



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

LUIZ EFIGÊNIO DA SILVA FILHO

**CÔNICAS:
APRECIANDO UMA OBRA-PRIMA DA MATEMÁTICA**

**JUAZEIRO DO NORTE
2015**

LUIZ EFIGÊNIO DA SILVA FILHO

**CÔNICAS:
APRECIANDO UMA OBRA-PRIMA DA MATEMÁTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maria Silvana Alcântara Costa

JUAZEIRO DO NORTE
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S58c Silva Filho, Luiz Efigênio
Cônicas : apreciando uma obra-prima da matemática / Luiz Efigênio da Silva Filho. – 2015.
141 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.
Coorientador: Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade.

1. Seções cônicas. 2. Duplicação do cubo. 3. Equações cartesianas. I. Título.

LUIZ EFIGÊNIO DA SILVA FILHO

CÔNICAS:

APRECIANDO UMA OBRA-PRIMA DA MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 15 / 05 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Maria Silvana A. Costa

Prof. Dr. Maria Silvana Alcântara Costa (Orientador)

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade (co-Orientador)

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Dr. Francisco Valdemiro Braga

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico este trabalho as pessoas mais importantes da minha vida: minha companheira Raissa; meus pais Maria do Carmo e Luiz Efigênio; minhas irmãs Ediclécia, Edna, Érica, Eridiane e Edivânia; meus sobrinhos Ingrid, Thyerrs e Davi.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me proporcionar a vida e os meios necessários para continuar vivendo em paz e com saúde.

A minha família, por sempre está ao meu lado em todos momentos, bons e ruins, da minha vida, em especial minha esposa Raissa, pela paciência e compreensão que teve do início ao término do curso do PROFMAT.

A meus colegas da Turma 2013.1 do PROFMAT, que durante as aulas compartilhavam seus conhecimentos e experiências de vida. Dentre eles devo uma atenção especial a Adriano, meu amigo desde a graduação, que mais uma vez foi muito companheiro de estudos.

A todos os professores do PROFMAT, pela dedicação e disposição para ensinar, em particular a Prof^a. Silvana, que me ajudou na escolha do tema e no desenvolvimento desse trabalho.

E por último a SBM, pela iniciativa de criar o PROFMAT, pois sem ele não sei como alcançaria o título de mestre na área que mais me fascina: a Matemática.

*Bem aventurado o homem que acha sabedoria,
e o homem que adquire conhecimento;
Porque é melhor a sua mercadoria do que
artigos de prata, e maior o seu lucro que o
ouro mais fino.*

*Mais preciosa é do que rubins, e tudo o que
mais possas desejar não se pode comparar a
ela. (Provérbios 3: 13-15).*

RESUMO

Neste trabalho abordaremos alguns assuntos relacionados às Seções Cônicas: elipse, parábola e hipérbole. O trabalho está dividido em cinco capítulos: Introdução; Origem das Cônicas; Equações das Cônicas; Propriedades de Reflexão das Cônicas; Construindo Cônicas. No segundo capítulo, falaremos sobre o problema da duplicação do cubo que, segundo a História da Matemática, deu origem as cônicas e citaremos alguns matemáticos cujos trabalhos contribuíram para o desenvolvimento do estudo dessas curvas. No terceiro capítulo, estudaremos as equações cartesianas das cônicas, bem como as suas representações gráficas e os principais elementos de cada cônica. No quarto capítulo, apresentaremos as propriedades de reflexão das cônicas e algumas aplicações muito interessantes dessas propriedades. No último capítulo, demonstraremos alguns métodos para construir cônicas e em seguida faremos essas construções na prática através de materiais concretos e por meio de um programa de Geometria Dinâmica, chamado *Geogebra*.

Palavras-chave: Seções Cônicas. Duplicação do cubo. Equações cartesianas. Propriedades de reflexão. Construções de cônicas .

ABSTRACT

In this paper we discuss some issues related to Conic Sections: ellipse, parabola and hyperbole. The work is divided into five chapters: Introduction; Origin of Conic Sections; Equations of Conic Sections; Reflection Properties of Conic Sections; Building Conic Sections. In the second chapter, we'll talk about doubling the cube problem that, according to the History of Mathematics, originated the conic sections and talk about some mathematicians whose work contributed to the study of these curves. In the third chapter, we will study the Cartesian equations of conic sections, as well as their graphical representations and the main elements of each curve. In the fourth chapter, we present the reflection properties of conic sections and some very interesting applications of these properties. In the last chapter, we will show some methods to construct conic sections and then we will make these constructs in practice through concrete materials and through a dynamic geometry program, called *Geogebra*.

Keywords: Conic Sections. Doubling the cube. Cartesian equations. Properties of reflection. Construction of conic sections.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O problema da duplicação do cubo	17
Figura 2 – Exemplos de lunas	18
Figura 3 – Cone circular reto	20
Figura 4 – A orthotome segundo Menaecmus	22
Figura 5 – A solução de Menacmus para o problema deliano	23
Figura 6 – A oxytome segundo Menaecmus	25
Figura 7 – A amblytome segundo Menaecmus	27
Figura 8 – Aplicações de áreas	29
Figura 9 – As seções cônicas	31
Figura 10 – Elipse: demonstração de Dandelin e Quetelet	33
Figura 11 – Hipérbole: demonstração de Dandelin e Quetelet	34
Figura 12 – Parábola: demonstração de Dandelin e Quetelet	35
Figura 13 – Coordenadas cartesianas	38
Figura 14 – Distância entre pontos do plano	39
Figura 15 – Translação de eixos	40
Figura 16 – Vértices sobre a reta focal	41
Figura 17 – Vértices sobre a reta não focal	42
Figura 18 – Elipses com centros na Origem	44
Figura 19 – Elipses com centros no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$	46
Figura 20 – Elementos da hipérbole	48
Figura 21 – Hipérboles com centros na Origem	50
Figura 22 – Hipérboles com centros no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$	52
Figura 23 – Parábolas com vértices na origem	55
Figura 24 – Parábolas com vértices no ponto (x_o, y_o)	57
Figura 25 – Sistema de coordenadas do teorema 3.1	62
Figura 26 – As diretrizes das cônicas	65
Figura 27 – Secantes e tangente à parábola em P	66
Figura 28 – Reta tangente à parábola em P	68
Figura 29 – Reta tangente à elipse em P	69
Figura 30 – Reta tangente à hipérbole em P	70
Figura 31 – Reflexão da luz	70
Figura 32 – Propriedade de reflexão da parábola	71
Figura 33 – Propriedades de reflexão da elipse e hipérbole	71
Figura 34 – Paraboloide	73
Figura 35 – Lanterna	74
Figura 36 – Holofote	74

Figura 37 – Microfone parabólico	74
Figura 38 – Farol de motocicleta	74
Figura 39 – Forno solar em Odeillo, França	74
Figura 40 – Esquema de reflexão no forno	74
Figura 41 – Antena parabólica	75
Figura 42 – Radiotelescópio em Arecibo, Porto Rico	75
Figura 43 – Brinquedo Mirascope	75
Figura 44 – Esquema de reflexão no Mirascope	75
Figura 45 – Elipsoide	76
Figura 46 – Refletor odontológico	77
Figura 47 – Esquema do refletor odontológico	77
Figura 48 – Equipamento de litotripsia extracorpórea	77
Figura 49 – Esquema de reflexão na litotripsia	77
Figura 50 – Edifício Capitólio dos Estados Unidos	77
Figura 51 – Esquema de reflexão na sala de sussurros	77
Figura 52 – Uma das folhas do Hiperboloide	78
Figura 53 – Telescópio Newtoniano	79
Figura 54 – Esquema de reflexão no telescópio Newtoniano	79
Figura 55 – Telescópio Cassegrain	79
Figura 56 – Esquema de reflexão no telescópio Cassegrain	79
Figura 57 – Circunferências diretrizes da elipse	83
Figura 58 – Construção de uma elipse usando as circunferências tangentes	85
Figura 59 – Construção de uma elipse usando as tangentes envoltórias	87
Figura 60 – Construção de uma elipse através de dobraduras de papel	88
Figura 61 – Construção de uma elipse usando as circunferências concêntricas	90
Figura 62 – Construção de uma elipse através do método do jardineiro	92
Figura 63 – Demonstração da Proposição 5.4	94
Figura 64 – Construção de uma elipse usando as circunferências deslizantes	95
Figura 65 – Circunferências diretrizes da hipérbole de eixo focal de medida $r - r'$	98
Figura 66 – Circunferências diretrizes da hipérbole de eixo focal de medida $r + r'$	100
Figura 67 – Construção de uma hipérbole usando as circunferências tangentes	102
Figura 68 – Construção de uma hipérbole usando as tangentes envoltórias	104
Figura 69 – Construção de uma hipérbole através de dobraduras de papel	105
Figura 70 – Construção de uma hipérbole usando as circunferências concêntricas	107
Figura 71 – Construção de uma hipérbole através do método do jardineiro	109
Figura 72 – Construção de uma hipérbole usando a soma constante das distâncias	112
Figura 73 – Circunferência diretriz da parábola	113
Figura 74 – Construção de uma parábola usando as circunferências tangentes	115
Figura 75 – Construção de uma parábola usando as tangentes envoltórias	117

Figura 76 – Construção de uma parábola através de dobraduras de papel	118
Figura 77 – Construção de uma parábola usando as circunferências concêntricas	120
Figura 78 – Construção de uma parábola através do método do jardineiro	122
Figura 79 – Construção de uma parábola usando a soma constante das distâncias	126
Figura 80 – Cone de papel: parábola	133
Figura 81 – Cone de papel: hipérbole	137
Figura 82 – Cone de papel: elipse	141

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	ORIGEM DAS CÔNICAS	16
2.1	A duplicação do cubo	16
2.2	Menaecmus, o descobridor das cônicas	18
2.2.1	O sintoma da orthotome	21
2.2.2	O sintoma da oxytome	24
2.2.3	O sintoma da amblytome	26
2.3	Apolônio de Perga, o Grande Geômetra	28
2.4	Philippe de La Hire e a propriedade bifocal	32
2.5	As cônicas e as esferas de Dandelin-Quetelet	32
2.5.1	A elipse e as esferas de Dandelin-Quetelet	32
2.5.2	A hipérbole e as esferas de Dandelin-Quetelet	33
2.5.3	A parábola e a esfera de Dandelin-Quetelet	34
3	EQUAÇÕES DAS CÔNICAS	36
3.1	Alguns conceitos fundamentais de Geometria Analítica	36
3.1.1	A reta dos números reais	36
3.1.2	Valor absoluto e distância entre pontos da reta	37
3.1.3	Sistema de coordenadas cartesianas	38
3.1.4	Distância entre pontos do plano	39
3.1.5	Translação dos eixos coordenados	39
3.2	As equações da elipse	40
3.2.1	Elipse com centro na origem	42
3.2.2	Elipse com centro no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$	45
3.3	As equações da hipérbole	47
3.3.1	Hipérbole com centro na origem	49
3.3.2	Hipérbole com centro no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$	51
3.4	As equações da parábola	53
3.4.1	Parábola com vértice na origem	54
3.4.2	Parábola com vértice no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$	56
3.5	Equação geral do segundo grau com duas variáveis	59
3.6	Definição unificada das cônicas por meio da excentricidade	62
4	PROPRIEDADES DE REFLEXÃO DAS CÔNICAS	66
4.1	Propriedade das retas tangentes às cônicas	66

4.2	As leis de reflexão da luz	70
4.2.1	Aplicações das superfícies refletoras parabólicas	73
4.2.2	Aplicações das superfícies refletoras elípticas	76
4.2.3	Aplicações das superfícies refletoras hiperbólicas	78
5	CONSTRUINDO CÔNICAS	81
5.1	Conceito de lugar geométrico	81
5.2	Construindo elipses	81
5.2.1	Método das circunferências tangentes – Elipse	81
5.2.2	Método das tangentes envoltórias – Elipse	86
5.2.3	Dobraduras de papel – Elipse	88
5.2.4	Método das circunferências concêntricas – Elipse	89
5.2.5	Método do jardineiro – Elipse	91
5.2.6	Método das circunferências deslizantes – Elipse	93
5.3	Construindo hipérbolas	96
5.3.1	Método das circunferências tangentes – Hipérbole	96
5.3.2	Método das tangentes envoltórias – Hipérbole	103
5.3.3	Dobraduras de papel – Hipérbole	105
5.3.4	Método das circunferências concêntricas – Hipérbole	106
5.3.5	Método do jardineiro – Hipérbole	108
5.3.6	Método da soma constante das distâncias – Hipérbole	110
5.4	Construindo parábolas	113
5.4.1	Método das circunferências tangentes – Parábola	113
5.4.2	Método das tangentes envoltórias – Parábola	116
5.4.3	Dobraduras de papel – Parábola	118
5.4.4	Método das circunferências concêntricas – Parábola	119
5.4.5	Método do jardineiro – Parábola	121
5.4.6	Método da soma constante das distâncias – Parábola	123
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	127
	REFERÊNCIAS	128
	ANEXO A – CONES DE PAPEL	129

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho faremos um breve estudo sobre as seções cônicas. Quando uso a palavra "breve", não tenho a intenção de parecer modesto, pois tenho plena convicção de que o conteúdo que será apresentado nas próximas páginas é apenas a ponta de um grande *iceberg* que é o estudo das cônicas. A escolha desse tema foi uma indicação da Prof^a. Silvana, minha orientadora. Desde o princípio achei a ideia interessante, pois durante minha vida escolar não tive oportunidade de estudar as cônicas, apesar de ser um assunto que consta nos livros de Matemática do Ensino Médio. Embora tenha estudado na escola o gráfico da função quadrática, que é uma parábola, somente na Universidade é que de fato aprendi um pouco sobre as cônicas.

Com o tema definido comecei a buscar fontes de referências, o que me deixou bastante impressionado pela variedade de assuntos nos quais as cônicas são abordadas. Assim começaram a surgir os primeiros embaraços: sobre qual assunto devo escrever? Depois de muita reflexão, percebi que a resposta para essa pergunta seria obtida se eu primeiro encontrasse uma resposta para a seguinte pergunta: para quem vou escrever? Então decidi elaborar um texto voltado para estudantes do Ensino Médio. Dessa maneira, todos os conceitos e resultados que serão apresentados neste trabalho foram adaptados de forma que possam ser compreendidos por qualquer pessoa que tenha familiaridade com os conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana Plana e Espacial.

Os assuntos que abordaremos neste trabalho estão divididos em cinco capítulos, a saber: Introdução; Origem das cônicas; Equações das cônicas; Propriedades de reflexão das cônicas; Construindo cônicas.

No capítulo 2, estudaremos um pouco de História da Matemática, onde será apresentado o problema da duplicação do cubo que ocupou a mente de muitos matemáticos, amadores e profissionais, ao longo de vários séculos. Durante esse período, foram apresentadas diversas soluções para esse problema, porém todas violavam a regra que foi imposta para a solução do mesmo: a duplicação do cubo deveria ser feita com régua e compasso. Uma dessas soluções foi dada pelo matemático Menaecmus, que resolveu o problema utilizando uma nova família de curvas, mais tarde batizada de Seções Cônicas. Citaremos também outros matemáticos como Apolônio, Philippe de La Hire e Dandelin, cujos trabalhos acarretaram grandes contribuições para o estudo das cônicas.

O assunto estudado no capítulo 3, geralmente está presente na maioria dos livros e trabalhos que tratam de cônicas e aparece em todos os livros de matemática do Ensino Médio, logo os resultados obtidos neste capítulo são bastante conhecidos pelos estudantes e professores de Matemática. Nele veremos que cada cônica pode ser representada por meio de uma equação algébrica. Para isso, enunciaremos alguns conceitos de Geometria Analítica necessários para a dedução dessas equações.

No quarto capítulo, demonstraremos as propriedades de reflexão das cônicas. Veremos que essas propriedades, que já eram conhecidas desde o tempo dos matemáticos gregos, possuem diversas e curiosas aplicações em várias áreas do conhecimento e profissionais como Óptica, Medicina, Telecomunicação, Astronomia, Acústica, Odontologia, etc. A ideia é mostrar que as cônicas estão presentes em nosso cotidiano e sem elas seria impossível alcançar os avanços tecnológicos que conhecemos.

No último capítulo, descreveremos métodos para construir cônicas que será o foco principal deste trabalho. Esses métodos são na verdade construções geométricas onde, ao invés de serem usados régua e compasso como de costume, utilizaremos um *software* (programa) de Geometria Dinâmica chamado *Geogebra*, que pode ser adquirido gratuitamente pela *internet*. Como nas escolas raramente os alunos aprendem a fazer construções geométricas, a intenção é familiarizá-los com alguns conceitos matemáticos, como o conceito de Lugar Geométrico, que muitas vezes passam despercebidos em determinados assuntos. O objetivo é criar uma ponte entre o processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática e uso de tecnologias modernas, ambos importantes para a formação do aluno e conseqüentemente para êxito do aluno na Atual Sociedade.

Espero que todos os leitores deste trabalho possam desfrutar do mesmo sentimento que tive ao estudar as cônicas e assim possam apreciar as cônicas como uma obra-prima da Matemática.

2 ORIGEM DAS CÔNICAS

Neste capítulo faremos um estudo sobre a origem das cônicas. Iniciaremos com um problema conhecido como o problema da duplicação do cubo, que segundo a História da Matemática, tal problema deu origem as seções cônicas. Em sequência, falaremos sobre o matemático Menaecmus (considerado o descobridor das cônicas), as equações das cônicas segundo a Geometria Plana e finalizaremos o capítulo apresentando algumas contribuições dos matemáticos Apolônio, Philippe de La Hire e Dandelin para o estudo das cônicas.

Ressaltamos que, neste capítulo, alguns problemas serão apresentados sem o devido rigor matemático. Porém, no capítulo 3 abordaremos o assunto com detalhes.

2.1 A duplicação do cubo

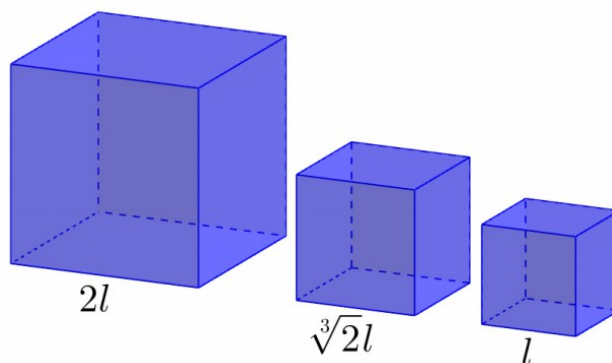
As curvas chamadas de *As seções Cônicas* ou simplesmente *As Cônicas* surgiram de um fato, que na verdade não se sabe se realmente aconteceu ou talvez seja apenas uma lenda, mas conta-se que por volta do ano 429 A. C. houve uma terrível epidemia de peste na cidade de Atenas na Grécia. Por causa da doença muitas pessoas morreram e as autoridades da época buscavam meios para controlar a situação. Como era de costume naquele tempo, as autoridades foram consultar o oráculo¹ do deus Apolo, que ficava na ilha jônica de Delos. O oráculo, como era de se esperar, deu a solução para o problema da peste: o altar de adoração à Apolo, que tinha a forma de um cubo, deveria ser substituído por outro altar de mesma forma, só que deveria ter o dobro do volume do altar anterior. Daí o surgimento do Problema da Duplicação do Cubo, também conhecido como o Problema de Delos ou o Problema Deliano, fazendo referência ao local do seu surgimento.

Conta ainda a História, que as autoridades providenciaram de imediato a construção do novo altar da seguinte forma: mediram o lado de uma face do primeiro altar, ou seja, a aresta do cubo, dobraram a medida do comprimento dessa aresta e partir dela fizeram um novo cubo (ver Figura 1). Porém, mesmo depois de atendida a exigência do oráculo, a peste continuou fazendo suas vítimas em Atenas. Mais uma vez, o oráculo foi procurado para dar explicações sobre a permanência do problema que sustentou sua palavra, uma vez que se tratava de uma resposta divina. Dessa forma, só restava uma possibilidade: um erro teria ocorrido na construção do altar. E de fato aconteceu e será mostrado. Vamos chamar a medida da aresta do primeiro altar de a_1 e de V_1 o seu volume, temos:

$$V_1 = a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 = a_1^3.$$

¹ Resposta dada por uma divindade a quem a consultava.

Figura 1 – O problema da duplicação do cubo



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora seguindo com o processo de construção utilizado vamos dobrar a medida da aresta. Se chamarmos de a_2 e V_2 a medida da aresta e o volume do segundo altar respectivamente, obtemos:

$$a_2 = 2a_1 \implies V_2 = a_2^3 = (2a_1)^3 = 8a_1^3 = 8V_1.$$

Podemos ver claramente que, ao invés de construir um cubo com o dobro do volume do cubo dado inicialmente, os construtores fizeram um cubo que tinha um volume oito vezes maior que o primeiro. Assim o problema estava em descobrir uma medida x tal que $x^3 = 2a_1^3$. Foi então que os matemáticos da época "*compraram a briga*" e começaram a buscar alguma solução para o problema Deliano. Se fosse em nossos dias, diríamos que a solução algébrica do problema é tomar $x = a_1 \sqrt[3]{2}$. Porém na época, impuseram uma condição, bastante aceita pelos matemáticos: o segmento que representa a medida x da aresta do cubo deveria ser construído usando apenas régua (sem marcas) e compasso. Esse processo de construção consistia em utilizar esses instrumentos para executar um número finito de operações de traçado de retas e circunferências, através dos quais são encontrados os elementos (segmentos, pontos de interseção, etc) que resolvem o problema proposto. Este problema de fácil compreensão e aparentemente simples de se resolver entrou para a História, juntamente com outros dois, como **Os Três Problemas Clássicos**, são eles:

A trisseção do ângulo: dado um ângulo qualquer, construir por meio de régua e compasso, um ângulo com exatamente um terço da medida do ângulo dado.

A quadratura do círculo: dado um círculo arbitrário, construir somente com régua e compasso, um quadrado de área igual à do círculo.

A duplicação do cubo: dada a aresta de um cubo, construir somente com régua e compasso, a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro.

O fato que levou esse conjunto de problemas a ficar marcado na História da Matemática, e conseqüentemente na História da Humanidade, é que diversos matemáticos respeitados tentaram durante vários séculos resolver pelo menos um dos problemas, todavia não descobriram nenhuma solução que atendesse as exigências propostas. Dentre esses célebres matemáticos estava Menaecmus (380-320 a.C.) que resolveu "desrespeitando" as regras (não usou apenas régua e compasso) o problema da Duplicação do Cubo, utilizando-se de uma nova família de curvas: as cônicas.

Vale ressaltar que, embora não tenham encontrado as soluções com régua e compasso para os Três Problemas Clássicos, as muitas tentativas dos matemáticos produziram importantes descobertas que enriqueceram profundamente a Matemática ao longo dos anos. Além disso, a razão pela qual nenhum matemático foi capaz de resolver nenhum desses problemas é porque foi provado (somente no século XIX) que não existe solução para eles através de construção com régua e compasso.

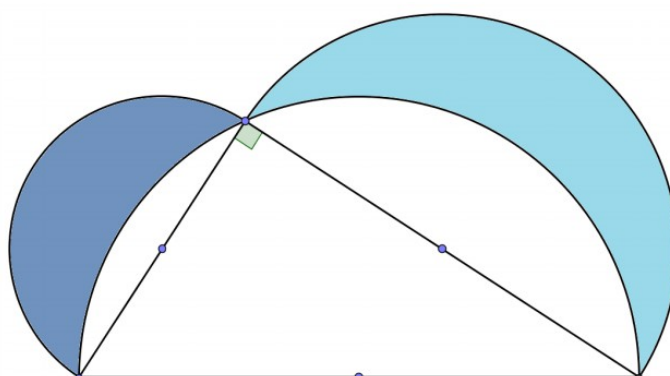
2.2 Menaecmus, o descobrir das cônicas

Rei, para viajar pelo país há estradas reais e estradas para os cidadãos comuns, mas na geometria há só uma estrada para todos.²

Menaecmus

Antes de falarmos sobre Menaecmus, falaremos de outro matemático importante que também "atacou" os três problemas clássicos: Hipócrates de Chios (470-410 a.C.). Hipócrates ficou conhecido pelo seu trabalho de quadratura de lunas³, no qual aplicava uma ferramenta matemática muito utilizada naquela época: a Teoria das Proporções.

Figura 2 – Exemplos de lunas



Fonte: Elaborada pela autor

² Atribui-se essa frase a Menaecmus quando Alexandre, o Grande, lhe pediu um caminho mais curto para a geometria.

³ Uma luna é uma figura geométrica limitada por dois arcos circulares de raios diferentes.

Devido ao êxito de Hipócrates na quadratura de uma figura geométrica curvilínea, os matemáticos achavam que a Teoria das Proporções também ajudaria na solução do problema da quadratura do círculo. Um exemplo de aplicação dessa teoria utilizada pelos matemáticos gregos era converter um retângulo com lados de medida a e b em um quadrado de mesma área, para isso bastava encontrar a média proporcional (ou geométrica) de a e b :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

onde x é a medida do lado do quadrado.

Os geométricos gregos facilmente construíam com régua e compasso um segmento medindo x . Tiveram então a ideia de ampliar o problema: dados dois segmentos a e b , encontrar (ou construir) outros dois segmentos x e y tais que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Se fizermos $b = 2a$ teremos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

de onde obtemos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \implies x^2 = ay \quad e \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \implies xy = 2a^2.$$

Agora considere o sistema:

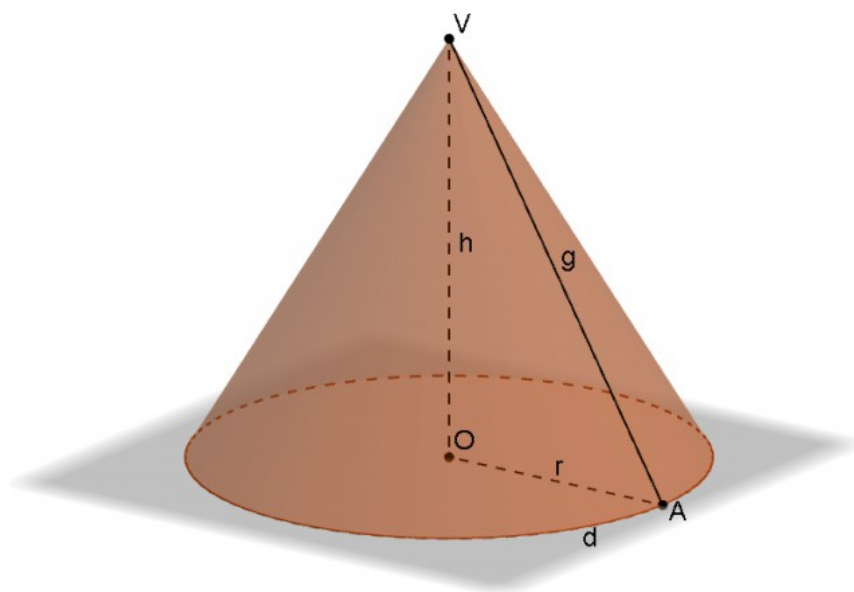
$$\begin{cases} x^2 = ay \\ xy = 2a^2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Na primeira equação temos $y = \frac{x^2}{a}$. Substituindo na segunda obtemos $x^3 = 2a^3$. Como mencionamos anteriormente, é esse x que resolve o problema da duplicação do cubo.

Atribui-se a Hipócrates, essa percepção de transformar o problema da duplicação do cubo em um problema de proporção. Isso é muito comum na Matemática, transformar um problema em outro equivalente porém mais simples de se entender e resolver.

Agora falaremos sobre aquele que descobriu as cônicas, Menaecmus, que para resolver o problema da duplicação do cubo, utilizou-se de outra superfície muito conhecida pelos matemáticos de sua época: o cone. A definição de cone daquela época é bastante restrita, bem diferente da atual. Menaecmus usou um tipo bem particular de cone, que hoje chamamos cone circular reto, que será definido a seguir:

Figura 3 – Cone circular reto



Fonte: Elaborada pelo autor

Definição 2.1. Um cone, ou superfície cônica, é uma superfície gerada por uma reta g (geratriz) que passa por um ponto dado V (vértice) e percorre os pontos de uma linha dada d (diretriz), onde V não pertence a d . Em particular, se a diretriz é uma circunferência com centro O e a reta VO é perpendicular ao plano que contém d , a superfície cônica é um cone circular reto.

Na Figura 3 podemos ver os principais elementos de um cone circular reto: a altura $h = \overline{VO}$; o raio r da circunferência da base; a geratriz g e a linha diretriz d . É importante lembrar que o cone é uma superfície, ou seja, ele é "oco" como uma casca de sorvete ou como um chapéu de aniversário feito de papel.

Agora seguiremos o raciocínio utilizado por Menaecmus para descobrir as novas curvas: considere três cones cada um tendo uma medida diferente no ângulo do vértice na seguinte ordem: o primeiro é reto (90 graus), o segundo é agudo (menor que 90 graus) e o último é obtuso (maior que 90 graus). Em seguida, tome três planos distintos, cada um perpendicular a uma geratriz de cada cone. Das interseções dos cones com os planos obtemos três curvas: *Orthotome*, *Oxytome* e *Amblytome*⁴. Essa família de curvas são as Seções Cônicas ou simplesmente as Cônicas, como diz o nome, são cortes no cone.

No capítulo 3, veremos que as cônicas possuem equações que as caracterizam, mas para isso usaremos uma ferramenta matemática que ainda não havia sido descoberta na época de Menaecmus: a Geometria Analítica. No entanto é possível mostrar usando apenas Geometria Plana Elementar, que as cônicas de Menaecmus possuem equações equivalentes aquelas obtidas analiticamente. Essa caracterização das cônicas era cha-

⁴ Sem correspondente em Português.

mada de *symptome*, que quer dizer sintoma, que trata-se de uma relação entre grandezas que caracteriza os pontos pertencentes a cônica dada. A seguir mostraremos as equações, ou sintomas, das três curvas a partir das construções de Menaecmus. Para isso admitiremos que o leitor tenha familiaridade com os principais resultados da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, relativos aos seus axiomas e elementos básicos: ponto; reta; plano.

2.2.1 O sintoma da orthotome

Considere um cone circular reto apoiado sobre o plano π e que possui um ângulo reto no seu vértice A . Seja o segmento BC o diâmetro da circunferência C_1 da base do cone. Tome um ponto D sobre a geratriz AC e por ele faça incidir o plano α perpendicular a AC . Da interseção do cone com o plano α obtemos uma curva \mathcal{P} , a qual Menaecmus chamou de *Orthotome*. Agora tomemos um ponto P sobre a curva \mathcal{P} que seja diferente de D e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π . A interseção do cone com o plano β é a circunferência C_2 . A interseção de C_2 com as geratrizes AB e AC são os pontos R e S , respectivamente. Temos que o segmento RS é o diâmetro de C_2 . A interseção entre a curva \mathcal{P} e a circunferência C_1 são os pontos F e G e a interseção de \mathcal{P} com C_2 são os pontos P e Q . Seja E o ponto médio dos pontos F e G . Por simetria os segmentos RS e PQ são perpendiculares e a interseção entre eles é o ponto O .

Como RS é o diâmetro de C_2 , temos que o triângulo PRS inscrito na circunferência C_2 é retângulo e tem o segmento RS como hipotenusa e OP é a altura relativa à hipotenusa (ver Figura 4a). Das relações métricas do triângulo retângulo temos que \overline{OP} é a média proporcional entre \overline{RO} e \overline{OS} , isto é:

$$\overline{OP}^2 = \overline{RO} \cdot \overline{OS}. \quad (2.2)$$

Os segmentos RS e BC são paralelos, assim os ângulos \widehat{ACB} e \widehat{DSO} são congruentes (ver Figura 4b). Tem-se ainda que os ângulos \widehat{BAC} e \widehat{EDC} são retos, logo os triângulos ABC e DOS são semelhantes. Com isso temos:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \implies \overline{OS} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}}. \quad (2.3)$$

Note também que os segmentos BR e OE são paralelos assim como RO e BE , logo o quadrilátero $ROEB$ é paralelogramo daí:

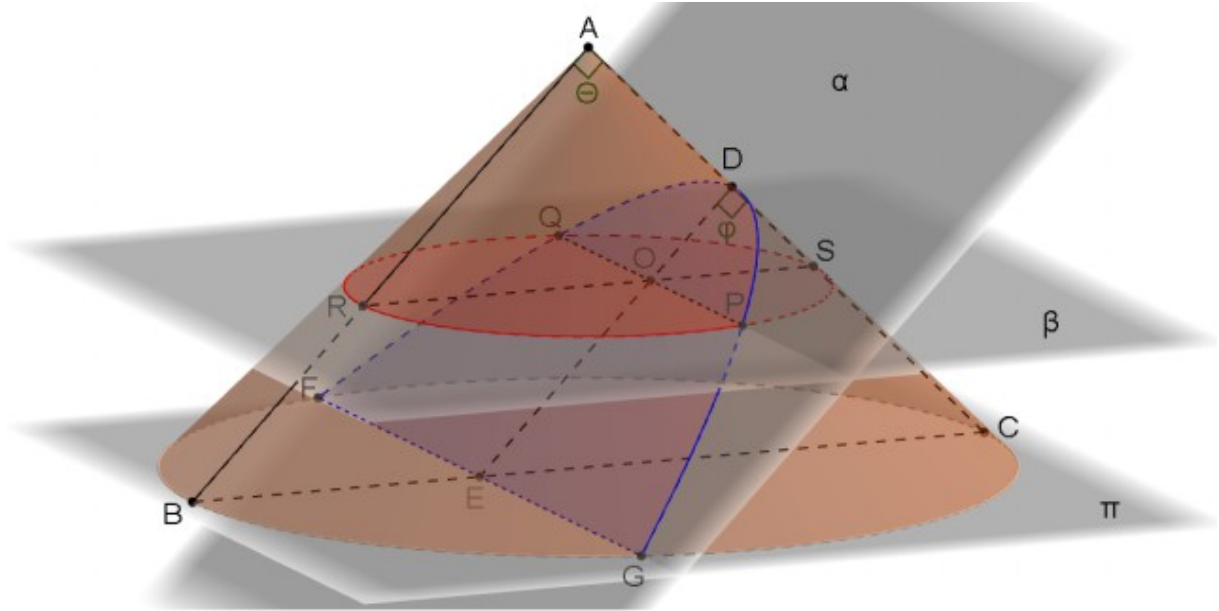
$$\overline{RO} = \overline{BE}. \quad (2.4)$$

Substituindo as expressões (2.3) e (2.4) na equação (2.2) obtemos:

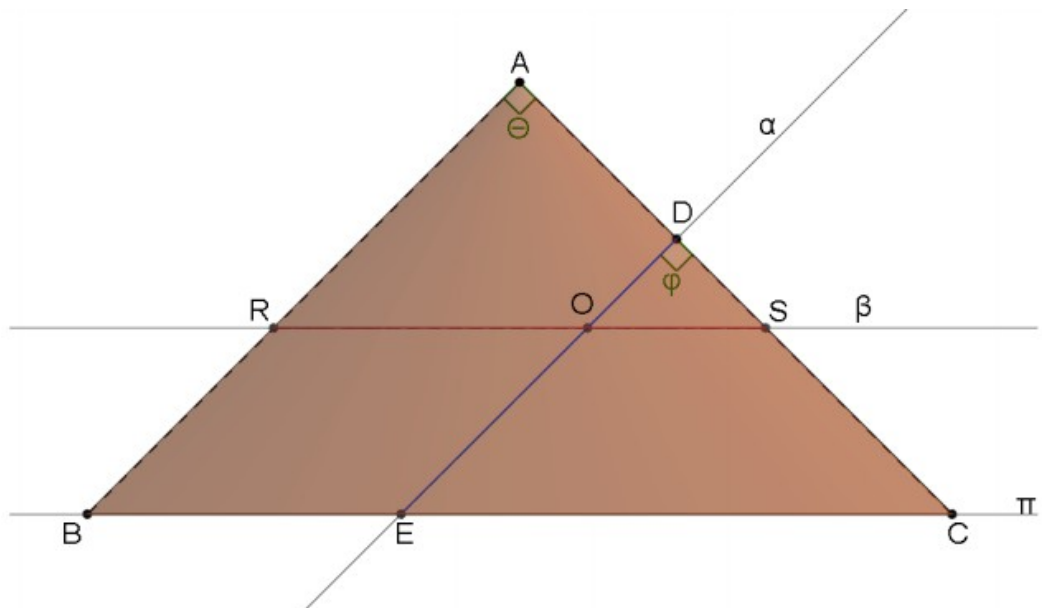
$$\overline{OP}^2 = \left(\frac{\overline{BE} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} \right) \overline{OD}. \quad (2.5)$$

Figura 4 – A orthotome segundo Menaecmus

(a) Vista espacial

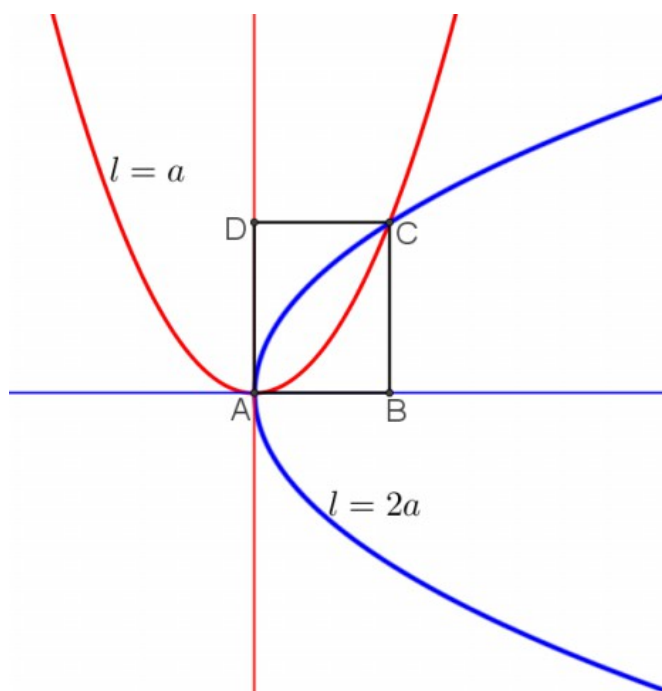


(b) Vista frontal



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5 – A solução de Menacmus para o problema deliano



Fonte: Elaborada pelo autor

Analisando a equação (2.5) e a Figura 4 podemos perceber que, independente da escolha do ponto P sobre \mathcal{P} , os segmentos AB , BC e BE não variam de comprimento, assim podemos considerar a expressão entre parênteses na equação (2.5) igual a uma constante que chamaremos de l . Para simplificar um pouco mais chamaremos os segmentos OP e OD , que são os únicos que variam, de y e x , respectivamente. Assim pode-se escrever a equação (2.5) da seguinte forma:

$$y^2 = lx. \quad (2.6)$$

A constante l era chamada pelos matemáticos de *latus rectum* e as variáveis y e x de *coordenadas* do ponto P . Portanto essa era o sintoma, ou a equação, da *Orthotome* que Menaecmus deduziu.

Conhecer apenas o sintoma da *Orthotome* era suficiente para resolver o problema da duplicação do cubo. Para isso, bastava deslocar o plano de seção do cone ao longo da diretriz AC (ver Figura 4) para encontrar duas *orthotomes*, uma com *latus rectum* igual a e outra igual $2a$, ou seja, com equações $y^2 = ax$ e $y^2 = 2ax$, respectivamente. Para continuarmos a explicação, é necessário definir dois elementos da *Orthotome*: o eixo de simetria; o vértice. Podemos considerar o eixo de simetria como uma linha que divide uma figura geométrica em duas partes simétricas, ou seja, como fossem a figura e o seu reflexo em um espelho. O vértice é a interseção da *Orthotome* com seu eixo de simetria.

Encontradas as duas *Orthotomes*, fazemos os seus vértices coincidirem num ponto que chamaremos de A de modo que os seus eixos de simetria sejam perpendiculares (ver

Figura 5). Além do ponto A , as curvas se intersectam em outro ponto que chamaremos de C . Se considerarmos o segmento AC como a diagonal do retângulo $ABCD$, teremos $\overline{AD} = a\sqrt[3]{4}$ e $\overline{AB} = a\sqrt[3]{2}$. Veja que $\overline{AB} = x$ é a medida da aresta que resolve o problema da duplicação do cubo.

2.2.2 O sintoma da oxytome

Considere um cone circular reto cuja base está apoiada sobre o plano π e que possui um ângulo agudo no seu vértice A . Seja o segmento BC o diâmetro da circunferência C_1 da base do cone. Tome um ponto D sobre a geratriz AC e por ele faça incidir o plano α perpendicular a AC . A interseção entre o cone e o plano α forma uma curva \mathcal{E} , que Menaecmus chamou de *Oxytome*. Agora tome um ponto P sobre a curva \mathcal{E} diferente de D e por ele passe o plano β paralelo ao plano π . A interseção entre o cone e o plano β é a circunferência C_2 . A interseção de C_2 com as geratrizes AB e AC são os pontos R e S respectivamente, onde o segmento RS é o diâmetro de C_2 . A interseção entre a curva \mathcal{E} e C_2 são os pontos P e Q . Por simetria temos que os segmentos RS e PQ são perpendiculares, cuja interseção é o ponto O .

Como RS é o diâmetro de C_2 (ver Figura 6a), temos que o triângulo PRS inscrito em C_2 é retângulo, e tem o segmento RS como hipotenusa e OP como altura relativa à hipotenusa. Pelas relações métricas do triângulo retângulo temos que \overline{OP} é a média proporcional entre \overline{RO} e \overline{OS} , isto é:

$$\overline{OP}^2 = \overline{RO} \cdot \overline{OS}. \quad (2.7)$$

Agora prolongaremos os segmentos ED e BC de modo que se encontrem no ponto J (ver Figura 6b). Dessa forma temos que os triângulos REO e BEJ são semelhantes pois os ângulos \widehat{REO} e \widehat{BEJ} são opostos pelo vértice e os ângulos \widehat{JBE} e \widehat{ERO} são alternos internos (o mesmo ocorre com os ângulos \widehat{EJB} e \widehat{ROE}). Dessa semelhança temos:

$$\frac{\overline{RO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{EJ}} \implies \overline{RO} = \frac{\overline{EO} \cdot \overline{BJ}}{\overline{EJ}}. \quad (2.8)$$

É fácil ver que os triângulos DOS e DJC são semelhantes (ver Figura 6b), pois compartilham o mesmo ângulo \widehat{ODS} e suas bases são paralelas. Daí:

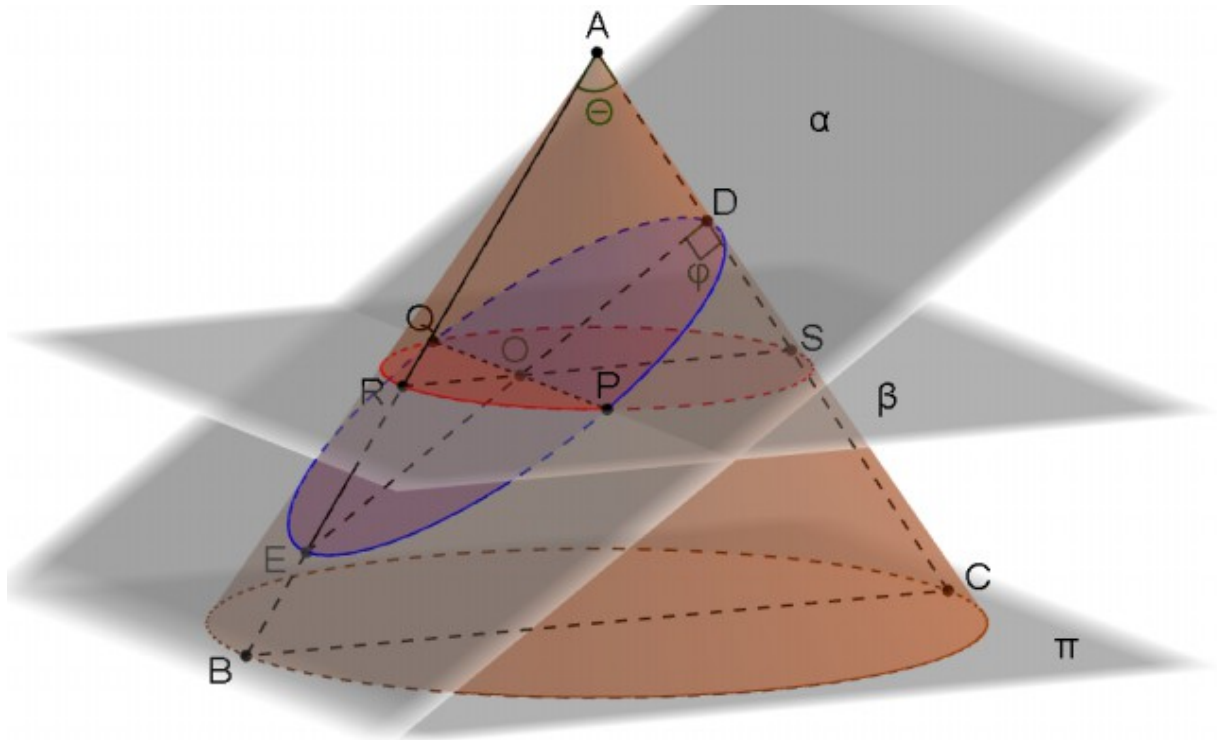
$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{JD}} \implies \overline{OS} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{JC}}{\overline{JD}}. \quad (2.9)$$

Substituindo as expressões (2.8) e (2.9) em (2.7) obtemos:

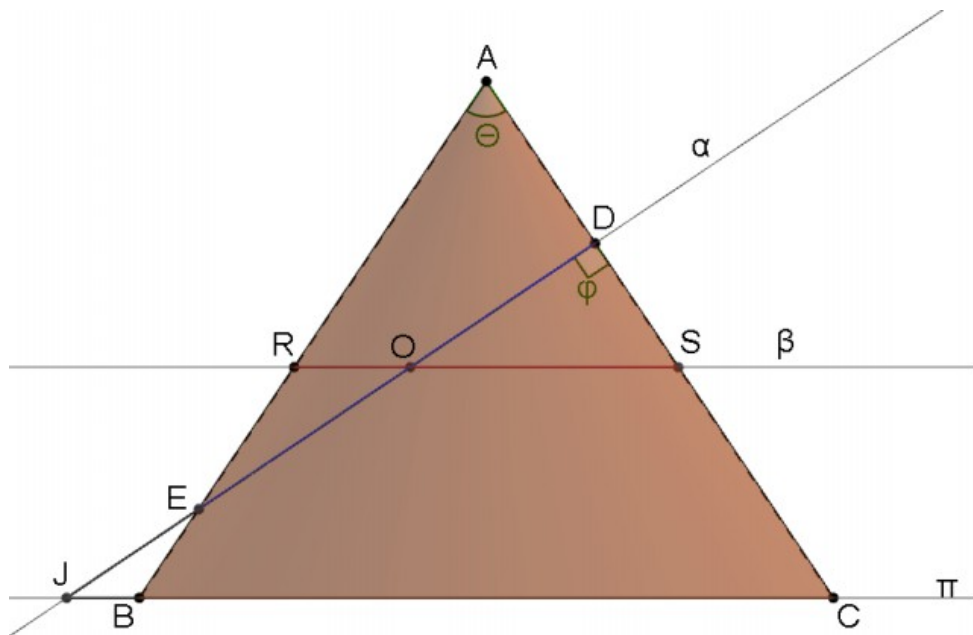
$$\overline{OP}^2 = \frac{\overline{EO} \cdot \overline{BJ}}{\overline{EJ}} \cdot \frac{\overline{OD} \cdot \overline{JC}}{\overline{JD}}. \quad (2.10)$$

Figura 6 – A oxytome segundo Menaecmus

(a) Vista espacial



(b) Vista frontal



Fonte: Elaborada pelo autor

Como $\overline{EO} = \overline{ED} - \overline{OD}$ a equação (2.10) pode escrita na forma:

$$\overline{OP}^2 = (\overline{ED} - \overline{OD}) \cdot \frac{\overline{JB} \cdot \overline{JC} \cdot \overline{OD}}{\overline{EJ} \cdot \overline{JD}}. \quad (2.11)$$

Perceba que na equação (2.11) os segmentos ED, JB, JC, EJ e JD têm sempre a mesma medida independente da escolha do ponto P sobre \mathcal{E} , enquanto que os segmentos OP e OD variam de comprimento em função da posição do ponto P . Fazendo $\overline{OP} = y$, $\overline{OD} = x$, $\overline{ED} = 2a$ e $\frac{\overline{JB} \cdot \overline{JC}}{\overline{EJ} \cdot \overline{JD}} = k$, temos:

$$y^2 = kx(2a - x). \quad (2.12)$$

Podemos ainda deixar a equação (2.12) com uma aparência mais moderna, fazendo $k = \frac{b^2}{a^2}$ e $l = \frac{2b^2}{a}$, obtemos

$$y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad (2.13)$$

onde a constante l é chamada de *latus rectum*.

