

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL (PROFMAT)**

**CURVAS DESCRITAS MECANICAMENTE E
GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DESTINADA AO
ENSINO MÉDIO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Gustavo Camargo Bérti

Santa Maria, RS, Brasil

2015

CURVAS DESCRITAS MECANICAMENTE E GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DESTINADA AO ENSINO MÉDIO

Gustavo Camargo Bérti

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo

Santa Maria, RS, Brasil

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Camargo Bérti, Gustavo
Curvas descritas mecanicamente e Geogebra: Uma proposta destinada ao Ensino Médio / Gustavo Camargo Bérti.-2015.
134 p. ; 30cm

Orientador: Edson Sidney Figueiredo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2015

1. Curvas 2. Geogebra 3. Construções geométricas I. Sidney Figueiredo, Edson II. Título.

**Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)**

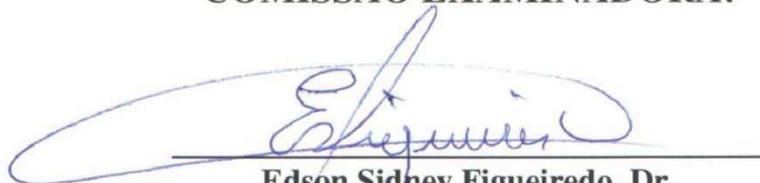
A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

**CURVAS DESCRITAS MECANICAMENTE E GEOGEBRA:
UMA PROPOSTA DESTINADA AO ENSINO MÉDIO**

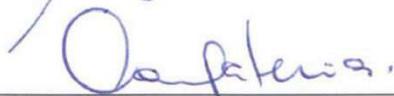
elaborada por
Gustavo Camargo Bérti

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:



Edson Sidney Figueiredo, Dr.
(Presidente/Orientador)



Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)



Maria Alice Gravina, Dra. (UFRGS)

Santa Maria, 25 de março de 2015.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me possibilitado chegar até aqui;

À minha esposa Fernanda pelo amor, apoio e companheirismo;

A meus pais Nestor e Glades pela base familiar e incentivo;

À Universidade Federal de Santa Maria pela qualidade do ensino público e gratuito;

À CAPES pela bolsa de estudos que me permitiu a permanência no programa;

Aos professores do PROFMAT (Pólo UFSM) pelos ensinamentos e pelo incentivo;

Ao professor Edson Sydney Figueiredo pela orientação no trabalho;

À professora Carmen Mathias pela eficiência e flexibilidade à frente da coordenação do programa e participação na banca;

À professora Maria Alice Gravina pela participação na banca;

Aos colegas do Colégio Vila Becker e do IFSC (Campus Florianópolis) pelo incentivo e aprendizado;

Aos colegas do PROFMAT, em especial Joseane e Adilson, pelo coleguismo, pelas caronas e pela conversa ao longo da viagem.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, e não estão nominalmente citados.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)
Universidade Federal de Santa Maria

CURVAS DESCRITAS MECANICAMENTE E GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DESTINADA AO ENSINO MÉDIO

AUTOR: GUSTAVO CAMARGO BÉRTI

ORIENTADOR: EDSON SIDNEY FIGUEIREDO

Data e Local da Defesa: Santa Maria, 25 de março de 2015.

Este trabalho objetiva abordar as curvas descritas mecanicamente como uma possível aplicação para o ensino médio. Tal enfoque justifica-se pelo fato de que as construções geométricas geradoras de cada curva são uma oportunidade para explorar elementos, propriedades e relações da geometria euclidiana, tópicos onde são constatadas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem na escola básica. Por outro lado, a obtenção dessas curvas por meio de equações paramétricas é uma situação relevante para que seja feito um paralelo entre as geometrias analítica e euclidiana. Propõe-se aqui uma série de atividades que podem ser destinadas a alunos de Ensino Médio, as quais abordam as curvas rolantes (hipociclóide, epiciclóide, ciclóide e evolvente da circunferência) e os mecanismos que geram movimento retilíneo a partir de movimento circular (mecanismos de Peaucellier e de Hart). A utilização do software de geometria dinâmica Geogebra é essencial para o desenvolvimento das atividades propostas, visto que este possibilita a construção que gera cada curva ao promover a estabilidade das relações entre os elementos mediante a ação de movimento. Ao longo do trabalho é feito um estudo a cerca dos aspectos relativos ao ensino das curvas descritas mecanicamente bem como dos aspectos conceituais que se referem às curvas rolantes e aos mecanismos que geram movimento retilíneo a partir do movimento circular a fim de possibilitar um embasamento para a aplicação das atividades sugeridas. Discute-se também sobre os possíveis objetivos que podem ser alcançados com cada tipo de atividade.

Palavras chave: Curvas; Geogebra; Construções geométricas.

ABSTRACT

Master Course Dissertation
Professional Master's Degree in National Network Mathematics (PROFMAT)
Universidade Federal de Santa Maria

MECHANICALLY DESCRIBED CURVES AND GEOGEBRA: A PURPOSE FACING TO THE HIGH SCHOOL

AUTHOR: GUSTAVO CAMARGO BÉRTI

ADVISER: EDSON SIDNEY FOGUEIREDO

Defense Place and Date: Santa Maria, March 25th, 2015.

This piece of work has as its main objective to approach the mechanically described curves as a proposal to high school. This focus is justified by the fact of the geometric constructions which generate each curve are an opportunity to explore elements, properties and relations of euclidean geometry, topics where difficulties in the teaching-learning process are found in basic school. On the other hand, the curves obtained by parametric equations are examples of relevant situations to make a parallel reasoning between the analytical geometry and the euclidean geometry. Some activities facing high school students are proposed here, which explore rolling curves (hypocycloid , epicycloid , cycloid and involute of the circle) and the mechanisms that generate linear motion from circular motion (Peaucellier and Hart). The use of a dynamic geometry software, in this case the Geogebra, is essential to the development to the activities because it allows the construction which generates each curve, promoting the stability of relations between the elements for the move action. A research about the teaching subjects related to mechanically described curves and the conceptual aspects about the rolling curves and the mechanisms that generate linear motion from circular motion are made here to support the application to the suggested activities. A discussion about the possible objectives which can be achieved with each kind of activity is also made here.

Keywords: Curves; Geogebra; Geometric constructions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Desenhos protótipo (quadrado e retângulo)	19
Figura 2 - Quadrado em posição diferente da que normalmente é apresentado nos livros didáticos	19
Figura 3 - Quadrado construído no software Geogebra	21
Figura 4 - Quadrados construídos sem considerar as propriedades (1) e considerando-as (2)	21
Figura 5- Construção de um quadrado considerando-se as propriedades no software Geogebra	22
Figura 6 - Obtenção de uma circunferência de raio 1 centrada na origem por meio de equações paramétricas	26
Figura 7 - Exemplos de curvas planas	26
Figura 8 - Exemplo de curva reversa.	27
Figura 9 - Exemplos de curvas algébricas	27
Figura 10 - Exemplos de curvas transcendentess.	27
Figura 11 - Exemplo de curva que pode ser descrita mecanicamente: a cicloide.....	28
Figura 12 - Igualdade dos comprimentos dos arcos BT e TP....	30
Figura 13 - Cúspides em pericicloides	31
Figura 14 - Pericicloides cujo traçado fica definido em apenas uma volta da geratriz ao longo da diretriz	31
Figura 15 - Pericicloides cujo traçado fica definido após duas voltas da geratriz ao longo da diretriz	32
Figura 16 - Traçado de uma pericicloide em o ponto inicial B nunca é cúspide dadas 42 voltas na diretriz	33
Figura 17 - Ângulos entre dois cúspides consecutivos	34
Figura 18 - Traçado de uma hipocicloide de acordo com a definição	34
Figura 19 - Exemplos de hipocicloides dados diferentes raios das circunferências diretriz e geratriz	35
Figura 20 - Traçado da hipocicloide (2) da figura 19 após a 1ª, 2ª e 3ª voltas da geratriz ao longo da diretriz	35
Figura 21 - Hipocicloides iguais, porém com traçado definido em número de distinto de voltas na diretriz	36
Figura 22 - Obtenção de coordenadas genéricas para o ponto P que descreve a hipocicloide	36
Figura 23 - Exemplos de astróide	39
Figura 24 - Exemplos de deltóide	41
Figura 25 - Hipocicloide degenerada	42
Figura 26 - Hipocicloide alongada (esquerda) e hipocicloide encurtada.....	43
Figura 27 - Traçado de uma epicloide de acordo com a definição	43
Figura 28 - Exemplos de epicloides dados diferentes raios das circunferências diretriz e geratriz	44
Figura 29 - Traçado da epicloide (3) da figura 28 após a 1ª e 2ª voltas da geratriz ao longo da diretriz	45
Figura 30 - Epicloide com b/a irracional dadas 20 (esquerda) e 60 voltas na circunferência diretriz.	45
Figura 31 - Obtenção das coordenadas genéricas do ponto P que descreve a epicloide.....	46
Figura 32 - Exemplo de cardióide.....	47
Figura 33 - Microfone cardióide e respectivo diagrama de diretividade do som	47

Figura 34 - Exemplo de nefróide	48
Figura 35 - Epiciclóide encurtada (esquerda) e epiciclóide alongada	49
Figura 36 - Cardióide obtida de duas formas diferentes, utilizando a definição alternativa de hipociclóide	50
Figura 37 - Traçado de uma ciclóide de acordo com a definição	50
Figura 38 – Arco TP e segmento AT de mesmo comprimento	51
Figura 39 - Primeiro ponto em que a ciclóide volta a tangenciar a reta diretriz	51
Figura 40 - Mecanismo que comprova que dados diferentes formatos de rampa, o percurso mais rápido da bola se dá na rampa em formato de ciclóide invertida.....	51
Figura 41 - Experimento em que se verifica a propriedade tautócrona da ciclóide.	52
Figura 42 - Obtenção de coordenadas genéricas para o ponto que descreve a ciclóide	52
Figura 43 – Representação das ciclóide encurtada e alongada.....	53
Figura 44 - Traçado da evolvente de uma circunferência de acordo com a definição	54
Figura 45 - Arco BT e segmento TP de mesmo comprimento	54
Figura 46 - Evolvente da circunferência de raio r dadas três voltas na diretriz	55
Figura 47 - Retas tangente e normal à evolvente no ponto A.....	55
Figura 48 - Obtenção das coordenadas genéricas do ponto P que descreve a evolvente da circunferência	56
Figura 49 - Evolvente alongada (esquerda) e encurtada de uma circunferência.....	57
Figura 50 - Curva descrita por movimento articulado.....	59
Figura 51 - Circunferência descrita pelo marcador P da barra AB, com pivô A.....	59
Figura 52 - Curva descrita pelo mecanismo de Watt.....	60
Figura 53 - Curva descrita pelo mecanismo de Tchebycheff	60
Figura 54 - Curva descrita pelo mecanismo de Robert	61
Figura 55 - Exemplos de inversão do ponto Q da circunferência de centro O mediante diferentes posicionamentos de tal ponto.....	62
Figura 56 - Inversão de uma circunferência em relação à outra circunferência.....	62
Figura 57 - Justificativa para a perpendicularidade das retas OO' e da reta obtida pela inversão da circunferência de centro O' que passa por O	63
Figura 58 - Mecanismo de Peaucellier	63
Figura 59 – Funcionamento do mecanismo de Peaucellier com base na inversão da circunferência de centro O' em relação à circunferência de centro O.....	64
Figura 60 - Construção de um paralelogramo cruzado.....	65
Figura 61 – Mecanismo de Hart	66
Figura 62 - Triângulos semelhantes que justificam o fato de O, Q e P serem colineares.....	66
Figura 63 - Possibilidades de relação entre AC e DB	67
Figura 64 - Funcionamento do mecanismo de Hart com base na inversão da circunferência de centro O' em relação à circunferência de centro O	68
Figura 65 - Obtenção da hipociclóide, epiciclóide e ciclóide reproduzindo o movimento enunciado em cada definição, utilizando material concreto.....	69
Figura 66 - Obtenção da evolvente da circunferência, utilizando material concreto.	70
Figura 67 - Possível imprecisão no traçado de algumas curvas rolantes ao realizar a construção mediante o uso de material concreto	71
Figura 68 - Relação de igualdade entre os arcos TP e BT.....	71
Figura 69 - Construções geométricas no software Geogebra que possibilitam a obtenção de hipociclóides e epiciclóides	72
Figura 70 - Obtenção de uma epiciclóide de circunferências diretriz e geratriz 6 e 2, respectivamente, alterando os parâmetros “a” e “b” e habilitando o rastro no ponto P	73
Figura 71 - Verificação da igualdade entre os comprimentos dos arcos PT e BT mediante à utilização da ferramenta Arco Circular.	74

Figura 72 - Hipociclóide com cinco cúspides e traçado completamente definido após duas voltas na diretriz.....	76
Figura 73 - Obtenção das equações paramétricas da hipociclóide.....	78
Figura 74 - Obtenção da ciclóide de diretriz $y = 0$, origem em $(0, 0)$ e geratriz de raio 2 a partir da construção geométrica	78
Figura 75 - Obtenção da ciclóide de diretriz $y = 0$, origem em $(0, 0)$ e geratriz de raio 2 a partir da variação do parâmetro t nas equações paramétricas	78
Figura 76 - Verificação no software Geogebra de que o ponto obtido pelas equações paramétricas da evolvente da circunferência de raio 2 pertence à curva	79
Figura 77 - Conjunto de epicyclóides com diferentes raios de diretriz e geratriz, mas com todas as diretrizes centradas na origem	80
Figura 78 - Conjunto de ciclóides com reta diretriz $y = 0$ e origem $(0,0)$, mas com geratrizes de diferentes raios e algumas refletidas em relação ao eixo x	80
Figura 79 - Mecanismos de Peaucellier de Hart	81
Figura 80 - Inversão de uma circunferência de centro O' em relação a uma circunferência de centro O no caso em que O pertence à circunferência de centro O'	82
Figura 81 - Utilização das ferramentas do Geogebra para constatar que o produto dos comprimentos de OQ e OP equivale à constante 9 (quadrado do raio da circunferência que é referência da inversão)	83
Figura 82 - Observação do movimento circular descrito pelo ponto A no mecanismo de Peaucellier.....	83
Figura 83 - Utilização da Lei dos Cossenos e de funções trigonométricas inversas para o cálculo da medida do ângulo $\hat{A}OD = \alpha$	84
Figura 84 - Utilização de triângulos semelhantes no mecanismo de Hart.....	84
Figura 85 - Constatação de que a reta descrita pela trajetória de P é o resultado da inversão circular da circunferência de centro O' em relação a uma circunferência de centro O	85
Figura 86 - Limitações físicas do mecanismo de Peaucellier.....	85

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Exemplo de competências dos PCN+ (BRASIL, 2002, p.114 – 119) e possível relação com o campo da geometria	16
Quadro 2 - Representação algébrica de curvas bidimensionais.....	25
Quadro 3 - Curvas rolantes a serem estudadas nesse trabalho	29
Quadro 4 - Relações válidas independentemente da posição do ponto P.....	37
Quadro 5 - Mudanças decorrentes da evolução da trajetória do ponto P	37
Quadro 6 - Obtenção das coordenadas genéricas do ponto P nos casos (1) e (4) do quadro 5.....	38
Quadro 7 - Abordagem das posições relativas entre elementos geométricos no roteiro para a construção geométrica que permite a obtenção de hipociclóides.....	73
Quadro 8 - Epiciclóides obtidas mediante alterações nos parâmetros “a” e “b	75
Quadro 9 - Ângulo que varia segundo o parâmetro t em cada uma das curvas rolantes	77

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1 ASPECTOS RELEVANTES AO ENSINO DE CURVAS DESCRITAS MECANICAMENTE NO ENSINO MÉDIO	15
1.1 O ensino da geometria na escola básica.....	15
1.2 A geometria dinâmica como alternativa para o ensino da geometria euclidiana	18
1.3 Sobre conceitos de geometria analítica	23
1.3.1 Equações paramétricas e curvas planas	25
2 CURVAS ROLANTES	29
2.1 Periciclóides	30
2.1.1 Hipociclóides	34
2.1.1.1 Astróide	39
2.1.1.2 Deltóide	40
2.1.1.3 Hipociclóide degenerada	41
2.1.1.4 Hipocilóides encurtada e alongada	42
2.1.2 Epiciclóides	43
2.1.2.1 Cardióide	46
2.1.2.2 Nefróide	48
2.1.2.3 Epicilóides encurtada e alongada	49
2.1.2.4 Epiciclóide como caso particular de hipociclóide	49
2.2 Ciclóide	50
2.2.1 Ciclóides encurtada e alongada	53
2.3 Evolvente da circunferência	54
2.3.1 Evolventes encurtada e alongada da circunferência	57
3 MOVIMENTO RETILÍNEO PRODUZIDO POR MOVIMENTO CIRCULAR	58
3.1 Sistemas articulados	58
3.2 Movimento quase retilíneo produzido por sistemas articulados.....	59
3.3 Movimento exatamente retilíneo produzido por movimento circular.....	61
3.3.1 Inversão circular	61
3.3.2 Mecanismo de Peaucellier	63
3.3.3 Mecanismo de Hart	65
4 OBJETIVOS DAS ATIVIDADES SUGERIDAS	69
4.1 Atividades envolvendo curvas rolantes	69
4.1.1 Construção com material concreto.....	69
4.1.2 Construção utilizando o programa Geogebra.....	71
4.1.3 Exercícios que utilizam a construção geométrica pronta	74
4.1.4 Obtenção das equações paramétricas	76
4.1.5 Utilização de equações paramétricas para a obtenção de curvas.....	79

4.2 Atividades envolvendo movimento retilíneo gerado por movimento circular	81
4.2.1 Construção utilizando o programa Geogebra.....	81
4.2.2 Exercícios que utilizam a construção geométrica pronta	83
CONCLUSÕES	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
ANEXOS	93
Anexo 1 – Alguns comandos do Geogebra necessários para o desenvolvimento das atividades	93
Anexo 2 – Atividades que envolvem hipociclóides	104
Anexo 3 – Atividades que envolvem epiociclóides	111
Anexo 4 – Atividades que envolvem ciclóides	118
Anexo 5 – Atividades que envolvem evolventes de circunferência	124
Anexo 6 – Atividades que envolvem inversão circular	130
Anexo 7 – Atividades que envolvem o mecanismo de Peaucellier	131
Anexo 8 – Atividades que envolvem o mecanismo de Hart	133

INTRODUÇÃO

Os elementos geométricos normalmente são estudados na escola básica de forma estática, porém quando a geometria é aplicada a problemas concretos são comuns aqueles onde a ação de movimento se faz presente. No campo da engenharia mecânica e da automatização industrial, por exemplo, configurações geométricas que sofrem ação de movimento servem de base para a construção de máquinas. Nesse contexto, é pertinente observar as trajetórias de pontos fixos nessas configurações geométricas que sofrem ação de movimento, visto que as curvas descritas por tais trajetórias podem ser aplicáveis a diversos campos da ciência e conduzir a avanços tecnológicos significativos.

Pensando na escola básica, o estudo das curvas descritas mecanicamente pode auxiliar no sentido de proporcionar uma abordagem inovadora para o estudo das geometrias plana e espacial, com a possibilidade de articulação com a geometria analítica, indo de encontro com as competências descritas nas orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+) (BRASIL, 2002).

Este trabalho propõe uma reflexão a cerca de uma proposta didática de abordagem das curvas descritas mecanicamente na escola básica. Para tal, é feito um estudo sobre questões de cunho pedagógico e conceitual a cerca dessas curvas, acompanhado por sugestões de atividades que exploram essa temática.

O tema desse trabalho é justificado pela constatação do autor, docente do Ensino Médio, da limitação de parte dos alunos no que diz respeito ao raciocínio geométrico, principalmente à compreensão da relação entre os aspectos visuais e as propriedades de certa configuração geométrica, bem como das dificuldades na conversão entre os raciocínios que exploram geometria euclidiana e aqueles que exploram geometria analítica. Tal constatação também é feita por Almouloud et al. (2004) que afirmam que a geometria é tratada no Ensino Médio de forma desconexa com as demais ciências e até mesmo com os demais campos da Matemática.

Busca-se aqui propor conceitos que não estão em Brasil (2002) para explorar competências importantes que estão listadas nesse documento. Espera-se que, motivados por construir configurações geométricas decorrentes da aplicação direta de um conceito, visualizar a curva obtida pela construção, justificar o funcionamento das construções e ter a possibilidade de obter a mesma curva por meio de um procedimento mais prático, os alunos

se interessem por explorar conceitos e propriedades da geometria euclidiana bem como utilizar essas propriedades para obter equações paramétricas.

De forma prática, este estudo visa observar a curva descrita pela trajetória de um ponto de uma configuração geométrica quando essa sofre a ação de movimento. Por exemplo, pensando em uma circunferência e uma reta tangente, qual seria a curva descrita pela trajetória de um ponto fixo da circunferência quando essa rola, sem deslizar, ao longo da reta? Respostas como infinitas circunferências ou segmentos de reta podem ser obtidas quando esta pergunta é feita em sala de aula. Na verdade, a curva obtida é uma novidade aos alunos, e espera-se que a expectativa em visualizar e justificar a obtenção dessa curva seja a motivação comentada anteriormente.

Serão abordados três tipos de curvas rolantes (periciclóides, ciclóides e evolventes de circunferência) e mecanismos que produzem movimento retilíneo por meio de movimento circular. Como a ação do movimento é essencial para a visualização da geração das curvas, se faz imprescindível um instrumento que permita tal visualização de forma prática, no caso desse trabalho, um software de geometria dinâmica. Na proposta aqui desenvolvida utiliza-se o software Geogebra, em função desse ser um software gratuito e possuir ferramentas cuja aplicação é relativamente simples e eficaz considerando-se os objetivos elencados.

No capítulo 1 abordam-se aspectos relevantes ao ensino de curvas descritas mecanicamente no Ensino Médio. Esse tema é desenvolvido apresentando-se algumas dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da geometria, tanto por parte do educando quanto por parte do docente, bem como algumas considerações descritas em Brasil (2002) a cerca de tal área da Matemática. Discute-se sobre as possibilidades da exploração da geometria dinâmica e das relações entre as geometrias euclidiana e analítica do Ensino Médio como alternativa às dificuldades citadas anteriormente. As curvas descritas mecanicamente são apresentadas como uma alternativa de abordagem dos tópicos da geometria euclidiana (os quais são utilizados nas construções e na obtenção das equações paramétricas dessas curvas), introduzindo conceitos relativamente complexos (a definição mecânica das curvas rolantes, por exemplo), mas que podem ser abordados de forma simples com o auxílio da geometria dinâmica e da geometria analítica.

O capítulo 2 traz um estudo conceitual a cerca das curvas rolantes. As definições de cada curva, bem como propriedades e observações, são apresentadas e justificadas. A obtenção das equações paramétricas é baseada na observação de relações geométricas presentes na configuração geométrica que possibilita a obtenção de cada curva.

O movimento retilíneo produzido por movimento circular é o tema do capítulo 3. Primeiramente conceitua-se sistema articulado e apresentam-se alguns mecanismos que geram movimento quase retilíneo. O conceito de inversão circular é explorado em razão de ser essencial para a obtenção do movimento retilíneo a partir do movimento circular. Os mecanismos de Peaucellier e de Hart são apresentados e tem seu funcionamento justificado por meio de relações geométricas básicas aliadas ao conceito de inversão circular.

No capítulo 4 são apresentados os objetivos das sugestões de atividades que exploram os tópicos abordados nos capítulos 2 e 3, as quais encontram-se anexadas a esse trabalho. Nas atividades que envolvem curvas rolantes, alguns exercícios visam à geração da curva utilizando material concreto, fazendo a construção no software Geogebra ou obtendo as equações paramétricas, e outros exploram as configurações geométricas que geram as curvas e as equações paramétricas já obtidas. Nas atividades que envolvem o movimento retilíneo produzido por movimento circular há atividades que visam à compreensão do conceito de inversão circular, à reprodução dos mecanismos de Peaucellier e Hart no Geogebra, e à utilização dos mecanismos prontos para a verificação de propriedades utilizadas na construção. Como o software Geogebra é necessário para a realização dessas atividades, há uma descrição dos comandos básicos do programa no anexo 1.

Espera-se que as atividades aqui sugeridas possam ser aplicadas por professores do Ensino Médio, em parte ou na íntegra. Acredita-se que tais atividades podem ser aplicadas em forma de oficina, reservando-se em torno de duas aulas para as atividades que envolvem cada tipo de curva, ou escolhendo alguns exercícios de forma isolada, quando forem pertinentes a algum assunto que está sendo abordado em sala de aula. Sugere-se que as atividades que abordam curvas rolantes sejam aplicadas para a introdução do conceito de equações paramétricas no Ensino Médio, visto que tal tópico normalmente não é abordado em tal nível de ensino, mas é extremamente importante em cursos superiores nas áreas que envolvem tecnologia.

1 ASPECTOS RELEVANTES AO ENSINO DE CURVAS DESCRITAS MECANICAMENTE NO ENSINO MÉDIO

1.1 O ensino da geometria na escola básica

Cerca de 30% a 40% das provas de matemática de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) são destinadas ao pensamento geométrico, segundo reportagem do jornal Zero Hora, datando de 10 de julho de 2014. Provavelmente tal fato seja justificado pela importância da geometria, principalmente por servir de instrumento para outras áreas do conhecimento. Mesmo assim, ficam evidentes as dificuldades do aprendizado de tópicos relacionados a tal campo da matemática nos mais variados níveis de ensino. Os resultados obtidos em pesquisa realizada pelo SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) no ano de 1995 apontam um rendimento geral insatisfatório em Matemática, tendo em vista que os percentuais de acerto por habilidade, em sua maioria, situam-se abaixo de 50% (BRASIL, 1997), é relevante o fato de que o pior índice refere-se à geometria.

É possível que essas dificuldades no aprendizado sejam ocasionadas pelo tratamento que normalmente é dado à geometria na escola básica, desconexo dos outros campos da Matemática e das demais ciências. Prova disso é o fato de que não há um consenso quanto à organização e à seleção dos conteúdos a serem trabalhados, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio (Almouloud et al., 2004).

As orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+) (BRASIL, 2002), trazem diretrizes quanto às competências a serem desenvolvidas no estudo da Matemática no Ensino Médio. Tais competências podem ser relacionáveis com a geometria. O quadro 1 traz um exemplo de uma das competências descritas nos PCN+ e uma possível relação com o campo da geometria.

Competência do PCN+	Exemplo de relação com a geometria
Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras.	Perceber que o lugar geométrico de todos os pontos que distam uma unidade de comprimento do ponto $(0,0)$ (circunferência de raio 1 e centro $(0,0)$)

	<p>corresponde à curva cujas equações paramétricas são $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, fazendo uma relação de mão dupla entre geometria plana (construção da circunferência) com a geometria analítica (equações paramétricas).</p>
--	--

Quadro 1 – Exemplo de competência dos PCN+ (BRASIL, 2002, p.114 – 119) e possível relação com o campo da geometria. Fonte: Autor

A proposta encontrada em Brasil (2002) não é fornecer uma lista de conteúdos, mas sim sugestões para o Projeto Político Pedagógico (PPP) de cada escola. De acordo com tal documento, o ensino da Matemática pode ser sistematizado em três eixos, desenvolvidos ao longo dos três anos do ensino médio:

- Álgebra: números e funções;
- Geometria e medidas;
- Análise de dados.

No eixo geometria e medidas, objetiva-se que o educando utilize formas geométricas para representar ou visualizar situações-problema pertinentes da vida cotidiana. Para que tal objetivo seja alcançado, devem ser desenvolvidas as habilidades de visualizar, desenhar, argumentar logicamente e aplicar tais argumentos na resolução dessas situações. São propostas quatro unidades temáticas para auxiliar o desenvolvimento dessas habilidades:

- Geometria plana;
- Geometria espacial;
- Geometria métrica;
- Geometria analítica.

O mesmo documento classifica as propriedades geométricas em dois grupos:

Propriedades associadas às medidas: Quantificação de comprimentos, áreas e volumes;
 Propriedades associadas à posição relativa das formas: Identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas. (BRASIL, 2002, p. 123)

Para Brasil (2002), a construção de um aprendizado significativo no campo da geometria fica condicionada a um ensino que enfatize tanto as propriedades associadas à posição relativa

das formas quanto àquelas associadas às medidas. Tal equilíbrio muitas vezes não é visto na escola básica nem nos livros didáticos, que muitas vezes dão muita ênfase aos problemas e propriedades associados às medidas e pouco exploram o outro tipo de propriedade.

Outro fator relevante ao ensino da geometria é a relação do professor com tal campo da Matemática. Para Almouloud et al. (2004) o fato de a geometria métrica ser privilegiada na escola básica pode ser proveniente da dificuldade de abstração de alguns professores, que tem maior facilidade para obter relações a partir de dados numéricos do que figuras e configurações. Essa dificuldade em tratar de conceitos abstratos faz com que muitos conceitos sejam abordados pelo senso comum, e não como conteúdos matemáticos.

Como exemplo dessa banalização de conceitos, os autores citam o conceito de distância:

Embora o conceito de distância faça parte do currículo e possa ser trabalhado a partir das séries iniciais do ensino fundamental, percebemos que as dificuldades identificadas nestes professores se originam pela existência de concepções não estáveis sobre linha reta, perpendicularismo e altura, que interferem diretamente na construção do conceito de distância. (ALMOULOU et al., 2004, p.100)

Gravina (1996) faz um estudo sobre o perfil dos alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. A autora constatou que esses licenciandos chegam à universidade sem terem atingido os níveis mentais de dedução e rigor, o que faz com que muitos não dominem os processos característicos e fundamentais da geometria.

Parte das universidades não consegue suprir essa defasagem dos alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática. Para Almouloud et. al. (2004) uma formação deficitária faz com que alguns professores não desenvolvam adequadamente as habilidades de compreensão de enunciados, aquisição de vocabulário de termos matemáticos e análise de dados. Tais deficiências acarretam em estratégias ineficazes para a resolução de situações-problema de um modo geral, em especial àquelas envolvendo geometria.

Acredita-se que conceitos de geometria básica não entendidos por completo impedem a compreensão de conceitos mais avançados. A falta de base conceitual pode se refletir diretamente no aprendizado do educando:

[...] ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina nem a constituição de significados que não possui ou a autonomia que não teve oportunidade de construir. (MELLO, 2002 apud ALMOULOU et al., 2004, p. 100)

A citação a seguir reforça a importância de o docente ter o domínio dos conhecimentos, em especial aqui, aqueles que se referem à geometria:

Somente com um sólido conhecimento dos conteúdos a ensinar é que o professor poderá refletir sobre a forma mais conveniente para os alunos lidarem com esse conhecimento e se apropriarem dele. (MARQUES E NASSER, 2007, p. 2)

Ball (1991 apud CURI E PIRES, 2008) ressalta que, para que a Matemática possa ser ensinada é necessário que o docente tenha um conhecimento que envolve não apenas a apropriação dos conceitos, proposições e procedimentos matemáticos, mas também a estruturação da Matemática, bem como da relação entre os temas pertinentes a essa ciência. Nessa configuração, pode-se pensar que o docente, ao ensinar geometria, precisa ter o domínio de toda Matemática da escola básica, no intuito de fazer as relações aqui citadas.

Ao fim dessa seção é possível perceber que há fatores complexos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem em geometria. Na sequência do capítulo buscam-se algumas alternativas para o desenvolvimento desse processo.

1.2 A geometria dinâmica como alternativa para o ensino da geometria

Gravina (1996) faz considerações a cerca das dificuldades inerentes ao aprendizado da geometria baseando-se na teoria proposta por Fischbein (1993) que trata dos objetos geométricos por meio de duas componentes: figural e conceitual.

A componente figural refere-se à imagem mental associada ao objeto geométrico, levando-se em consideração todas as modificações que podem ser causadas pela influência de movimento. Por outro lado, a componente conceitual aborda as propriedades que caracterizam certa classe de objetos, por meio da linguagem escrita ou falada. A correta noção sobre o objeto geométrico depende da harmonização entre as duas componentes.

Muitas vezes a componente figural é tida como a única forma de representar o objeto geométrico, esquecendo-se da componente conceitual. Gravina (1996) salienta que isso é uma consequência do tratamento estereotipado que normalmente é dado aos objetos geométricos na escola básica. Tal abordagem é reforçada pelos livros didáticos que comumente trazem definições, por vezes de difícil compreensão, acompanhadas por desenhos bem particulares (desenhos protótipo). Como exemplos, pode-se pensar no quadrado, que normalmente é apresentado nos livros didáticos com os lados paralelos às bordas da folha, no triângulo retângulo, normalmente com a base paralela à margem inferior, conforme ilustra a figura 1.

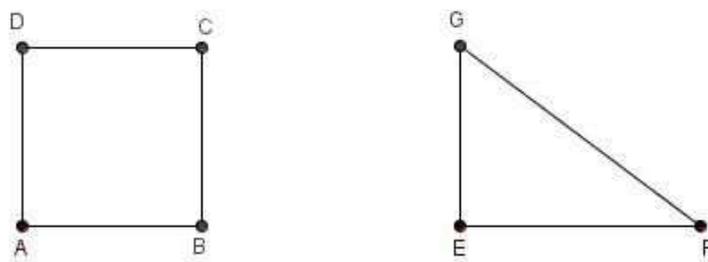


Figura 1 - Desenhos protótipo (quadrado e retângulo). Fonte: AUTOR

Gravina (1996) afirma que o uso de desenhos protótipo faz com que os alunos não reconheçam os mesmos objetos geométricos quando em outra situação. Por exemplo, na figura 2, o aluno não reconhece que ABCD é um quadrado por estar em uma posição diferente da que normalmente é apresentada nos livros didáticos.

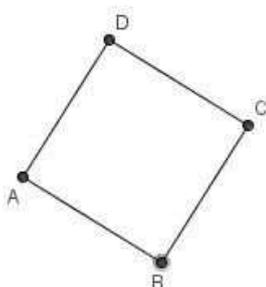


Figura 2 - Quadrado em posição diferente da que normalmente é apresentado nos livros didáticos. Fonte: AUTOR

A não aceitação da figura 2 como quadrado por parte do aluno atesta a negligência da componente conceitual desse objeto geométrico. Características particulares do desenho protótipo como ter os lados paralelos às bordas da folha são utilizadas para justificar tal fato em detrimento do conceito formal de quadrado (quadrilátero com os pares de lados opostos paralelos e os quatro lados congruentes).

É possível destacar as consequências da abordagem inadequada da componente conceitual de um objeto geométrico:

A dificuldade em manipular objetos geométricos, a saber, a tendência em negligenciar o aspecto conceitual pela pressão de restrições do desenho, é um dos maiores obstáculos para o aprendizado da Geometria. Frequentemente condições figurais (de desenho) escapam do controle conceitual, e impõe, a linha de pensamento, interpretações que do ponto de vista de desenho são consistentes, mas que não são condições conceituais. (FISCHBEIN, 1993 apud GRAVINA, 1996, p. 3)

Segundo Brandão e Isotani (2003), no ensino tradicional, o aluno não é incentivado a ser o sujeito da construção do próprio conhecimento, pois muitas vezes apenas memoriza e reproduz, sem a devida compreensão, conceitos, definições e propriedades. Ao modificar as características de vários objetos matemáticos e relacionar, analisar e verificar genericamente as consequências dessas mudanças, o aluno construirá um aprendizado significativo por meio dessa pesquisa.

Para Gravina (1996) a construção de objetos geométricos e a observação das propriedades decorrentes desse processo fazem com que o aluno estabeleça estratégias de investigação que levam ao domínio dos conceitos geométricos. A dedução das propriedades implica no estabelecimento de uma rede lógica de raciocínios relacionando as hipóteses (propriedades do enunciado tomadas como pressupostos) às teses (propriedades decorrentes). Gravina (1996, p.3) diz que “o desenho entra aqui como materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades”.

Usualmente se trabalha a geometria na escola básica, de forma estática, talvez pela limitação física “quadro e giz”. Gravina (1996) afirma que grande parte das dificuldades de aprendizagem em geometria se origina no aspecto estático do desenho. Quando o movimento é levado em consideração, as particularidades de certo desenho mudam e ficam evidentes as reais propriedades geométricas dessa configuração. Para Gravina (1996, p.6), “um dos aspectos importantes na investigação matemática é a abstração da invariância, mas para reconhecê-la, para ver o que permanece igual, devemos ter a variação”.

Segundo Gravina (1996), devido às limitações físicas da sala de aula, o recurso informático é extremamente útil no processo de ensino-aprendizagem da geometria por meio de “desenhos em movimento”.

O termo geometria dinâmica refere-se à geometria implementada por softwares, os quais permitem que os objetos geométricos sejam movimentados mantendo-se as propriedades levadas em consideração na construção de certa configuração geométrica. Em seu estudo, Richit (2010) faz um comparativo entre alguns softwares de geometria dinâmica, apontado as potencialidades e limitações de cada um.

No trabalho aqui apresentado destaca-se o Geogebra, em função desse ser um software gratuito e possuir ferramentas cuja aplicação é relativamente simples e eficaz considerando-se os objetivos elencados. O desenvolvimento das atividades sugeridas nos anexos e a obtenção das curvas apresentadas ao longo do texto são baseados no uso de tal software.

