os movimentos iniciais com os anéis em um artefato de n anéis são repetidos na mesma sequência de todos os movimentos feitos com os anéis em um artefato de "n-2" anéis, na retirada da haste. Sendo assim, repete-se a mesma sequência de movimentos com os anéis, tem-se, também, a mesma quantidade de movimentos realizados com os anéis. Tem-se mais uma conclusão e para isto observa-se mais um quadro:

Quadro 4 - Movimentos para retirar a haste dos anéis. Conclusões finais

MOVIMENTOS CONSECUTIVOS PARA TIRAR A HASTE DOS ANÉIS		
Nº de Anéis	**Movimentos dos anéis**	**Total**
1	TA_1	**1**
2	TA_2-TA_1	**2**
3	TA_1-**TA_3**-CA_1-TA_2-TA_1	**5**
4	TA_2-TA_1-**TA_4**-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1	**10**
5	TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-**TA_5**-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1	**21**
6	TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-**TA_6**-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1	**42**
7	TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-**TA_7**-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1	**85**
8	TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-**TA_8**-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_7-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1	**170**

Fonte: Elaborado pelo autor

g) Usando as conclusões dos itens “e” e “f”, pode-se, agora, observar mais uma importante situação. Veja o que acontece depois de observadas as conclusões dos itens “e” e “f”, não levando em conta o anel de número n de um artefato de n anéis. Observa-se que na sequência de movimentos dos anéis, para a retirada da haste de um artefato de “n” anéis, existe uma subsequência completa de movimentos dos anéis que não têm repetição com nenhuma outra subsequência de movimentos de anéis, anterior, ou seja, para algum artefato que contenha menos de “n” anéis. Por outro lado, a quantidade de movimentos dos anéis desta subsequência sim. Conclui-se, assim, que, para um artefato com uma quantidade de "n" anéis, retirando as situações dos itens "e" e "f", conclusões dos quadros 2 e 3, respectivamente, e do próprio anel de número "n", o que resta é uma quantidade de movimentos dos anéis que é igual à quantidade total de movimentos dos anéis para retirada da haste de um artefato de, no caso, "n-2" anéis.

Assim, das conclusões dos itens "e", "f" e "g", pode-se conjeturar a seguinte afirmativa. Sendo Q(n) a quantidade total de movimentos a serem realizados na retirada de uma haste de um artefato contendo "n" anéis, logo temos que Q(n) = Q(n-1) + Q(n-2) + Q(n-2) + 1 = Q(n-1) + 2Q(n-2) + 1, para n inteiro, $n \geq 2$, já que para n=0 e n=1, tem-se que Q(0) = 0 e Q(1) = 1.

Assim, pode-se calcular as primeiras quantidades totais de movimentos dos anéis, tomando valores para n, ou seja,

Q(0) = 0

Q(1) = 1

Q(2) = Q(1) + 2.Q(0) + 1 = 2

Q(3) = Q(2) + 2.Q(1) + 1 = 5

Q(4) = Q(3) + 2.Q(2) + 1 = 10

Q(5) = Q(4) + 2.Q(3) + 1 = 21

Q(6) = Q(5) + 2.Q(4) + 1 = 42

Q(7) = Q(6) + 2.Q(5) + 1 = 85

Q(8) = Q(7) + 2.Q(6) + 1 = 170

....

Q(n) = Q(n-1) + 2Q(n-2) + 1

Verifica-se que, para estes primeiros valores de "n", os resultados são os mesmos obtidos nos quadros. Mesmo assim, não se pode afirmar ainda que a conjectura seja totalmente verdadeira.

Observando-se atentamente o total de movimentos dos anéis em função de "n", quantidade dos anéis, pode-se determinar duas relações distintas. Sabe-se que: Q(0) = **0** e Q(1) = **1,** logo,

Q(2) = Q(1) + 2.Q(0) + 1 = 1 + (0 + 1) = 2.Q(1) = **2.**

Q(3) = Q(2) + 2.Q(1) + 1 = 2 + 2 + 1 = Q(2) + Q(2) + 1 = 2.Q(2) + 1 = **5.**

Q(4) = Q(3) + 2.Q(2) + 1 = 5 + (4 + 1) = Q(3) + Q(3) = 2.Q(3) = **10.**

Q(5) = Q(4) + 2.Q(3) + 1 = 10 + 10 + 1 = Q(4) + Q(4) + 1 = 2.Q(4) + 1 = **21**

Q(6) = Q(5) + 2.Q(4) + 1 = 21 + (20 + 1) = Q(5) + Q(5) = 2.Q(5) = **42.**

Q(7) = Q(6) + 2.Q(5) + 1 = 42 + 42 + 1 = 2.Q(6) + 1 = **85.**

Q(8) = Q(7) + 2.Q(6) + 1 = 85 + (84 + 1) = 2.Q(7) = **170.**

.... (1)

Q(n) = Q(n-1) + 2.Q(n-2) + 1 = $\begin{cases} \mathbf{2.Q(n-1),\ se\ n\ \acute{e}\ par,\ n \geq 2.} \\ \mathbf{2.Q(n-1)\ +\ 1,\ se\ n\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar,\ n \geq 3.} \end{cases}$

4.2.1.1 Teorema 4

Teorema 4.

Seja Q(n) a quantidade total de movimentos a serem realizados com "n" anéis de um artefato (Jogo Anéis Chineses) na retirada de uma haste. Então, **Q(n) = Q(n-1) + 2Q(n-2) + 1 =** $\begin{cases} \mathbf{2.Q(n-1),\ se\ n\ \acute{e}\ par,\ n \geq 2.} \\ \mathbf{2.Q(n-1)\ +\ 1,\ se\ n\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar,\ n \geq 3.} \end{cases}$ para todo natural $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$, em particular se n=0 e n=1, tem-se que Q(0) = 0 e Q(1) = 1.

Prova por indução sobre "n":

Como passo inicial, é fácil ver que Q(0)=0 e Q(1)=1, pois, caso o jogo não tenha nenhuma argola, não teremos nenhum movimento e, para um jogo de uma argola, teremos apenas um movimento, o de tirar a argola.

Por hipótese de indução, temos: Q(n) = Q(n-1) + 2.Q(n-2) + 1 = $\begin{cases} 2.Q(n-1),\ se\ n\ \acute{e}\ par,\ n \geq 2. \\ 2.Q(n-1)\ +\ 1,\ se\ n\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar,\ n \geq 3. \end{cases}$, verdadeira para todo n -1.

Assim, afirmamos que Q(n-1) = $\begin{cases} 2.Q(n-2),\ se\ n-1\ \acute{e}\ par,\ n\ \geq 3 \\ 2.Q(n-2)\ +\ 1,\ se\ n-1\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar, n \geq 4 \end{cases}$ é verdadeira, para todo n-2.

Provemos agora a recorrência para Q(n).

Sabemos que Q(n) = Q(n-1) + 2.Q(n-2) + 1, para todo n≥2.

Logo, se n é ímpar (e assim n-1 é par), e de Q(n-1) = 2.Q(n-2), se n-1 é par, e também da base de indução Q(1) =1, temos Q(n) = Q(n-1) + Q(n-1) +1= 2. Q(n-1) + 1, se n-1 é par, ou ainda, Q(n) = 2.Q(n-1) +1, se n é ímpar.

Por outro lado temos, se n é par (e assim n-1 é ímpar), e de Q(n-1)= 2. Q(n-2) + 1, se n-1 é ímpar, e também da base de indução Q(0)= 0, que Q(n) = Q(n-1) + Q(n-1) = 2. Q(n-1), se n-1 é ímpar, ou ainda, Q(n) = 2. Q(n-1), se n é par, o que completa a prova por indução matemática. ■

Usou-se a conjectura em (1) e daí desenvolvemos o teorema 4, que foi provado, confirmando assim que a conjectura é verdadeira.

O objetivo agora é descrever Q(n) (a quantidade total de movimentos a serem realizados com “n” anéis) de um artefato (Jogo Anéis Chineses) na retirada de uma haste, não em função da quantidade de movimentos anteriores, como já feito, mas em função do número “n” de anéis que o artefato (Jogo Anéis Chineses) possui.

Nesse procedimento iremos tomar separadamente a recorrência quando n par e quando n ímpar.

Observe que:

Q(1) = **1** = $\mathbf{2^0}$**.**

Q(2) = **2** = 1 + 1 = $2^0 + 2^0$ = $\mathbf{2^1}$**.**

Q(3) = **5** = 2 + 2 + 1 = $2^1 + 2^1 + 2^0$ = $\mathbf{2^2 + 2^0}$**.**

Q(4) = **10** = 5 + 5 = $(2^1 + 2^1 + 2^0) + (2^1 + 2^1 + 2^0)$ = $\mathbf{2^3 + 2^1}$**.**

Q(5) = **21** = 10 + 10 + 1 = $(2^3 + 2^1) + (2^3 + 2^1) + 2^0$ = $\mathbf{2^4 + 2^2 + 2^0}$**.**

Q(6) = **42** = 21 + 21 = $(2^4 + 2^2 + 2^0) + (2^4 + 2^2 + 2^0)$ = $\mathbf{2^5 + 2^3 + 2^1}$**.**

Q(7) = **85** = 42 + 42 + 1 = 2. $(2^5 + 2^3 + 2^1) + 2^0$ = $\mathbf{2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0}$**.**

Q(8) = **170** = 85 + 85 = 2. $(2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0)$ = $\mathbf{2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1}$**.**

..