2.2.3 O sintoma da amblytome

Considere um cone circular reto apoiado sobre o plano π e que possui um ângulo obtuso no seu vértice A . Seja o segmento BC o diâmetro da circunferência C_1 da base do cone. Tome o ponto D sobre a geratriz AC e por ele faça incidir o plano α perpendicular a AC . Da interseção do cone com α obtemos uma curva \mathcal{H} , que Menaecmus chamou de *Amblytome*. Tome um ponto P sobre \mathcal{H} diferente de D e por ele faça incidir o plano β paralelo ao plano π . A interseção entre o cone e β é a circunferência C_2 . A interseção de C_2 com as geratrizes AB e AC são os pontos R e S , respectivamente. Logo o segmento RS é o diâmetro de C_2 . A interseção de \mathcal{H} com C_1 são os pontos F e G e a interseção de \mathcal{H} com C_2 são os pontos P e Q . Chame de E o ponto médio dos pontos F e G . Por simetria temos que os segmentos RS e PQ são perpendiculares e o ponto O é a interseção desses segmentos.

Sabendo que RS é o diâmetro de C_2 (ver Figura 7a), temos que o triângulo PRS inscrito em C_2 é retângulo, onde RS e OP são a hipotenusa e altura relativa à hipotenusa, respectivamente. Aplicando as relações métricas do triângulo retângulo temos:

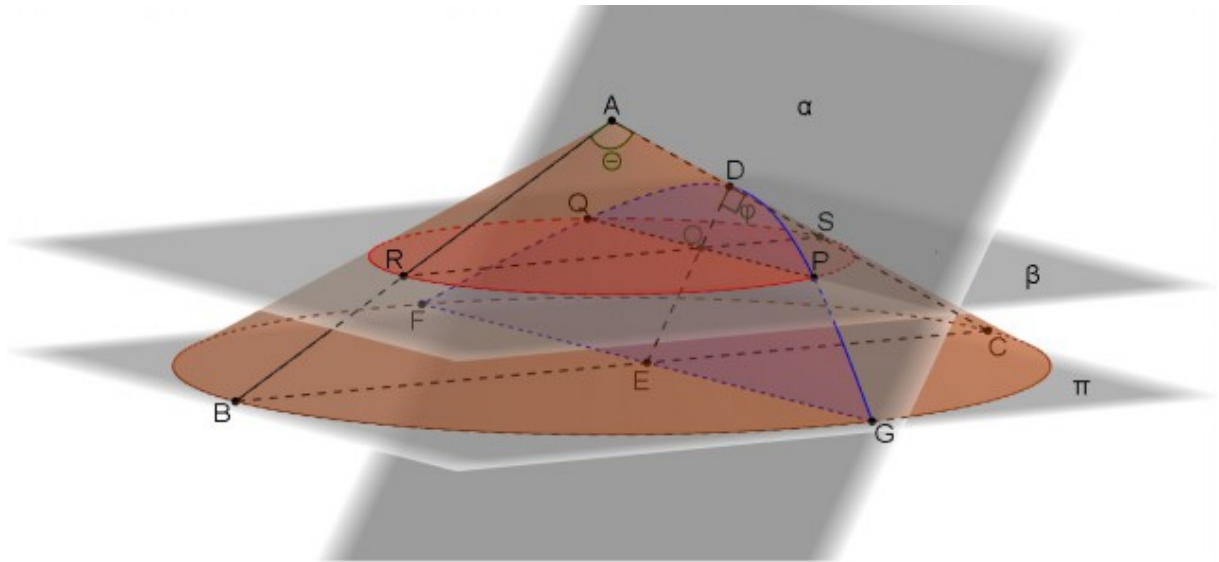
$$\overline{OP}^2 = \overline{RO} \cdot \overline{OS}. \quad (2.14)$$

Agora prolongaremos os segmentos AB e DE até que se intersectem no ponto I , como podemos ver na Figura 7b. Como os segmentos RO e BE são paralelos é fácil ver que os triângulos IRO e IBE são semelhantes, assim:

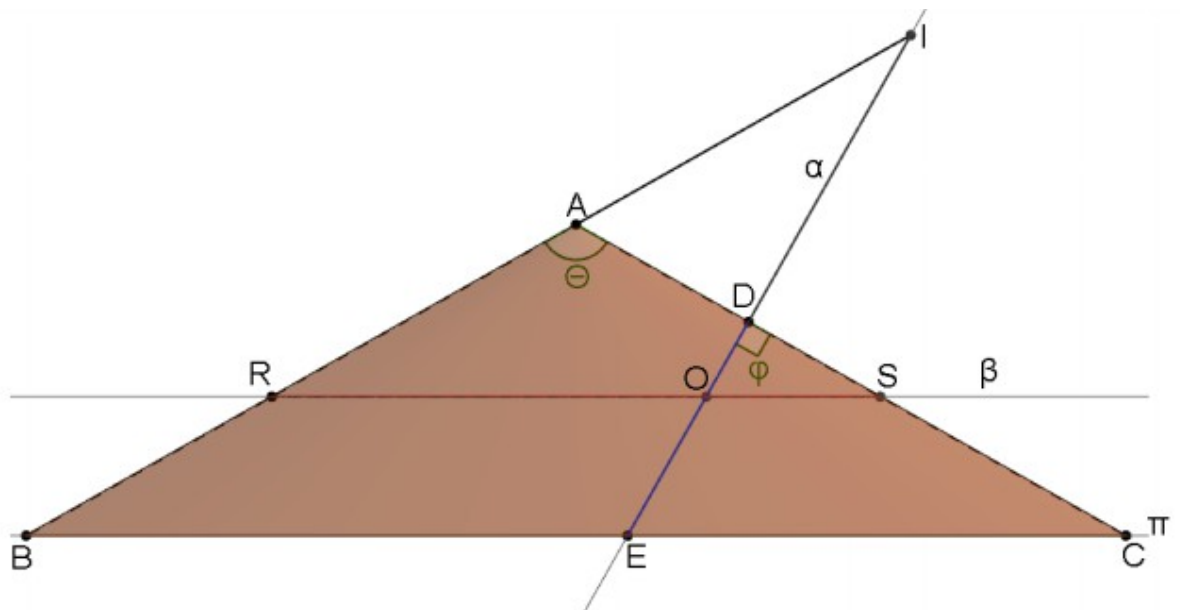
$$\frac{\overline{RO}}{\overline{IO}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EI}} \implies \overline{RO} = \frac{\overline{IO} \cdot \overline{BE}}{\overline{EI}}. \quad (2.15)$$

Figura 7 – A amblytome segundo Menaecmus

(a) Vista espacial



(b) Vista frontal



Fonte: Elaborada pelo autor

De forma análoga temos que os triângulos DOS e DEC também são semelhantes, daí:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}} \implies \overline{OS} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{EC}}{\overline{ED}}. \quad (2.16)$$

Substituindo as expressões (2.15) e (2.16) na equação (2.14):

$$\overline{OP}^2 = \frac{\overline{IO} \cdot \overline{BE}}{\overline{EI}} \cdot \frac{\overline{OD} \cdot \overline{EC}}{\overline{ED}}. \quad (2.17)$$

Como $\overline{IO} = \overline{OD} + \overline{DI}$, podemos escrever a equação (2.17) da seguinte forma:

$$\overline{OP}^2 = (\overline{OD} + \overline{DI}) \cdot \frac{\overline{BE} \cdot \overline{EC} \cdot \overline{OD}}{\overline{EF} \cdot \overline{ED}}. \quad (2.18)$$

Note que na equação (2.18) os segmentos DI , BE , EC , EF e ED permanecem com a mesma medida para todo ponto P pertence a \mathcal{H} . Já os segmentos OP e OD podem ter comprimentos variados de acordo com a escolha do ponto P . Fazendo $\overline{OP} = y$, $\overline{OD} = x$, $\overline{DI} = 2a$ e $\frac{\overline{BE} \cdot \overline{EC}}{\overline{EF} \cdot \overline{ED}} = k$, temos:

$$y^2 = kx(2a + x), \quad (2.19)$$

fazendo $k = \frac{b^2}{a^2}$ e $l = \frac{2b^2}{a}$, onde l é chamada de *latus rectum*, tem-se:

$$y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2}x^2. \quad (2.20)$$

2.3 Apolônio de Perga, o Grande Geômetra

Nascido em Perga na Panfília que ficava ao sul da Ásia Menor, Apolônio (262-190 a.C.) foi um dos matemáticos que mais se destacou em seu tempo produzindo trabalhos notáveis e muito avançados para sua época que influenciaram profundamente a Matemática atual. O apelido de Grande Geômetra, foi devido as diversas obras sobre Geometria, que se caracterizavam pelo rigor matemático nos textos, estudo exaustivo do tema abordado e ideais sofisticadas. Alguns o consideram como idealizador da Geometria Analítica.

De todos os trabalhos de Apolônio, o mais conhecido certamente é sua obra *As Cônicas*, uma coleção de oito livros, na qual ele faz um estudo profundo sobre o tema, abrangendo todo o conhecimento que existia na época sobre as cônicas e introduziu novos resultados, o que tornou *As Cônicas* o maior tratado sobre o assunto até então produzido.

Neste trabalho não falaremos sobre todo o conteúdo da obra *As Cônicas*, uma vez que é bastante extenso e complexo para os nossos fins. Vamos apenas comentar algumas inovações implementadas por Apolônio que usamos até hoje quando estudamos

as seções cônicas, a começar pela mudança dos nomes das curvas. Foi visto que Menecmus as chamava de *Orthotome*, *Oxytome* e *Amblytome* que eram obtidas de três cones, onde os ângulos dos vértices eram respectivamente, reto, agudo e obtuso. Apolônio passou a denominá-las nessa ordem de Parábola, Elipse e Hipérbole que são até hoje utilizados. Apolônio não inventou esses nomes, na verdade ele aplicou no estudo das cônicas uma terminologia desenvolvida pelos pitagóricos que era empregada nas aplicações de área da Geometria grega.

Uma aplicação de área trata-se de um problema de construção geométrica no qual são dados um segmento de reta, um polígono de área conhecida e um terceiro objeto geométrico que, dependendo da aplicação, podia ser um ângulo ou um paralelogramo quaisquer. Os gregos trabalhavam com três tipos de aplicações de áreas, a saber:

Aplicação parabólica: sejam AB um segmento, θ um ângulo e s a área de um polígono qualquer. Uma aplicação parabólica consiste em construir sobre o segmento AB um paralelogramo $ABCD$ que tem um ângulo interno igual a θ , onde

$$\text{Área}(ABCD) = s.$$

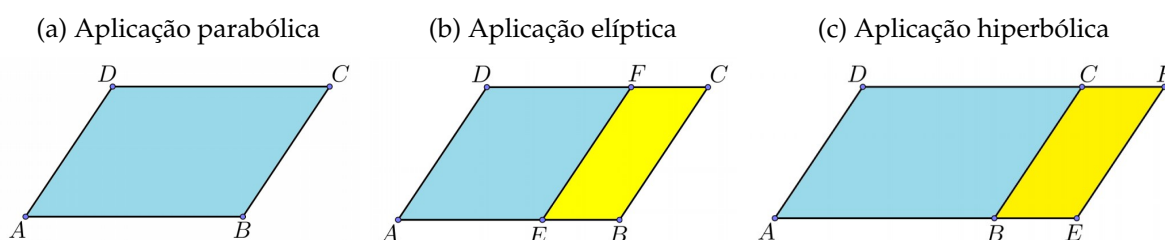
Aplicação elíptica: sejam AB um segmento, $PQRS$ um paralelogramo e s a área de um polígono qualquer. Uma aplicação elíptica consiste em construir sobre o segmento AB um paralelogramo $AEFD$ e um paralelogramo $BEFC$, com E entre A e B , semelhante ao paralelogramo $PQRS$, onde

$$\text{Área}(AEFD) + \text{Área}(BEFC) = s.$$

Aplicação hiperbólica: sejam AB um segmento, $PQRS$ um paralelogramo e s a área de um polígono qualquer. Uma aplicação hiperbólica consiste em construir sobre o prolongamento do segmento AB um paralelogramo $AEFD$ e um paralelogramo $BEFC$, com B entre A e E , semelhante ao paralelogramo $PQRS$, onde

$$\text{Área}(AEFD) - \text{Área}(BEFC) = s.$$

Figura 8 – Aplicações de áreas



Fonte: Elaborada pelo autor

Os nomes destas aplicações se justificam pelo fato de que a palavra parábola indica igual, a palavra elipse que vem de *ellipsis* significa falta e a palavra hipérbole que vem de *hyperbola* quer dizer excesso.

Com base nessas definições, Apolônio observou que o sintoma da *Orthotome* dado pela equação $y^2 = lx$, podia ser interpretado como uma aplicação parabólica de um quadrado de lado y em um retângulo de lados l e x . A partir de então a *Orthotome* passou a ser chamada de parábola. Já o sintoma da *Oxytome* dado pela equação $y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2$, podia ser considerado uma aplicação elíptica (ou com falta) de um quadrado de lado y em um retângulo de lados l e x , pois $y^2 < lx$. Daí a mudança do nome *Oxytome* para elipse. Analogamente, o sintoma do *Amblytome* dado pela equação $y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2}x^2$, podia ser visto como uma aplicação hiperbólica (ou com excesso) de um quadrado de lado y em um retângulo de lados l e x , uma vez que $y^2 > lx$. Então temos o nome hipérbole.

Outra mudança implementada por Apolônio foi na forma de como obter as cônicas, sem a necessidade de três cones distintos como foi inicialmente idealizada por Menaecmus. Apolônio mostrou que as três curvas podiam ser obtidas de um único cone, reto ou oblíquo, para isto basta variar o ângulo do plano de corte em relação a uma das diretriz, o qual Menaecmus "obrigou" que fosse reto. Além disso, Apolônio utilizou um cone mais sofisticado, chamado cone duplo ou cone de duas folhas, com isso a hipérbole passou a ter dois ramos que é a forma como a conhecemos hoje. Apolônio definiu o cone duplo da seguinte forma:

Definição 2.2 (Apolônio). *Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.*

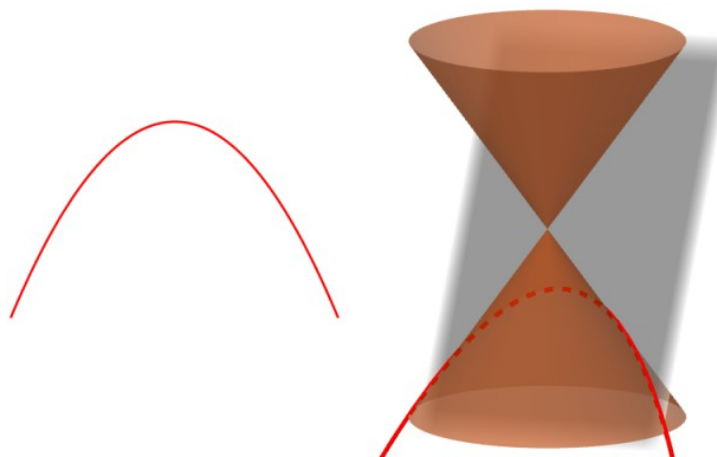
A partir do cone duplo, as cônicas também ganharam uma nova definição: se o plano é paralelo a uma das geratrizes, obtemos uma parábola (ver Figura 9a); se o plano corta todas as geratrizes sobre uma mesma folha do cone, obtemos uma elipse (ver Figura 9b); e se o plano corta as duas folhas do cone, obtemos uma hipérbole (ver Figura 9c).

Vale lembrar que a circunferência é um caso particular de elipse, que é obtida quando o plano corta um cone circular reto paralelamente a sua base. No entanto, neste trabalho não daremos ênfase à circunferência, focaremos nosso estudo apenas nas três cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

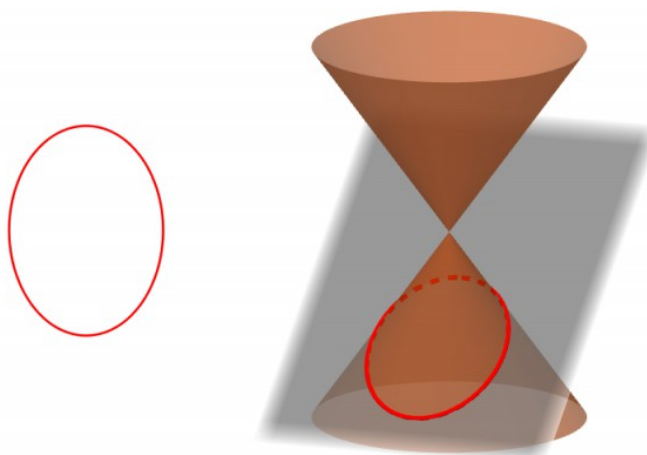
No anexo A, disponibilizamos moldes para a confecção de cones de papel, onde cada cone contém um corte que gera uma cônica. A ideia é facilitar o entendimento do conceito de cônica, principalmente quando se trata de alunos do Ensino Médio que, na maioria das vezes, são instruídos a enxergarem as cônicas apenas do ponto de vista do plano, desvinculando-as de sua verdadeira essência que é o espaço tridimensional.

Figura 9 – As seções cônicas

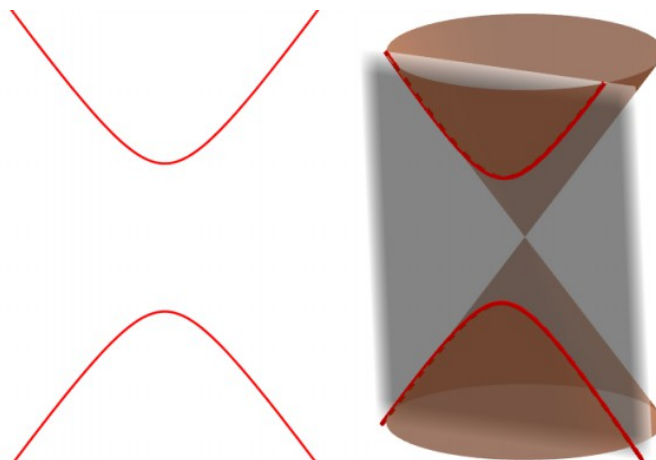
(a) Parábola



(b) Elipse



(c) Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

2.4 Philippe de La Hire e a propriedade bifocal

Em sua obra *As Cônicas*, Apolônio foi o primeiro a escrever sobre uma propriedade particular das cônicas que estava relacionada com o que chamou de "os pontos originados pela aplicação". Esses pontos, mais tarde, foram chamados de *focos* por Kepler, que os utilizou para descrever as órbitas planetárias. Essa característica das cônicas é chamada de propriedade bifocal. Apesar da importância, Apolônio não deu muita ênfase sobre o assunto em sua obra.

Depois de Apolônio, muitos matemáticos escreveram sobre a propriedade bifocal das cônicas, propondo aplicações práticas principalmente no campo da Óptica. Porém o estudo da propriedade bifocal tornou-se relevante quando passaram a utilizá-la na caracterização das cônicas. Nesse estudo se destacou o matemático francês Philippe de La Hire (1640-1718) que escreveu três obras dedicadas às cônicas. No seu trabalho, Philippe obtém um grande número de proposições a partir dessa caracterização bifocal, tratando as cônicas sobretudo no plano, fato que o levou a chamá-las de *planicônicas*. A obra de Philippe é de tal importância que influencia até hoje o ensino das cônicas na escola, principalmente no Brasil.

A partir de agora, definiremos as cônicas com base na propriedade bifocal, de forma similar à caracterização feita por Philippe em seu trabalho.

Definição 2.3. *Dados dois pontos F_1 e F_2 e um número r maior do que a distância entre F_1 e F_2 , o conjunto de pontos P do plano cuja soma das distâncias à F_1 e F_2 é igual a r é chamado elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida r .*

Definição 2.4. *Dados dois pontos F_1 e F_2 e um número r menor do que a distância entre F_1 e F_2 , o conjunto de pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias à F_1 e F_2 é igual a r é chamado hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida r .*

Definição 2.5. *Dados um ponto F e uma reta \mathcal{L} , chama-se parábola com foco F e diretriz \mathcal{L} , o conjunto de pontos P do plano cuja distância à F é igual à distância de P à \mathcal{L} .*

2.5 As cônicas e as esferas de Dandelin-Quetelet

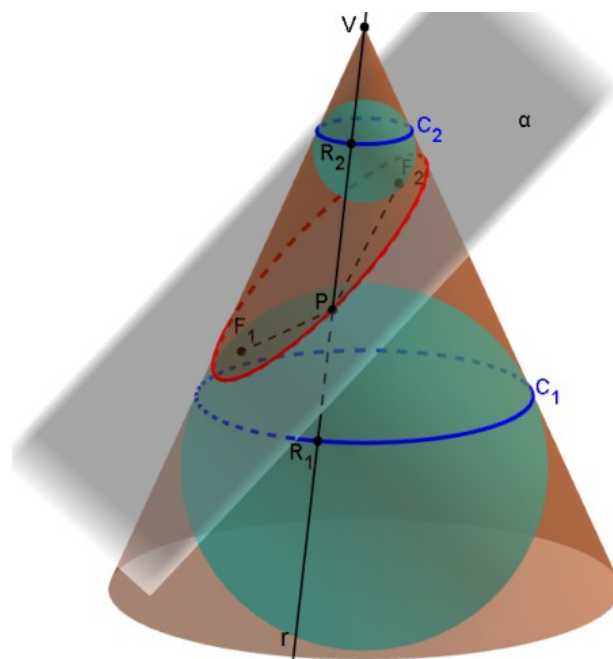
Em 1822, dois matemáticos belgas, Germinal Dandelin (1794-1847) e Adolphe Quetelet (1796-1874), utilizaram a propriedade bifocal para demonstrar que a curva obtida entre um cone e um plano secante ao cone é uma cônica, como veremos a seguir.

2.5.1 A elipse e as esferas de Dandelin-Quetelet

Para simplificar a demonstração consideremos apenas a folha inferior de um cone duplo circular reto. Sejam α um plano que intersecta todas as geratrizes do cone e \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 duas esferas inscritas no cone, tangentes ao plano α e que pertencem ao

semiespaço abaixo e acima de α , respectivamente (ver Figura 10). Sejam F_1 e F_2 os pontos de tangência das esferas \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 com o plano α , respectivamente. Sejam C_1 e C_2 as circunferências formadas pelas interseções de \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 com o cone, respectivamente. Vamos escolher um ponto P qualquer pertencente a curva formada pela interseção do cone com o plano α . Seja r a reta que passa pelo vértice V e por P , cuja interseção com \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 são os pontos R_1 e R_2 , respectivamente. Assim os segmentos PR_1 e PF_1 são tangentes à esfera \mathcal{E}_1 e tem o ponto P comum, logo têm mesma medida. Analogamente, os segmentos PR_2 e PF_2 possuem mesmo comprimento. Dessa forma, $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PR_1} + \overline{PR_2} = \overline{R_1R_2}$. Pela forma como foi construído, o segmento R_1R_2 tem medida constante para qualquer posição do ponto P sobre a curva. Portanto, pela Definição 2.3, a curva obtida da seção do cone pelo plano α é uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $\overline{R_1R_2}$.

Figura 10 – Elipse: demonstração de Dandelin e Quetelet



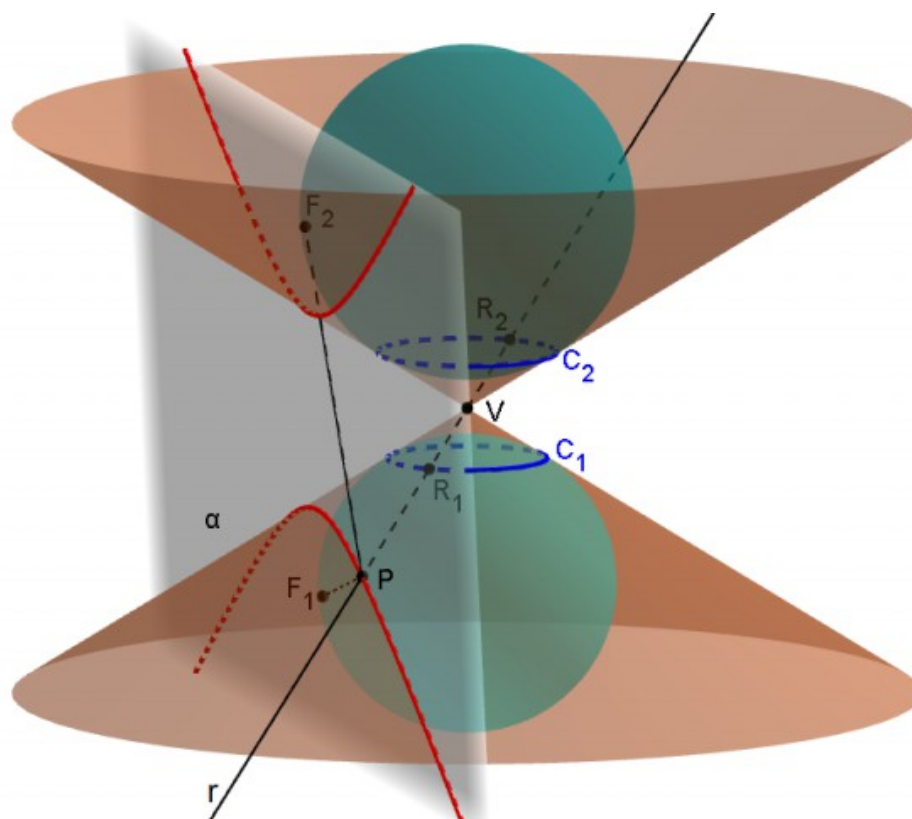
Fonte: Elaborada pelo autor

2.5.2 A hipérbole e as esferas de Dandelin-Quetelet

Para tornar a demonstração mais simples consideremos um cone duplo circular reto. Sejam α um plano que secciona as duas folhas do cone, \mathcal{E}_1 a esfera inscrita na folha superior e tangente ao plano α e \mathcal{E}_2 a esfera inscrita na folha inferior e tangente a α (ver Figura 11). Sejam C_1 e C_2 as circunferências obtidas pela interseção entre o cone e as esferas \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 , respectivamente. Sejam F_1 e F_2 os pontos de tangência do plano α com \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 , respectivamente. Tome um ponto P qualquer da curva formada pela interseção do cone com α . Seja r a reta que passa pelo vértice V e por P , cuja

interseção com C_1 e C_2 são os pontos R_1 e R_2 , respectivamente. Como os pontos R_1 e F_1 pertencem a \mathcal{E}_1 , os segmentos PR_1 e PF_1 são tangentes à esfera \mathcal{E}_1 e têm o ponto P partilhado, logo têm medidas iguais. O mesmo vale para os segmentos PR_2 e PF_2 . Assim, $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PR_2} - \overline{PR_1} = \overline{R_1R_2} = \overline{VR_1} + \overline{VR_2}$, que é constante quaisquer que sejam as posições de R_1 e R_2 sobre as circunferências. Portanto, pela Definição 2.4, a curva gerada é uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $\overline{R_1R_2}$.

Figura 11 – Hipérbole: demonstração de Dandelin e Quetelet



Fonte: Elaborada pelo autor

2.5.3 A parábola e a esfera de Dandelin-Quetelet

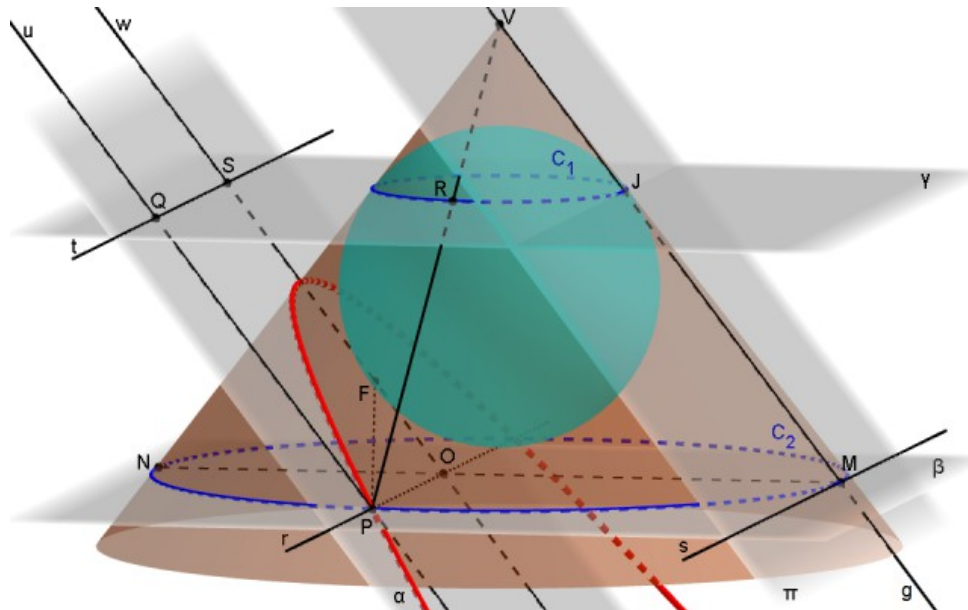
Para facilitar a demonstração, consideremos apenas a folha inferior de um cone duplo circular reto e sobre ela uma geratriz g qualquer. Vamos incidir pelo cone um plano α , paralelo a geratriz g (ver Figura 12). Sobre a curva obtida da interseção de α com o cone, tomaremos um ponto P qualquer e por ele incidiremos um plano β perpendicular ao eixo do cone⁵. Sejam C_2 a circunferência que resulta da interseção entre o cone e o plano β e r a reta obtida da interseção dos planos α e β . Seja π um plano tangente ao cone que contém a geratriz g . A interseção entre os planos β e π é a reta s , que intersecta a circunferência C_2 no ponto M e é perpendicular à reta que

⁵ Reta que passa pelo vértice do cone e pelo centro de uma esfera qualquer inscrita no cone.

contém o segmento VM e ao segmento MN (diâmetro de C_2). Assim, pela forma como foram obtidas, as retas r e s são paralelas. Seja \mathcal{E} a esfera inscrita no cone e tangente ao plano α . Chamemos de F o ponto de tangência da esfera \mathcal{E} com o plano α e seja C_1 a circunferência resultante da interseção de \mathcal{E} com o cone. Considere ainda o plano γ paralelo ao plano β e que contém C_1 . A interseção entre os planos α e γ é a reta t , paralela à reta r .

Seja u uma reta pertencente ao plano α que passa pelo ponto Q e é perpendicular às retas r e t . A interseção entre as retas u e t é o ponto Q . Seja w outra reta pertencente ao plano α , paralela à reta u e que passa pelo ponto F . As interseções entre as retas w e t e entre as retas w e r são os pontos S e O , respectivamente. Assim temos que $\overline{PQ} = \overline{OS}$. A geratriz g e a reta w são paralelas, pois pertencem a planos paralelos e são perpendiculares às paralelas r e s , respectivamente. Daí, $\overline{OS} = \overline{JM}$. Traçando o segmento PV , este intersecta a circunferência C_1 no ponto R . Dessa forma, obtemos as seguintes igualdades: $\overline{JM} = \overline{PR}$ (segmentos de geratrizes entre planos paralelos e ortogonais ao eixo do cone) e $\overline{PR} = \overline{PF}$ (segmentos tangentes à esfera \mathcal{E} pelo ponto P). Logo, $\overline{PQ} = \overline{OS} = \overline{JM} = \overline{PR} = \overline{PF}$. Portanto, pela Definição 2.5, a curva é uma parábola com F e diretriz t .

Figura 12 – Parábola: demonstração de Dandelin e Quetelet



Fonte: Elaborada pelo autor

3 EQUAÇÕES DAS CÔNICAS

A Geometria Analítica é uma ferramenta matemática muito eficiente no estudo de determinadas curvas planas, pois nos permite representar uma curva através de uma equação que caracteriza as coordenadas dos seus pontos. Usando Álgebra, podemos manipular essa equação e obter resultados que determinam as propriedades da curva que arduamente seriam encontrados pela Geometria Euclidiana Plana, que ficou conhecida por Geometria Sintética em alusão a Geometria Analítica.

As cônicas são exemplos de curvas planas que possuem equações que as caracterizam. Na verdade, acredita-se que foram as cônicas que motivaram o desenvolvimento da Geometria Analítica. Apolônio em sua obra *As Cônicas*, utiliza alguns conceitos geométricos similares aos usados na Geometria Analítica, como por exemplo a ideia de coordenadas de um ponto. Inclusive o termo ordenada é devido a Apolônio.

Inspirado pela *As cônicas* de Apolônio, Pierre de Fermat (1601-1665), publicou em 1636 sua obra *Ad locos planos et solidos isagoge*, na qual utiliza um sistema de coordenadas no plano, equivalente ao de René Descartes (1596-1650) que é considerado o criador da Geometria Analítica. Fermat aplicou a linguagem algébrica combinada com as propriedades que definem as cônicas e obteve suas equações algébricas em duas variáveis, cuja análise, lhe rederam diversas descobertas relativas as propriedades e aplicações dessas curvas.

3.1 Alguns conceitos fundamentais de Geometria Analítica

Antes de iniciarmos o estudo das equações das cônicas, é necessário apresentar alguns conceitos fundamentais da Geometria Analítica. Como o nosso foco são as cônicas, que por si só já é um tema bastante amplo, não abordaremos todos os conceitos que envolvem o estudo de Geometria Analítica e, mesmo aqueles que abordaremos serão tratados de forma superficial. Vamos falar somente daquelas ideias que são indispensáveis para a dedução das equações das cônicas. Da mesma forma que fizemos no capítulo 2, admitiremos que o leitor tenha familiaridade com os conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana Plana e Espacial, que serviram de base para definir os conceitos geométricos que utilizaremos neste capítulo.

3.1.1 A reta dos números reais

No estudo de qualquer geometria euclidiana é fundamental representar o conjunto dos números reais (indicado por \mathbb{R}) por pontos de uma reta. Para isso escolheremos um ponto O da reta, chamado *origem*, o qual faz-se corresponder o número 0 (zero). Seja A um ponto sobre a reta e faremos o segmento OA , de comprimento arbitrário, a

unidade de comprimento. Por convenção, representaremos os números reais positivos por pontos à direita de O e os números reais negativos, por pontos à esquerda de O . A reta que possui essas características é chamada de *reta real* ou *eixo real*.

Definição 3.1. O número real x que corresponde ao ponto X pertencente à reta real é denominado a coordenada do ponto X .

3.1.2 Valor absoluto e distância entre pontos da reta

Definição 3.2. Se x é um número real, o módulo de x (ou valor absoluto de x) é o número $|x|$ definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Decorrem imediatamente da Definição 3.2, as seguintes propriedades:

$$|x| \geq 0,$$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$|x| = |-x|.$$

Se P é um ponto da reta real correspondente ao número x , o módulo de x pode ser interpretado como sendo a distância do ponto P à origem O , que é indicada por $d(O, P)$. Dessa forma tem-se:

$$|x| = d(O, P) = \overline{OP}.$$

Vamos enunciar duas proposições sobre valor absoluto que serão importantes para o nosso estudo, porém suas demonstrações serão omitidas (ou como preferem alguns autores, deixaremos a demonstração como exercício para o leitor).

Proposição 3.1. Quaisquer que sejam os números reais a, b e x , tem-se

$$1. |ab| = |a| |b|,$$

$$2. |a + b| \leq |a| + |b|,$$

$$3. |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a,$$

$$4. |x| = \sqrt{x^2}.$$

Proposição 3.2. Se x e y são as coordenadas dos pontos X e Y pertencentes à reta real, respectivamente, então

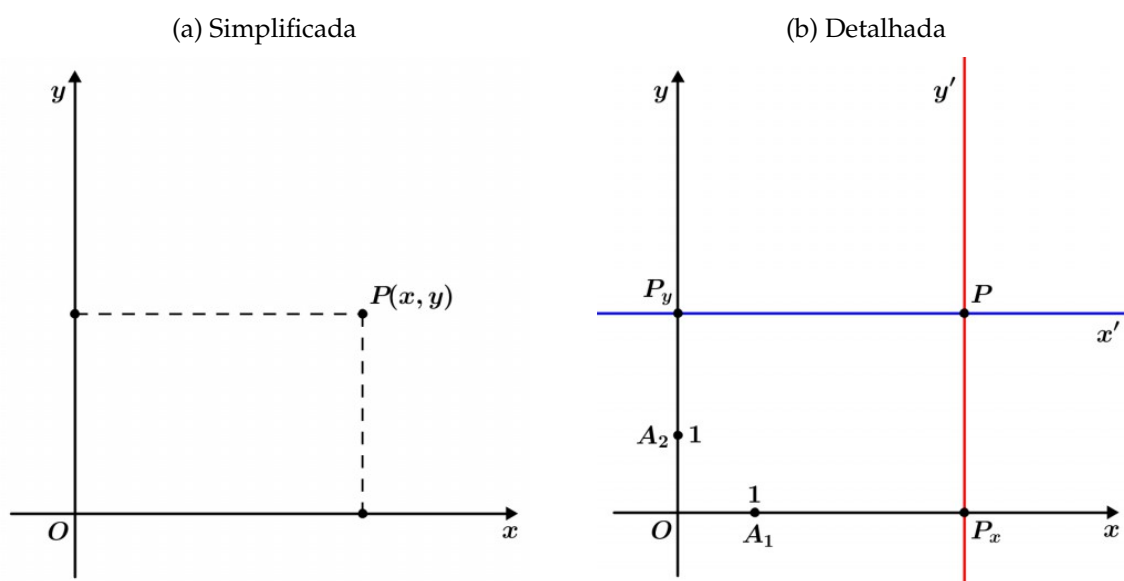
$$d(X, Y) = |x - y|.$$

3.1.3 Sistema de coordenadas cartesianas

Consideremos um plano definido pelo par de retas perpendiculares x e y que chamaremos de eixo x e eixo y respectivamente. Estas retas se interseitam no ponto O que é a origem comum delas. Tomemos como a unidade de comprimento o segmento OA_1 igual a OA_2 , conforme a Figura 13. Seja P um ponto qualquer do plano e por ele traçaremos duas retas: a reta x' paralela à x e a reta y' paralela à y . Dessa forma as retas x' e y' interseitam as retas y e x nos pontos P_y e P_x respectivamente. Seja x o número real correspondente ao ponto P_x e y o número real correspondente a P_y . Afirmamos que o par de números x e y determinam o ponto P no plano. De fato, dados x e y podemos determinar os pontos P_x e P_y e por eles traçar as paralelas x' e y' cuja interseção é o ponto P . Os números x e y constituem as *coordenadas cartesianas* do ponto P em relação a um sistema de eixos ortogonais xOy , onde x é chamado de *abscissa* ou *primeira coordenada* de P e y é chamado de *ordenada* ou *segunda coordenada* de P . Para representar o ponto P nas coordenadas cartesianas usamos a notação

$$P(x, y).$$

Figura 13 – Coordenadas cartesianas



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que através da construção que fizemos, podemos representar qualquer ponto do plano por meio de um par de números reais e da mesma forma podemos fazer o inverso. Portanto existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e conjunto de pares ordenados (x, y) , com $x, y \in \mathbb{R}$.

3.1.4 Distância entre pontos do plano

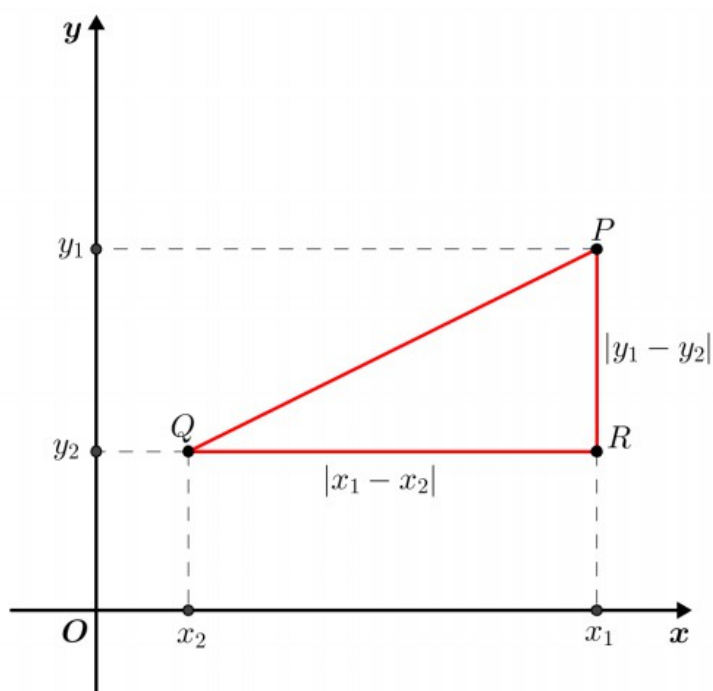
Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos do plano dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais xOy . Tome o ponto R cuja abscissa é mesma do ponto P e cuja ordenada é igual a de Q , ou seja, $R(x_1, y_2)$. A partir desses três pontos, construiremos o triângulo PQR que é retângulo, já que o ângulo \widehat{PRQ} é reto. Podemos escrever as medidas dos catetos desse triângulo em função das coordenadas dos pontos dados. Assim $\overline{PR} = |y_1 - y_2|$ e $\overline{QR} = |x_1 - x_2|$. Pelo teorema de Pitágoras, temos que a medida da hipotenusa é dada por

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Este número é chamado *distância* de $P(x_1, y_1)$ a $Q(x_2, y_2)$ e denotado por $d(P, Q)$. Logo, por definição,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (3.1)$$

Figura 14 – Distância entre pontos do plano



Fonte: Elaborada pelo autor

3.1.5 Translação dos eixos coordenados

Considere o sistema de coordenadas xOy (visto na seção 3.1.3), um ponto \bar{O} do plano e o sistema de coordenadas $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ cujos eixos $\bar{O}\bar{x}$ e $\bar{O}\bar{y}$ são paralelos aos eixos Ox e Oy e possuem o mesmo sentido desses eixos, respectivamente (ver Figura 15). Se P

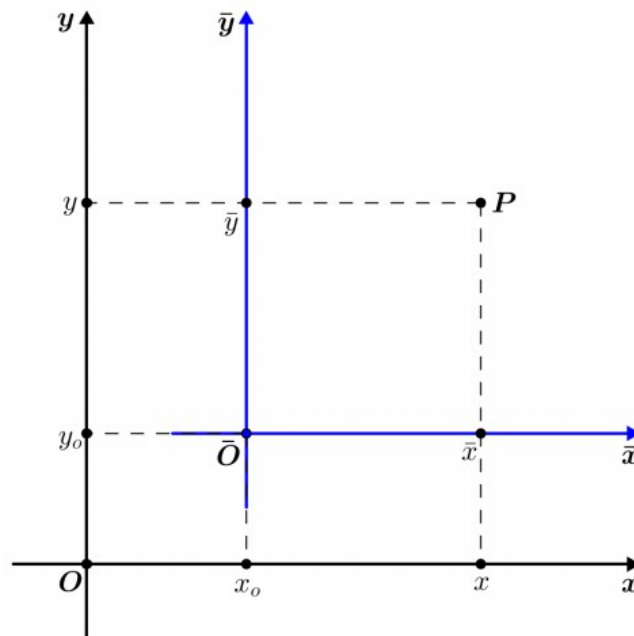
é um ponto do plano, podemos expressá-lo de duas maneiras conforme o sistema de coordenadas escolhido. Dessa forma, se (x, y) são as coordenadas de P em relação ao sistema xOy e (\bar{x}, \bar{y}) são as coordenadas de P em relação ao sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$, temos

$$x = \bar{x} + x_o \iff \bar{x} = x - x_o \quad (3.2)$$

$$y = \bar{y} + y_o \iff \bar{y} = y - y_o, \quad (3.3)$$

onde x_o e y_o são as coordenadas de \bar{O} em relação ao sistema xOy . As equações (3.2) e (3.3) possibilitam que as coordenadas de um ponto P dadas por um dos sistemas sejam mudadas para as coordenadas do outro sistema. Dizemos que o sistema de coordenadas $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ é uma translação do sistema xOy .

Figura 15 – Translação de eixos



Fonte: Elaborada pelo autor

3.2 As equações da elipse

De acordo com a Definição 2.3, uma elipse \mathcal{E} com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida r , com $0 < d(F_1, F_2) < r$, é o conjunto dos pontos P do plano tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = r$, isto é,

$$\mathcal{E} = \{P; d(P, F_1) + d(P, F_2) = r\}.$$

Para fins harmônicos, faremos $r = 2a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, com $a, c \in \mathbb{R}$ e $0 < c < a$. Assim a elipse fica definida como sendo o conjunto

$$\mathcal{E} = \{P; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}. \quad (3.4)$$

Antes de estudarmos as equações da elipse, é importante sabermos que essa curva possui elementos especiais que as determinam e nos fornecem todas as informações necessárias para estudá-la. São eles:

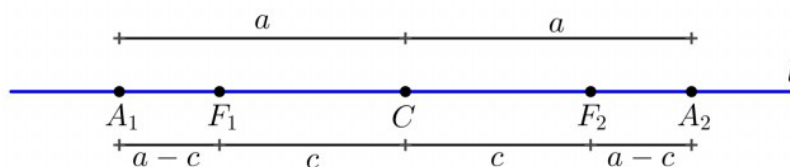
- (E1) Os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da elipse.
- (E2) A reta l que passa pelos focos é a *reta focal*.
- (E3) A interseção da elipse com l são os pontos A_1 e A_2 chamados *vértices da elipse sobre a reta focal*.
- (E4) O segmento A_1A_2 é o *eixo focal* e tem comprimento $2a$.
- (E5) O *centro* C da elipse é o ponto médio do eixo focal A_1A_2 . A medida a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal.
- (E6) A *reta não focal* é a reta l' que passa por C e é perpendicular a reta focal.
- (E7) A interseção da elipse com a reta não focal são os pontos B_1 e B_2 , chamados *vértices da elipse sobre a reta não focal*.
- (E8) O segmento B_1B_2 é o *eixo não focal* da elipse e tem comprimento $2b$, com $b^2 = a^2 - c^2$. A medida b é distância do centro aos vértices sobre a reta não focal.
- (E9) O número $e = \frac{c}{a}$ é a *excentricidade* da elipse, onde c é a distância do centro aos focos. Na elipse tem-se $0 < e < 1$.

Vamos mostrar a veracidade dos itens (E3) e (E7). Começaremos por (E3). Seja A um ponto, tal que $A \in \mathcal{E} \cap l$, e suponha que $A \in F_1F_2$, então

$$2c = d(F_1, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a$$

o que contraria a Definição 2.3, pois $c < a$.

