UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Daniela Alves Martinez

# Função Exponencial e seu ensino através da Resolução de Problemas

São José do Rio Preto
2015

Daniela Alves Martinez

# Função Exponencial e seu ensino através da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Profª. Drª. Rita de Cássia Pavani Lamas

São José do Rio Preto
2015

Martinez, Daniela Alves.
Função exponencial e seu ensino através da Resolução de Problemas / Daniela Alves Martinez -- São José do Rio Preto, 2015
45 f. : il., tabs.

Orientador: Rita de Cássia Pavani Lamas
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio) – Problemas, exercícios, etc. 3. Funções (Matemática) – Estudo e ensino. 4. Funções numéricas. I. Lamas, Rita de Cássia Pavani. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Daniela Alves Martinez

Função Exponencial e seu ensino através da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Rita de Cássia Pavani Lamas
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Andréia Cristina Ribeiro
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
26 de junho de 2015

Dedico este trabalho ao meu esposo João Paulo, meu filho Daniel, ao meu irmão Flávio e aos meus pais: Décimo e Elizabet pelo apoio e incentivo que me deram durante o tempo que durou este curso.

## Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me permitido a realização de mais um sonho.

A Profª. Drª. Rita de Cássia Pavani Lamas, pela gentileza e orientação sábia e tranquila.

Ao meu esposo João Paulo e ao meu filho Daniel pelo carinho, compreensão e paciência que tiveram comigo.

Aos meus pais Décimo e Elizabet, por ter me ensinado os verdadeiros valores da vida e pelo extremo apoio e motivação.

Ao meu irmão Flavio pelo carinho e apoio.

Aos meus amigos pelas palavras de incentivo.

Aos meus colegas de mestrado, em especial a Adriana, Elaine e Luis Paulo, pelo companheirismo e solidariedade e pelas maravilhosas horas de convivência que tivemos.

A Profª. Drª. Maria José Terezinha Malvezzi pela cuidadosa revisão do texto.

Aos meus alunos e colegas da EE Achiles Malvezzi, em especial a minha amiga e coordenadora Janaina França, pelo incentivo.

A todos os meus professores do mestrado, em particular, a Profª. Drª. Évelin Menegasso Barbaresco, pela paciência e dedicação.

“Eu me esforço para ser cada dia melhor, pois bondade também se aprende. Mesmo quando tudo parece desabar, cabe a mim decidir entre rir ou chorar, ir ou ficar, desistir ou lutar, porque descobri, no caminho incerto da vida, que o mais importante é o decidir”.

Cora Coralina

# RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar uma proposta de como ensinar os conceitos relacionados à Função Exponencial através da Metodologia de Resolução de Problemas. Para isso, apoiamo-nos na teoria de Polya e Onuchic e propomos dois problemas. Em um destes é introduzido o uso do software Geogebra. Aqueles exemplificam como aplicar a metodologia de Resolução de Problemas no ensino da matemática.  A formalização do conteúdo abordado nos problemas são apresentados no trabalho, assim como os resultados de aplicação da proposta para a primeira série do Ensino Médio.



Palavras-chave: Função Exponencial. Resolução de Problemas. Geogebra. Ensino Médio.

# ***ABSTRACT***

*This work aims to present a proposal on how to teach the concepts related to Exponential Function through the Methodology of Resolution of Problems. In this regard, we sustain us on Polya and Onuchic theory and suggest two problems. In one of them is introduced the use of software Geogebra. Those exemplify how to apply the methodology of Resolution of Problems in the teaching of mathematic. The formalization of the boarded content in the problems are presented in this work, as well the results of application of the proposal for the first High School step.*

*Keywords*: *Exponential Function. Resolution of Problems. Geogebra. High School.*

Sumário

## 1. Introdução

O ensino da matemática, hoje, não pode mais ser um mero treino de habilidades e mecanismos de repetição com a resolução de vários exercícios iguais.