Q(2k) = $\mathbf{2^{2k-1} + 2^{2k-3} + 2^{2k-5} + \ldots + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1}$, para $k \geq 1$, inteiro.

Q(2k + 1)= $\mathbf{2^{2k} + 2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \ldots + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0}$, para $k \geq 0$, inteiro.

Assim fazendo n= 2k e n= 2k+1, temos:

Q(n)= $\mathbf{2^{n-1} + 2^{n-3} + 2^{n-5} + \ldots + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1}$, n é inteiro positivo par. (2)

Q(n)= $\mathbf{2^{n-1} + 2^{n-3} + 2^{n-5} + \ldots + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0}$, n é inteiro positivo ímpar.(3)

Observa-se que as sequências (2) e (3) são progressões geométricas de razão 4 e primeiro termo 2 e 1, respectivamente. Assim, calculando as somas nas duas progressões temos:

De (2), $\mathbf{Q(n)} = \dfrac{2.\left(4^{\frac{n}{2}}-1\right)}{4-1} = \dfrac{2(2^n-1)}{3} = \dfrac{2^{n+1}-2}{3}$, quando $n \geq 0$, inteiro par.

De (3), $\mathbf{Q(n)} = \dfrac{1.\left(4^{\frac{n+1}{2}}-1\right)}{4-1} = \dfrac{(2^{n+1}-1)}{3} = \dfrac{2^{n+1}-1}{3}$, quando $n \geq 1$, inteiro ímpar.

Pode-se assim conjecturar que:

$$Q(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n+1} - 2), \; n \; par, \; n \geq 0. \\ \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1), \; n \; ímpar, n \geq 1. \end{cases} \qquad (4)$$

4.2.1.2 Teorema 5

Teorema 5.

Seja Q(n) a quantidade total de movimentos a serem realizados com "n" anéis de um artefato (Jogo Anéis Chineses) na retirada de uma haste. Então, **Q(n) =**

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n+1} - 2), \; n \; par, \; n \geq 0 \\ \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1), \; n \; ímpar, n \geq 1 \end{cases}.$$

1º Caso: $\mathbf{Q(n) = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1), \; n \; ímpar, n \geq 1.}$

Prova por indução sobre "n":

Para n=1 (anel), temos $\mathbf{Q(1) = \frac{1}{3}(2^{1+1} - 1) = \frac{1}{3}(4 - 1) = 1}$, portanto para um anel temos um movimento, o que é verdade.

Por hipótese de indução, suponha-se que para n=k (anéis), k ímpar, temos $\mathbf{Q(k) = \frac{1}{3}\left(2^{k+1} - 1\right)}$, movimentos de anéis.

Agora, para n= k+2 (anéis), onde k+2 é ímpar. Assim, ao acrescentar mais um anel, temos por (3) e a hipótese de indução que $\mathbf{Q(k+2) = 2^{(k+2)-1} + \frac{1}{3}\left(2^{k+1} - 1\right) = 2^{(k+1)} + \frac{1}{3}\left(2^{k+1} - 1\right) = \frac{3}{3}2^{(k+1)} + \frac{1}{3}\left(2^{k+1} - 1\right) = \frac{3.2^{k+1} + 2^{k+1} - 1}{3} = \frac{4.2^{k+1} - 1}{3} = \frac{2^2.2^{k+1} - 1}{3} = \frac{2^{(k+2)+1} - 1}{3}}$, (movimentos) que é verdade.

Logo, pelo P.I.F., temos que: $\mathbf{Q(n) = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1), \; n \; ímpar, n \geq 1.}$

2º Caso: $\mathbf{Q(n) = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 2), \; n \; par, \; n \geq 0.}$

Prova por indução sobre "n":

Para n=0 (anel), temos $\mathbf{Q(0) = \frac{1}{3}(2^{0+1} - 2) = \frac{1}{3}(2 - 2) = 0}$, portanto para nenhum anel em um artefato, nenhum movimento, o que é verdade.

Por hipótese de indução suponha-se que para n=k (anéis), k par, temos $\mathbf{Q}(\mathbf{k}) = \frac{1}{3}\left(\mathbf{2}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{2}\right)$, movimentos de anéis.

Agora, para n= k+2 (anéis), onde k+2 é par. Assim, ao acrescentar mais um anel, temos por (2) e a hipótese de indução que $\mathbf{Q}(\mathbf{k}+\mathbf{2}) = \mathbf{2}^{(\mathbf{k+2})-\mathbf{1}} + \frac{1}{3}\left(\mathbf{2}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{2}\right) = \mathbf{2}^{(\mathbf{k+1})} + \frac{1}{3}\left(\mathbf{2}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{2}\right) = \frac{3}{3}\mathbf{2}^{(\mathbf{k+1})} + \frac{1}{3}\left(\mathbf{2}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{2}\right) = \frac{\mathbf{3.2^{k+1}+2^{k+1}-2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{4.2^{k+1}-2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2^2.2^{k+1}-2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{2^{(k+2)+1}-2}}{\mathbf{3}}$, (movimentos) que é verdade.

Logo, pelo P.I.F., temos que $\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \frac{1}{3}(\mathbf{2}^{\boldsymbol{n+1}} - \mathbf{2}),\ \boldsymbol{n\,par}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}$. O que prova a conjectura. ■

De (1), sabe-se que, Q(n) = Q(n-1) + 2.Q(n-2) + 1.

Denote-se simplificadamente que: $Q_n = Q_{n-1} + 2Q_{n-2} + 1$.

Esta é nossa hipótese inicial para a contagem total dos movimentos dos anéis de um artefato (Jogo Anéis Chineses) de “n” anéis, na liberação da haste.

Então $Q_n = Q_{n-1} + 2Q_{n-2} + 1$, ou seja, $Q_{n+2} = Q_{n+1} + 2Q_n + 1$, ou ainda, $Q_{n+2} - Q_{n+1} - 2Q_n = 1$, que é uma equação de recorrência linear de segunda ordem não homogênea. Assim sua equação homogênea é da forma $Q_{n+2} - Q_{n+1} - 2Q_n = 0$.

4.2.1.3. Teorema 6

Teorema 6.

Seja Q(n) a quantidade total de movimentos a serem realizados com “n” anéis de um artefato (Jogo Anéis Chineses) na retirada de uma haste. Então, pode-se escrever, $\mathbf{Q_{n+2} - Q_{n+1} - 2Q_n = 1}$ e sua solução é da forma $\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \frac{1}{6}\left(\mathbf{2}^{\mathbf{n+2}} - (-\mathbf{1})^{\mathbf{n}} - \mathbf{3}\right)$.

Prova:

Pelo teorema 4, tem-se a primeira parte. Falta apenas provar a sua solução.

De fato, pelo teorema 3, seja $\mathbf{a_n}$ uma solução particular da equação de recorrência $\mathbf{Q_{n+2} - Q_{n+1} - 2Q_n = 1}$. Ora, se substituir $\mathbf{a_n}$, em $\mathbf{Q_{n+2} - Q_{n+1} - 2Q_n}$, devemos encontrar 1. Assim, que tipo de solução deve ser $\mathbf{a_n}$. É bastante razoável imaginar que $\mathbf{a_n}$ seja um polinômio constante.

Faremos $\mathbf{a_n}$ = A e substituindo em $\mathbf{Q_{n+2} - Q_{n+1} - 2Q_n = 1}$, obtemos A – A – 2A = 1, logo A = -1/2. Daí $\mathbf{a_n}$ = -1/2 é uma solução particular da recorrência $\mathbf{Q_{n+2} - Q_{n+1} - 2Q_n = 1}$.

Por outro lado, calcula-se a solução da equação de recorrência linear de segunda ordem homogênea, dada por $Q_{n+2} - Q_{n+1} – 2Q_n = 0$. Pelo teorema 1, tem-se, sua equação característica dada por: $r^2 - r - 2 = 0$, cujas raízes são $r_1= -1$ e $r_2= 2$.

Portanto, a solução da equação homogênea, $Q_{n+2} - Q_{n+1} – 2Q_n = 0$ é da forma, $\mathbf{k_n} = C_1(-1)^n + C_2(2^n)$.

Como $r_1 \neq r_2$, pelo teorema 2, encontremos C_1 e C_2.

A solução geral da recorrência é a soma de $\mathbf{k_n}$ com $\mathbf{a_n}$. Desta forma, $Q_n = k_n + a_n = C_1(-1)^n + C_2(2^n) + (-1/2)$, ou ainda, $Q_n = C_1(-1)^n + C_2(2^n) - 1/2$.