A geometria dinâmica pode ser uma possibilidade no processo de ensino-aprendizagem da geometria euclidiana:

[...] é possível perceber como a utilização da tecnologia, através da geometria dinâmica, pode colaborar para a superação de inúmeras dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem da geometria euclidiana, resgatando dois aspectos tão esquecidos quanto importantes no ensino da matemática: o intuitivo e o lógico. (ALVES E SALUM, 2003, p.2)

Para Braviano e Rodrigues (2014), a geometria dinâmica não se trata de um novo tipo de geometria, mas sim da exploração da idéia de movimento nas descrições geométricas. Brandão e Isotani (2003), afirmam que a geometria dinâmica é uma oposição à geometria tradicional (estática), pois permite essa invariância das relações quando ocorre à ação de movimento, o que não ocorre em uma construção feita com papel, régua e compasso.

Como exemplo dessa possibilidade dos softwares de geometria dinâmica, vejamos a construção do quadrado ABCD de duas formas, sem utilizar as ferramentas que mantêm as relações sobre a influência de movimento e utilizando-as. Em ambos os casos a figura obtida pode ser o quadrado mostrado na figura 3.



Figura 3 - Quadrado construído no software Geogebra. Fonte: AUTOR

Ao deslocar o vértice B, a construção que não utilizou as propriedades do quadrado se deforma, conforme ilustra a figura 4 – (1), enquanto a outra se mantém como quadrado, apenas em uma posição diferente da posição inicial e talvez com lados de medida distinta em relação ao quadrado original, como se visualiza na figura 4 – (2).

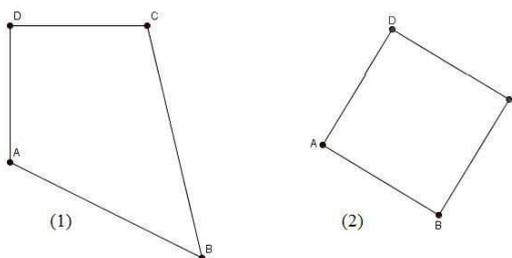


Figura 4 - Quadrados construídos sem considerar as propriedades (1) e considerando-as (2). Fonte: AUTOR

Para Gravina (2001), a estabilidade sob a ação de movimento que os softwares de geometria dinâmica possibilitam faz com que, caso todas as propriedades de certo objeto geométrico sejam respeitadas na respectiva construção, se tenha na tela uma infinidade de desenhos que mantêm as propriedades do objeto vislumbrado na construção inicial.

A construção do quadrilátero ABCD levando em consideração as propriedades do quadrado é possível em razão de os softwares de geometria dinâmica oferecem régua e compasso eletrônicos e ferramentas para que as construções sejam feitas com base nas propriedades dos objetos geométricos. A figura 5 ilustra uma possível construção de quadrado no software Geogebra, considerando-se as propriedades e o definem.

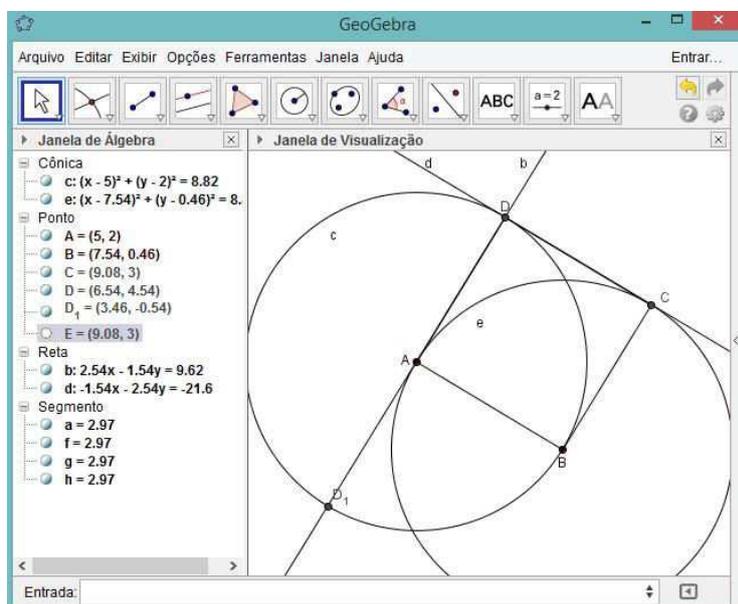


Figura 5- Construção de um quadrado considerando-se as propriedades no software Geogebra. Fonte: AUTOR

Segundo Gravina (1996) essa utilização dos recursos de “desenho em movimento” e medição de segmentos oferecidos pelo programa propicia que os alunos explorem situações diferentes das prototípicas, trabalhando a matemática em uma abordagem experimental. A constatação das regularidades que surgem com a exploração das diferentes configurações sobre a ação de movimento traz a busca pela demonstração que independa de experiências concretas, estabelecendo o processo de dedução e rigor, a natureza do raciocínio matemático.

A importância do software de geometria dinâmica como possibilidade para exploração de uma configuração geométrica é ressaltada por Alves e Soares (2003, p.175), quando afirmam

que “os alunos podem fazer conjecturas e formular e refinar hipóteses, compreendendo a importância da demonstração de proposições geométricas”.

Por outro lado, Munzer (1996) faz uma crítica à geometria dinâmica afirmando que a visualização desestimula, ou até mesmo dispensa a necessidade de prova matemática. Brandão e Isotani (2003) rebatem essa crítica ressaltando que, com o auxílio da geometria dinâmica, o aluno pode encontrar contra-exemplos para uma conjectura em estudo, mais uma das etapas importantes na construção de um aprendizado significativo em matemática.

King e Schattshneider (1997 apud BRANDÃO E ISOTANI, 2003) destacam os principais benefícios de um sistema computacional de geometria dinâmica:

- Verificação empírica de hipóteses e teoremas em razão da possibilidade de calcular distâncias, ângulos e calcular precisamente relações;
- Visualização que facilita a compreensão dos conceitos de um teorema;
- Exploração da geometria e descoberta de propriedades através da possibilidade de manipulação das construções;
- Traçado de lugares geométricos de pontos pré-definidos o que permite que sejam abordados problemas geométricos importantes, mas pouco abordados no ensino tradicional por sua inerente dificuldade de visualização;
- Experimentação de situações geométricas pré-estabelecidas pelo professor ou descobertas ao acaso, por meio da exploração interativa.

1.3 Sobre conceitos de geometria analítica

Conforme visto na seção 1.1, a geometria analítica é uma das unidades temáticas do eixo geometria e medidas nos PCN+. Segundo tais parâmetros, o principal objetivo dessa unidade temática é tratar, sob o ponto de vista algébrico, as propriedades e os elementos geométricos. (BRASIL, 2002). Sugere-se que a geometria analítica seja abordada como uma ferramenta para a resolução de problemas geométricos transformando-os em equações, sistemas ou inequações, possibilitando uma articulação entre a geometria e a álgebra.

Para Eves (2007 apud DALLEMOLE E GROENWALD, 2012) a geometria analítica, quando pensada no espaço bidimensional, consiste no estabelecimento de uma correspondência entre pares ordenados de números reais e pontos do plano, possibilitando

uma correspondência entre equações em duas variáveis e curvas no plano. Assim sendo, é possível relacionar as propriedades algébricas e analíticas da equação às propriedades geométricas da curva associada.

O aluno deve ser capaz de abordar um problema com o enfoque mais adequado à situação apresentada.

Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente. (BRASIL, 2002, P. 124)

Brasil (2002) enfatiza essa relação de mão dupla entre a álgebra e a geometria, afirmando que o processo de ensino em geometria analítica deve levar em conta a compreensão de figuras geométricas por meio de equações e vice-versa, em detrimento da apresentação de equações para as curvas sem explicações baseadas no raciocínio lógico, o que faz com que o aluno simplesmente memorize as fórmulas, sem o devido entendimento.

Silva (2005) constata que boa parte dos alunos do ensino médio não articula com clareza as representações gráfica e algébrica de curvas planas, nem compreende a diferença entre as curvas (objetos matemáticos) e suas respectivas equações (uma das formas de representação do objeto matemático). Barros e Karrer (2011) fazem um estudo sobre a forma com que a geometria analítica é abordada nos livros didáticos e constatam que há uma valorização do registro algébrico em detrimento do registro gráfico, o que segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval faz com que o aluno confunda o objeto matemático com uma de duas representações.

Dallemole e Groenwald (2012) afirmam que três fatores devem ser levados em consideração nos processos de ensino-aprendizagem, em especial da geometria analítica: a formação, o tratamento e a conversão dos registros de representação. Os autores enfatizam a importância da exploração de situações que envolvam a conversão entre os diferentes tipos de registro a fim de proporcionar um aprendizado significativo.

Ainda Barros e Karrer (2011) sugerem que uma abordagem gráfica da geometria analítica em conjunto com o uso de ferramentas de geometria dinâmica pode oferecer melhores possibilidades de compreensão dos objetos matemáticos. O trabalho citado traz uma proposta para o ensino de vetores com o auxílio do software de geometria dinâmica Cabri 3D, o qual permite aos educandos a exploração e validação experimental de conjecturas.

1.3.1 Equações paramétricas e curvas planas

O quadro 2 traz algumas formas de representação algébrica de curvas bidimensionais.

Forma	Representação
Explícita	$y = f(x)$
Implícita	$f(x, y) = c$
Polar	$r = f(\theta)$
Paramétrica	$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Quadro 2 - Representação algébrica de curvas bidimensionais. Fonte: AUTOR

Bervian e Jesus (2006) comentam que a forma paramétrica é pouco utilizada no Ensino Médio, mas bastante utilizada no Ensino Superior. Os autores afirmam que as equações paramétricas são extremamente úteis quando se deseja obter o traço de uma curva no plano, com o intuito de visualizar o movimento do ponto P genérico da curva. Silva (2005) ressalta essa importância das equações paramétricas das curvas ao citar exemplos de situações práticas em que elas são utilizadas no intuito de descrever movimentos de corpos e dispositivos mecânicos.

A utilização de equações paramétricas pode ser bastante interessante no contexto da geometria dinâmica, tendo em vista que a variação do parâmetro em um intervalo ocasiona o movimento do ponto que descreve determinada curva. A figura 6 ilustra a curva obtida mediante a variação do parâmetro t no ponto P de coordenadas genéricas $(\cos t, \sin t)$, obtidas a partir das equações paramétricas da circunferência de raio 1 centrada na origem,

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

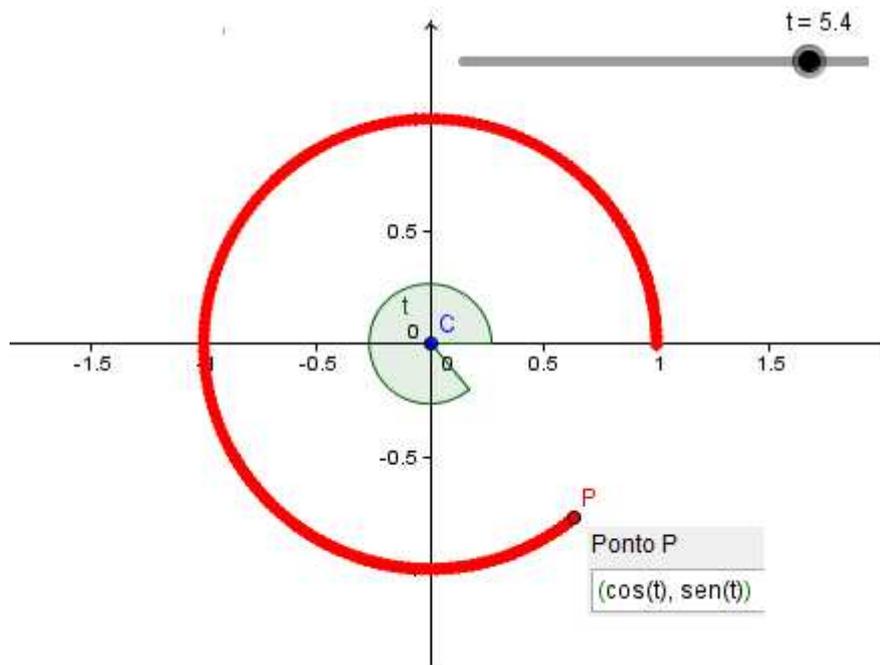


Figura 6 - Obtenção de uma circunferência de raio 1 centrada na origem por meio de equações paramétricas.
 Fonte: Autor

Para que um estudo mais aprofundado sobre curvas seja possível é preciso conceituar tal termo. Existem diferentes definições para o termo curva nos mais diversos campos da Matemática. Para Picado (2004), uma curva pode ser pensada como o caminho traçado por um ponto a mover-se no espaço tridimensional. Ao longo desse trabalho, essa será a definição de curva adotada.

Weisstein (2014) define intuitivamente curva plana como uma curva que se encontra em um único plano. Esta pode ser aberta ou fechada, conforme mostrado na figuras 7. O mesmo autor define como reversa qualquer curva que não pertence a um único plano, conforme exemplificado na figura 8.



Figura 7 - Exemplos de curvas planas. Fonte: AUTOR

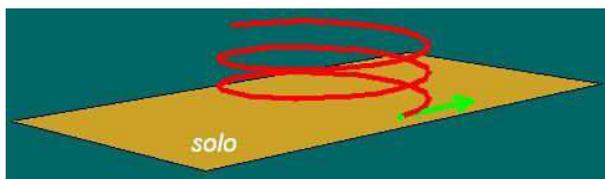


Figura 8 - Exemplo de curva reversa. Fonte: http://www.atractor.pt/mat/curvtor/curvat_3D.htm

Rangel (1974) define curva algébrica como aquela cuja equação é algébrica, ou seja, cujas incógnitas estão submetidas às operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. O mesmo autor utiliza o termo curva transcendente para se referir as curvas que não são algébricas. As figuras 9 e 10 trazem exemplos de curvas algébricas e transcendententes, respectivamente.

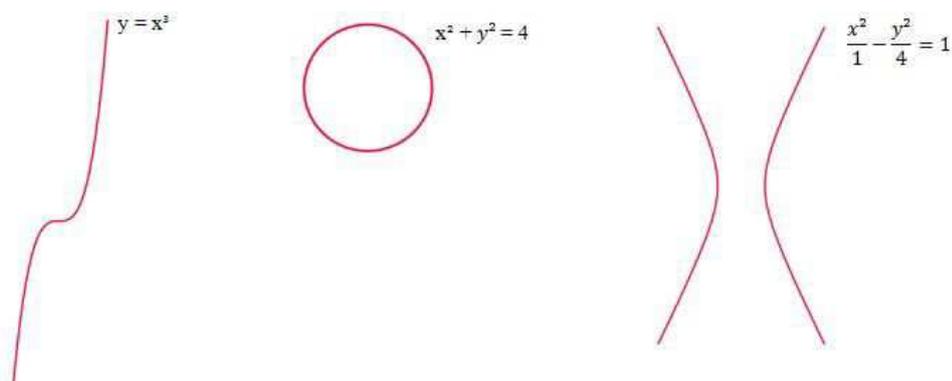


Figura 9 - Exemplos de curvas algébricas. Fonte: AUTOR

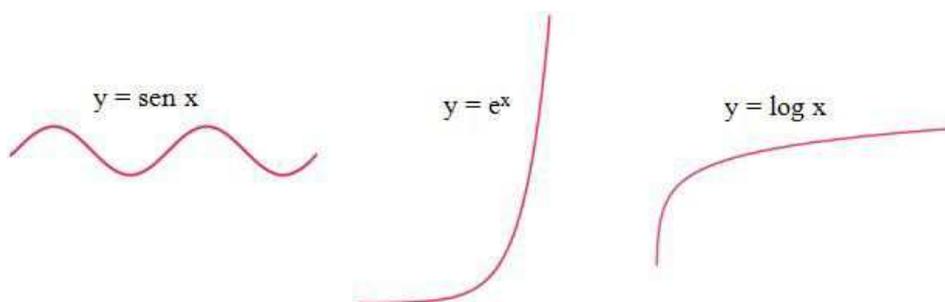


Figura 10 - Exemplos de curvas transcendententes. Fonte: AUTOR

De forma simples, Rangel (1974) define curva contínua como sendo aquela cujas funções que compõe a respectiva equação são estritamente contínuas. Caso contrário tem-se uma curva descontínua. A senóide da figura 10 é um exemplo de curva contínua, enquanto a hipérbole da figura 9 é um exemplo de curva descontínua.

O foco desse trabalho é explorar algumas curvas planas que podem ser descritas mecanicamente, ou seja, pelos movimentos que as geram. Como exemplo de curva desse tipo, pode-se citar a cicloide, que é a curva gerada por um ponto fixo P da circunferência de um círculo quando este rola, sem deslizar, por uma reta. A figura 11 ilustra essa curva, a qual será estudada com detalhes no capítulo 2.

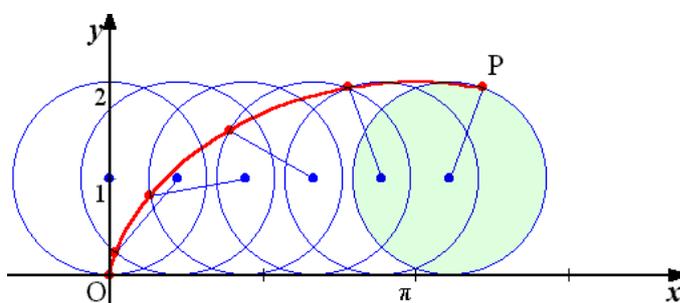


Figura 11 - Exemplo de curva que pode ser descrita mecanicamente: a cicloide. Fonte: <http://www.criced.tsukuba.ac.jp/grapes/pt/image/cycloid01.html>

2 CURVAS ROLANTES

As curvas rolantes são definidas por movimento, ou seja, são curvas descritas mecanicamente. A exploração desse tipo de curva é uma excelente oportunidade para trabalhar a construção geométrica que a gera bem como a obtenção das equações paramétricas da mesma. Tal argumento justifica o destaque dado às curvas rolantes nesse trabalho, as quais são abordadas ao longo deste capítulo.

Em seu estudo, Ferreto (2003) traz uma definição intuitiva para curva rolante:

Dadas duas curvas tangentes pertencentes ao mesmo plano, em que uma delas é fixa (diretriz ou base) e a outra (geratriz ou roleta) gira, sem escorregar, pela curva fixa, chama-se de curva rolante o lugar geométrico de todos os pontos P, tais que P acompanha o movimento da geratriz, estando “fixado” a ela (P pode ser um ponto da geratriz ou não).

Na literatura sobre o assunto, além curvas rolantes, também se encontram as nomenclaturas curvas cíclicas e curvas cicloidais para o mesmo tipo de curva. Fica aqui convencionado que nesse trabalho tais curvas serão referenciadas pela primeira nomenclatura.

A classificação e as propriedades das curvas rolantes dependem dos objetos geométricos considerados como geratriz e diretriz e da posição do ponto P. O quadro 3 traz as curvas geométricas abordadas nesse trabalho, explicitando os elementos geométricos que são diretriz e geratriz de cada uma delas.

Diretriz	Geratriz	Curva obtida
Circunferência	Circunferência	Periciclóide
Reta	Circunferência	Ciclóide
Circunferência	Reta	Evolvente da circunferência

Quadro 3 - Curvas rolantes a serem estudadas nesse trabalho. Fonte: AUTOR

No caso das periciclóides, a geratriz pode ser tangente internamente à circunferência diretriz (hipociclóide) ou externamente (epiciclóide).

Cada uma das curvas obtidas acima possui três variações, definidas pela posição do ponto que descreve a trajetória da curva em relação à geratriz. Se o ponto P pertence à geratriz diz-se que a curva está na forma ordinária, caso contrário a curva pode estar nas formas

encurtada ou alongada. Fica aqui convencionado que, nesse trabalho, quando se refere a certa curva apenas como cicloide, por exemplo, essa está na forma ordinária. O mesmo raciocínio vale para as demais curvas rolantes aqui abordadas.

2.1 Periciclóides

As periciclóides são as curvas rolantes em que ambos os elementos que constituem o traçado (diretriz e geratriz) são circunferências.

A figura 12 apresenta parte do traçado de uma periciclóide. Inicialmente o ponto P encontrava-se sobre o ponto B. Quando a circunferência geratriz rola, sem deslizar, sobre a circunferência diretriz, a curva em questão é obtida considerando-se a trajetória do ponto P. Em função da forma como a periciclóide é obtida fica fácil ver que o comprimento do arco percorrido pelo ponto T na circunferência diretriz (BT) é igual ao comprimento do arco percorrido pelo mesmo ponto na circunferência geratriz (TP).

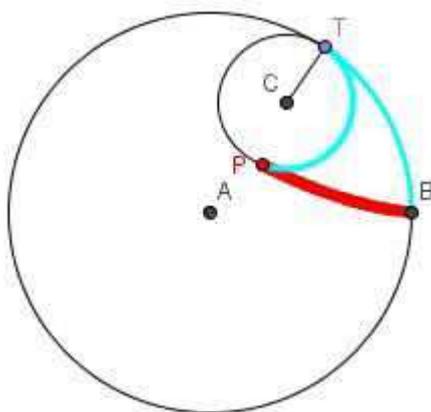


Figura 12 - Igualdade dos comprimentos dos arcos BT e TP. Fonte: AUTOR

Ao longo do traçado da curva periciclóide, essa tangencia a circunferência diretriz em um ou mais pontos. Tais pontos são chamados de cúspides. Essa noção é bastante importante no estudo tanto das hipociclóides quanto das epiciclóides. Na figura 13 o ponto V é cúspide e o ponto B só será cúspide caso a trajetória da curva passe novamente por tal ponto.

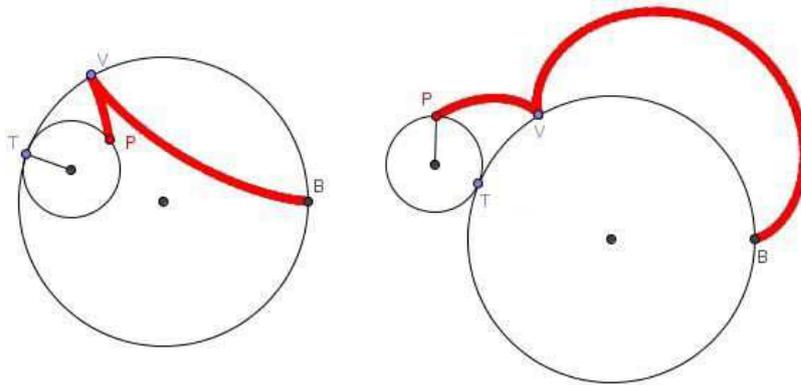


Figura 13 - Cúspides em periciclóides. Fonte: AUTOR

A figura 13 ainda pode ser observada para exemplificar uma observação de Delgado e Frensel (2008). Os autores afirmam que ocorrem cúspides sempre que o comprimento do arco definido BT (da circunferência diretriz) é um múltiplo do comprimento da circunferência geratriz. Assim sendo, o ponto B (ponto inicial da trajetória da periciclóide) é cúspide sempre que o comprimento da circunferência diretriz é múltiplo do comprimento da circunferência geratriz. O número de cúspides corresponde à razão entre esses comprimentos.

Considerando periciclóides de circunferências diretriz e geratriz de raios a e b , respectivamente, cujo traçado fica completamente definido em uma volta (B é cúspide), conforme as curvas ilustradas na figura 14, segue que o número de cúspides é dado pela razão entre os comprimentos $2\pi a$ e $2\pi b$, equivalente a a/b .

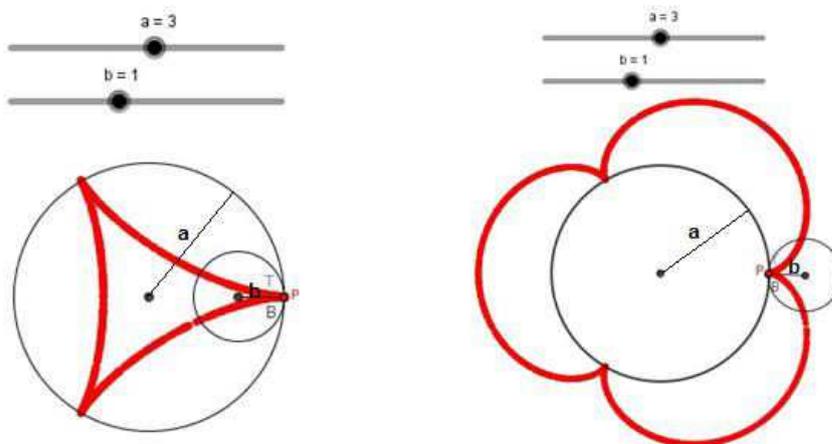


Figura 14 - Periciclóides cujo traçado fica definido em apenas uma volta da geratriz ao longo da diretriz. Fonte: AUTOR

Pensando na hipótese em que o ponto B não seja cúspide após a circunferência geratriz percorrer a primeira volta completa ao longo da circunferência diretriz há duas possibilidades: (1) o ponto B é cúspide após m voltas completas na circunferência diretriz, ou (2) independentemente do número de voltas completas na circunferência diretriz, B nunca é cúspide.

No caso (1) é fácil adaptar o raciocínio de Delgado e Frensel (2008) e concluir que o número de cúspides é dado pela razão entre $2\pi am$ (comprimento da circunferência diretriz multiplicado pelo número de voltas completas da geratriz sobre a diretriz que faz com que B seja cúspide) e $2\pi b$ (comprimento da geratriz), o que equivale a am/b .

A figura 15 traz periciclóides onde o ponto B é cúspide após duas voltas completas da geratriz sobre a diretriz e as circunferências diretriz e geratriz são, respectivamente, 6 e 4. Comprova-se visualmente que o número de cúspides, 3, é dado pela razão entre o produto do raio da diretriz pelo número de voltas completas da geratriz sobre a diretriz necessários para definir completamente a curva ($6 \cdot 2 = 12$) e o raio da geratriz (4).

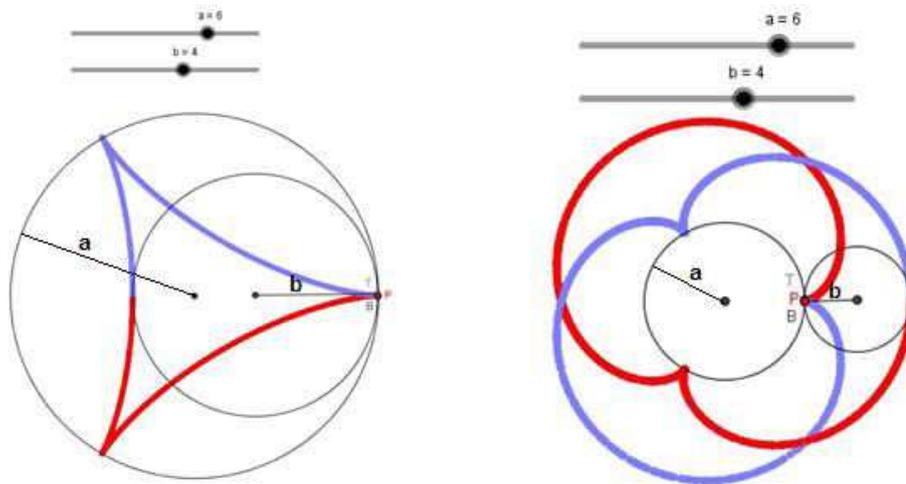


Figura 15 - Periciclóides cujo traçado fica definido após duas voltas da geratriz ao longo da diretriz. Fonte: AUTOR

O caso (2) indica que não é possível definir o número de voltas completas na circunferência diretriz para que B seja cúspide, logo também não é possível definir o número de cúspides. Conforme Raposo (2013), “a curva obtida não fecha, sendo impossível voltar ao ponto inicial” (p. 145). A figura 16 traz um exemplo desse tipo de periciclóide.

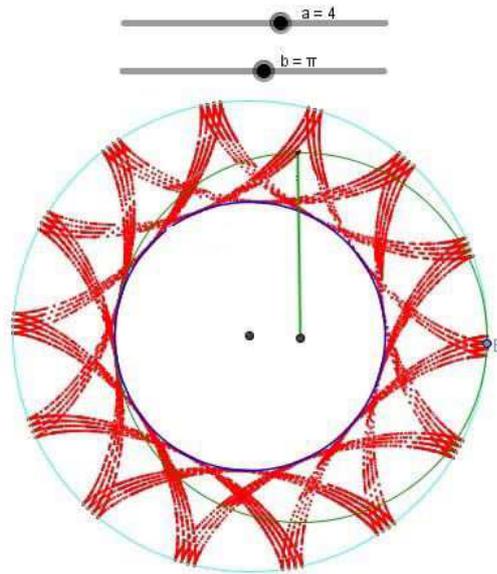


Figura 16 - Traçado de uma periciclóide em o ponto inicial B nunca é cúspide, dadas 42 voltas na diretriz.

Fonte: AUTOR

Com base nos aspectos elencados anteriormente, observa-se a análise da razão entre os raios das circunferências geratriz e diretriz, b e a , respectivamente, é extremamente útil para a previsão do comportamento do traçado da periciclóide. Se essa é do tipo $1/n$ (com n natural) a periciclóide tem n cúspides e o desenho fica definido em uma volta, caso a razão seja do tipo m/n (ambos naturais) há n cúspides e o traçado da curva completa-se após m voltas na circunferência diretriz, já o fato de b/a ser irracional indica que não é possível definir m nem n . Em resumo, conhecidos os raios a e b , basta procurar a forma irredutível m/n (ambos naturais), em que m é o número de voltas completas na diretriz para definir o traçado da curva onde n será o número de cúspides.

Definido o número de cúspides n , no caso em que b/a é racional, segue que número de arcos que compõe a periciclóide também é n . Sendo m o número de voltas necessárias para completar o traçado de uma periciclóide tem-se que o ângulo (em radianos) entre dois cúspides consecutivos (extremos de um mesmo arco que compõe a curva) é dado por $2\pi m/n$ (razão entre o ângulo percorrido na diretriz para completar o traçado da periciclóide e o número de arcos que compõe a curva). No caso da figura 17, o ângulo entre dois cúspides consecutivos é $2\pi \cdot 3/8 = 3\pi/4$.

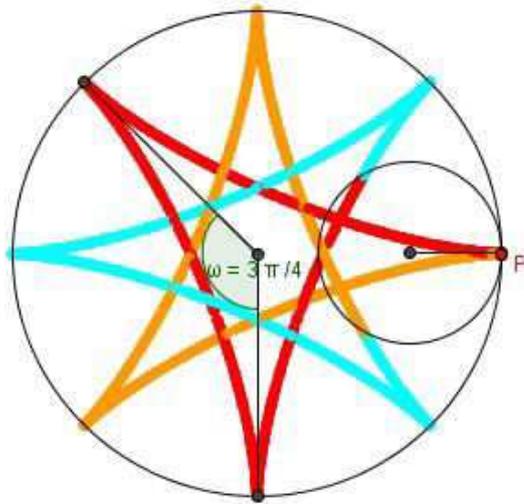


Figura 17 - Ângulo entre dois cúspides que são extremos do mesmo arco. Fonte: AUTOR

2.1.1 Hipociclóides

Delgado e Frensel (2008) trazem a seguinte definição para hipociclóide:

Dadas duas circunferências de raio a e b , com $a > b$, tangentes em um ponto P , de modo que todos os pontos da circunferência de raio b , exceto P , estão no interior da circunferência de raio a , define-se como hipociclóide o lugar geométrico descrito pelo ponto P , quando a circunferência de raio b rola sobre a de raio a , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada pela circunferência de raio a , conforme ilustra a figura 18.

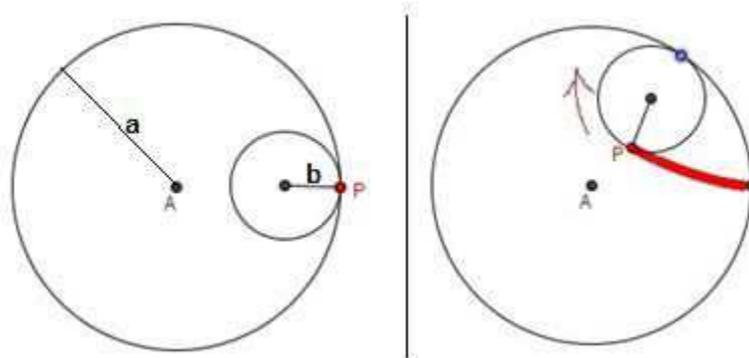


Figura 18 - Traçado de uma hipociclóide de acordo com a definição. Fonte: AUTOR

Dessa definição fica evidente que a circunferência de raio a é a diretriz e a de raio b é a geratriz da curva. A figura 19 traz alguns exemplos de hipociclóides dados diferentes raios das circunferências diretriz e geratriz.

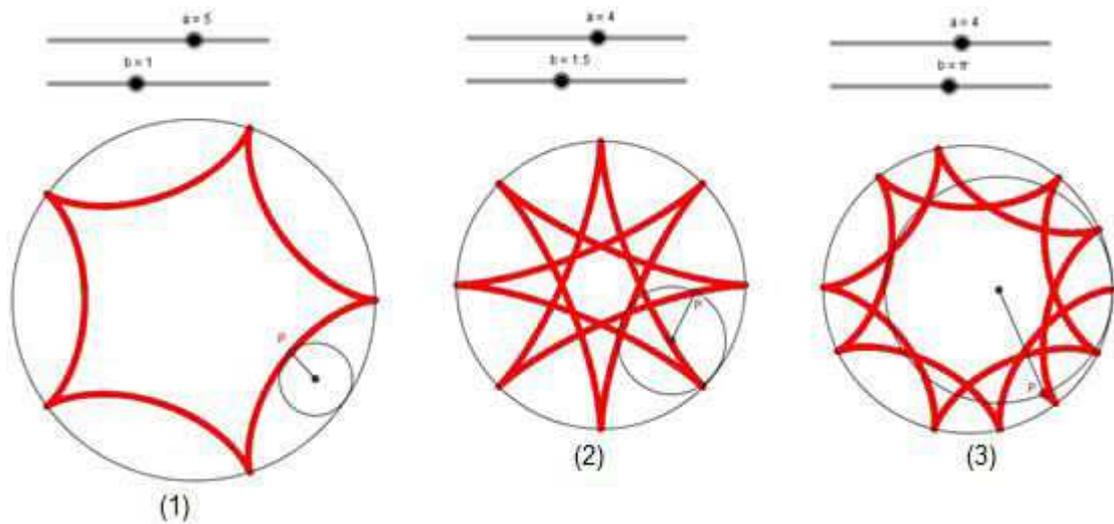


Figura 19 - Exemplos de hipociclóides dados diferentes raios das circunferências diretriz e geratriz. Fonte: AUTOR

Como a hipociclóide é um caso particular de periciclóide, as propriedades já estudadas são válidas para as curvas aqui evidenciadas. Buscando-se a forma irredutível m/n (ambos naturais) de b/a nas hipociclóides da figura 19, constata-se que em (1) e (2) temos curvas com número finito de cúspides em função dessa razão ser um número racional, o que não corre na curva (3). Decorre da mesma análise que é preciso percorrer uma volta completa para traçar a curva (1) com seus cinco cúspides ($b/a = 1/5$) e três voltas completas para obter o traçado da curva (2) com seus oito cúspides ($b/a = 1,5/4 = 3/8$), conforme ilustra a figura 20.

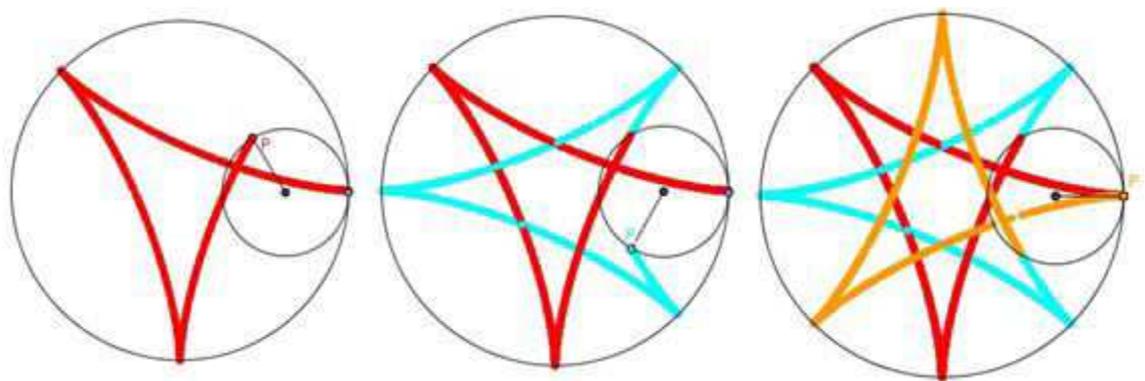


Figura 20 - Traçado da hipociclóide (2) da figura 19 após a 1ª, 2ª e 3ª voltas da geratriz ao longo da diretriz. Fonte: AUTOR

Araújo (2004) ressalta que, considerando uma circunferência diretriz de raio a é possível obter duas hipociclóides com circunferências geratrizes distintas (raios b_1 e b_2) de

mesmo traçado, diferenciando-se apenas no número de voltas completas na diretriz para defini-lo, conforme ilustra a figura 21.