Nesse sentido os pesquisadores têm desenvolvido metodologias para substituir métodos tradicionais de ensino, em particular, para o aluno compreender melhor conceitos matemáticos na prática do dia-a-dia.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem que o ensino e aprendizagem da matemática é um tipo de trabalho que “o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução” (PCN´s, 1997, p.29).

Contrariando os métodos tradicionais de ensino-aprendizagem da matemática, insere-se a metodologia de Resolução de Problemas. Trata-se de ensinar os conceitos matemáticos a partir de um problema (ONUCHIC, 2014).

Um dos primeiros teóricos a desenvolver o método de Resolução de problemas, objeto do nosso estudo, foi George Polya que em sua obra mais famosa “How to solve it” (1995), que em Português foi traduzido como “A arte de resolver problemas”, estuda os diversificados métodos de resolução de problemas, também conhecido como método Heurística.

Para um melhor desempenho na resolução de problemas o referido autor divide a prática de resolver problemas em quatro etapas: 1) Compreensão do problema; 2) Estabelecimento de um plano; 3) Execução do plano; e 4) Retrospecto, para um melhor desempenho. (POLYA, 1995). Nesse trabalho, essas etapas foram utilizadas em sala de aula, na primeira série do Ensino médio, através do diálogo professor- aluno (DANTE, 2000) para a função exponencial.

A estrutura do trabalho se resume a apresentar uma introdução da metodologia de Resolução de Problemas no Capítulo 2. Particularidades relativas à potência de números reais são apresentadas no capítulo 3, com o objetivo de introduzir a função exponencial de acordo com o capítulo 4. O capítulo 5 refere à continuidade e limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ da função exponencial, de forma a esclarece ainda mais as características do gráfico da função exponencial. Neste capítulo também é apresentado como utilizar o software Geogebra para a obtenção dos gráficos das funções exponenciais relacionadas com esse trabalho. No entanto, o software pode também ser utilizado para fazer o gráfico de qualquer função com as devidas adaptações.

A proposta para uso da metodologia de Resolução de Problemas para desenvolver os conteúdos citados é apresentada no capítulo 7 e os resultados de aplicação da metodologia e do software Geogebra obtidos com os alunos da 1ª série do Ensino Médio, no capítulo 8.

## 2. A importância de se ensinar Matemática através de resolução de problemas.

Segundo publicações do NCTM- Conselho nacional de Professores de Matemática realizado nos Estados Unidos, em 1980, "*O currículo de Matemática deve ser organizado em torno da resolução de problemas".*

A partir do que foi dito, percebe-se que podemos oferecer ao aluno a oportunidade de aprender matemática por meio da resolução de problema, dando a ele a oportunidade de construir os conceitos matemáticos usando raciocínio lógico sem fórmulas e regras pré-estabelecidas. Isso nos leva a compreender que o erro cometido pelo aluno deve ser abordado de forma positiva, sem despersonalizar seus méritos para que ele use seus conhecimentos e resolva as várias situações matemáticas que lhes são pedidas.

Além disso, tudo aprender matemática é valorizar a troca de experiências entre os alunos fazendo das respostas erradas um ponto de partida para que eles consigam resolver e formular problemas.

Segundo Hamilton (2014) "As crianças devem aprender a se sentir confortáveis em fracassar de vez em quando, mas em fracassar com glória. Quero que errem e deixem o erro para trás, para tentar de novo".

Sempre houve muita dificuldade de se ensinar matemática e fazer com que o aluno aprenda. Por meio da resolução de problemas podemos tornar o ensino da matemática mais produtivo.

### 2.1 O que é um problema

Para se explicar a metodologia da Resolução de problemas, é preciso saber o que é um problema.

De acordo com o dicionário Houaiss (2001, p.2.301), *problema* é definido como "assunto controverso, ainda não satisfatoriamente respondido, em qualquer campo do conhecimento, e que pode ser objeto de pesquisas científicas ou discussões acadêmicas".

De maneira geral a definição acima pode satisfazer aos propósitos científicos encarados como oportunidade de o aluno usar seus conhecimentos prévios para tentar solucionar as questões sem fórmulas e sem regras.