Encontrando as constantes:

Para n = 1, temos $q_1 = - C_1 + 2C_2 – ½ = 1$, e para n = 2, temos $q_2 = C_1 + 4C_2 – ½ = 2$ e assim $\begin{cases} -\mathbf{c_1} + \mathbf{2c_2} = \frac{3}{2} \\ \mathbf{c_1} + \mathbf{4c_2} = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Adicionando membro a membro as duas equações, temos que $6C_2 = 4$, ou seja, $C_2 = 2/3$ e assim $C_1 = 5/2 – 4.(2/3) = 5/2 – 8/3 = -1/6$, logo $C_1 = -1/6$ e $C_2 = 2/3$.

Portanto, a solução geral da recorrência $\mathbf{Q_{n+2} - Q_{n+1} - 2Q_n = 1}$ é dada por $\mathbf{Q_n} = -\frac{1}{6}(-1)^n + \frac{2}{3}(2^n) - \frac{1}{2} = \frac{-(-1)^n + 2^{n+2} - 3}{6} = \frac{2^{n+2} - (-1)^n - 3}{6} = \frac{1}{6}(2^{n+2} - (-1)^n - 3)$, ou seja, é a formula geral. ■

Assim, a quantidade total de movimentos dos anéis (tirar e colocar anéis) em um artefato (Jogo Anéis Chineses) que possui “n” anéis na liberação da haste que está presa pelos anéis é dada pela expressão: $\mathbf{Q_n} = \frac{1}{6}(2^{n+2} - (-1)^n - 3)$, para todo inteiro $n \geq 0$, onde “n” é o número de anéis.

Calculemos agora alguns valores da sequência:

$Q_0 = 1/6.(4 – 1 – 3) = 0/6 = 0$.

$Q_1 = 1/6.(8 + 1 – 3) = 6/6 = 1$.

$Q_2 = 1/6.(16 – 1 – 3) = 12/6 = 2$.

$Q_3 = 1/6.(32 + 1 – 3) = 30/6 = 5$.

$Q_4 = 1/6.(64 – 1 – 3) = 60/6 = 10$.

$Q_5 = 1/6.(128 + 1 – 3) = 126/6 = 21$.

$Q_6 = 1/6.(256 – 1 – 3) = 252/6 = 42.$

$Q_7 = 1/6.(512 + 1 – 3) = 510/6 = 85.$

....

$\mathbf{Q_{2k}} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{2^{2k+2}} - (-\mathbf{1})^{\mathbf{2k}} - \mathbf{3}\right) = \frac{1}{6}\left(\mathbf{2^{2k+2}} - \mathbf{1} - \mathbf{3}\right) = \frac{1}{6}\left(\mathbf{2^{2k+2}} - \mathbf{4}\right) = \frac{2}{6}\left(\mathbf{2^{2k+1}} - \mathbf{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{2k+1}} - \mathbf{2}\right),$ onde n=2k.

$\mathbf{Q_{2k+1}} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{2^{2k+1+2}} - (-\mathbf{1})^{\mathbf{2k+1}} - \mathbf{3}\right) = \frac{1}{6}\left(\mathbf{2^{2k+3}} + \mathbf{1} - \mathbf{3}\right) = \frac{1}{6}\left(\mathbf{2^{2k+3}} - \mathbf{2}\right) = \frac{2}{6}\left(\mathbf{2^{2k+2}} - \mathbf{1}\right) = \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{2k+2}} - \mathbf{1}\right),$ onde n=2k+1.

Logo, $\boldsymbol{Q_n} = \begin{cases} \frac{1}{3}(\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \mathbf{2}), & \boldsymbol{n\ par},\ \boldsymbol{n} \geq \mathbf{0} \\ \frac{1}{3}(\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \mathbf{1}), & \boldsymbol{n\ ímpar}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1} \end{cases}$. Este é o resultado do teorema 5.

4.2.2 Cálculo do total de movimentos dos anéis, para colocar a haste

Nesse caso, têm-se todos os anéis livres e a haste solta, o objetivo é mover os anéis de forma que recoloquemos a haste do jogo de forma a ficar presa pelos anéis. (Fig. 1).

Como já foi afirmado anteriormente, no artefato, usa-se, um total de sete anéis, embora os quadros apresentem cálculos de oito anéis. Usando o mesmo sistema de notação já utilizado, quando do procedimento da retirada da haste presa nas argolas (anéis). Assim, CA_n, representa colocar a n-ésima argola (anel) e TA_n, representa tirar a n-ésima argola (anel), onde n é o número de anéis, que inicialmente trabalha-se com um artefato de no máximo 7 anéis, como já foi dito. Estuda-se e registra-se uma sequência de movimentos dos anéis, para uma quantidade fixa de anéis, lembrando que o objetivo é colocar a haste nos anéis (prender a haste pelos anéis).

Assim, por exemplo, para um artefato de n=1 (um anel), coloca-se uma vez e a haste vai ser presa pelo anel, ou seja, CA_1=1, portanto o número total de movimentos é um.

Para um artefato (jogo) que possua duas argolas (anéis), coloca-se inicialmente o anel de número um (CA_1=1) e depois coloca-se o anel de número dois, ou seja, (CA_2=1), portanto um total de 2 movimentos para prender a haste em um artefato de dois anéis.

Para efeito didático de visualização das informações, vamos fazer os registros em uma tabela, em que constam movimentos consecutivos dos anéis para prender a haste nos anéis:

Quadro 5 - Movimentos para colocar a haste nos anéis

MOVIMENTOS CONSECUTIVOS PARA PRENDER A HASTE NOS ANÉIS		
Nº de Anéis	**Movimentos dos anéis**	**Total**
1	$\mathbf{CA_1}$	**1**
2	$CA_1-\mathbf{CA_2}$	**2**
3	$\mathbf{CA_1}-\mathbf{CA_2}-TA_1-\mathbf{CA_3}-\mathbf{CA_1}$	**5**
4	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{CA_4}-CA_1-\mathbf{CA_2}$	**10**
5	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{CA_5}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-\mathbf{CA_1}$	**21**
6	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{CA_6}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-\mathbf{CA_2}$	**42**
7	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{CA_7}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-\mathbf{CA_1}$	**85**
8	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_7-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-\mathbf{CA_8}-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-\mathbf{CA_2}$	**170**

Fonte: Elaborado pelo autor

Tira-se algumas hipóteses, por exemplo:

a) O último anel a ser colocado para finalizar o jogo será o primeiro anel (CA_1) quando a quantidade total de anéis no jogo for ímpar, e, caso contrário, o último anel a ser colocado será o segundo anel (CA_2), se a quantidade total de anéis for par no jogo. Comparando o quadro 1 com o quadro 4 (movimentos consecutivos para tirar a haste dos anéis), que fez-se anteriormente, tem-se que esta informação aconteceu o inicio do jogo, mas não era colocar o anel na haste e sim tirar os anéis da haste.

b) Se comparar o quadro 1, com o quadro 5, observa-se que existe uma simetria de reflexão nos movimentos e que eles são inversos.

Por exemplo, o quadro 6 faz este comparativo. De um lado temos os movimentos para liberar a haste dos anéis (quadro 1) e do outro os movimentos para prender a haste nos anéis (quadro 5).

Quadro 6 – Movimentos de retirar e colocar a haste. Comparativo

MOVIMENTOS PARA LIBERAR A HASTE DOS ANÉIS – Quadro 1	Nº de Anéis	**MOVIMENTOS PARA PRENDER A HASTE NOS ANÉIS – Quadro 5**
Movimentos dos anéis		**Movimentos dos anéis**
TA_1	**1**	CA_1
TA_2-TA_1	**2**	CA_1-CA_2
$TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**3**	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1$
$TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**4**	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2$
$TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**5**	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1$
$TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1$	**6**	$CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_5-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-TA_4-CA_1-CA_2-TA_1-TA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_6-CA_1-CA_2-TA_1-CA_3-CA_1-TA_2-TA_1-CA_4-CA_1-CA_2$

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, pela simetria de reflexão, os movimentos com os anéis de mesma numeração estão distantes entre si na mesma quantidade de movimentos, sendo que estes movimentos são inversos, por exemplo, enquanto em um dos lados o movimento é TA_1 o outro movimento é CA_1 e assim sucessivamente.

Conclui-se assim, que, pela simetria, a quantidade total de movimentos com os anéis para tirar a haste é a mesma quantidade total de movimentos com os anéis para colocar a haste.

Portanto, a expressão, $\mathbf{Q(n)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\,(\mathbf{2^{n+2}} - \,(\mathbf{-1})^{\mathbf{n}} - \mathbf{3})$, para todo inteiro $n \geq 0$, onde “n” é o número de anéis de um artefato (jogo), que conta os movimentos dos anéis para a retirada da haste presa pelos anéis é a mesma para os dois casos (retirada da haste do artefato e colocação da haste no artefato). Pode-se, também, usar o mesmo argumento anteriormente aplicado na dedução da recorrência, pois o padrão continua o mesmo, porém nas suas devidas simetrias e inversões. Sendo, assim, não se faz tal dedução.

4.2.3 Cálculo da quantidade de movimentos de cada anel

Usando o quadro 6 como referência, pode-se calcular o total de movimentos de cada anel nos seguintes casos:

1º caso: Quantidade total de movimento de cada anel para **retirar** a haste.