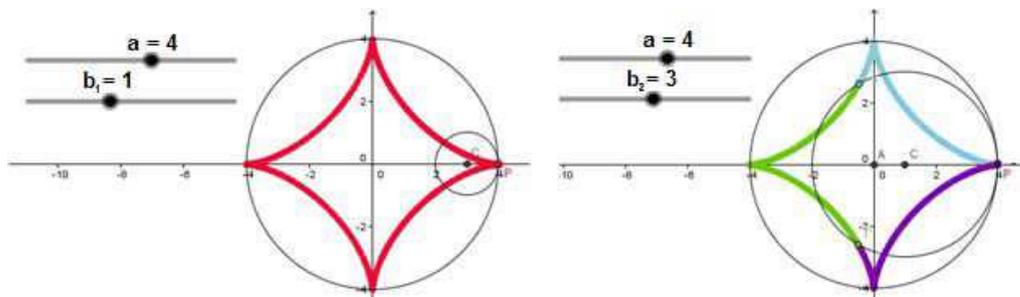


Figura 21 - Hipociclóides iguais, porém com traçado definido em número de distinto de voltas na diretriz. Fonte: AUTOR

Esse fato ocorre quando a soma dos raios b_1 e b_2 é equivalente ao raio da diretriz, a . Esses argumentos justificam-se pelo Teorema da Dupla Geração, cuja descoberta é atribuída a Phillippe La Hire, com posteriores contribuições de Daniel Bernoulli (1725) e Euler (1781). O teorema possui o seguinte enunciado:

Sempre que uma circunferência de raio b roda, sem deslizar, no interior de uma circunferência fixa, de raio a , dá origem a uma hipociclóide igual à que se obtém quando uma circunferência de raio $b-a$ roda, sem deslizar, no interior da mesma circunferência fixa. (RAPOSO, 2013, p. 68)

Delgado e Frensel (2008) observam que, a obtenção de coordenadas genéricas para o ponto P que descreve a hipociclóide cuja diretriz está centrada na origem do plano cartesiano depende, inicialmente, da posição em que tal ponto se encontra. A figura 22 sugere elementos e relações geométricas que podem ser observados para a obtenção das coordenadas de P no início do traçado da curva.

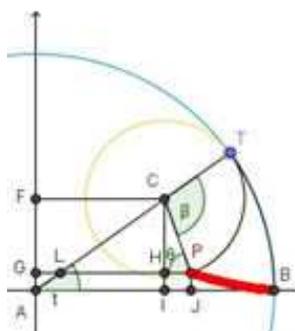


Figura 22 - Obtenção de coordenadas genéricas para o ponto P que descreve a hipociclóide. Fonte: AUTOR

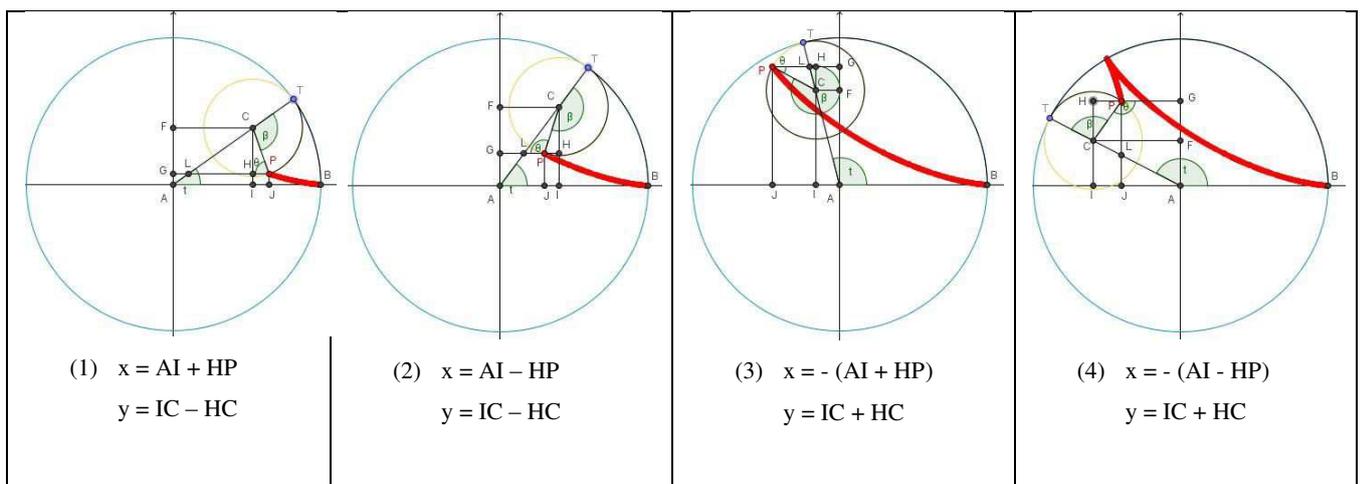
Para exemplificar o raciocínio que conduz às coordenadas do ponto genérico P da hipociclóide em função de um parâmetro t, segue uma breve justificativa.

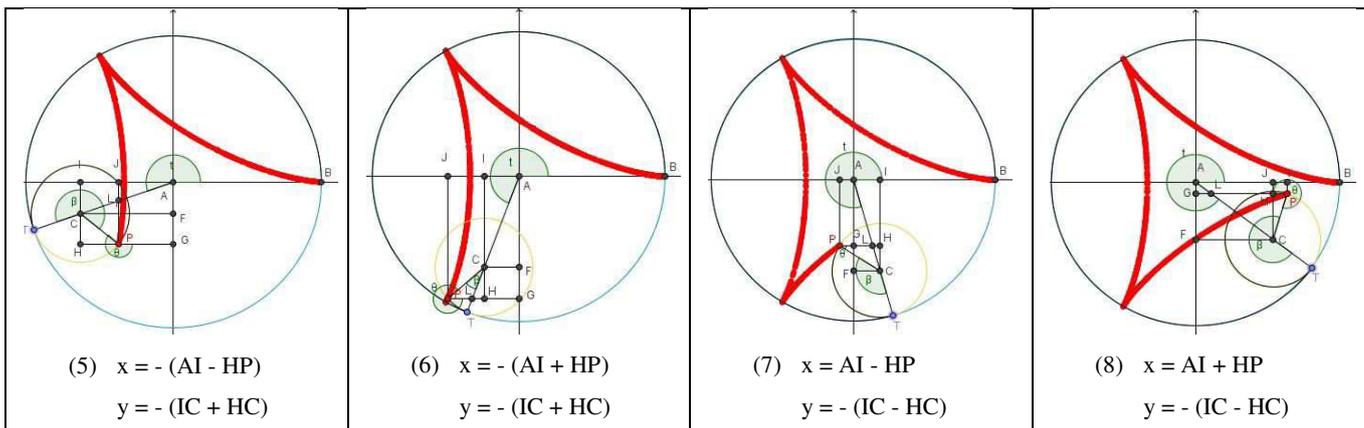
No quadro 4 apresentam-se relações válidas independentemente da posição do ponto P da figura 22.

- $AI = (a - b) \cos I\hat{A}C$ e $IC = (a - b) \sin I\hat{A}C$ (razões trigonométricas em AIC);
- $HP = b \cos H\hat{P}C$ e $HP = b \sin H\hat{P}C$ (razões trigonométricas em PHC);
- $\beta - t = \frac{a-b}{b}$ (das propriedades da hipociclóide, os arcos BT (sentido anti-horário) e TP (sentido horário), tem o mesmo comprimento, donde segue que $\beta = \frac{at}{b}$);
- $\text{sen}(\pi - \delta) = \text{sen } \delta$ e $\text{cos}(\pi - \delta) = -\text{cos } \delta$, com $\delta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;
- $\text{sen}(\delta \pm \pi) = -\text{sen } \delta$ e $\text{cos}(\delta \pm \pi) = -\text{cos } \delta$, com $\delta \in [0, 2\pi]$;
- $\text{sen}(2\pi - \delta) = -\text{sen } \delta$ e $\text{cos}(2\pi - \delta) = \text{cos } \delta$, com $\delta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$;
- Sempre é possível obter relações entre os ângulos t, Θ e β observando o triângulo LPC.

Quadro 4 - Relações válidas independentemente da posição do ponto P. Fonte: AUTOR

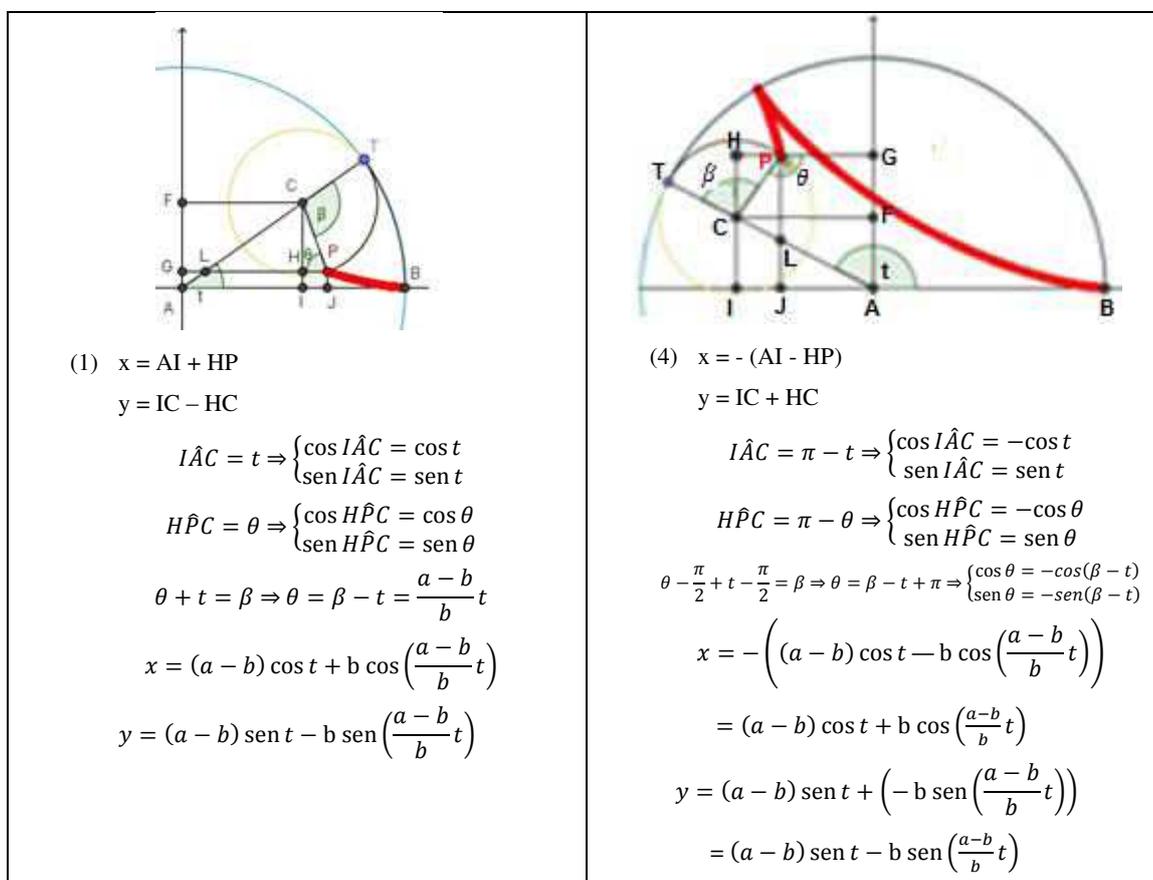
No quadro 5 observam-se as mudanças decorrentes da evolução da trajetória do ponto P que descreve a hipociclóide.





Quadro 5 – Mudanças decorrentes da evolução da trajetória do ponto P. Fonte: AUTOR

Mesmo que as expressões que definem as coordenadas do ponto P em termos de adição e subtração de segmentos mudem conforme a posição do ponto chega-se sempre às mesmas expressões para as coordenadas de uma hipociclóide gerada por circunferências diretriz e geratriz de raios a e b, respectivamente, em função do parâmetro t. O quadro 6 exemplifica o raciocínio para se chegar em tais expressões nos casos (1) e (4) do quadro 5.



Quadro 6 - Obtenção das coordenadas genéricas do ponto P nos casos (1) e (4) do quadro 5. Fonte: AUTOR

Essas expressões das coordenadas de P em função do parâmetro t constituem as equações paramétricas da hipociclóide de circunferências diretriz e geratriz de raios a e b, respectivamente, cuja diretriz está centrada na origem do plano cartesiano:

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos t + b \cos\left(\frac{a - b}{b}t\right) \\ y = (a - b) \sin t - b \sin\left(\frac{a - b}{b}t\right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2.1.1.1 Astróide

Definição: Dados os raios a e b, das circunferências diretriz e geratriz, respectivamente, chama-se de astróide a hipociclóide tal que $b = a/4$ ou $b = 3a/4$

Decorre da definição o fato que a forma irredutível de b/a é $1/4$ ou $3/4$, logo há quatro cúspides e o traçado da curva pode ser obtido em uma volta na diretriz ($b/a = 1/4$) ou três ($b/a = 3/4$), conforme ilustra a figura 23. Em muitas literaturas defini-se apenas a astróide cujo traçado fica definido em uma volta, porém aqui, é conveniente considerar o outro caso em razão da abordagem prévia do teorema da dupla geração.

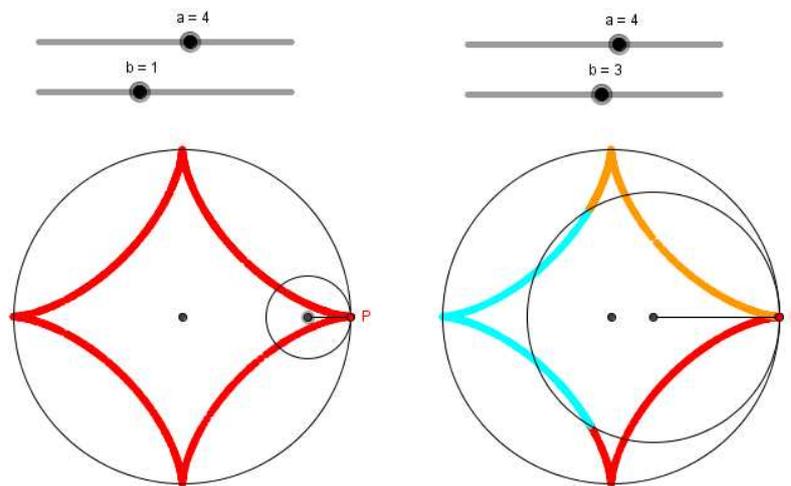


Figura 23 - Exemplos de astróide. Fonte: AUTOR

Utilizando o fato de que $a = 4b$ e a utilizando as fórmulas de arco triplo ($\text{sen } 3\delta = 3\text{sen}\delta - 4\text{sen}^3\delta$ e $\text{cos } 3\delta = 4\text{cos}^3\delta - 3\text{cos}\delta$) chega-se a expressões para a astróide cujo traçado é completo após uma volta na diretriz.

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \left(\frac{a-b}{b} t \right) = 3b \cos t + b \cos(3t) = 3b \cos t + 4b \cos^3 t - 3b \cos t = 4b \cos^3 t = a \cos^3 t$$

$$y = (a - b) \text{sen } t - b \text{sen} \left(\frac{a-b}{b} t \right) = 3b \text{sen } t - b \text{sen}(3t) = 3b \text{sen } t - 3b \text{sen } t + 4b \text{sen}^3 t = 4b \text{sen}^3 t = a \text{sen}^3 t$$

Sabe-se pelo exposto anteriormente que as hipociclóides de circunferência diretriz de raio e geratrizes $a/4$ e $3a/4$ tem o mesmo traçado. Observando que nas expressões acima tem-se coordenadas em função do parâmetro t e apenas do raio da diretriz, a , comum à ambas as hipociclóides, seguem as equações paramétricas da curvas nas duas configurações que geram o mesmo traçado.

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \text{sen}^3 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

De acordo com as pesquisas de Raposo (2013), a astróide começou a ser estudada por volta de 1674 por Roemer quando o mesmo buscava uma otimização para o formato dos dentes de engrenagem. Importantes matemáticos como Johann Bernoulli (1691), Gottfried Leibniz (1715), Daniel Bernoulli (1725) e Jean Le Rond D'Alembert (1748) também tem publicações relativas ao assunto.

Além de astróide, a curva aqui referenciada também é conhecida por cubociclóide, paraciclo e curva tetracúspide.

2.1.1.2 Deltóide

Definição: Dados os raios a e b , das circunferências diretriz e geratriz, respectivamente, chama-se de deltóide a hipociclóide tal que $b = a/3$ ou $b = 2a/3$

Decorre da definição o fato que a forma irredutível de b/a é $1/3$ ou $2/3$, logo há três cúspides e o traçado da curva pode ser obtido em uma volta na diretriz ($b/a = 1/3$) ou duas ($b/a = 2/3$), conforme ilustra a figura 24. Normalmente apenas é definida a deltóide cujo

traçado fica definido em uma volta, porém aqui, é conveniente considerar o outro caso em função do teorema da dupla geração, abordado anteriormente.

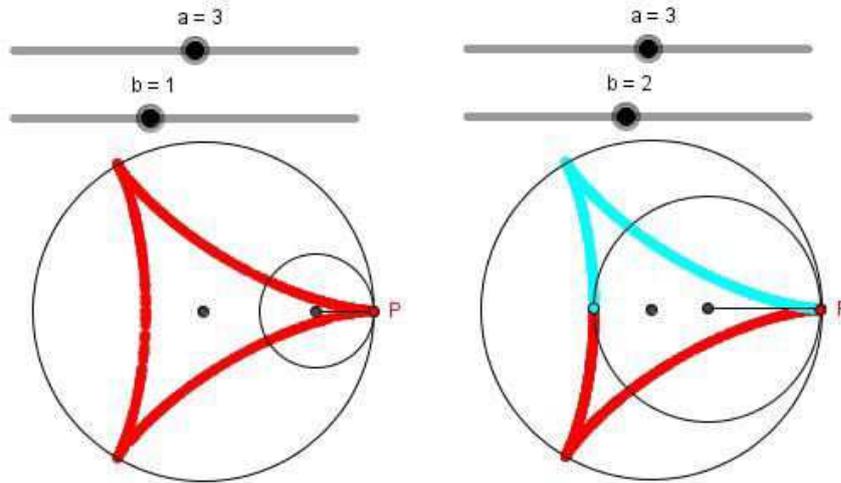


Figura 24 - Exemplos de deltóide. Fonte: AUTOR

Conforme pesquisa de Raposo (2013), o pioneiro nos estudos relativos à deltóide foi Euler, por volta de 1745, ao estudar as curvas caústicas em problemas de ótica. Posteriormente, em 1857, Jakob Steiner deu ênfase ao estudo dessa curva em seus trabalhos.

A deltóide também é conhecida por tricúspide e por hipociclóide de Steiner.

2.1.1.3 Hipocilóides degeneradas

Das relações aqui estudadas sabe-se que quando a razão entre os raios das circunferências geratriz e diretriz, b e a , respectivamente, equivale a $1/2$ tem-se uma hipociclóide de dois cúspides e o traçado fica definido em uma volta completa. Nesse caso, a curva é chamada hipociclóide degenerada e corresponde a um segmento de reta, cujo comprimento equivale ao diâmetro da diretriz, conforme mostra a figura 25.

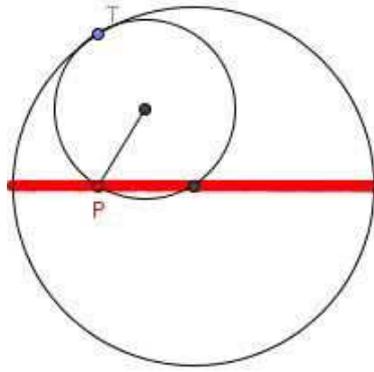


Figura 25 - Hipociclóide degenerada. Fonte: AUTOR

Substituindo-se a por $2b$ nas equações paramétricas da hipociclóide, tem-se que a coordenada y sempre é nula, o que faz com que o ponto que descreve a curva percorra apenas o eixo x , comprovando o argumento anteriormente apresentado.

$$\begin{cases} x = (a - b) \cos t + b \cos \left(\frac{a - b}{b} t \right) = b \cos t + b \cos t = 2b \cos t \\ y = (a - b) \sin t - b \sin \left(\frac{a - b}{b} t \right) = b \sin t - b \sin t = 0 \end{cases}$$

2.1.1.4 Hipociclóides encurtada e alongada

As hipociclóides abordadas até o momento estão na forma ordinária, tendo em vista que o ponto P , cuja trajetória descreve a curva, está sobre a circunferência geratriz.

Caso o ponto P seja interior à geratriz, a curva obtida chama-se hipociclóide encurtada. Já quando P é exterior a circunferência geratriz obtém-se uma hipociclóide alongada. A figura 26 ilustra essas situações.

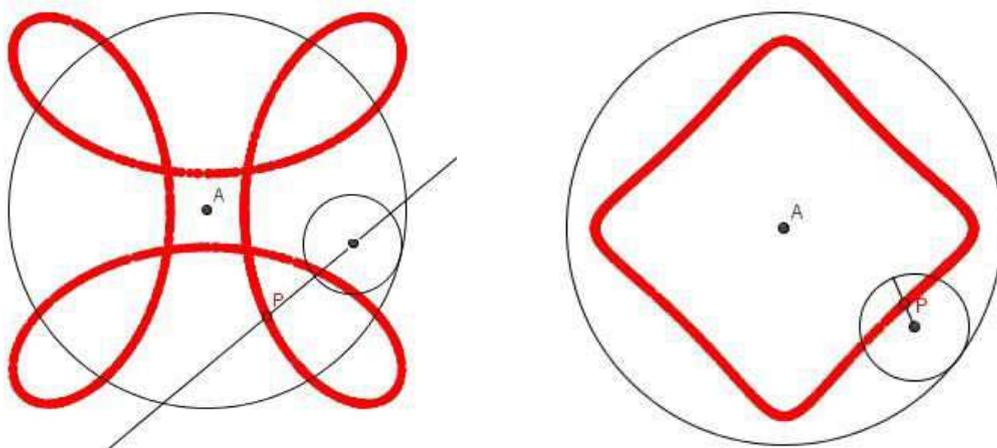


Figura 26 - Hipociclóide alongada (esquerda) e hipociclóide encurtada. Fonte: AUTOR

2.1.2 Epiciclóides

Conforme a definição de Delgado e Frensel (2008):

Dadas duas circunferências de raio a e b , tangentes em um ponto P , de modo que todos os pontos da circunferência de raio b , exceto P , estão no exterior da circunferência de raio a , define-se como hipociclóide o lugar geométrico descrito pelo ponto P , quando a circunferência de raio b rola sobre a de raio a , sem deslizar, conforme ilustra a figura 27.

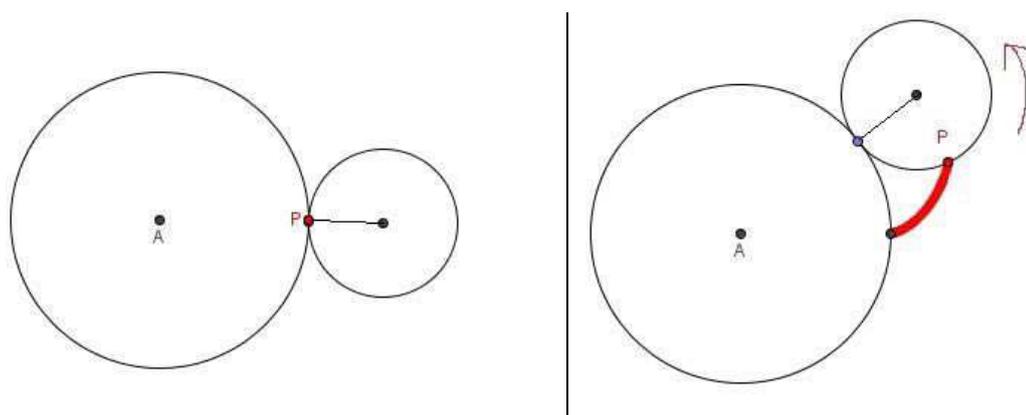


Figura 27 - Traçado de uma epiciclóide de acordo com a definição. Fonte: AUTOR

Da definição fica evidente que a circunferência de raio a é a diretriz e a de raio b é a geratriz da curva. Na figura 28 há exemplos de epiciclóides dados diferentes valores de raios a e b .

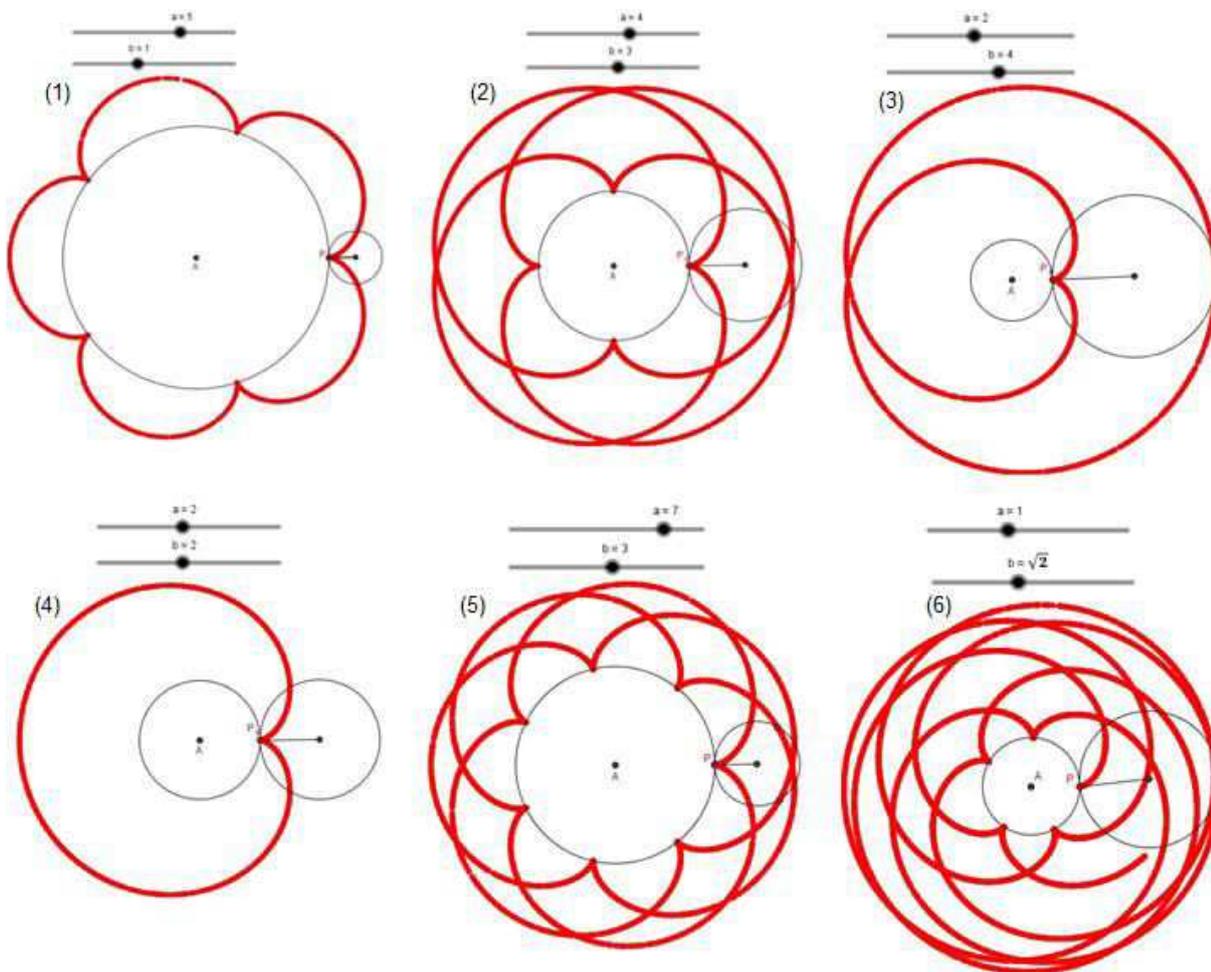


Figura 28 - Exemplos de epiciclóides dados diferentes raios das circunferências diretriz e geratriz. Fonte: AUTOR

Assim como a hipociclóide, a epiciclóide é um caso especial de periciclóide, logo as propriedades já estudadas para o grupo mais amplo de curvas são válidas para as curvas aqui evidenciadas. Utilizando-se a propriedade que relaciona as medidas dos raios a e b com o número de cúspides e voltas para definir o traçado da epiciclóide observa-se, na figura 28, que se $a = b$ (curva 4) o traçado fica definido em uma volta com apenas um cúspide; se a é múltiplo de b tem-se $b/a = 1/n$ (n natural), logo a curva é definida em uma volta e possui n cúspides (curva 1); se $b/a = m/n$ (ambos naturais) o traçado completa-se em n voltas e há m cúspides (curvas 2, 3 e 5).

A figura 29 ilustra a evolução do traçado da curva 3 da figura 28, após cada volta completa na circunferência geratriz.

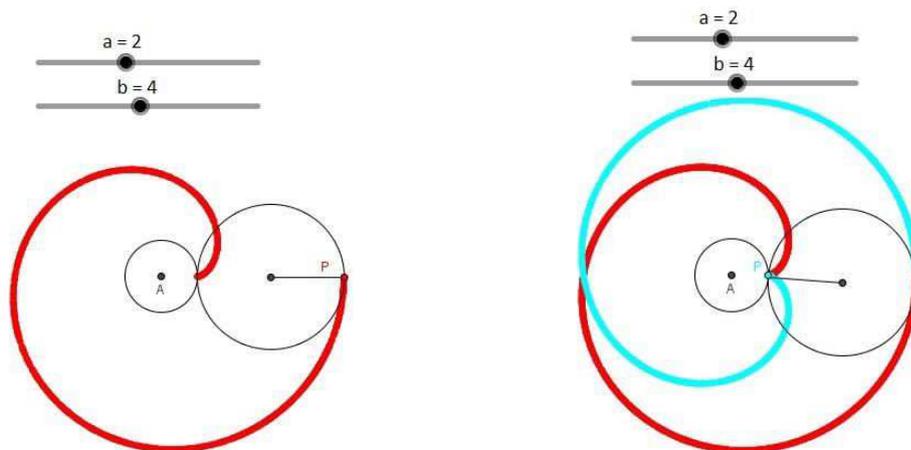


Figura 29 - Traçado da epiciclóide (3) da figura 28 após a 1ª e 2ª voltas da geratriz ao longo da diretriz. Fonte: AUTOR

No caso em que se b/a é irracional, como na epiciclóide 6 da figura 28, a curva nunca se fecha e há infinitos cúspides. Martins (2005) aborda tal fato em seu trabalho. O autor apresenta um lema relacionando o fato que o número de cúspides sobre a diretriz ser um conjunto denso com o traçado da epiciclóide preencher gradativamente o anel limitado por circunferências de raios a e $a+2b$. A figura 30 mostra uma epiciclóide desse tipo e a evolução do traçado.



Figura 30 - Epiciclóide com b/a irracional dadas 20 (esquerda) e 60 voltas na circunferência diretriz. Fonte: Martins (2005)

De forma análoga à hipociclóide, as expressões que definem as coordenadas genéricas do ponto P que descreve a epiciclóide dependem da posição do ponto P , mas em todos os casos se obtém expressões equivalentes ao escrevê-las em função do parâmetro t . Segue uma breve justificativa para essas expressões, observando o ponto P logo após o início de sua trajetória.

Na figura 31 observa-se que $x = AI - HP$ e $y = ID - HD$. Também é notável que $AD = a + b$ e $PD = b$.

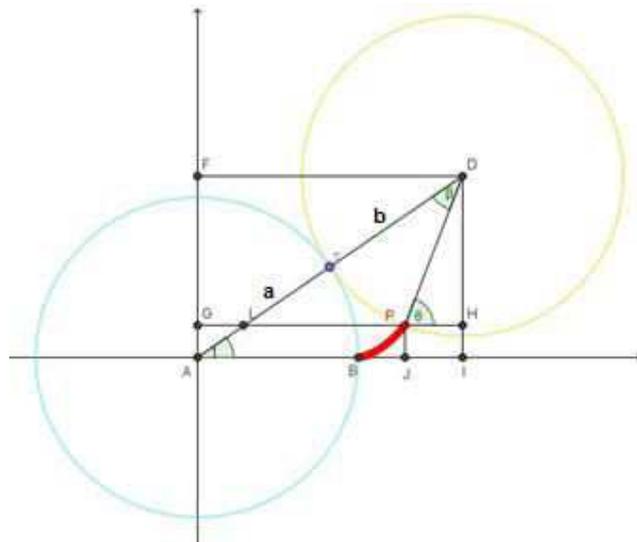


Figura 31 - Obtenção das coordenadas genéricas do ponto P que descreve a epiciclóide. Fonte: AUTOR

Aplicando razões trigonométricas nos triângulos retângulos AID e PHD segue que $AI = (a + b) \cos t$, $ID = (a + b) \sin t$, $HP = b \cos \theta$ e $HD = b \sin \theta$.

Para encontrar uma relação entre θ e β usa-se o fato que $\beta = \frac{at}{b}$ (propriedade das periciclóides) e o teorema do ângulo externo do triângulo PLD, o qual implica que $t + \beta = \theta$, logo $\theta = t + \frac{at}{b}$, portanto $\theta = \frac{a+b}{b} t$.

A utilização dessas relações permite que as coordenadas de x e y sejam escritas em função do parâmetro t . Conforme observado anteriormente, independentemente da posição do ponto P serão obtidas as mesmas expressões. Assim sendo, seguem as equações paramétricas da epiciclóide cuja diretriz está centrada na origem do plano cartesiano e tem raio a e cuja geratriz tem raio b , de modo que o início da trajetória da curva se dá no ponto $(a, 0)$.

$$\begin{cases} x = (a + b) \cos t - b \cos \left(\frac{a + b}{b} t \right) \\ y = (a + b) \sin t - b \sin \left(\frac{a + b}{b} t \right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2.1.2.1 Cardióide

Definição: Dados os raios a e b , das circunferências diretriz e geratriz, respectivamente, chama-se de cardióide a epiciclóide tal que $a = b$.

A curva cardióide tem único cúspide, no ponto que corresponde ao início da trajetória do ponto P que a descreve, conforme ilustra a figura 32.

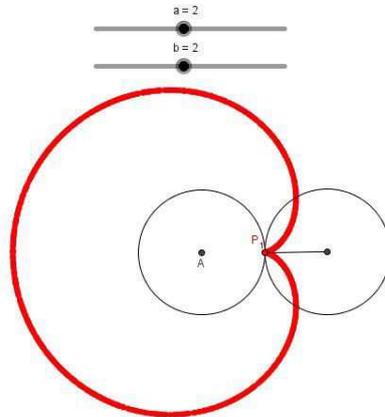


Figura 32 - Exemplo de cardióide. Fonte: AUTOR

Utilizando as equações paramétricas de uma epiciclóide qualquer e o fato que os raios a e b são iguais, chega-se as seguintes equações paramétricas para a cardióide:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - a \cos(2t) \\ y = 2 \sin t - a \sin(2t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

De acordo com pesquisa de Ferreto (2003), importantes matemáticos como Étienne Pascal, Romer (1674), La Hire (1708) e Castillon (1741) tem estudos a cerca desta curva.

Uma aplicação interessante da curva consiste no fato de que em alguns microfones o diagrama de diretividade do som se assemelha a uma cardióide. Segundo Harman (2001), quando a fonte sonora localiza-se no eixo do microfone, o som que entra pela frente sempre chega antes do som que entra por trás, atravessa um caminho mais curto. Dessa forma, no microfone cardióide apenas o som frontal é captado, conforme mostra a figura 33.

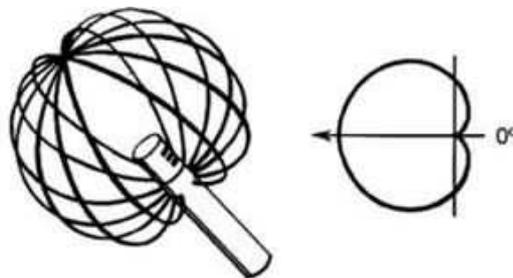


Figura 33 - Microfone cardióide e respectivo diagrama de diretividade do som. Fonte: AUTOR

2.1.2.2 Nefróide

Definição: Dados os raios a e b , das circunferências diretriz e geratriz, respectivamente, chama-se de nefróide a epicyclóide tal que $b = a/2$.

A curva nefróide tem dois cúspides e o seu traçado é definido em apenas uma volta na diretriz. Pensando-se na nefróide cuja diretriz está centrada na origem do sistema cartesiano e o início da trajetória que descreve a curva se dá no ponto $(a, 0)$, os cúspides posicionam-se sobre o eixo x e são simétricos em relação ao eixo y , correspondendo a origem da curva $(a, 0)$ e ao ponto $(-a, 0)$. A figura 34 mostra uma nefróide cuja circunferência geratriz tem raio 2.

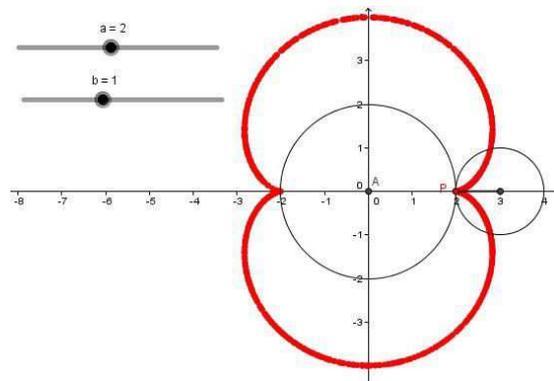


Figura 34 - Exemplo de nefróide. Fonte: AUTOR

Utilizando as equações paramétricas de uma epicyclóide qualquer, o fato que $a = 2b$ e a identidade $\sin 3\delta = 3\sin\delta - 4\sin^3\delta$, tem-se:

$$x = (a + b) \cos t - b \cos\left(\frac{a + b}{b}t\right) = 3b \cos t - b \cos(3t) = b(3 \cos t - \cos(3t))$$

$$y = (a + b) \sin t - b \sin\left(\frac{a + b}{b}t\right) = 3b \sin t - b \sin(3t) = 3b \sin t - 3b \sin t + 4 \sin^3 t = 4 \sin^3 t$$

Sendo assim, seguem abaixo as equações paramétricas da nefróide cuja geratriz tem raio b .

$$\begin{cases} x = b(3 \cos t - \cos(3t)) \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

De acordo com Wesstein (2015), em 1678, o matemático Huygens fez importantes considerações à cerca dessa curva. Por esse motivo a nefróide também é conhecida por hipociclóide de Huygens.