Figura 16 – Vértices sobre a reta focal



Fonte: Elaborada pelo autor

Seja $A_1 \in \mathcal{E} \cap (l - F_1F_2)$ tal que F_1 está entre A_1 e F_2 (ver Figura 16). Seja $x = d(A_1, F_1)$. Como $A_1 \in \mathcal{E}$, temos

$$2a = d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = x + 2c + x = 2x + 2c \implies x = a - c.$$

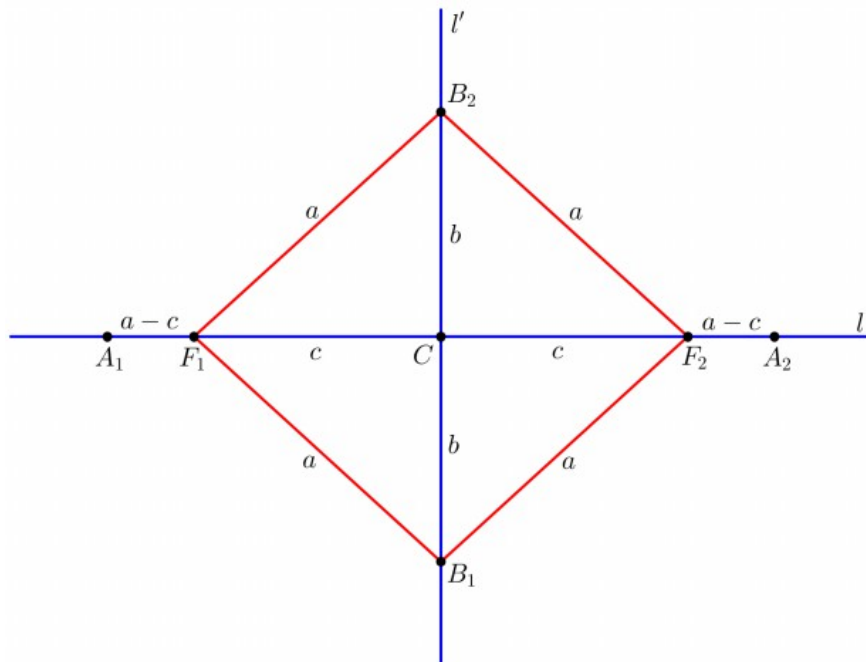
Analogamente, o ponto $A_2 \in \mathcal{E} \cap (l - F_1F_2)$ dista $a - c$ do foco F_2 . Logo a interseção da elipse com l são os pontos A_1 , que está à esquerda de F_1 , e A_2 que está à direita de F_2 .

Agora provaremos **(E7)**. Por definição a reta l' é a mediatriz do segmento F_1F_2 (ver Figura 17). Assim um ponto $B \in l' \cap \mathcal{E}$ se, e somente se,

$$d(B, F_1) = d(B, F_2) = a.$$

Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos que a interseção entre l' e \mathcal{E} são dois pontos, B_1 e B_2 , que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

Figura 17 – Vértices sobre a reta não focal



Fonte: Elaborada pelo autor

3.2.1 Elipse com centro na origem

A partir da Definição 2.3, obteremos a equação da elipse \mathcal{E} em relação a um sistema de coordenadas cartesianas xOy , onde o centro da elipse está na origem. Suponha que a reta focal da elipse coincide com o eixo Ox . Nesse caso, os focos e vértices da elipse têm as seguintes coordenadas:

$$\begin{cases} F_1(-c, 0), & A_1(-a, 0), & B_1(0, -b), \\ F_2(c, 0), & A_2(a, 0), & B_2(0, b), \end{cases}$$

com $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Agora aplicando a fórmula (3.1) na equação (3.4), temos:

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{E} &\iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\ &\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (3.6)$$

$$\iff (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \quad (3.7)$$

$$\iff x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$\iff 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\iff a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (3.8)$$

$$\iff (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \quad (3.9)$$

$$\iff a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.10)$$

com $b^2 = a^2 - c^2 > 0$.

Observe que em (3.6) tem-se que $2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0$. De fato, pela Proposição 3.1 e sabendo que $0 < c < a$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\implies y^2 \leq b^2 \implies y^2 - b^2 \leq 0 \\ &\implies (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 < a^2 + 2a^2 + a^2 - b^2 + y^2 < 4a^2 \\ &\implies \sqrt{(x-c)^2 + y^2} < 2a \implies 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, (3.7) implica (3.6).

Note também que em (3.8) tem-se que $a^2 + cx \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\implies x^2 \leq a^2 \implies |x| \leq a \implies -a \leq x \leq a \\ &\implies a^2 - a^2 \leq a^2 - ca \leq a^2 + cx \iff a^2 - cx \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, (3.9) implica (3.8). Portanto, as equações (3.5) e (3.10) são equivalentes. A equação

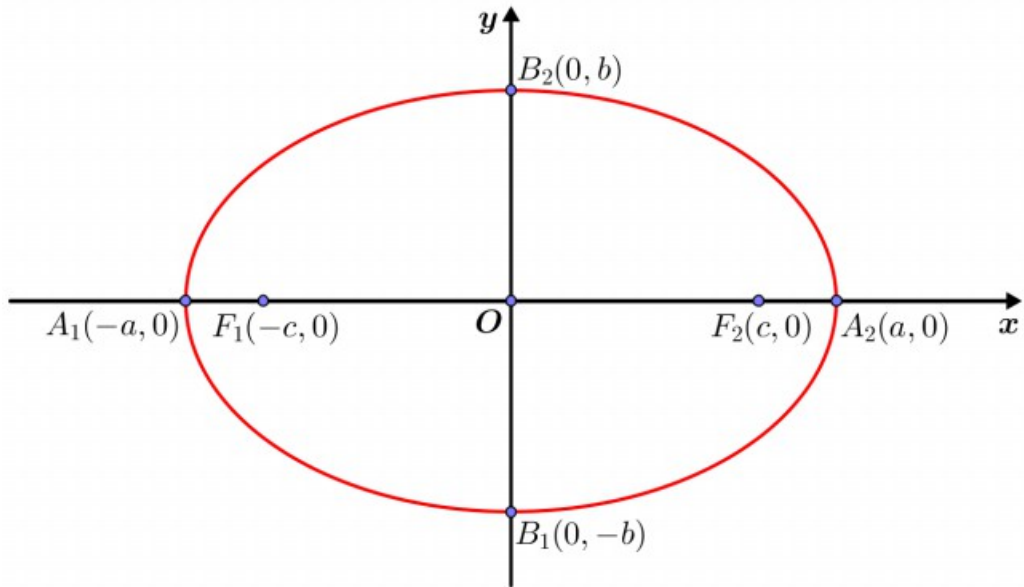
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (3.11)$$

é chamada forma canônica¹ da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox (ver Figura 18a).

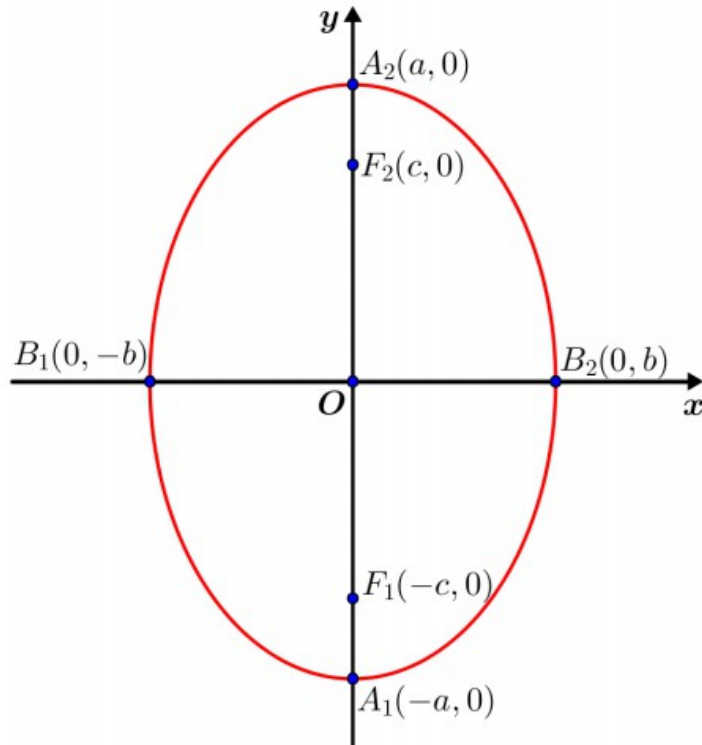
¹ Em matemática, a forma canônica é uma forma simples de apresentar algum objeto matemático.

Figura 18 – Elipses com centros na Origem

(a) e reta focal coincidente ao eixo Ox



(b) e reta focal coincidente ao eixo Oy



Fonte: Elaborada pelo autor

No caso da elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy (ver Figura 18b), temos:

$$\begin{cases} F_1(0, -c), & A_1(0, -a), & B_1(-b, 0), \\ F_2(0, c), & A_2(0, a), & B_2(b, 0), \end{cases}$$

com $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

De forma similar ao caso anterior, obtemos a seguinte equação:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \quad (3.12)$$

3.2.2 Elipse com centro no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$

Seja $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ um sistema de coordenadas obtido pela translação a origem O do sistema xOy para a nova origem $\bar{O}(x_o, y_o)$, conforme foi explicado na seção 3.1.5. Como no caso anterior, consideremos uma elipse \mathcal{E} com centro na origem \bar{O} e reta focal coincidente com o eixo $\bar{O}\bar{x}$. Sabemos pela seção 3.11 que um ponto $P(\bar{x}, \bar{y})$ dado em coordenadas do sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ pertence à elipse se, e somente se, satisfaz a equação:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1.$$

As equações (3.2) e (3.3), nos permitem representar o ponto $P(\bar{x}, \bar{y})$ nas coordenadas do sistema xOy . Assim,

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, a equação da elipse \mathcal{E} com centro no ponto (x_o, y_o) e eixo focal paralelo ao eixo Ox é:

$$\boxed{\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1} \quad (3.13)$$

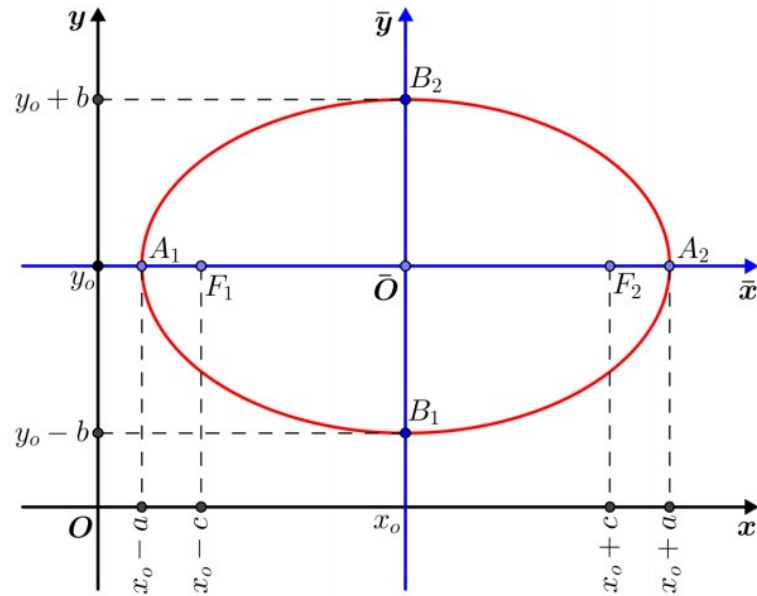
Os elementos dessa elipse (ver Figura 19a) são:

- focos: $F_1(x_o - c, y_o)$ e $F_2(x_o + c, y_o)$;
- reta focal: $l : y = y_o$;
- reta não focal: $l' : x = x_o$;
- vértices focais: $A_1(x_o - a, y_o)$ e $A_2(x_o + a, y_o)$;
- vértices não focais: $B_1(x_o, y_o - b)$ e $B_2(x_o, y_o + b)$.

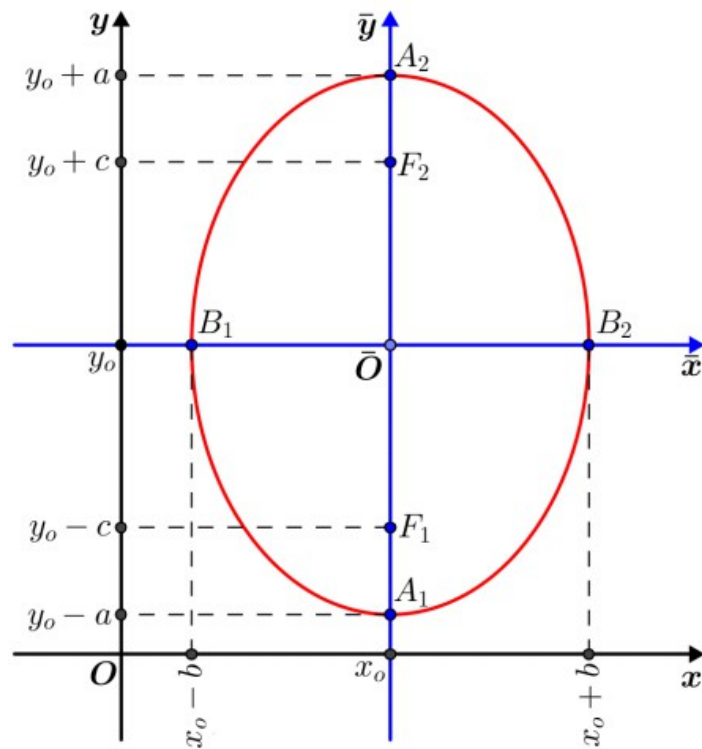
No caso da elipse com centro no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$ e reta focal paralela ao eixo Oy , procederemos de forma análoga ao caso anterior. Assim obtemos a seguinte equação:

Figura 19 – Elipses com centros no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$

(a) e reta focal paralela ao eixo Ox



(b) e reta focal paralela ao eixo Oy



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1} \quad (3.14)$$

Os elementos dessa elipse (ver Figura 19b) são:

- focos: $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$;
- reta focal: $l : x = x_0$;
- reta não focal: $l' : y = y_0$;
- vértices focais: $A_1(x_0, y_0 - a)$ e $A_2(x_0, y_0 + a)$;
- vértices não focais: $B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_2(x_0 + b, y_0)$.

3.3 As equações da hipérbole

Pela Definição 2.4, uma hipérbole \mathcal{H} com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida r , com $0 < r < d(F_1, F_2)$, é o conjunto dos pontos P do plano tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = r$, isto é,

$$\mathcal{H} = \{P; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = r\}.$$

Fazendo $r = 2a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, com $0 < a < c$, tem-se

$$\mathcal{H} = \{P; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}. \quad (3.15)$$

Para facilitar o nosso estudo, apresentaremos os elementos da hipérbole:

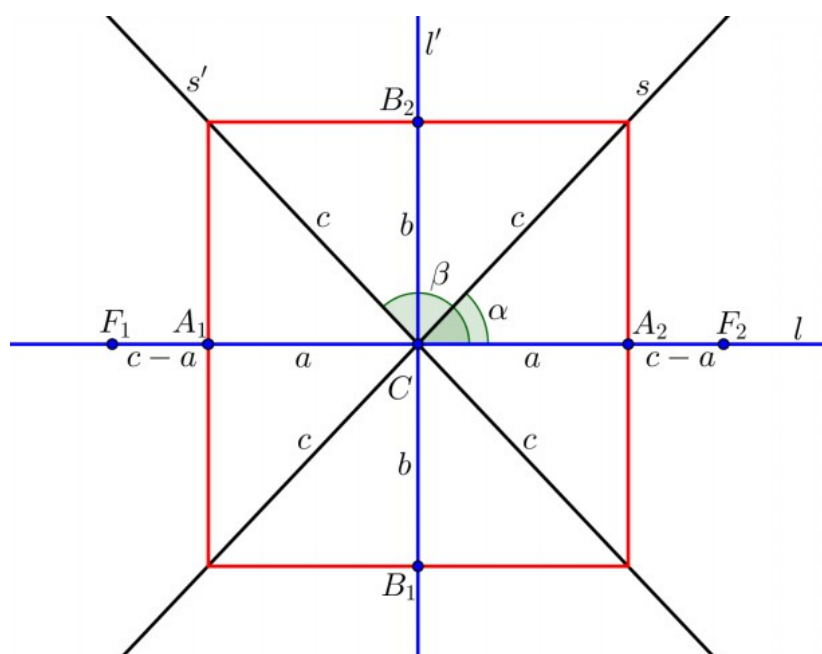
- (H1) Os pontos F_1 e F_2 são os *focos* da hipérbole.
- (H2) A reta l que contém os focos é a *reta focal*.
- (H3) A interseção da hipérbole com a reta focal l são dois pontos, A_1 e A_2 , chamados *vértices da hipérbole*.
- (H4) O segmento A_1A_2 é chamado *eixo focal* da hipérbole e seu comprimento é $2a$.
- (H5) O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o *centro* da hipérbole, onde a é a distância do centro aos seus vértices.
- (H6) A reta l' que passa por C e é perpendicular a reta focal é a *reta não focal* da hipérbole.
- (H7) O segmento B_1B_2 , perpendicular ao eixo focal que tem C ponto médio e comprimento $2b$, com $b^2 = c^2 - a^2$, é chamado *eixo não focal* da hipérbole, e os pontos B_1 e B_2 são os *vértices imaginários* da hipérbole.
- (H8) O número $e = \frac{c}{a}$ é a *excentricidade* da hipérbole, onde c é a distância do centro aos focos. Na hipérbole tem-se que $e > 1$, pois $c > a$.

(H9) O *retângulo de base* da hipérbole \mathcal{H} é o retângulo que tem A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios de seus lados.

(H10) As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as *retas assíntotas*² da hipérbole.

É fácil ver que as assíntotas da hipérbole se intersectam em C (ver Figura 20) e que a distância de C a qualquer vértice do retângulo de base da hipérbole é igual a c . Além disso, se α é a medida do ângulo entre a reta focal e a assíntota s e $\beta = 180^\circ - \alpha$ é o ângulo entre a reta focal e a assíntota s' , temos que os coeficientes angulares das assíntotas em relação à reta focal são $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ e $\tan \beta = -\frac{b}{a}$, respectivamente.

Figura 20 – Elementos da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

Existem alguns tipos de hipérboles que recebem nomes especiais. Uma hipérbole é chamada *equilátera*, se os comprimentos dos eixos focal e não focal são iguais, isto é, $a = b$.

Dois hipérboles são ditas *conjugadas* se o eixo focal de cada uma é o eixo não focal da outra. Portanto, duas hipérboles conjugadas têm em comum as assíntotas, o centro, o retângulo de base e a distância do centro aos focos.

² uma reta é uma assíntota de uma curva quando um ponto ao mover-se ao longo da parte extrema da curva se aproxima dessa reta

3.3.1 Hipérbole com centro na origem

A partir da Definição 2.4, obteremos a equação da hipérbole em relação a um sistema de coordenadas cartesianas xOy , cujo centro da hipérbole está na origem. Suponha inicialmente que a reta focal coincide com o eixo Ox . Neste caso, temos:

$$\begin{cases} F_1(-c, 0), & A_1(-a, 0), & B_1(0, -b), \\ F_2(c, 0), & A_2(a, 0), & B_2(0, b), \end{cases}$$

com $0 < a < c$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Aplicando a fórmula (3.1) e a Proposição 3.1 na equação (3.15), obtemos:

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{H} &\iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\ &\iff \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \\ &\iff \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = 4a^2 \\ &\iff (x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \\ &\iff 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 4a^2 = 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ &\iff (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2 = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2). \end{aligned}$$

Para melhor entendimento dos cálculos, faremos $\widetilde{M} = (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2$ e $\widehat{M} = ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2)$ e desenvolver cada termo separadamente. Começando por \widetilde{M} , temos:

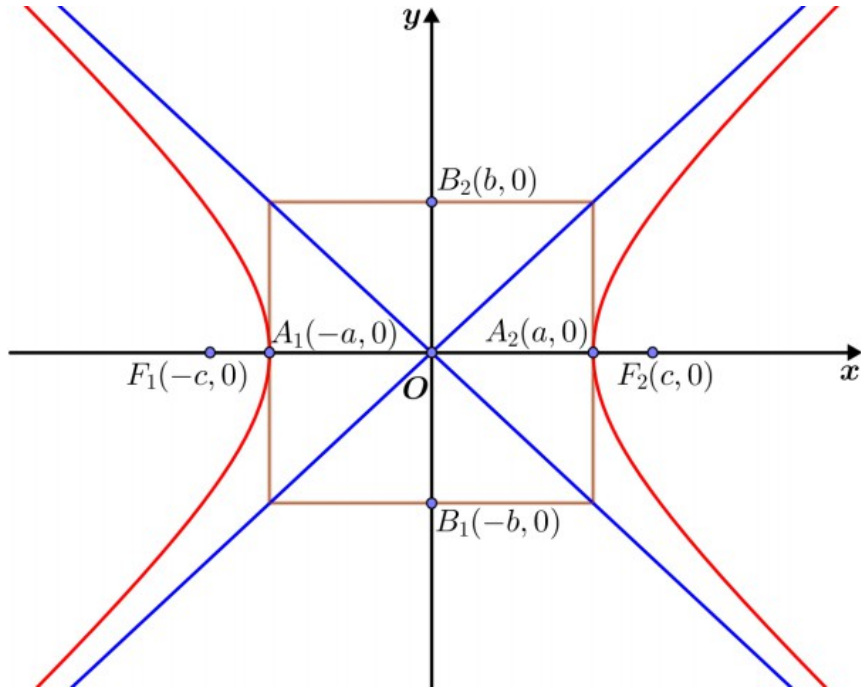
$$\begin{aligned} \widetilde{M} &= (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)(x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2) \\ &= x^4 + y^2x^2 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + x^2y^2 + y^4 + c^2y^2 - 2a^2y^2 + x^2c^2 + y^2c^2 + c^4 \\ &\quad - 2a^2c^2 - 2x^2a^2 - 2y^2a^2 - 2c^2a^2 + 4a^4 \\ &= x^4 + y^4 + c^4 + 4a^4 + 2x^2y^2 + 2x^2c^2 + 2y^2c^2 - 4x^2a^2 - 4y^2a^2 - 4c^2a^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Desenvolvendo \widehat{M} , obtemos:

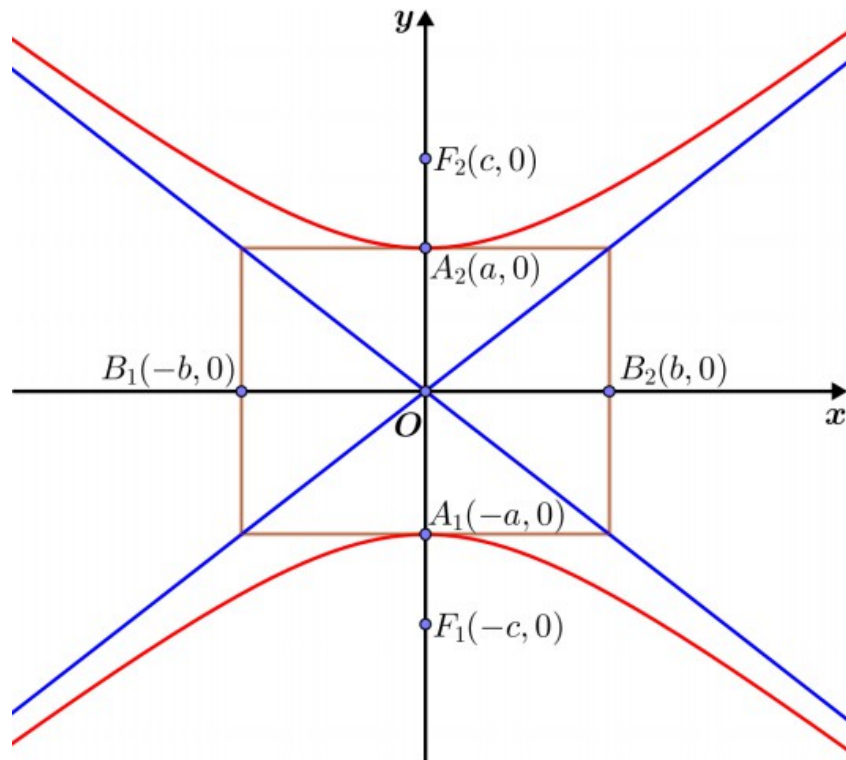
$$\begin{aligned} \widehat{M} &= ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) \\ &= (x^2 + 2xc + c^2 + y^2)(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\ &= x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 + y^2x^2 + 2x^3c - 4x^2c^2 + 2xc^3 + 2xcy^2 + x^2c^2 - 2xc^3 \\ &\quad + c^4 + y^2c^2 + x^2y^2 - 2xcy^2 + c^2y^2 + y^4 \\ &= x^4 + y^4 + c^4 - 2x^2c^2 + 2x^2y^2 + 2y^2c^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Figura 21 – Hipérboles com centros na Origem

(a) e reta focal coincidente ao eixo Ox



(b) e reta focal coincidente ao eixo Oy



Fonte: Elaborada pelo autor

Igualando as equações (3.16) e (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
 4a^4 + 2x^2c^2 - 4x^2a^2 - 4y^2a^2 - 4c^2a^2 &= -2x^2c^2 \\
 \iff 4x^2c^2 - 4x^2a^2 - 4y^2a^2 &= 4c^2a^2 - 4a^4 \\
 \iff x^2c^2 - x^2a^2 - y^2a^2 &= c^2a^2 - a^4 \\
 \iff x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
 \iff x^2b^2 - y^2a^2 &= a^2b^2 \\
 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1.
 \end{aligned}$$

Portanto, a equação da hipérbole \mathcal{H} com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox é

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (3.18)$$

que tem como assíntotas as retas $y = \frac{b}{a}x$ ou $bx - ay = 0$ e $y = -\frac{b}{a}x$ ou $bx + ay = 0$ (ver Figura 21a).

Agora considere uma hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy . Neste caso, os vértices e focos da hipérbole têm as seguintes coordenadas:

$$\begin{cases} F_1(0, -c), & A_1(0, -a), & B_1(-b, 0), \\ F_2(0, c), & A_2(0, a), & B_2(b, 0), \end{cases}$$

com $0 < a < c$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

A partir daí, seguindo o mesmo procedimento realizado no caso anterior, obtemos a equação:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad (3.19)$$

que representa uma hipérbole \mathcal{H} que tem centro na origem, reta focal coincidente com o eixo Oy e as retas $x = \frac{b}{a}y$ e $x = -\frac{b}{a}y$ são as assíntotas (ver Figura 21b).

3.3.2 Hipérbole com centro no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$

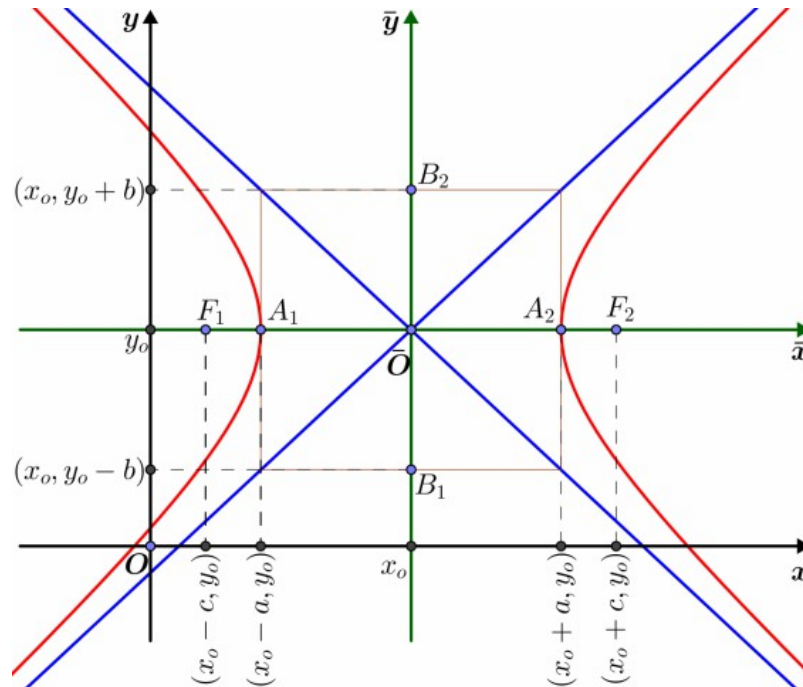
Consideremos sistema de coordenadas $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ obtido através de uma translação da origem O do sistema xOy para a nova origem $\bar{O}(x_o, y_o)$. Seja uma hipérbole \mathcal{H} cujo centro está na origem \bar{O} e reta focal coincidente com o eixo $\bar{O}\bar{x}$. Logo, pela seção 3.3.1, essa hipérbole tem a seguinte equação:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1. \quad (3.20)$$

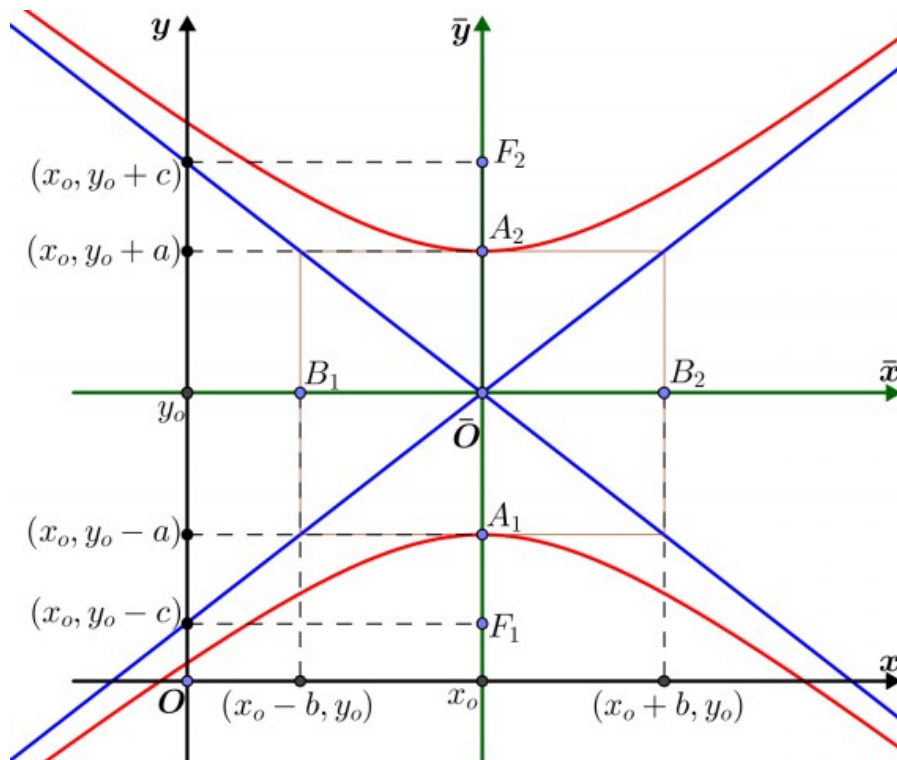
No entanto, já vimos que um ponto $P(\bar{x}, \bar{y})$ representado pelas coordenadas do sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$, também pode ser escrito nas coordenadas do sistema xOy . Para isso, basta aplicar as equações (3.2) e (3.3) na expressão (3.20), que assume a seguinte forma:

Figura 22 – Hipérboles com centros no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$

(a) e reta focal paralela ao eixo Ox



(b) e reta focal paralela ao eixo Oy



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \quad (3.21)$$

Essa é a equação da hipérbole \mathcal{H} com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo Ox . Além disso temos:

- focos: $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$;
- reta focal: $l : y = y_0$;
- reta não focal: $l' : x = x_0$;
- vértices focais: $A_1(x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$;
- vértices imaginários: $B_1(x_0, y_0 - b)$ e $B_1(x_0, y_0 + b)$;
- assíntotas: $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$ e $y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0)$.

Procedendo como na caso anterior, obtemos a equação da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo Oy :

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1} \quad (3.22)$$

Seus elementos são:

- focos: $F_1(x_0, y_0 - c)$ e $F_2(x_0, y_0 + c)$;
- reta focal: $l : x = x_0$;
- reta não focal: $l' : y = y_0$;
- vértices focais: $A_1(x_0, y_0 - a)$ e $A_2(x_0, y_0 + a)$;
- vértices imaginários: $B_1(x_0 - b, y_0)$ e $B_1(x_0 + b, y_0)$;
- assíntotas: $x - x_0 = \frac{b}{a}(y - y_0)$ e $x - x_0 = -\frac{b}{a}(y - y_0)$.

3.4 As equações da parábola

Pela Definição 2.5, uma parábola \mathcal{P} com foco F e reta diretriz \mathcal{L} é o conjunto de pontos P do plano tais que $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, ou seja,

$$\mathcal{P} = \{P; d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}. \quad (3.23)$$

Listaremos os elementos da parábola, que ajudarão no nosso estudo:

(P1) O ponto F é o *foco* e a reta \mathcal{L} é a *diretriz* da parábola.

(P2) A reta l perpendicular à diretriz que passa pelo o foco é a *reta focal*.

(P3) O *vértice* V da parábola é o ponto de interseção entre a reta focal e a parábola.

(P4) O número real $2p = d(F, \mathcal{L})$ é chamado *parâmetro* da parábola, onde $p = d(V, F) = d(V, \mathcal{L})$.

3.4.1 Parábola com vértice na origem

Obteremos as equações da parábola em relação a um sistema de coordenadas cartesianas xOy , cujo vértice da parábola está na origem O e a reta focal coincide com um dos eixos coordenados.

Caso em que a reta focal coincide com o eixo Ox

Note que existem dois casos a considerar: o foco está à direita da diretriz da parábola; o foco está à esquerda da diretriz. Vamos analisar cada caso separadamente.

No primeiro caso, o foco está sobre o eixo Ox e a diretriz é paralela ao eixo Oy (ver Figura 23a). Como $d(F, \mathcal{L}) = 2p$, então o foco tem coordenadas $F(p, 0)$ e a equação da diretriz é $x = -p$. Assim,

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{P} &\iff d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \\ &\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \iff (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\ &\iff x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \iff -2px + y^2 = 2px \\ &\iff y^2 = 4px. \end{aligned}$$

Portanto, a equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox , cujo foco está à direita da diretriz é

$$\boxed{y^2 = 4px} \tag{3.24}$$

Quando o foco está à esquerda da diretriz, temos $F(-p, 0)$ e $\mathcal{L} : x = p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$ (ver Figura 23b). De forma análoga ao caso anterior, obtemos a equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox , cujo foco está à esquerda da diretriz:

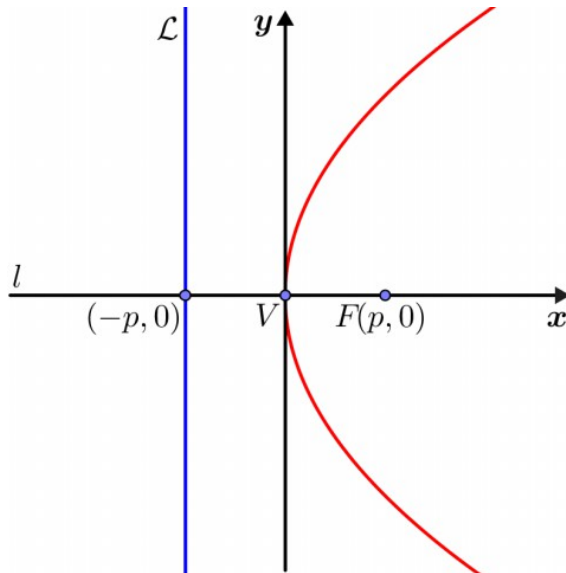
$$\boxed{y^2 = -4px} \tag{3.25}$$

Caso em que a reta focal coincide com o eixo Oy

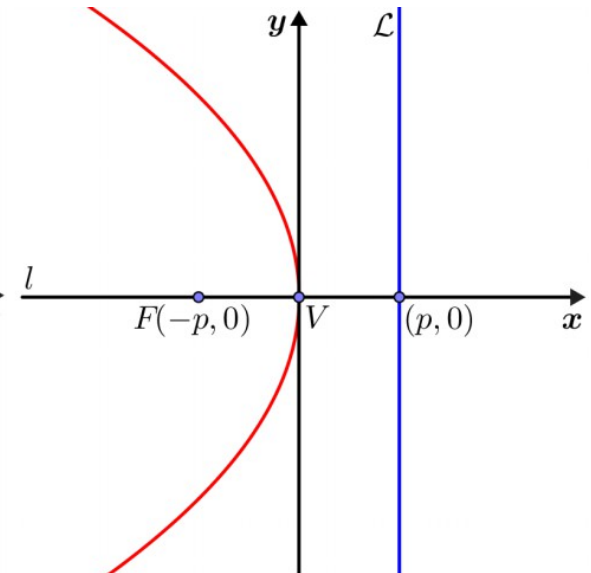
Consideraremos dois casos: o foco está acima da diretriz; o foco está abaixo da diretriz.

Figura 23 – Parábolas com vértices na origem

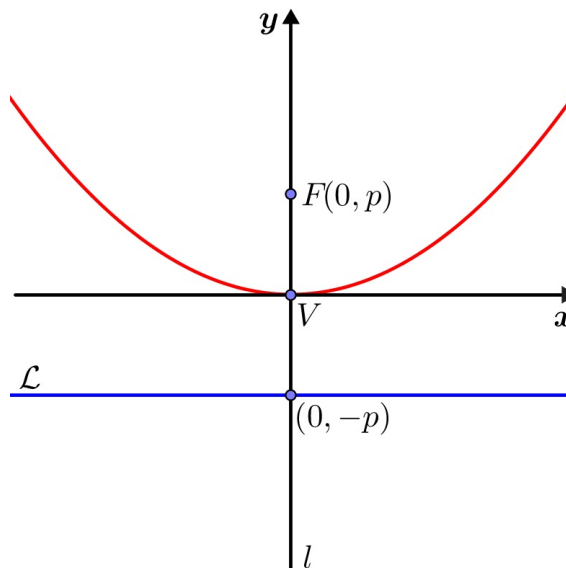
(a) reta focal coincidente com o eixo Ox
e foco à direita da diretriz



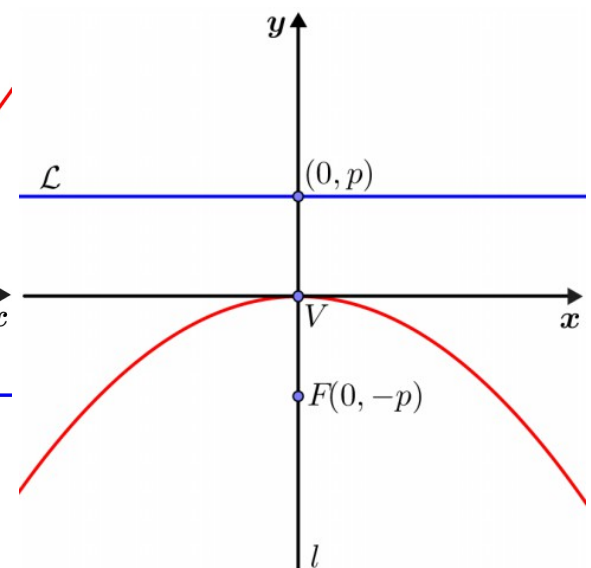
(b) reta focal coincidente com o eixo Ox
e foco à esquerda da diretriz



(c) reta focal coincidente com o eixo Oy
e foco acima da diretriz



(d) reta focal coincidente com o eixo Oy
e foco abaixo da diretriz



Fonte: Elaborada pelo autor

No primeiro caso, temos $F(0, p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$ (ver Figura 23c). Assim,

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{P} &\iff d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \\ \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p| &\iff x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 &\iff x^2 - 2py = 2py \\ \iff x^2 = 4py. \end{aligned}$$

Portanto, a equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy , cujo foco está acima da diretriz é

$$\boxed{x^2 = 4py} \quad (3.26)$$

No caso em que o foco está abaixo da diretriz, temos $F(0, -p)$ e $\mathcal{L} : y = p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$ (ver Figura 23d).

Procedendo como no caso anterior, concluímos que a equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy , cujo foco está abaixo da diretriz é

$$\boxed{x^2 = -4py} \quad (3.27)$$

3.4.2 Parábola com vértice no ponto $\bar{O}(x_o, y_o)$

Seja $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ um sistema de coordenadas obtido pela translação da origem O do sistema xOy para a nova origem $\bar{O}(x_o, y_o)$. Seja \mathcal{P} uma parábola com centro na origem \bar{O} cuja reta focal coincide com um dos eixos do sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$.

Caso em que a reta focal é paralela ao eixo Ox

Existem dois casos a considerar: o foco está à direita da reta diretriz; o foco está à esquerda da diretriz.

No primeiro caso, pela seção 3.4.1, temos que a equação dessa parábola nas coordenadas \bar{x}, \bar{y} do sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ é dada por

$$\bar{y}^2 = 4p\bar{x}. \quad (3.28)$$

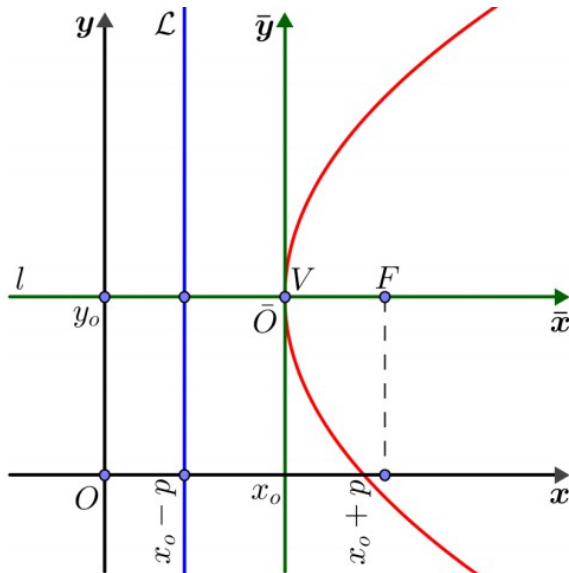
Aplicando as equações (3.2) e (3.3), obtemos a equação (3.28) nas coordenadas x, y do sistema xOy . Logo,

$$\boxed{(y - y_o)^2 = 4p(x - x_o)} \quad (3.29)$$

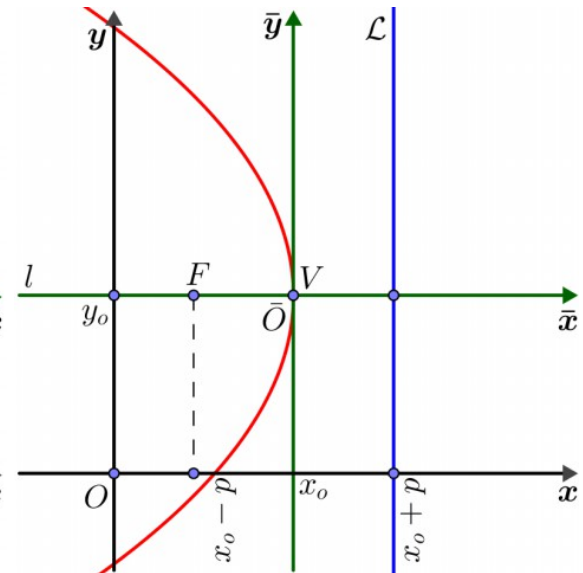
Essa é a equação da parábola com vértice no ponto (x_o, y_o) e reta focal paralela ao eixo Ox , cujo foco está à direita da diretriz (ver Figura 24a). Seus elementos são:

Figura 24 – Parábolas com vértices no ponto (x_o, y_o)

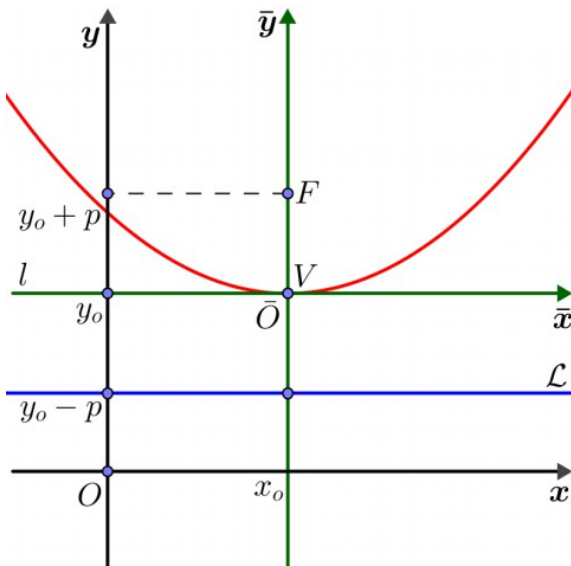
(a) reta focal paralela ao eixo Ox
e foco à direita da diretriz



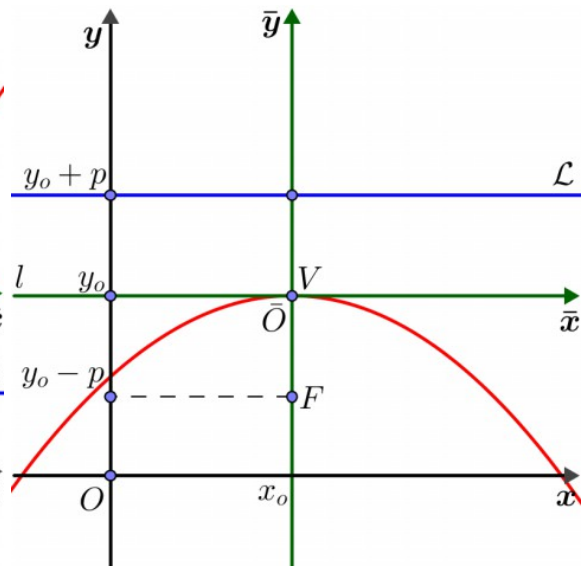
(b) reta focal paralela ao eixo Ox
e foco à esquerda da diretriz



(c) reta focal paralela ao eixo Oy
e foco acima da diretriz



(d) reta focal paralela ao eixo Oy
e foco abaixo da diretriz



Fonte: Elaborada pelo autor

- foco: $F(x_o + p, y_o)$;
- vértice: $V(x_o, y_o)$;
- diretriz: $\mathcal{L} : x = x_o - p$;
- reta focal: $l : y = y_o$.

No caso em que o foco está à esquerda da diretriz, pela seção 3.4.1, temos que a equação dessa parábola nas coordenadas \bar{x}, \bar{y} do sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ é dada por

$$\bar{y}^2 = -4p\bar{x}. \quad (3.30)$$

Passando a equação (3.30) para as coordenadas x, y do sistema xOy através das equações (3.2) e (3.3) obtemos,

$$\boxed{(y - y_o)^2 = -4p(x - x_o)} \quad (3.31)$$

Essa é a equação da parábola com vértice no ponto (x_o, y_o) e reta focal paralela ao eixo Ox , cujo foco está à esquerda da diretriz (ver Figura 24b). Seus elementos são:

- foco: $F(x_o - p, y_o)$;
- vértice: $V(x_o, y_o)$;
- diretriz: $\mathcal{L} : x = x_o + p$;
- reta focal: $l : y = y_o$.

Caso em que a reta focal é paralela ao eixo Oy

Consideraremos dois casos: quando o foco está acima da diretriz e quando o foco está abaixo da diretriz.

No primeiro caso, pela seção 3.4.1, temos que a equação dessa parábola nas coordenadas \bar{x}, \bar{y} do sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ é dada por

$$\bar{x}^2 = 4p\bar{y}. \quad (3.32)$$

Passando a equação (3.32) para as coordenadas x, y do sistema xOy através das equações (3.2) e (3.3) obtemos,

$$\boxed{(x - x_o)^2 = 4p(y - y_o)} \quad (3.33)$$

Essa é a equação da parábola com vértice no ponto (x_o, y_o) e reta focal paralela ao eixo Oy , cujo foco está acima da diretriz (ver Figura 24c). Seus elementos são:

- foco: $F(x_o, y_o + p)$;

- vértice: $V(x_o, y_o)$;
- diretriz: $\mathcal{L} : y = y_o - p$;
- reta focal: $l : x = x_o$.