2º caso: Quantidade total de movimento de cada anel para **colocar** a haste.

Para isto, conta-se o número de movimentos de cada anel em cada situação acima.

Quadro 7 – A quantidade de movimentos de cada anel.

Quantidade total de movimentos de cada anel para tirar e colocar a haste																				
Quantidade de movimento de cada anel para **retirar** a haste presa										Nº de Anéis	Quantidade de movimento de cada anel para **colocar** a haste presa									
Total	**A_9**	**A_8**	**A_7**	**A_6**	**A_5**	**A_4**	**A_3**	**A_2**	**A_1**		**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**	**A_8**	**A_9**	Total
1									1	**1**	1									**1**
2								1	1	**2**	1	1								**2**
5							1	1	3	**3**	3	1	1							**5**
10						1	1	3	5	**4**	5	3	1	1						**10**
21					1	1	3	5	11	**5**	11	5	3	1	1					**21**
42				1	1	3	5	11	21	**6**	21	11	5	3	1	1				**42**
85			1	1	3	5	11	21	43	**7**	43	21	11	5	3	1	1			**85**
170		1	1	3	5	11	21	43	85	**8**	85	43	21	11	5	3	1	1		**170**
341	**1**	**1**	**3**	**5**	**11**	**21**	**43**	**85**	**171**	**9**	**171**	**85**	**43**	**21**	**11**	**5**	**3**	**1**	**1**	**341**

Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se na tabela uma simetria entre a quantidade total de movimentos dos anéis e o número de cada anel na relação entre retirar e colocar a haste do artefato.

Inicialmente, observe no quadro 7, a coluna da quantidade de movimentos do anel um (A_1), para retirar, ou colocar a haste no artefato. Tem-se a sequência (1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171,...). Por outro lado, observe também a coluna da quantidade total dos movimentos de todos os anéis de um artefato. Tem-se a sequência (1, 2, 5, 10, 21, 42, 85, 170, 341,...). Ao comparar as duas sequências, vê-se que é possível estabelecer uma relação entre as duas, em função da quantidade total de anéis que possua um artefato.

Assim, conclui-se, como conjectura que a quantidade de movimentos do anel um em um artefato de “n” anéis é $\mathbf{A_1(n)} = \begin{cases} \mathbf{Q(n-1) + 1}, & \mathbf{se\ n} \text{ é } \mathbf{ímpar} \\ \mathbf{Q(n-1)}, & \mathbf{se\ n} \text{ é } \mathbf{par} \end{cases}$, (5)

onde **Q(n)** representa a quantidade total de movimentos dos anéis para retirar ou colocar a haste do artefato, **“n”** representa a quantidade de anéis de um artefato e $\mathbf{A_i(n)}$ a quantidade de movimentos dado pelo i-ésimo anel em um artefato de “n” anéis.

Estuda-se de forma mais aprofundada o cálculo da quantidade de movimentos dado pelo anel 1 (A_1) , para retirar ou colocar a haste do artefato que contém uma quantidade de “n” anéis, ou seja, se quer desenvolver uma expressão para $A_1(n)$, em função de “n”.

Sabe-se pelo quadro 7, que:

$A_1(1) = 1$

$A_1(2) = 1$

$A_1(3) = 3 \quad = 2.1+1 \quad = 2.\ A_1(2) +1$

$A_1(4) = 5 \quad = 2.3 -1 \quad = 2.\ A_1(3) - 1$

$A_1(5) = 11 \quad = 2.5 +1 \quad = 2.\ A_1(4) +1$

$A_1(6) = 21 \quad = 2.11 -1 \quad = 2.\ A_1(5) - 1$

$A_1(7) = 43 \quad = 2.21+1 \quad = 2.\ A_1(6) +1$

$A_1(8) = 85 \quad = 2.43 -1 \quad = 2.\ A_1(7) - 1$

$A_1(9) = 171 = 2.85 +1 \quad = 2.\ A_1(8) +1$

....

Generalizando, pode-se conjecturar que:

$$\mathbf{A_1(n)} = \begin{cases} \mathbf{2.A_1(n-1)+1,\ \ se\ n\ é\ ímpar.} \\ \mathbf{2.A_1(n-1)-1,\ \ se\ n\ é\ par.} \end{cases} \qquad (6)$$

Por outro lado, pela conjetura levantada em (5) tem-se:

$$A_1(n) = \begin{cases} Q(n-1)+\ 1,\ \ se\ n\ é\ ímpar \\ Q(n-1),\ \ se\ n\ é\ par \end{cases}.$$

Comparando (5) e (6), tem-se:

$$\begin{cases} 2.A_1(n-1)+1 = Q(n-1)+\ 1,\ \ se\ n\ é\ ímpar \\ 2.A_1(n-1)-1 = Q(n-1),\ \ se\ n\ é\ par \end{cases}, \text{ portanto,}$$

$$A_1(n\text{-}1) = \begin{cases} \frac{1}{2}[Q(n-1)],\ \ se\ n-1\ é\ par \\ \frac{1}{2}[Q(n-1)+1],\ \ se\ n-1\ é\ ímpar \end{cases} \text{, ou ainda,}$$

$$A_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}Q(n),\ \ se\ n\ é\ \ par \\ \frac{1}{2}[Q(n)+1],\ \ se\ n\ é\ ímpar \end{cases} \qquad (7)$$

Sabe-se, ainda do teorema 5, que: $Q(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n+1}-2),\ \ n\ \ par,\ \ n \geq 0 \\ \frac{1}{3}(2^{n+1}-1),\ \ n\ ímpar, n \geq 1 \end{cases}$.

Logo, do Teo. 5 e de (7), tem-se: $A_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}.\frac{1}{3}(2^{n+1}-2),\ \ se\ n\ é\ \ par\ , n \geq 0 \\ \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)+1\right],\ \ se\ n\ é\ ímpar, n \geq 1 \end{cases}$,

que implica, em: $A_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n}-1),\ \ se\ n\ é\ \ par\ , n \geq 0 \\ \frac{1}{3}(2^{n}+1),\ \ se\ n\ é\ ímpar, n \geq 1 \end{cases}$. (8)

Tem-se, assim, o seguinte resultado.

4.2.3.1 Teorema 7

Teorema 7.

Se “i=1” indica o primeiro anel de um artefato Anéis Chineses e “n” indica a quantidade de anéis desse artefato, então a quantidade de movimentos dado pelo anel de número um, $A_1(n)$ em função de “n”, para liberação ou colocação da haste no artefato é: $\mathbf{A_1(n)} = \begin{cases} \mathbf{\frac{1}{3}(2^{n}-1),\ \ se\ n\ é\ \ par\ , n \geq 0} \\ \mathbf{\frac{1}{3}(2^{n}+1),\ \ se\ n\ é\ ímpar, n \geq 1} \end{cases}$ **.**

Prova por indução sobre "n":

Base de indução, para n=0 e n=1 (anel), tem-se respectivamente $A_1(0) = \frac{\mathbf{2^0-1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0}$ e $A_1(1) = \frac{\mathbf{2^1+1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1}$, logo, quando o artefato não tiver anel ou tiver um anel, o número de movimentos do primeiro anel do artefato será $A_1(0)=0$ e $A_1(1)=1$ movimentos, respectivamente e, portanto, verdade.

Agora, dividi-se a hipótese de indução em dois casos:

1º Caso: Para "n" par (número de anéis no artefato é par), assim a quantidade de movimentos dado pelo anel um será: $\mathbf{A_1(n)} = \frac{\mathbf{2^n-1}}{\mathbf{3}}$**.**

Prova-se para "n+1", que é ímpar, já que "n" é par. Sabe-se de (6) que $\mathbf{A_1(n) = 2.A_1(n-1)+1}, \text{se n é ímpar},$ logo $\mathbf{A_1(n+1) = 2.A_1(n)+1},$ se n+1 é ímpar. Assim, $\mathbf{A_1(n+1) = 2.\left(\frac{2^n-1}{3}\right)+1 = \frac{2^{(n+1)}+1}{3}}$**,** que é para n+1 ímpar.

2º Caso: Para "n" ímpar (número de anéis no artefato é ímpar), portanto o número de movimentos dado no anel de número um, será dado por: $\mathbf{A_1(n)} = \frac{\mathbf{2^n+1}}{\mathbf{3}}$**.**

Prova-se para "n+1", que é par, já que "n" é ímpar. Sabe-se de (6) que $\mathbf{A_1(n) = 2.A_1(n-1)-1}, \text{se n é par},$ logo $\mathbf{A_1(n+1) = 2.A_1(n)-1}, \text{se } n+1 \text{ é par}.$ Assim, $\mathbf{A_1(n+1) = 2.\left(\frac{2^n+1}{3}\right)-1 = \frac{2^{(n+1)}-1}{3}}$**,** que é verdade para n+1 par.

Portanto, pelo princípio de indução finita, a expressão é verdade para todo "n" inteiro não negativo. ∎

Conclui-se da conjectura (5) e da conjectura (6), juntamente com o teorema 5, o teorema 7, que foi demonstrado. Portanto, as conjeturas (5) e (6) são verdadeiras.