2.1.2.3 Epiciclóides encurtada e alongada

As epiciclóides abordadas até o momento são geradas pelo ponto P, que está sobre a circunferência geratriz. A rigor essas curvas estão na forma ordinária.

Caso o ponto P seja interior à geratriz a curva obtida chama-se epiciclóide encurtada. Já quando P é exterior a circunferência geratriz obtém-se uma epiciclóide alongada. A figura 35 ilustra essas situações.

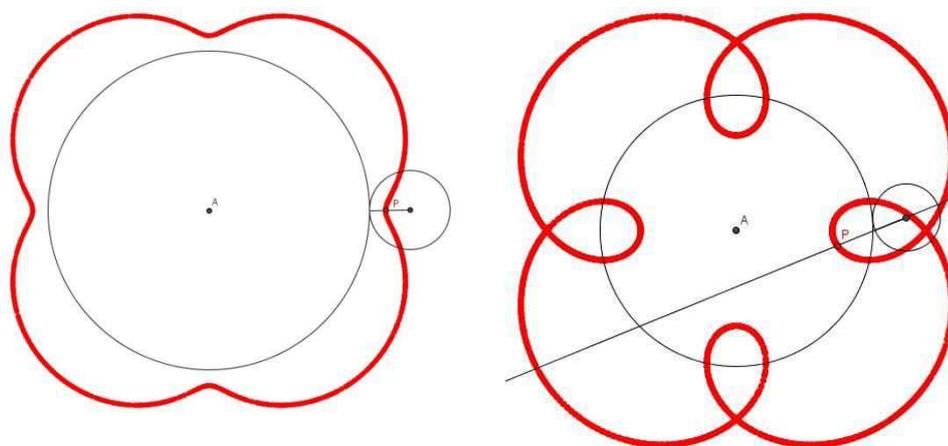


Figura 35 - Epiciclóide encurtada (esquerda) e epiciclóide alongada. Fonte: AUTOR

2.1.2.4 Epiciclóide como caso particular de hipociclóide

Araújo (2004) aborda as epiciclóides como caso especial de hipociclóides. O autor considera como positivo o raio da geratriz, se ambas as circunferências que geram a curva são tangentes internamente e “negativo”, caso contrário.

Nessa perspectiva, caso seja excluída da definição de hipociclóide a condição $a > b$, é possível obter epiciclóides nos casos $b < 0$ e $b > a$, conforme apresenta a figura 36.

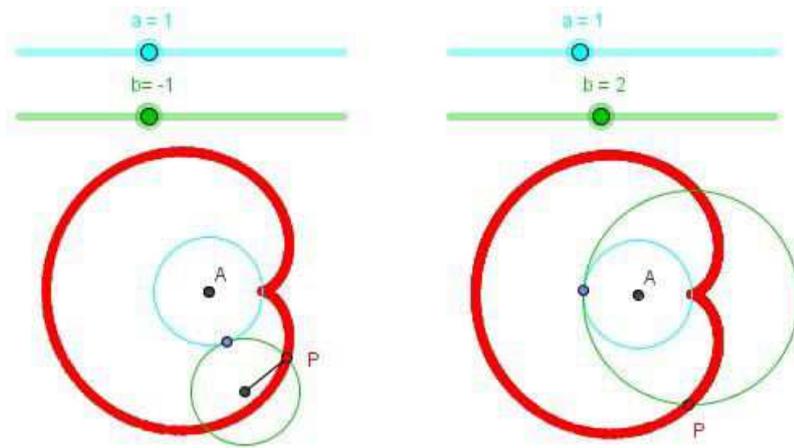


Figura 36 - Cardióide obtida de duas formas diferentes, utilizando a definição alternativa de hipociclóide. Fonte: AUTOR

2.2 Ciclóide

Delgado e Frensel (2008) definem ciclóide como a curva descrita pela trajetória do ponto P, pertencente a uma circunferência de raio r , quando esta rola, sem deslizar, sobre uma reta s , conforme ilustra a figura 37. Dessa definição, evidencia-se o fato que a reta s é a diretriz e a circunferência de raio r é a geratriz da curva.



Figura 37 - Traçado de uma ciclóide de acordo com a definição. Fonte: AUTOR

Como a circunferência geratriz rola sobre a reta diretriz sem deslizar, considerando A o ponto que marca o início do movimento e T o ponto de tangência genérico da circunferência e da reta, observa-se que o comprimento do segmento AT é equivalente ao do arco TP (no sentido horário), o que pode ser constatado visualmente na figura 38.

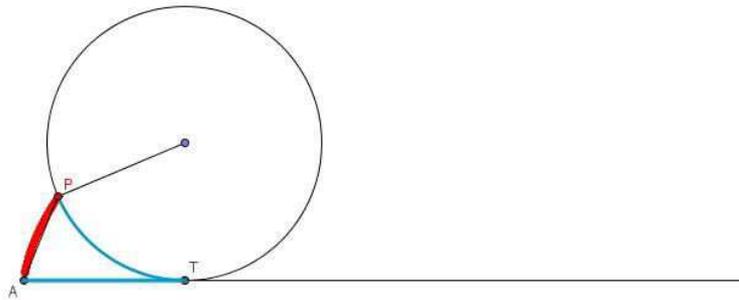


Figura 38 – Arco TP e segmento AT de mesmo comprimento. Fonte: AUTOR

Assim sendo, observa-se que o ponto P volta a tangenciar a reta diretriz quando a medida do segmento AT é equivalente ao comprimento da circunferência diretriz, o que é mostrado na figura 39. Dessa forma, concluí-se que a partir do início do movimento, a cada $2\pi r$ percorridos na reta diretriz, tem-se um ciclo da cicloide.



Figura 39 - Primeiro ponto em que a cicloide volta a tangenciar a reta diretriz. Fonte: AUTOR

A cicloide resolve o problema da braquistócrona que consiste em definir qual o percurso mais rápido, dados dois pontos em um plano vertical em alturas diferentes, para que uma partícula móvel, caindo apenas pelo seu próprio peso, chegue ao ponto mais baixo. A figura 40 ilustra um mecanismo que explora esse problema. Diferente do que normalmente se intui, a resposta não é uma linha reta, mas sim a trajetória ao longo de uma cicloide invertida.

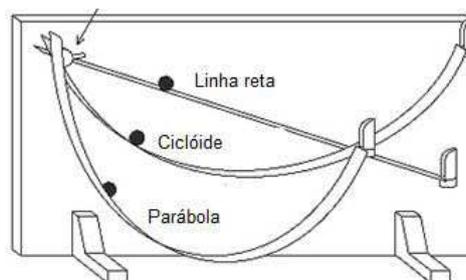


Figura 40 - Mecanismo que comprova que dados diferentes formatos de rampa, o percurso mais rápido da bola se dá na rampa em formato de cicloide invertida. Fonte: <http://jedlik.phy.bme.hu/~hartlein/www.mip.berkeley.edu/images/physics/A+05+15.gif>

Pensando na rampa em formato de ciclóide invertida, independentemente da posição em que se larga uma partícula, o tempo para chegar ao ponto mais baixo da rampa é constante. Na figura 41, se as quatro esferas forem soltas ao mesmo tempo chegam juntas ao ponto de menor altura da rampa. Colli (2010, p.1) dá esse exemplo para explicar a propriedade tautócrona da ciclóide na qual afirma que “o período de oscilação da curva (desprezado o atrito e a conseqüente perda de energia) não depende da amplitude do movimento”.

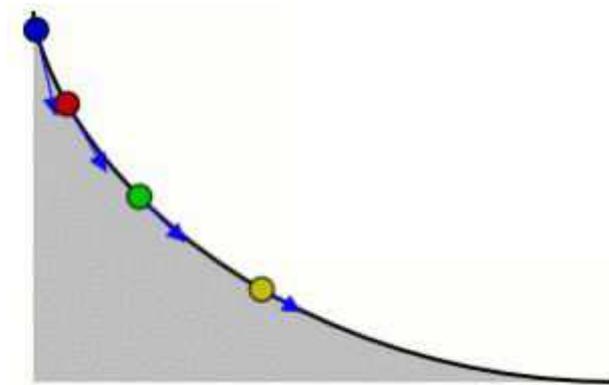


Figura 41 - Experimento em que se verifica a propriedade tautócrona da ciclóide. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_tautocr%C3%B4nica#mediaviewer/File:Tautochrone_curve.gif

As equações paramétricas da ciclóide cuja diretriz corresponde ao eixo x , o sentido de movimento é o horário e a origem do sistema cartesiano corresponde a um ponto de tangência da curva com o eixo x , são obtidas mediante a observação da construção geométrica que possibilita a geração da curva. Na figura 42 observam-se alguns elementos geométricos que podem ser levados em consideração a fim de obter as coordenadas genéricas do ponto P que descreve a ciclóide, logo após o início de sua trajetória.

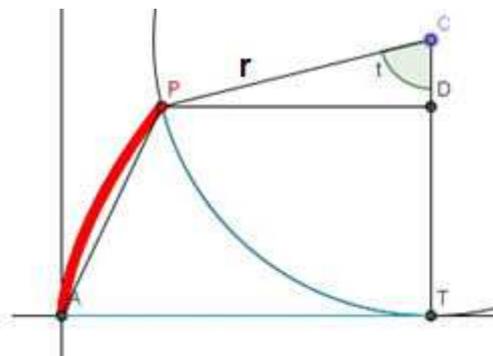


Figura 42 - Obtenção de coordenadas genéricas para o ponto que descreve a ciclóide. Fonte: AUTOR

Considerando (x, y) as coordenadas do ponto P na figura 42 tem-se $x = AT - PD$ e $y = r - DC$ (visto que $TC = r$). Da relação entre o raio de uma circunferência, o comprimento de um arco desta e o ângulo central desse arco, conclui-se que $TP = rt$. Pelas propriedades da cicloide segue que o segmento AT e o arco TP tem o mesmo comprimento, logo $AT = rt$. Aplicando-se razões trigonométricas no triângulo retângulo PDC segue que $DC = r \cos t$ e $PD = r \sin t$. Conclui-se então que a abscissa de P corresponde a $rt - r \sin t$ e o ordenada a $r - r \cos t$.

Da mesma forma que nas curvas já estudadas nesse trabalho, sempre são obtidas expressões equivalentes, independentemente da posição do ponto P. Assim sendo, seguem as equações paramétricas da cicloide cuja diretriz corresponde ao eixo x e cuja geratriz tem raio r, de modo que o início da trajetória da curva se dá no ponto $(0, 0)$.

$$\begin{cases} x = rt - r \sin t \\ y = r - r \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2.2.1 Ciclóides encurtada e alongada

Considerando-se uma reta que passa pelo raio de circunferência geratriz de uma cicloide e um ponto P a ela pertencente, pode-se obter uma cicloide ordinária (curva até aqui abordada), quando P pertence a circunferência diretriz, alongada, quando P é exterior à diretriz, ou encurtada, quando P é interior a diretriz. A figura 43 apresenta uma representação da cicloide encurtada (acima) e da cicloide alongada.

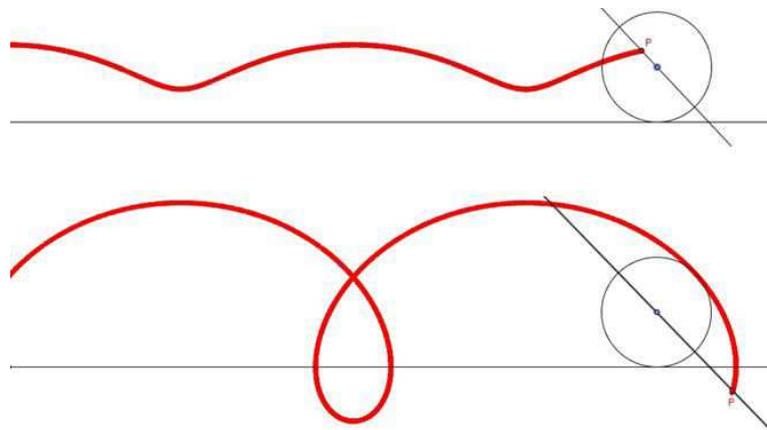


Figura 43 – Representação das cicloides encurtada e alongada. Fonte: AUTOR

2.3 Evolvente da circunferência

Considerando uma circunferência, uma reta que a tangencia e um ponto P dessa reta (inicialmente o ponto de tangencia), a evolvente da circunferência é a curva descrita pela trajetória de P quando a reta tangente (geratriz) rola, sem deslizar, ao longo da circunferência (diretriz), conforme ilustra a figura 44.

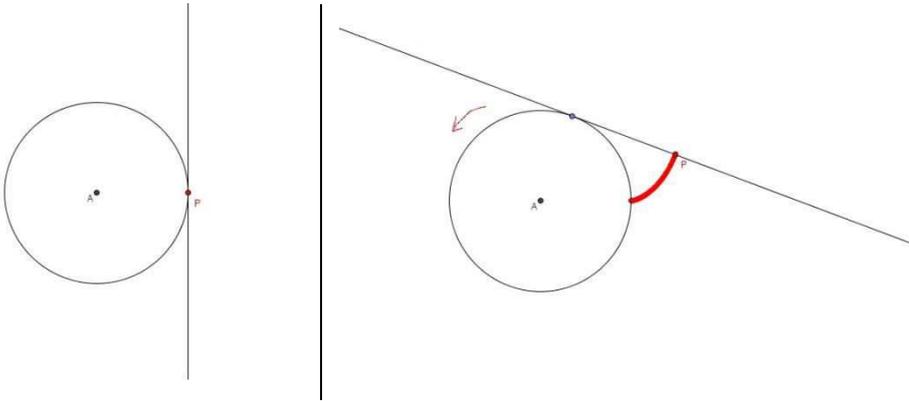


Figura 44 - Traçado da evolvente de uma circunferência de acordo com a definição. Fonte: AUTOR

Considerando T o ponto de tangência genérico da reta geratriz com a circunferência diretriz e B o ponto que corresponde à origem da curva é decorrente da definição que o arco BT tem o mesmo comprimento que o segmento TP. Na figura 45 pode-se constatar visualmente tal fato.

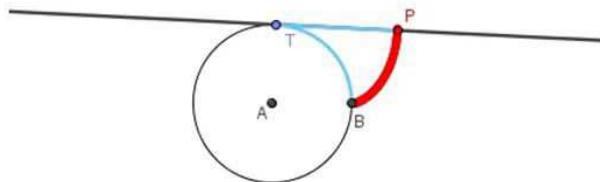


Figura 45 - Arco BT e segmento TP de mesmo comprimento. Fonte: AUTOR

Assim sendo, observa-se que a cada volta completa na circunferência diretriz o comprimento do segmento TP corresponde ao produto do comprimento da circunferência diretriz pelo número de voltas completas. Diante disso é possível concluir que a evolvente de

uma circunferência é uma curva infinita. Na figura 46 observa-se o traçado de uma curva desse tipo dadas três voltas completas na diretriz.

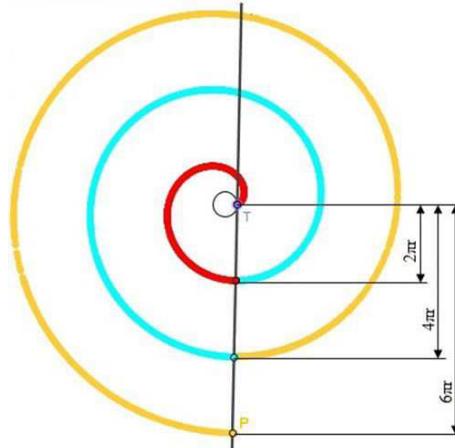


Figura 46 - Evolvente da circunferência de raio r dadas três voltas na diretriz. Fonte: AUTOR

Laranja (2014) observa que ao longo da trajetória do ponto P , cuja trajetória descreve a evolvente da circunferência, o centro instantâneo do movimento da reta (ponto da circunferência sobre o qual a reta gira) é o ponto genérico de tangência T . Do fato que a reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, decorre que em qualquer ponto P da evolvente, a inclinação da reta tangente à evolvente é a mesma que a do raio AT (A é o centro da diretriz) e a reta normal à curva é a reta tangente a circunferência (geratriz), conforme ilustra a figura 47.

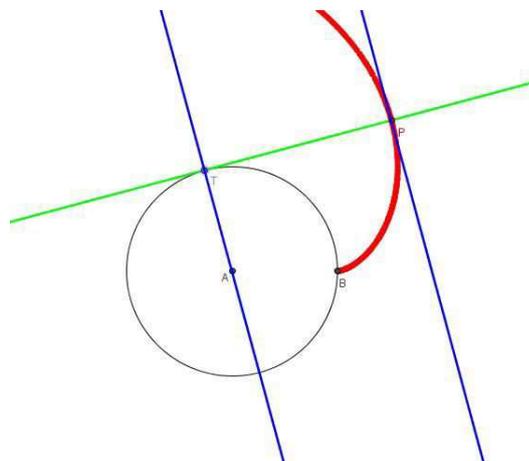


Figura 47 - Retas tangente e normal à evolvente no ponto A . Fonte: AUTOR

Segundo pesquisa de Ferreto (2003), em 1693, Huygens utilizou a evolvente de uma circunferência na construção de relógios de pêndulo. Atualmente, a evolvente é muito utilizada na indústria de engrenagens.

Seguindo o procedimento das curvas já estudadas, busca-se aqui encontrar coordenadas genéricas para as coordenadas x e y do ponto genérico P que descreve a evolvente da circunferência de raio r , centrada na origem do sistema cartesiano, cujo ponto inicial da curva corresponde a $(r,0)$. Para tal, vamos analisar a configuração em que o ponto P está posicionado logo após o início de sua trajetória, o que pode ser visualizado na figura 48.

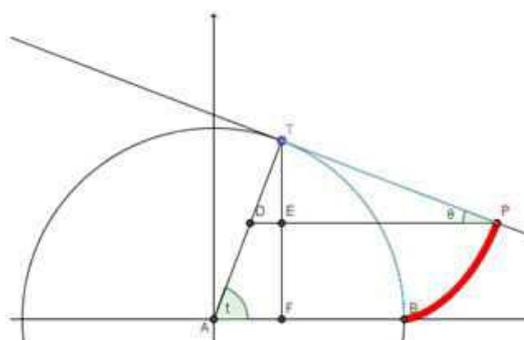


Figura 48 - Obtenção das coordenadas genéricas do ponto P que descreve a evolvente da circunferência. Fonte: AUTOR

Nessa configuração tem-se $x = AF + EP$ e $y = TF - ET$, e constata-se que $AT = r$. Das propriedades da evolvente, sabe-se que o comprimento do arco BT é equivalente ao do segmento TP , donde segue que $TP = rt$. Aplicando razões trigonométricas nos triângulos retângulos AFT e PET segue que $AF = r \cos t$, $TF = r \sin t$, $EP = r t \cos \theta$ e $ET = r t \sin \theta$. A relação entre t e θ é dada mediante a constatação de que no triângulo retângulo DTP esses ângulos são complementares, logo $\cos \theta = \sin t$ e $\sin \theta = \cos t$.

Considerando as afirmações apresentadas e o fato de que, independentemente da posição do ponto P são obtidas as mesmas expressões para as coordenadas em função do parâmetro t , seguem as equações paramétricas da evolvente da circunferência de raio r , tendo $(0, r)$ como origem da curva:

$$\begin{cases} x = r \cos t + r t \sin t \\ y = r \sin t - r t \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2.3.1 Evolventes encurtada e alongada da circunferência

A evolvente até aqui abordada (P é ponto da reta geratriz) é chamada, a rigor, de evolvente ordinária. Caso o ponto P não pertença à geratriz (P está à distância constante da geratriz e acompanha o movimento) tem-se uma evolvente alongada, quando P está no mesmo semiplano que a diretriz, ou encurtada, caso contrário. Na figura 49 observam-se curvas evolventes alongada e encurtada, respectivamente.

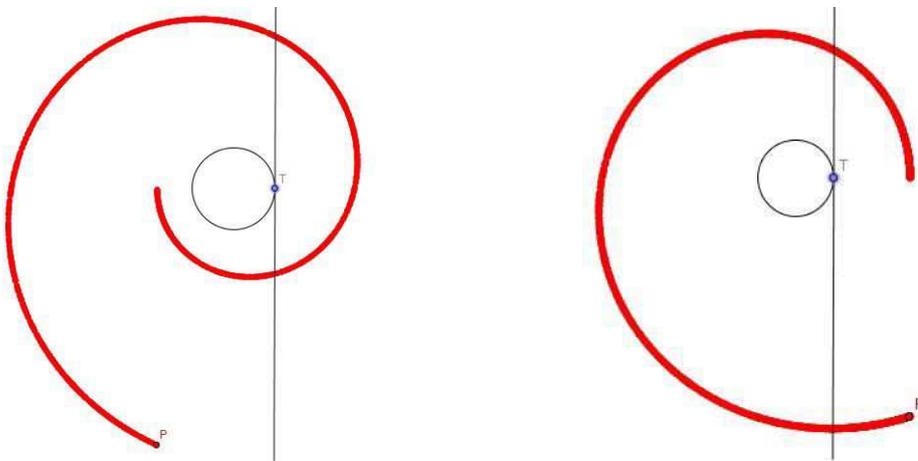


Figura 49 - Evolvente alongada (esquerda) e encurtada de uma circunferência. Fonte: AUTOR

3 MOVIMENTO RETILÍNEO PRODUZIDO POR MOVIMENTO CIRCULAR

O foco deste capítulo é proporcionar um estudo a cerca dos sistemas articulados cuja curva descrita pelo marcador é uma linha reta.

O problema da geração de movimento retilíneo teve sua fundamentação prática no desenvolvimento de máquinas. Kempe (1877, cf. Tavares, 2014) afirma que, em muitas máquinas, existe a necessidade de que pontos movam-se em linha reta, com o menor atrito possível. Nesse caso, o uso de réguas como guias para a trajetória dos pontos que devem movimentar-se de forma retilínea não constitui uma alternativa eficaz em função do desgaste, com eventuais rupturas, ocasionado pela fricção das superfícies de deslizamento e da deformação originada pelas mudanças de temperatura e variação de tensões. Justifica-se aqui a busca por mecanismos que produzam o movimento retilíneo sem os efeitos indesejáveis citados anteriormente.

Segundo pesquisa de Garcia e Sallum (2011), no século XVIII, durante a revolução industrial, foram projetados mecanismos que descreviam movimento aproximadamente retilíneo, cujo grau de precisão era suficiente para a finalidade ao qual eram destinados. Um exemplo é o mecanismo que movia o pistão da máquina a vapor. A produção do movimento exatamente retilíneo tornou-se um grande desafio para os matemáticos da época. De acordo com essa pesquisa, somente em 1864 foi criado um mecanismo que permitia esse tipo de movimento, o qual foi desenvolvido por Peaucellier.

3.1 Sistemas articulados

Em sua obra, Kempe (1877, cf. Tavares, 2014) cita os sistemas articulados como sendo àqueles constituídos por peças articuladas entre si (barras), presas a uma base fixa por pivôs. Colocando-se um marcador em uma das barras, este descreve uma curva quando movimenta-se outro ponto do sistema.

No sistema articulado representado na figura 50 em que A é pivô (está fixado ao plano), pode-se observar a curva produzida pelo movimento do marcador D quando o ponto B desloca-se ao longo de uma reta. Note que C é um ponto de articulação,

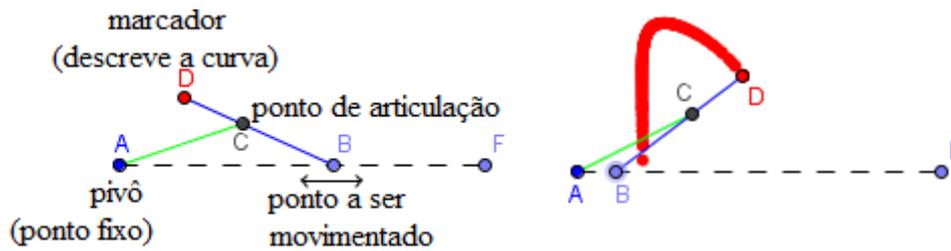


Figura 50 - Curva descrita por movimento articulado. Fonte: AUTOR

Observa-se que, em um sistema articulado com uma barra, não é possível posicionar o marcador em nenhum ponto, de modo que seja produzida uma linha reta. Todos os pontos da barra descrevem circunferências, conforme pode ser observado na figura 51, em que A é pivô, B é o ponto a ser movimentado (movimento circular) e P é o marcador.

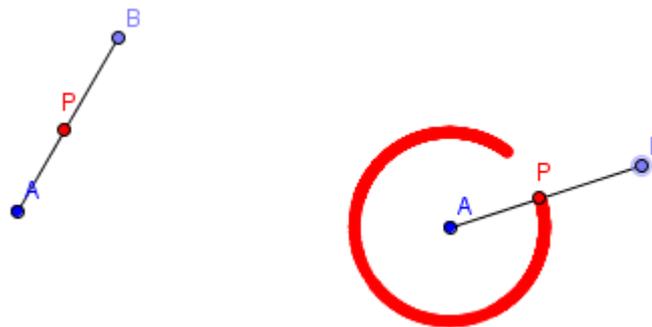


Figura 51 - Circunferência descrita pelo marcador P da barra AB, com pivô A. Fonte: AUTOR

Com três barras também não é possível obter retas, porém produz-se um movimento quase retilíneo. Os mecanismos de Watt, Roberts e Tchebicheff produzem esse tipo de movimento.

O movimento perfeitamente retilíneo é obtido pela primeira vez com sete barras, pelo mecanismo de Peaucellier e otimizado no mecanismo de Hart, com apenas cinco barras.

3.2 Movimento quase retilíneo produzido por sistemas articulados

Nesta seção são explorados os mecanismos de Watt, Tchebycheff e Robert, os quais produzem movimento quase retilíneo a partir de sistemas articulados com três barras.

Segundo Tavares (2004), o mecanismo de Watt, que data de 1784, é utilizado em quase todas as máquinas a vapor. Ele é constituído por três barras AD, DC e CB, sendo a

primeira e a última de mesmo comprimento, conforme ilustra a figura 52. Os pivôs do mecanismo são os pontos A e B e o marcador P fica no ponto médio de DC. Na vizinhança da posição de equilíbrio do mecanismo, o ponto P descreve aproximadamente uma linha reta, quando ponto D ou C são movimentados (observa-se que D e C se movimentam seguindo circunferências, visto que A e B são pivôs).

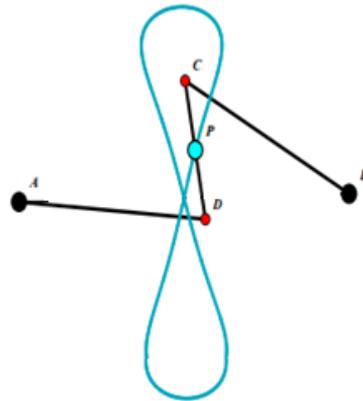


Figura 52 - Curva descrita pelo mecanismo de Watt. Fonte: TAVARES (2004)

Desenvolvido pelo matemático russo Tchebycheff em 1850, de acordo com pesquisa de Tavares (2004), este mecanismo é constituído por três barras AD, DC e CB, sendo a primeira e a última de mesmo comprimento, conforme pode ser visualizado na figura 53. Os pivôs do mecanismo são os pontos A e B e o marcador P fica no ponto médio de DC. A distância entre os pivôs AB deve ser o dobro do comprimento da barra DC. Já as barras AD e BC devem ter o comprimento 2,5 vezes maior que a barra DC. Da mesma forma que o mecanismo de Watt, na vizinhança da posição de equilíbrio do mecanismo, o ponto P descreve aproximadamente uma linha reta quando os pontos C ou D são movimentados.

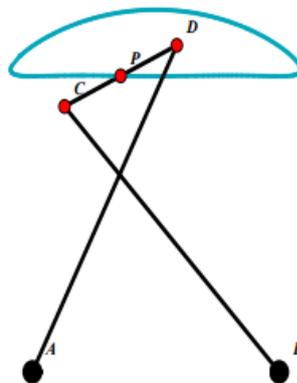


Figura 53 - Curva descrita pelo mecanismo de Tchebycheff. Fonte: TAVARES (2004)

Segundo Tavares (2004), o inglês Robert propôs, em 1860, um mecanismo que além de três barras, utiliza uma placa no formato de triângulo isósceles, cuja base ficava presa a uma das barras. Conforme observa-se na figura 54, que ilustra esse mecanismo, AD e CB são barras de mesmo comprimento, A e B são pivôs, sendo que a distância entre eles corresponde ao dobro do comprimento da barra DC, e o par de lados congruentes do triângulo isósceles DPC (placa) tem comprimento equivalente ao das barras AD e CB. O ponto P segue, num intervalo notável, um movimento quase retilíneo, mediante a ação de movimento nos pontos C ou D.

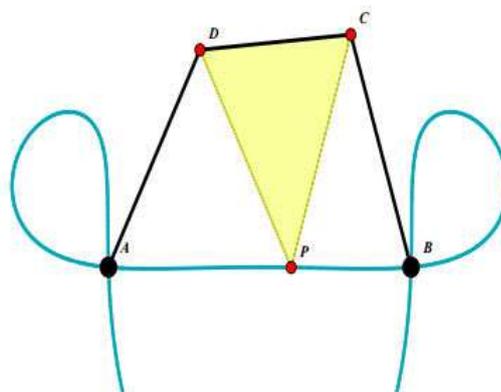


Figura 54 - Curva descrita pelo mecanismo de Robert. Fonte: TAVARES (2004)

3.3 Movimento exatamente retilíneo produzido por movimento circular

O objetivo desta seção é apresentar os mecanismos de Peaucellier e de Hart, os quais possibilitam o movimento exatamente retilíneo através de sistemas articulados que recebem movimento circular. Antes disso, é necessário explorar o conceito de inversão circular, o qual constitui a fundamentação para o funcionamento de tais mecanismos.

3.3.1 Inversão circular

Definição: A inversão na circunferência de centro O e raio r é a aplicação que envia cada ponto Q (distinto de O) no ponto P pertencente à semirreta OQ tal que $OQ \cdot OP = r^2$.

Na figura 55 há três exemplos de inversão de um ponto Q em relação a uma circunferência de raio r e centro O. Em cada um dos três casos o ponto P é o inverso de Q em relação à circunferência de centro e raio r.

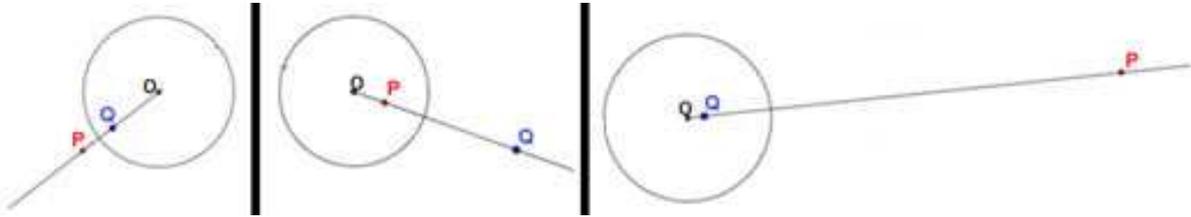


Figura 55 - Exemplos de inversão do ponto Q da circunferência de centro O mediante diferentes posicionamentos de tal ponto. Fonte: AUTOR

Ao inverter todos os pontos de uma circunferência que não passa por O obtém-se outra circunferência. Caso O seja um ponto da circunferência a ser invertida, obtém-se uma reta. Essas duas situações são ilustradas na figura 56.

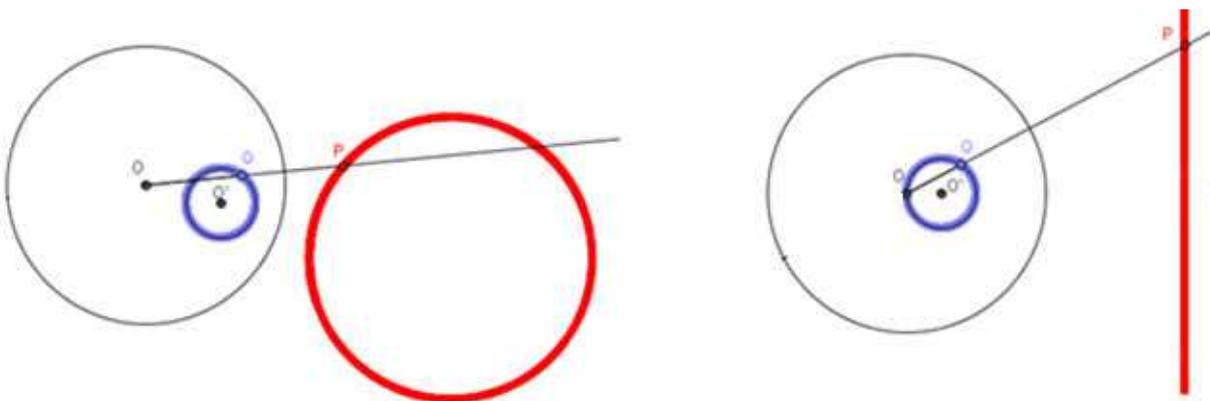


Figura 56 - Inversão de uma circunferência em relação à outra circunferência. Fonte: AUTOR

Na figura 56 intui-se, visualmente, que a reta obtida pela inversão da circunferência de raio OO' , no caso em O é ponto da circunferência de centro O' , é perpendicular a reta OO' . A figura 57 é utilizada para justificar tal propriedade com base em argumentos geométricos. Considerando o ponto A da circunferência de raio OO' , pertencente à reta OO' , e seu inverso A' , qualquer outro ponto dessa circunferência, Q, e seu inverso P, tem-se a igualdade $OA \cdot OA' = OQ \cdot OP = r^2$. Donde segue que $OA/OP = OQ/OA'$, logo os triângulos OAQ e $OA'P$ tem dois pares de lados correspondentes proporcionais. Como o ângulo $\hat{A}OQ$ é comum aos dois triângulos concluí-se que eles são semelhantes. Observando que \hat{OQA} é ângulo reto (OA é um diâmetro), tem-se que $\hat{OA'P}$ também é ângulo reto, comprovando o fato observado visualmente.

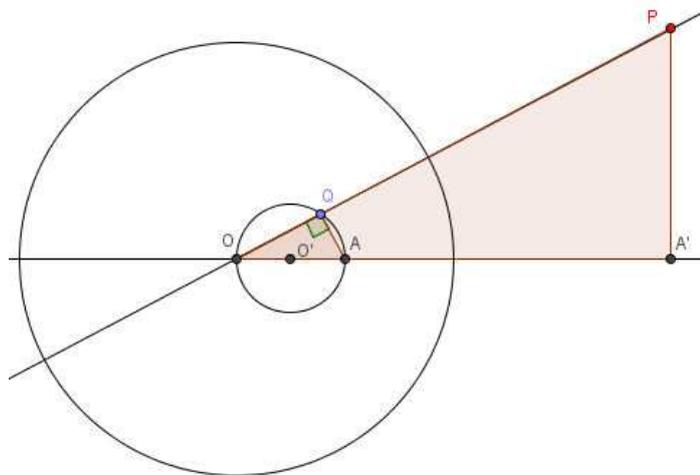


Figura 57 - Justificativa para a perpendicularidade das retas OO' e da reta obtida pela inversão da circunferência de centro O' que passa por O . Fonte: AUTOR

3.3.2 Mecanismo de Peaucellier

O mecanismo de Peaucellier utiliza a inversão circular de uma circunferência que passa pelo centro da referência da inversão para transformar um movimento circular em movimento retilíneo. Ao movimentar o ponto Q da figura 58 (movimento circular) a trajetória do ponto P é retilínea.

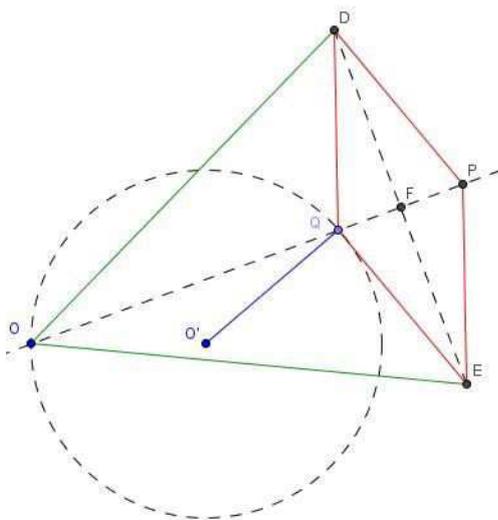


Figura 58 - Mecanismo de Peaucellier. Fonte: AUTOR

Na construção de tal mecanismo são utilizadas sete barras de três tamanhos distintos. Considerando as barras OD e OC de comprimento “a”, as barras QD, DP, PE e QE de comprimento “b” (menor que “a”) e a barra O’Q de comprimento “c”, o mecanismo é construído de modo que os pares de barras OD e OE, QD e QE e DP e PE sejam simétricos em relação à reta OQ.

O funcionamento do mecanismo é ocasionado pelo fato de P ser a inversão do ponto Q (O conjunto de todos os pontos Q é uma circunferência que passa por O. Para forçar esse movimento acrescenta-se ao mecanismo a barra O’Q.) em relação à circunferência de centro O. Para justificar tal afirmação é preciso mostrar que o produto dos segmentos OQ e OP é constante e equivale ao quadrado do raio da circunferência de centro O, independentemente da posição de Q.