No caso em que o foco está abaixo da diretriz, pela seção 3.4.1, a equação dessa parábola nas coordenadas \bar{x}, \bar{y} do sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ é dada por

$$\bar{x}^2 = -4p\bar{y}. \quad (3.34)$$

Passando a equação (3.34) para as coordenadas x, y do sistema xOy através das equações (3.2) e (3.3) obtemos,

$$\boxed{(x - x_o)^2 = -4p(y - y_o)} \quad (3.35)$$

Essa é a equação da parábola com vértice no ponto (x_o, y_o) e reta focal paralela ao eixo Oy , cujo foco está abaixo da diretriz (ver Figura 24d). Seus elementos são:

- foco: $F(x_o, y_o - p)$;
- vértice: $V(x_o, y_o)$;
- diretriz: $\mathcal{L} : y = y_o + p$;
- reta focal: $l : x = x_o$.

3.5 Equação geral do segundo grau com duas variáveis

Nesse capítulo, vimos que as cônicas são subconjuntos do plano cujas equações possuem pelo menos uma das variáveis com expoente dois, ou seja, são equações do segundo grau. Na verdade, as equações das cônicas são casos particulares da equação geral do segundo grau com duas variáveis, dada por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.36)$$

onde A, B, C, D, E e F são números reais, chamados de coeficientes.

Faremos um breve estudo sobre a equação (3.36) e sua relação com as cônicas, porém consideraremos apenas os casos em que $B = 0$. O estudo dos casos onde $B \neq 0$ requer a utilização de rotação dos eixos coordenados, um assunto que não trataremos neste trabalho. Contudo, isso não nos impede de enunciar algumas proposições.

Proposição 3.3. *Se os coeficientes A e C da equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ têm mesmo sinal, então essa equação representa um dos seguintes conjuntos:*

- uma elipse com os eixos paralelos aos eixos coordenados;
- um ponto;
- o conjunto vazio.

Demonstração. Dividindo a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ por AC , obtemos

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0 \iff \frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}.$$

Completando quadrado, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} &= -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2} \\ \iff \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AC^2F}{4A^2C^3}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Seja $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AC^2F$. Se $M = 0$, temos

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = 0 \iff x = -\frac{D}{2A} \text{ e } y = -\frac{E}{2C},$$

pois, por hipótese, A e C têm o mesmo sinal. Logo a equação (3.37) representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, um caso degenerado da elipse.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (3.37) na forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} = 1. \quad (3.38)$$

com $AC > 0$.

Se $M > 0$, a equação (3.38) representa uma elipse com centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ e eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados.

Se $M < 0$, então $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$ e $\frac{M}{4ACC^2} < 0$. Assim a equação (3.38) representa o conjunto vazio, outro caso degenerado da elipse. \square

Proposição 3.4. *Se os coeficientes A e C da equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ têm sinais opostos, então essa equação representa uma hipérbole com os eixos paralelos aos eixos coordenados ou um par de retas concorrentes.*

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade que $A > 0$ e $C < 0$. Assim,

$$\begin{aligned} Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) = -F &\iff \frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{-C} - \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = \frac{F}{AC} \\ \iff \frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{-C} - \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} &= \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2} \\ \iff \frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} &= \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Seja $N = 4ACF - CD^2 - AE^2$. Se $N \neq 0$, a equação (3.39) representa uma hipérbole com centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ e eixo focal paralelo a um dos eixos coordenados.

Se $N = 0$, temos

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = 0 \iff y + \frac{E}{2C} = \pm \sqrt{-\frac{A}{C}} \left(x + \frac{D}{2A}\right),$$

que representa um par de retas concorrentes, que é o caso degenerado da hipérbole. \square

Proposição 3.5. *Seja a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $\Delta = E^2 - 4CF$. Se $A = 0$ e $C \neq 0$, essa equação representa um dos seguintes conjuntos:*

- uma parábola com reta focal paralela ao eixo Ox , se $D \neq 0$;
- um par de retas paralelas ao eixo Ox , se $D = 0$ e $\Delta > 0$;
- uma reta paralela ao eixo Ox , se $D = 0$ e $\Delta = 0$;
- o conjunto vazio, se $D = 0$ e $\Delta < 0$.

Demonstração. Se $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$, então a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ pode ser escrita na forma

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando o quadrado, obtemos

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2} + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = \frac{E^2}{4C^2} \iff \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}x - \frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2}.$$

Colocando $-\frac{D}{C}$ em evidência, temos

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C} \left(x + \frac{C}{D} \left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right) \iff \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C} \left(x + \frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}\right),$$

que representa uma parábola com reta focal paralela ao eixo Ox e vértice

$$V\left(-\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right).$$

Se $D = 0$, tem-se a equação $Cy^2 + Ey + F = 0$, com $\Delta = E^2 - 4CF$. Neste caso, se $\Delta > 0$ a equação representa duas retas paralelas ao eixo Ox

$$y = \frac{-E + \sqrt{\Delta}}{2C} \quad e \quad y = \frac{-E - \sqrt{\Delta}}{2C};$$

se $\Delta = 0$, a equação representa uma reta paralela ao eixo Ox

$$y = -\frac{E}{2C};$$

se $\Delta < 0$, a equação representa o conjunto vazio. Estes três últimos casos são chamados *casos degenerados da parábola*. \square

Proposição 3.6. Considere a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $\Delta = E^2 - 4CF$. Se $C = 0$ e $A \neq 0$, essa equação representa um dos seguintes conjuntos:

- uma parábola com reta focal paralela ao eixo Oy , se $E \neq 0$;
- um par de retas paralelas ao eixo Oy , se $E = 0$ e $\Delta > 0$;
- uma reta paralela ao eixo Oy , se $E = 0$ e $\Delta = 0$;
- o conjunto vazio, se $E = 0$ e $\Delta < 0$.

É análoga à demonstração da Proposição 3.5.

3.6 Definição unificada das cônicas por meio da excentricidade

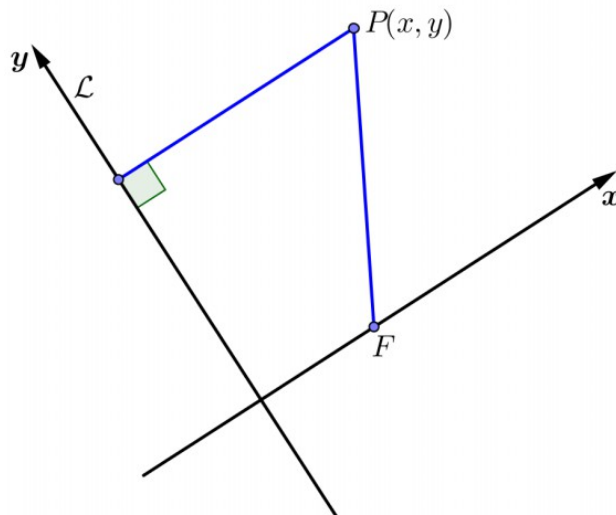
Teorema 3.1. Dados uma reta \mathcal{L} e um ponto F não pertence a \mathcal{L} , tem-se que o conjunto a C dos pontos P do plano tais que $d(P, F) = e d(P, \mathcal{L})$, ou seja,

$$C = \{P; d(P, F) = e d(P, \mathcal{L})\} \quad (3.40)$$

é uma elipse se $0 < e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$, com foco F e excentricidade e .

Demonstração. Considere um sistema de coordenadas onde o eixo Oy coincide com a reta \mathcal{L} e o eixo Ox é reta perpendicular à \mathcal{L} que passa por F (ver Figura 25). Relativamente a esse sistema, o ponto F tem coordenadas $(p, 0)$, onde $p = d(F, \mathcal{L})$. Assim,

Figura 25 – Sistema de coordenadas do teorema 3.1



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\begin{aligned}
P(x, y) \in C &\iff d(P, F) = e d(P, \mathcal{L}) \\
&\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = e|x| \\
&\iff (x-p)^2 + y^2 = e^2 x^2 \\
&\iff x^2 - 2px + p^2 + y^2 - e^2 x^2 = 0 \\
&\iff (1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Comparando os coeficientes da equação (3.41) com os coeficientes da equação geral do segundo grau com duas variáveis (equação (3.36)), temos:

$$A = 1 - e^2, B = 0, C = 1, D = -2p, E = 0 \text{ e } F = p^2.$$

Se $e = 1$, então $A = 0$. Assim, pela Proposição 3.5, a equação representa uma parábola com reta paralela ao eixo Ox , pois $C \neq 0$ e $D \neq 0$ (ver Figura 26a). Ou ainda, se $e = 1$, então o conjunto

$$C = \left\{ P; d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \right\}$$

é uma parábola com foco F e diretriz \mathcal{L} .

Se $0 < e < 1$, os coeficientes A e C são ambos positivos e

$$M = C^2 D^2 + A C E^2 - 4 A C^2 F = 4p^2 - 4(1-e^2)p^2 = 4p^2(1-1+e^2) = 4p^2 e^2 > 0.$$

Logo, pela Proposição 3.3, a equação (3.41) representa uma elipse com os eixos paralelos aos eixos coordenados (ver Figura 26b). Para obter o centro da elipse prosseguiremos com o desenvolvimento da equação (3.41):

$$\begin{aligned}
(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 &= 0 \\
\iff x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{2p}{1-e^2}x + \frac{p^2}{1-e^2} &= 0 \\
\iff x^2 - \frac{2p}{1-e^2}x + \frac{p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{p^2}{1-e^2} &= \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \\
\iff \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{1-e^2} \\
\iff \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{p^2 - p^2(1-e^2)}{(1-e^2)^2} \\
\iff \left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} \\
\iff \frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2 e^2}{1-e^2}} &= 1.
\end{aligned}$$

Como $0 < e < 1$, então $\frac{1}{(1-e^2)^2} \geq \frac{1}{1-e^2}$. Assim, $a = \frac{pe}{1-e^2}$, $b = \frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}$,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2 e^2}{1-e^2} = \frac{p^2 e^2}{1-e^2} \left(\frac{1}{1-e^2} - 1 \right) \\ &= \frac{p^2 e^2}{1-e^2} \cdot \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{p^2 e^4}{(1-e^2)^2} \implies c = \frac{pe^2}{1-e^2}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que:

- $\frac{c}{a} = \frac{pe^2}{1-e^2} \cdot \frac{1-e^2}{pe} = e$ é a excentricidade da elipse;
- $C\left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right) = C\left(\frac{pe}{1-e^2} \cdot \frac{1}{e}, 0\right) = C\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ é o centro da elipse.

Vale ressaltar que a circunferência é considerada uma elipse de excentricidade nula, ou seja, $e = 0$.

Se $e > 1$, os coeficientes A e C têm sinais opostos e

$$N = ACF - CD^2 - AE^2 = (1-e^2)p^2 - 4p^2 = -p^2(-1+e^2+4) = -p^2(e^2+3) \neq 0.$$

Portanto, pela Proposição 3.4, a equação (3.41) representa uma hipérbole com os eixos paralelos aos eixos coordenados. De forma análoga ao caso anterior, obtemos o centro da hipérbole $C\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ e a sua excentricidade e (ver Figura 26c). \square

A reta \mathcal{L} mencionada no Teorema 3.1 é chamada reta diretriz correspondente ao foco F , ou seja, para cada foco existe uma diretriz associada. É por isso que a parábola possui apenas uma diretriz enquanto que a elipse e a hipérbole possuem duas diretrizes, sendo uma para cada foco.

No sistema de coordenadas que consideramos na demonstração do Teorema 3.1, temos que o centro da cônica é o ponto $C\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ pertencente ao eixo Ox e a equação da diretriz é $\mathcal{L} : x = 0$. Assim,

$$d(C, \mathcal{L}) = \frac{a}{e}.$$

Daí podemos concluir que a diretriz \mathcal{L}_i correspondente ao foco F_i , $i = 1, 2$, é a reta perpendicular à reta focal l que dista $\frac{a}{e}$ do centro da cônica, com o foco F_i pertencente ao segmento CM_i , onde M_i é o ponto de interseção entre as retas l e \mathcal{L}_i .

No caso da elipse ou da hipérbole com centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Ox , as retas

$$\mathcal{L}_1 : x = x_0 - \frac{a}{e} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 : x = x_0 + \frac{a}{e}$$

são as diretrizes correspondentes aos focos F_1 e F_2 , respectivamente.

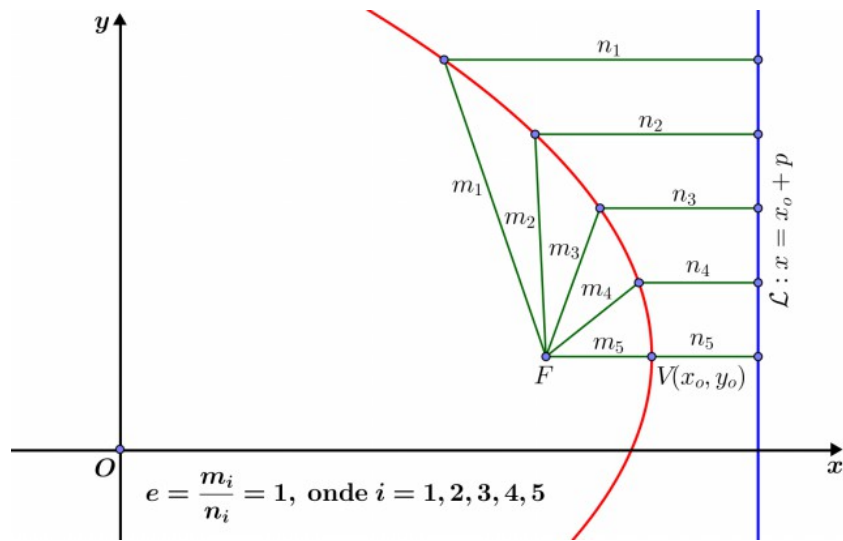
Já para a elipse ou a hipérbole com centro $C(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy , as retas

$$\mathcal{L}_1 : y = y_0 - \frac{a}{e} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 : y = y_0 + \frac{a}{e}$$

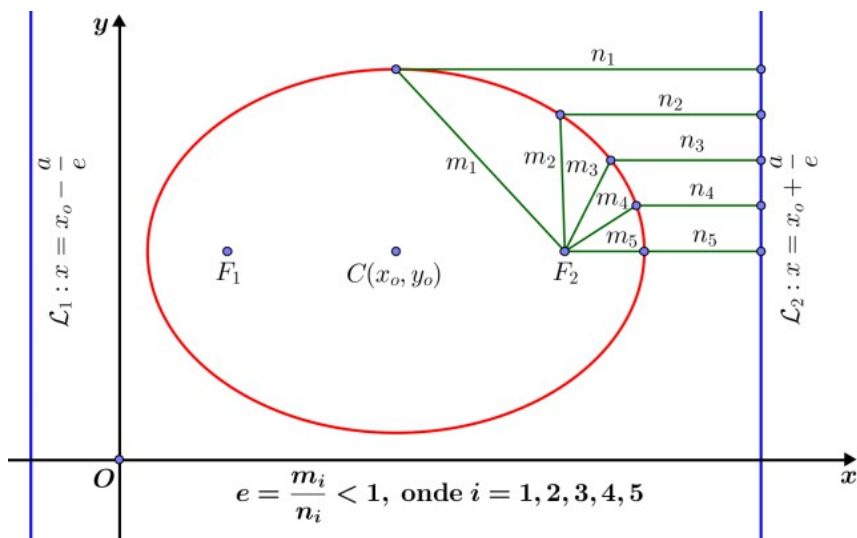
são as diretrizes correspondentes aos focos F_1 e F_2 , respectivamente.

Figura 26 – As diretrizes das cônicas

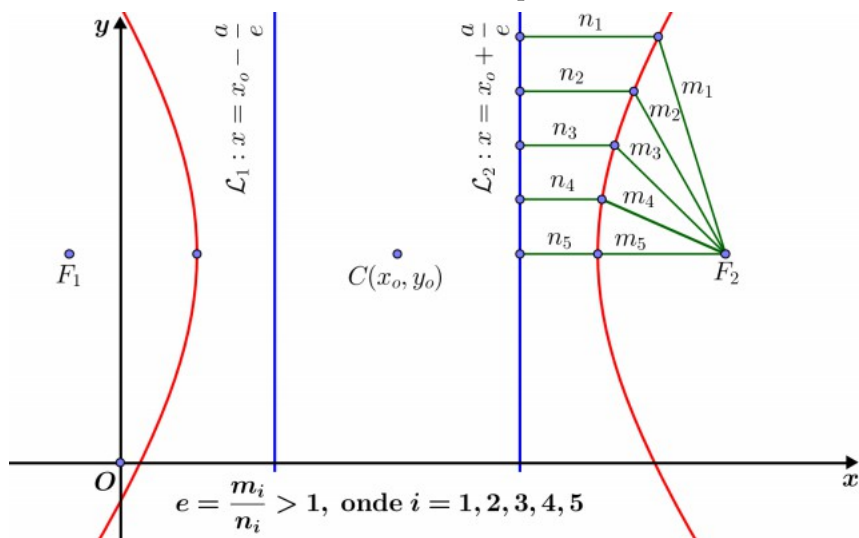
(a) A diretriz da parábola



(b) As diretrizes da elipse



(c) As diretrizes da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

4 PROPRIEDADES DE REFLEXÃO DAS CÔNICAS

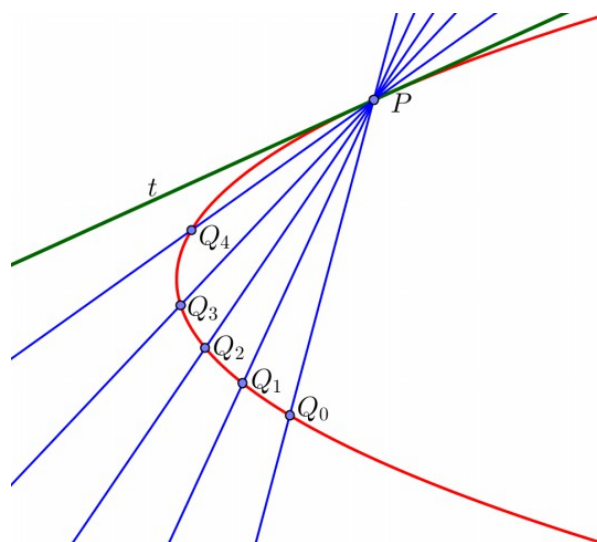
Vimos que as cônicas foram criadas para resolver o problema prático de duplicar o cubo, que serviria para dobrar o volume do altar do deus Apolo, situado na ilha de Delos. Assim desde a sua concepção, essas curvas mostraram que além de belas e harmônicas, possuem propriedades que as tornam altamente eficientes na solução de problemas práticos e que são amplamente aplicadas nas mais diversas e inusitadas situações.

Neste capítulo falaremos de algumas aplicações das cônicas. Para isso, vamos primeiro mostrar algumas propriedades geométricas das cônicas que as tornam tão especiais.

4.1 Propriedade das retas tangentes às cônicas

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que quer dizer "tocando". Assim, ao "pé da letra" podemos dizer que a reta tangente à uma curva dada é aquela que toca a curva. É evidente que essa não é a definição matemática de reta tangente. Vale lembrar que toda reta tangente a uma curva C está associada um ponto P pertencente à essa curva.

Figura 27 – Secantes e tangente à parábola em P



Fonte: Elaborada pelo autor

Para definirmos matematicamente uma reta tangente, precisamos usar o conceito de *limite* que normalmente é desconhecido pela maioria dos estudantes do Ensino Médio. No entanto, usando uma ideia intuitiva de limite, tentaremos mostrar de forma simples o conceito de reta tangente à uma curva, tomando como exemplo de curva uma parábola.

Exemplo 4.1. *Sejam P e Q pontos de uma parábola e l a reta que passa por esses pontos. Suponha que t seja a reta tangente à parábola no ponto P . Agora vamos manter o ponto P fixo e deslocar o ponto Q sobre a curva, aproximando-o de P . Neste processo o ponto Q vai se aproximando cada vez mais de P , porém sem coincidir com P . Assim, dizemos que o ponto Q tende para P e a reta l tende para a tangente t , que é a posição limite da reta l através desse processo de aproximação.*

Portanto, para encontrar a reta tangente à uma curva dada em um ponto P da curva, precisamos calcular um *limite* semelhante ao do exemplo anterior. Isso só será possível se tivermos noções básicas de *Cálculo*. No entanto, para nossos propósitos, daremos as seguintes definições de reta tangente à uma cônica:

Definição 4.1. *Sejam \mathcal{P} uma parábola com foco F , diretriz \mathcal{L} e P um ponto de \mathcal{P} . Dizemos que t é a reta tangente à parábola em P , se todo ponto $Q \in t$, $Q \neq P$, tem-se que*

$$d(Q, F) > d(Q, \mathcal{L}).$$

Definição 4.2. *Seja \mathcal{E} uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $2a$. Seja P um ponto de \mathcal{E} . Dizemos que t é a reta tangente à elipse em P , se todo ponto $Q \in t$, $Q \neq P$, tem-se que*

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) > 2a.$$

Definição 4.3. *Seja \mathcal{H} uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $2a$. Seja P um ponto de \mathcal{H} . Dizemos que t é a reta tangente à hipérbole em P , se todo ponto $Q \in t$, $Q \neq P$, tem-se que*

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| < 2a.$$

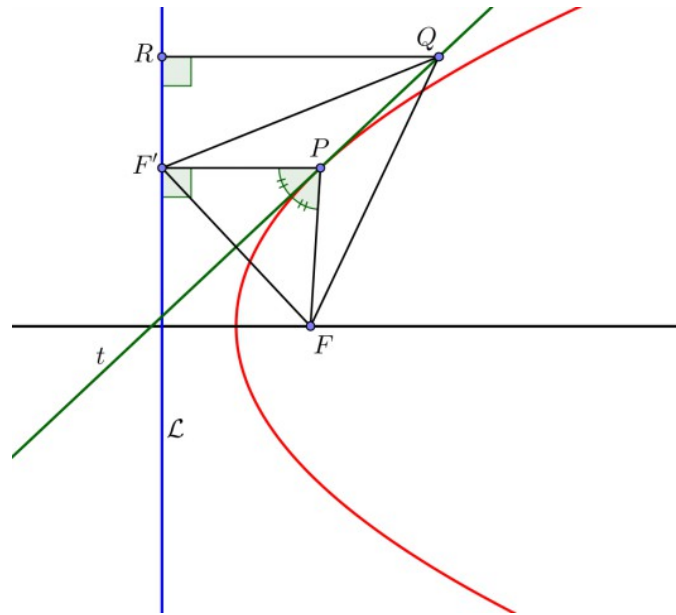
A partir dessas definições, veremos que as cônicas são as únicas curvas planas tais que, dado um ponto P da cônica, podemos traçar a sua tangente em P utilizando apenas régua e compasso, uma vez que o problema se resume em traçar a bissetriz de um ângulo descrito nas proposições a seguir.

Proposição 4.1. *Seja \mathcal{P} uma parábola com foco F e diretriz \mathcal{L} . Seja P um ponto pertence à \mathcal{P} e F' o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre \mathcal{L} . Tem-se que a reta bissetriz do ângulo $\widehat{FPF'}$ é a reta tangente à parábola em P .*

Demonstração. Seja t a reta bissetriz do ângulo $\widehat{FPF'}$ e como P pertence à parábola, temos que $\overline{PF} = \overline{PF'}$.

Seja Q um ponto pertencente à reta t , distinto de P . Observe que os triângulos FPQ e $F'PQ$ são congruentes, pois possuem o lado PQ em comum, $\overline{PF} = \overline{PF'}$ e $\widehat{QPF} = \widehat{QPF'}$ (ver Figura 28). Assim,

$$\overline{QF} = \overline{QF'}. \quad (4.1)$$

Figura 28 – Reta tangente à parábola em P 

Fonte: Elaborada pelo autor

Seja R o pé da perpendicular baixada do ponto Q sobre à diretriz da parábola. Assim o triângulo $QF'R$ é retângulo, cuja hipotenusa é o segmento QF' . Assim $\overline{QF'} > \overline{QR}$.

Porém, pela equação 4.1, temos que $\overline{QF'} = \overline{QF} > \overline{QR}$, isto é, $d(Q, F) > d(Q, R) = d(Q, \mathcal{L})$. Portanto, pela Definição 4.1, a reta t é tangente à parábola em P . \square

Proposição 4.2. *Sejam \mathcal{E} uma elipse com focos F_1 e F_2 e P um ponto pertencente à \mathcal{E} . Tem-se que a reta bissetriz do ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{F_1P}$ e $\overrightarrow{F_2P}$ é a reta tangente à elipse em P .*

Demonstração. Seja t a bissetriz do ângulo $\widehat{F_2PF'_2}$, onde o ponto F'_2 pertence a semirreta $\overrightarrow{F_1P}$ tal que $\overline{PF_2} = \overline{PF'_2}$. Como P pertence a elipse, temos

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \iff \overline{PF_1} + \overline{PF'_2} = 2a \iff \overline{F_1F'_2} = 2a. \quad (4.2)$$

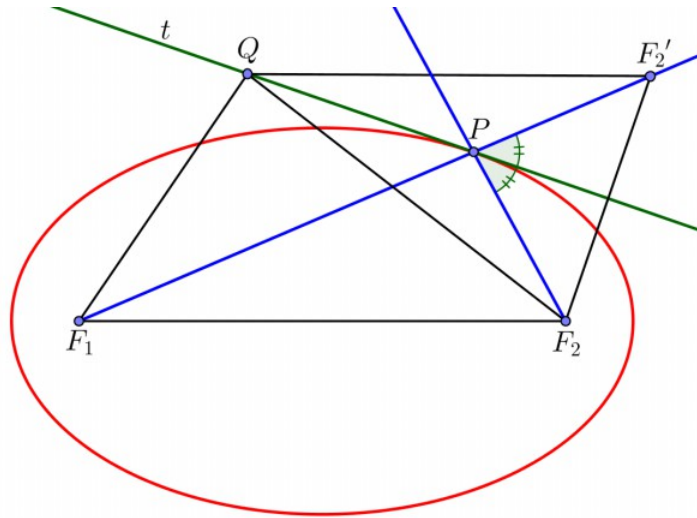
Considere Q um ponto pertencente à t , diferente de P . Temos então que, os triângulos QPF_2 e QPF'_2 são congruentes, pois possuem o lado PQ em comum, $\overline{PF_2} = \overline{PF'_2}$ e $\widehat{QPF_2} = \widehat{QPF'_2}$ (ver Figura 29). Assim,

$$\overline{QF_2} = \overline{QF'_2}. \quad (4.3)$$

Pelos resultados obtidos nas equações (4.2) e (4.3), e aplicando a desigualdade triangular no triângulo $QF_1F'_2$ temos que

$$\overline{QF_1} + \overline{QF'_2} > \overline{F_1F'_2},$$

isto é, $d(Q, F_1) + d(Q, F_2) > 2a$. Portanto, pela Definição 4.2, a reta t é tangente à elipse em P . \square

Figura 29 – Reta tangente à elipse em P 

Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 4.3. *Sejam \mathcal{H} uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e P um ponto pertencente \mathcal{H} . Tem-se que a reta bissetriz do ângulo determinado pelas semirretas $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$ é a reta tangente à hipérbole em P .*

Demonstração. Seja t a bissetriz do ângulo $\widehat{F_2PF'_2}$, tal que $F'_2 \in \overrightarrow{PF_1}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PF'_2}$. Como $P \in \mathcal{H}$, temos

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a \iff |\overline{PF_1} - \overline{PF'_2}| = 2a \iff \overline{F_1F'_2} = 2a. \quad (4.4)$$

Se Q é um ponto pertence à bissetriz t , tal que $Q \neq P$, então os triângulos QPF_2 e QPF'_2 são congruentes, pois possuem o lado PQ em comum, $\overline{PF_2} = \overline{PF'_2}$ e $\widehat{QPF_2} = \widehat{QPF'_2}$ (ver Figura 30). Assim,

$$\overline{QF_2} = \overline{QF'_2}. \quad (4.5)$$

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo $F_1QF'_2$ obtemos

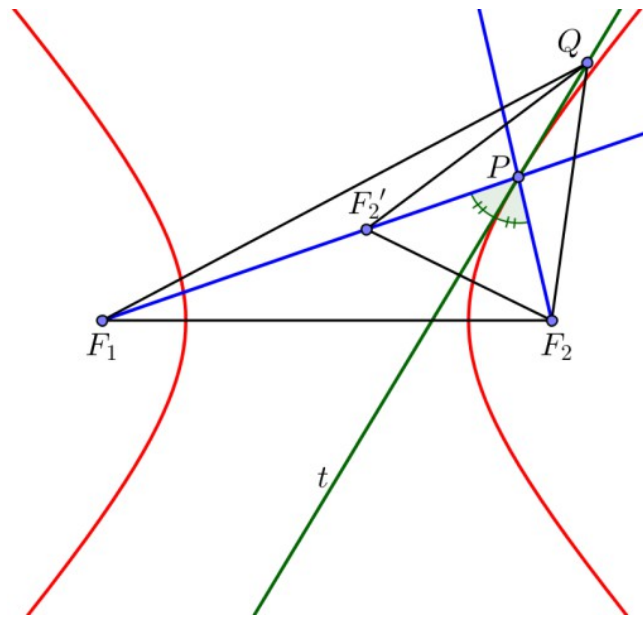
$$\overline{QF_1} < \overline{QF'_2} + \overline{F_1F'_2} \iff \overline{QF_1} - \overline{QF'_2} < \overline{F_1F'_2} \quad (4.6)$$

$$\overline{QF'_2} < \overline{QF_1} + \overline{F_1F'_2} \iff \overline{QF'_2} - \overline{QF_1} = -(\overline{QF_1} - \overline{QF'_2}) < \overline{F_1F'_2}. \quad (4.7)$$

Pelas equações (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) concluímos que

$$|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| < 2a,$$

ou seja, $|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| < 2a$. Portanto, pela Definição 30, a reta t é tangente à hipérbole em P . \square

Figura 30 – Reta tangente à hipérbole em P 

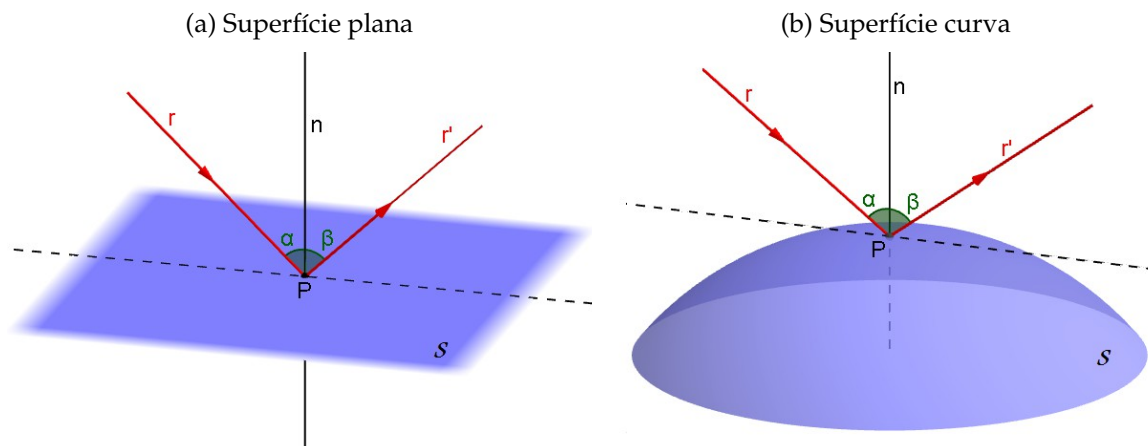
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2 As leis de reflexão da luz

Antes de explorarmos as propriedades de reflexão das cônicas, primeiro conheceremos alguns conceitos de Óptica Geométrica, um ramo da Física que estuda os fenômenos luminosos.

Na Óptica Geométrica, a luz em propagação é representada graficamente por linhas orientadas que dão a direção e o sentido da propagação luminosa. Cada linha é chamada de *raio de luz*. Um conjunto de raios de luz constitui um *feixe de luz*.

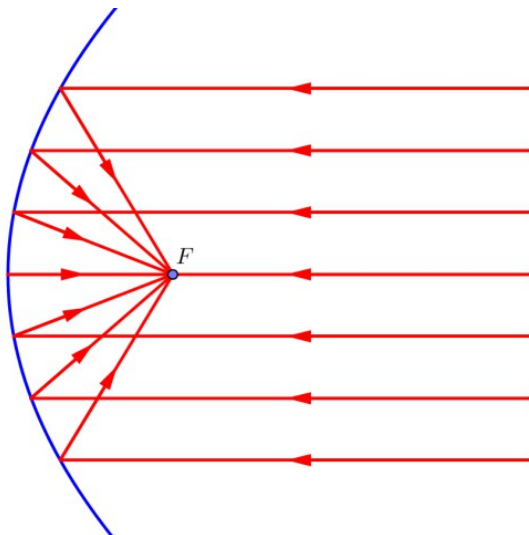
Figura 31 – Reflexão da luz



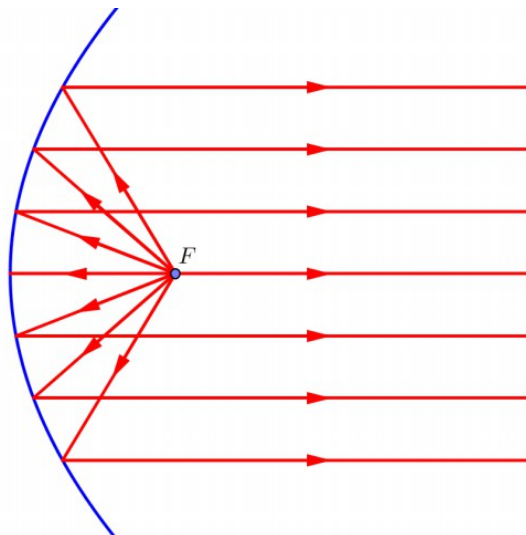
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 32 – Propriedade de reflexão da parábola

(a) Feixe de luz indo na direção da parábola, paralelo ao seu eixo focal



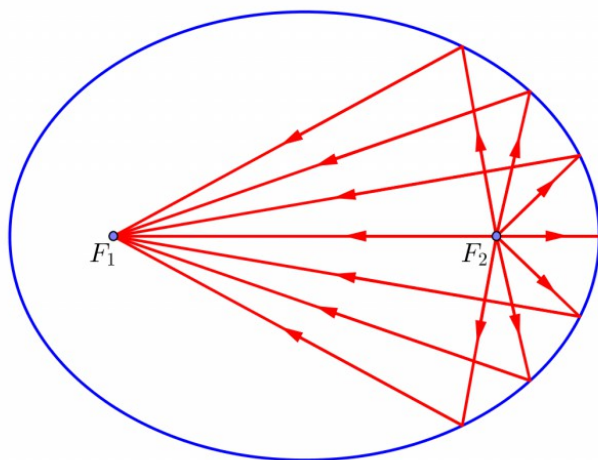
(b) Fonte de luz no foco da parábola



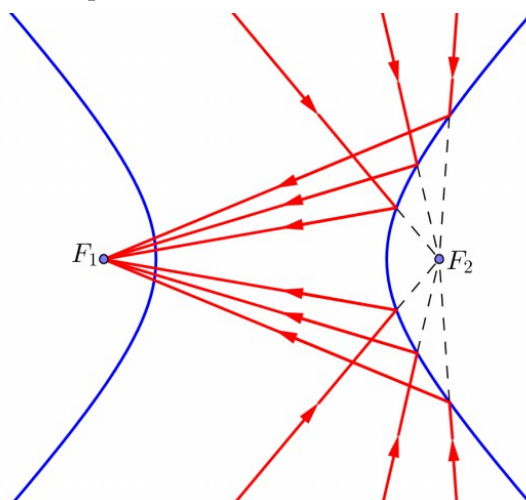
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 33 – Propriedades de reflexão da elipse e hipérbole

(a) Fonte de luz em um dos focos na elipse



(b) Raios de luz indo na direção de um dos focos da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

A reflexão da luz é definida como um fenômeno óptico que ocorre quando a luz incide sobre uma superfície e retorna ao seu meio de origem. Os espelhos são os principais instrumentos utilizados com base nesse fenômeno.

Agora considere a reflexão de um raio de luz no ponto P pertencente a superfície \mathcal{S} . Seja n a reta normal à \mathcal{S} no ponto P . Assim, quando um raio r incide no ponto P de \mathcal{S} forma com a normal n um ângulo α , chamado ângulo de incidência. Em seguida, o raio r' que é refletido forma com a normal n o ângulo β , denominado ângulo de reflexão. As leis da reflexão da luz afirmam que

Primeira lei: o raio incidente, a reta normal e o raio refletido são coplanares.

Segunda lei: o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Vale salientar que além da luz, as leis da reflexão valem para todos os tipos de ondas eletromagnéticas e também para ondas sonoras.

As propriedades de reflexão das cônicas decorrem das leis da reflexão e das Proposições 4.1, 4.2 e 4.3.

Observe a Figura 28. Se considerarmos que a parábola \mathcal{P} é um espelho e que a semirreta oposta a semirreta $\overrightarrow{PF'}$ é o raio incidente no ponto $P \in \mathcal{P}$ então PF será o raio refletido. Isso quer dizer que se um feixe de luz paralelo ao eixo focal de \mathcal{P} incide sobre a parábola então todo o feixe de luz será refletido na direção do foco da parábola (ver Figura 32a). Analogamente, se uma fonte de luz estiver sobre o foco de uma parábola, de forma que os raios de luz incidem na parábola, então esses raios serão refletidos paralelamente ao eixo focal da parábola (ver Figura 32b). Essa propriedade é muito importante para o estudo da parábola, pois além de ter diversas aplicações práticas, ela também caracteriza a parábola, ou seja, se uma curva plana tem essa propriedade de reflexão ela só pode ser uma parábola. Porém, não demonstraremos esse resultado neste trabalho.

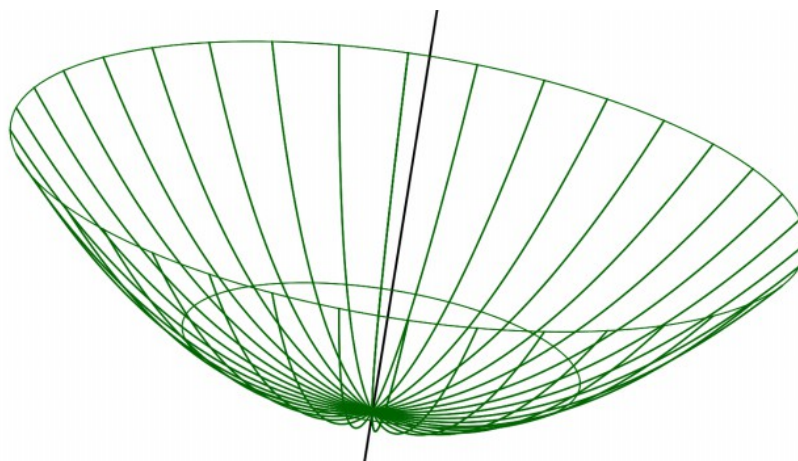
No caso da elipse, se uma fonte de luz estiver sobre um dos seus focos de um espelho elíptico então o feixe de luz será refletido em direção ao outro foco da elipse. Além disso, cada raio de luz que parte de um dos focos, leva o mesmo intervalo de tempo para chegar ao outro foco, pois os raios de luz percorrem distâncias iguais na elipse. Essa particularidade tem aplicações interessantes na acústica como veremos mais adiante (ver Figura 33a). A elipse também é caracterizada por essa propriedade de reflexão.

Já no caso da hipérbole, tem-se que os raios de luz emitidos na direção de um dos focos de um espelho hiperbólico serão refletidos na direção do outro foco (ver Figura 33b). A hipérbole é a única curva plana que possui essa propriedade de reflexão.

4.2.1 Aplicações das superfícies refletoras parabólicas

Considere uma parábola com foco F e eixo focal l . Imagine que ela começa a girar em torno do seu eixo e que, a medida que ela gira, a parábola vai deixando um rastro por onde passa no espaço. A superfície formada por esse rastro deixado pela parábola é uma superfície de revolução chamada *paraboloide* com foco F e eixo focal l .

Figura 34 – Paraboloide



Fonte: Elaborada pelo autor

O paraboloide herda da sua parábola geradora, a propriedade de reflexão. Assim, se um feixe de luz paralelo ao eixo focal l incidir num paraboloide espelhado, então o feixe será refletido na direção do foco do paraboloide. Da mesma forma, se uma fonte de luz estiver posicionada no foco do paraboloide espelhado, todos os raios de luz serão refletidos paralelamente ao eixo focal do paraboloide.

Vejamos algumas aplicações dessa propriedade:

Lanternas, faróis e holofotes: neste caso, a fonte de luz fica localizada no foco do paraboloide que é refletida paralelamente ao eixo, afim de iluminar o mais longe possível.

Microfones parabólicos: as ondas de som quando atingem a superfície parabólica são refletidas para o seu foco, onde fica posicionado um microfone que capta o som produzido. Esses equipamentos têm aplicações interessantes. Na espionagem, por exemplo, esses microfones são usados para ouvir a conversa de pessoas distantes do espião, sem que ele seja notado. Outra aplicação é na localização de animais em florestas através da captação dos sons produzidos por esses animais.

Fornos solares: os raios solares são concentrados no foco, onde a temperatura fica bastante elevada, permitindo cozinhar alimentos, fundir metais, etc. Em um forno solar em Odeillo, França, a temperatura nele pode chegar a 3.800 graus centígrados.

Figura 35 – Lanterna



Fonte: <http://goo.gl/m0woUD>

Figura 37 – Microfone parabólico



Fonte: <http://goo.gl/P9Prai>

Figura 39 – Forno solar em Odeillo, França



Fonte: <http://goo.gl/NRIYRa>

Figura 36 – Holofote



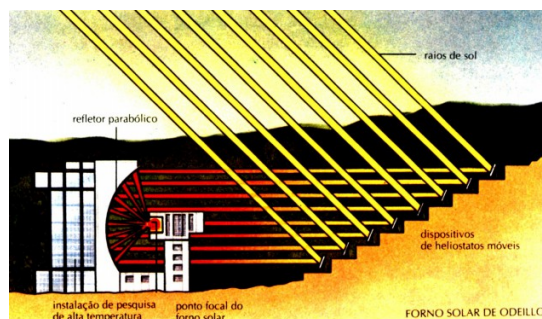
Fonte: <http://goo.gl/Om5T4l>

Figura 38 – Farol de motocicleta



Fonte: <http://goo.gl/NXHq2>

Figura 40 – Esquema de reflexão no forno



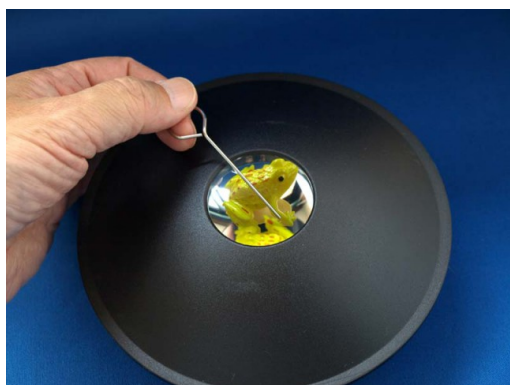
Fonte: Enciclopédia Como Funciona

Figura 41 – Antena parabólica



Fonte: <http://goo.gl/zwfofc>

Figura 43 – Brinquedo Mirascope



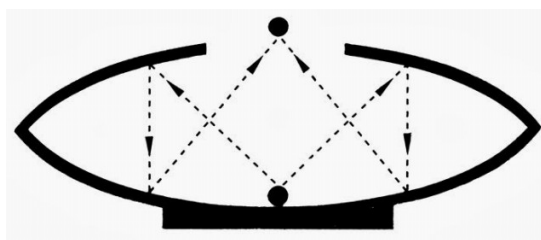
Fonte: <http://goo.gl/ISQBxJ>

Figura 42 – Radiotelescópio em Arecibo, Porto Rico



Fonte: <http://goo.gl/TtFTM9>

Figura 44 – Esquema de reflexão no Mirascope



Fonte: <http://goo.gl/f0UTPK>

Antenas parabólicas: o sinal de televisão, que são ondas eletromagnéticas, atingem a superfície do paraboloide que é refletido para o foco, concentrando o sinal em até 2.000 vezes.

Radiotelescópios: as ondas eletromagnéticas provenientes de fontes cósmicas, como estrelas, são refletidos para o foco, onde essas ondas são captadas e depois processadas. Com essas informações é possível estudar os astros, seus fenômenos de formação e até a origem do universo.

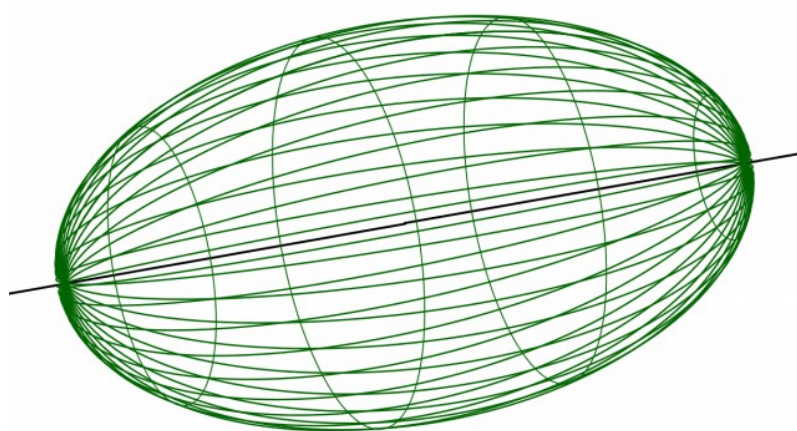
Brinquedos "3D Mirascope": esse brinquedo é formado por dois espelhos parabólicos idênticos que são colocados um em cima do outro, de modo que o foco de um paraboloide coincide com o vértice do outro. O espelho superior tem um furo no centro. Assim quando um objeto é colocado no fundo do paraboloide inferior, os raios de luz que partem desse objeto são refletidos pelo paraboloide superior. Então, esses raios se propagam paralelos na direção do espelho inferior, onde novamente são refletidos para o foco do paraboloide inferior que está loca-

lizado no furo do espelho superior. Neste local (o furo) é formada uma imagem tridimensional do objeto colocado no fundo do espelho inferior.

4.2.2 Aplicações das superfícies refletoras elípticas

Considere uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal l . Agora, imagine que a elipse começa a girar em torno do seu eixo focal e que, a medida que gira, a elipse deixa um rastro por onde passa. Temos que esse rastro descreve uma superfície de revolução chamada *elipsoide* com focos F_1 e F_2 e eixo focal l .

Figura 45 – Elipsoide



Fonte: Elaborada pelo autor

Da mesma forma que ocorre com o parabolóide, o elipsoide também herda de sua elipse geradora a propriedade de reflexão. Assim, se uma fonte de luz estiver sobre um dos focos de um elipsoide espelhado, então os raios de luz são refletidos e chegam ao mesmo tempo no outro foco.

Vejamos como essa propriedade pode ser aplicada:

Refletores odontológicos: esses refletores têm o formato de uma calota elíptica, onde a fonte de luz fica posicionada no foco da calota. O dentista posiciona a boca do paciente no outro foco para onde a luz é refletida evitando que os raios de luz atinjam a visão do paciente, causando desconforto.

Litotripsia extracorpórea por ondas de choque: Litotripsia é um tratamento para cálculo renal. Essa palavra é derivada do grego Lithos (pedra) e Tripsis (esmagamento), ou seja, litotripsia é o ato de fragmentar pedras. A Litotripsia Extracorpórea por Ondas de Choque (LECO) é um tratamento em que ondas de choque são geradas a partir do foco de um refletor elíptico e são refletidas para o outro foco, onde o rim doente é posicionado, até que o cálculo seja fragmentado. É, portanto, um método não invasivo de fragmentação de cálculos que permite uma recuperação rápida para o paciente.