O esforço agora é para generalizar a contagem dos movimentos para um anel "i" qualquer. Assim, seja $\mathbf{A_i(n)}$ a quantidade total de movimentos realizados com i-ésimo anel em um artefato de "n" anéis, para retirar ou colocar a haste do artefato.

Assim, observando o quadro 7, tem-se,

$A_2(n) = A_1(n-1)$

$A_3(n) = A_2(n-1) = A_1(n-2)$

$A_4(n) = A_3(n-1) = A_2(n-2) = A_1(n-3)$

$A_5(n) = A_4(n-1) = A_3(n-2) = A_2(n-3) = A_1(n-4)$

....

$A_i(n) = A_{i-1}(n-1) = A_{i-2}(n-2) = ...= A_1(n-(i-1)) = A_1(n-i+1)$. (9)

Tem-se assim em (9) uma nova conjectura, $\mathbf{A_i(n) = A_1(n-i+1)}$, onde $\mathbf{A_i(n)}$ é a quantidade total de movimentos realizados com i-ésimo anel em um artefato de "n" anéis, para retirar ou colocar a haste do artefato. .

Por exemplo, calcular a quantidade total de movimentos realizados no anel de número seis, em um artefato que contém nove anéis, com o objetivo de liberar a haste presa é calcular o $A_6(9) = A_1(9-6+1) = A_1(4)$, e, aplicando (5), tem-se que $A_1(4) = Q(4-1) = Q(3) = 5$, pelo quadro 7. Assim, $A_6(9) = 5$ movimentos que serão realizados com o anel de número seis em um artefato de nove anéis.

Deduz-se, agora, um modelo matemático que generalize o processo de contagem de movimentos de qualquer dos anéis em qualquer quantidade de anéis de um artefato (Jogo Anéis Chineses).

Sabe-se da conjectura (5) que $\mathbf{A_1(n)} = \begin{cases} \mathbf{Q(n-1)+\ 1,\ se\ n\ é\ ímpar} \\ \mathbf{Q(n-1),\ \ se\ n\ é\ par} \end{cases}$**,** e do teorema 5 que $\mathbf{Q(n)} = \begin{cases} \frac{1}{3}(\mathbf{2^{n+1}-2}),\ \ \mathbf{n\ \ par,\ \ n \geq 0.} \\ \frac{1}{3}(\mathbf{2^{n+1}-1}),\ \ \mathbf{n\ ímpar, n \geq 1.} \end{cases}$

Assim do teorema 5, das conjecturas (5) e (9), tem-se que:

$$\mathbf{A_i(n)} = \mathbf{A_1(n\text{-}i\text{+}1)} = \begin{cases} \mathbf{Q(n-i+1-1)+\ 1,\ se\ n-i+1\ é\ ímpar} \\ \mathbf{Q(n-i+1-1), se\ n-i+1\ é\ par} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q(n-i)+\ 1, se\ n-i}\ \text{é}\ \mathbf{par} \\ \mathbf{Q(n-i),\ se\ n-i}\ \text{é}\ \mathbf{ímpar} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\mathbf{2^{(n-i)+1}-2}}{\mathbf{3}}+\mathbf{1},\ \mathbf{se\ n-i}\ \text{é}\ \mathbf{par},\ \ \mathbf{n-i \geq 0} \\ \frac{\mathbf{2^{(n-i)+1}-1}}{\mathbf{3}},\ \mathbf{se\ n-i}\ \text{é}\ \mathbf{ímpar},\ \ \mathbf{n-i \geq 1} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{(n-i)+1}+1}\right),\ \mathbf{se\ n-i\ é\ par,\ \ n-i \geq 0} \\ \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{(n-i)+1}-1}\right),\ \mathbf{se\ n-i\ é\ ímpar, n-i \geq 1} \end{cases}, \qquad (10)$$

onde “i” indica qual o número do anel que se quer contar a quantidade de movimentos e “n” indica a quantidade total de anéis que possui o artefato pelo qual se quer contar os movimentos do anel de número “i”.

Por exemplo: tome i = 4 (o quarto anel), de um artefato (Jogo Anéis Chineses), que possui um total de n = 9 (nove anéis). Assim, calcula-se $A_4(9)$, e como n-i = 9-4 = 5 que é ímpar, logo se deve utilizar a expressão $\mathbf{A_i(n)} = \frac{1}{3}(\mathbf{2^{n-i+1}} - \mathbf{1}),\ \mathbf{se\ n - i}$ é í$\mathbf{mpar}$, de (10). Portanto, $\mathbf{A_4(9)} = \frac{1}{3}(\mathbf{2^{9-4+1}} - \mathbf{1}) = \frac{1}{3}(\mathbf{2^6} - \mathbf{1}) = \frac{1}{3}(\mathbf{64} - \mathbf{1}) = \frac{1}{3}(\mathbf{63}) = \mathbf{21}$, que será a quantidade de movimentos a serem dados no anel de número 4, para liberação ou coloção da haste do artefato.

Pode-se, assim, generalizar as conclusões no seguinte resultado:

4.2.3.2 Teorema 8

Teorema 8.

Se “i” indica o i-ésimo anel de um jogo Anéis Chineses e “n” indica a quantidade total de anéis desse jogo, então a quantidade total de movimentos dado pelo i-ésimo anel (A_i), para liberação ou colocação da haste nesse jogo, é:

$$\boldsymbol{A_i(n)} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{(n-i)+1}} + \mathbf{1}\right), & \mathbf{se\ (n-i)\ \acute{e}\ par} \\ \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{(n-i)+1}} - \mathbf{1}\right), & \mathbf{se\ (n-i)\ \acute{e}\ \acute{i}mpar} \end{cases},\ \mathbf{com\ n} \geq \boldsymbol{i}.$$

Prova:

Prova-se por indução sobre “i”, para um artefato (Jogo Anéis Chineses) de “n” anéis, ou seja, faz-se indução sobre “i”, contando o total de movimentos realizados em cada anel no objetivo do jogo.

A base de indução: para um jogo Anéis Chineses com “n” anéis, toma-se i=1, ou seja, conta-se o total de movimentos do anel de número um, assim temos:

$$\mathbf{A_1(n)} = \begin{cases} \frac{1}{3}(\mathbf{2^n} + \mathbf{1}), & \mathbf{se\ n - 1\ \acute{e}\ \ par} \Rightarrow \mathbf{n}\ \text{é}\ \mathbf{\acute{i}mpar}, \mathbf{n} \geq \mathbf{1} \\ \frac{1}{3}(\mathbf{2^n} - \mathbf{1}), & \mathbf{se\ n - 1\ \acute{e}\ \acute{i}mpar} \Rightarrow \mathbf{n}\ \text{é}\ \mathbf{par}, \mathbf{n} \geq \mathbf{2} \end{cases}$$

, e portanto, para um jogo de “n” anéis, o total de movimentos dado no anel de número um, será contado pela expressão: **$A_1(n)$ =** $\begin{cases} \frac{1}{3}(\mathbf{2^n+1}),\ \textbf{se n é ímpar},\ \mathbf{n \geq 1} \\ \frac{1}{3}(\mathbf{2^n-1}),\ \textbf{se n é par},\ \mathbf{n \geq 2} \end{cases}$ **,** que foi demonstrado no teorema 7, portanto a base de indução para n=1 é verdadeira.

A hipótese de indução é que para o i-ésimo anel, "A_i", em um jogo anéis chineses de "n" anéis, o total de movimentos feitos neste anel, com o objetivo de alcançar o propósito do jogo é contado pela expressão $\boldsymbol{A_i(n)} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{(n-i)+1}+1}\right),\ \textbf{se (n − i) é par} \\ \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{(n-i)+1}-1}\right),\ \textbf{se (n − i) é ímpar} \end{cases}$ **.**

Prova-se para i+1, ou seja, em um jogo anéis chineses com um total de "n" anéis, deve-se provar que a conjectura conta a quantidade total de movimentos em um anel de número "i+1", onde n≥ i+1.

Sabe-se que $\boldsymbol{A_{i+1}(n) = A_i(n-1)}$**,** ou seja, que a quantidade total de movimentos realizados no anel de número "i+1" em um jogo de "n" anéis é igual a quantidade total de movimentos realizados em um anel de número "i" em um jogo que possui "n-1" anéis.

Portanto, de $\boldsymbol{A_{i+1}(n) = A_i(n-1)}$ e pela hipótese de indução, temos,

$\boldsymbol{A_{i+1}(n)} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{((n-1)-i)+1}+1}\right),\ \textbf{se (n − 1) − i é par} \\ \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{((n-1)-i)+1}-1}\right),\ \textbf{se (n − 1) − i é ímpar} \end{cases}$ **,** e portanto podemos afirmar que $\boldsymbol{A_{i+1}(n)} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{(n-(i+1))+1}+1}\right),\ \textbf{se n − (i + 1) é par} \\ \frac{1}{3}\left(\mathbf{2^{(n-(i+1))+1}-1}\right),\ \textbf{se n − (i + 1) é ímpar} \end{cases}$ **,** que é verdadeira para "i+1".