Como QDPE é um losango, suas diagonais são perpendiculares, com F o ponto de intersecção delas. Assim, nos triângulos retângulos OFD e QFE tem-se, respectivamente, $a^2 = FD^2 + OF^2$ e $b^2 = FD^2 + QF^2$. Subtraindo essas igualdades tem-se $a^2 - b^2 = OF^2 - QF^2 = (OF - QF)(OF + QF)$. Da construção sabe-se que a diferença entre os segmentos OF e QF é OQ, e que a soma desses é OP, donde segue que o produto dos segmentos OQ e OP é dado por $a^2 - b^2$. Como a e b são constantes (comprimento das barras), tem-se que a trajetória dos pontos P, produzida pelo mecanismo, corresponde a inversão da circunferência de centro O’ e raio OO’ pela circunferência de centro O e raio $r = \sqrt{a^2 - b^2}$, logo é retilínea, conforme visto na seção 3.3.1. A figura 59 ilustra a trajetória do marcador P do mecanismo e a circunferência de referência para a inversão circular. Tal trajetória é finita devido às limitações físicas do mecanismo.

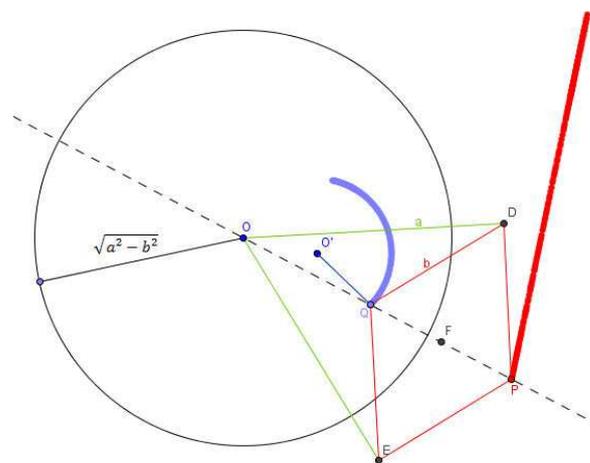


Figura 59 – Funcionamento do mecanismo de Peaucellier com base na inversão da circunferência de centro O’ em relação à circunferência de centro O. Fonte: AUTOR

3.3.3 Mecanismo de Hart

Assim como o mecanismo de Peaucellier, o mecanismo de Hart também utiliza a inversão circular de uma circunferência que passa pelo centro da referência da inversão para transformar um movimento circular em movimento retilíneo.

Na figura 60 observa-se um paralelogramo ABCD de lados AB, BC, CD e DA que devem ser pensados como barras de comprimento fixo, de modo que as bases AB e DC são paralelas a uma reta MN. Define-se aqui paralelogramo cruzado como a figura obtida a partir desse paralelogramo ABCD de modo que os vértices B e C são deslocados para as retas paralelas à MN que passam por D e A, respectivamente, conforme também pode ser visualizado na figura 60. O mecanismo de Hart é, basicamente, um paralelogramo cruzado.

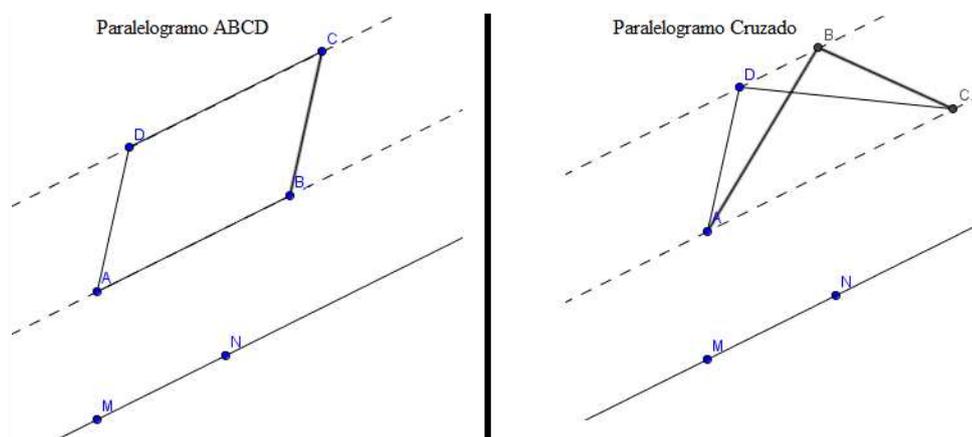


Figura 60 – Construção de um paralelogramo cruzado. Fonte: AUTOR

O mecanismo aqui descrito é composto por dois pares de barras de mesmo comprimento AD e BC (comprimento “a”) e AB e CD (comprimento “b”), um pivô O sobre a barra AD, um marcador P sobre a barra CD e um ponto de articulação Q sobre AB, posicionados de modo que razões entre AO e AD, AQ e AB e CR e CD sejam equivalentes e que o pivô O' da barra O'Q seja o centro da circunferência que passa por O. Nessa configuração é fácil ver que AC e DB são paralelos. O marcador P da figura 61 produz movimento retilíneo mediante o movimento circular de Q em razão do primeiro ser o inverso do segundo em relação a uma circunferência de centro O.

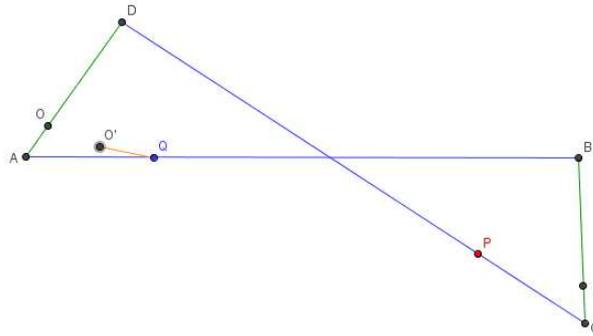


Figura 61 - Mecanismo de Hart. Fonte: AUTOR

Para justificar o fato que Q e P são inversos em relação à circunferência de raio O basta mostrar que os pontos O, Q e P estão alinhados (1) e que o produto dos comprimentos dos segmentos OQ e OP é constante (equivale ao quadrado do raio da circunferência de centro O) (2).

A afirmação (1) é comprovada observando-se, na figura 62, a semelhança entre os pares de triângulos OAQ e DAB, RCP (R é o ponto de BC tal que a razão entre CR e CB é equivalente a razão entre AO e AD) e BCD e DAC e DOP, donde segue que OQ e PR são paralelos a DB e OP é paralelo a AC, portanto, O, P, Q e R são colineares.

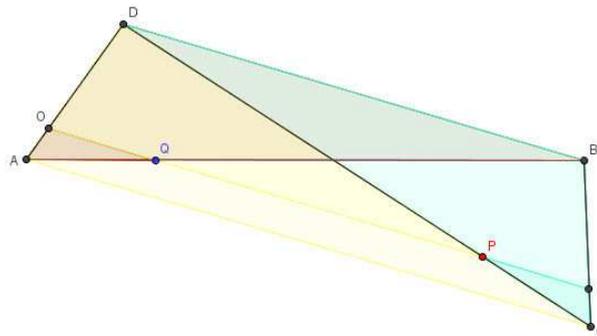


Figura 62 - Triângulos semelhantes que justificam o fato de O, Q e P serem colineares. Fonte: AUTOR

Por outro lado, a afirmação (2) é verificada observando-se, também na figura 62, a semelhança entre os pares de triângulos OAQ e DAB e DAC e DOP, das quais são provenientes, respectivamente, as proporções $OQ/DB = AO/AD$ e $OP/AC = AO/AD$. Multiplicando-se as proporções obtém-se $OP \cdot OQ = \frac{AO \cdot DO \cdot DB \cdot AC}{AD^2}$. Da construção segue que AO, DO, e AD tem comprimento constante, entretanto é preciso mostrar que o produto dos comprimentos de DB e AC também é constante. Para tal, é preciso observar a existência de

três casos decorrentes da dinâmica do mecanismo: $DB < AC$, $DB > AC$ e $DB = AC$, conforme ilustra a figura 63.

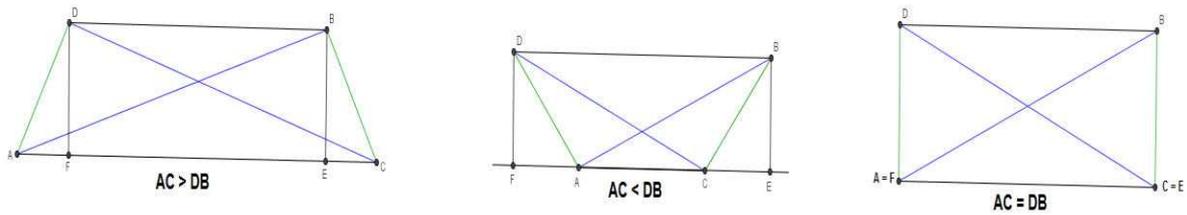


Figura 63 - Possibilidades de relação entre AC e DB. Fonte: AUTOR

Considerando-se F e E pontos da reta AC de modo de os segmentos FD e EB sejam perpendiculares a essa, obtém-se as relações $AB^2 = AE^2 + EB^2$ e $BC^2 = EC^2 + EB^2$, nos triângulos retângulos DFC e BEA, respectivamente. Subtraindo-se as duas igualdades tem-se a relação $AB^2 - BC^2 = AE^2 - EC^2$. Observando que AB e BC são barras rígidas, de comprimentos “b” e “a”, respectivamente, tem-se que $AE^2 - EC^2$ equivale à constante $b^2 - a^2$. Caso $DB < AC$, observa-se que $AC = AE + EC$ e $DB = FE = AE - EC$, logo o produto dos comprimentos dos segmentos DB e AC é $AE^2 - EC^2$, que como visto anteriormente é constante. Já quando $DB > AC$, $AC = AE - EC$ e $DB = FE = AE + EC$, donde novamente conclui-se que $DB.AC$ também equivale a $AE^2 - EC^2$. Caso $DB = AC$, segue que o produto dos comprimentos dos segmentos AC e DB é dado por AC^2 , que equivale a $AB^2 - BC^2 = b^2 - a^2$, observando-se o triângulo retângulo ACB. Conclui-se dessa forma que o produto dos comprimentos dos segmentos DB e AC equivale a constante $b^2 - a^2$ em qualquer configuração possibilitada pelo mecanismo de Hart.

Pelos argumentos anteriores observa-se que P é o inverso do ponto Q em relação a circunferência de centro O e raio $r = \frac{\sqrt{AO \cdot DO \cdot DB \cdot AC}}{AD}$. Sendo assim, o movimento circular de Q faz com que P descreva uma trajetória retilínea (finita pelas limitações físicas do mecanismo), conforme ilustra a figura 64.

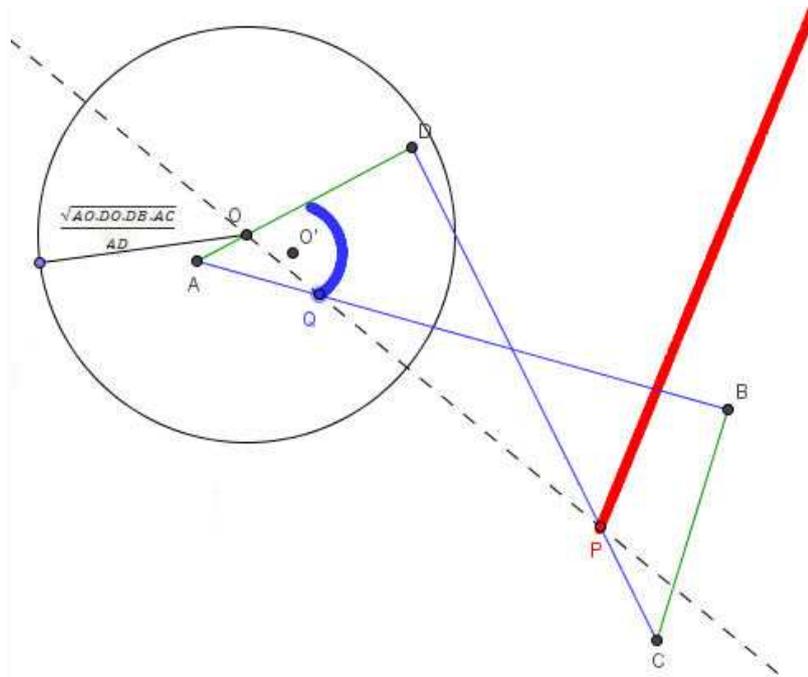


Figura 64 - Funcionamento do mecanismo de Hart com base na inversão da circunferência de centro O' em relação à circunferência de centro O . Fonte: AUTOR

4 OBJETIVOS DAS ATIVIDADES SUGERIDAS

Encontram-se anexadas a esse trabalho sugestões de atividades que exploram curvas rolantes (anexos 2, 3, 4 e 5) e os mecanismos que geram o movimento retilíneo a partir do movimento circular, bem como o princípio da inversão circular, o qual fundamenta tais mecanismos (anexos 6, 7 e 8). O uso do software Geogebra é essencial para o desenvolvimento da maior parte dos exercícios propostos. O anexo 1 traz algumas orientações sobre os comandos do software que podem ser aplicados para o desenvolvimento das atividades propostas.

Neste capítulo são abordados os principais objetivos de cada tipo de atividade sugerida nos anexos, diferenciando os exercícios que envolvem curvas rolantes daqueles que exploram os mecanismos que geram o movimento retilíneo a partir do movimento circular.

4.1 Atividades envolvendo curvas rolantes

4.1.1 Construção com material concreto

Descrição da atividade:

O educando deve reproduzir o movimento evidenciado na definição da curva (vide seções 2.1.1, 2.1.2, 2.2 e 2.3 utilizando material concreto. A figura 65 mostra a obtenção da hipociclóide, epiciclóide e ciclóide reproduzindo o movimento enunciado em cada definição.



Figura 65 - Obtenção da hipociclóide, epiciclóide e ciclóide reproduzindo o movimento enunciado em cada definição, utilizando material concreto. Fonte: AUTOR

Na atividade que utiliza material concreto para obtenção da evolvente da circunferência não se parte diretamente da definição para se obter a curva. Utiliza-se uma das propriedades da evolvente (o comprimento do arco cujos extremos são o ponto que corresponde ao início da trajetória da curva e o ponto de tangência é igual ao comprimento do segmento com extremos no ponto de tangência e no ponto que descreve a curva) para que se possa obter uma configuração que proporcione a reprodução do movimento descrito na definição. A figura 66 mostra o procedimento a ser feito para obtenção da evolvente da circunferência utilizando-se material concreto.



Figura 66 - Obtenção da evolvente da circunferência, utilizando material concreto.
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=rh2EIU8Vhpg>

Objetivos:

- Obter uma noção sobre o traçado da curva.
- Perceber as imprecisões ocasionadas pelas limitações do material.

Na figura 67 há exemplos de possíveis imperfeições no traçado das curvas seguindo os procedimentos sugeridos pela atividade.

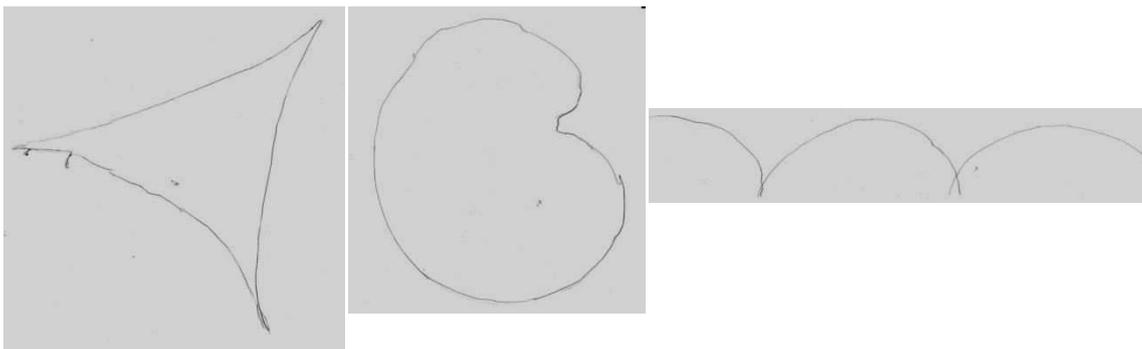


Figura 67 – Possível imprecisão no traçado de algumas curvas rolantes ao realizar a construção mediante o uso de material concreto. Fonte: AUTOR

- Perceber visualmente relações importantes para a compreensão das propriedades de cada curva.

Exemplo disso é a relação de igualdade entre os arcos TP (da circunferência geratriz) e BT (da circunferência geratriz) no início da trajetória de uma epicycloide que pode ser intuída mediante a observação da construção, conforme a figura 68.

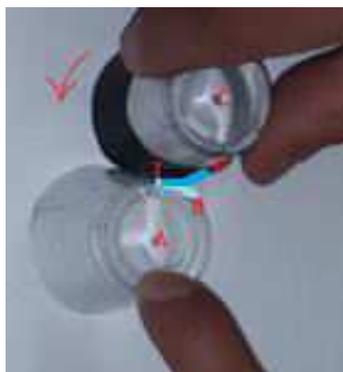


Figura 68 – Relação de igualdade entre os arcos TP e BT. Fonte: AUTOR

4.1.2 Construção utilizando o programa Geogebra

Descrição da atividade:

O aluno deve utilizar o software de geometria dinâmica Geogebra no intuito de conseguir uma construção geométrica que permita a obtenção da curva.

A figura 69 mostra as construções que possibilitam a obtenção da hipociclóide e da epicycloide, por exemplo.

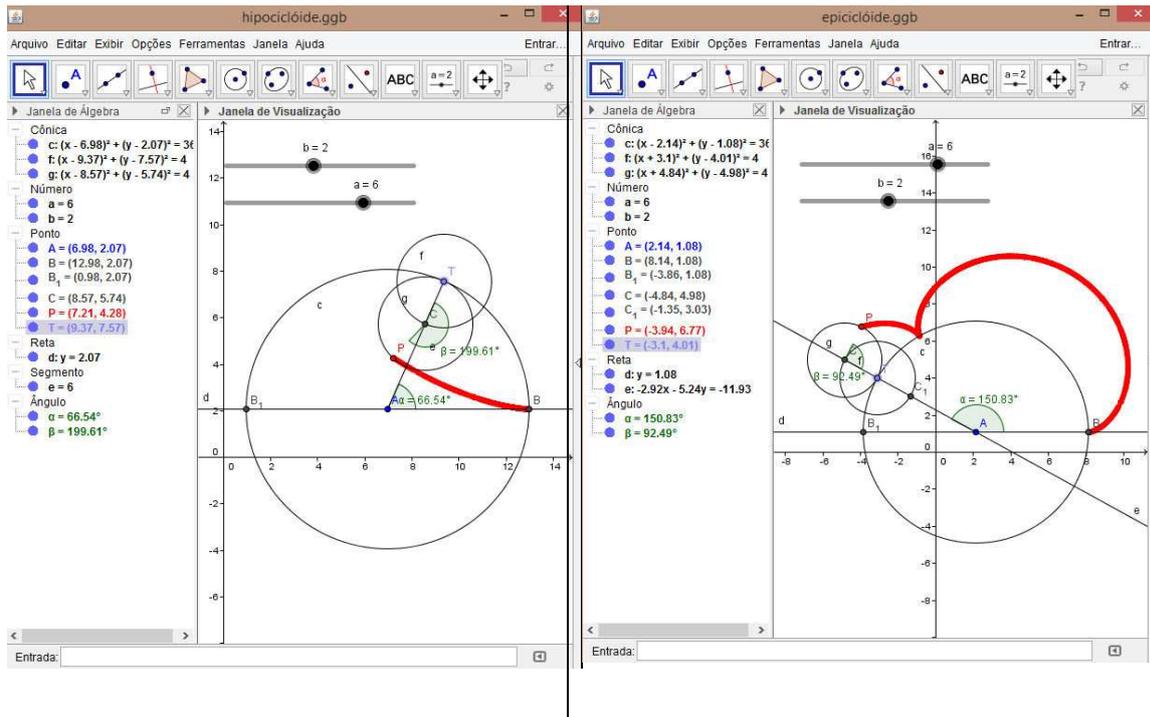


Figura 69 – Construções geométricas no software Geogebra que possibilitam a obtenção de hipociclóides e epiciclóides. Fonte: AUTOR

Objetivos:

- Conhecer o software e as possibilidades que ele apresenta para a resolução de problemas geométricos.
- Utilizar elementos da geometria plana como pontos, retas, segmentos, ângulos e circunferências bem como observar o papel que cada um desses elementos desempenha na construção.

Na figura 69 verifica-se na janela de álgebra das duas construções a presença dos elementos geométricos citados.

- Abordar as posições relativas entre elementos geométricos bem como obter graficamente os pontos de intersecção (quando existirem) entre dois elementos.

O quadro 7 traz um trecho do roteiro proposto para a construção da hipociclóide que explora situações desse tipo.

- Crie um ponto A;
- Crie uma circunferência com centro em A e raio a;
- Crie uma reta paralela ao eixo x que passe por A;
- Obtenha os pontos de intersecção entre a reta paralela ao eixo x e a circunferência de raio a (B deve ser o ponto de intersecção à direita de A);
- Crie um ponto T sobre a circunferência;
- Crie um segmento AT;
- Crie uma circunferência de centro T e raio b;
- Obtenha o ponto de intersecção (ponto C) entre o segmento AT e a circunferência de raio b;

Quadro 7 – Abordagem das posições relativas entre elementos geométricos no roteiro para a construção geométrica que permite a obtenção de hipociclóides. Fonte: AUTOR

- Verificar a curva obtida pela construção através da ferramenta rastro bem como observar a possibilidade de mudança de parâmetros (“a” é o raio da diretriz e “b” é o raio da geratriz).

Na figura 70 obtém-se uma epicyclóide cujas circunferências diretriz e geratriz são 6 e 2, respectivamente, habilitando-se o rastro no ponto P.

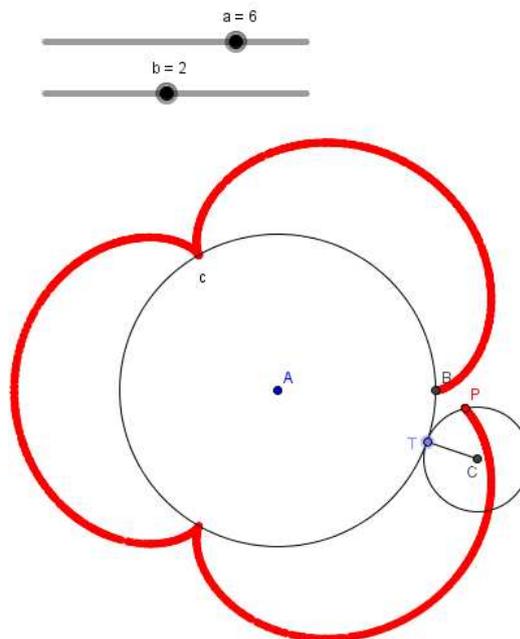


Figura 70 – Obtenção de uma epicyclóide de circunferências diretriz e geratriz 6 e 2, respectivamente, alterando os parâmetros “a” e “b” e habilitando o rastro no ponto P.

4.1.3 Exercícios que utilizam a construção geométrica pronta

Descrição da atividade:

Utilizando as construções geométricas que geram as curvas rolantes no software Geogebra o estudante deve explorar os recursos do programa na realização de exercícios que visam à busca por relações e propriedades.

Objetivos:

- Utilizar as ferramentas do software para verificar a presença de propriedades intuídas visualmente, conforme solicitado em alguns dos exercícios propostos.

Na figura 71, por exemplo, a ferramenta Arco Circular foi utilizada para constatar a relação de igualdade entre os comprimentos dos arcos PT (h) e BT (k) no início do movimento que descreve a hipociclóide.

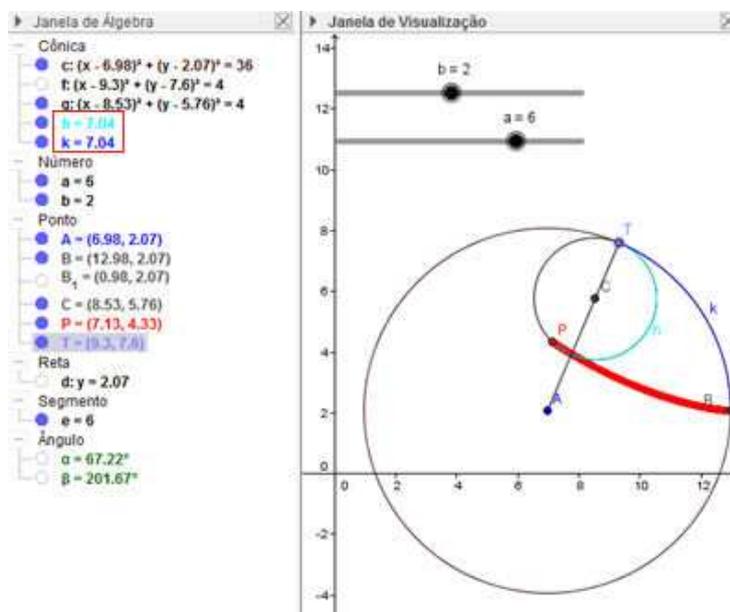
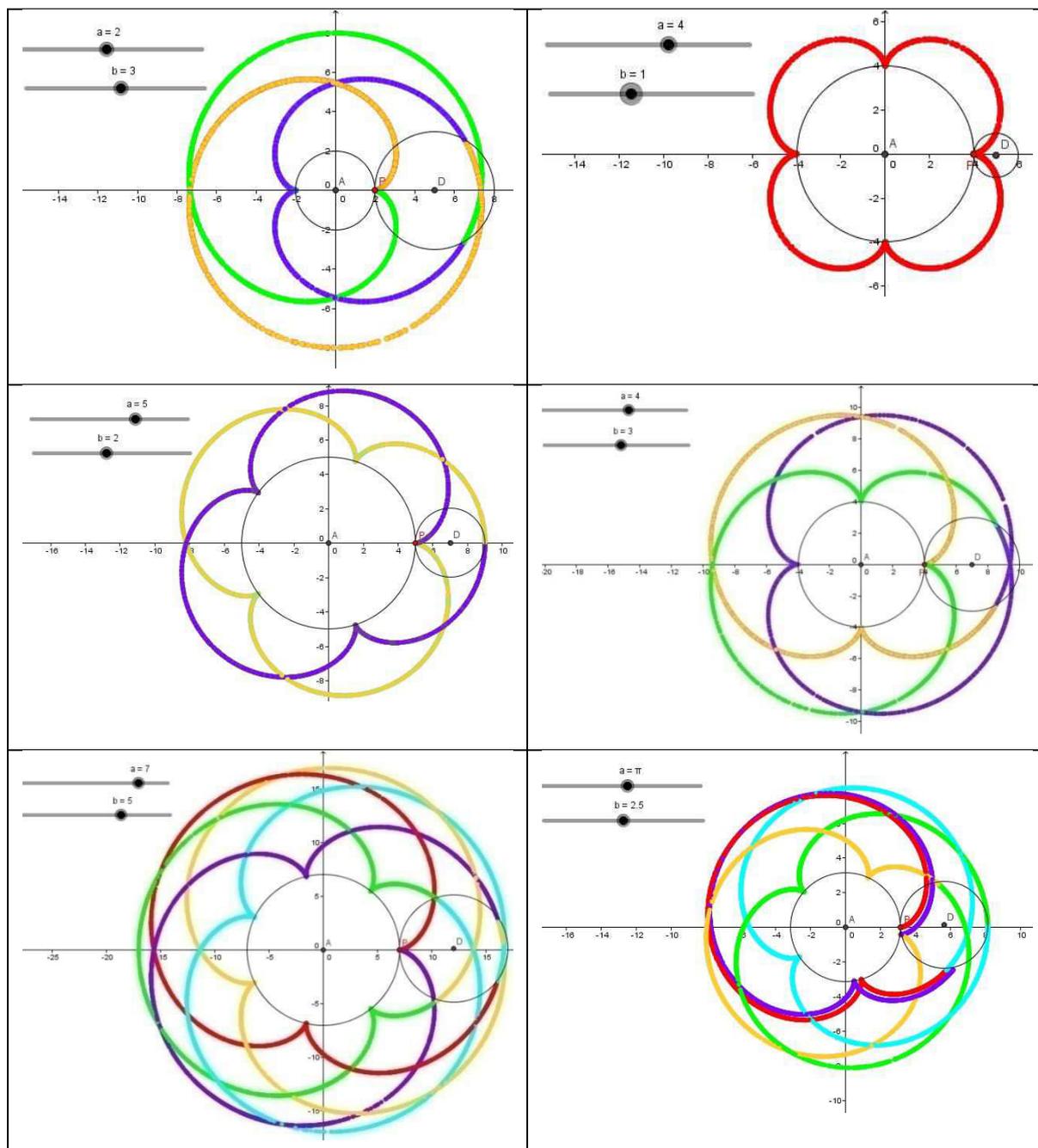


Figura 71 – Verificação da igualdade entre os comprimentos dos arcos PT e BT mediante à utilização da ferramenta Arco Circular. Fonte: AUTOR

- Perceber a relação entre a modificação dos parâmetros que se referem à diretriz e à geratriz com a curva obtida.

O quadro 8 traz exemplos de modificações nos parâmetros “a” (raio da diretriz) e “b” (raio da geratriz) da construção geométrica que permite a obtenção de epiciclóides. O aluno deve relacionar a natureza da fração irredutível que corresponde a razão entre os parâmetros “b” e “a” ao comportamento da curva quanto ao número cúspides e de voltas completas da geratriz sobre a diretriz para que o traçado esteja totalmente definido.



Quadro 8 – Epiciclóides obtidas mediante alterações nos parâmetros “a” e “b”. Fonte: AUTOR

- Identificar a diretriz e a geratriz de uma curva dada.

Na figura 72 percebe-se visualmente que há cinco cúspides em duas voltas completas da geratriz sobre a diretriz da hipociclóide. Como a curva está centrada na origem, fica fácil verificar que o raio da circunferência diretriz é 10, logo da fração irredutível $2/5$ que é equivalente a b/a com $a = 10$, donde segue que $b = 4$ (raio da circunferência diretriz).

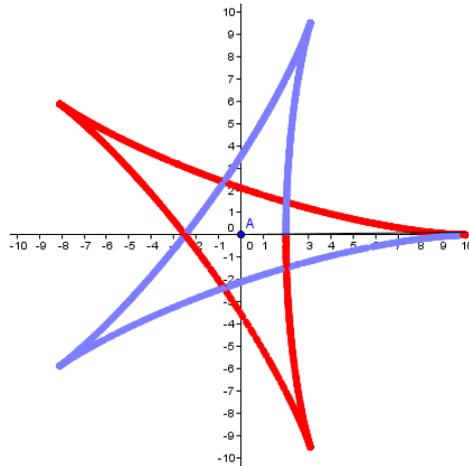
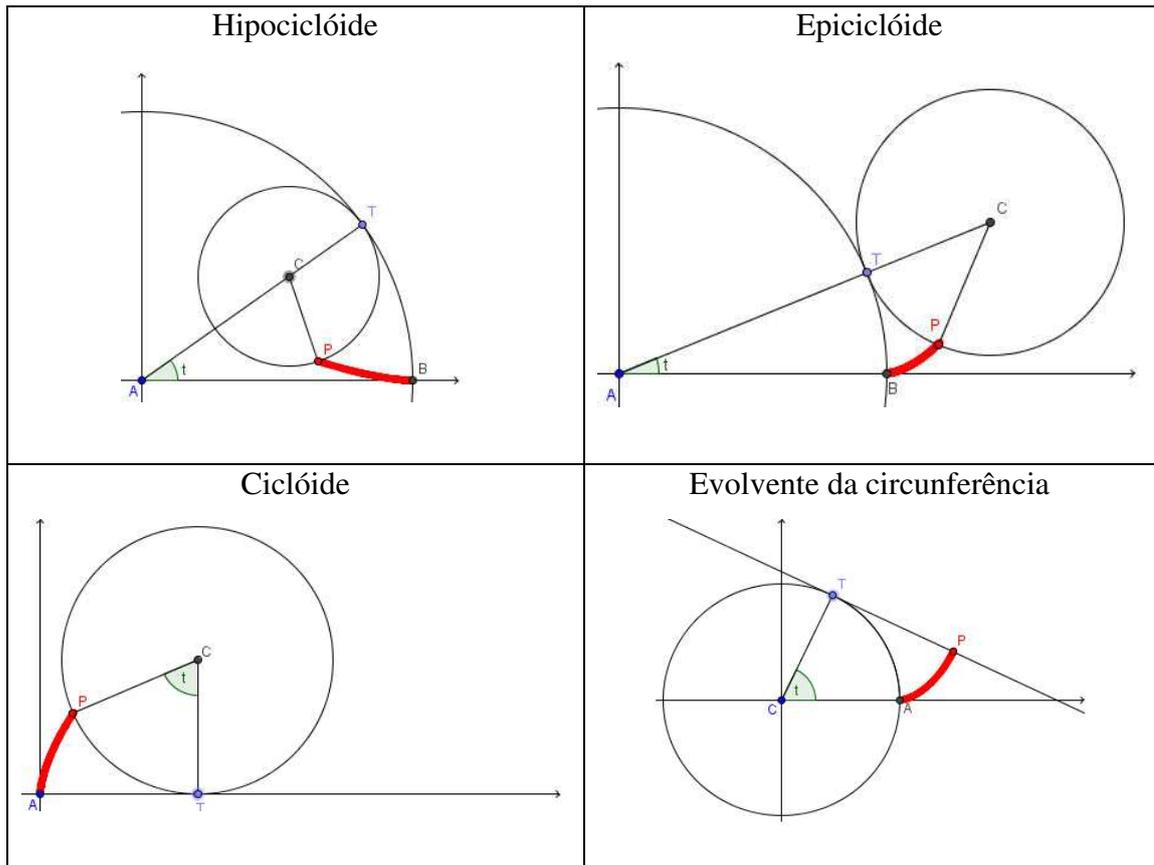


Figura 72 – Hipociclóide com cinco cúspides e traçado completamente definido após duas voltas na diretriz.
Fonte: AUTOR

4.1.4 Obtenção das equações paramétricas

Descrição da atividade:

O educando deve utilizar a construção geométrica com a qual se obtém cada curva e observar relações que levam as coordenadas genéricas do ponto que a descreve, em função do parâmetro t . No quadro 9 observa-se o ângulo que varia segundo esse parâmetro em cada uma das curvas rolantes.



Quadro 9 – Ângulo que varia segundo o parâmetro t em cada uma das curvas rolantes. Fonte: AUTOR

Objetivos:

- Fazer relações entre a geometria e a álgebra.

Conforme foi visto na seção 1.3, o papel fundamental da geometria analítica na escola básica é possibilitar uma ligação entre a geometria e a álgebra. Obter as equações paramétricas de uma curva rolante através da observação das relações entre os elementos geométricos presentes na configuração que possibilita a obtenção de tal curva é um exercício que proporciona esse tipo de ligação.

- Pensar nas coordenadas de P (ponto que descreve a curva rolante) como adição ou subtração de segmentos e buscar relações geométricas para que esses segmentos sejam escritos em função do parâmetro t .

Na figura 73, por exemplo, a abscissa do ponto P que descreve a hipociclóide pode ser escrita como $AI + HP$ e a ordenada do mesmo ponto pode ser escrita como $IC - HC$.

Utilizando razões trigonométricas nos triângulos AIC e PHC, observando as relações entre β e t e entre β e Θ é possível escrever os segmentos AI, HP, IC e HC em função do parâmetro t , e conseqüentemente, obter as equações paramétricas da hipociclóide.

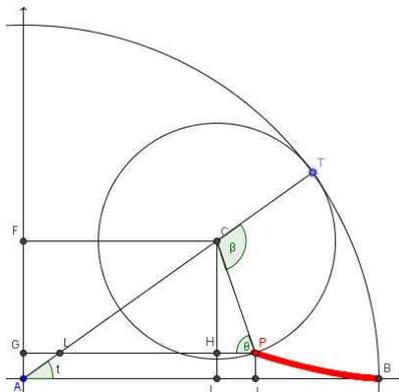


Figura 73 – Obtenção das equações paramétricas da hipociclóide. Fonte: AUTOR

- Conhecer uma forma alternativa para obtenção das curvas rolantes.

Por exemplo, a cicloide de reta diretriz $y = 0$, origem em $(0,0)$ e circunferência geratriz de raio 2 pode ser obtida de duas formas diferentes no programa Geogebra:

- utilizando a construção geométrica com parâmetro $r = 2$ e modificando as coordenadas de A e B para $(0,0)$ e $(k,0)$, com $k > 0$, respectivamente, conforme ilustra a figura 74.

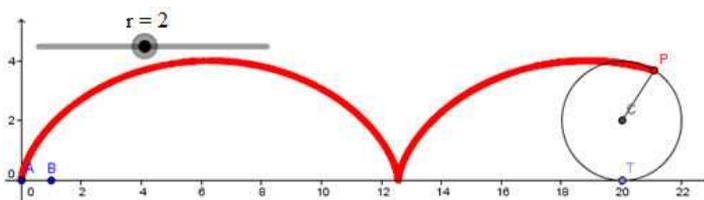


Figura 74 – Obtenção da cicloide de diretriz $y = 0$, origem em $(0, 0)$ e geratriz de raio 2 a partir da construção geométrica. Fonte: AUTOR

- construindo um parâmetro t (controle deslizante com valor mínimo 0) e utilizando as equações paramétricas da cicloide para construção do ponto $P = (2t - 2 \text{sen } t, 2 - 2 \text{cos } t)$, conforme a figura 75.