Figura 46 – Refletor odontológico



Fonte: <http://goo.gl/Rc7PtX>

Figura 48 – Equipamento de litotripsia extracorpórea



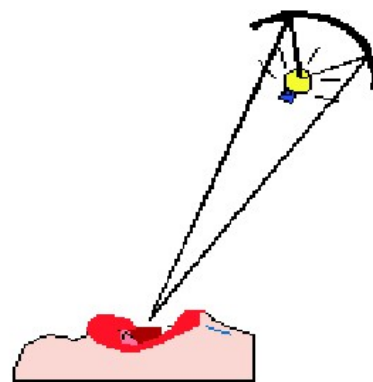
Fonte: <http://goo.gl/pL3kAG>

Figura 50 – Edifício Capitólio dos Estados Unidos



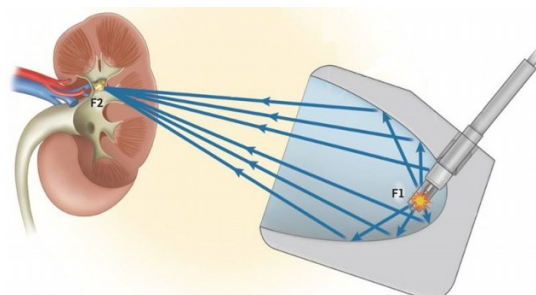
Fonte: <http://goo.gl/IUVI7t>

Figura 47 – Esquema do refletor odontológico



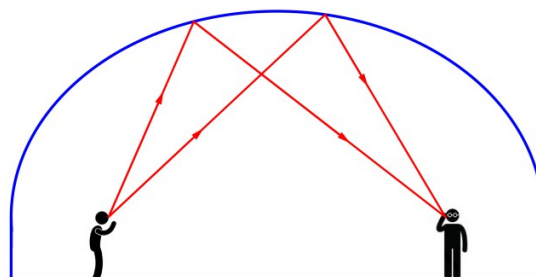
Fonte: <http://goo.gl/hXilc8>

Figura 49 – Esquema de reflexão na litotripsia



Fonte: <http://goo.gl/XLKtEF>

Figura 51 – Esquema de reflexão na sala de sussurros



Fonte: Elaborada pelo autor

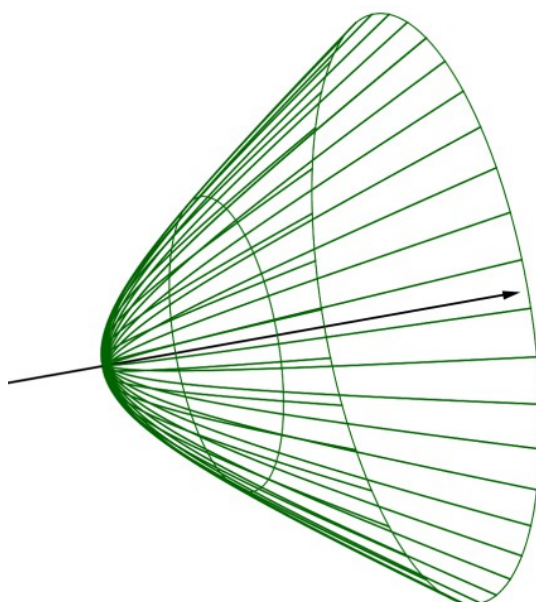
Radioterapia: o equipamento usado na radioterapia que usa o mesmo princípio de funcionamento do equipamento da litotripsia extracorpórea por ondas de choque. No foco do refletor elíptico é posicionado uma fonte de radiações ionizantes, que são refletidas para o outro foco, onde fica localizado o tumor a ser tratado.

Salas de sussurros: são salas especiais em que seus tetos têm o formato de uma calota elíptica, cujo eixo focal é paralelo ao solo. A distância dos focos ao solo corresponde à altura de uma pessoa. Essas salas permitem que duas pessoas, cada uma posicionada sobre um foco, conversem normalmente mesmo que estejam distantes ou que falem baixo (por sussurros). Isso é possível porque as ondas sonoras emitidas em um foco são refletidas simultaneamente para o outro foco. As salas ou galerias dos sussurros, são usadas geralmente em auditórios, teatros, museus, castelos e catedrais, como é caso da Catedral de São Paulo (em Londres) e do edifício Capitólio dos Estados Unidos¹ (em Washington).

4.2.3 Aplicações das superfícies refletoras hiperbólicas

Considere uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal l . Imagine que essa hipérbole começa a girar em torno de l e que, a medida que vai rotacionando, ela deixa um rastro por onde passa. Temos que a superfície gerada por esses rastro é chamada *hiperboloide* com focos F_1 e F_2 e eixo focal l .

Figura 52 – Uma das folhas do Hiperboloide



Fonte: Elaborada pelo autor

¹ Prédio que serve como centro legislativo do governo dos Estados Unidos.

Como nos casos anteriores, o hiperboloide herda a propriedade de reflexão da hipérbole que o gerou. Assim, todos os raios de luz que se propagam na direção de um dos focos de uma superfície refletora hiperbólica, são refletidos para o outro foco.

Essa propriedade é aplicada na construção de telescópios refletores. Esses equipamentos possuem dois espelhos, o *espelho primário* ou *espelho principal* que tem o formato de um parabolóide e o *espelho secundário* que explicaremos mais adiante. O telescópio funciona da seguinte forma: por causa das grandes distâncias entre os corpos celestes e o nosso planeta, pode-se considerar que a luz refletida ou emanadas por esses corpos chegam até nós como um feixe de raios de luz paralelos entre si. Quando esse feixe de luz incide no espelho principal do telescópio, os raios são refletidos para o foco do parabolóide, por causa a propriedade de reflexão dessa superfície.

Figura 53 – Telescópio Newtoniano



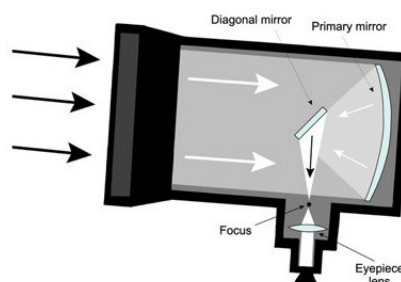
Fonte: <http://goo.gl/uIbCFg>

Figura 55 – Telescópio Cassegrain



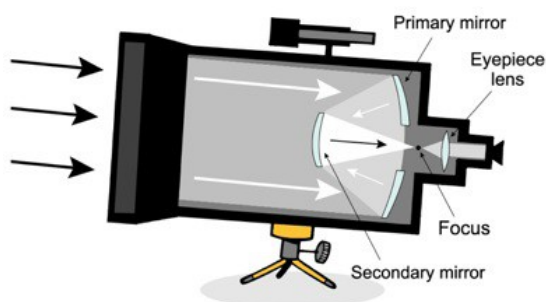
Fonte: <http://goo.gl/vxG7Tt>

Figura 54 – Esquema de reflexão no telescópio Newtoniano



Fonte: <http://goo.gl/HVMqRR>

Figura 56 – Esquema de reflexão no telescópio Cassegrain



Fonte: <http://goo.gl/iiq702>

Assim, a luz fica concentrada no foco do espelho principal, onde é possível ver de forma ampliada o corpo celeste para qual o telescópio está sendo apontado. Porém esse ponto fica localizado no interior do telescópio. Logo, não é possível posicionar o olho nesse ponto, para visualizar as imagens. Para resolver esse problema foram propostas duas soluções, uma dada por Isaac Newton e outra por Guillaume Cassegrain.

Newton posicionou um pequeno espelho plano próximo ao foco, chamado de espelho secundário, com uma inclinação de 45 graus em relação ao eixo focal do paraboloide que forma o espelho primário. O espelho secundário reflete os raios luminosos que vêm na direção do foco para a lateral do telescópio. Nesta posição perpendicular ao tubo do telescópio, encontra-se a lente ocular por onde pode-se observar a imagem ampliada do objeto. Esse telescópio é chamado de telescópio Newtoniano.

Cassegrain, por sua vez, também adicionou um espelho secundário em seu telescópio. Ele posicionou um pequeno espelho próximo ao foco, porém com o formato de um paraboloide, de forma que o foco do espelho primário coincide com um dos focos do paraboloide. Feito isso, os raios de luz captados pelo espelho primário, são refletidos para um dos focos do secundário, que por sua vez, reflete os raios para o outro foco que fica num ponto por trás do espelho principal. Cassegrain fez um furo central no espelho primário, permitindo que a luz passe e atinja o outro foco do secundário, onde fica posicionada a lente ocular. Portanto, no telescópio de Cassegrain a observação é feita de modo semelhante a uma luneta, onde o observador se posiciona atrás do telescópio.

Comparado ao de Newton, o telescópio de Cassegrain apresenta diversas vantagens. Uma delas é o pequeno comprimento do tubo, pois enquanto um Newtoniano de 2 metros de distância focal possui um tubo de aproximadamente 2 metros, um Cassegrain com as mesmas características possui um tubo que não ultrapassa 1 metro de comprimento. Esta característica se deve ao espelho hiperbólico que comprime a distância focal do espelho primário.

5 CONSTRUINDO CÔNICAS

Nesse capítulo, mostraremos alguns métodos para construir cônicas. Veremos também que as construções das cônicas são baseadas nas propriedades dessas curvas, algumas delas já vistas e outras que serão apresentadas.

As construções poderão ser realizadas de duas formas: utilizando materiais concretos, como papel, pregos, barbantes e etc, ou utilizando um programa de geometria dinâmica.

Todos os materiais concretos empregados nas construções são de baixo custo e podem ser facilmente encontrados, inclusive em nossa casa. Quanto ao programa de geometria dinâmica, escolhemos o *Geogebra* devido uma série de vantagens, entre elas, por ser um programa gratuito que pode ser distribuído livremente, está disponível na língua portuguesa e por ser multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com *Windows*, *Linux* ou *Mac OS*, em *smartphones* e *tablets*. O *Geogebra* está disponível em: <<http://www.geogebra.org/>>.

Porém, antes de iniciarmos as construções, exploraremos alguns conceitos ainda não estudados.

5.1 Conceito de lugar geométrico

Até aqui vimos que as cônicas podem ser definidas pela propriedade bifocal ou através de equações algébricas. Nessas definições utilizamos o conceito de lugar geométrico, que iremos definir a seguir.

Definição 5.1. *Dada uma propriedade \mathcal{P} relativa a pontos do plano, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade \mathcal{P} é o subconjunto \mathcal{K} do plano que satisfaz as duas condições a seguir:*

- (a) *todo ponto de \mathcal{K} possui a propriedade \mathcal{P} ;*
- (b) *todo ponto do plano que possui a propriedade \mathcal{P} pertence \mathcal{K} .*

5.2 Construindo elipses

Nesta seção, veremos alguns métodos para construir elipses.

5.2.1 Método das circunferências tangentes – Elipse

Considere uma circunferência C com centro no ponto F_1 e raio r e seja F_2 um ponto pertencente à região interior de C , com $F_2 \neq F_1$. Seja C' a circunferência com centro no ponto F_2 e raio r' , com $r' < r$.

Suponha que a interseção entre as circunferências C e C' é vazia. Com base nessas informações enunciaremos as proposições seguintes.

Proposição 5.1. *O lugar geométrico dos centros P das circunferências C_1 tangentes internamente à C e C' , é uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r - r'$.*

Demonstração. Considere a semirreta $\overrightarrow{F_1X}$, onde $X \in C$ e F_1 é o centro de C (ver Figura 57a). Tome um ponto D sobre $\overrightarrow{F_1X}$, de forma que D esteja entre F_1 e X e $\overline{DX} = r'$, onde r' é o raio de C' . Seja P o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{F_1X}$ com a mediatriz do segmento F_2D , onde F_2 é o centro de C' .

Considere a semirreta $\overrightarrow{PF_2}$. Seja Y o ponto de interseção da circunferência C' com $\overrightarrow{PF_2}$, onde F_2 está entre Y e P . Assim, pela nossa construção, temos

$$\begin{cases} \overline{PY} = \overline{PF_2} + \overline{F_2Y} = \overline{PF_2} + r' \\ \overline{PX} = \overline{PD} + \overline{DX} = \overline{PF_2} + r' . \end{cases}$$

Logo, é possível traçar uma circunferência C_1 com centro em P , que incide pelos pontos Y e X e tem raio de medida $\overline{PF_2} + r'$. Pela forma como foi construída, a circunferência C_1 é tangente internamente à C' , já que os pontos P , F_2 e Y são colineares. De forma análoga, C_1 é tangente internamente à C , pois P , F_1 e X estão alinhados. Além disso, temos

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = r - \overline{PX} + \overline{PY} - r' = r - r' .$$

Assim, a soma das distâncias do ponto P aos pontos F_1 e F_2 é constante. Portanto, temos uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r - r'$. \square

Proposição 5.2. *O lugar geométrico dos centros P das circunferências C_2 tangentes internamente à C e externamente à C' , respectivamente, é uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r + r'$.*

Demonstração. Considere a semirreta $\overrightarrow{F_1X}$, onde $X \in C$ e F_1 é o centro de C (ver Figura 57b). Tome um ponto D sobre $\overrightarrow{F_1X}$, de forma que X esteja entre F_1 e D e $\overline{XD} = r'$, onde r' é o raio de C' . Seja P o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{F_1X}$ com a mediatriz do segmento F_2D , onde F_2 é o centro de C' .

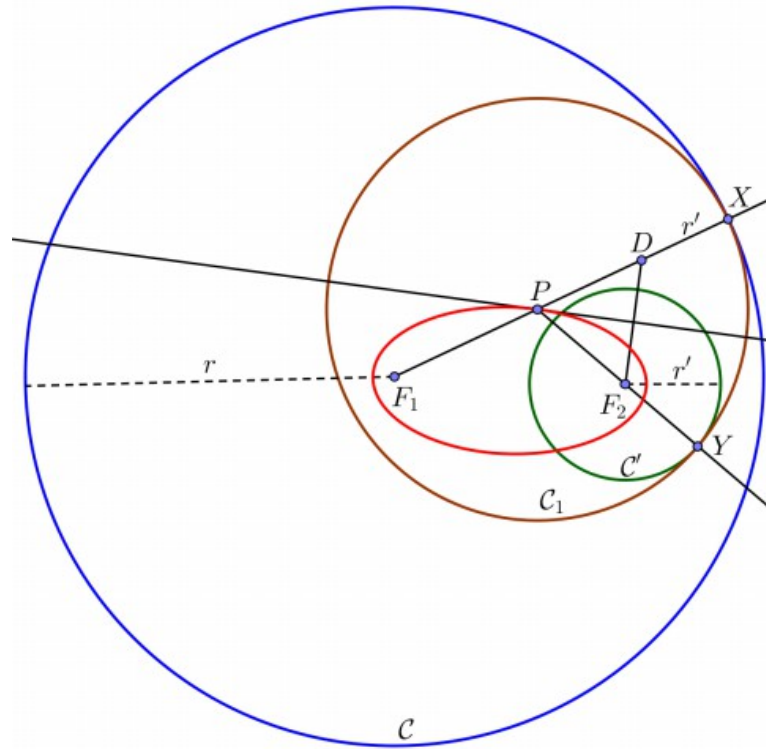
Seja Y o ponto de interseção da circunferência C' com a semirreta $\overrightarrow{PF_2}$, onde Y está entre F_2 e P . Assim,

$$\begin{cases} \overline{PY} = \overline{PF_2} - \overline{YF_2} = \overline{PF_2} - r' \\ \overline{PX} = \overline{PD} - \overline{XD} = \overline{PF_2} - r' . \end{cases}$$

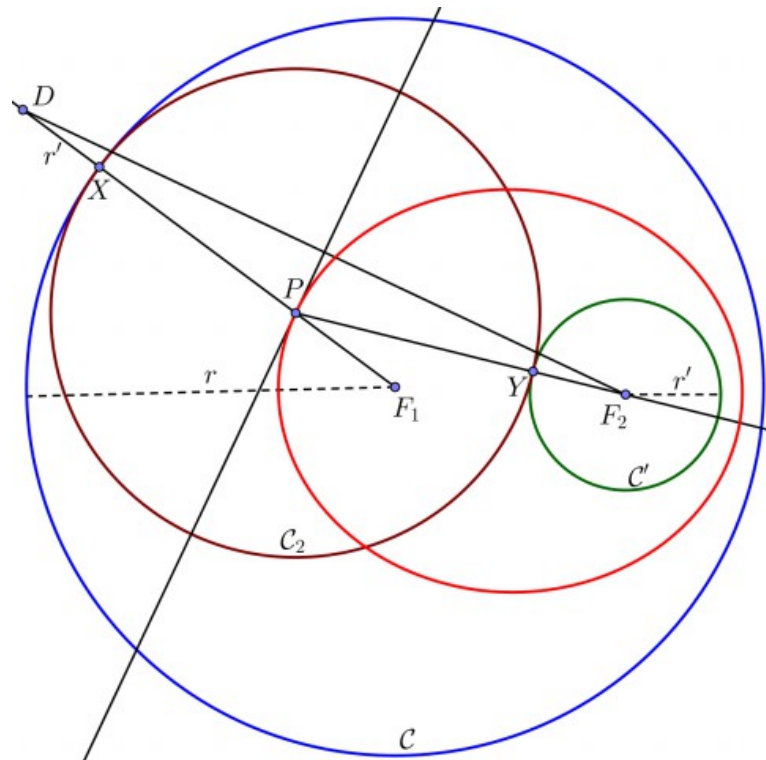
Portanto, existe uma circunferência C_2 com centro em P , que incide pelos pontos Y e X e tem raio de medida $\overline{PF_2} - r'$. Além disso, C_2 é tangente externamente à C' , pois os

Figura 57 – Circunferências diretrizes da elipse

(a) C_1 tangente internamente à C e C'



(b) C_2 tangente interna e externamente à C e C' , respectivamente



Fonte: Elaborada pelo autor

pontos P, Y e F_2 são colineares, e também é tangente internamente à C , pois F_1, P e X estão alinhados. Além disso, temos

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = r - \overline{PX} + \overline{PY} + r' = r + r',$$

que representa uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r + r'$. \square

As circunferências C e C' são chamadas de circunferências diretrizes da elipse.

Pode-se mostrar que os resultados das Proposições 5.1 e 5.2 continuam válidos mesmo no caso em que a circunferência diretriz C' tem raio nulo, ou seja, que o ponto F_2 é uma circunferência degenerada.

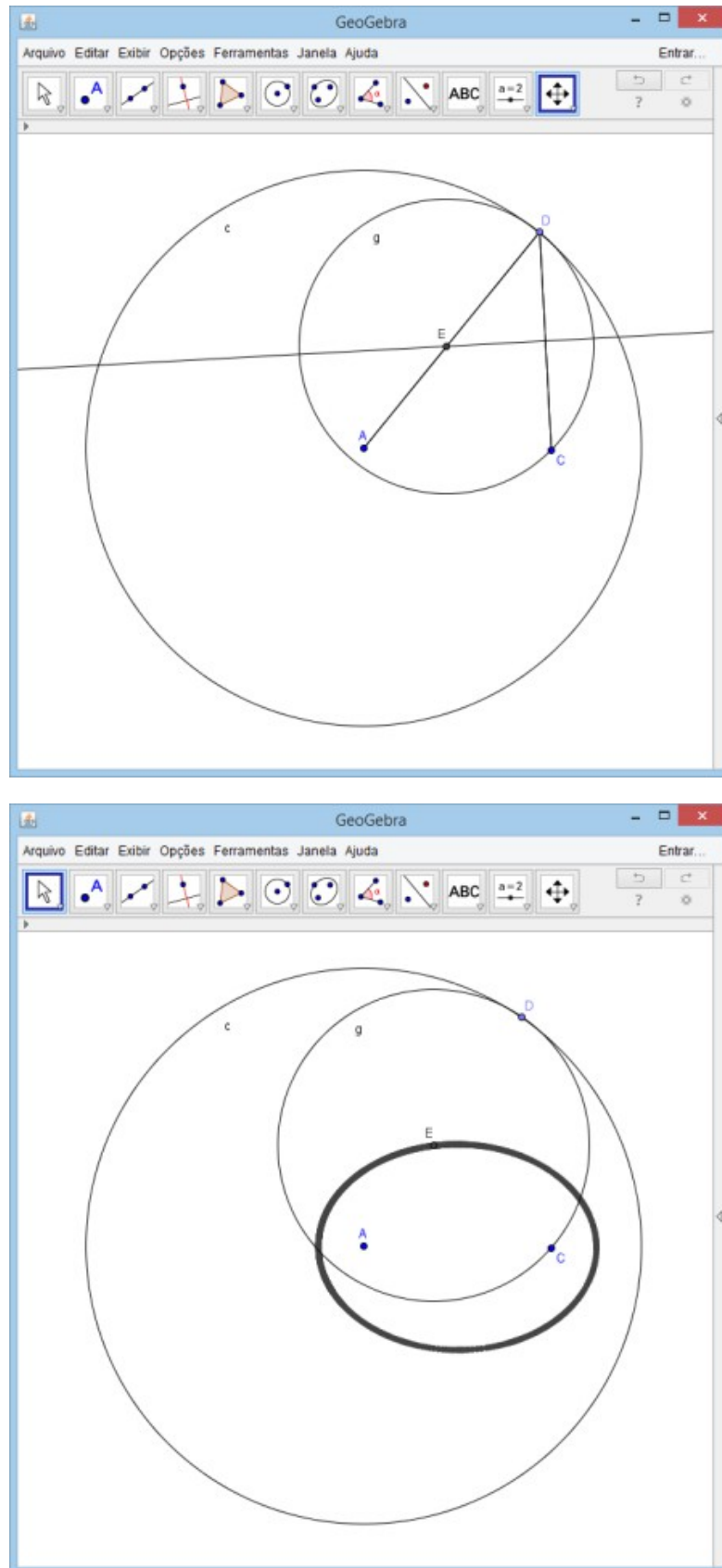
Corolário 5.1. *Sejam C uma circunferência com centro F_1 e raio igual a $2a$ e F_2 um ponto interno à C . O lugar geométrico dos centros P das circunferências C_1 tangentes à C e que incidem pelo ponto F_2 é uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $2a$.*

Agora construiremos no *Geogebra* uma elipse que tem uma circunferência diretriz degenerada. Para isso descreveremos cada etapa do processo de construção, bem como os botões do programa utilizados durante a execução de cada passo. Caso surja dúvidas quanto a utilização de algum botão do *Geogebra*, basta posicionar o cursor do *mouse* sobre esse botão, sem clicar nele, que irá aparecer uma caixa de diálogo ensinando como usá-lo.

Descrição dos passos

1. Com o botão "*Círculo dados centro e um dos pontos*" construa uma circunferência c com centro A e raio AB qualquer. Essa é a circunferência diretriz da elipse que construiremos. Em seguida oculte o ponto B sobre a circunferência, para isso clique com a botão direito do *mouse* sobre o ponto e desmarque a opção "*Exibir objeto*".
2. Com o botão "*Ponto*" marque um ponto C interior à circunferência c e um ponto D sobre c .
3. Com o botão "*Segmento*" trace os segmentos AD e CD .
4. Com o botão "*Mediatriz*" trace a mediatriz do segmento CD .
5. Com o botão "*Interseção de dois objetos*" encontre o ponto E de interseção do segmento AD com a mediatriz do segmento CD .
6. Novamente com o botão "*Círculo dados centro e um dos pontos*" construa uma circunferência g com centro em E e raio EC . Para melhorar a visualização, oculte o segmento AD , o segmento CD e sua mediatriz.

Figura 58 – Construção de uma elipse usando as circunferências tangentes



Fonte: Elaborada pelo autor

7. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto E e quando surgir uma janela, marque a opção "*Habilitar rastro*".
8. Com o botão "*Mover*" clique, segure e mova o ponto D sobre a circunferência c . O rastro deixado pelo ponto E formará uma elipse com focos A e C e eixo focal de medida igual ao raio da circunferência diretriz.
9. É possível visualizar a elipse sem usar o rastro. Com botão "*Lugar geométrico*", clique primeiro no ponto E depois no ponto D . Assim, surgirá a elipse formada pelo rastro.

5.2.2 Método das tangentes envoltórias – Elipse

De acordo com o Corolário 5.1, se X é o ponto de interseção entre as circunferências C e C_1 então o ponto P será a interseção do segmento F_1X com a mediatriz do segmento F_2X .

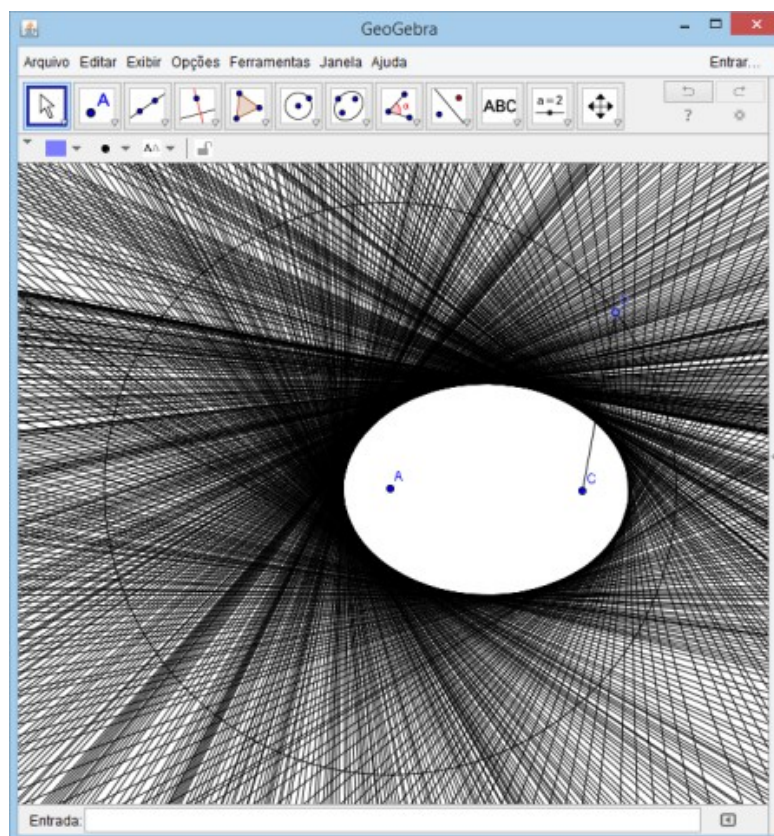
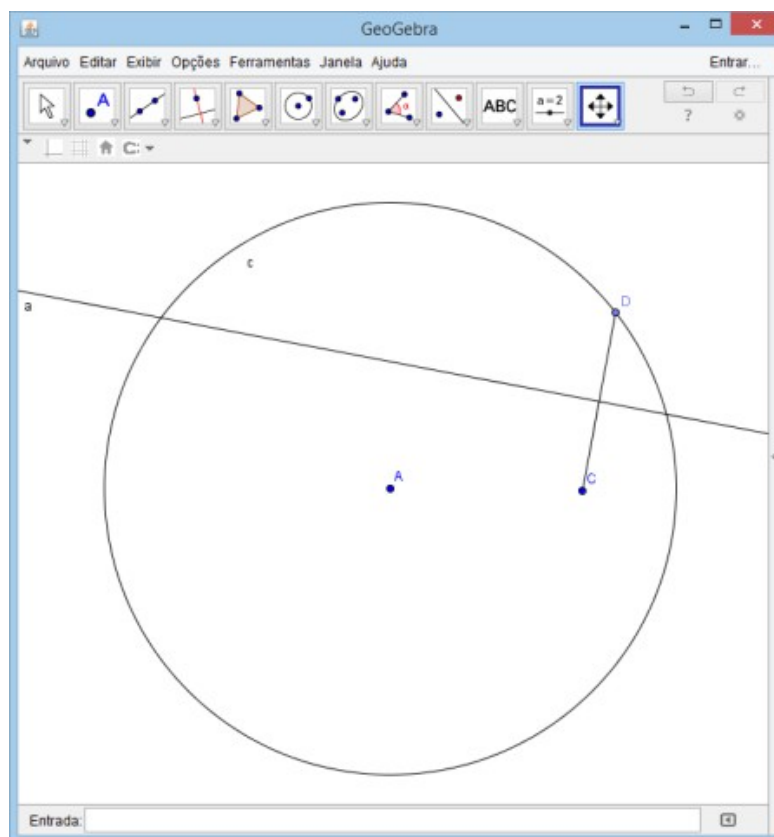
É fácil ver que a mediatriz do segmento F_2X também é bissetriz do ângulo $\widehat{F_2PX}$, pois o triângulo F_2PX é isósceles e $\overline{PX} = \overline{PF_2}$. Assim, pela Proposição 4.2, a mediatriz do segmento F_2X é a reta tangente à elipse que em P . Logo, para cada ponto X de C podemos obter uma reta tangente à elipse que corresponde à mediatriz do segmento F_2X .

Isso nos fornece outro método para construir uma elipse, através de suas tangentes envoltórias. Mais uma vez utilizaremos o *Geogebra* nessa construção.

Descrição dos passos

1. Com o botão "*Círculo dados centro e um dos pontos*" construa uma circunferência c com centro A e raio AB qualquer. Em seguida oculte o ponto B sobre a circunferência.
2. Com o botão "*Ponto*" marque um ponto C interior à circunferência c e um ponto D sobre c .
3. Com o botão "*Segmento*" trace o segmento CD .
4. Com o botão "*Mediatriz*" trace a mediatriz do segmento CD .
5. Com o botão direito do *mouse* clique sobre a mediatriz do segmento CD e marque a opção "*Habilitar rastro*".
6. Com o botão "*Mover*" clique, segure e mova o ponto D sobre a circunferência c . O rastro deixado pela mediatriz do segmento CD envolverá uma elipse com focos A e C e eixo focal de medida igual ao raio da circunferência.

Figura 59 – Construção de uma elipse usando as tangentes envoltórias

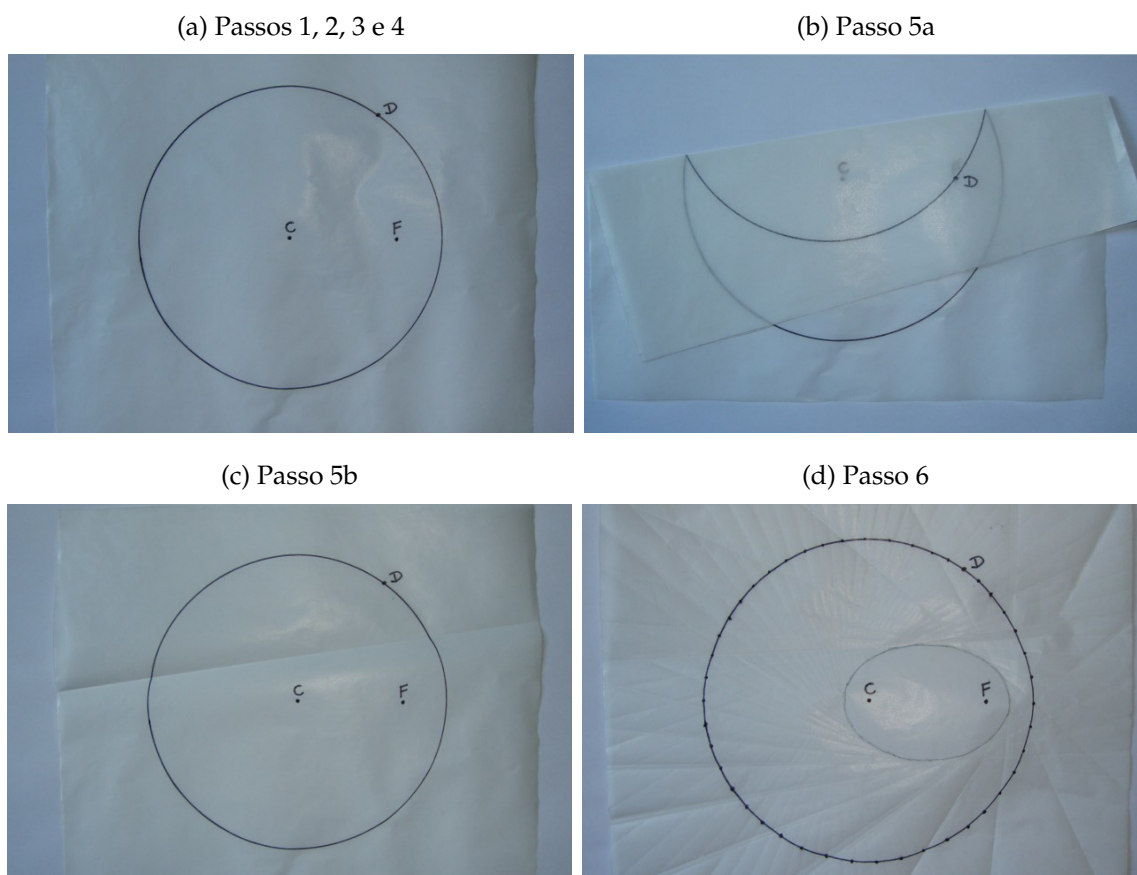


Fonte: Elaborada pelo autor

5.2.3 Dobraduras de papel – Elipse

A construção de uma elipse pelo método das tangentes envoltórias, pode ser feita na prática através de dobraduras de papel. A seguir, é dada a lista de materiais necessários e a descrição dos passos da construção.

Figura 60 – Construção de uma elipse através de dobraduras de papel



Fonte: Fotos tiradas pelo autor

Materiais necessários

- Uma caneta ou lápis.
- Uma folha de papel vegetal A4.
- Um compasso ou um objeto de forma circular, como por exemplo um CD.

Descrição dos passos

1. Marque um ponto C aproximadamente no centro da folha de papel.
2. Com auxílio do compasso, desenhe uma circunferência com centro em C cujo diâmetro não ultrapasse o tamanho do papel.

3. Marque um ponto F no região interior da circunferência com $F \neq C$.
4. Escolha um ponto D qualquer sobre a circunferência.
5. Dobre o papel de modo que o ponto D coincida com o ponto F . Certifique-se de que a dobra fique bem marcada no papel e, em seguida desdobre a papel.
6. Repita a operação do item anterior para outros pontos diferentes sobre a circunferência. Dessa forma, as dobras formaram o desenho de uma elipse com focos C e F . As dobras no papel correspondem as tangentes da elipse, e quanto mais dobras o papel tiver melhor será o desenho da elipse.

5.2.4 Método das circunferências concêntricas – Elipse

Proposição 5.3. *Sejam F_1 e F_2 pontos do plano, onde $d(F_1, F_2) = 2c$. O lugar geométrico dos pontos P da interseção das circunferências C_1 com centro F_1 e raio r_1 com as circunferências C_2 com centro F_2 e raio $r_2 = 2a - r_1$, é uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $2a$, com $a > c$.*

Demonstração. Seja P um dos pontos da interseção de C_1 com C_2 . Assim,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = r_1 + r_2 = r_1 + (2a - r_1) = 2a.$$

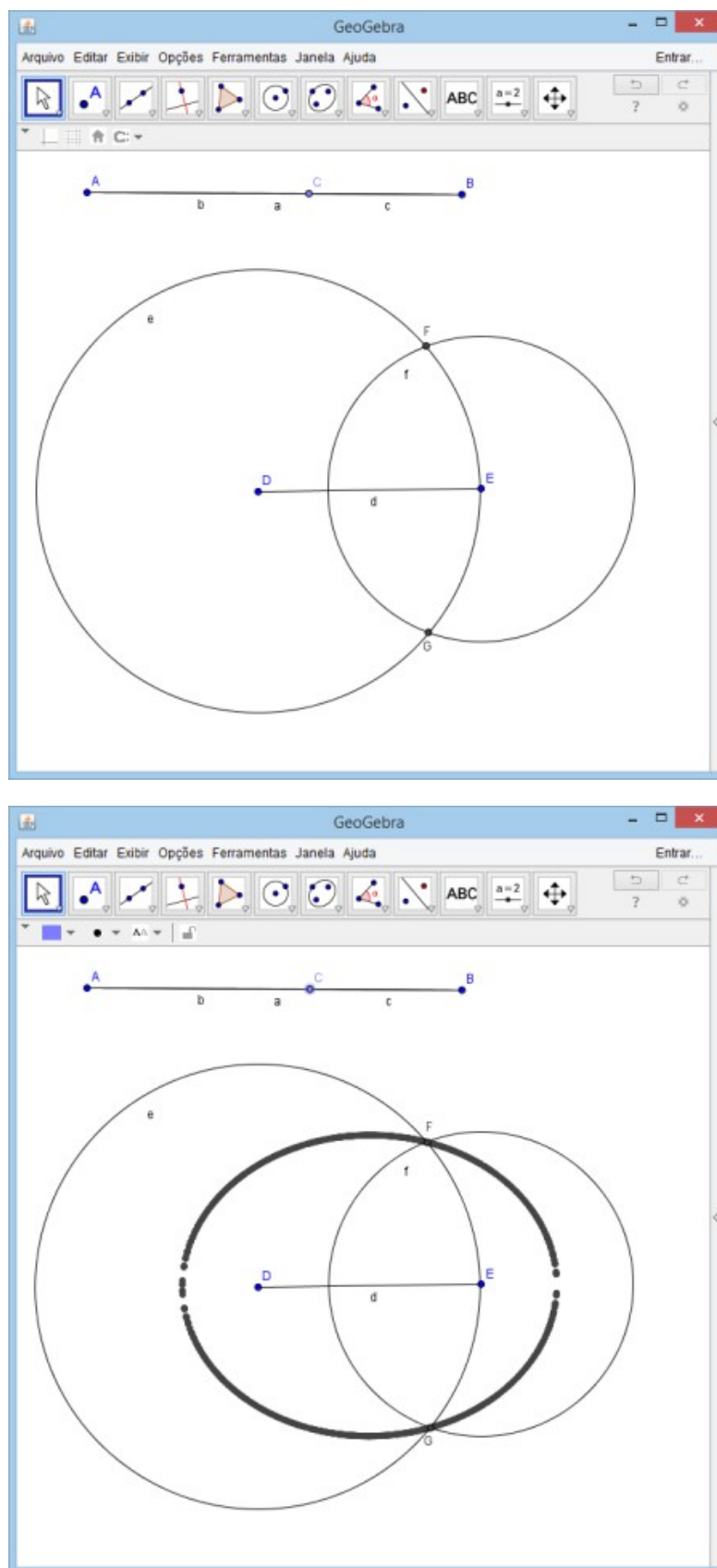
Portanto, os pontos P formam uma elipse com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $2a$. \square

Vamos construir uma elipse no *Geogebra* usando esse método.

Descrição dos passos

1. Com o botão "Segmento" construa o segmento AB no canto superior do plano.
2. Com o botão "Ponto" marque um ponto C sobre o segmento AB .
3. Novamente com o botão "Segmento" construa sobre o segmento AB dois segmentos: AC e CB . Construa também um segmento DE no centro do plano, com $\overline{DE} < \overline{AB}$. Para ver o tamanho dos segmentos use a "Janela de álgebra". Para isso, no botão *Exibir* marque a opção "Janela de álgebra" ou através do atalho "Ctrl+Shift+a".
4. Com o botão "Círculo dados centro e raio" clique sobre o ponto D e surgirá uma janela pedindo a medida raio, nela digite a letra que representa o segmento AC . Assim será criada uma circunferência com centro em D e raio igual a medida do segmento AC . Da mesmo modo, construa uma circunferência com centro em E e raio igual a \overline{CB} .
5. Com o botão "Interseção de dois objetos" clique nas duas circunferências e surgirão os pontos de interseção F e G .

Figura 61 – Construção de uma elipse usando as circunferências concêntricas



Fonte: Elaborada pelo autor

6. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto F e quando surgir uma janela, marque a opção "*Habilitar rastro*". Faça o mesmo com o ponto G .
7. Com o botão "*Mover*" clique, segure e mova o ponto C sobre o segmento AB . O rastro deixado pelos pontos F e G formarão uma elipse com focos D e E e eixo focal de medida igual ao comprimento do segmento AB .
8. É possível visualizar a elipse sem usar o rastro. Com botão "*Lugar geométrico*", clique primeiro no ponto F depois no ponto C . Faça o mesmo com os pontos G e C , nessa ordem. Assim aparecerá a elipse formada pelo rastro.

5.2.5 Método do jardineiro – Elipse

Vimos que a elipse pode ser definida da maneira que segue:

Definição 5.2. *Elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante.*

A partir dessa definição, construiremos uma elipse utilizando um método de construção conhecido como *Método do jardineiro*, devido a sua simplicidade e praticidade. A seguir, é dada a lista de materiais necessários e a descrição dos passos.

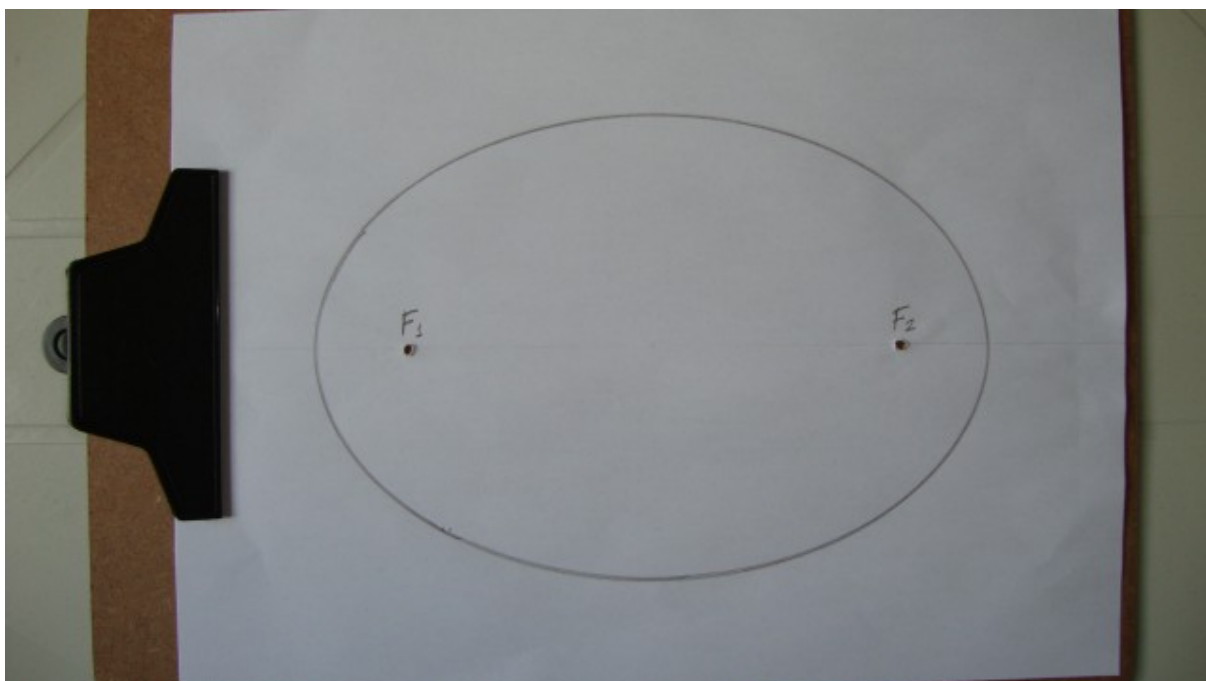
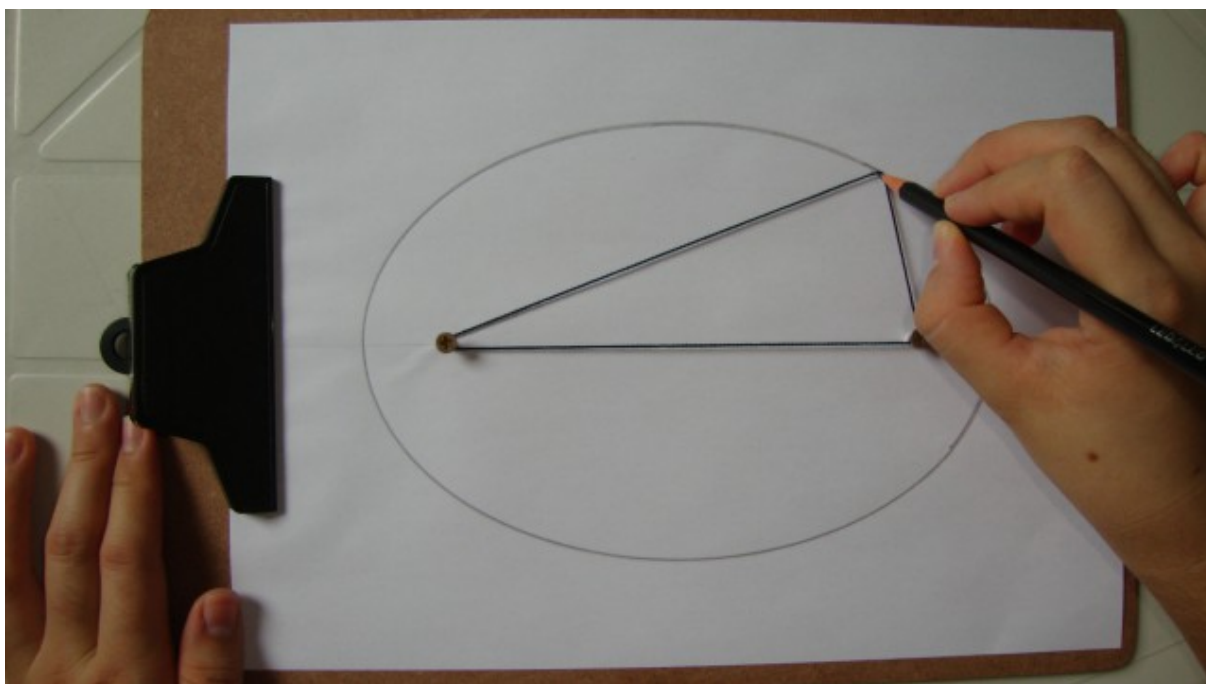
Materiais necessários

- Um lápis ou caneta.
- Uma prancheta de madeira tamanho A4.
- Uma folha de papel A4.
- Dois parafusos pequenos, ou dois pregos pequenos, ou duas tachinhas. Neste caso, usaremos parafusos.
- 40 cm de linha encerada ou linha 10.

Descrição dos passos

1. Prenda a folha de papel na prancheta. Marque os pontos F_1 e F_2 no papel distantes 15 cm um do outro e paralelos em relação a margem maior da folha. Para que o desenho fique bem centralizado no papel, os pontos devem ser simétricos em relação ao centro da folha.
2. Fixe um parafuso sobre cada um dos pontos.
3. Una as pontas da linha e amarre-as.
4. Passe a linha pelos parafusos e com a ponta do lápis estique a linha, de modo que forme um triângulo qualquer.

Figura 62 – Construção de uma elipse através do método do jardineiro



Fonte: Fotos tiradas pelo autor

5. Movimente o lápis em torno dos pontos sempre mantendo a linha esticada. Quando a ponta do lápis voltar a posição inicial, teremos o desenho de uma elipse. Se variarmos a distância entre os pontos ou o comprimento da linha, obteremos outras elipses.

5.2.6 Método das circunferências deslizantes – Elipse

Seja xOy um sistema de coordenadas cartesianas. Tome um ponto D pertence ao eixo Ox , com $D \neq O$. Sejam C_1 e C_2 circunferências com centro D e raio r_1 e com centro D e raio r_2 , respectivamente, com $r_2 < r_1$. Faremos o ponto D se mover sobre o eixo Ox de forma que a interseção de C_1 com o eixo Oy é sempre não vazia. Sejam E_1 e E_2 os pontos da interseção de C_1 com o eixo Oy , onde E_1 pertence a semirreta positiva do eixo Oy e E_2 pertence a semirreta negativa do eixo Oy . Os segmentos DE_1 e DE_2 intersectam a circunferência C_2 nos pontos P_1 e P_2 , respectivamente (ver Figura 63). Nessas condições, enunciaremos o resultado que segue.