Portanto, pelo princípio de indução finita, a expressão é verdadeira para todo "i" inteiro positivo. ■

Outra prova possível para o teorema, caso seja demonstrada a conjectura levantada em (9), de que **$A_i(n) = A_1(n-i+1)$** é que pelo teorema 7, temos: $A_1(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^n-1),\ \text{se n é par},\ n \geq 0 \\ \frac{1}{3}(2^n+1),\ \text{se n é ímpar},\ n \geq 1 \end{cases}$ e da conjectura (9), sabe-se que: $A_i(n) = A_1(n-i+1)$.

Portanto, $A_i(n) = A_1(n - i + 1) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(2^{(\mathrm{n-i})+1} - 1\right), & \text{se } (\mathrm{n-i}) + 1 \text{ é par} \\ \frac{1}{3}\left(2^{(\mathrm{n-i})+1} + 1\right), & \text{se } (\mathrm{n-i}) + 1 \text{ é ímpar} \end{cases}$

e portanto $\mathbf{A_i(n)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left(\mathbf{2^{(n-i)+1} - 1}\right), & \textbf{se } (\mathbf{n-i}) \text{ é í}\textbf{mpar} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left(\mathbf{2^{(n-i)+1} + 1}\right), & \textbf{se } (\mathbf{n-i}) \text{ é } \textbf{par} \end{cases}$ **.** O que confirma o teorema.

CONCLUSÃO

Novos rumos devem ser dados à renovação do ensino e aprendizagem da matemática nas escolas. Os cursos de licenciatura em matemática possuem uma responsabilidade nesta transformação. O LEM é uma oportunidade transformadora, e para isto contribui-se com ideias e sugestões para sua prática e implantação nos cursos de formação de professores, pois acredita-se que a raiz da implantação nas escolas começa neste espaço. Neste sentido, a formação do professor de matemática deve ter em mente a sua prática docente nas escolas. Os professores devem ter uma formação que lhes instrua no uso de laboratório de matemática, para que eles na sua prática docente possam levar esta ideia para as escolas e com isto dinamizar suas aulas, obtendo melhores resultados de sua prática.

Destaca-se, também, o trabalho com jogos de recorrência na sala de aula e, assim, os alunos poderão não somente ter interesse pelo estudo da matemática, mas perceber como o abstrato da matemática se conecta de forma aplicativa e quantos resultados matemáticos com suas justificativas podem ser retirados de um simples jogo que possua uma recorrência e que pode ser explorado em um LEM.

Este trabalho confirma a necessidade de as escolas possuírem LEM como espaço atuante e diferenciador da prática educativa do ensino aprendizagem da matemática, assim como os cursos de licenciatura em matemática, pois não se concebe mais a formação de educador em matemática sem as novas tendências de ensino e aprendizagem da mesma.

Outro destaque é que, a partir do trabalho aqui apresentado, deixa-se a possibilidade de novas pesquisas nos métodos e na forma de como trabalhar laboratorialmente a matemática na sala de aula, na formação do professor e consequentemente na sua prática. Já que a proposta aqui apresentada para o trabalho com LEM na formação de professor é inovadora desde sua inserção das disciplinas de LEM na “prática como componente curricular”, até sua proposta de trabalho com as disciplinas. Quanto aos jogos, a busca por outros tipos que possam ser modelados por recorrência, e que outros resultados podem ser levantados a partir dos que aqui apresentamos para o jogo Anéis Chineses. Sem dúvida, existem uma infinidade de elementos e conteúdos a serem explorados em um LEM.

Um resultado bastante importante foi a elaboração os teoremas 4, 5, 6, 7 e 8, a partir da recorrência com o jogo Anéis Chineses. É importante salientar que as fontes consultadas tratam de apenas algumas dadas recorrências apresentadas no trabalho e assim outras são inéditas, como a contagem dos movimentos dos anéis de forma individual em um artefato qualquer. Outra ênfase que podemos dar ao trabalho é que, nas fontes consultadas, o tratamento que leva à conclusão de alguns dos resultados aqui apresentados estuda-se o jogo Anéis Chineses com o sistema de numeração binária, diferentemente da estratégia utilizada neste trabalho. Considera-se, assim, uma contribuição positiva deste trabalho.

É preciso que os alunos no Ensino Médio sejam desafiados com situações didáticas motivadoras. Faz-se necessário que os nossos alunos tenham a experiência do matemático na sua prática que é o de pensar, criar, testar, demonstrar e registrar na linguagem matemática seus pensamentos e, nesta perspectiva, é que propomos os jogos de recorrência como disparador desta experiência, rica de possibilidades e conjecturas. Motivadoras de descobertas, além do lúdico.

Espera-se com isto ter contribuído nesta jornada pela perspectiva da melhoria do ensino e aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218 p.

BALL, W.W. Rouse. **Mathematical Recreations and Essays. Project Gutenberg's.** London: Macmillan and co., New York: the macmillan company, 4ª edição. 1905. p. 93. Disponível em: http://www.gutenberg.org/ebooks/26839, e http://www.gutenberg.org/ebooks/search/?query=Mathematical+Recreations+and+Essays. Acesso em 10 Abril de 2014.

BARRANTES, M., & BLANCO, Lorenzo J. **Estudo das recordações, expectativas e concepções dos professores em formação sobre ensino-aprendizagem da Geometria.** Tradução de Carlos Alberto Barros Abrantes de Figueiredo. SBEM, Educação Matemática em Revista, n.17, p.29-39, Dez-2004.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias; v.2, 137p. Brasília: MEC/Seb, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Conselho Nacional de Educação. **Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior**. Resolução CNE/CP2/2002, 19 de fevereiro de 2002. Diário Oficial da União, Brasília, 04 de março de 2002. Seção 1, p. 9. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf . Acesso em 10 de Abril de 2014.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Conselho Nacional de Educação**. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena: Institui a prática como componente curricular**. Parecer CNE/CP9/2001. Diário Oficial da União, Brasília, 18 de janeiro de 2002, seção 1, p. 31. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf . Acesso em 10 de Abril de 2014.

BUSQUINI, J.A. (2003). **O significado da demonstração geométrica em um curso de licenciatura em matemática: um estudo de caso**. Dissertação (Mestrado em Ciências e Práticas Educativas), Franca: Universidade de Franca.

CARDANO, Gerolamo. **Mediolanensis Philosophi AC Medici Celeberrimi**. Nella edizione Sponium, tom. III, 1663. 713 p. (Cápitulo 15 – De inutilibus fubtilitatibus), paragrafo 2. pag. 587. Disponível em: http://www.europeana.eu/portal/search.html?query=edm_agent%3a%22http%3a%2f%2fd-nb.info%2fgnd%2f11863822X%22. Acesso em 20 de Abril de 2014.

CARDANO, Gerolamo. **De Svbtilitate Mediolanensis Medici.** Libri XXI, Impressvm Norimberg per Iohan, Petreium, 1550. 371 p. (Cápitulo 15 – De incertigeneris aut inutilibus fubtilitatibus), paragrafo 2. pag. 294. Disponível em:

https://archive.org/details/hin-wel-all-00000138-001. Acesso em 20 de Abril de 2014.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 6ª Ed. São Paulo: Papirus, 2000.

DUDENEY, H. E., Project Gutenberg's - Amusements in Mathematics. Problem 417. 1917, p.142. Disponível em: http://www.gutenberg.org/files/16713/16713-h/16713-h.htm. e https://archive.org/details/amusementsinmath00dude. Acesso em 20 de Abril de 2014.

FETISSOV, A. **A demonstração em geometria**. Tradução de Pedro Lima. Moscou: Mir, 1985.

FOSSA, Jonh A. **Ensaios sobre a educação matemática.** Bélem: EDUEPA, 2001.

GARDNER, Martin. **Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments**. Ney York: W. H. Freeman and Company, 1986. 287 p. (págs. 11 – 27). Disponível em: https://bobson.ludost.net/copycrime/mgardner/gardner11.pdf. Acesso em 04 de Abril de 2014.

GARNICA, A.V.M. (2002). **As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio**. Boletim de Educação Matemática, nº18, 73-81p.

GOMES, Maria L. M.. **Álgebra e funções na educação básica.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 69 p.

GROS, Louis. **Théorie Du baguenodier, par um clerc de notaire lyonnais**. Lyon, 1872. 16 p. Disponível em: http://books.google.com.br/books/about/Th%C3%A9orie_du_baguenaudier_par_un_clerc_de.html?id=EcoBJRekd-sC&redir_esc=y. Acesso em 20 de Abril de 2014.

KASNER, Edward e NEWMAN James. **Matemática e Imaginação**. Tradução de Jorges Fortes. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 1968. 347 p.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

KRAITCHIK, Maurice. **Mathematical Recreations**. New York, Dover publications, 2ª ed.,1953. 330 p.

LIMA, E. L.; CARVALHO P. C. P.; WAGNER E. e MORGADO A. C. A Matemática do Ensino Médio. V. 2. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LOURENZATO, Sergio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** São Paulo: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, Sergio; FIORENTINI, Dário. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos.** São Paulo. Autores Associados, 2006.