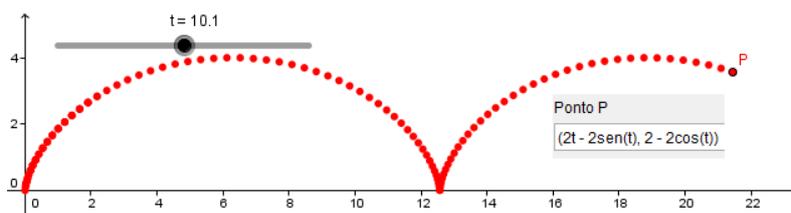


Figura 75 – Obtenção da cicloide de diretriz $y = 0$, origem em $(0, 0)$ e geratriz de raio 2 a partir da variação do parâmetro t nas equações paramétricas. Fonte: AUTOR

4.1.5 Utilização de equações paramétricas para a obtenção de curvas

Descrição da atividade:

Exercícios que consistem na utilização das equações paramétricas de certa curva rolante a fim de obter o respectivo traçado.

Objetivos:

- Utilizar as equações paramétricas no intuito de obter pontos da curva bem como verificar, utilizando o software Geogebra, que os pontos obtidos realmente pertencem à curva em questão.

Por exemplo, o aluno pode utilizar as equações paramétricas da evolvente da circunferência de raio 2 para descobrir qual o ponto da curva obtido quando o parâmetro t é 8 e posteriormente, utilizando o software Geogebra, confirmar que o ponto obtido realmente pertence a essa curva, conforme mostra a figura 76.

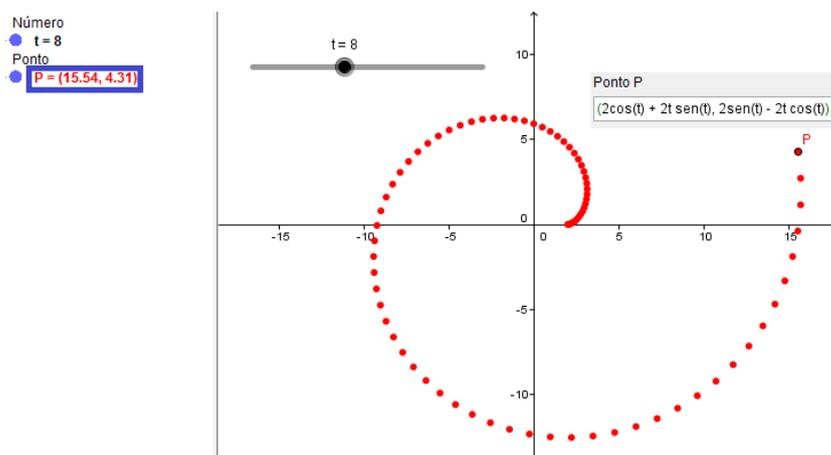


Figura 76 – Verificação no software Geogebra de que o ponto obtido pelas equações paramétricas da evolvente da circunferência de raio 2 pertence à curva. Fonte: AUTOR

- Dada uma curva rolante, definir suas equações paramétricas.

Pode-se descobrir os raios das circunferências diretriz e geratriz de cada epiciclóide da figura 77, por exemplo, seguindo o mesmo raciocínio utilizado na seção 4.1.3. Sabendo os

valores de “a” e “b”, basta substituí-los nas equações paramétricas da epiciclóide para obter as equações que descrevem cada uma das curvas.

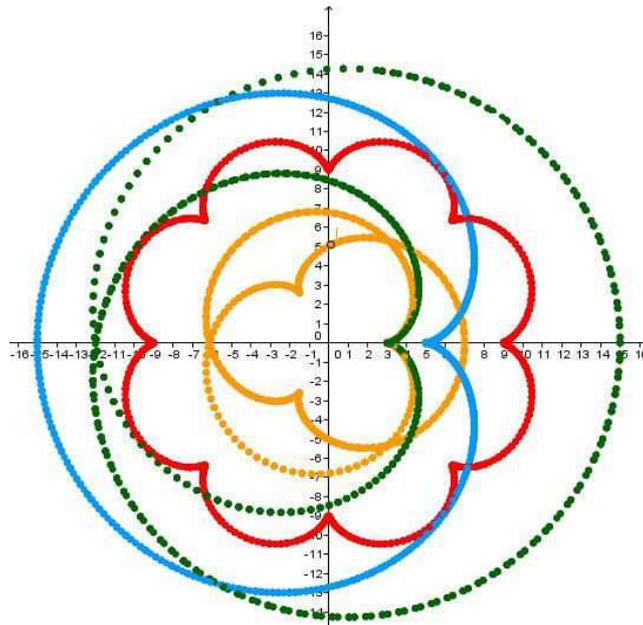


Figura 77 – Conjunto de epiciclóides com diferentes raios de diretriz e geratriz, mas com todas as diretrizes centradas na origem. Fonte: AUTOR

Deve-se ter especial atenção nos casos em que a curva não está no formato padrão. Na figura 78, por exemplo, há duas ciclóides refletidas em relação ao eixo x. As equações paramétricas $\begin{cases} x = rt - r \operatorname{sen} t \\ y = r - r \operatorname{cos} t \end{cases}$ geram ciclóides com ponto inicial (0,0) e trajetória acima do eixo x, no sentido positivo. Assim sendo, basta multiplicar a ordenada do ponto genérico que descreve a curva obtida a partir das equações paramétricas por -1, a fim de obter a reflexão em relação ao eixo x.

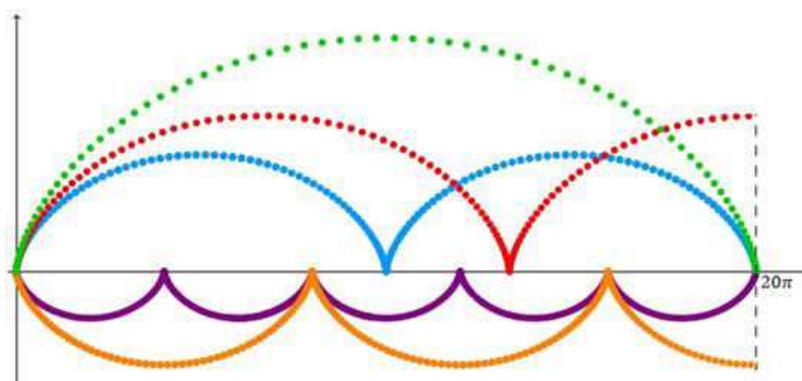


Figura 78 – Conjunto de ciclóides com reta diretriz $y = 0$ e origem (0,0), mas com geratrizes de diferentes raios e algumas refletidas em relação ao eixo x. Fonte: AUTOR

4.2 Atividades envolvendo movimento retilíneo gerado por movimento circular

4.2.1 Construção utilizando o programa Geogebra

Descrição da atividade:

O software Geogebra deve ser utilizado a fim de reproduzir os mecanismos de Peaucellier e Hart, os quais produzem movimento retilíneo a partir de movimento circular. As descrições bem como a justificativa do funcionamento de cada mecanismo encontram-se nas seções 3.3.2 e 3.3.3. Na figura 79 observam-se os mecanismos de Peaucellier e de Hart, reproduzidos no programa.

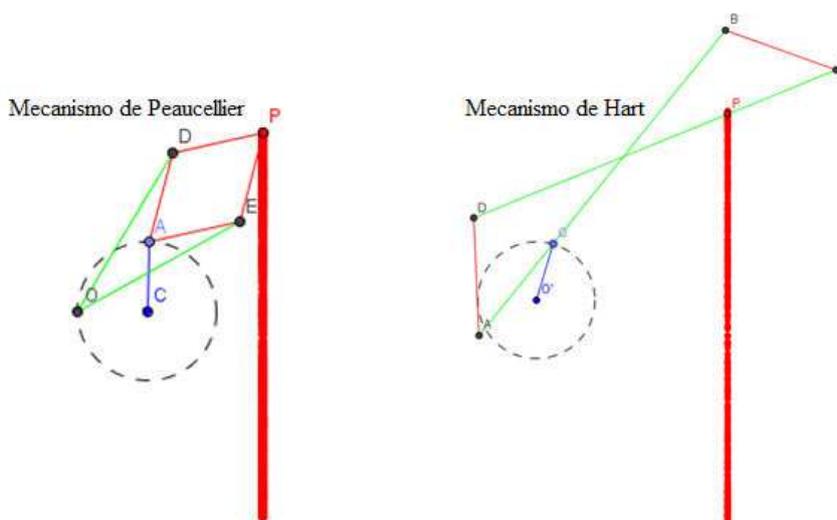


Figura 79 – Mecanismos de Peaucellier de Hart. Fonte: AUTOR

Para possibilitar a compreensão do princípio que possibilita o funcionamento de tais mecanismos (inversão circular), o software pode ser utilizado para a visualização do inverso de um ponto (ou de um conjunto de pontos) em relação a uma circunferência de acordo com a definição de tal conceito (vide seção 3.3.1). A figura 80 mostra a inversão de uma circunferência de centro O' em relação a uma circunferência de centro O em um caso bem específico (O é ponto da circunferência de centro O').

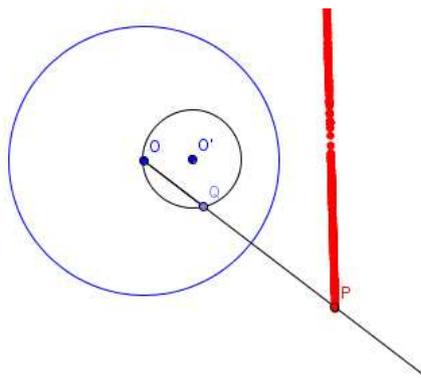


Figura 80 – Inversão de uma circunferência de centro O' em relação a uma circunferência de centro O no caso em que O pertence à circunferência de centro O' . Fonte: AUTOR

Objetivos:

- Conhecer o software e as possibilidades que ele apresenta para a resolução de problemas geométricos.
- Utilizar elementos da geometria plana como pontos, retas, segmentos, ângulos e circunferências bem como observar o papel que cada um desses elementos desempenha na construção.
- Abordar as posições relativas entre elementos geométricos bem como obter graficamente os pontos de intersecção (quando existirem) entre dois elementos.
- Compreender o conceito de inversão circular para a obtenção de conjunto de inversos dos pontos de uma circunferência em relação à outra, em especial o caso particular que permite a obtenção de uma reta.

Após obter o conjunto de pontos P resultantes da inversão do conjunto de pontos Q de uma circunferência de centro O' em relação à outra de centro O , o aluno pode utilizar as ferramentas do Geogebra para observar que o produto entre os comprimentos dos segmentos OP e OQ equivale ao quadrado do raio da referência da inversão, independentemente da posição de P , conforme é exemplificado na figura 81.

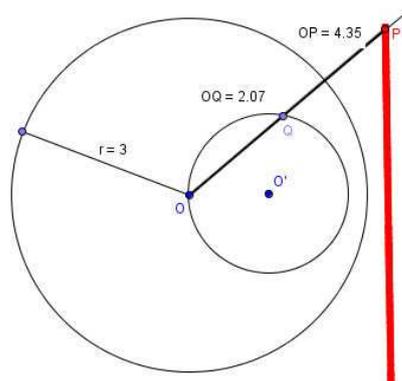


Figura 81 – Utilização das ferramentas do Geogebra para constatar que o produto dos comprimentos de OQ e OP equivale à constante 9 (quadrado do raio da circunferência que é referência da inversão). Fonte: AUTOR

- Perceber a presença do movimento circular nos mecanismos de Peaucellier e de Hart.

No caso de mecanismo de Peucellier, por exemplo, o estudante deve perceber que a trajetória segundo a qual o ponto se movimenta corresponde a uma circunferência, conforme ilustra a figura 82.

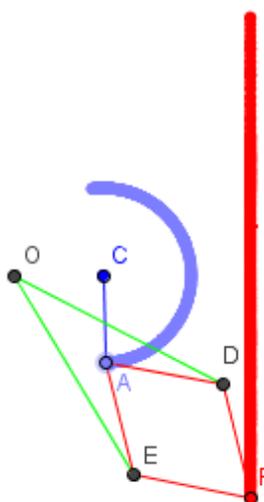


Figura 82 – Observação do movimento circular descrito pelo ponto A no mecanismo de Peaucellier. Fonte: AUTOR

4.2.2 Exercícios que utilizam a construção geométrica pronta

Descrição da atividade:

Utilizando as construções geométricas que reproduzem os mecanismos de Peaucellier e de Hart no Geogebra, o estudante deve utilizar os recursos do programa na realização de

exercícios que visam à compreensão das propriedades que garantem o funcionamento de tais mecanismos.

Objetivos:

- Justificar relações utilizadas na construção do mecanismo por meio de tópicos de geometria e trigonometria básica.

No caso do mecanismo de Peaucellier, por exemplo, o estudante precisa aplicar a Lei dos Cossenos no triângulo OAD e os conhecimentos sobre funções trigonométricas inversas obter medida do ângulo AÔD, conforme ilustra a figura 83.

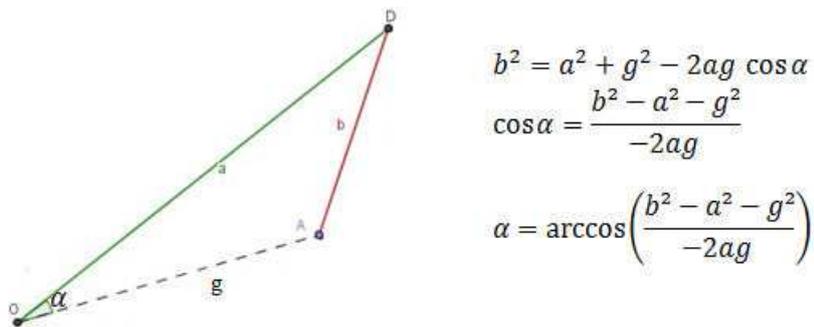


Figura 83 – Utilização da Lei dos Cossenos e de funções trigonométricas inversas para o cálculo da medida do ângulo AÔD = α. Fonte: AUTOR

Já no mecanismo de Hart, o fato dos pontos O, Q e P estarem alinhados pode ser justificado utilizando semelhança de triângulos, conforme raciocínio desenvolvido na seção 3.3.3. A figura 84 mostra os triângulos OAQ, DAB, RCP, BCD, DAC e DOP os quais devem ser utilizados para concluir tal fato.

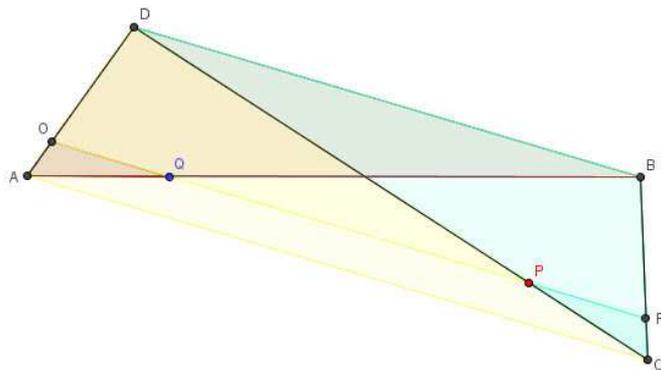


Figura 84 – Utilização de triângulos semelhantes no mecanismo de Hart. Fonte: AUTOR

- Concluir que o movimento retilíneo gerado pelo mecanismo é o resultado de uma inversão circular.

Utilizando a construção pronta do mecanismo de Hart, por exemplo, o aluno pode perceber que o produto dos comprimentos dos segmentos OQ e OP é constante, independentemente da posição de Q . Observando também que O é um ponto da circunferência de centro O' , conforme a figura 84, pode-se concluir a trajetória descrita pelo ponto P corresponde a uma reta em função de ser o resultado da inversão de tal circunferência em relação a uma circunferência de centro O .

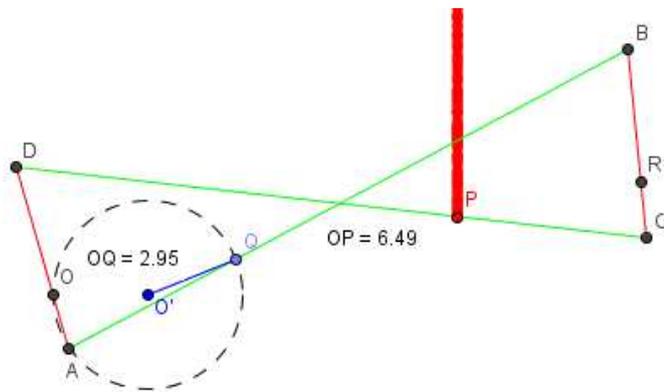


Figura 85 – Constatação de que a reta descrita pela trajetória de P é o resultado da inversão circular da circunferência de centro O' em relação a uma circunferência de centro O . Fonte: AUTOR

- Constatar as limitações físicas dos mecanismos.

A figura 85 ilustra o momento em que a trajetória retilínea de P termina, devido às limitações físicas do mecanismo de Peaucellier. Se o ponto A continuar a ser deslocado no sentido anti-horário todas as barras que constituem o mecanismos (exceto CA) simplesmente desaparecem no software Geogebra, simbolizando tais limitações.

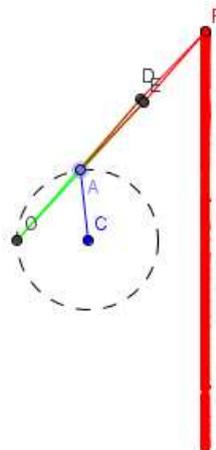


Figura 86 – Limitações físicas do mecanismo de Peaucellier. Fonte: AUTOR

CONCLUSÕES

Em razão desse trabalho conter propostas de atividades que não foram efetivamente aplicadas em sala de aula, as conclusões aqui expostas consistem em evidências baseadas no estudo teórico, na proposta didática e nos objetivos específicos de cada tipo de atividade aqui apresentados.

Acredita-se que a abordagem do tema central do trabalho é, de fato, pertinente à escola básica, em especial ao Ensino Médio. Boa parte das atividades sugeridas utiliza, no processo resolutivo, conceitos elencados nos parâmetros curriculares nacionais. A aplicação de tais atividades permite que esses conceitos sejam explorados de forma diferenciada, constituindo uma alternativa à abordagem tradicional dos mesmos, que muitas vezes se dá de forma desconexa com as outras ciências e até mesmo com os demais campos da própria Matemática.

Espera-se que o estudo das curvas descritas mecanicamente permita que o educando relacione os aspectos visuais com as propriedades de certa configuração geométrica. Passa-se a buscar, na configuração geométrica, propriedades que são mantidas mediante a ação de movimento. Figuras como triângulos retângulos aparecem de forma distinta em relação às “figuras protótipo” com as quais o aluno normalmente se depara nos livros didáticos. Tais figuras deixam de ser classificadas apenas pelo aspecto visual e passam a ser exploradas de acordo com as respectivas definições e propriedades. Segmentos e arcos mantêm igualdade de comprimento independentemente da posição em que a configuração se encontra devido à relação entre o ângulo central e o comprimento do arco de circunferência. Propriedades de posições relativas entre retas e circunferências, como por exemplo, o perpendicularismo entre a reta tangente à circunferência e o raio no ponto de tangência, são comprovadas visualmente ao longo de toda a dinâmica da configuração geométrica que descreve a curva.

Pensa-se que a descrição mecânica das curvas aqui estudadas motiva o aluno a buscar procedimentos que visem à obtenção de tais curvas. Ao se deparar com a definição pela primeira vez, ele dificilmente consegue formar uma imagem mental da curva, em função do movimento que a definição descreve ser bastante diferente dos quais ele está acostumado. A curiosidade em saber qual curva esse movimento inesperado irá gerar pode guiar o processo de ensino-aprendizagem, no sentido de aguçar a busca por estratégias e a utilização de conceitos já conhecidos na resolução do problema.

Constata-se que, em função de limitações físicas, existe dificuldade na realização do movimento e, com isso, as imprecisões no desenho da curva são normais quando se utiliza material concreto para reproduzir as curvas rolantes. Mesmo assim, essa etapa é proposta nas atividades envolvendo tais curvas por ser importante para a constatação visual de propriedades necessárias para uma construção geométrica que possibilite a obtenção precisa de cada curva.

Buscar uma configuração geométrica que, ao sofrer a ação de movimento, permita a observação da trajetória de um ponto fixado na configuração, constitui uma das alternativas para a obtenção precisa de curvas rolantes. Nessa busca utilizam-se as propriedades da geometria euclidiana para obter a construção geométrica que tem por finalidade reproduzir o movimento descrito na definição de cada curva. Essa construção é extremamente rica pedagogicamente, pois permite a exploração das propriedades das posições relativas entre elementos geométricos e da relação entre comprimento e ângulo central de um arco de circunferência.

A experiência didática do autor permite concluir que a construção citada no parágrafo anterior dificilmente terá um efeito significativo no processo de ensino-aprendizagem se for realizada de forma estática, em uma folha, utilizando régua e compasso. Para que se tenha o efeito esperado é necessário reproduzir a descrição mecânica da curva. Ao longo desse trabalho procura-se explorar as possibilidades dos softwares de geometria dinâmica, em especial o Geogebra, ao se propor, nas atividades sugeridas, a utilização desse programa para a obtenção de curvas rolantes mediante a reprodução do movimento proposto pela respectiva definição. Como benefícios dessa utilização podem ser citadas a constatação da funcionalidade das propriedades intuídas visualmente na construção com material concreto bem como a visualização da trajetória do ponto que descreve a curva mediante a utilização da ferramenta rastro.

O fato das curvas rolantes serem obtidas mediante o deslocamento de um ponto em um plano, obedecendo uma relação de movimento entre dois elementos geométricos, é uma ótima oportunidade para a exploração de raciocínios de geometria analítica, em especial a obtenção das coordenadas genéricas do ponto que descreve a curva. Nesse caso relaciona-se a construção geométrica feita no Geogebra (baseada nas propriedades da geometria euclidiana) com as equações paramétricas da curva (tópicos de geometria analítica). Acredita-se que as atividades sugeridas são eficazes nesse sentido, visto que se propõe ao educando que, partindo da construção geométrica que permite a obtenção da curva, mediante a utilização de tópicos

relativamente simples como semelhança de triângulos, soma dos ângulos internos do triângulo, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas no triângulo retângulo, encontre-se as coordenadas genéricas para o ponto que descreve a curva e, conseqüentemente, as equações paramétricas da curva. O aluno pode obter curvas rolantes de forma mais rápida do que pela construção geométrica, ao utilizar as coordenadas genéricas do ponto que descreve a curva e mediante a variação de um parâmetro, no programa Geogebra.

A resolução do mesmo problema, obter curvas rolantes, de duas formas distintas (por meio de construção geométrica e por equações paramétricas) é extremamente importante, pois relaciona dois campos distintos da Matemática. Dificilmente o aluno se depara com situações assim. Normalmente os problemas são tratados com uma única abordagem, sem que outras possibilidades sejam exploradas. Acredita-se que situações que oportunizam vários procedimentos de resolução são extremamente ricas pedagogicamente, pois essas oportunizam ao estudante a comparação e a relação entre os processos e a escolha do raciocínio mais pertinente ao problema em questão.

O estudo aqui realizado também leva a concluir que a ideia de movimento retilíneo gerado por movimento circular é aplicável ao Ensino Médio. Acredita-se que essa ideia desperte o interesse dos alunos tendo em vista que se trata de um problema cujo enunciado é simples, mas que a resolução é relativamente complexa. O desenvolvimento do procedimento para a resolução desse problema é extremamente rico na exploração de propriedades da geometria euclidiana. Tópicos como inversão circular, semelhança de triângulos, teoremas de Pitágoras e Lei dos Cossenos aparecem como princípios dos mecanismos de Peaucellier e Hart, os quais resolvem o problema da obtenção do movimento retilíneo a partir de movimento circular. Acredita-se que a reprodução desses mecanismos no Geogebra, conforme proposto nesse trabalho, chame atenção para a necessidade da aplicação desses conceitos básicos de geometria e trigonometria no intuito de se obter uma construção geométrica eficaz. Novamente o estudante tem a oportunidade de confrontar procedimentos diferentes para a resolução do mesmo problema.

Em um contexto geral, a importância desse trabalho se dá no sentido de trazer ideias diferentes das tradicionais com a finalidade de propor um processo de ensino-aprendizagem significativo, em cumprimento com os Parâmetros Curriculares Nacionais. As atividades aqui sugeridas podem ser utilizadas na íntegra ou adaptadas para enfoque em algum tópico específico do Ensino Médio. Espera-se que as ideias aqui expostas possam colaborar para reflexões a cerca do ensino da Matemática no país, em especial no campo da Geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOLOUD, S. A, et al. **A geometria no ensino fundamental**: Reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro, n. 27, p. 94 – 108, 2004.

ALVES, G. S. A.; SOARES, A. B. **Geometria Dinâmica**: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 9, 2003, São Paulo. Anais do WIE 2003. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/issue/view/29>. Acesso em: 10 mar. 2015.

ARAÚJO, P. V. **À volta da roda**. Gazeta de Matemática, Porto, n. 147, p. 24 – 21, jul. 2004.

BARROS, L. G. X. B.; KARRER, M. **Inovações tecnológicas no processo de ensino aprendizagem em geometria analítica e álgebra linear**. Sinergia, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 259 – 266, set.-dez. 2011.

BERVIAN, R. O.; JESUS, A. R. **Curvas planas, funções reais e transformações no plano**: Aspectos matemáticos com apoio de programa livre. In: BIENAL DA SBM, 3, 2006, Belo Horizonte. Minicurso. Disponível em: <http://mat.ufg.br/bienal/2006/mini/adelmo.of.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2014.

BRANDÃO, L. O.; ISOTANI, S. **Uma ferramenta para ensino de geometria dinâmica na internet**: iGeom. In: WORKSHOP EM INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 9, 2003, Campinas. Anais do IX Workshop em Informática na Educação. Campinas: 2003, p. 410 - 421.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária da Educação Média e Tecnológica. **PCN+, Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002. 144 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 126p.

BRAVIANO, G.; RODRIGUES, M. H. W. L. **Geometria dinâmica: Uma nova geometria?** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 49, p. 22 – 26, 2002.

COLLI, E. **A tautócrona**. São Paulo, USP, 2010. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/tautocrona.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2015.

CONFIRA como são as questões de geometria no vestibular da UFRGS e no Enem. **Zero Hora**, Porto Alegre, 10 jul. 2014.

CURI, E.; PIRES, C. M. C. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. **Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v.10, n.1, p. 151 – 189, 2008.

DALLEMOLE, J. J.; GROENWALD, L. O. G. **O ensino e aprendizagem da Geometria Analítica e os registros de representação semiótica**. In: ENCONTRO BRASILEIRO DOS ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16, 2012, Canoas. Anais do XVI EBRAPEM. Canoas: 1996.

DELGADO, J.; FRENSEL K. **Geometria Analítica II – Aula 3**: Parametrização de algumas curvas planas. Niterói: UFF, 2008. Disponível em: http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga2/ga2-aula3.pdf. Acesso em: 03 jan, 2015.

FERRETO, D. **Curvas**: Estudo e visualização com o software Cabri-Geométrè II. Florianópolis: UFSC, 2003. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96807/Daniel_Ferreto.PDF?sequence=1. Acesso em: 03 jan. 2015.

GARCIA, S. R. L.; SALLUM E. M. **A inversão circular e sistemas articulados**. São Paulo: USP, 2011. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/inversao.pdf>. Acesso em 20 jan. 2015.

GRAVINA, M. A. **Geometria dinâmica**: Uma nova abordagem para o ensino da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7, 1996, Belo Horizonte. Anais do VII SBIE. Belo Horizonte: 1996, p. 1 -13.

_____ **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. set. 2001. 262 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HARMAN. **Microfones**: noções e aplicações. Tradução de Miguel Ratton. 2001. Disponível em: http://dirsom.com.br/index_htm_files/Tipos%20de%20Microfones.pdf. Acesso em: 11 jan. 2015.

LARANJA, R. Engrenagens. Porto Alegre: UFRGS, 2014. Disponível em: <https://chasqueweb.ufrgs.br/~rafael.laranja/ENG03316/Engrenagens.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2015.

MARQUES, E. O. M; NASSER, L. **Formação continuada de professores**: Experiências em Tocantins e Mato Grosso. 2007. Disponível em: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:dvJOurdM9EYJ:www.sbemrasil.org.br/files/ix_enem/Relato_de_Experiencia/Trabalhos/RE69966974768T.doc+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br. Acesso em: 10 mar. 2015.

MARTINS, R. R. G. **Curvas planas**: Construções e animações com recursos do MAPLE. Belo Horizonte: UFMG, 2005. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_RodrigoGurgel.pdf. Acesso em: 07 jan. 2015.

MUNZNER, T. **Mathematical visualization**: Standing at the crossroads. In: CONFERENCE ON VISUALIZATION, 7, 1996, Los Alamitos. Proceedings of the XVII Conference on Visualization. Los Alamitos: 1996, p. 451 - 453.

PICADO, J. **O que é uma curva?** Coimbra: UC, 2004. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/0405/Apontamentos/sI2.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2014.

RAPOSO, C. S. C. M **Curvas famosas e não só**: Teoria, histórias e atividades, 2013. 260 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para professores) – Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

RANGEL, Alcyr Pinheiro. **Curvas**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

SILVA, C. A. **Geometria Analítica**: Explorando equações paramétricas com o uso do Winplot. São Paulo: PUC, 2005. Disponível em: http://www.diadematematica.com/artigos_minicursos/silva_TecnologiasInformaticaseEducacaoMatematica_ta.pdf. Acesso em: 16 dez. 2014.

TAVARES, J. N. **Como desenhar uma linha reta com articulações planas**. Porto: UP, 2014. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/mecs/APPLETSCinderella/MecanismosPequeno%20%28copy%29.pdf>. Acesso em: 29 dez. 2014.

_____ **Como desenhar uma linha reta com mecanismos articulados planos (segundo Kempe)**. Porto: UP, 2014. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/mecs/Mecanismos2004.html>. Acesso em: 10 dez. 2014.

WEISSTEN, E. W. **Plane curve.** Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/PlaneCurve.html>. Acesso em: 29 nov. 2014.

_____ **Nephroid.** Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/Nephroid.html>. Acesso em: 12 jan. 2015.

ANEXOS

Anexo 1 – Alguns comandos do Geogebra necessários para o desenvolvimento das atividades

Criar um comando deslizante

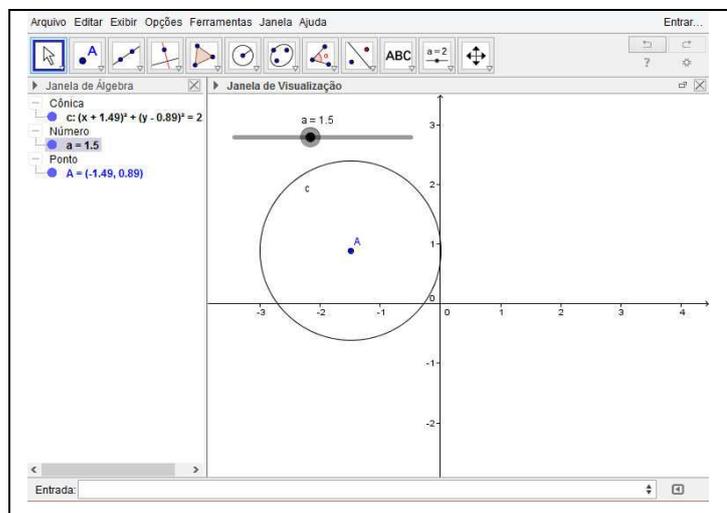
No campo de entrada digite $a = k$ e pressione a tecla Enter. “a” é uma variável a ser utilizada na construção e “k” é o valor máximo que essa variável pode assumir.

Na figura abaixo, o valor máximo da variável “a” é 10.



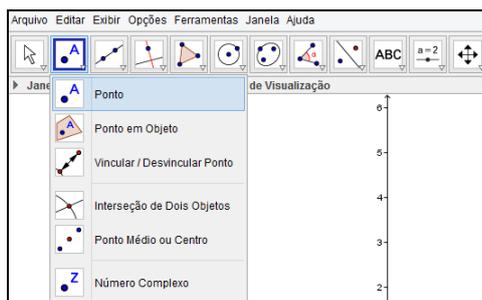
Deslizando-se o controle pode-se modificar o valor de a na construção, o que pode ser bastante interessante quando se pretende observar as consequências da mudança dessa variável.

Na figura abaixo se tem uma circunferência de raio a. Essa circunferência aumenta ou diminui conforme se varia o valor de “a” no controle deslizante.



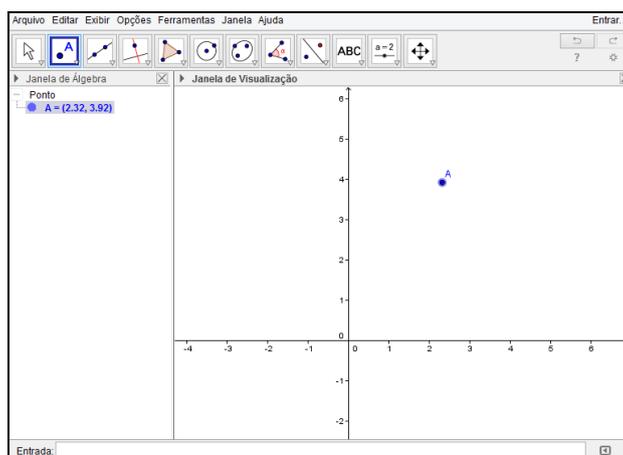
Criar um ponto

Clique na ferramenta ponto:



Posteriormente, clique na janela de visualização para posicionar o ponto.

Na figura abaixo se obteve o ponto A.



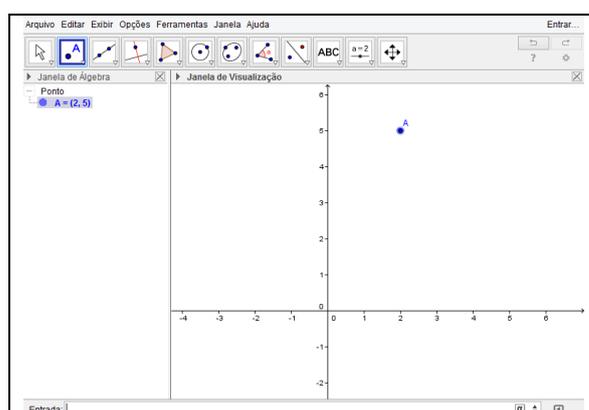
Criar um ponto com coordenadas já estabelecidas

Digite $A = (x, y)$ no campo de entrada, substituindo A pelo “nome” do ponto e x e y pelas coordenadas de tal e pressione a tecla Enter.

As figuras abaixo ilustram as etapas para obtenção do ponto A, de coordenadas $x = 2$ e $y = 5$:

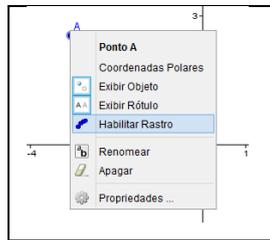
Entrada: $A=(2,5)$

O ponto A aparece na janela de visualização:

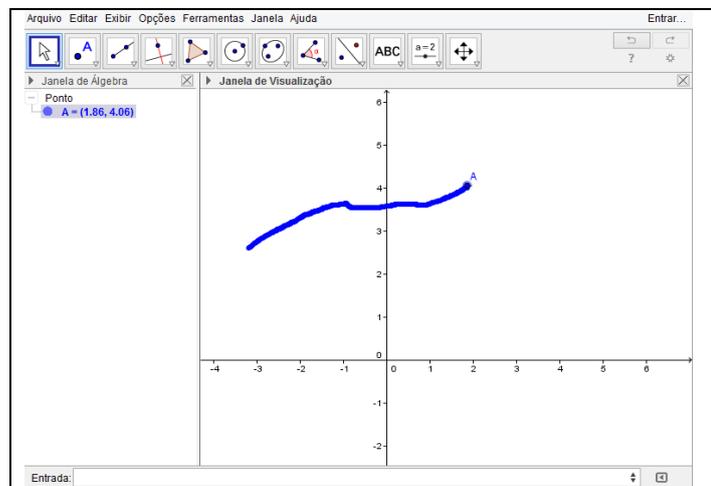


Habilitar o rastro em um ponto

Clique sobre o ponto com o botão direito e ative a opção habilitar rastro:



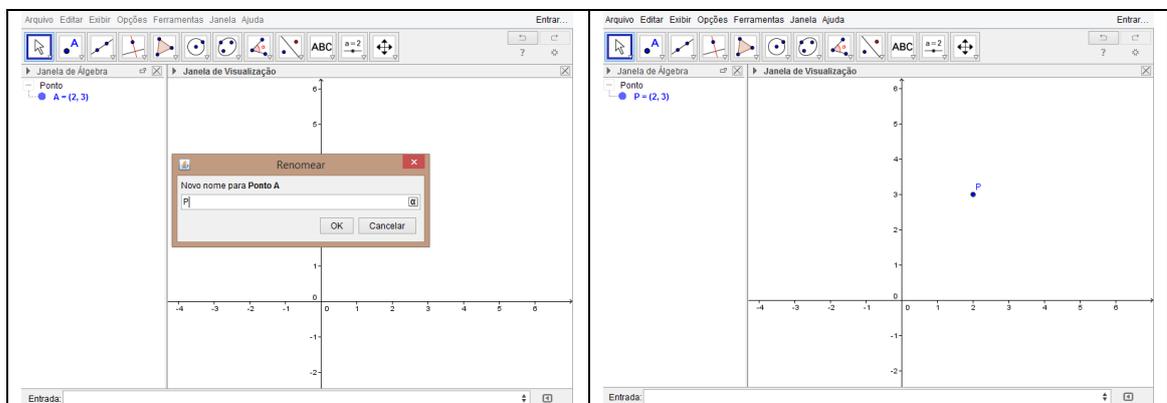
Na figura abaixo se observa o efeito na tela ao movimentar-se o ponto A após a ativação do rastro.