Entretanto, segundo Dante (2000), **problema** é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-lo. Na matemática, uma maneira semelhante é apresentada quando se quer explicar os desafios que encaram um raciocínio ou uma estratégia para resolução.

Dante (2000), também se ocupa em estudar o que é **problema matemático.** Segundo este autor, problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-los.

Podemos dizer que para o aluno resolver um problema matemático ele deve usar seus conhecimentos matemáticos que tem adquirido ao longo da sua vida. Para isso deveriam estar permanentemente em contato interdisciplinar com outros conteúdos a fim de desenvolver seu raciocínio para solucionar problemas matemáticos.

Lourdes de La Rosa Onuchic (1999) segue os mesmos passos de Dante quando afirma que, "(...) os estudantes deveriam ser expostos a numerosas e variadas experiências inter-relacionadas que os encorajassem a valorizar a iniciativa em matemática, a desenvolver hábitos matemáticos nos afazeres humanos".

Não podemos e não devemos achar que o ensino da matemática deve ensinar apenas a resolução de problemas. Esse método é mais uma maneira de fazer com que o aluno adquira novos conhecimentos.

## 2.2 Os objetivos da resolução de problemas

De acordo com Dante (2000), os objetivos da metodologia de Resolução de Problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;

- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática;
- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

Com esses objetivos o aluno utilize de seus conhecimentos para chegar na maneira matemática de solucionar os problemas propostos.

Quando se apresenta um problema ao aluno, é preciso que ele leia e entenda o problema, que ele defina um plano de como vai resolver o mesmo e, então, execute o seu plano chegando a uma conclusão para depois certificar-se que a solução seja a correta.

Enganam-se quem acredita que é fácil ensinar matemática apenas por meio da metodologia de resolução de problemas. Ensinar matemática exige muito do professor, tanto na formulação desses problemas quanto como será executada a solução. O professor precisa propor aos alunos vários tipos de problemas tais como os que têm solução, os que não podem ser solucionados, e os que têm várias soluções.

Na resolução de problemas a atenção dos alunos deve estar nas ideias matemáticas e em dar sentido a elas. Os alunos acabam desenvolvendo a capacidade de pensar matematicamente, criando estratégias diferentes para a solução de diversificados tipos de problemas. Tal procedimento permite que o educando adquira novos conteúdos e conceitos matemáticos carregados de sentido, aumentando sua confiança na resolução dos problemas apresentados a ele e, assim, aumentar sua autoestima.

## 2.3 Os caminhos metodológicos para solução de problemas

A metodologia usada neste trabalho teve como embasamento teórico os estudos e as conclusões de George Polya, publicado na obra *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (1945) traduzido no Brasil como *A Arte de resolver problemas:* um novo aspecto do método matemático. Na obra, Polya propõe quatro etapas para um melhor desempenho na resolução de problemas: 1) compreensão do problema; 2) estabelecimento de um plano; 3) execução do plano; e 4) retrospecto.

Para usar o método de Polya primeiramente vamos propor ao aluno um problema que é o ponto de partida para a construção de novos conhecimentos.

Após a apresentação do problema pelo professor, é necessário que o aluno leia o mesmo e entenda o que esta sendo pedido. Ele pode trabalhar em grupo ou de maneira individual para compreender o que o problema está pedindo.

Depois de compreender o problema o aluno deve destacar os dados que o problema traz a fim de determinar as estratégias a serem seguidas. O aluno deve se preocupar em escolher como vai executar a resolução do mesmo estabelecendo um plano a ser seguido. Nesse momento, o professor não tem mais o papel de um simples transmissor de conhecimentos, mas sim, de um mediador que leva o aluno a pensar de sua maneira própria.

O professor pode utilizar do diálogo professor-aluno para verificar se o aluno de fato compreendeu o problema. São sugeridas perguntas do tipo: O que o problema pede? O que foi dado no problema.