MAMMANA, Carmelo e VILLANI, Vinicius. **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century.** New ICMI Study series 5, vol. 5, Kluwer Academic Publishers, 1998.

LUCA, Pacioli. **De Viribus Quantitatis.** Cap CVII: Do cavare et mettere una strenghetta salda in al quanti anelli saldi difficil caso. Pág.: 211 – 212. Disponível em: http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/2_113.html. Acesso em 29 de Abril de 2014.

LUCAS, Édouard. **Récréations Mathématiques.** Paris, Gauthier-villars et Fils, Imprimeurs-Libraires, v. 01, 1891. (Septième recreation, págs. 161 – 186). Disponível em: https://archive.org/details/recretionmatedou03lucarich. Acesso em 10 de Abril de 2014.

OZANAM , Jacques. Recreations Mathematiques et Physiques, ov l'on traite.... nella edizione del 1723. IV volume. pág. 439. Disponível em: http://www.marianotomatis.it/biblioteca/index.php?action=LIST&filter=AUTH_Ozanam,%20Jacques. Acesso em 29 de abril de 2014.

PONTE, João Pedro, CANAVARRO, Ana Paula. **Matemática e novas tecnologias**. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.

PICKOVER, Clifford A. **O Livro da matemática**. Tradução de Carlos Carvalho. Kerkdriel, Holanda; Librero, 2011. 528 p.

SANTOS, Carlos P., NETO João P. e SILVA Jorge N. **Matemática Recriativa + Puzzle Anéis Chineses**. Lisboa, Norprint impressão, 2007. Disponível em: http://jnsilva.ludicum.org/HMR14_15/hmr14_15.html. Acesso em 10 de Abril de 2014.

SBEM (Sociedade Brasileira de Matemática). Página: Laboratórios. Disponível em Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/97-laboratorios/119-laboratorios. Acesso em 21 dez. 2014.

SHKARSKY, D. O.; CHENTZOV, N. N. e YAGLOM, I. M. **The USSR Olympiad Problem Book: Selected problems and Theorems of Elementary Mathematics.** Translated by John Maykovich. New York, 3rd ed/rev. and edited by Irving Sussman. Dover Publications, 1962. 464 p. (págs. 7 e 81 – 84). Disponível em: https://www.google.com.br/#q=the ussr olympiad problem book selected problems and theorems of elementary mathematics. Acesso em 04 de Abril de 2014.

STACEY, Kaye; CHICK, Helen e KENDAL, Margaret. **The Future of the Teaching and Learning of Algebra.** New ICMI Study series 8, vol. 8, Kluwer Academic Publishers, 2004.

SOARES, E. F., FERREIRA, M. C. C. e MOREIRA, P. C. Da Prática do Matemático para a Prática do Professor: Mudando o Referencial da Formação Matemática do Licenciando. Zetetiké, 1997, v.5, nº 7.

SOUZA, A. C. C., CABRAL, T. C. B., BICUDO, I., TEIXEIRA, M. V., BICUDO, M. A. V. e BALDINO, R. R. **Diretrizes para a Licenciatura em Matemática**. UNESP – RIO CLARO. Bolema, 1991, ano 6, nº 7.

TAHAN, Malba. **Didática da Matemática**. v.2. São Paulo: Ed. Saraiva, 1962.

TINOCO, Lucia A. de A.. **Álgebra: pensar, calcular, comunicar....** Rio de Janeiro, UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2008.

WALLIS, Johannis. **Tractatus de Algebra: historicus & practicus**. Operum Mathematicorum volumen alterum. Imprimatur: Henr. Aldrich, 1693. (Cap. CXI. Págs: 472- 478). Disponível em: http://books.google.com.br/books/about/Johannis_Wallis_De_algebra_tractatus_his.html?id=EuzpN1t5SOcC&redir_esc=y. Acesso em 10 de Abril de 2014.

YOUNG, J. W. A. **Fines, Valor y Método de la Enseñanza Matematica**. Tradução: Carlos Luzuriaga. Buenos Aires, Editorial Losada S.A., 1947.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Ementário para disciplina laboratório de ensino de álgebra

<table>
<tr><th colspan="5">IDENTIFICAÇÃO</th></tr>
<tr><td>CÓDIGO</td><td>DISCIPLINA
LABORATÓRIO DE ENSINO DE ÁLGEBRA</td><td>SEMESTRE
2°</td><td>CRÉDITOS TEÓRICOS
02</td><td>CRÉDITOS PRÁTICOS
02</td></tr>
<tr><td>OBRIG/OPT/ELET
OBRIGATÓRIA</td><td>PRÉ-REQUISITO
--------------------</td><td>CARGA HORÁRIA</td><td colspan="2">N°MAX. ALUNOS
20</td></tr>
<tr><td colspan="5">EMENTA:
Fundamentação teórica do ensino de álgebra. Fundamentação metodológica do ensino de álgebra. Leitura e Produção de textos de Ensino de Álgebra. Epistemologia do saber algébrico.</td></tr>
<tr><td colspan="5">OBJETIVOS:
• Conhecer através da história as origens da álgebra e o uso dos símbolos.
• Explorar situações-problemas, para que o aluno reconheça as diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relações entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representar problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas e coeficientes, tomando contato com fórmulas), compreender a “sintaxe” (regra para a resolução) de uma equação.
• Trabalhar álgebra por meio de situações problemas que façam pensar, analisar, julgar e decidir-se pela melhor solução.
• Conhecer as novas tendências do ensino da álgebra: utilizando a história da matemática, trabalhando com a investigação matemática.
• A análise de erros matemáticos como um norte para a tomada de procedimentos que auxiliem no enfrentamento das dificuldades, possibilitando, assim, a superação de incompreensões nas propriedades algébricas básicas.</td></tr>
<tr><td colspan="5">BIBLIOGRAFIA BÁSICA:
[1] TAHAN, Malba. Didática da Matemática. v.2. São Paulo: Ed. Saraiva, 1962.
[2] TINOCO, Lucia A. de A.. Álgebra: pensar, calcular, comunicar.... Rio de Janeiro, UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2008.
[3] GOMES, Maria L. M.. Álgebra e funções na educação básica. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. 69 p.
[4] PIAGET, J. e ROLANDO G. Psicogênese e História das Ciências. Lisboa, Dom Quixote, 1987.
[5] COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. (Org.), As Ideias da Álgebra, Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994
[6] RPM - Revista do professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. N^{os} de 1 a 85. Anos: de 1982 até 2014. SBM, Rio de Janeiro.
[7] Revista: A educação Matemática em revista. SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Blumenau. Furb. 1993/2003. nºs 01/14
[8] Revista: Educação e Matemática. APM – Associação dos Professores de Matemática. Lisboa. APM. Nº 01/71. 1988/2002.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE B - Ementário para disciplina laboratório de ensino de geometria

IDENTIFICAÇÃO				
CÓDIGO	**DISCIPLINA** LABORATÓRIO DE ENSINO DE GEOMETRIA	**SEMESTRE** 3°	**CRÉDITOS TEÓRICOS** 02	**CRÉDITOS PRÁTICOS** 02
OBRIG/OPT/ELET OBRIGATÓRIA	**PRÉ-REQUISITO** GEOMETRIA EUCLIDIANA	**CARGA HORÁRIA**	**N°MAX. ALUNOS** 20	

EMENTA:
Fundamentação teórica do ensino de Geometria. Fundamentação metodológica do ensino de Geometria. Leitura e Produção de textos de Ensino de Geometria. Epistemologia do saber geométrico.

OBJETIVOS:

- Trabalhar geometria por meio de situações problemas que façam pensar, analisar, julgar e decidir-se pela melhor solução.
- Refletir e discutir alguns questionamentos relativos ao ensino-aprendizagem em geometria (Por que é aconselhável e/ou necessário ensinar Geometria? O que deve ser ensinado? Como deveríamos ensinar Geometria? O que é pensamento geométrico? Como ele se desenvolve? Como avaliar conhecimentos geométricos?) através da leitura de alguns textos (artigos científicos e de periódicos, capítulos de livros).
- Entender conceitos e conteúdos referentes à geometria euclidiana (questionamentos relativos ao processo de demonstração em geometria e retomar alguns conceitos da geometria euclidiana a partir do estudo das demonstrações de alguns teoremas)
- Conhecer as novas tendências do ensino de geometria (perspectiva empírico-ativista, perspectiva das provas e argumentações ou refutações, perspectiva de seus fundamentos teórico-epistemológico e ambientes Computacionais).

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

[1] NASSER, Lílian; TINOCO, Lucia. **Argumentações e provas no ensino de matemática.** Projeto Fundão, IM-UFRJ, 2001. 109p.
[2] TAHAN, Malba. **Didática da Matemática**. V. 2. São Paulo: Ed. Saraiva, 1962.
[3] Fetissov, A. (1985). **A demonstração em geometria.** Tradução de Pedro Lima. Moscou: Mir.
[4] LOURENZATO, Sergio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** São Paulo: Autores Associados, 2006.
[5] Lopes, A.S. **Perspectivas para o ensino de geometria para o século XXI.** São Paulo: Centro de Educação Matemática, 1995.
[6] RPM **- Revista do professor de Matemática.** Sociedade Brasileira de Matemática. N^{os} de 1 a 85. Anos: de 1982 até 2014. SBM, Rio de Janeiro.
[7] SBEM **- A Educação Matemática em Revista**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 1993/2014. nºs 01/42. São Paulo.
[8] LINDQUIST, Mary M. e SHULTE, Albert P. (Org.), **Aprendendo e Ensinando Geometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.
[9] FOSSA, Jonh A. **Ensaios sobre a educação matemática.** Belém: EDUEPA, 2001.