Proposição 5.4. *O lugar geométrico dos pontos P_1 e P_2 é*

- *uma elipse com centro na origem, eixo focal coincidente com o eixo Ox , com focos $F_1(-\sqrt{(r_1 - r_2)^2 - r_2^2}, 0)$ e $F_2(\sqrt{(r_1 - r_2)^2 - r_2^2}, 0)$ e eixo focal de medida $2(r_1 - r_2)$, se $r_1 > 2r_2$;*
- *uma elipse com centro na origem, eixo focal coincidente com o eixo Oy , com focos $F_1(0, -\sqrt{r_2^2 - (r_1 - r_2)^2})$ e $F_2(0, \sqrt{r_2^2 - (r_1 - r_2)^2})$ e eixo focal de medida $2r_2$, se $r_2 < r_1 < 2r_2$;*
- *uma circunferência com centro na origem e raio r_2 , se $r_1 = 2r_2$.*

Demonstração. Considere os pontos $P_1(x_1, y_1)$, $R(0, y_1)$ e $Q(x_1, 0)$. Podemos ver na Figura 63, que os triângulos P_1RE_1 e DQP_1 são retângulos. No triângulo P_1RE_1 , pelas relações trigonométricas, tem-se

$$\cos \theta = \frac{\overline{P_1R}}{\overline{P_1E_1}} = \frac{x_1}{r_1 - r_2}.$$

No triângulo DQP_1 , de forma análoga, tem-se

$$\sen \theta = \frac{\overline{P_1Q}}{\overline{DP_1}} = \frac{y_1}{r_2}.$$

Pela relação fundamental da trigonometria temos

$$\cos^2 \theta + \sen^2 \theta = 1 \implies \left(\frac{x_1}{r_1 - r_2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{r_2}\right)^2 = 1 \implies \frac{x_1^2}{(r_1 - r_2)^2} + \frac{y_1^2}{r_2^2} = 1. \quad (5.1)$$

Assim, se $r_1 > 2r_2$ então $r_1 - r_2 > r_2$. Logo, a equação 5.1 representa uma parte da elipse com centro na origem e eixo focal coincidente com o eixo Ox , onde $a = r_1 - r_2$ e $b = r_2$. Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos que as coordenadas dos focos da elipse são $F_1(-\sqrt{(r_1 - r_2)^2 - r_2^2}, 0)$ e $F_2(\sqrt{(r_1 - r_2)^2 - r_2^2}, 0)$.

Se $r_2 < r_1 < 2r_2$ então $r_1 - r_2 < r_2$. Logo, a equação 5.1 representa uma parte da elipse com centro na origem e eixo focal coincidente com o eixo Oy , onde $b = r_1 - r_2$ e $a = r_2$. As coordenadas dos focos da elipse são $F_1(0, -\sqrt{r_2^2 - (r_1 - r_2)^2})$ e $F_2(0, \sqrt{r_2^2 - (r_1 - r_2)^2})$.

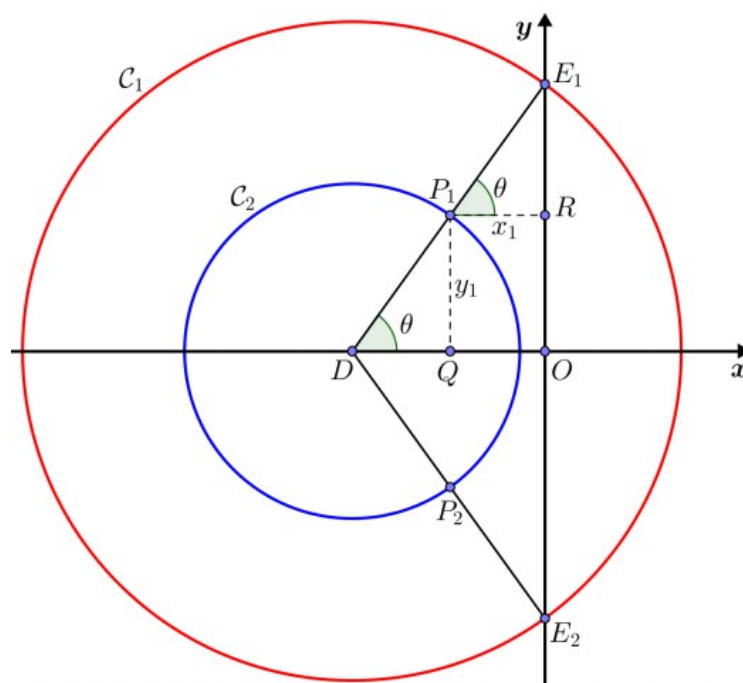
Se $r_1 = 2r_2$ então $r_1 - r_2 = r_2$. Logo, a equação 5.1 pode ser escrita na forma

$$x_1^2 + y_1^2 = r_2^2$$

que representa uma parte da circunferência com centro na origem e raio r_2 .

Fazendo o mesmo com o ponto P_2 obtemos as outras partes das elipses e circunferência. □

Figura 63 – Demonstração da Proposição 5.4



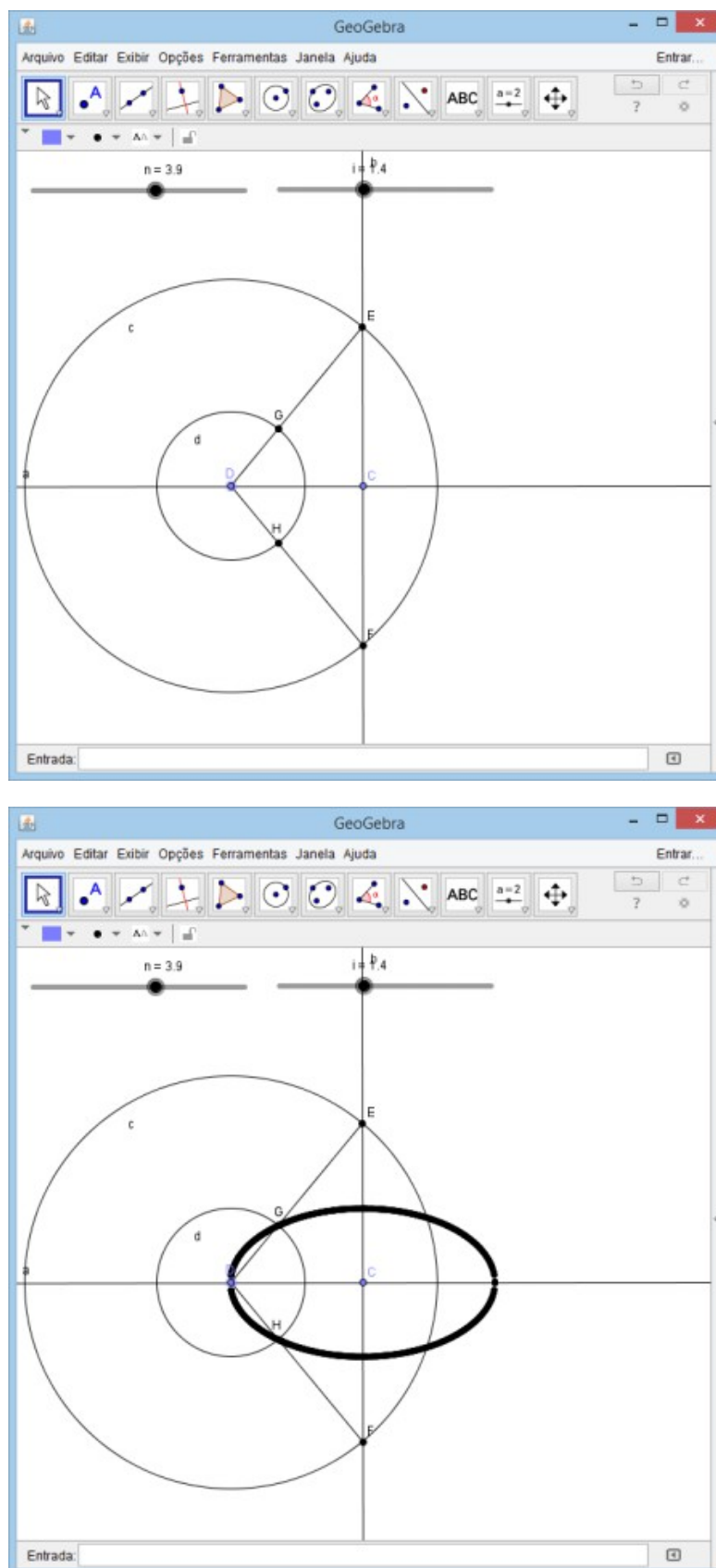
Fonte: Elaborada pelo autor

Com base na Proposição 5.4, construiremos uma elipse usando o *Geogebra*.

Descrição dos Passos

1. Com o botão "Régua" trace uma reta a horizontal. Em seguida oculte os pontos da reta.
2. Com o botão "Ponto" marque os pontos C e D sobre a reta.
3. Com o botão "Reta perpendicular" trace uma reta b perpendicular a reta a que passa pelo ponto C .
4. Com o botão "Controle deslizante" construa no topo do plano o controle deslizante n , onde deve-se marcar a opção "inteiro", preencher $min = 2$, $max = 6$ e

Figura 64 – Construção de uma elipse usando as circunferências deslizantes



Fonte: Elaborada pelo autor

$incremento = 0.1$. Construa também o controle deslizante i , onde deve-se marcar a opção "inteiro", preencher $min = 0$, $max = 2$ e $incremento = 0.1$.

5. Com o botão "Círculo dados centro e raio" construa a circunferência c com centro em D e raio igual ao controle deslizante n . Também construa a circunferência d com centro em D e raio igual ao controle deslizante i .
6. Com o botão "Mover" mova o ponto D sobre a reta a até a circunferência intersectar a reta perpendicular.
7. Com o botão "Interseção entre dois objetos" marque os pontos E e F de interseção da circunferência maior com a reta perpendicular.
8. Com o botão "Segmento" trace os segmentos DE e DF .
9. Novamente com o botão "Interseção entre dois objetos" marque os pontos G e H de interseção da circunferência menor com os segmentos DE e DF .
10. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto G e marque a opção "Habilitar rastro". Faça o mesmo com o ponto H .
11. Com o botão "Mover" clique, segure e mova o ponto D sobre a reta horizontal, de forma que sejam obtidas todas as interseções possíveis da circunferência maior com a reta perpendicular. Os rastros deixados pelos pontos G e H formarão uma elipse.
12. É possível visualizar a hipérbole sem usar o rastro. Com botão "Lugar geométrico", clique primeiro no ponto G depois no ponto D . Faça o mesmo com os pontos H e D , nessa ordem. Assim surgirá a elipse formada pelos rastros.
13. Use os controles deslizantes para obter outras elipses.

5.3 Construindo hipérbolas

Nesta seção, veremos alguns métodos para construir hipérbolas.

5.3.1 Método das circunferências tangentes – Hipérbole

Considere uma circunferência C com centro no ponto F_1 e raio r e seja F_2 um ponto pertencente à região exterior de C . Seja a circunferência C' com centro no ponto F_2 e raio r' , com $r' < r$.

Nas proposições que se seguem, consideraremos o caso em que a interseção entre as circunferências C e C' é vazia.

Proposição 5.5. *O lugar geométrico dos centros P_1 das circunferências C_1 tangentes internamente a C e C' , é um ramo de uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r - r'$. O outro ramo da hipérbole é o lugar geométrico dos centros P_2 das circunferências C_2 tangentes externamente à C e C' .*

Demonstração. Considere a semirreta $\overrightarrow{XF_1}$, onde $X \in C$ e F_1 é o centro de C (ver Figura 65a). Tome um ponto D sobre $\overrightarrow{XF_1}$, tal que D está entre F_1 e X e $\overline{DX} = r'$, onde r' é o raio de C' . Seja P_1 o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{XF_1}$ com a mediatriz do segmento F_2D , sendo F_2 o centro de C' .

Considere a semirreta $\overrightarrow{P_1F_2}$. Seja Y o ponto de interseção da circunferência C' com $\overrightarrow{P_1F_2}$, onde F_2 está entre Y e P_1 . Assim,

$$\begin{cases} \overline{P_1Y} = \overline{P_1F_2} + \overline{F_2Y} = \overline{P_1F_2} + r' \\ \overline{P_1X} = \overline{P_1D} + \overline{DX} = \overline{P_1F_2} + r' . \end{cases}$$

Logo, é possível traçar uma circunferência C_1 com centro em P_1 , que incide pelos pontos Y e X e tem raio de medida $\overline{P_1F_2} + r'$. Temos que C_1 é tangente internamente à C' , já que os pontos P_1, F_2 e Y são colineares e também é tangente internamente à C , pois P_1, F_1 e X são colineares. Além disso, temos

$$\overline{P_1F_2} - \overline{P_1F_1} = \overline{P_1Y} - \overline{F_2Y} - (\overline{P_1X} - \overline{F_1X}) = r - r' .$$

Assim, a diferença das distâncias do ponto P_1 ao pontos F_2 e F_1 , respectivamente, é constante. Portanto, trata-se de um ramo de uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r - r'$.

Agora considere a semirreta $\overrightarrow{F_1X'}$, com $X' \in C$ (ver Figura 65b). Tome um ponto D' sobre a semirreta $\overrightarrow{F_1X'}$, tal que D' está entre F_1 e X' e $\overline{D'X'} = r'$. Seja P_2 o ponto de interseção entre $\overrightarrow{F_1X'}$ e a mediatriz do segmento F_2D' .

Considere a semirreta $\overrightarrow{P_2F_2}$. Seja Y' o ponto de interseção da circunferência C' com $\overrightarrow{P_2F_2}$, onde Y' está entre F_2 e P_2 . Assim,

$$\begin{cases} \overline{P_2Y'} = \overline{P_2F_2} - \overline{F_2Y'} = \overline{P_2F_2} - r' \\ \overline{P_2X'} = \overline{P_2D'} - \overline{D'X'} = \overline{P_2F_2} - r' . \end{cases}$$

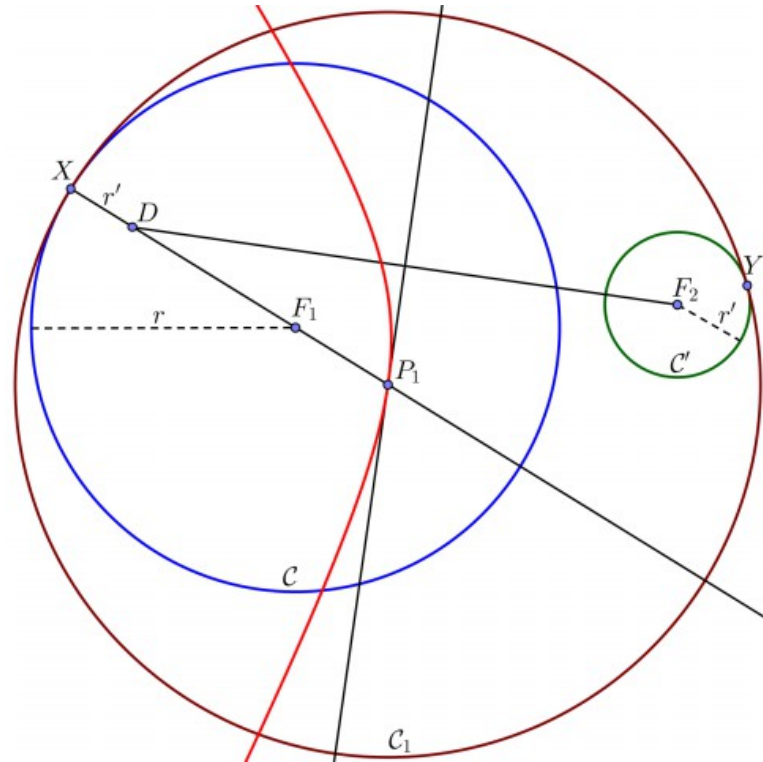
Perceba que é possível traçar uma circunferência C_2 com centro em P_2 , que incide pelos pontos Y' e X' e tem raio de medida $\overline{P_2F_2} - r'$. Temos que C_2 é tangente externamente à C' , já que os pontos P_2, Y' e F_2 são colineares e também é tangente externamente à C , pois P_2, X' e F_1 são colineares. Logo,

$$\overline{P_2F_1} - \overline{P_2F_2} = \overline{P_2X'} + \overline{X'F_1} - (\overline{P_2Y'} + \overline{Y'F_2}) = r - r' ,$$

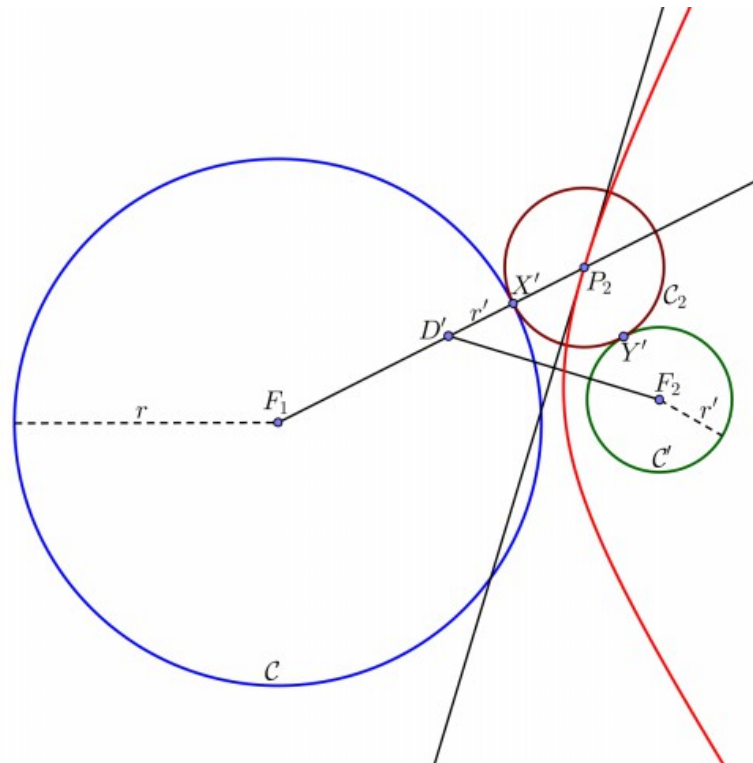
que representa o outro ramo da hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r - r'$. \square

Figura 65 – Circunferências diretrizes da hipérbole de eixo focal de medida $r - r'$

(a) C_1 tangente internamente à C e C'



(b) C_2 tangente externamente à C e C'



Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 5.6. *O lugar geométrico dos centros P_1 das circunferências C_1 tangentes internamente à C e externamente à C' , respectivamente, é um ramo de uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r + r'$. O outro ramo da hipérbole é o lugar geométrico dos centros P_2 das circunferências C_2 tangentes externamente à C e internamente à C' , respectivamente.*

Demonstração. Considere um ponto X pertencente a C . Seja l a reta que passa por X e F_1 , onde F_1 é o centro de C (ver Figura 66a). Tome um ponto D sobre l , de forma que X está entre F_1 e D e $\overline{XD} = r'$, onde r' é o raio de C' .

Considere a semirreta $\overrightarrow{XF_1}$. Seja P_1 o ponto de interseção de $\overrightarrow{XF_1}$ com a mediatriz do segmento F_2D , onde F_2 é o centro de C' .

Seja Y o ponto de interseção da circunferência C' com a semirreta $\overrightarrow{P_2F_1}$, onde Y está entre P_1 e F_2 . Assim,

$$\begin{cases} \overline{P_1Y} = \overline{P_1F_2} - \overline{YF_2} = \overline{P_1F_2} - r' \\ \overline{P_1X} = \overline{P_1D} - \overline{XD} = \overline{PF_2} - r'. \end{cases}$$

Logo, existe uma circunferência C_1 com centro em P_1 , que incide pelos pontos Y e X e tem raio de medida $\overline{PF_2} - r'$. Além disso, C_1 é tangente externamente à C' , pois os pontos P_1, Y e F_2 são colineares, e também é tangente internamente à C , pois P_1, F_1 e X estão alinhados. Além disso, temos

$$\overline{P_1F_2} - \overline{P_1F_1} = \overline{P_1Y} + \overline{YF_2} - (\overline{P_1X} - \overline{XF_1}) = r' - \overline{PX} + \overline{PY} + r = r + r',$$

ou seja, a diferença das distâncias do ponto P_1 ao pontos F_2 e F_1 , respectivamente, é constante. Portanto, trata-se de um ramo de uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r + r'$.

Agora considere a semirreta $\overrightarrow{F_1X'}$, com $X' \in C$ (ver Figura 66b). Tome um ponto D' sobre $\overrightarrow{F_1X'}$, tal que X' está entre F_1 e D' e $\overline{D'X'} = r'$. Seja P_2 o ponto de interseção da semirreta $\overrightarrow{F_1X'}$ com a mediatriz do segmento F_2D' .

Considere a semirreta $\overrightarrow{P_2F_2}$. Seja Y' o ponto de interseção da circunferência C' com $\overrightarrow{P_2F_2}$, onde F_2 está entre Y' e P_2 . Assim,

$$\begin{cases} \overline{P_2Y'} = \overline{P_2F_2} + \overline{F_2Y'} = \overline{P_2F_2} + r' \\ \overline{P_1X'} = \overline{P_2D'} + \overline{D'X'} = \overline{P_2F_2} + r'. \end{cases}$$

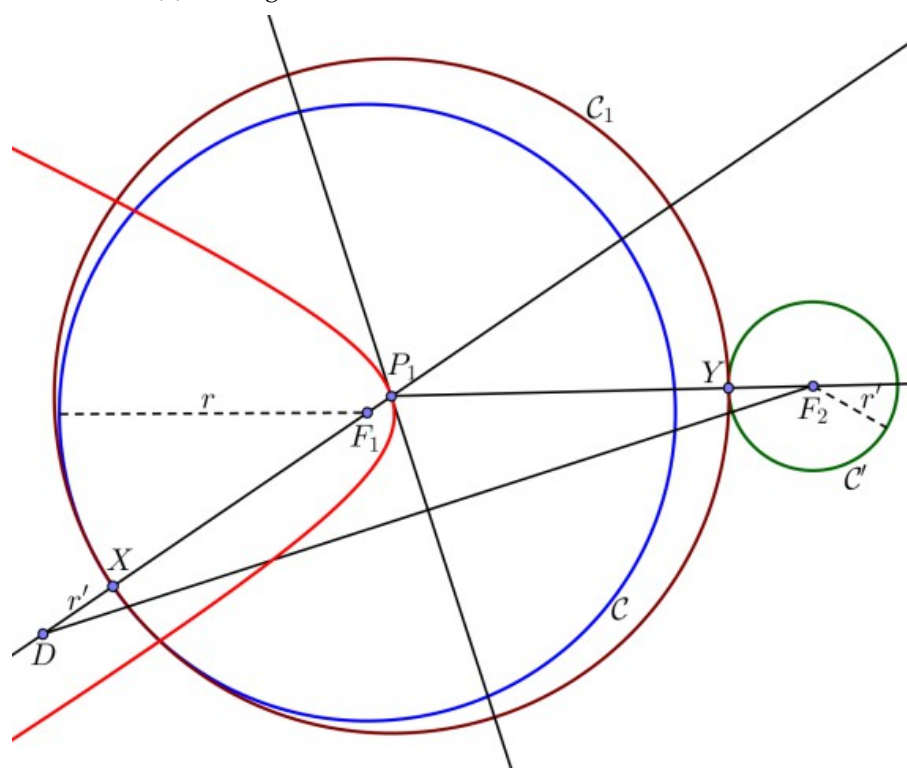
Note que é possível traçar uma circunferência C_2 com centro em P_2 , que incide pelos pontos Y' e X' e tem raio de medida $\overline{P_2F_2} + r'$. Temos que C_2 é tangente internamente à C' , já que os pontos P_2, F_2 e Y' são colineares e também é tangente externamente à C , pois P_2, X' e F_1 são colineares. Logo,

$$\overline{P_2F_1} - \overline{P_2F_2} = \overline{P_2X'} + \overline{X'F_1} - (\overline{P_2Y'} - \overline{Y'F_2}) = r + r',$$

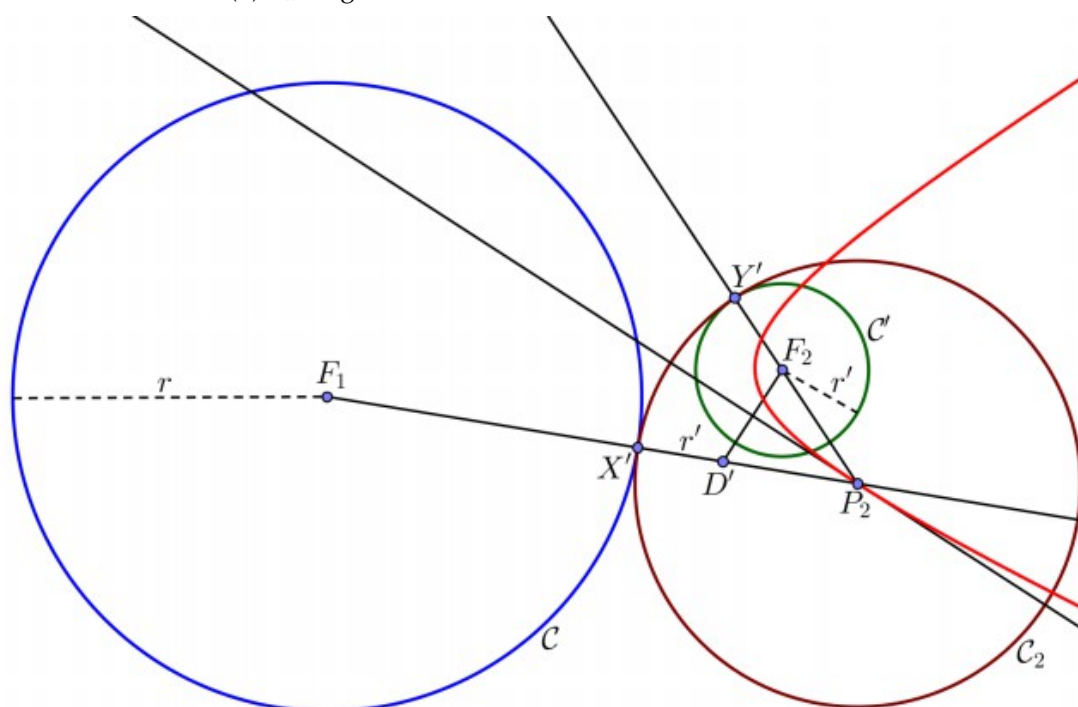
que representa o outro ramo da hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $r + r'$. \square

Figura 66 – Circunferências diretrizes da hipérbole de eixo focal de medida $r + r'$

(a) C_1 tangente internamente à C e externamente à C'



(b) C_2 tangente externamente à C e internamente à C'



Fonte: Elaborada pelo autor

As circunferências C e C' são denominadas de circunferências diretrizes da hipérbole.

Como no caso da elipse, prova-se que os resultados das Proposições 5.5 e 5.6 valem também para o caso em que a circunferência C' tem raio nulo.

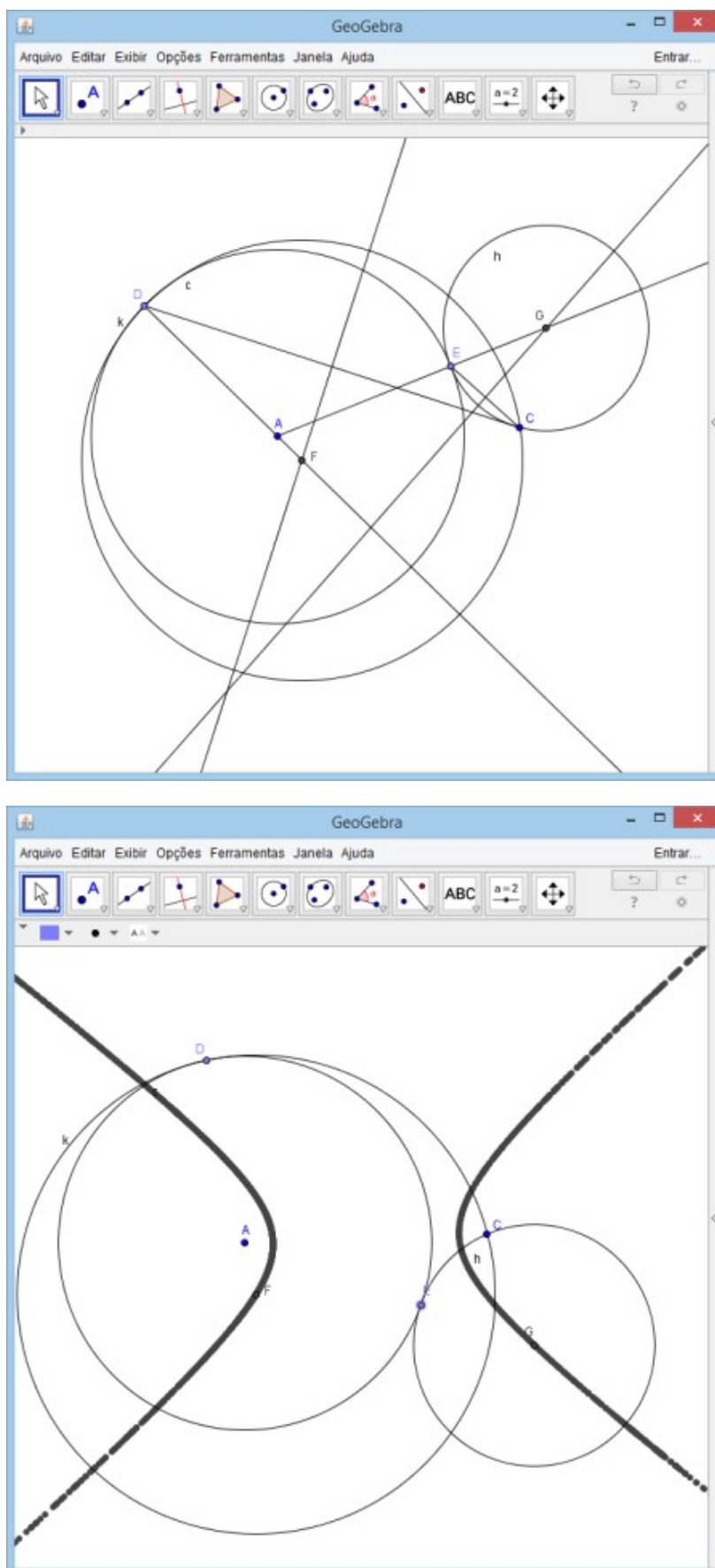
Corolário 5.2. *Sejam C uma circunferência com centro F_1 e raio igual a $2a$ e F_2 um ponto externo à C . O lugar geométrico dos centros P_1 e P_2 das circunferências C_1 e C_2 tangentes internamente (um ramo) e externamente (outro ramo) à C , respectivamente, e que incidem pelo ponto F_2 , é uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $2a$.*

Para exercitar, construiremos no *Geogebra* uma hipérbole com uma circunferência diretriz degenerada.

Descrição dos passos

1. Com o botão "Círculo dados o centro e um dos seus pontos" construa uma circunferência c com centro A e raio AB qualquer. Essa é a circunferência diretriz da hipérbole que construiremos. Em seguida oculte o ponto B .
2. Com o botão "Ponto" marque um ponto C exterior à circunferência c e os pontos D e E sobre c .
3. Com o botão "Segmento" trace os segmentos CD e CE .
4. Com o botão "Semirreta" trace as semirretas \overrightarrow{DA} e \overrightarrow{AE} .
5. Com o botão "Mediatriz" trace as mediatrizes dos segmentos CD e CE .
6. Com o botão "Interseção de dois objetos" encontre o ponto F de interseção da semirreta \overrightarrow{DA} com o segmento CD e o ponto G de interseção da semirreta \overrightarrow{AE} com o segmento CE .
7. Novamente com o botão "Círculo dados centro e um dos seus pontos" construa duas circunferências: uma com centro em F e raio FC ; outra com centro em G e raio GC . Para melhorar a visualização, oculte todos os objetos com exceção dos pontos e das circunferências.
8. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto F e marque a opção "Habilitar rastro". Faça o mesmo com o ponto G .
9. Com o botão "Mover" clique, segure e mova o ponto D sobre a circunferência, a qual ele pertence. O rastro deixado pelo ponto F formará um ramo da hipérbole. Faça o mesmo com o ponto E , onde o rastro deixado pelo ponto G formará o outro ramo da hipérbole.

Figura 67 – Construção de uma hipérbole usando as circunferências tangentes



Fonte: Elaborada pelo autor

10. É possível visualizar a hipérbole sem usar o rastro. Com botão "*Lugar geométrico*", clique primeiro no ponto F depois no ponto D . Faça o mesmo com os pontos G e E , nessa ordem. Assim surgirá a hipérbole formada pelo rastro.

5.3.2 Método das tangentes envoltórias – Hipérbole

De acordo com o Corolário 5.2, se X é o ponto de interseção entre as circunferências C e C_1 então o ponto P_1 será a interseção da semirreta $\overrightarrow{XF_1}$ com a mediatriz do segmento F_2X .

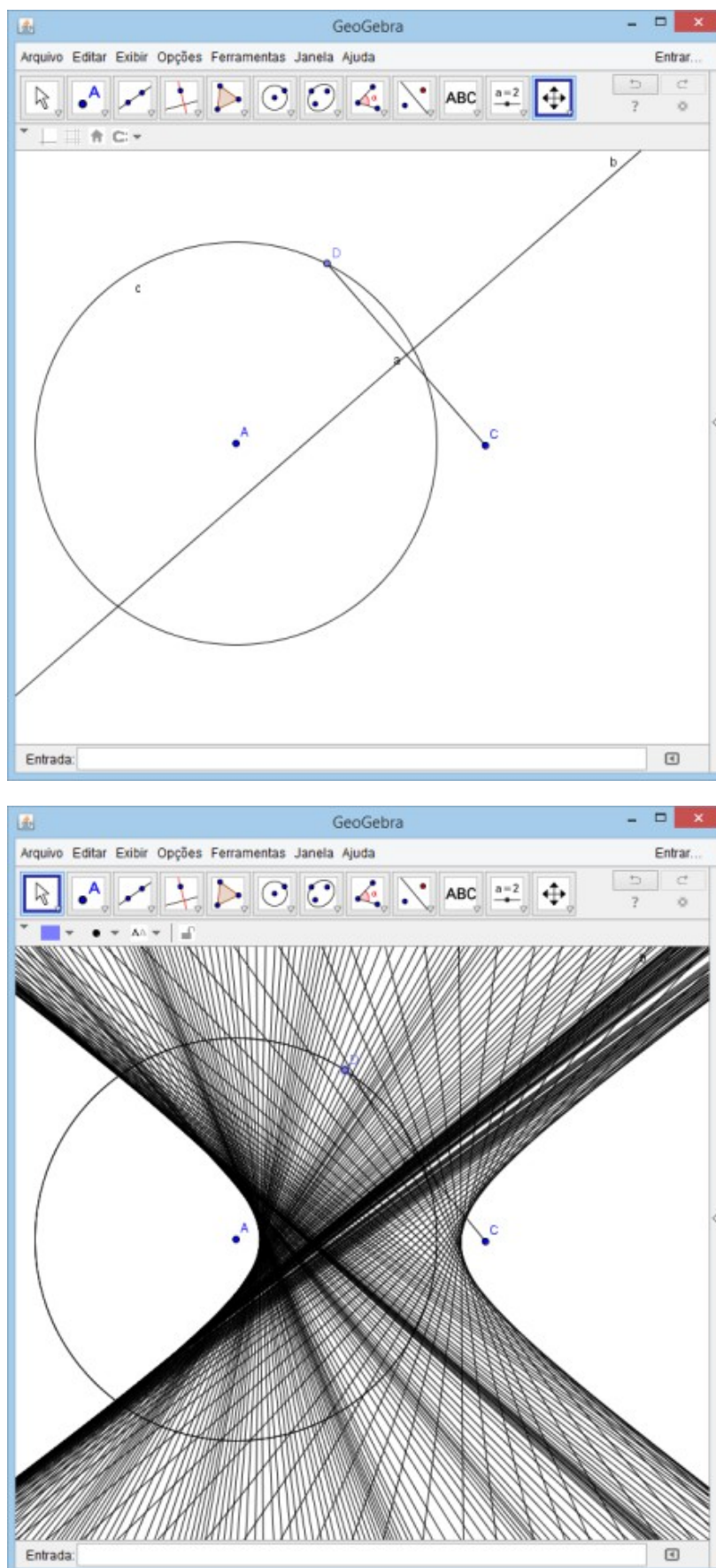
Tem-se que a mediatriz do segmento F_2X é bissetriz do ângulo $\widehat{F_2P_1X}$, pois o triângulo F_2P_1X é isósceles e $\overline{P_1X} = \overline{P_1F_2}$. Assim, pela Proposição 4.3, a mediatriz do segmento F_2X é a tangente à hipérbole em P_1 . Logo, para cada ponto X de C podemos obter uma reta tangente à hipérbole que corresponde à mediatriz do segmento F_2X .

O mesmo vale para as circunferências C_2 tangentes externamente à C e que incidem por F_2 . Logo, podemos desenhar uma hipérbole através de suas tangentes envoltórias. Faremos essa construção no *Geogebra*.

Descrição dos passos

1. Com o botão "*Círculo dados centro e um dos pontos*" construa uma circunferência c com centro A e raio AB qualquer. Em seguida oculte o ponto B .
2. Com o botão "*Ponto*" marque um ponto C exterior à circunferência c e um ponto D sobre c .
3. Com o botão "*Segmento*" trace o segmento CD .
4. Com o botão "*Mediatriz*" trace a mediatriz do segmento CD .
5. Com o botão direito do *mouse* clique sobre a mediatriz do segmento CD e marque a opção "*Habilitar rastro*".
6. Com o botão "*Mover*" clique, segure e mova o ponto D sobre a circunferência c . O rastro deixado pela mediatriz do segmento CD envolverá uma hipérbole com focos A e C e eixo focal de medida igual ao raio da circunferência.

Figura 68 – Construção de uma hipérbole usando as tangentes envoltórias

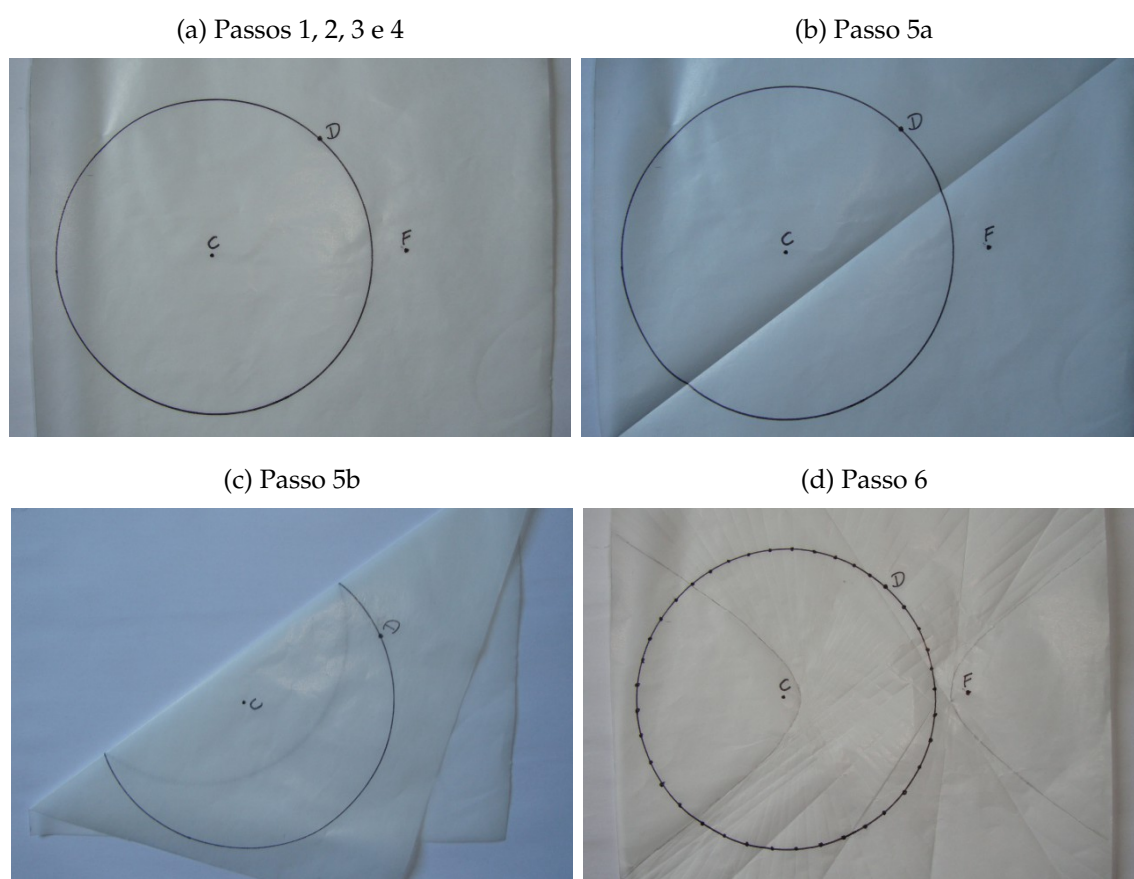


Fonte: Elaborada pelo autor

5.3.3 Dobraduras de papel – Hipérbole

A construção de uma hipérbole pelo método das tangentes envoltórias, pode ser feita na prática através de dobraduras de papel. A seguir, é dada a lista de materiais necessários e a descrição dos passos da construção.

Figura 69 – Construção de uma hipérbole através de dobraduras de papel



Fonte: Fotos tiradas pelo autor

Materiais necessários

- Uma caneta ou lápis.
- Uma folha de papel vegetal A4.
- Um compasso ou um objeto de forma circular, como por exemplo, a tampa de uma lata de leite.

Descrição dos passos

1. Marque um ponto C aproximadamente no centro da folha de papel.
2. Com auxílio do compasso, desenhe uma circunferência com centro em C de forma que sobre espaço entre a circunferência e as margens do papel.

3. Marque um ponto F no região exterior da circunferência.
4. Escolha um ponto D qualquer sobre a circunferência.
5. Dobre o papel de modo que o ponto D coincida com o ponto F . Certifique-se de que a dobra fique bem marcada no papel e, em seguida desdobre a papel.
6. Repita a operação do item anterior para outros pontos diferentes sobre a circunferência. Dessa forma, as dobras formaram o desenho de uma hipérbole com focos C e F . As dobras no papel correspondem as tangentes da hipérbole, e quanto mais dobras o papel tiver melhor será o desenho da curva.

5.3.4 Método das circunferências concêntricas – Hipérbole

Proposição 5.7. *Sejam F_1 e F_2 pontos do plano, onde $d(F_1, F_2) = 2c$. O lugar geométrico dos pontos P da interseção das circunferências C_1 com centro F_1 e raio r_1 com as circunferências C_2 com centro F_2 e raio $r_2 = 2a + r_1$, é uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $2a$, com $a < c$.*

Demonstração. Seja P um dos pontos da interseção de C_1 com C_2 . Assim,

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |r_1 - r_2| = |r_1 - (2a + r_1)| = 2a.$$

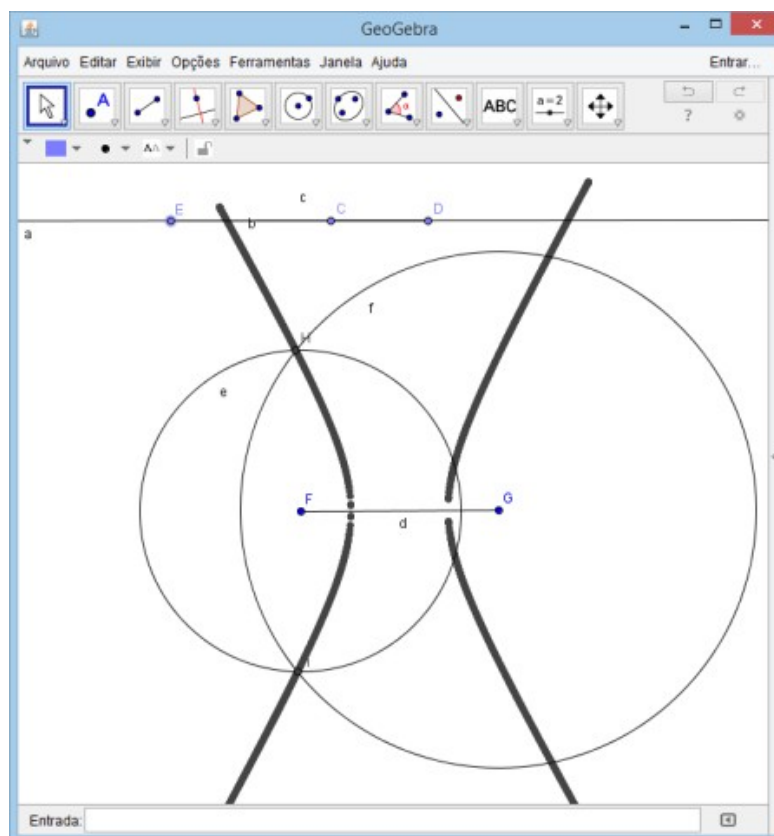
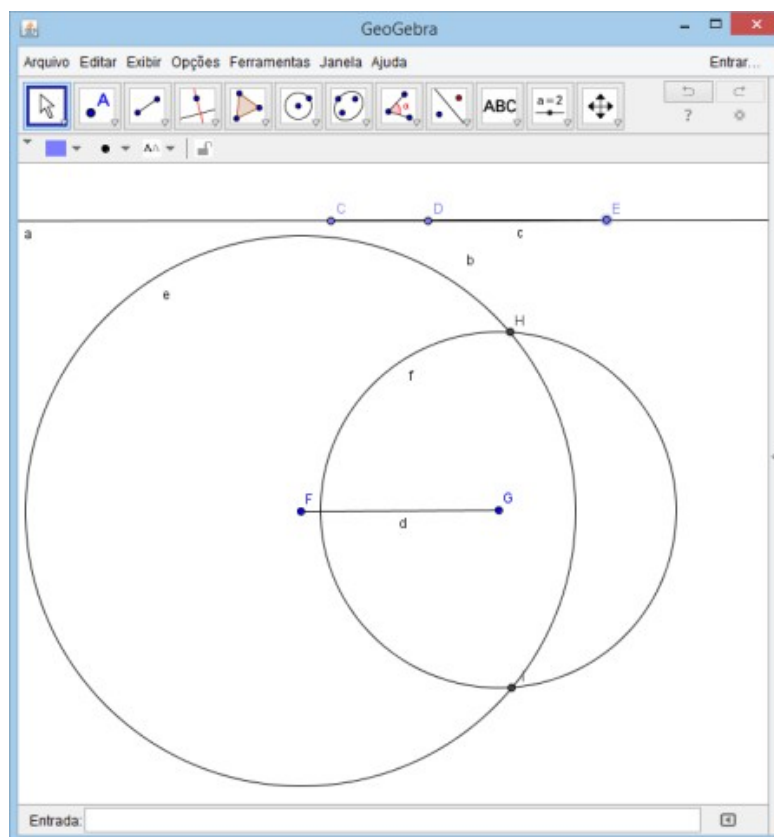
Portanto, os pontos P formam uma hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $2a$. □

Vamos construir uma hipérbole no *Geogebra* utilizando esse método.