### 2.4 Planejando as estratégias para a solução

Depois da compreensão do enunciado do problema o aluno levanta as hipóteses a serem seguidas. Verifica se é preciso uma incógnita para resolver o problema, e como ele vai nomear essa incógnita. Verifica se pode usar uma fórmula já conhecida ou alguma outra estratégia. Depois com uma análise mais detalhada e socializando com os colegas ele pode concluir que o problema pode ser resolvido de formas distintas.

### 2.5 Resolvendo o que foi planejado

Nessa etapa do procedimento o aluno apresenta a solução do problema nos moldes matemáticos, utilizando o plano que ele escolheu.

### 2.6 Verificação da resposta encontrada

Depois que cada aluno encontrou sua resposta o professor, como mediador, coloca essas respostas na lousa e todos discutem quais respostas estão corretas e como fizeram para chegar até elas. Após essa análise o professor apresenta formalmente o conteúdo matemático que ele queria que os alunos aprendessem por meio dessa metodologia matemática.

Os alunos não sentem vergonha em apresentar suas respostas pelo contrário, dão risada das suas conclusões.

O interessante é que eles podem usar todas as estratégias que conhecem para solucionar o problema apresentado, inclusive fazer uso da tecnologia, como o uso de alguns softwares.

Dessa maneira eles acabam aprendendo os conteúdos matemáticos a que o professor se dispôs ensinar de forma prazerosa.

## 3. Potências

### 3.1 Potência de expoente natural

**Definição:** Seja $a$ um número real positivo e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1,2,3...\}$. Para $n$ natural define-se:

$$a^n = \begin{cases} a, & n = 1 \\ a^{n-1}.\, a, & n \geq 2. \end{cases}$$

**Princípio da indução finita:** Uma proposição P($n$) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, quando satisfaz:

1º) P($n_0$) é verdadeira, isto é, a propriedade é valida para $n = n_0$ , e

2º) Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e P($k$) é verdadeira, então P($k$ + 1) também é verdadeira.

**Propriedades:**

1) $a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$ , para quaisquer $m, n, \in \mathbb{N}$.

2) $(a^m)^n = a^{mn}$, para quaisquer $m, n, \in \mathbb{N}$.

3) $(a.b)^n = a^n \,.\, b^n$ . para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Prova:

1) Provemos a propriedade 1 por indução sobre $n$. Consideremos $m$ fixo.

1º) A propriedade é verdadeira para $n$ = 1, pois sendo $m + 1 \geq 2$, pela definição,

$$a^{m+1} = a^m.\, a.$$

2º) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, isto é, $a^m \,.\, a^k = a^{m+k}$, e mostremos que é verdadeira para $n = k + 1$, isto é, $a^m \,.\, a^{k+1} = a^{m+k+1}$. De fato:

$$a^m \,.\, a^{k+1} = a^m \,.\, (a^k \,.\, a) = (a^m \,.\, a^k) \,.\, a = a^{m+k} \,.\, a = a^{m+k+1}.$$

A propriedade 1 continua válida para $n$-fatores. Para $m_1$, $m_2$, ... , $m_n$ quaisquer pertencentes a $\mathbb{N}$, temos:

$$a^{m_1} .\, a^{m_2} .\, \dots \,.\, a^{m_n} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

Se todos os expoentes forem iguais ($m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$), temos a propriedade 2:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

A propriedade 3 também pode ser provada por indução.

### 3.2 Potência de expoente inteiro

**Definição:** Seja $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$. Definimos a potência $a^n$ de base $a$ e expoente $n$ como sendo:

$$a^n = \begin{cases} 1 & se \;\; n = 0 \\ a^{n-1}.\, a & se \;\; n > 0 \\ \frac{1}{a^{-n}} & se \;\; n < 0 \; e \; a \neq 0 \end{cases}$$

### 3.3 Raiz enésima aritmética

**Definição:** Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural $n$, chama-se raiz enésima aritmética de $a$ o número real e não negativo $b$, tal que $b^n = a$. Em símbolos,

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

### 3.4 Potência de expoente racional

**Definição:** Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), define-se potência de base $a$ e expoente $\frac{m}{n}$ por:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Considerando válido que $a^r \,.\, a^s = a^{r+s}$, $r,s \in \mathbb{Q}$, com $a$ positivo, observamos que:

$$(a^{m/n})^n = a^{m/n}.a^{m/n}. \dots .a^{m/n} = a^{m/n+m/n+\dots+m/n} = a^{n.(m/n)} = a^m.$$

Ou seja, $a^{m/n}$ é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a $a^m$.