Renomear um ponto

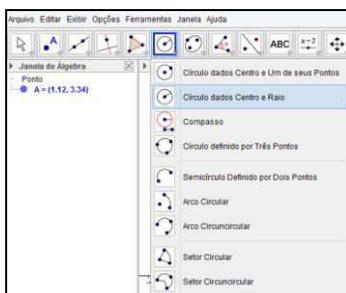
Clique com o botão direito no ponto e escolha a opção renomear.

Quando solicitado, digite o novo “nome” do ponto (vide figura da esquerda). Na figura da direita observa-se que o ponto A foi renomeado para P.

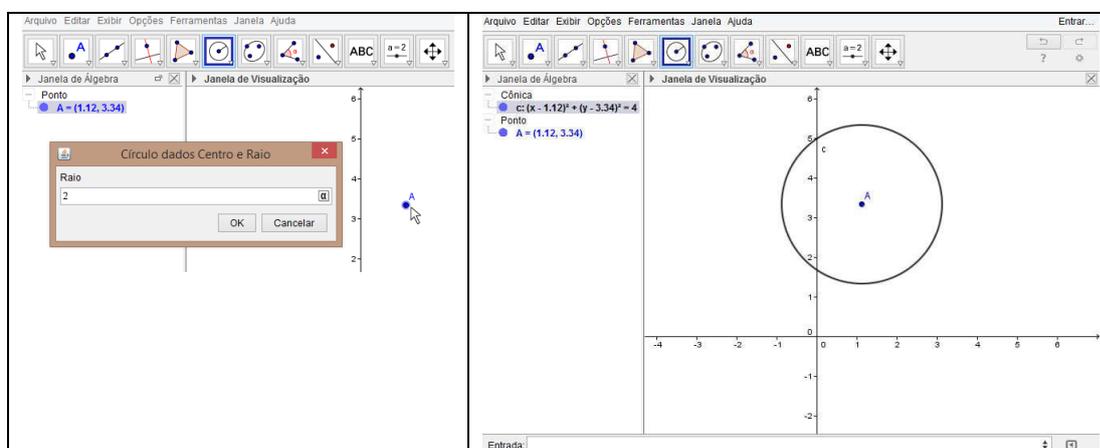


Criar uma circunferência dados o centro e o raio

Clique na ferramenta Círculo dados Centro e Raio:

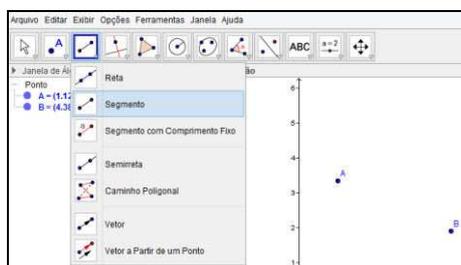


Clique no centro e informe o raio da circunferência (no caso da figura esquerda o raio é 2). Após informar o raio obtém-se na janela de visualização a circunferência desejada, conforme se observa na figura da direita.



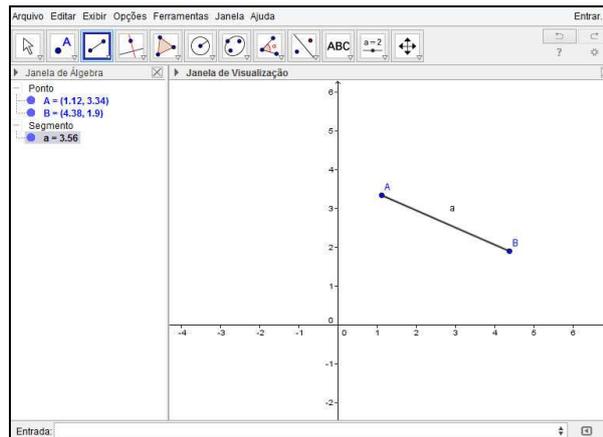
Criar um segmento de reta com extremidades em dois pontos já estabelecidos

Clique na ferramenta Segmento:



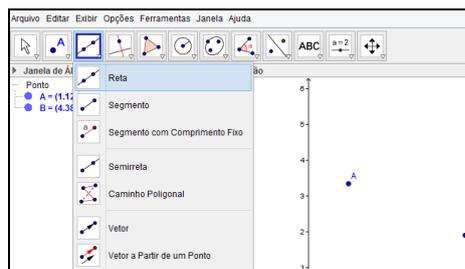
Em seguida nos pontos que correspondem as extremidades do segmento a ser construído.

Na figura abaixo se obteve o segmento AB.

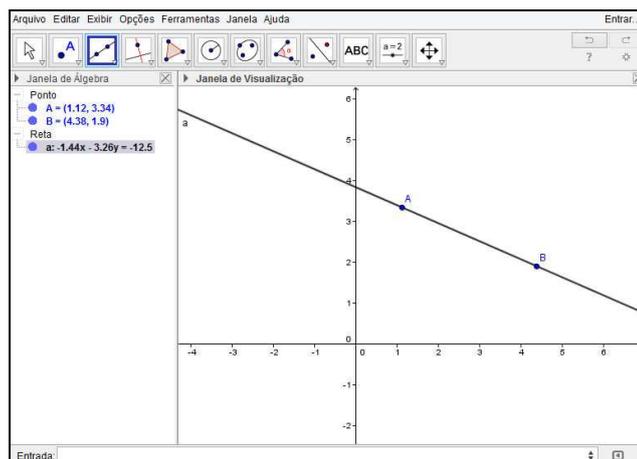


Criar uma reta que passa por dois pontos

Clique na ferramenta Reta:

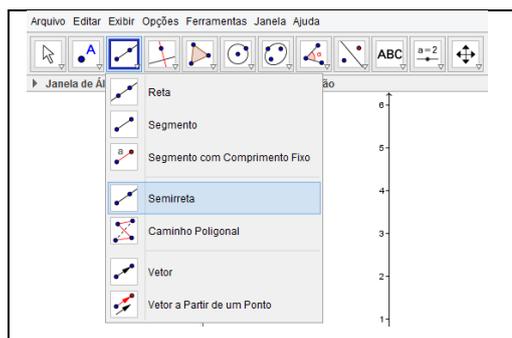


Em seguida nos dois pontos pertencentes a reta a ser construída.
Na figura abaixo se obteve a reta AB.



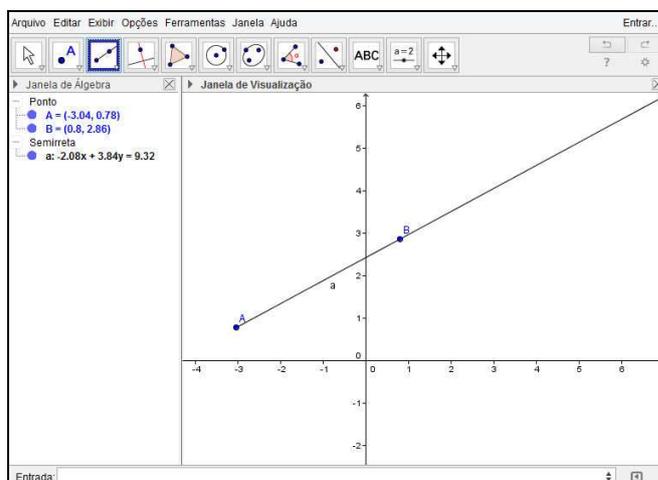
Criar uma semirreta conhecendo a origem e outro ponto a ela pertencente

Clique na ferramenta Semirreta:



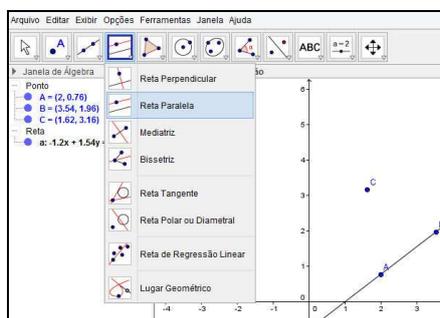
Em seguida, clique na origem e no outro ponto da semirreta.

Na figura abaixo se tem uma semirreta com origem em A e que passa por B.



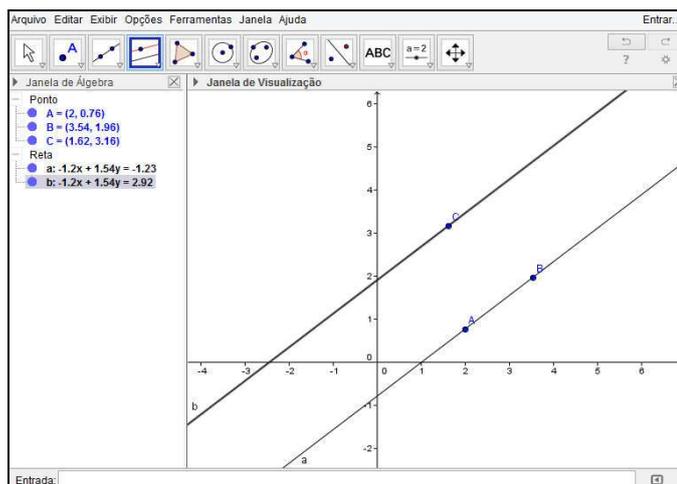
Criar uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto estabelecido

Clique na ferramenta Reta Paralela:



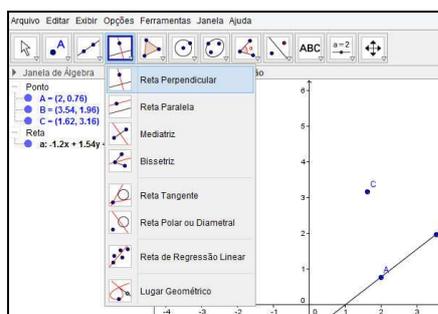
Posteriormente, clique no ponto pelo qual a reta paralela deve passar e em seguida na reta de referência.

No caso da figura que segue, clicando-se no ponto C e após na reta que passa por A e B, obtém-se uma reta paralela a tal reta passando pelo ponto C.



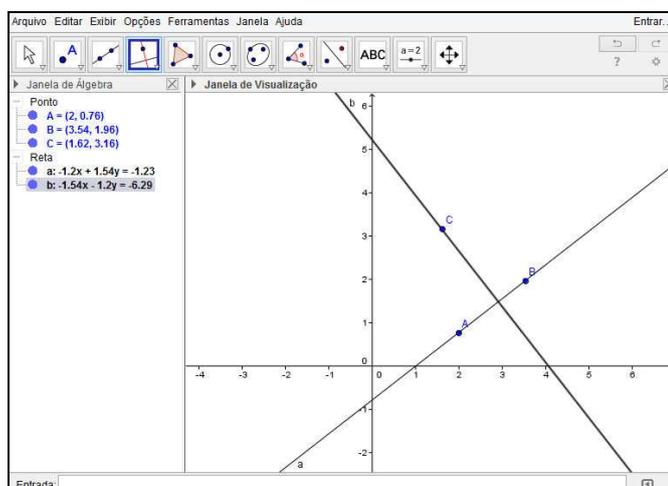
Criar uma reta perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto estabelecido

Clique na ferramenta Reta Perpendicular:



Posteriormente, clique no ponto pelo qual a reta perpendicular deve passar e em seguida na reta de referência.

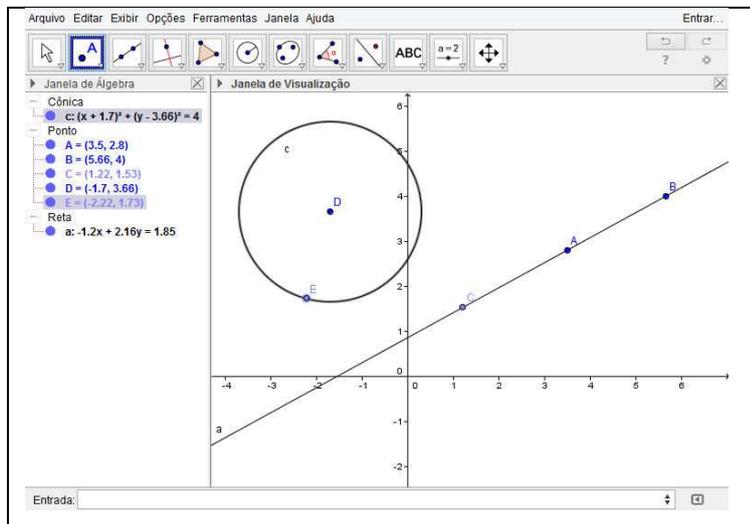
No caso da figura abaixo, clicando-se no ponto C e após na reta que passa por A e B, obtém-se uma reta perpendicular a tal reta passando pelo ponto C.



Criar um ponto sobre uma reta ou sobre uma circunferência

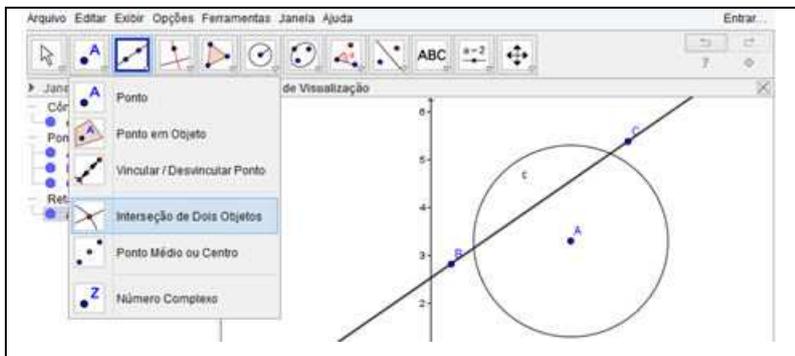
Clique na ferramenta Ponto e clique sobre a reta ou a circunferência em questão.

Na figura que segue os pontos C e E foram construídos sobre a reta AB e a circunferência de centro D, respectivamente. Em consequência disso, só é possível movimentar C ao longo da reta AB e E ao longo da circunferência de centro D.

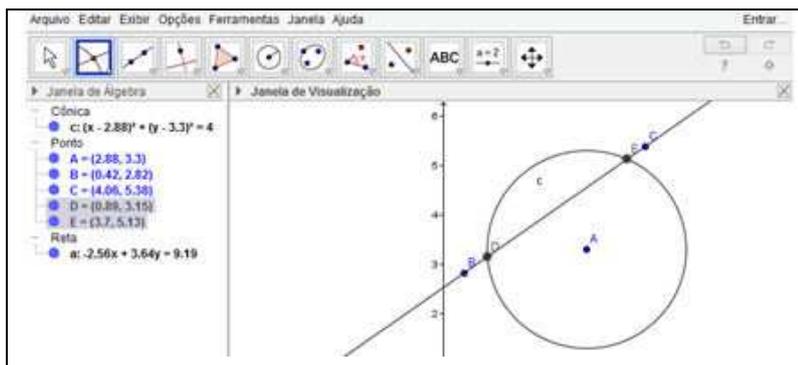


Obter o(s) ponto(s) de intersecção entre dois objetos geométricos

Clique na ferramenta Intersecção de Dois Objetos:



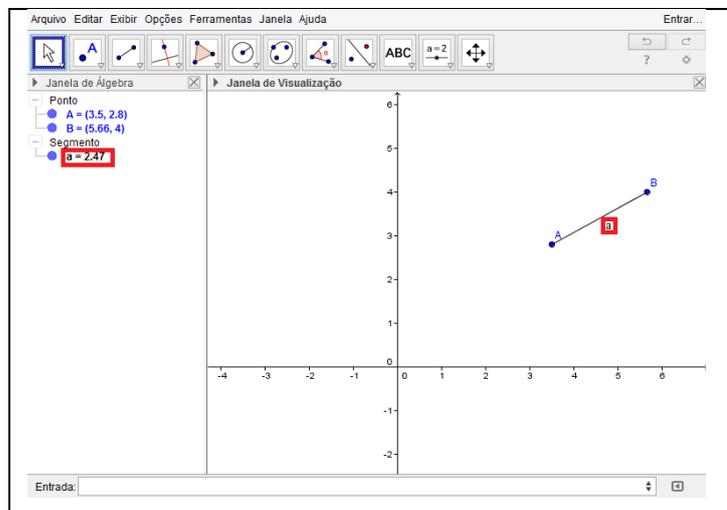
O resultado da aplicação da ferramenta no caso da figura acima são os pontos D e E:



Medir um segmento

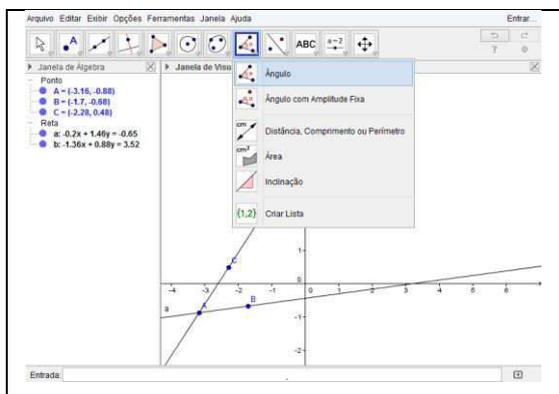
Basta verificar na janela de álgebra o comprimento do segmento.

Na figura abaixo se verifica que o comprimento do segmento AB é 2,47.



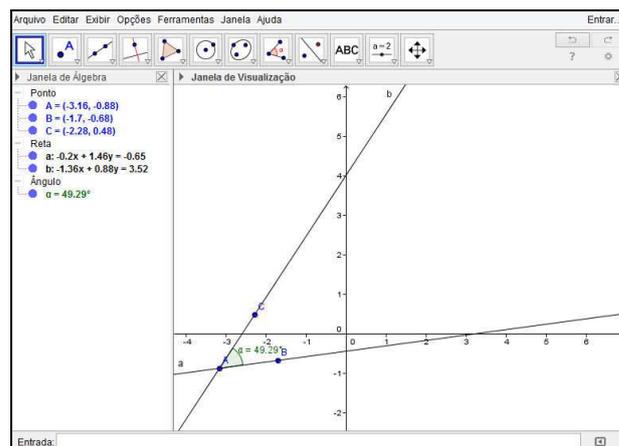
Medir um ângulo

Clique na ferramenta ângulo:



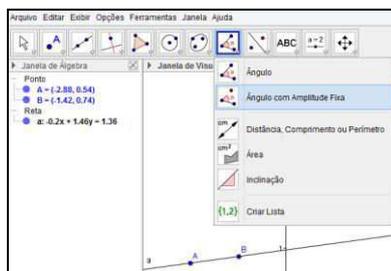
Posteriormente, clique em um ponto de um lado do ângulo, no vértice e em um ponto do outro lado do ângulo. O ângulo será medido no sentido anti-horário, do primeiro ponto informado até o último.

Na figura que segue, o ângulo α foi obtido clicando-se nos pontos B, A e C, nessa ordem. Caso o ângulo desejado for o de medida $2\pi - \alpha$, basta clicar em C, A e B, nessa sequência.



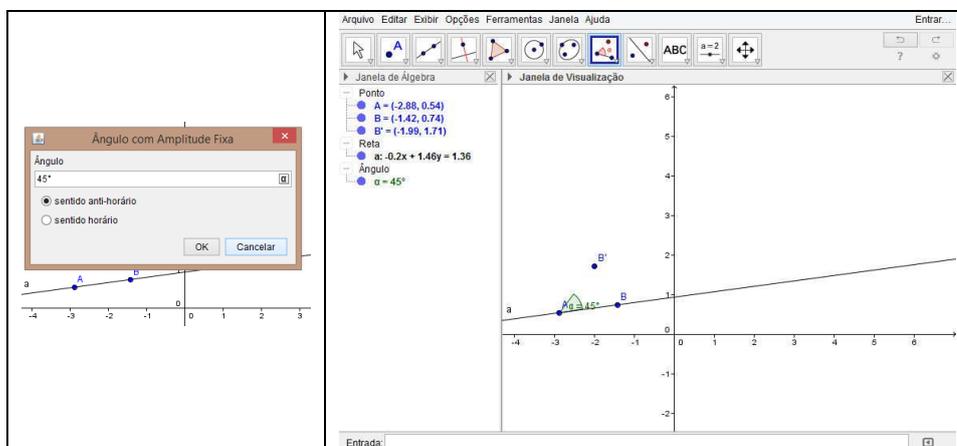
Criar um ângulo com amplitude fixa, dados um ponto de um lado e o vértice do ângulo

Clique na ferramenta ângulo com amplitude fixa:



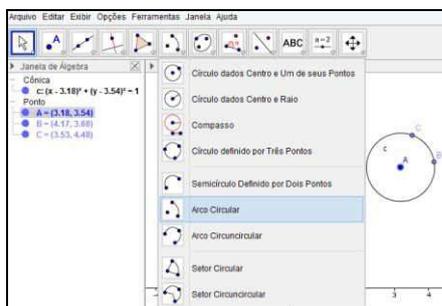
Clique primeiro no ponto que não é vértice e depois no vértice. Quando solicitado, informe ângulo e o sentido.

As figuras abaixo mostram os passos para a construção do ângulo $\hat{B}A\hat{B}'$. Ao clicar nos pontos B e A, nessa ordem, o programa solicitou que se informasse o ângulo (45°) e o sentido (anti-horário), conforme se observa na figura da esquerda. À direita observa-se o ângulo construído, que atende as solicitações.



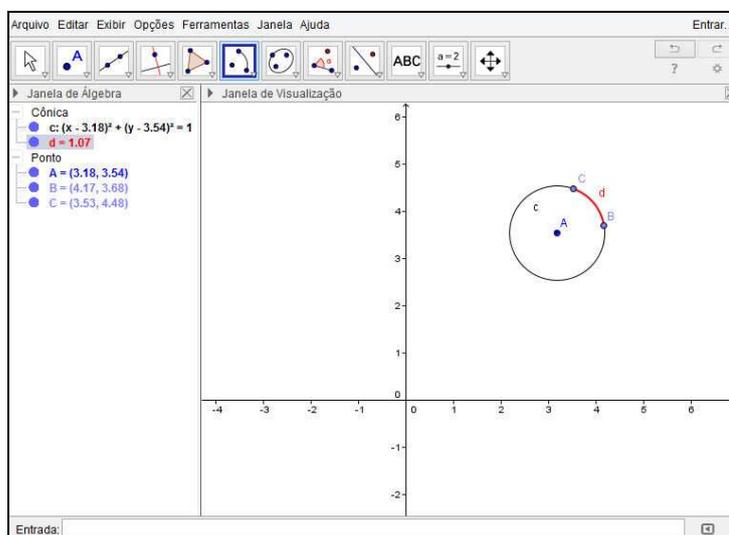
Criar um arco circular dados o centro da circunferência de origem e dois pontos do arco

Clique na ferramenta Arco Circular:



Em seguida clique no centro da circunferência original, no ponto inicial e no ponto final do arco (no sentido anti-horário).

Na figura abaixo se observa arco BC proveniente de uma circunferência de centro A.



Medir o comprimento de um arco de circunferência

Basta observar na janela de álgebra a variável atribuída pelo programa para o comprimento do arco de circunferência. Na figura do item anterior que mostra o arco BC, foi atribuída a variável “d” para o comprimento de tal arco. Na janela de álgebra observa-se que tal comprimento é 1,07.

Anexo 2 – Atividades envolvendo hipociclóides

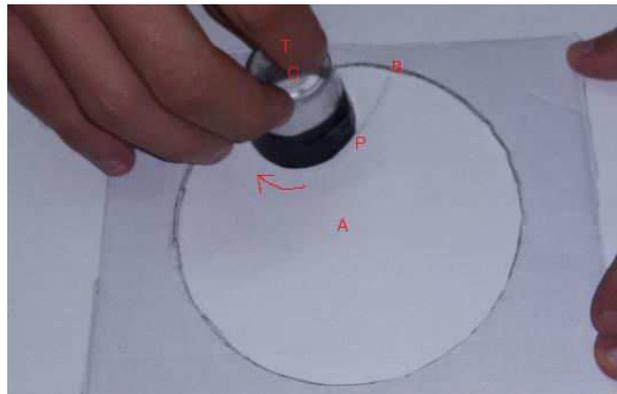
I) CONSTRUÇÃO COM MATERIAL CONCRETO

Material necessário:

- molde circular vasado;
- copinho de acrílico (raio menor que o do molde vasado) com grafite fixado na borda;
- folha de ofício.

Instruções:

Role (no sentido horário), sem deslizar, o copinho menor, no qual está preso um grafite, em torno do molde circular vasado, conforme a figura abaixo. Que curva você formou?



1) Visualmente, qual a relação entre o comprimento dos arcos BT (da circunferência diretriz) e PT (da circunferência geratriz)?

2) Caso a relação intuída visualmente em 1 seja verdadeira, qual a relação entre os ângulos $B\hat{A}T$ e $P\hat{C}T$?

II) CONSTRUÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

(Circunferência diretriz de raio a e circunferência geratriz de raio b)

- Crie um controle deslizante a com valor máximo 10;
- Crie um controle deslizante b com valor máximo 10 (Varie o controle deslizante até que o valor de b seja menor que o de a);
- Crie um ponto A ;
- Crie uma circunferência com centro em A e raio a ;
- Crie uma reta paralela ao eixo x que passe por A ;
- Obtenha os pontos de intersecção entre a reta paralela ao eixo x e a circunferência de raio a (B deve ser o ponto de intersecção à direita de A);
- Crie um ponto T sobre a circunferência;
- Crie um segmento AT ;
- Crie uma circunferência de centro T e raio b ;
- Obtenha o ponto de intersecção (ponto C) entre o segmento AT e a circunferência de raio b ;
- Crie uma circunferência de centro C e raio b ;
- Obtenha o ângulo $\alpha = \widehat{BAT}$;
- Obtenha o ponto P , criando um ângulo de amplitude fixa \widehat{TCP} , de medida $\alpha a/b$ no sentido horário;
- Habilite o rastro no ponto P .

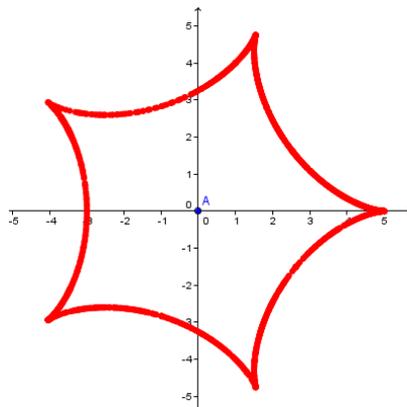
A hipociclóide é a curva obtida pelo traçado do ponto P ao movimentarmos o ponto T (isso faz com a que a circunferência geratriz (a que tangencia internamente a circunferência de raio a) role, sem deslizar, pela circunferência diretriz (raio a)).

III) EXERCÍCIOS QUE UTILIZAM A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PRONTA

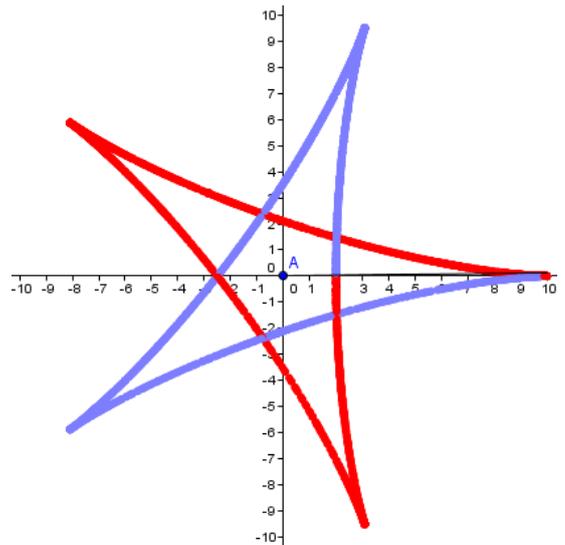
- 1) Utilize a ferramenta Arco Circular e verifique o comprimento dos arcos PT e BT , das circunferências geratriz e diretriz, respectivamente, no início da trajetória de P .
- 2) Qual a relação entre os comprimentos dos arcos obtidos na questão 1, no início da trajetória de P ? O que acontece quando P tangencia a circunferência diretriz pela primeira vez após o início do movimento?
- 3) Escreva o ângulo $P\hat{C}T$ em função do ângulo $B\hat{A}T$, considerando a observação feita nas questões anteriores.
- 4) Modifique os valores de a e b nos comandos deslizantes da construção no Geogebra e verifique qual a hipociclóide formada em cada um dos itens a seguir.
 - a) $a = 6, b = 2$
 - b) $a = 2, b = 1$
 - c) $a = 4, b = 1$
 - d) $a = 3, b = 1$
 - e) $a = 5, b = 2$
 - f) $a = 7, b = 3$
 - g) $a = 4, b = 3$
 - h) $a = \pi, b = 2,5$
- 5) Simplifique a razão b/a , até chegar a forma irredutível, em todos os casos do exercício 4.
 - a)
 - b)
 - c)
 - d)
 - e)
 - f)
 - g)
 - h)
- 6) Observando os resultados obtidos nos exercícios 4 e 5, complete as lacunas com as palavras aberta ou fechada:
 - a) Nos casos em que a razão a/b na forma irredutível equivale a $1/n$, com n natural, temos uma curva _____ com n cúspides. O desenho da curva fica definido em uma volta.
 - b) Nos casos em que a razão a/b na forma irredutível equivale a m/n , com m e n naturais, temos uma curva _____ em uma volta.
 - c) Nos casos em que a razão a/b é um número irracional, temos uma curva _____ em uma volta.

- 7) Na construção, obtenha os ângulos de amplitude fixa $T\hat{C}T'$, $T\hat{C}T'_1$, $T\hat{C}T'_2$ e $T\hat{C}T'_3$, no sentido horário, de medidas $\frac{2\pi a+at}{b}$, $\frac{4\pi a+at}{b}$, $\frac{6\pi a+at}{b}$ e $\frac{8\pi a+at}{b}$. Habilite o rastro com cores diferentes nos pontos T' , T'_1 , T'_2 e T'_3 .
- Refaça o exercício 4 para os itens em que a curva é aberta após a primeira volta ao longo da diretriz.
 - Qual o significado do traçado obtido pelo movimento descrito por cada um dos pontos?
 - Será que no item h a curva vai ser fechar obtendo-se mais ângulos de amplitude fixa conforme o padrão descrito acima? Por quê?
- 8) Decida quais valores de “a” e “b” geram as seguintes hipociclóides abaixo. Comprove a veracidade da sua resposta plotando esses valores no Geogebra.

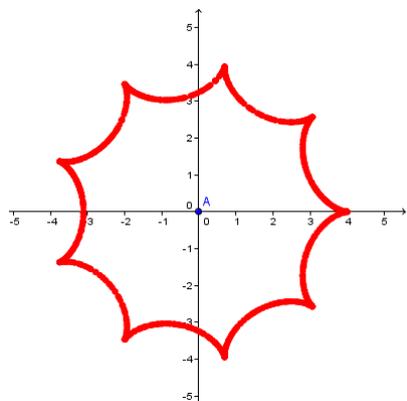
a)



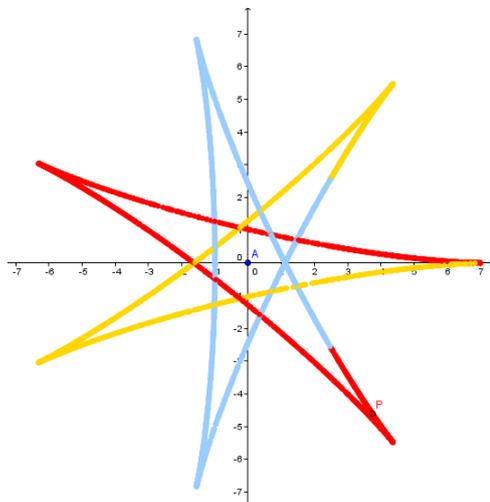
b)



c)

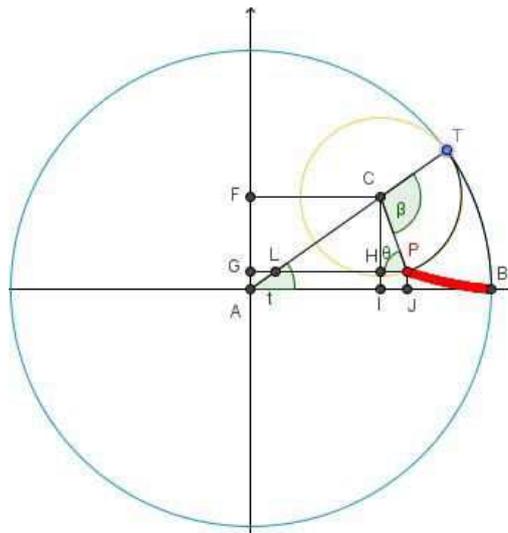


d)



IV) OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

1) Utilize a construção geométrica com a qual é possível obter a curva reproduzindo o movimento descrito na definição. Obtenha os segmentos CF e PG, paralelos ao eixo x, IC e JP, paralelos ao eixo y, AT e PC. Os pontos de intersecção L (entre AT e PG) e H (entre IC e PG) também devem ser obtidos. A figura abaixo mostra a configuração que deve ser obtida no início da trajetória do ponto P.



2) Qual a relação entre o segmento GP e a abscissa do ponto P? Escreva essa coordenada em função do comprimento dos segmentos AI e HP.

3) Qual a relação entre o segmento JP e a ordenada do ponto P? Escreva essa coordenada em função do comprimento dos segmentos IC e HC.

4) Sabendo que o raio da circunferência diretriz é a e da circunferência geratriz é b, quais as medidas dos segmentos AC e PC?

5) No triângulo retângulo AIC calcule a medida dos segmentos AI e IC utilizando razões trigonométricas;

6) No triângulo retângulo PHC calcule a medida dos segmentos HP e HC utilizando razões trigonométricas.

7) Qual a medida dos segmentos GP e JP em função dos ângulos t e Θ ?

8) Suponha que A é a origem do plano cartesiano. Utilize a relação entre t e β para escrever a medida dos segmentos GP e JP em função de t . Dica: Utilize o triângulo PLC.

9) Sabendo que as expressões que representam os comprimentos dos segmentos GP e JP, em função do parâmetro t , no início do movimento correspondem à abscissa e à ordenada de P, respectivamente, em qualquer quadrante, escreva as equações paramétricas da hipociclóide centrada na origem, em que a diretriz tem raio a e a geratriz tem raio b .

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

10) No software Geogebra, crie um comando deslizante t de valor máximo 20 (parâmetro t) e um ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir das equações paramétricas da hipociclóide de circunferências diretriz e geratriz de raios 3 e 1, respectivamente. Habite o rastro no ponto P e varie o parâmetro t . Que curva você formou?

11) Compare a curva obtida no exercício 10 com a curva obtida na construção geométrica que gera a hipociclóide para $a = 3$ e $b = 1$.

12) Qual a sua opinião sobre as duas maneiras distintas de construir uma hipociclóide? Qual a maneira em que você acha mais simples a obtenção da curva?

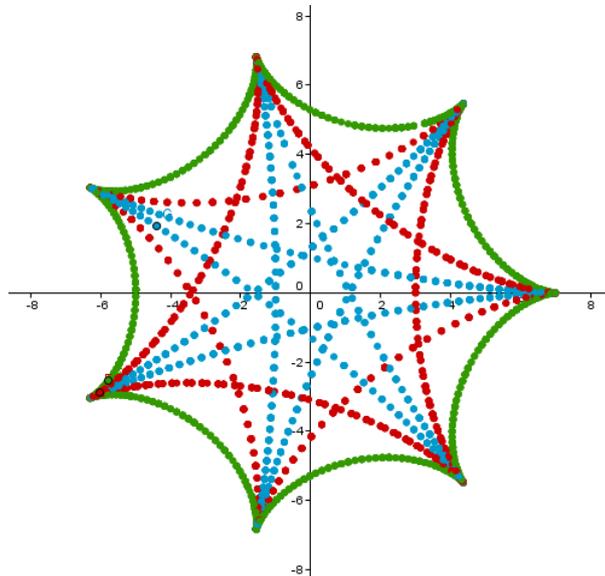
V) UTILIZAÇÃO DE EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS PARA A OBTENÇÃO DE CURVAS

1) Encontre as coordenadas do ponto P de uma hipociclóide cujos raios das circunferências diretriz e geratriz são, 3 e 1, respectivamente, para os seguintes valores de t:

- a) $t = 0,5$
- b) $t = 1,1$
- c) $t = 1,8$
- d) $t = 2,7$

2) Utilize o software Geogebra e crie um comando deslizante (parâmetro t) e o ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir da hipociclóide descrita no exercício 1. Verifique com o auxílio do programa que os pontos calculados realmente pertencem à curva em questão.

3) Reproduza a seguinte configuração no Geogebra, indicando quais as equações paramétricas utilizadas.



Anexo 3 – Atividades envolvendo epiciclóides

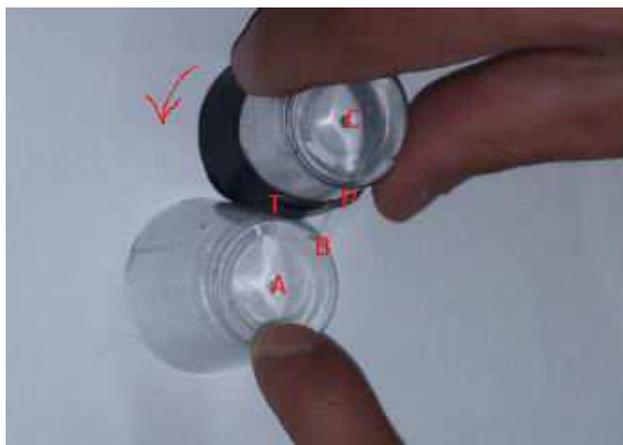
I) CONSTRUÇÃO COM MATERIAL CONCRETO

Material necessário:

- copinho de acrílico;
- copinho de acrílico com grafite fixado na borda;
- folha de ofício.