Descrição dos passos

1. Com o botão "Reta" trace uma reta a no canto superior do plano. Oculte os pontos da reta.
2. Com o botão "Ponto" marque os pontos C , D e E sobre a reta.
3. Com o botão "Segmento" construa sobre a reta a os segmentos CE e DE . Construa também um segmento FG , com $\overline{FG} > \overline{CD}$. Para ver o tamanho dos segmentos use a "Janela de álgebra". Para isso, no botão *Exibir* marque a opção "Janela de álgebra" ou através do atalho "Ctrl+Shift+a".
4. Com o botão "Círculo dados centro e raio" clique sobre o ponto F e surgirá uma janela pedindo a medida raio, nela digite a letra que representa o segmento CE . Assim será criada uma circunferência com centro em F e raio igual a medida do segmento CE . Da mesmo modo, construa uma circunferência com centro em G e raio igual a \overline{DE} .

Figura 70 – Construção de uma hipérbole usando as circunferências concêntricas



Fonte: Elaborada pelo autor

5. Com o botão "*Interseção de dois objetos*" clique nas duas circunferências e surgirão os pontos de interseção H e I .
6. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto H e quando surgir uma janela, marque a opção "*Habilitar rastro*". Faça o mesmo com o ponto I .
7. Com o botão "*Mover*" clique, segure e mova o ponto E sobre a reta. O rastro deixado pelos pontos H e I formarão uma hipérbole com focos F e G e eixo focal de medida igual ao comprimento do segmento CD .
8. É possível visualizar a hipérbole sem usar o rastro. Com botão "*Lugar geométrico*", clique primeiro no ponto H depois no ponto E . Faça o mesmo com os pontos I e E , nessa ordem. Assim aparecerá a hipérbole formada pelo rastro.

5.3.5 Método do jardineiro – Hipérbole

Vimos que a hipérbole pode ser definida da forma que segue:

Definição 5.3. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante.*

Como no caso da elipse, construiremos uma hipérbole a partir dessa definição, utilizando o *Método do jardineiro*". A seguir, é dada a lista de materiais necessários e a descrição dos passos.

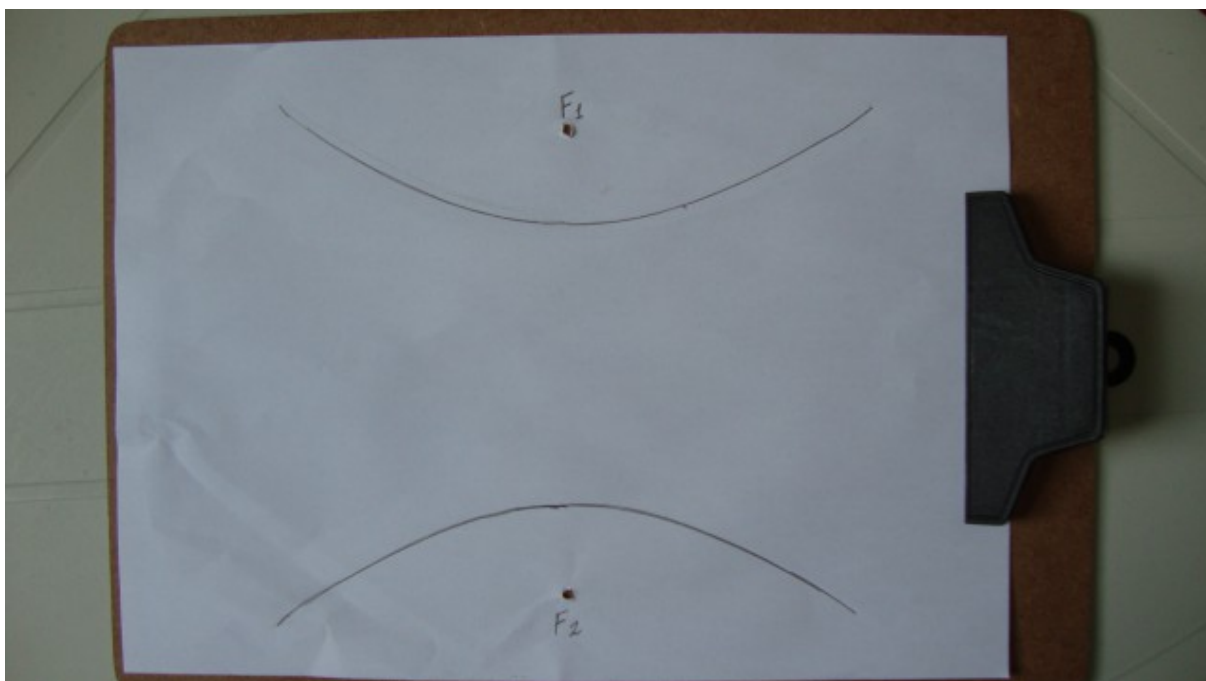
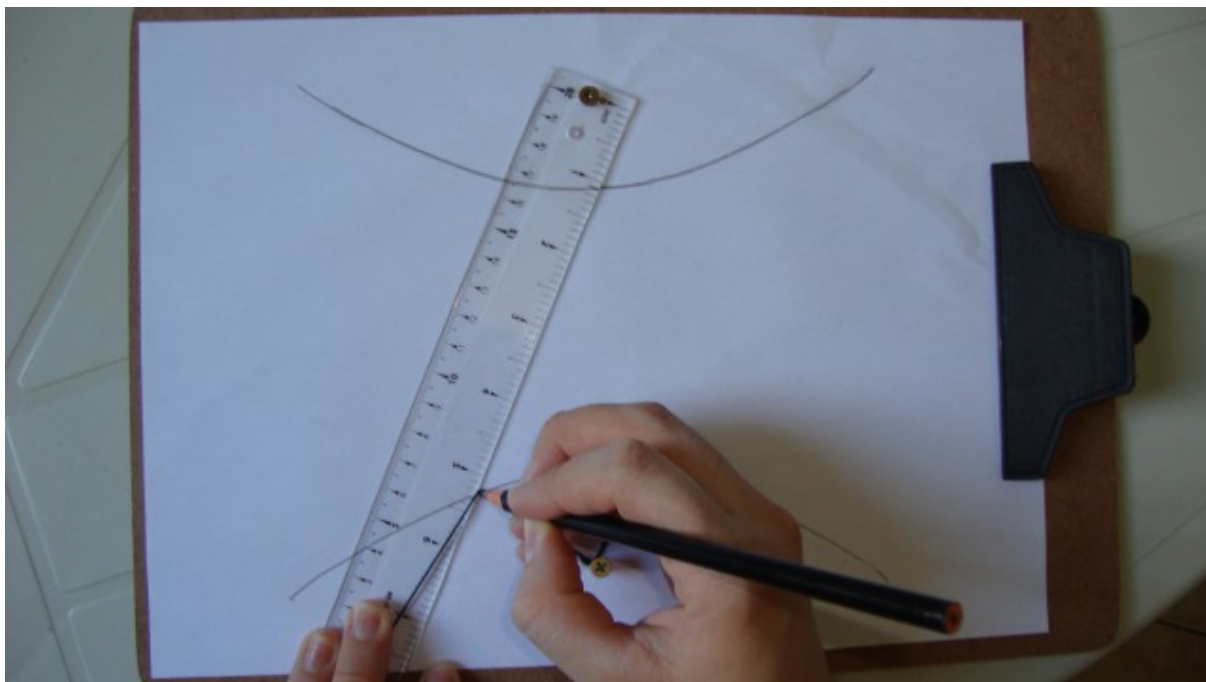
Materiais necessários

- Um lápis ou caneta.
- Uma folha de papel A4.
- Uma régua escolar. Neste caso, usaremos uma régua de 20 cm.
- Uma prancheta de madeira tamanho A4.
- Dois parafusos pequenos, ou dois pregos pequenos, ou duas tachinhas. Neste caso, usaremos parafusos.
- Um pedaço de linha de comprimento menor que a régua. A linha deve ser resistente, como é o caso da linha encerada ou linha 10.

Descrição dos passos

1. Prenda a folha de papel na prancheta. Marque os pontos F_1 e F_2 no papel distantes 15 cm um do outro e paralelos em relação a margem menor da folha. Para que desenho fique bem centralizado no papel, os pontos devem ser simétricos em relação ao centro da folha.

Figura 71 – Construção de uma hipérbole através do método do jardineiro



Fonte: Fotos tiradas pelo autor

2. Faça dois furos pequenos em cada extremidade da régua, suficiente para passar um parafuso.
3. Coloque um parafuso em um dos furos da régua e fixe-o no ponto F_1 , de forma que a régua fique presa na prancheta.
4. Amarre uma das pontas da linha no outro furo da régua.
5. Fixe um parafuso no ponto F_2 , onde deve ser amarrada a outra ponta da linha.
6. Com a ponta do lápis, estique o barbante mantendo-o encostado na régua.
7. Movimento o lápis em torno do ponto F_2 , sempre mantendo a linha esticada. Depois de mover o lápis por toda a extensão da linha, teremos o desenho de um ramo de uma hipérbole.
8. Repita o mesmo procedimento com o ponto F_2 . Assim, obteremos o outro ramo da hipérbole.

5.3.6 Método da soma constante das distâncias – Hipérbole

Como podemos perceber, a elipse, hipérbole e parábola são construídas por processos similares. Normalmente quando conhecemos um método de construir uma hipérbole por exemplo, fazendo algumas adaptações nesse método, ele pode ser aplicado para construir uma parábola por exemplo.

Na seção 5.2.5 desenvolvemos um método de construir uma elipse a partir da Definição 5.2. Veremos a seguir que é possível construir uma hipérbole por um método similar ao usada na construção de uma elipse.

Definição 5.4. *Sejam C uma circunferência com centro no ponto X e raio r e Y um ponto pertencente à região interior de C . A distância de Y à C é dado por:*

$$d(Y, C) = r - d(Y, X).$$

Proposição 5.8. *Sejam C uma circunferência com centro no ponto F_1 e raio r e F_2 um ponto pertencente à região interior de C , com $F_2 \neq F_1$. O lugar geométrico dos pontos P do interior da circunferência C , cuja soma das distâncias à F_2 e à C é igual a uma constante $k > 0$, com $k > d(F_2, C)$, é um segmento de um ramo da hipérbole com focos F_1 e F_2 e eixo focal de medida $|k - r|$.*

Demonstração. Por hipótese

$$d(P, C) + d(P, F_2) = k.$$

Pela Definição 5.4 temos

$$r - d(P, F_1) + d(P, F_2) = k \iff d(P, F_2) - d(P, F_1) = k - r. \quad (5.2)$$

Se $d(F_2, C) < k < r$, a equação (5.2) representa um segmento de um ramo da hipérbole \mathcal{H} que está contido na região interior de C . Essa hipérbole tem focos F_1 e F_2 e eixo igual a $|k - r|$.

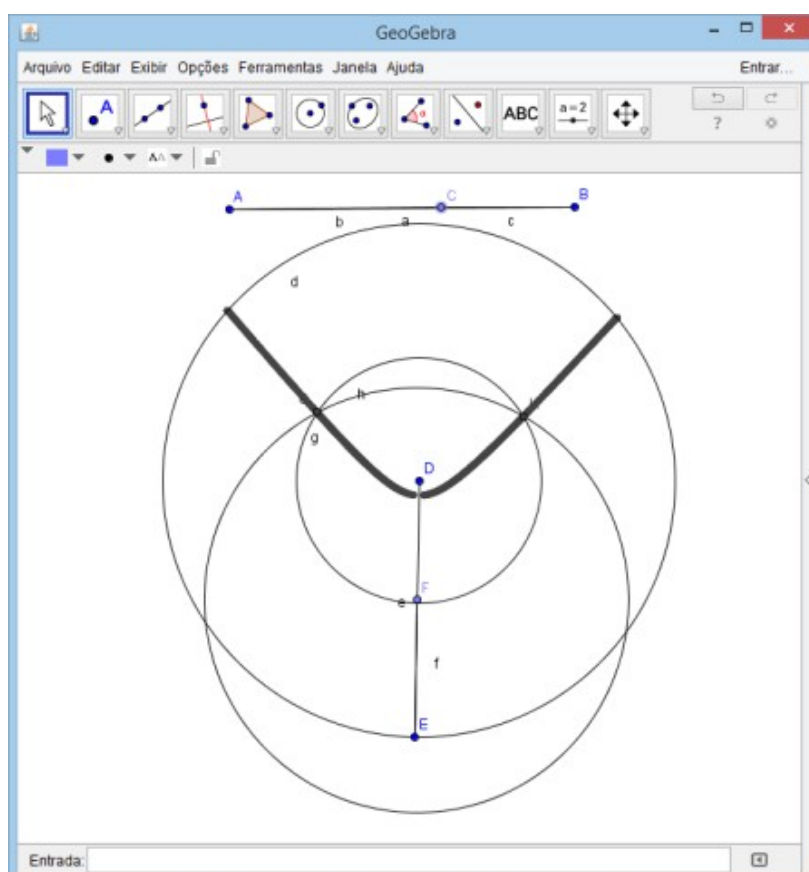
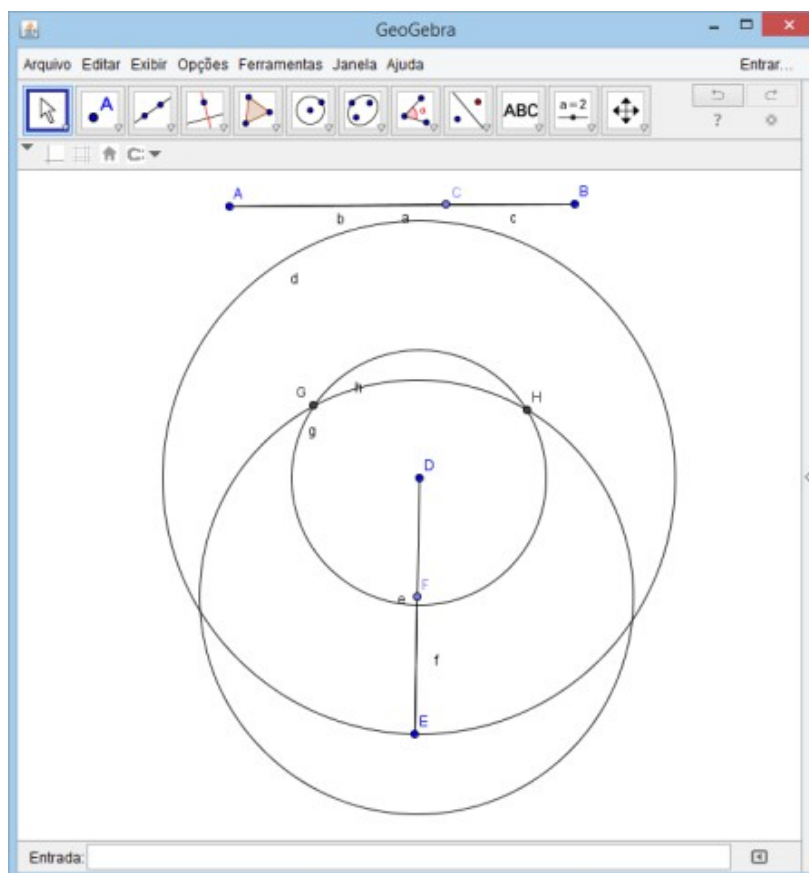
Se $k > r$, a equação (5.2) representa um segmento do outro ramo de \mathcal{H} que está contido na região interior de C . \square

Vamos construir uma hipérbole no *Geogebra* com base nessa Proposição.

Descrição dos passos

1. Com o botão "*Segmento*" construa o segmento AB no canto superior do plano.
2. Com o botão "*Ponto*" marque um ponto C sobre os segmento AB .
3. Novamente com o botão "*Segmento*" construa sobre o segmento AB os segmentos AC e CB .
4. Com o botão "*Círculo dados centro e um dos seus pontos*" construa uma circunferência d com centro em D e raio DE .
5. Com o botão "*Segmento*" trace o segmento DE .
6. Com o botão "*Ponto*" marque um ponto F sobre o segmento DE .
7. Novamente com o botão "*Segmento*" trace o segmento EF , com $\overline{EF} < \overline{AB}$. Para ver o comprimento dos segmentos use a "*Janela de álgebra*", disponível no botão "*Exibir*".
8. Com o botão "*Círculo dados centro e raio*" construa uma circunferência g com centro em F e raio igual ao comprimento do segmento AC . Construa também uma circunferência h com centro D e raio igual a medida $\overline{DE} - \overline{CB}$.
9. Com o botão "*Interseção de dois objetos*" marque os pontos G e H de interseção das circunferências g e h .
10. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto G e quando surgir uma janela, marque a opção "*Habilitar rastro*". Faça o mesmo com o ponto H .
11. Com o botão "*Mover*" clique, segure e mova o ponto C sobre o segmento AB . O rastro deixado pelos pontos G e H formarão um segmento de um ramo de hipérbole.
12. É possível visualizar o segmento de hipérbole sem usar o rastro. Com botão "*Lugar geométrico*", clique primeiro no ponto G depois no ponto C . Faça o mesmo com os pontos H e C nessa ordem. Assim surgirá o segmento de hipérbole formado pelo rastro.

Figura 72 – Construção de uma hipérbole usando a soma constante das distâncias



Fonte: Elaborada pelo autor

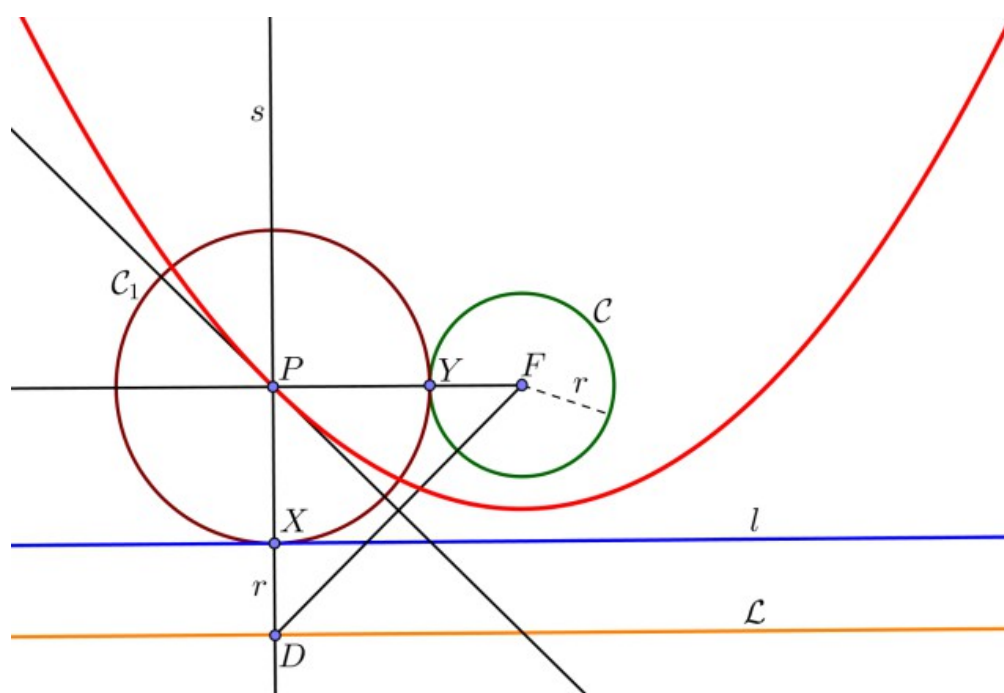
5.4 Construindo parábolas

Neste seção, veremos alguns métodos para construir parábolas.

5.4.1 Método das circunferências tangentes – Parábola

Foi visto que tanto a elipse quanto a hipérbole, possuem duas circunferências diretrizes cujos centros estão sobre seus focos.

Figura 73 – Circunferência diretriz da parábola



Fonte: Elaborada pelo autor

No caso da parábola, ao invés de duas circunferências diretrizes, temos somente uma circunferência diretriz com centro no foco da parábola e uma reta l , paralela a reta diretriz. No entanto, podemos definir e construir uma parábola usando a mesma ideia que usamos nos casos da elipse e hipérbole.

Proposição 5.9. *Considere uma reta l e uma circunferência C com centro no ponto F e raio de medida r . O lugar geométrico dos centros P das circunferências C_1 tangentes a C e a l , é uma parábola com foco F e reta diretriz \mathcal{L} paralela à l .*

Demonstração. Vamos considerar o caso em que a interseção de C e l é vazia. Assim, tome um ponto X pertencente a l , e seja s a reta perpendicular à l que passa por X . Tome um ponto D pertencente à s tal que $\overline{DX} = r$ e $d(F, X) < d(F, D)$.

Seja P o ponto de interseção da reta s com a mediatriz do segmento FD . Seja Y o ponto de interseção da circunferência C com a semirreta \overrightarrow{FP} , onde Y está entre F e P .

Assim,

$$\overline{PD} = \overline{PF} \implies \overline{PX} + \overline{XD} = \overline{PY} + \overline{YF} \implies \overline{PX} + r = \overline{PY} + r \implies \overline{PX} = \overline{PY}.$$

Note que podemos traçar uma circunferência C_1 com centro em P e que incide pelos pontos X e Y . Temos ainda, que C_1 é tangente à C , pois P , Y e F são colineares.

Podemos considerar que o ponto D pertence à uma reta \mathcal{L} paralela à l , com $d(\mathcal{L}, l) = r$. Assim,

$$d(P, F) = \overline{PF} = \overline{PD} = d(P, \mathcal{L}).$$

Temos então uma parábola com foco F e reta diretriz \mathcal{L} . □

A circunferência C é chamada circunferência diretriz da parábola.

Prova-se também que a proposição continua válida para o caso em que a circunferência diretriz tem raio nulo, ou seja, quando C se degenera no ponto F . Nesse caso, a reta l coincide com a reta diretriz da parábola.

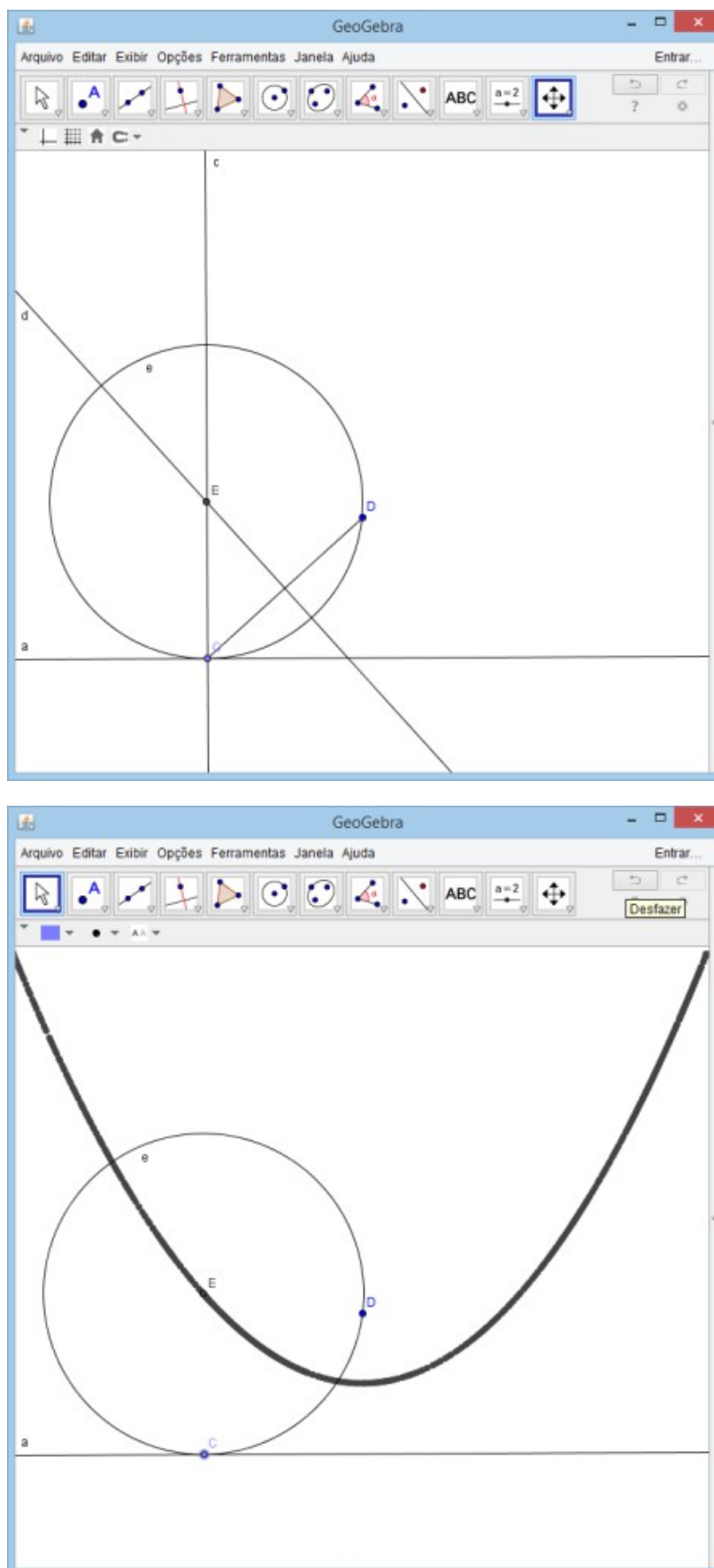
Corolário 5.3. *Sejam \mathcal{L} uma reta e F um ponto que não pertence à \mathcal{L} . O lugar geométrico dos centros P das circunferências C tangentes à \mathcal{L} e que incidem pelo ponto F , é uma parábola com foco F e diretriz \mathcal{L} .*

Vamos agora, construir no *Geogebra* uma parábola com a circunferência diretriz degenerada.

Descrição dos passos

1. Com o botão "Reta" trace uma reta a . Em seguida oculte os pontos da reta.
2. Com o botão "Ponto" marque um ponto C sobre a reta e um ponto D fora da reta.
3. Com o botão "Segmento" construa o segmento CD .
4. Com o botão "Reta perpendicular" trace a reta c que passa C e é perpendicular à reta a .
5. Com o botão "Mediatriz" construa a mediatriz do segmento CD .
6. Com o botão "Interseção de dois objetos" encontre o ponto E de interseção da reta perpendicular c com a mediatriz do segmento CD .
7. Com o botão *Círculo dados centros e um dos pontos* construa uma circunferência e com centro em E e raio EC . Para melhorar a visualização, oculte a reta perpendicular, o segmento CD e sua mediatriz.
8. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto E e marque a opção "Habilitar rastro".

Figura 74 – Construção de uma parábola usando as circunferências tangentes



Fonte: Elaborada pelo autor

9. Com o botão "*Mover*" clique e segure no ponto C , depois mova-o sobre a reta a . O rastro deixado por C desenhará uma parábola com foco F e reta diretriz a .
10. É possível visualizar a parábola sem usar o rastro. Com botão "*Lugar geométrico*", clique primeiro no ponto E depois no ponto C . Assim surgirá a parábola formada pelo rastro.

5.4.2 Método das tangentes envoltórias – Parábola

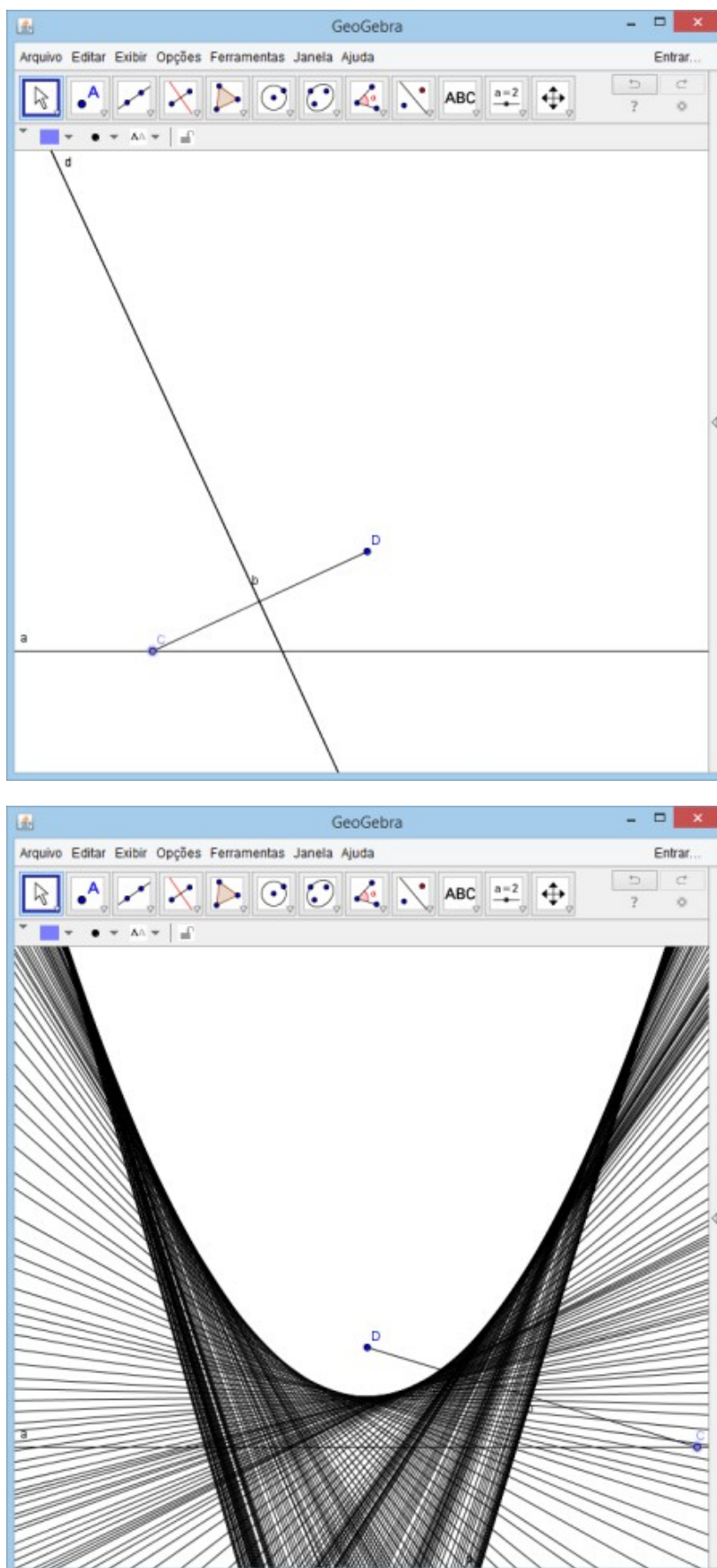
De acordo com o Corolário 5.3, se X é o ponto de interseção entre a circunferência C e a reta \mathcal{L} então o ponto P será a interseção da mediatriz do segmento FX com a reta s perpendicular a \mathcal{L} e que passa por F .

É fácil ver que a mediatriz de FX é também bissetriz do ângulo \widehat{FPX} . Assim, pela Proposição 4.3, a mediatriz de FX é a tangente à parábola em P . Logo, para cada $X \in \mathcal{L}$ obtém-se uma tangente à parábola que é a mediatriz do segmento FX . Portanto, a parábola pode ser determinada pelas suas tangentes. Faremos essa construção no *Geogebra*.

Descrição dos passos

1. Com o botão "*Reta*" trace uma reta a . Em seguida oculte os pontos da reta.
2. Com o botão "*Ponto*" marque um ponto C sobre a reta e um ponto D fora da reta.
3. Com o botão "*Segmento*" construa o segmento CD .
4. Com o botão "*Mediatriz*" construa a mediatriz do segmento CD .
5. Com o botão direito do *mouse* clique sobre a mediatriz do segmento CD e marque a opção "*Habilitar rastro*".
6. Com o botão "*Mover*" clique e segure no ponto C , em seguida mova-o sobre a reta a . O rastro deixado pela mediatriz de CD envolverá uma parábola com foco F e reta diretriz a .

Figura 75 – Construção de uma parábola usando as tangentes envoltórias

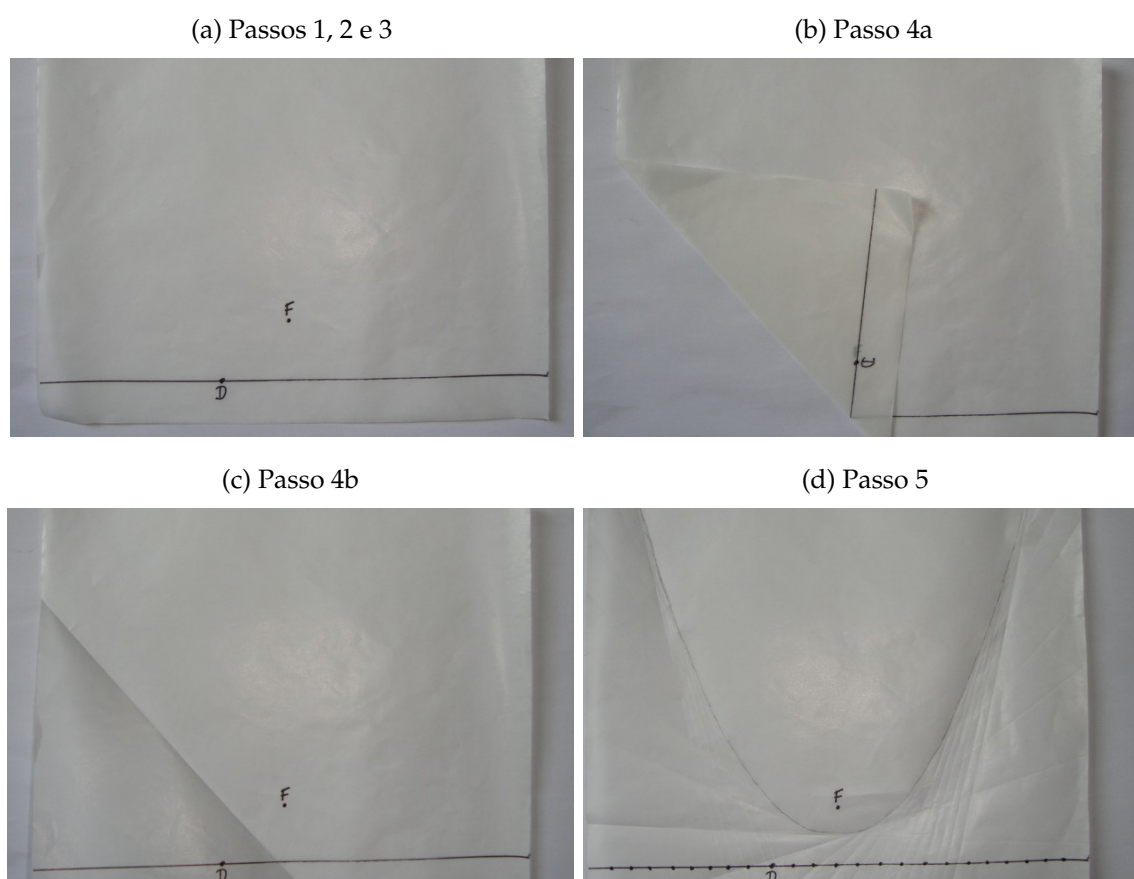


Fonte: Elaborada pelo autor

5.4.3 Dobraduras de papel – Parábola

A construção de uma parábola pelo método das tangentes envoltórias, pode ser realizada na prática por meio de dobraduras de papel. A seguir, é dada a lista de materiais necessários e a descrição dos passos da construção.

Figura 76 – Construção de uma parábola através de dobraduras de papel



Fonte: Fotos tiradas pelo autor

Materiais necessários

- Uma caneta ou lápis.
- Uma folha de papel vegetal A4.
- Uma régua.

Descrição dos passos

1. Com auxílio da régua, desenhe uma reta l paralela e próxima à uma das margens da folha de papel.
2. Marque um ponto F acima da reta e centralizado em relação as margens não paralelas à reta.

3. Escolha um ponto D qualquer sobre a reta.
4. Dobre o papel de modo que o ponto D coincida com o ponto F . Certifique-se de que a dobra fique bem marcada no papel e, em seguida desdobre a papel.
5. Repita a operação do item anterior para outros pontos diferentes sobre a reta. Dessa forma, as dobras formaram o desenho de uma parábola com foco F e reta diretriz l . As dobras no papel correspondem as tangentes da parábola, e quanto mais dobras o papel tiver melhor será o desenho da curva.

5.4.4 Método das circunferências concêntricas – Parábola

Proposição 5.10. *Sejam \mathcal{L} uma reta e F um ponto não pertencente à \mathcal{L} . O lugar geométrico dos pontos P da interseção das circunferências C com centro F e raio r com as retas l que distam r de \mathcal{L} , é uma parábola com foco F e diretriz \mathcal{L} . Nesse caso, as retas l e o ponto F pertencem ao mesmo semiplano com origem em \mathcal{L} .*

Demonstração. Seja P um ponto da interseção de \mathcal{L} com C . Assim,

$$d(P, \mathcal{L}) = d(l, \mathcal{L}) = r = d(P, F).$$

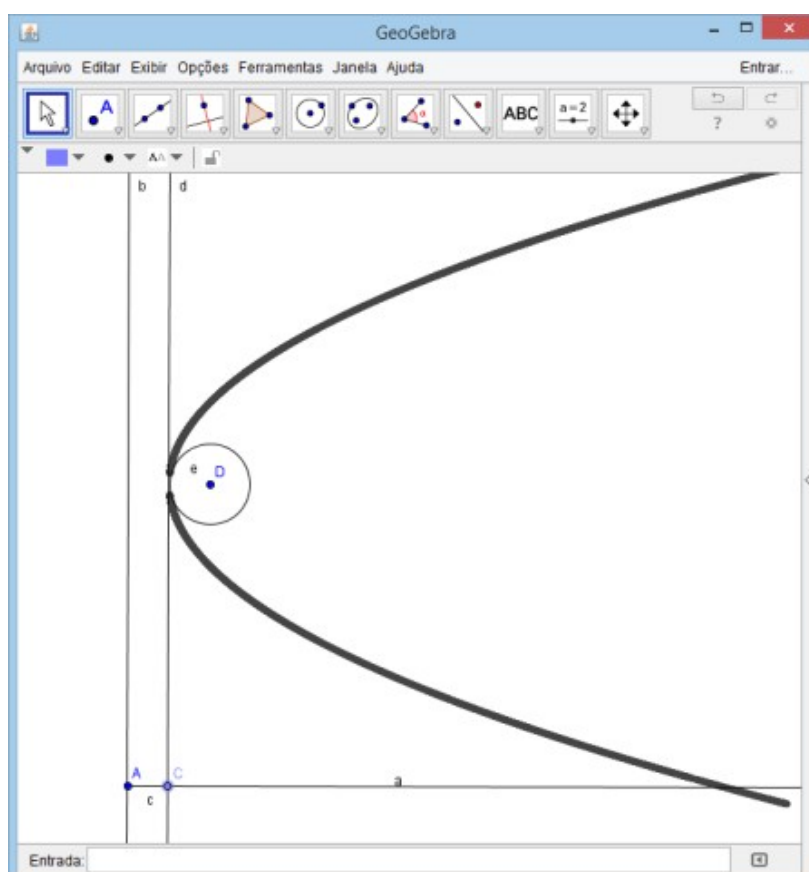
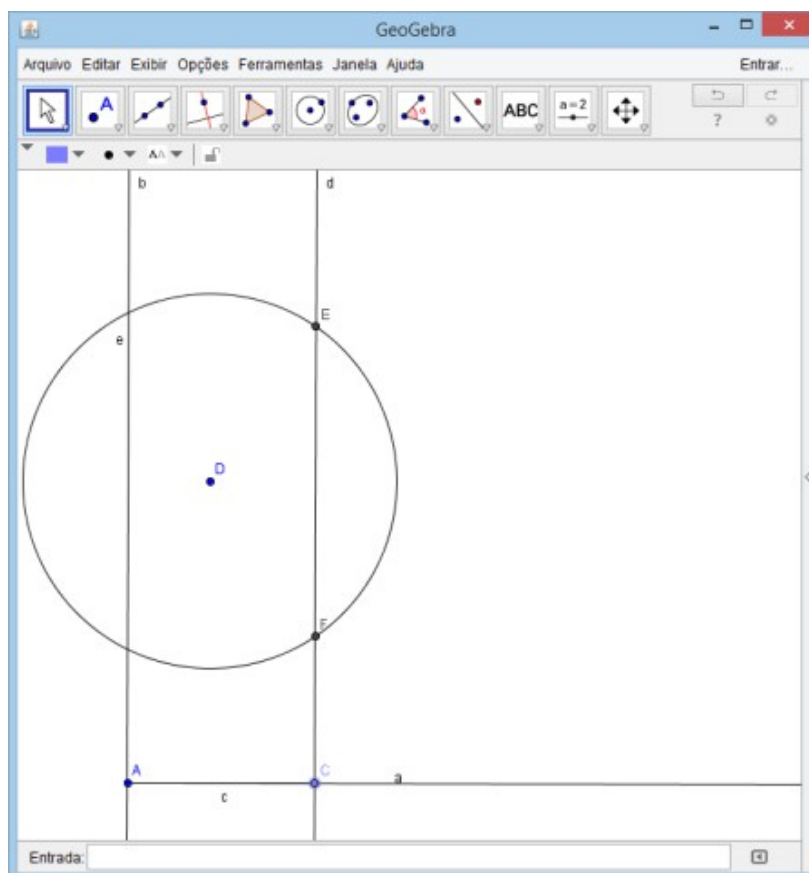
Portanto, o lugar geométrico dos pontos P formam uma parábola com foco F e diretriz \mathcal{L} . □

Vamos construir uma parábola no *Geogebra* usando esse método.

Descrição dos passos

1. Com o botão "Semirreta" trace uma semirreta horizontal \overrightarrow{AB} no canto inferior do plano. Em seguida oculte o ponto B .
2. Com o botão "Ponto" marque um ponto C sobre a semirreta e um ponto D fora da semirreta.
3. Com o botão "Reta perpendicular" trace as retas perpendiculares a semirreta \overrightarrow{AB} que passam pelos pontos A e C .
4. Com o botão "Segmento" construa o segmento AC .
5. Com o botão "Círculo dados centro e raio" construa uma circunferência com centro em D e raio igual ao segmento AC .
6. Com o botão "Mover" mova o ponto C até a reta perpendicular intersectar a circunferência.

Figura 77 – Construção de uma parábola usando as circunferências concêntricas



Fonte: Elaborada pelo autor

7. Com o botão "*Interseção entre dois objetos*" marque pontos os pontos E e F de interseção da circunferência com a reta perpendicular que passa por C .
8. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto E e marque a opção "*Habilitar rastro*". Faça o mesmo com o ponto F .
9. Com o botão "*Mover*" clique e segure no ponto C , depois mova-o sobre a semirreta \overrightarrow{AB} . O rastro deixado pelos pontos E e F formarão uma parábola com foco F e cuja reta diretriz corresponde a perpendicular que passa por A .
10. É possível visualizar a parábola sem usar o rastro. Com botão "*Lugar geométrico*", clique primeiro no ponto E depois no ponto C . Faça o mesmo com os pontos F e C nessa ordem. Assim surgirá a parábola formada pelo rastro.

5.4.5 Método do jardineiro – Parábola

Vimos que a parábola pode ser definida da forma que segue:

Definição 5.5. *Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de uma reta dada e de um ponto F , não pertencente à reta.*

A partir dessa definição, construiremos uma parábola utilizando o "*Método do jardineiro*". A seguir, é dada a lista de materiais necessários e a descrição dos passos.

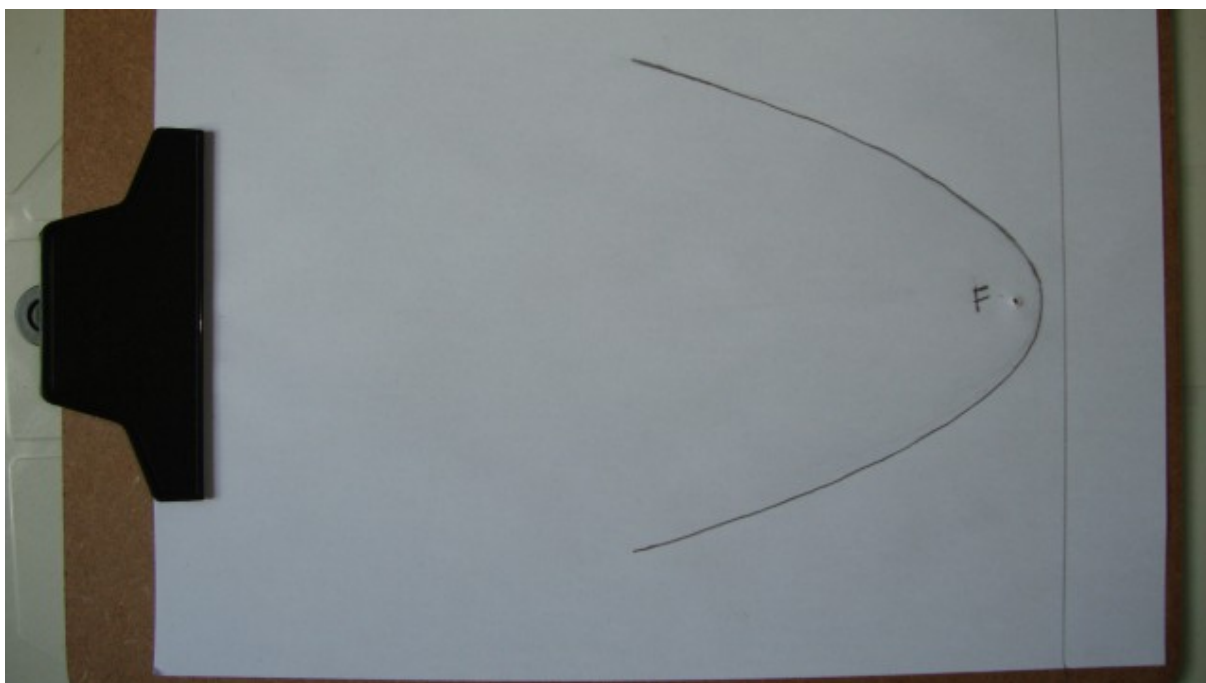
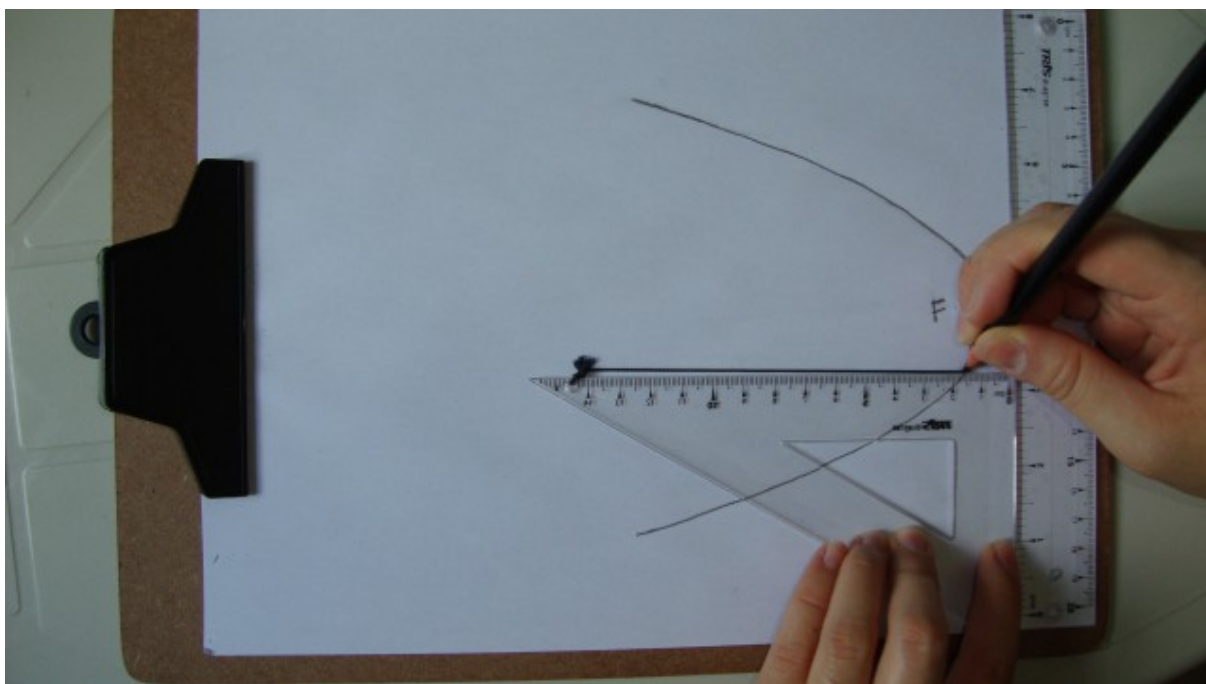
Materiais necessários

- Um lápis ou caneta.
- Uma folha de papel A4.
- Um esquadro escolar 60 graus.
- Uma régua escolar.
- Fita adesiva.
- Uma prancheta de madeira tamanho A4.
- Um parafuso pequeno, ou um prego pequeno, ou uma tachinha. Neste caso, usaremos um parafuso.
- Um pedaço de linha de comprimento igual a medida do cateto maior do esquadro 60 graus. A linha deve ser resistente, como linha encerada ou linha 10.