### 3.5 Potência de expoente irracional

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $\alpha$ um número irracional; consideramos os conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \alpha\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > \alpha\}$$

Notemos que todo número de $A_1$ é menor que qualquer número de $A_2$.

Existem dois racionais $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tais que $r < \alpha < s$ e a diferença $s - r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos $A_1$ e $A_2$, considerando os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}$$

Se a > 1, todo número de $B_1$ é menor que qualquer número de $B_2$.

Existem dois números $a^r \in B_1$ e $a^s \in B_2$ tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Nessas condições, dizemos que $a^r$ e $a^s$ são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de $a^\alpha$ e que $B_1$ e $B_2$ são classes que definem $a^\alpha$.

Se $0 < a < 1$, tudo acontece de forma análoga.

As potências de números reais serão desenvolvidas ainda mais segundo a função exponencial no capítulo 4. Será mostrada a continuidade dessa função justificando também as aproximações consideradas para os números irracionais.

## 4. Função Exponencial

**Definição:** Dado um número real $a$ positivo, tal que $a \neq 1$,chamamos função exponencial de base $a$ a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x$ que satisfaz:

1) $f(x + y) = f(x) . f(y)$;

2) $f(0) = 1$.

**Proposição 4.1:** Para a função exponencial $f$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$, $f(x) > 0$, para todo $x$ real.

Prova:

A função $f$, não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \,.\, f(x - x_0) = 0 \,.\, f(x - x_0) = 0.$$

Logo, $f$ será identicamente nula.

Resta mostrar que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2) \,.\, f(x/2) = [f(x/2)]^2 > 0.$$

Com isso, pode ser considerado como contradomínio de $f$ o conjunto $\mathbb{R}^+$. Neste caso $f$ é sobrejetora.

Para provar o Teorema 4.8 relacionado ao crescimento e decrescimento da função exponencial serão utilizados os lemas e teoremas apresentados a seguir.

**Lema 4.2:** Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, $a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$.

Demonstração:

Provemos, por indução sobre $n$ que, se $n > 0$ então $a^n > 1$.

1º) é verdadeira para $n = 1$, pois $a^1 = a > 1$.

2º) suponhamos que a proposição seja verdadeira para $n = k$, isto é, $a^k > 1$, e provemos que é verdadeira para $n = k + 1$.

De fato, de $a > 1$, multiplicamos ambos os membros desta desigualdade por $a^k$ e mantendo a desigualdade, pois $a^k$ é positivo, temos:

$$a > 1 \Rightarrow a \,.\, a^k > a^k \Rightarrow a^{k+1} > a^k > 1.$$

Provemos que:

$$a^n > 1 \Rightarrow n > 0.$$

Suponhamos $n \leq 0$. Assim $-n \geq 0$. Para n > 0, $a^{-n} > 1$. Logo, $a^n = 1/a^{-n}$. E para $n = 0$, $a^0 = 1$.

Portanto, $a^n \leq 1$ para $n \leq 0$, o que contraria a hipótese.

Portanto, $n > 0$ para $a^n > 1$.

**Lema 4.3:** Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, $a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$.

Demonstração:

Considerando $r > 0$ e $r = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$, $a^r = a^{p/q}$.

Como, de $a = (a^{1/q})^q > 1$ e $q > 0$, então $a^{1/q} > 1$. Ainda, se $a^{1/q} > 1$ e $p > 0$, então $(a^{1/q})^p > 1$, Desta forma, pelo lema 4.2, $(a^{1/q})^p = a^{p/q} = a^r > 1$.