Instruções:

Role (no sentido horário), sem deslizar, o copinho menor, no qual está preso um grafite, em torno do copinho que deve ficar fixo na folha (diretriz), conforme ilustra a figura abaixo.



1) Visualmente, qual a relação entre o comprimento dos arcos BT (da circunferência diretriz) e TP (da circunferência geratriz)?

2) Caso a relação intuída em 1 seja verdadeira, qual a relação entre os ângulos \widehat{BAT} e \widehat{TCP} ?

II) CONSTRUÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

(Circunferência diretriz de raio a e circunferência geratriz de raio b)

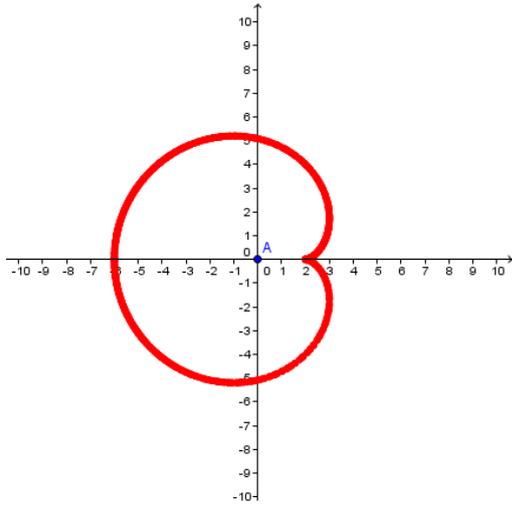
- Crie um controle deslizante a com valor máximo 10;
- Crie um controle deslizante b com valor máximo 10;
- Crie um ponto A ;
- Crie uma circunferência com centro em A e raio a ;
- Crie uma reta paralela ao eixo x que passe por A ;
- Obtenha os pontos de intersecção entre a reta paralela ao eixo x e a circunferência de raio a (B deve ser o ponto de intersecção à direita de A);
- Crie um ponto T sobre a circunferência;
- Crie uma reta AT ;
- Crie uma circunferência de centro T e raio b ;
- Obtenha os pontos de intersecção entre a reta AT e a circunferência de raio b (C deve ser o ponto de intersecção externo à circunferência de raio a);
- Crie uma circunferência de centro C e raio b ;
- Obtenha o ângulo $\alpha = \widehat{BAT}$;
- Obtenha o ponto P , criando um ângulo de amplitude fixa \widehat{TCP} , de medida $\alpha a/b$ no sentido anti-horário;
- Habilite o rastro no ponto P .

A epiciclóide é a curva obtida pelo traçado do ponto P ao movimentarmos o ponto T (isso faz com a que a circunferência geratriz (a que tangencia externamente a circunferência de raio a) role, sem deslizar, pela circunferência diretriz (raio a)).

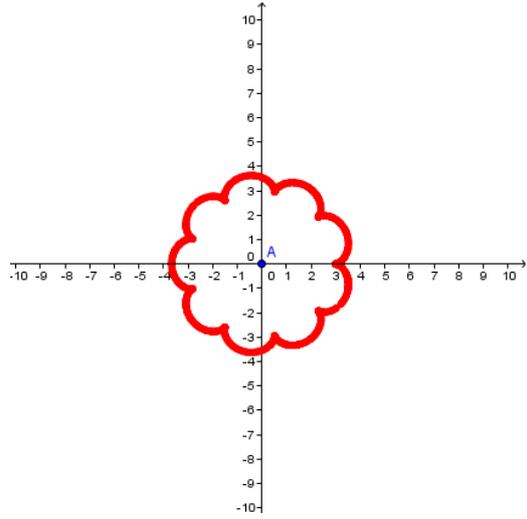
III) EXERCÍCIOS QUE UTILIZAM A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PRONTA

- 1) Utilize a ferramenta Arco Circular e verifique o comprimento dos arcos TP e BT, das circunferências geratriz e diretriz, respectivamente, no início da trajetória de P.
- 2) Qual a relação entre os comprimentos dos arcos obtidos na questão 1, no início da trajetória de P ? O que acontece quando P tangencia a circunferência diretriz pela primeira vez após o início do movimento?
- 3) Escreva o ângulo $T\hat{C}P$ em função do ângulo $B\hat{A}T$, considerando a observação feita nas questões anteriores.
- 4) Modifique os valores de a e b nos comandos deslizantes da construção no Geogebra e verifique qual a hipociclóide formada em cada um dos itens a seguir.
 - a) $a = 1, b = 1/4$
 - b) $a = 1, b = 1$
 - c) $a = 2, b = 3$
 - d) $a = 4, b = 1$
 - e) $a = 5, b = 2$
 - f) $a = 4, b = 3$
 - g) $a = 7, b = 5$
 - h) $a = \pi, b = 2,5$
- 5) Simplifique a razão b/a , até chegar a forma irredutível, em todos os casos do exercício 4.
 - a)
 - b)
 - c)
 - d)
 - e)
 - f)
 - g)
 - h)
- 6) Qual a relação entre a forma irredutível de b/a , o número de cúspides e o número de voltas completas da epicyclóide?
- 7) Na construção, obtenha os ângulos de amplitude fixa $T\hat{C}T', T\hat{C}T'_1, T\hat{C}T'_2$ e $T\hat{C}T'_3$, no sentido anti-horário, de medidas $\frac{2\pi a+at}{b}, \frac{4\pi a+at}{b}, \frac{6\pi a+at}{b}$ e $\frac{8\pi a+at}{b}$. Habilite o rastro com cores diferentes nos pontos T', T'_1, T'_2 e T'_3 . Refaça os itens do exercício 4 em que a curva é aberta após a primeira volta ao longo da diretriz. A relação descrita no exercício 6 se verifica?

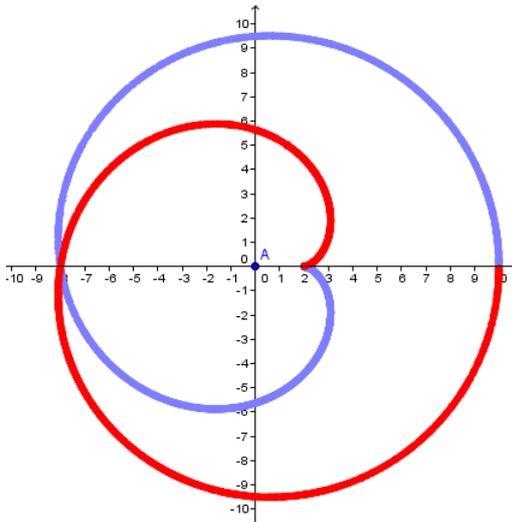
a)



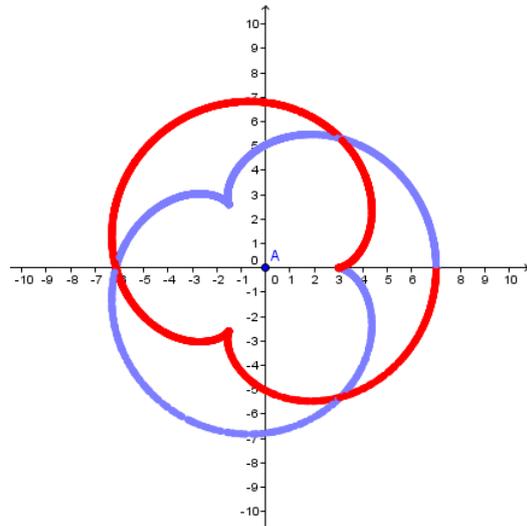
b)



c)

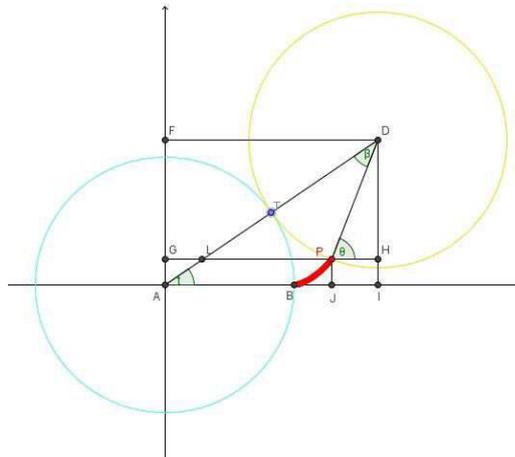


d)



IV) OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

1) Utilize a construção geométrica com a qual é possível obter a curva reproduzindo o movimento descrito na definição. Obtenha os segmentos DF e HG, paralelos ao eixo x, ID e JP, paralelos ao eixo y, AD e PD. Os pontos de intersecção L (entre AT e PG) e H (entre HG e ID) também devem ser obtidos. A figura abaixo mostra a configuração que deve ser obtida no início da trajetória do ponto P.



- 2) Qual a relação entre o segmento GP e a abscissa do ponto P? Escreva essa coordenada em função do comprimento dos segmentos AI e HP.
- 3) Qual a relação entre o segmento JP e a ordenada do ponto P? Escreva essa coordenada em função do comprimento dos segmentos ID e HD.
- 4) Sabendo que o raio da circunferência diretriz é a e da circunferência geratriz é b , quais as medidas dos segmentos AD e PD?
- 5) No triângulo retângulo AID calcule a medida dos segmentos AI e ID utilizando razões trigonométricas.
- 6) No triângulo retângulo PHD calcule a medida dos segmentos HP e HD utilizando razões trigonométricas.

7) Qual a medida dos segmentos GP e JP em função dos ângulos t e Θ ?

8) Suponha que A é a origem do plano cartesiano. Utilize a relação entre t e β para escrever a medida dos segmentos GP e JP em função de t . Dica: Utilize o triângulo PLD.

9) Sabendo que as expressões que representam os comprimentos dos segmentos GP e JP, em função do parâmetro t , no início do movimento correspondem à abscissa e à ordenada de P, respectivamente, em qualquer quadrante, escreva as equações paramétricas da epiciclóide centrada na origem, em que a diretriz tem raio a e a geratriz tem raio b .

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

10) No software Geogebra, crie um comando deslizante t de valor máximo 20 (parâmetro t) e um ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir das equações paramétricas da epiciclóide de circunferências diretriz e geratriz de raios 1. Habite o rastro no ponto P e varie o parâmetro t . Que curva você formou?

11) Compare a curva obtida no exercício 10 com a curva obtida na construção geométrica que gera a epiciclóide para $a = 1$ e $b = 1$.

12) Qual a sua opinião sobre as duas maneiras distintas de construir uma epiciclóide? Qual a maneira em que você acha mais simples a obtenção da curva?

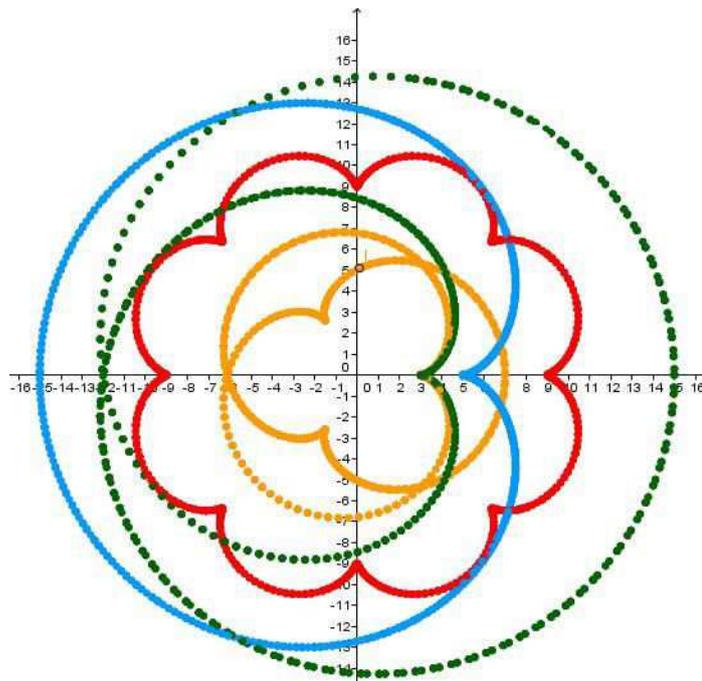
V) UTILIZAÇÃO DE EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS PARA A OBTENÇÃO DE CURVAS

1) Encontre as coordenadas do ponto P de uma epicyclóide cujos raios das circunferências diretriz e geratriz são 1, para os seguintes valores de t:

- a) $t = 0,5$
- b) $t = 1,1$
- c) $t = 1,8$
- d) $t = 2,7$

2) Utilize o software Geogebra e crie um comando deslizante (parâmetro t) e o ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir da epicyclóide descrita no exercício 1. Verifique com o auxílio do programa que os pontos calculados realmente pertencem à curva em questão.

3) Reproduza a seguinte configuração no Geogebra, indicando quais as equações paramétricas utilizadas.



Anexo 4 – Atividades envolvendo cicloides

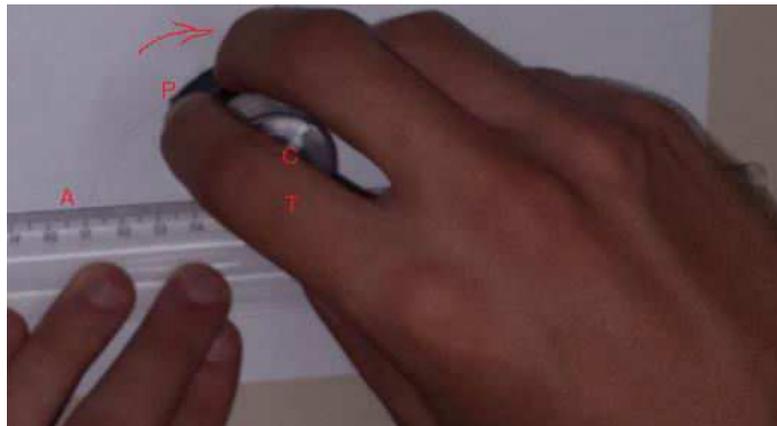
I) CONSTRUÇÃO COM MATERIAL CONCRETO

Material necessário:

- régua;
- copinho de acrílico com grafite fixado na borda;
- folha de ofício.

Instruções:

Role (no sentido horário), sem deslizar, o copinho ao longo da reta (régua), conforme ilustra a figura abaixo.



2) Visualmente, qual a relação entre o comprimento do arco TP (da circunferência geratriz) e do segmento AT (da reta diretriz)?

3) Supondo que a relação intuída visualmente na questão anterior seja verdadeira, escreva o ângulo $T\hat{C}P$ em função da medida do segmento AT.

4) Novamente supondo que a relação descrita no exercício 2 é verdadeira, qual a relação entre o comprimento da circunferência geratriz e a distância entre os dois primeiros pontos de tangencia da curva cicloide sobre a reta diretriz?

II) CONSTRUÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

(Reta diretriz AB e circunferência geratriz de raio r)

- Crie um controle deslizante r de valor máximo 10;
- Crie dois pontos A e B;
- Crie uma semirreta AB (com origem em A);
- Crie um ponto T na semirreta AB;
- Crie uma circunferência de raio r com centro em T;
- Crie uma reta perpendicular a AB passando por T;
- Obtenha os pontos de intersecção da reta perpendicular a AB com a circunferência de centro T (o ponto de intersecção acima da semirreta AB deve ser C);
- Crie uma circunferência de raio r com centro em C;
- Obtenha o segmento AT;
- Obtenha o ponto P, criando um ângulo de amplitude fixa $T\hat{C}P$, de medida e/r (a variável e corresponde ao nome atribuído pelo programa para o comprimento do segmento AT) no sentido horário;
- Habilite o rastro no ponto P.

A cicloide é a curva obtida pelo traçado do ponto P ao movimentarmos o ponto T (isso faz com a que a circunferência geratriz (circunferência de raio r e centro C) role, sem deslizar, pela diretriz (AB)).

III) EXERCÍCIOS QUE UTILIZAM A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PRONTA

1) Utilize a ferramenta Arco Circular meça o comprimento do arco TP no início da trajetória de P e compare-o com o do segmento AT.

2) Explique o que acontece com a relação constatada no exercício anterior a partir do momento que ponto P tangencia a reta diretriz pela primeira vez após o início de sua trajetória.

4) Modifique o valor de r nos itens a seguir e verifique qual a cicloide formada.

a) $r = 1$

b) $r = 2,5$

c) $r = 4$

d) $r = \pi$

5) Considerando $A = (0,0)$ e $B = (1,0)$, qual o menor intervalo para que a curva volte a tangenciar o eixo x em cada um dos itens do exercício anterior?

a)

b)

c)

d)

6) Calcule o valor adequado de raio para que, no intervalo $[0,20\pi]$, se tenha tantos pontos de tangencia com o eixo x quanto indicado em cada item, de modo que os extremos do intervalo sejam pontos de tangencia. Verifique a coerência de suas respostas no Geogebra.

a) 3

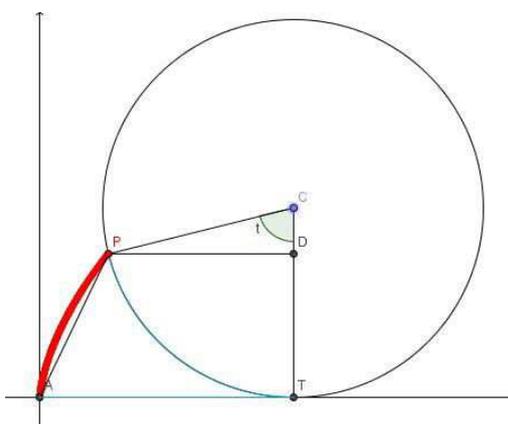
b) 6

c) 11

7) Utilizando a construção feita para gerar as cicloides no Geogebra, construa uma cicloide cuja circunferência geratriz tem raio 2. Trace a reta CP e marque sobre essa reta dois pontos exteriores, dois pontos interiores e os dois pontos pertencentes à circunferência geratriz. Habilite o rastro e escolha cores distintas para cada um desses pontos. Movimente o ponto C para gerar o conjunto de curvas e identifique as cicloides, cicloides alongadas e cicloides encurtadas.

IV) OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

1) Utilize a construção geométrica com a qual é possível obter a curva reproduzindo o movimento descrito na definição. Obtenha os segmentos AT e PD, paralelos ao eixo x, CT, paralelo ao eixo y e PD. O ponto de intersecção D (entre PD e CT) também deve ser obtido. A figura abaixo mostra a configuração que deve ser obtida no início da trajetória do ponto P.



- 2) Escreva as coordenadas x e y de P como subtrações de segmentos.
- 2) Utilize a relação entre o segmento AT e o arco TP e escreva AT em função de t.
- 3) Utilize relações trigonométricas no triângulo retângulo DPC para obter as medidas dos segmentos DC e PD em função de t.
- 4) Escreva as expressões que determinam x e y no ponto P da figura, em função de t.
- 5) Sabendo que dependo da posição de P as expressões que determinam suas coordenadas em termos de adição de segmentos mudam, mas que sempre chega-se as mesmas expressões em função de t, escreva as equações paramétricas da cicloide de reta diretriz $y = 0$, ponto inicial $(0,0)$ e circunferência geratriz de raio a.

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

6) No software Geogebra, crie um comando deslizante t de valor máximo 20 e mínimo 0 (parâmetro t) e um ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir das equações paramétricas

da cicloide cuja origem é o ponto $(0,0)$ e que o eixo x como diretriz e uma circunferência de raio 2 como geratriz. Habite o rastro no ponto P e varie o parâmetro t a fim de observar a curva formada.

6) Compare a curva obtida no exercício 6 com a curva obtida na construção geométrica que gera a evolvente da circunferência para $r = 2$, $A = (0,0)$ e $B = (k,0)$, com $k > 0$.

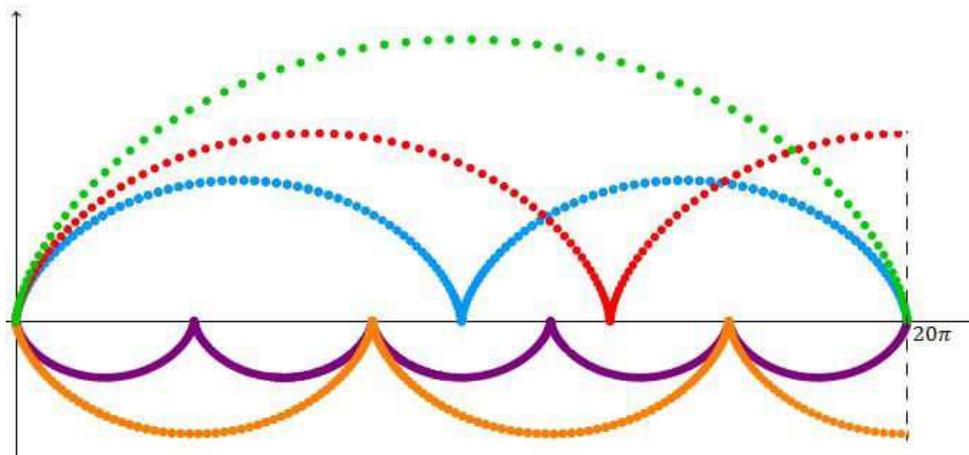
V) UTILIZAÇÃO DE EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS PARA A OBTENÇÃO DE CURVAS

1) Encontre as coordenadas do ponto P de uma cicloide cujos raios das circunferências diretriz e geratriz são 1, para os seguintes valores de t:

- a) $t = \pi/2$
- b) $t = \pi$
- c) $t = 5\pi/4$
- d) $t = 9$

2) Utilize o software Geogebra e crie um comando deslizante (parâmetro t) e o ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir da cicloide descrita no exercício 1. Verifique com o auxílio do programa que os pontos calculados realmente pertencem à curva em questão.

3) Reproduza a seguinte configuração no Geogebra, indicando quais as equações paramétricas utilizadas.



Anexo 5 – Atividades envolvendo evolventes de circunferência

I) CONSTRUÇÃO COM MATERIAL CONCRETO

Material necessário:

- molde em formato de circunferência;
- barbante (com comprimento equivalente ao comprimento da circunferência, enrolado nesta);
- lapis (preso à ponta do barbante);
- folha de ofício.

Instruções:

Desenrole o barbante que envolve a circunferência mantendo-o sempre esticado e observando o traçado obtido pela ponta do barbante em que o lápis se encontra, conforme ilustra a figura abaixo.



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=rh2EIU8Vhpg>

- 1) Qual a relação entre a reta que contém a ponta do lápis e o ponto de tangência com a circunferência?
- 2) Qual a relação entre o segmento cujos extremos são a ponta do lápis e o ponto de tangência com a circunferência e o arco da circunferência limitado pelo ponto de tangência inicial e o atual (no sentido anti-horário)?

II) CONSTRUÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

(Circunferência diretriz de raio r)

- Crie um controle deslizante r de valor máximo 10;
- Crie um ponto C ;
- Crie uma circunferência de centro C e raio r ;
- Crie uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto C ;
- Obtenha os pontos de intersecção da reta paralela ao eixo x com a circunferência (A deve ser o ponto de intersecção à direita de C);
- Crie um ponto T sobre a circunferência;
- Crie a semirreta CT ;
- Crie uma reta perpendicular a CT passando por T ;
- Crie o arco AT da circunferência de centro C ;
- Crie uma circunferência de raio d (a variável e corresponde ao nome atribuído pelo programa para o comprimento do arco AT) com centro em T ;
- Obtenha o ponto de intersecção da circunferência de raio e com a reta perpendicular a CT (o ponto de intersecção mais próximo de A no início do movimento deve ser P);
- Habilite o rastro no ponto P .

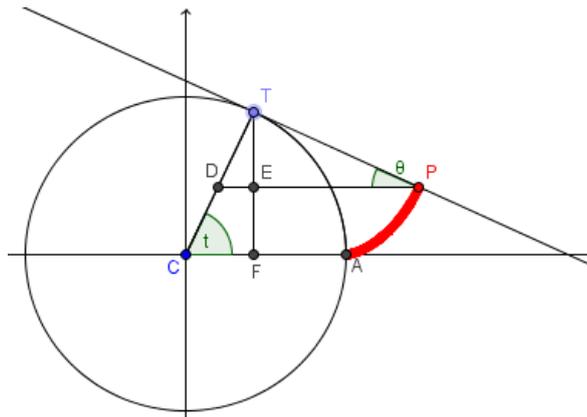
A evolvente é a curva obtida pelo traçado do ponto P ao movimentarmos o ponto T (isso faz com que a circunferência geratriz (reta tangente a circunferência) role, sem deslizar, pela diretriz (circunferência de raio r)).

III) EXERCÍCIOS QUE UTILIZAM A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PRONTA

- 1) Qual a relação entre os comprimentos do arco AT e do segmento TP? Utilize as ferramentas do software Geogebra para confirmar sua resposta.
- 2) Qual o ângulo entre a reta geratriz da evolvente e o raio CT? Verifique utilizando a ferramenta ângulo do software.
- 3) O que acontece se a reta geratriz percorrer a circunferência diretriz por infinitas voltas?
- 4) Obtenha duas variáveis “m” e “n” de modo que $m = 2\pi r + e$ e $n = 4\pi r + e$, sendo “r” o raio da circunferência diretriz e “e” o comprimento do arco AT. Crie duas circunferências com centro em T: uma de raio m e outra de raio n. Obtenha os pontos de intersecção de cada uma dessas circunferências com a semirreta CT e habilite o rastro desses pontos. Qual a curva formada ao movimentar o ponto T ao longo da diretriz?
- 5) Qual o raio da circunferência diretriz para que a distância entre o ponto de tangência T com a reta geratriz e o ponto P da evolvente seja 12π ...
 - a) ... após uma volta completa na circunferência diretriz?
 - b) ... após duas voltas completas na circunferência diretriz?
 - c) ... após três voltas completas na circunferência diretriz?
- 5) Comprove a veracidade das respostas obtidas no exercício anterior utilizando o Geogebra.

IV) OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

1) Utilize a construção geométrica com a qual é possível obter a curva reproduzindo o movimento descrito na definição. Obtenha o segmento PD, paralelo ao eixo x, FT, paralelo ao eixo y e CT. Os pontos de intersecção D (entre PD e CT) e E (entre PD e FT) também devem ser obtidos. A figura ? mostra a configuração que deve ser obtida no início da trajetória do ponto P.



- 2) Escreva a abscissa de P em função dos comprimentos dos segmentos CF e EP.
- 3) Escreva a ordenada de P em função dos comprimentos dos segmentos FT e ET.
- 4) Qual o comprimento do arco AT em função do raio r da circunferência diretriz?
- 5) Sabendo que os comprimentos do arco AT e do segmento TP são equivalentes, escreva os comprimentos dos segmentos EP e ET em função dos ângulos t e Θ .
- 6) Escreva os comprimentos de CF e FT em função do ângulo t.
- 7) Observando a posição relativa entre a reta TP e o raio CT e o triângulo DTP, escreva Θ em função de t.
- 8) Qual a relação entre os valores de seno e cosseno do ângulo Θ e os valores de seno e cosseno do ângulo t?

9) Sabendo que dependo da posição de P as expressões que determinam suas coordenadas em termos de adição ou subtração de segmentos mudam, mas que sempre chega-se as mesmas expressões em função de t, escreva as equações paramétricas da evolvente da circunferência de raio r centrada na origem e cujo ponto inicial da curva é (0, r).

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

10) No software Geogebra, crie um comando deslizante t de valor máximo 20 e mínimo 0 (parâmetro t) e um ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir das equações paramétricas da evolvente da circunferência centrada na origem de raio 2 , sendo (0, 2) o ponto inicial da curva. Habite o rastro no ponto P e varie o parâmetro t a fim de observar a curva formada.

11) Compare a curva obtida no exercício 10 com a curva obtida na construção geométrica que gera a evolvente para $r = 2$ e $C = (0,0)$.

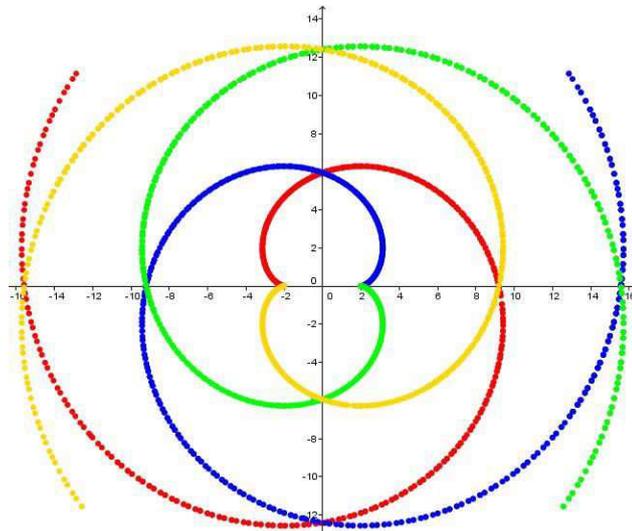
V) UTILIZAÇÃO DE EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS PARA A OBTENÇÃO DE CURVAS

1) Encontre as coordenadas do ponto P da evolvente da circunferência de raio 2, para os seguintes valores de t:

- a) $t = \pi/2$
- b) $t = \pi$
- c) $t = 5\pi/4$
- d) $t = 8$

2) Utilize o software Geogebra e crie um comando deslizante (parâmetro t) e o ponto P cujas coordenadas são obtidas a partir da evolvente da circunferência descrita no exercício 1. Verifique com o auxílio do programa que os pontos calculados realmente pertencem à curva em questão.

3) Reproduza a seguinte configuração no Geogebra, indicando quais as equações paramétricas utilizadas.



Anexo 6 – Atividades envolvendo inversão circular

1) Crie no Geogebra:

- um ponto O ;
- uma circunferência com centro O e raio r , sendo r um número real positivo;
- um ponto Q ;
- a semirreta OQ ;
- o segmento OQ ;
- uma circunferência cujo raio equivale a razão entre o quadrado de r e o comprimento do segmento OQ centrada do ponto O ;
- a intersecção entre a circunferência descrita no item anterior e a semirreta OQ (deve ser o ponto P).

2) O inverso de um ponto Q em relação a uma circunferência de centro O e raio r é o ponto P , pertencente à semirreta OQ , tal que o produto entre os segmentos OQ e OP corresponde ao quadrado do raio da circunferência. Utilize ferramentas do Geogebra para comprovar que o ponto P é o inverso do ponto Q em relação à circunferência de raio r .

3) Crie uma circunferência de centro O e outra de centro O' , de modo que O não seja ponto da segunda circunferência. Crie o ponto Q sobre a circunferência de centro O' e obtenha o inverso de Q em relação a circunferência de centro O (deve ser o ponto P). Habilite o rastro no ponto P e verifique qual a curva que corresponde ao conjunto de pontos que é formado ao movimentar Q (movimento circular).

3) Crie uma circunferência de centro O , o ponto O' e uma circunferência centrada no ultimo ponto, cujo raio equivale ao comprimento do segment OO' . Crie o ponto Q sobre a circunferência de centro O' e obtenha o inverso de Q em relação a circunferência de centro O (deve ser o ponto P). Habilite o rastro no ponto P e verifique qual a curva que corresponde ao conjunto de pontos que é formado ao movimentar Q (movimento circular).

Anexo 7 – Atividades envolvendo o mecanismo de Peaucellier

I) CONSTRUÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

- Crie as variáveis a , b , c atribuindo os seguintes valores: $a = 8$, $b = 4$, $c = 3$;
- Crie um ponto C ;
- Crie uma circunferência de centro C e raio c ;
- Crie uma reta paralela ao eixo x passando por C ;
- Obtenha as intersecções da reta paralela ao eixo x com a circunferência (o ponto à esquerda de C deve ser O);
- Obtenha o ponto A sobre a circunferência;
- Crie o segmento AC e pinte-o de azul;
- Crie o segmento AO (“ g ” é a variável atribuída pelo programa para o comprimento do segmento OA);
- Crie os ângulos de amplitude fixa $\widehat{AOA'}$ de medida $\arccos((b^2 - a^2 - g^2)/(-2ag))$ no sentido de anti-horário e $\widehat{AOA'_1}$ de mesma medida no sentido horário;
- Crie as semirretas OA' e OA'_1 ;
- Crie uma circunferência de raio a e centro O ;
- Obtenha as intersecções entre a circunferência de centro O e a semirreta OA' e entre a mesma circunferência e a semirreta OA'_1 (o ponto de intersecção da circunferência com OA' deve ser D e com a outra semirreta deve ser E);
- Crie os segmentos OD e OE e pinte-os de verde;
- Crie duas circunferências de raio b : uma com centro em D e outra com centro em E ;
- Obtenha as intersecções das duas circunferências de raio b (que não é ponto da circunferência de centro C deve ser P);
- Crie os segmentos AD , DP , PE e EA e pinte-os de vermelho;
- Habilite o rastro no ponto P .

Ao movimentar-se o ponto A (movimento circular) o ponto P descreve uma reta.

II) EXERCÍCIOS QUE UTILIZAM A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PRONTA

1) Verifique, utilizando as ferramentas convenientes do software que os comprimentos dos segmentos AD, DP, PE e AE equivalem ao parâmetro b. Que tipo de quadrilátero é ADPE? Qual é a posição relativa de suas diagonais?

2) Supondo que você conhece a medida OA, como você poderia calcular o ângulo AÔD? Utilize o programa Geogebra para verificar a veracidade da sua resposta.

3) Utilizando a ferramenta Segmento, obtenha os comprimentos de OA e OP, mediante à modificações na posição de A. Verifique também o produto OA . OP.

Posição 1:	OA =	___	OP =	___	OA . OP =	___
Posição 2:	OA =	___	OP =	___	OA . OP =	___
Posição 3:	OA =	___	OP =	___	OA . OP =	___

O que você pode afirmar sobre o produto dos comprimentos de OQ e OP, independentemente da posição de Q?

4) Explique por que o conjunto P dos inversos dos pontos da circunferência de centro C em relação a uma circunferência de centro O é uma reta.

5) Justifique o motivo pelo qual o movimento retilíneo descrito pelo ponto P é limitado.

Anexo 8 – Atividades envolvendo o mecanismo de Hart

I) CONSTRUÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

- Crie as variáveis a , b , c , d , atribuindo os seguintes valores: $a = 3$, $b = 10$, $c = 1.5$ e $q = 0.3$;
- Crie um ponto O' ;
- Crie uma circunferência de centro O' e raio c ;
- Crie uma reta paralela ao eixo x , passando por O' ;
- Obtenha as intersecções da reta paralela ao eixo x com a circunferência (o ponto de intersecção à esquerda de O' deve ser O);
- Crie o ponto Q sobre a circunferência;
- Crie o segmento $O'Q$ e pinte-o de azul;
- Crie uma circunferência de centro O e raio aq ;
- Crie uma circunferência de centro Q e raio bq (caso as circunferências de centros O e Q não se interceptem, movimente Q até que isso ocorra);
- Obtenha as intersecções entre as circunferências de centro O e Q (o ponto de intersecção abaixo de O deve ser A);
- Crie as semirretas AO e AQ ;
- Crie duas circunferências de centro A : uma de raio a e outra de raio b ;
- Obtenha a intersecção da semirreta AO com a circunferência de raio a (ponto D);
- Obtenha a intersecção da semirreta AQ com a circunferência de raio a (ponto B);
- Crie uma circunferência de centro B e raio a ;
- Crie uma circunferência de centro D e raio b ;
- Obtenha as intersecções entre as circunferências de centros D e B (o ponto de intersecção abaixo de B deve ser C);
- Crie os segmentos AD e CB e pinte-os de verde;
- Crie os segmentos AB e CD e pinte-os de vermelho;
- Crie uma circunferência de centro C e raio bq ;
- Obtenha a intersecção entre a circunferência de centro C e o segmento BD (ponto P);
- Habilite o rastro no ponto P .

Ao movimentar-se o ponto Q (movimento circular) o ponto P descreve uma reta.

II) EXERCÍCIOS QUE UTILIZAM A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PRONTA

- 1) Verifique, utilizando as ferramentas adequadas, que as razões entre os pares de segmentos AO e AD, AQ e AB e CP e CD é igual e corresponde ao parâmetro q da construção.
- 2) Obtenha o ponto R de modo que a razão entre CR e CB seja equivalente à razão dos pares de segmentos elencados no exercício 1. Utilize os triângulos OAQ, DAB, RCP, BCD, DAC e DOP para concluir que os pontos O, Q e P estão alinhados.
- 3) Verifique que o comprimento de cada um dos segmentos AB, BC, CD e AD coincide com os parâmetros “a” ou “b” da construção.
- 4) Utilizando a ferramenta Segmento, obtenha os comprimentos de OQ e OP, mediante à modificações na posição de Q. Verifique também o produto $OQ \cdot OP$.

Posição 1:	OQ =	___	OP =	___	OQ · OP =	___
------------	------	-----	------	-----	-----------	-----

Posição 2:	OQ =	___	OP =	___	OQ · OP =	___
------------	------	-----	------	-----	-----------	-----

Posição 3:	OQ =	___	OP =	___	OQ · OP =	___
------------	------	-----	------	-----	-----------	-----

O que você pode afirmar sobre o produto dos comprimentos de OQ e OP, independentemente da posição de Q?

- 5) Explique por que o conjunto P dos inversos dos pontos da circunferência de centro O' em relação a uma circunferência de centro O é uma reta.
- 6) Justifique o motivo pelo qual o movimento retilíneo descrito pelo ponto P é limitado.