Descrição dos passos

1. Prenda a folha de papel na prancheta.

Figura 78 – Construção de uma parábola através do método do jardineiro



Fonte: Fotos tiradas pelo autor

2. Posicione a régua de forma paralela e próxima à margem oposta ao prendedor da prancheta. Com a fita adesiva fixe a régua nessa posição.
3. Com o lápis, marque um ponto F no papel acima da reta e centralizado em relação as margens não paralelas à régua.
4. Fixe um parafuso sobre o ponto F .
5. Faça um pequeno furo na ponta de 30 graus do esquadro, o suficiente para passar a linha.
6. Amarre uma das pontas da linha nesse furo. A outra ponta deve ser amarrada no parafuso sobre F .
7. Apoie o esquadro sobre a régua. Com a ponta do lápis, estique o barbante mantendo-o encostado no esquadro.
8. Deslize o esquadro sobre a régua, sempre mantendo a linha esticada. Depois de mover o lápis em torno do ponto F , teremos o desenho de uma parábola.

5.4.6 Método da soma constante das distâncias – Parábola

Da mesma forma que fizemos com a hipérbole, construiremos uma parábola utilizando um processo similar ao método de construção de uma elipse visto na seção 5.2.5.

Proposição 5.11. *Sejam l uma reta e F um ponto que não pertence à l . O lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma das distâncias à F e à l é igual a uma constante $k > 0$, com $k > d(F, l)$, é um segmento de parábola.*

Demonstração. Consideremos um sistema de coordenadas xOy onde o eixo Ox coincide com a reta l e o eixo Oy é reta perpendicular à l que passa por F . Relativamente a esse sistema, consideraremos que o ponto F tem coordenadas $(0, p)$, onde $p = d(F, l)$. Seja $P(x, y)$ um ponto do plano dado nas coordenadas do sistema xOy , onde por hipótese, $d(P, F) + d(P, l) = k$. Assim,

$$\begin{aligned}
 d(P, F) + d(P, l) = k &\iff \sqrt{x^2 + (y - p)^2} + |y| = k \\
 &\iff \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = k - |y| \\
 &\iff x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = k^2 - 2k|y| + y^2 \\
 &\iff x^2 - 2yp + 2k|y| + p^2 - k^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Se o ponto P pertence ao semiplano acima do eixo Ox , então $|y| = y$. Com essa condição, continuaremos o desenvolvimento da equação (5.3):

$$x^2 - 2yp + 2ky + p^2 - k^2 = 0 \iff x^2 + 2y(k - p) + p^2 - k^2 = 0. \tag{5.4}$$

Logo, pela Proposição 3.6, a equação (5.4) representa uma parábola \mathcal{P} com reta focal coincidente com o eixo Oy . Porém, como foi imposta a condição $|y| = y$, veremos que a equação (5.4) na verdade representa um segmento da parábola \mathcal{P} . Para mostrar isso, obteremos o vértice e as interseções da parábola \mathcal{P} com o eixo Ox .

Para encontrar o vértice de \mathcal{P} , basta fazer $x = 0$ na equação (5.4). Assim,

$$2y(k-p) + p^2 - k^2 = 0 \iff y = \frac{k^2 - p^2}{2(k-p)} \iff y = \frac{(k-p)(k+p)}{2(k-p)} \iff y = \frac{k+p}{2}.$$

Logo, o vértice de \mathcal{P} é $V\left(0, \frac{k+p}{2}\right)$.

Para obter a interseção da parábola \mathcal{P} com o eixo Ox , faz-se $y = 0$ na equação (5.4). Assim,

$$x^2 + p^2 - k^2 = 0 \iff x^2 = k^2 - p^2 \iff x = \pm \sqrt{k^2 - p^2}.$$

Logo, temos que $(-\sqrt{k^2 - p^2}, 0)$ e $(\sqrt{k^2 - p^2}, 0)$ são os pontos de interseção da parábola \mathcal{P} com o eixo Ox . Portanto, a equação (5.4) representa um segmento da parábola \mathcal{P} , que está contido na região retangular delimitada pelos pontos

$$\left(-\sqrt{k^2 - p^2}, 0\right), \left(\sqrt{k^2 - p^2}, 0\right), \left(-\sqrt{k^2 - p^2}, \frac{k+p}{2}\right), \left(\sqrt{k^2 - p^2}, \frac{k+p}{2}\right).$$

Se o ponto P pertence ao semiplano abaixo do eixo Ox , então a equação (5.3) representa um segmento da parábola \mathcal{P}' , que está contido na região retangular delimitada pelos pontos

$$\left(-\sqrt{k^2 - p^2}, 0\right), \left(\sqrt{k^2 - p^2}, 0\right), \left(-\sqrt{k^2 - p^2}, -\frac{k-p}{2}\right), \left(\sqrt{k^2 - p^2}, -\frac{k-p}{2}\right).$$

□

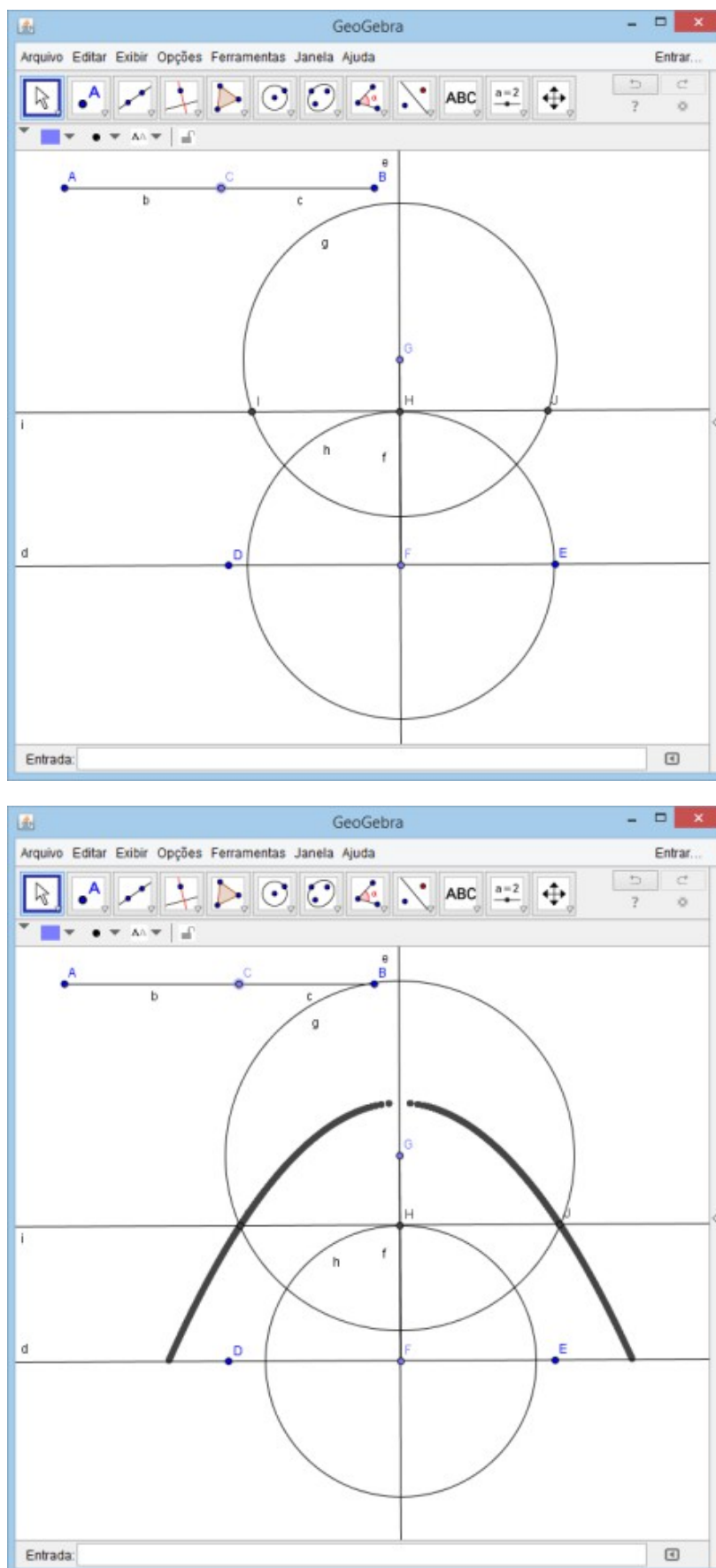
Construiremos um segmento da parábola no *Geogebra* com base na Proposição 5.11.

Descrição dos passos

1. Com o botão "*Segmento*" construa o segmento AB no canto superior do plano.
2. Com o botão "*Ponto*" marque um ponto C sobre os segmento AB .
3. Novamente com o botão "*Segmento*" construa sobre o segmento AB os segmentos AC e CB .
4. Com o botão "*Reta*" trace a reta d no canto inferior do plano. Em seguida oculte os pontos D e E .
5. Com o botão "*Ponto*" marque um ponto F sobre a reta DE .

6. Com o botão "*Reta perpendicular*" trace a reta e perpendicular à reta d que passa pelo F .
7. Com o botão "*Ponto*" marque o ponto G sobre a reta e . Em seguida oculte a reta e .
8. Com o botão "*Segmento*" trace o segmento FG , com $FG < AB$. Para ver o comprimento dos segmentos use a "*Janela de álgebra*", disponível no botão "*Exibir*".
9. Com o botão "*Círculo dados centro e raio*" construa uma circunferência g com centro em G e raio igual ao comprimento do segmento AC . Construa também uma circunferência h com centro F e raio igual a medida de CB .
10. Com o botão "*Interseção de dois objetos*" marque o ponto H de interseção da reta e com a circunferência h .
11. Com o botão "*Reta paralela*" trace a reta i paralela à reta d que passa pelo ponto H .
12. Com o botão "*Interseção de dois objetos*" marque os pontos I e J de interseção das circunferências g e h .
13. Com o botão direito do *mouse* clique sobre o ponto I e quando surgir uma janela, marque a opção "*Habilitar rastro*". Faça com o ponto J .
14. Com o botão "*Mover*" clique, segure e mova o ponto C sobre o segmento AB . O rastro deixado pelos pontos I e J formarão um segmento de parábola.
15. É possível visualizar o segmento da parábola sem usar o rastro. Com botão "*Lugar geométrico*", clique primeiro no ponto I depois no ponto C . Faça o mesmo com os pontos J e C nessa ordem. Assim surgirá o segmento de parábola formado pelo rastro.

Figura 79 – Construção de uma parábola usando a soma constante das distâncias



Fonte: Elaborada pelo autor

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Há muita coisa para se escrever sobre cônicas. Além dos assuntos abordados nesse trabalho, poderíamos estudar as cônicas utilizando Geometria Projetiva, Geometria Espacial, Álgebra Linear, vetores, rotação dos eixos coordenados, coordenadas polares, equações paramétricas, Cálculo diferencial e integral, superfícies regradas, etc. Também deixamos de enunciar centenas de proposições e teoremas relacionados com as cônicas, diferente do que fez Apolônio em seu tratado composto por oito livros, nos quais demonstrou 387 proposições sobre as cônicas.

Falamos de algumas aplicações das cônicas, porém existem muitas outras que não foram citadas. Johannes Kepler (1571 - 1630), por exemplo, descobriu que todos os planetas se movem em órbitas elípticas tendo o sol como um dos focos. Galileu Galilei (1564 - 1642) provou que o trajeto de um projétil descreve uma parábola no ar. O gráfico de uma transformação isotérmica, ou Lei de Boyle, é representado por uma hipérbole equilátera. A NASA (sigla em inglês de *National Aeronautics and Space Administration* – Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço) possuem aviões especiais que realizam voos parabólicos que produzem microgravidade no interior do avião, a fim de treinar os seus astronautas. Na engenharia, as cônicas são aplicadas na construção de pontes suspensas, torres de grande altura, tuneis, etc. Na indústria automobilística, o sistema de amortecimento mais eficiente para veículos pesados é o que utiliza feixes de molas parabólicos. Enfim, as cônicas estão em toda parte.

Fizemos algumas construções de cônicas, mas não foram mencionadas aquelas feitas através de dispositivos mecânicos, também conhecidos como máquinas matemáticas. Os elipsógrafos, parabológrafos e hiperbológrafos são dispositivos que constroem elipses, parábolas e hipérbolas, respectivamente. Muitos matemáticos desenvolveram esses dispositivos, como Frans van Schooten (1615 - 1660), De L'Hôpital (1661 - 1704), Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), Delaunay (1816 - 1872), etc.

Por isso que considero esse trabalho apenas a ponta de um *iceberg*. Ainda assim, espero que esse breve estudo sobre as cônicas possa ser útil para estudantes e professores de Matemática, pois considero que o conhecimento adquirido só se torna importante quando é compartilhado com outros. Incentivo os professores de Matemática a utilizarem em suas aulas recursos tecnológicos e busquem formas criativas de ensinar que venham despertar o interesse dos alunos pela Matemática. Para aqueles que leram estas páginas, espero que tenham contemplado a beleza e importância da Matemática para a nossa sociedade. Acredito plenamente que alcançaremos uma vida melhor, a medida que adquirirmos mais conhecimento.

REFERÊNCIAS

- 1 BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- 2 CORREIA, M. C. L. F. *Diferentes Abordagens ao Estudo das Cônicas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, Portugal, 2013. Disponível em: <http://sigarra.up.pt/fcup/pt/publs_pesquisa.show_publ_file?pct_gdoc_id=35518>. Acesso em: 16 fev. 2015.
- 3 GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- 4 GARCIA, J. C.; NASCIMENTO, V. M. d. In: UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. *Explorando construções de cônicas*. 2014. Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v3n1/v3n1_art8.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2015.
- 5 GOMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. d. S. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).
- 6 HAFNER, I. *Paper Model of Conic Sections*. 04 set. 2014. Disponível em: <<http://demonstrations.wolfram.com/PaperModelOfConicSections/>>. Acesso em: 20 fev. 2015.
- 7 LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio – volume 1*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).
- 8 NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).
- 9 NETO, F. Q. *Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas"*. Rio Grande do Norte: Editora do IFRN, 2013.
- 10 OLIVEIRA, O. R. B. d. In: UNIVERSIDADE DE SAO PAULO. *Cônicas: propriedades de reflexão*. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~oliveira/conicaspubli.pdf>>. Acesso em: 15 fev. 2015.
- 11 REIS, G. L. d. *Geometria Analítica*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- 12 ROQUE, T. M.; CARVALHO, J. B. P. d. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).
- 13 SATO, J. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA. *As cônicas e suas aplicações*. 2004. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2015.
- 14 SIQUEIRA, P. H.; COSTA, A. M. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. *Cônicas*. 2. ed. 2012. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/conicas.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2015.
- 15 STEWART, J. *Cálculo, volume 1*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

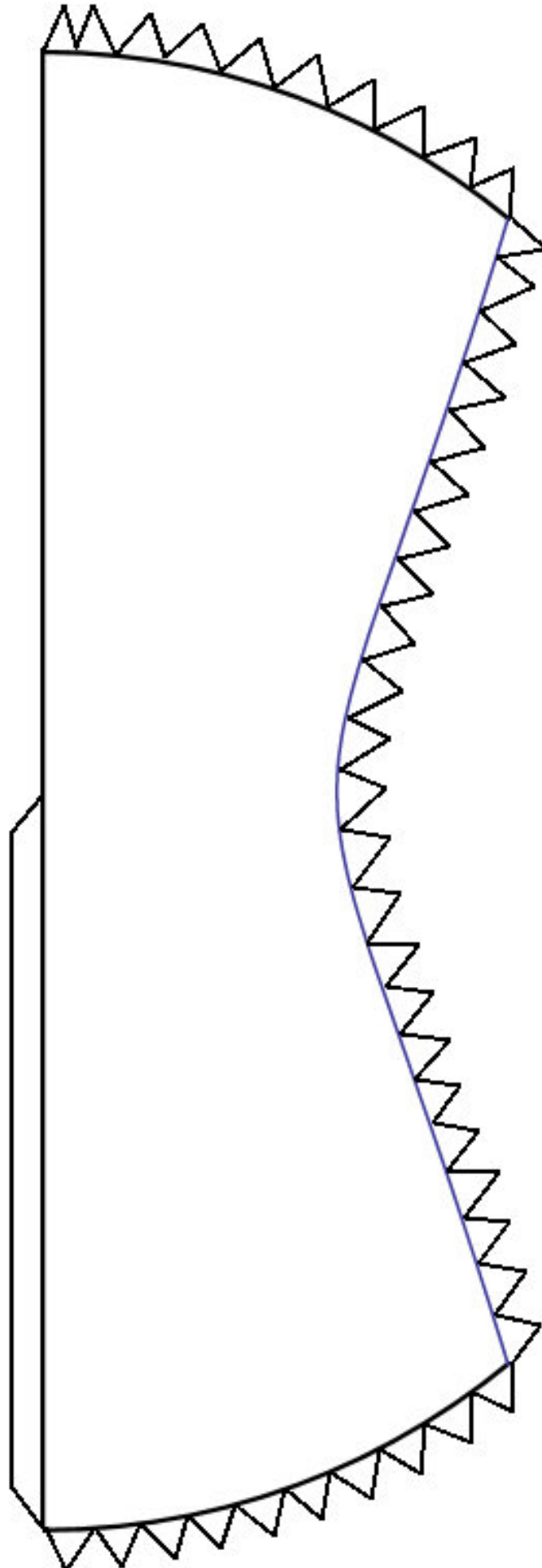
ANEXO A – CONES DE PAPEL

Os moldes foram adaptados de um modelo obtido na *internet* em (6). A seguir são dados os moldes e os materiais para confecção dos cones.

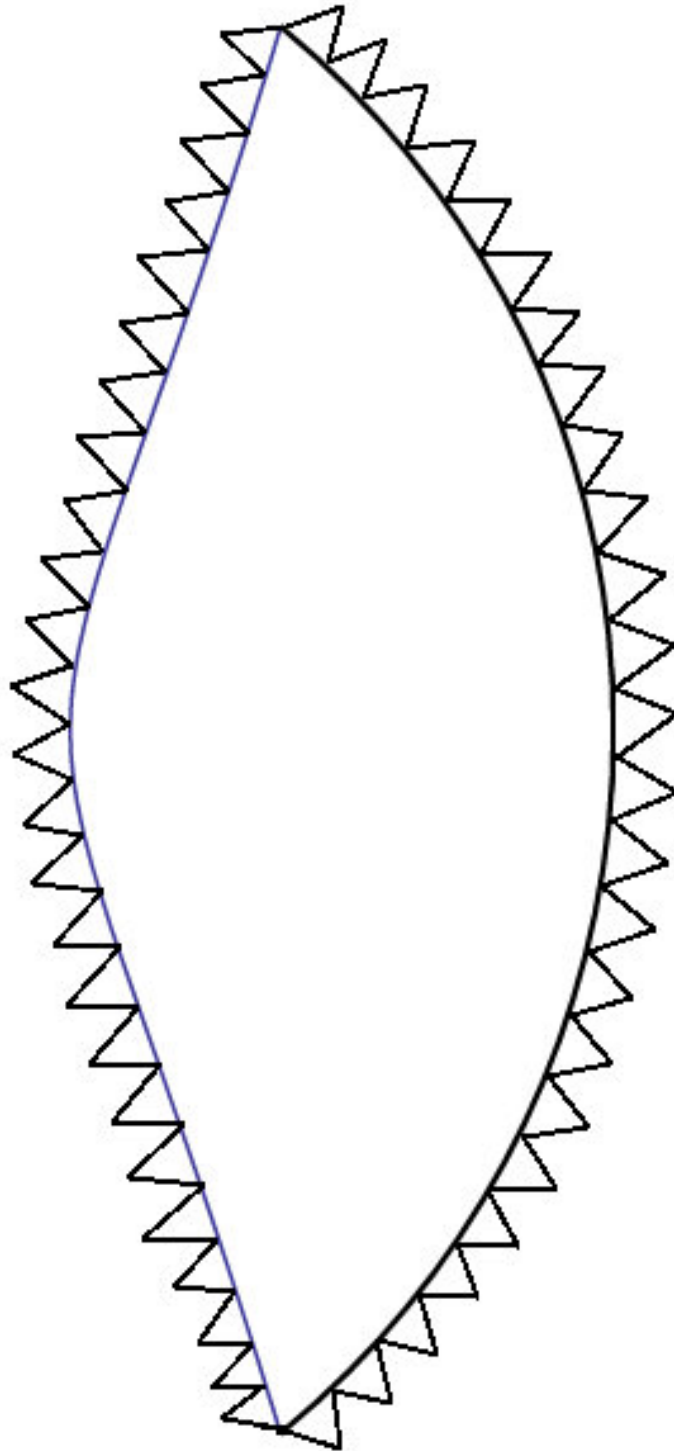
Materiais necessários

- Folhas de papel sulfite 60Kg A4, popularmente conhecido como papel cartão.
- Cola branca.
- Tesoura.
- Manta magnética adesiva, popularmente conhecido como imã de geladeira.

Moldes de um cone cortado em forma de uma parábola



Moldes de um cone cortado em forma de uma parábola



Moldes de um cone cortado em forma de uma parábola

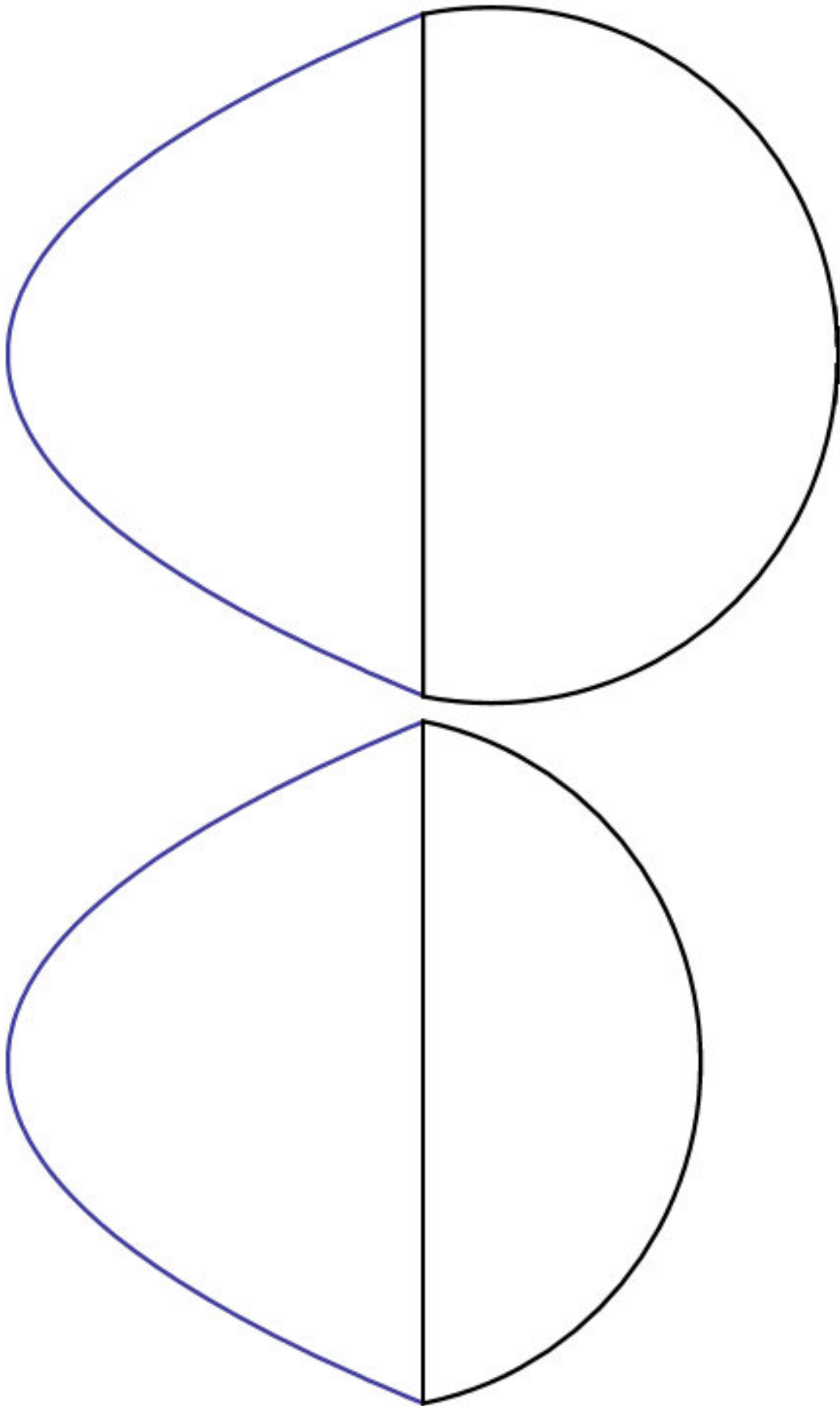


Figura 80 – Cone de papel: parábola

(a) Montado

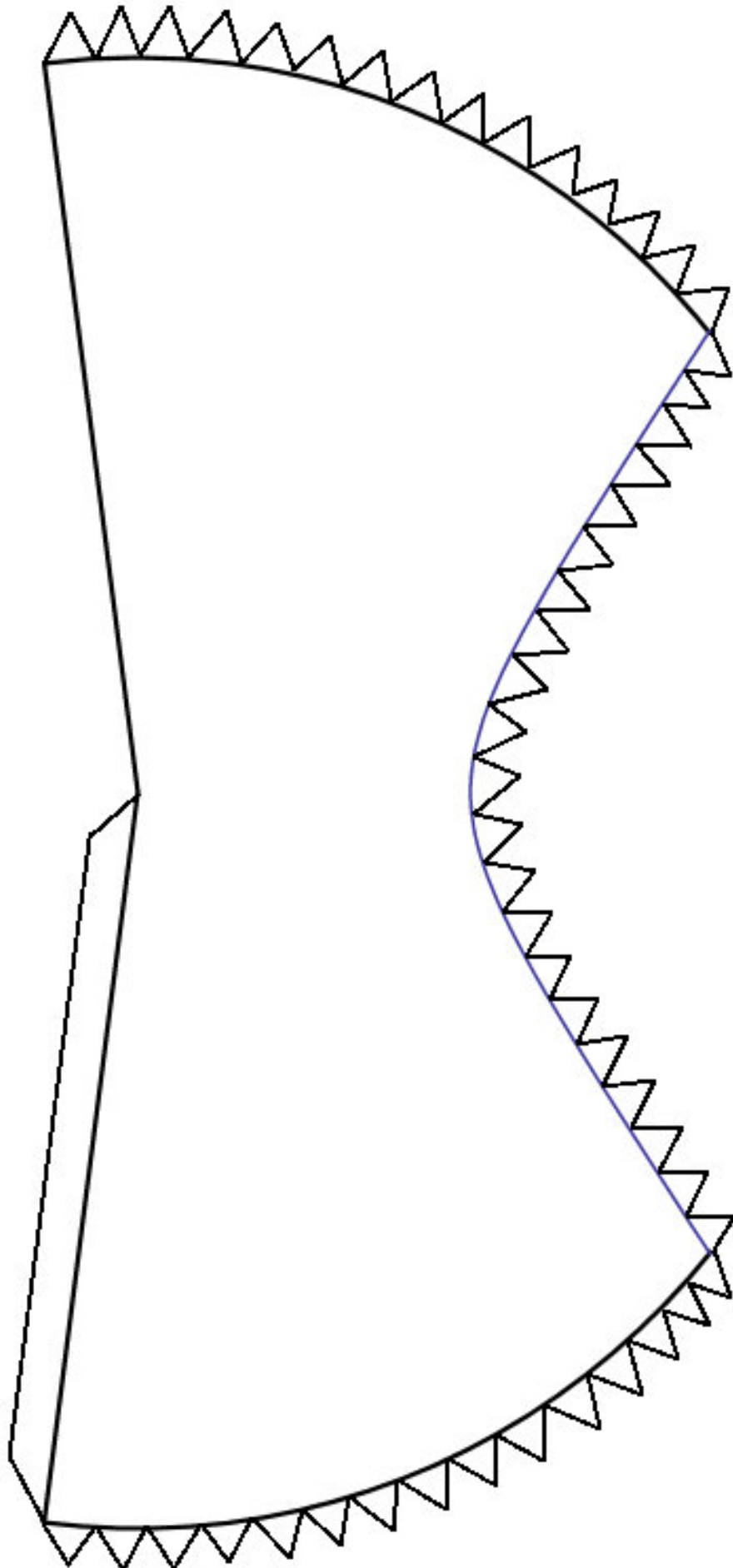


(b) Desmontado

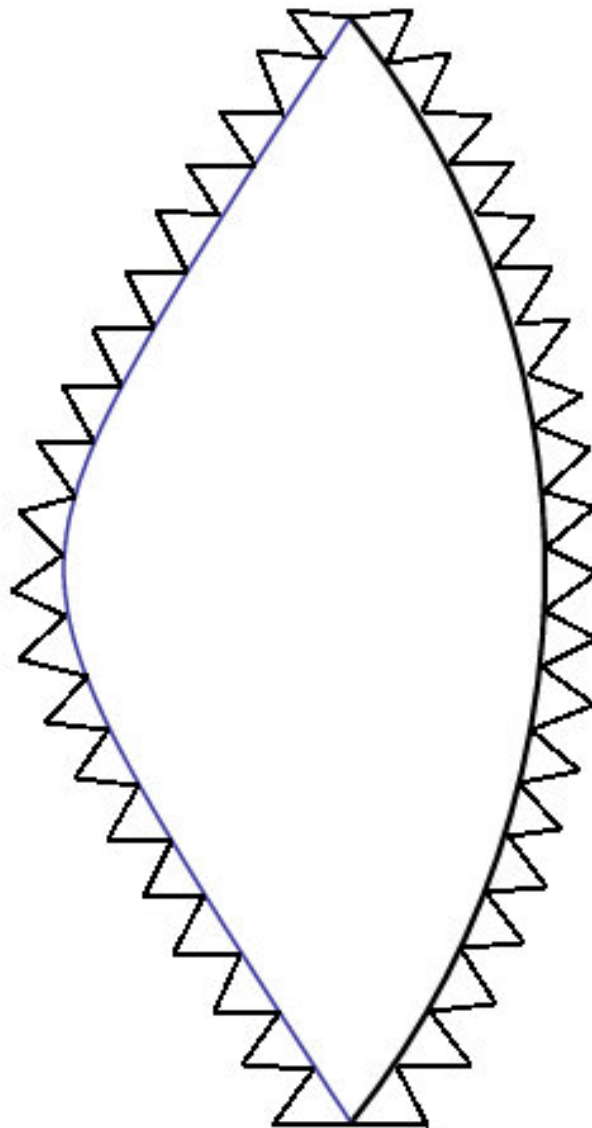


Fonte: Fotos feitas pelo autor

Moldes de um cone cortado em forma de uma hipérbole



Moldes de um cone cortado em forma de uma hipérbole



Moldes de um cone cortado em forma de uma hipérbole

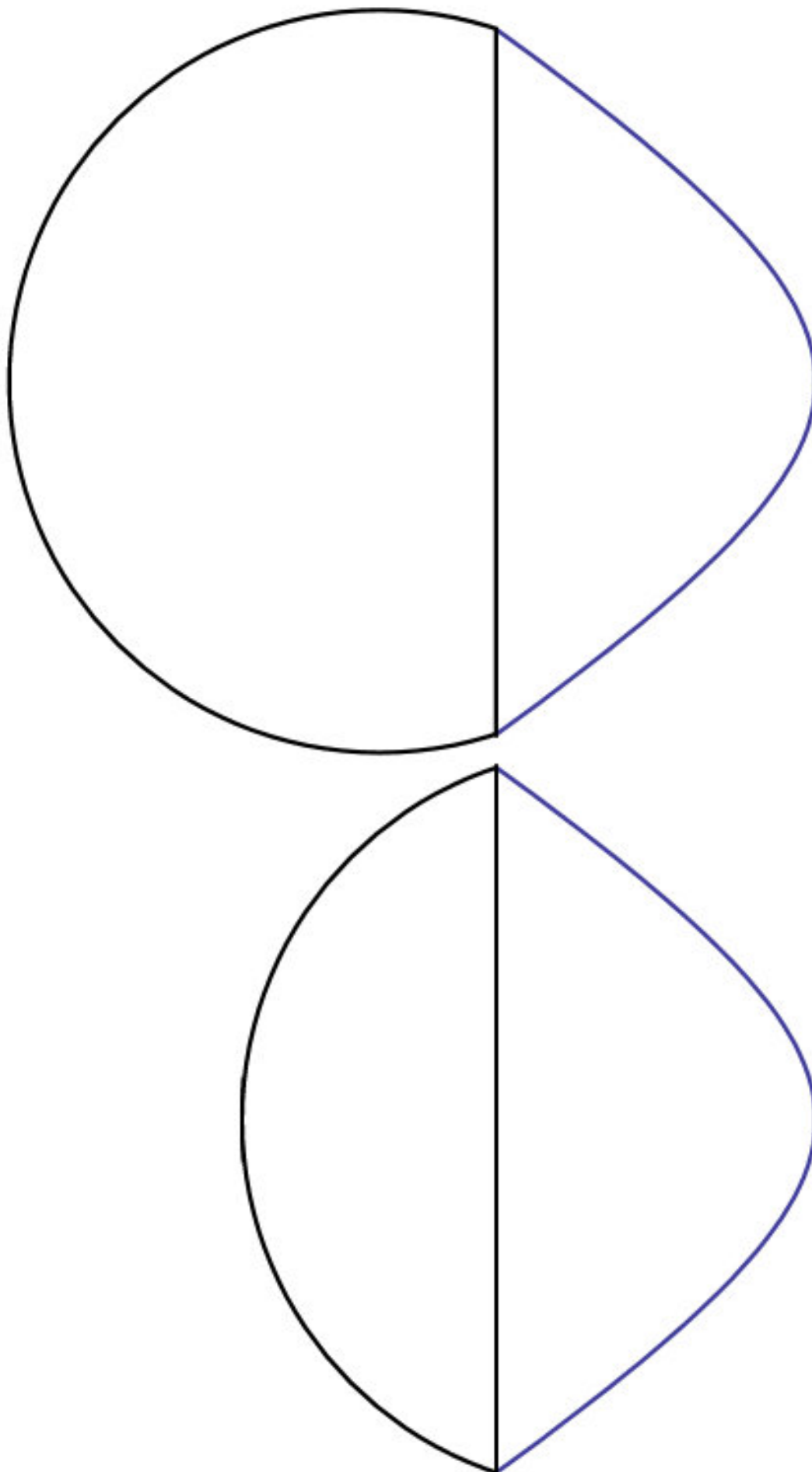
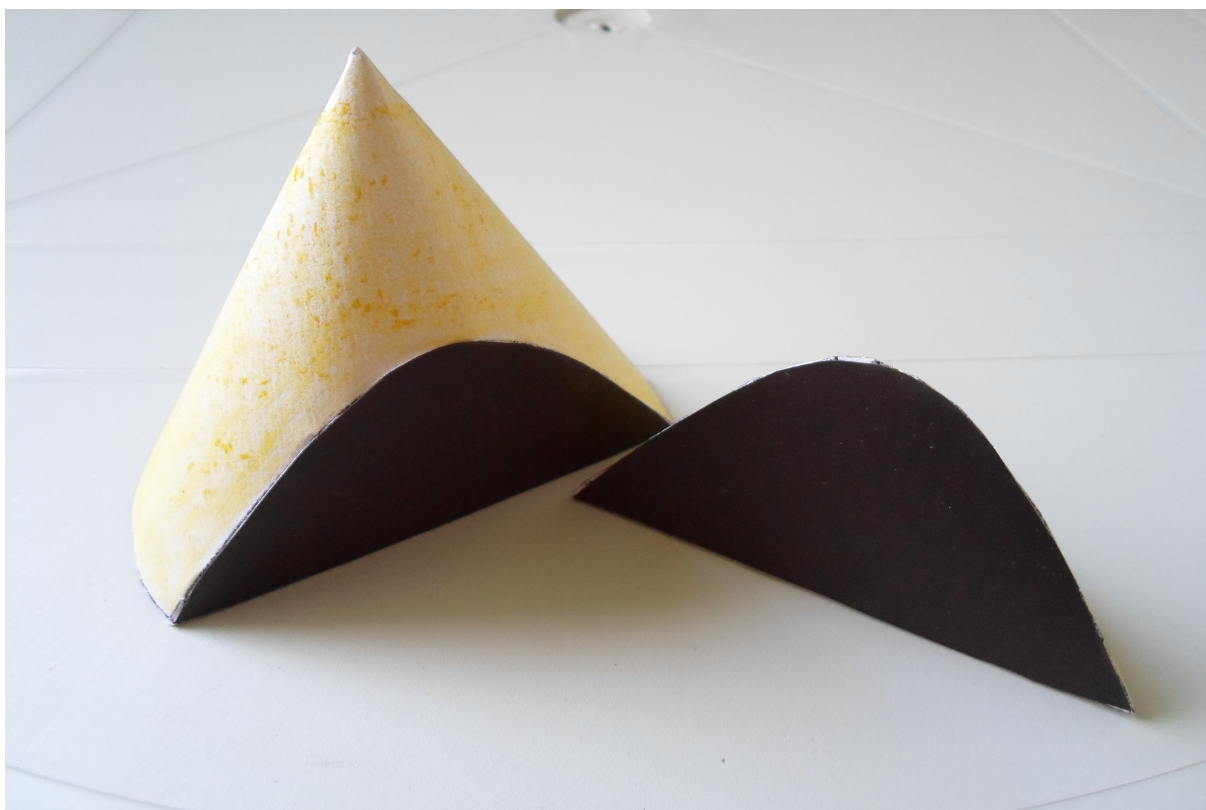


Figura 81 – Cone de papel: hipérbole

(a) Montado

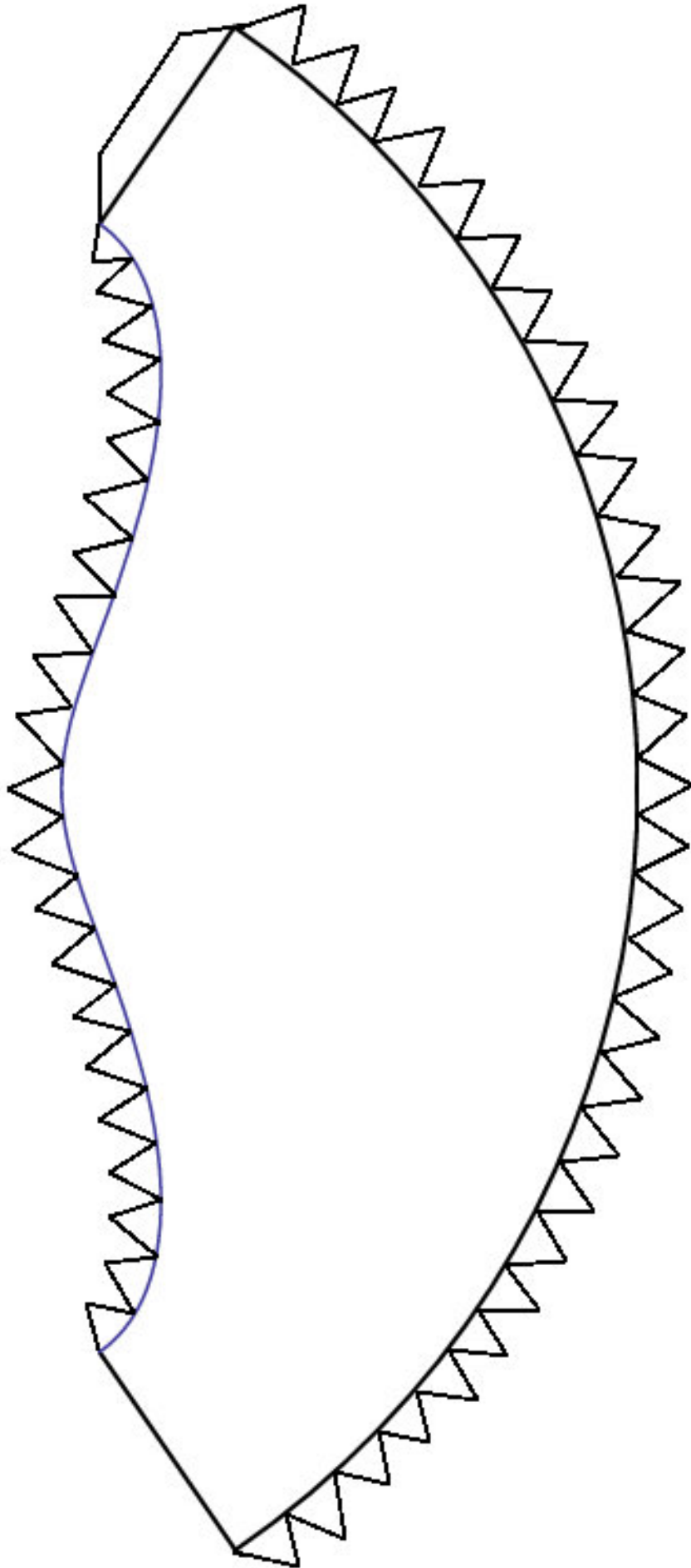


(b) Desmontado

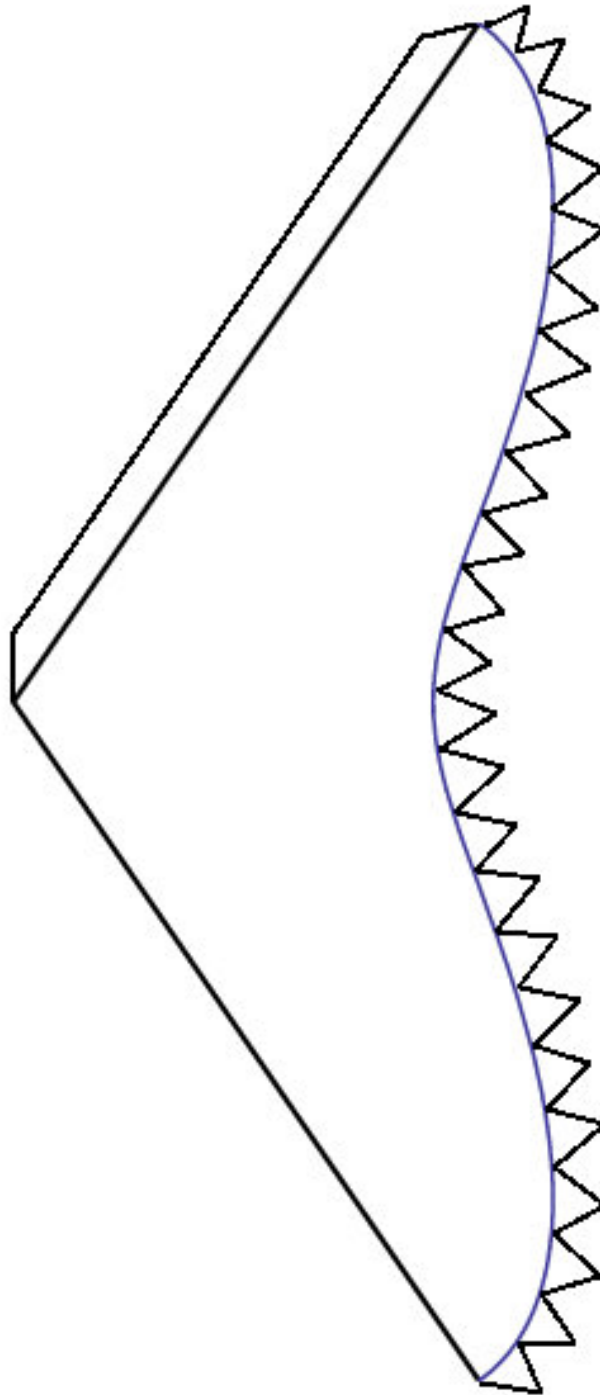


Fonte: Fotos feitas pelo autor

Moldes de um cone cortado em forma de uma elipse



Moldes de um cone cortado em forma de uma elipse



Moldes de um cone cortado em forma de uma elipse

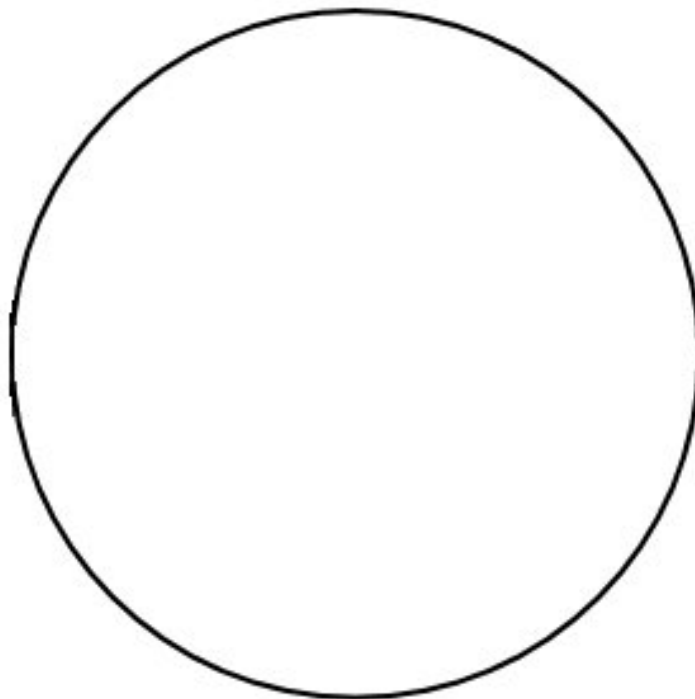
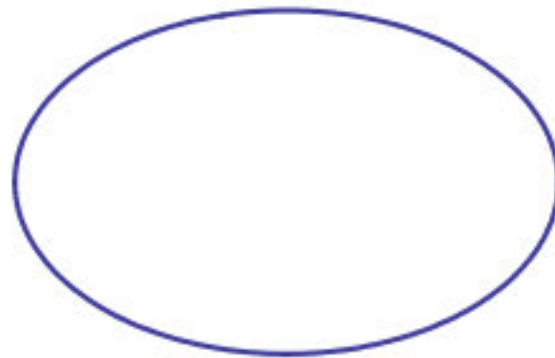
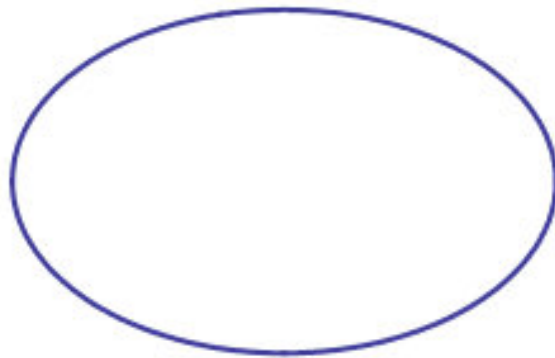


Figura 82 – Cone de papel: elipse

(a) Montado



(b) Desmontado



Fonte: Fotos feitas pelo autor