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE C - Ementário para disciplina laboratório de ensino de materiais didáticos e pedagógicos

IDENTIFICAÇÃO				
CÓDIGO	**DISCIPLINA** LABORATÓRIO DE ENS. DE MATERIAIS DIDÁTICOS PEDAGÓGICOS.	**SEMESTRE** 4°	**CRÉDITOS TEÓRICOS** 02	**CRÉDITOS PRÁTICOS** 03
OBRIG/OPT/ELET OBRIGATÓRIA	**PRÉ-REQUISITO** Didática Geral	**CARGA HORÁRIA**	**N°MAX. ALUNOS** 20	

EMENTA:

Concepções acerca do uso ou não de materiais didáticos em sala de aula. A metodologia e os limites do uso dos materiais concretos na construção de conceitos. Estudo e produção de materiais didáticos para sala de aula. Estudo e produção de materiais teóricos e práticos para aulas interdisciplinares.

OBJETIVOS:

- Estudar concepções acerca do uso de materiais didáticos em sala de aula.
- Estudar a metodologia e os limites do uso dos materiais concretos na construção de conceitos.
- Capacitar o aluno na criação de projetos de contextualização e interdisciplinaridade.
- Pesquisar, Avaliar e Organizar exposições temáticas de matemática.
- Conhecer as novas tendências do ensino da matemática, como também, trabalhar com investigação, produção e utilização de recursos didáticos.
- Desenvolver projetos de ensino para conteúdos de matemática.

BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

[1] ALBERTI, Leon B.,**Matemática Lúdica**. Tradução de André Telles. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Ed., 2006.
[2] RÊGO, Rogéria G. e RÊGO, Rômulo M. **Matematicativa**. João Pessoa, UFPB, 2000.
[3] WALLE, John A. V., **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professor e aplicação em sala de aula.** Tradução: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre, Artmed Ed.,2009.
[4] GARDNER, Martin. **Divertimentos Matemáticos**. São Paulo. Ibrasa. 3ª edição. 1998.
[5] HOLT, Michael. **Matemáticas Recreativas 2**. Ediciones Martinez Rocas, SA, 1988.
[6] IMENES, Luiz M. **Série: Vivendo a Matemática**. São Paulo, Editora Scipione, 1989.
[7] JAKUBOVIC, José. et al. **Pra que Serve a Matemática?** São Paulo, Atual Ed., 1992.
[8] SERRAZINA, Lurdes ; MATOS, Manuel José. **O Geoplano na sala de aula**. Lisboa. APM. 1996.
[9] LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.
[10] ZARO, Milton & Hillerbrand, Vicente. **Matemática Experimental**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 1992.

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE D - Ementário para disciplina laboratório de ensino de tecnologias

<table>
<tr><th colspan="5">IDENTIFICAÇÃO</th></tr>
<tr><td>CÓDIGO</td><td>DISCIPLINA
LABORATÓRIO DE ENSINO DE TECNOLOGIAS</td><td>SEMESTRE
5°</td><td>CRÉDITOS TEÓRICOS
02</td><td>CRÉDITOS PRÁTICOS
03</td></tr>
<tr><td>OBRIG/OPT/ELET
OBRIGATÓRIA</td><td>PRÉ-REQUISITO
Geometria euclidiana, Iniciação a ciência da computação.</td><td>CARGA HORÁRIA</td><td colspan="2">N°MAX. ALUNOS
20</td></tr>
<tr><td colspan="5">EMENTA:
Fundamentação teórica e metodológica do uso de tecnologias de informação e comunicação na sala de aula. O ensino de matemática, com ênfase na calculadora, no software e no vídeo. Estudo e produção de materiais para o uso da calculadora em sala de aula. Estudo e produção de atividades para o uso de vídeos da TV escola na sala de aula. Estudo e utilização do software Geogebra para o ensino de matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="5">OBJETIVOS:
• Potencializar o aluno no uso de recursos tecnológicos (vídeo, calculadora e software) em sala de aula como recursos didáticos de forma a promover a compreensão, interpretação, análise e aplicação dos conteúdos e conceitos de matemática.
• Capacitar o aluno na produção de situações didáticas para o uso de calculadoras simples, do software Geogebra e dos vídeos da TV escola na sala de aula para o ensino e aprendizagem de matemática.
• Capacitar o aluno na criação de projetos de contextualização e interdisciplinaridade com o uso de tecnologias.</td></tr>
<tr><td colspan="5">BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

[1] PENTEADO, H. D. Televisão e escola – conflito ou cooperação? SP: Ed. Cortez, 1991.
[2] NAPOLITANO, Marcos. Como Usar a Televisão na sala de aula. São Paulo. Contexto, 1999.
[3] PROJETO TV ESCOLA. MEC – Tv e Vídeo na escola e os desafios de hoje. Projeto “Como Fazer?” e “Sala de Professor” (contextualização e interdisciplinaridade na sala de aula). 1996.
[4] SALTO PARA O FUTURO: TV e Informática na Educação/ Secretaria de Educação a Distância. Brasília: MEC (Ministério da Educação e do Desporto). SEED, 1998. 112 p.
[5] PONTE, J. P. e CANAVARRO, Ana P. Matemática e novas tecnologias. Lisboa: Universidade Aberta, 1997.
[6] SILVA, A.; LOUREIRO, C.; VELOSO, M. G.. Calculadoras na Educação Matemática. Lisboa, APM - Associação de Professores de Matemática, 1989.
[7] NÓBRIGA, J. C. C.; ARAÚJO, L. C. L.. Aprendendo Matemática com o Geogebra. DF. Editora Exato, 2010.
[8] BACCEGA, Maria Aparecida. Televisão e Escola: uma mediação possível? São Paulo: Senac, Ed., 2003. (Série Ponto Futuro, nº 14).
[9] MORAN, José M., MASETTO, Marcos T., BEHRENS, Marilda A. Novas tecnologias e mediação pedagógica. São Paulo: Papirus, 2000.
[10] ALMEIDA, Maria Elizabeth. Proinfo: Informática e Formação de Professor. SED – Brasília: MEC, Seed, vol. 1 e 2, 2000.
[11] BRASIL. MEC – Secretaria de Educação a Distância. Cadernos da TV Escola. PCN na Escola - Matemática. Nº 2, Brasília, 1998.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE E - Ementário para disciplina laboratório de pesquisa em educação matemática

<table>
<tr><th colspan="5">IDENTIFICAÇÃO</th></tr>
<tr><td>CÓDIGO</td><td>DISCIPLINA
LABORATÓRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA</td><td>SEMESTRE
6°</td><td>CRÉDITOS TEÓRICOS
04</td><td>CRÉDITOS PRÁTICOS
02</td></tr>
<tr><td>OBRIG/OPT/ELET
OBRIGATÓRIA</td><td>PRÉ-REQUISITO
Metodologia do Trabalho Científico</td><td>CARGA HORÁRIA</td><td colspan="2">N°MAX. ALUNOS
20</td></tr>
<tr><td colspan="5">EMENTA:
A História da pesquisa em Educação Matemática no Brasil. Leitura da didática da matemática francesa (transposição didática, contrato didático, situações didáticas, teoria dos campos conceituais, engenharia didática, obstáculo epistemológico, erro, representação semiótica e dialética ferramenta-objeto). Produção de um projeto de pesquisa. Realização de uma pesquisa com finalização em um artigo científico.</td></tr>
<tr><td colspan="5">OBJETIVOS:
• Conhecer a História da Educação Matemática no Brasil.
• Conhecer a didática da matemática francesa.
• Elaborar um projeto de pesquisa.
• Produzir um artigo cientifico.</td></tr>
<tr><td colspan="5">BIBLIOGRAFIA BÁSICA:

[1] ALVES, Nilda. Formação de Professores: Pensar e Fazer. São Paulo: Cortez, 1999.
[2] BICUDO, Maria A. V.(Orgs). Formação de Professores? : da incerteza à compreensão. São Paulo: EDUSC, 2003.
[3] BICUDO, Maria A. V. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo. Editora UNESP, 1999. (Seminários & Debates).
[4] LORENZATO, Sergio; FIORENTINI, Dário. Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos. São Paulo. Autores Associados, 2006.
[5] D’AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: da teoria à prática. São Paulo. Papirus, 1996.
[6] PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte. 2ª ed. Autêntica, 2002.
[7] FOSSA, Jonh A. Ensaios sobre a Educação Matemática. Belém. Eduepa, 2001.
[8] FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 2 ed. rev. Campinas, SP. Autores Associados, 2007. (Coleção formação de professores).
[9] ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218 p.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelo autor