Provemos agora a proposição: $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$.

Façamos $r = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$; então:

$$a^r = a^{p/q} = (a^{1/q})^p.$$

Supondo $q > 0$ e considerando que pela 1ª parte do lema $a^{1/q} > 1$, temos,

$$a^{1/q} > 1 \text{ e } (a^{1/q})^p > 1.$$

Pelo lema 4.2, $p > 0$. De $q > 0$ e $p > 0$, $r = p/q > 0$.

Supondo, $q < 0$, $-q > 0$, pelo lema 4.2 temos:

$$a^{-1/q} > 1 \text{ e } (a^{1/q})^p = (a^{-1/q})^{-p} > 1 \Rightarrow -p > 0 \Rightarrow p < 0.$$

Portanto, $r = p/q > 0$.

**Lema 4.4:** Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $r$ e $s$ racionais, $a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$.

Demonstração:

$a^s > a^r \Leftrightarrow a^s.a^{-r} > a^r.a^{-r} \Leftrightarrow a^{s-r} > 1$, pelo lema 4.3 vem:

$$s - r > 0 \Leftrightarrow s > r.$$

**Lema 4.5:** Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $a^x > 1$ se, somente se, $x > 0$.

Demonstração:

Para $x$ irracional sejam os dois conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > x\}.$$

E em correspondência os conjuntos de potências de expoentes racionais que definem $a^x$,

$$B_1 = \{a^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{a^s \mid s \in A_2\}.$$

Provemos a proposição, se $x > 0$ então $a^x > 1$.

Pela definição do número $x$, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tal que $0 < r < x < s$.

Como $a > 1$, $r > 0$ temos $s > 0$. Pelo lema 4.3, $a^r > 1$ e $a^s > 1$.

Pelo lema 4.4, como $a > 1$ e $r < s$, $1 < a^r < a^s$. Pela definição de potência de expoente irracional, $1 < a^r < a^x < a^s$.

Logo, $a^x > 1$.

Provemos que se $a^x > 1$ então $x > 0$.

Suponhamos $x < 0$, isto é, $-x > 0$. Logo, $a > 1$, $-x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $-x > 0$.

Pela 1ª parte da demonstração $a^{-x} > 1$.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade, $a^{-x} . a^x > a^x$.

Logo, $1 > a^x$, o que contraria a hipótese.

Para $x = 0$, $a^0 = 1$. Também contraria a hipótese.

Portanto, $x > 0$.

**Teorema 4.6:** Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.

Demonstração:

Temos 2 casos a considerar:

1º caso: Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{Q}$, pelo lema 4.3, $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.

2º caso: Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, pelo lema 4.5, $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.

**Teorema 4.7:** Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, $a^b > 1$ se, e somente se, $b < 0$.

Demonstração:

Se $0 < a < 1$, então $1/a > 1$.

Seja $c = 1/a > 1$. Pelo Teorema 4.6,

$$c^{-b} > 1 \Leftrightarrow -b > 0.$$

Substituindo $c = 1/a$,

$$c^{-b} = (1/a)^{-b} = a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0.$$

**Teorema 4.8:** Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$ então são válidas as propriedades:

a) Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 > x_2$ então $a^{x_1} > a^{x_2}$.

b) Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Demonstração:

a) De $x_1 > x_2$, $x_1 - x_2 > 0$.

Pelo Teorema 4.6, $a^{x_1 - x_2} > 1$. Logo, $a^{x_1} / a^{x_2} > 1$.

Portanto, $a^{x_1} > a^{x_2}$.

b) De $x_1 < x_2$, $x_1 - x_2 < 0$.

Pelo Teorema 4.7 $a^{x_1 - x_2} > 1$. Logo, $a^{x_1} / a^{x_2} > 1$.

Portanto, $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Do Teorema 4.8, $f(x) = a^x$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

**Corolário 4.9:** A função exponencial $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, é injetora.

Demonstração:

Dados $x_1$ e $x_2$ tais que $x_1 \neq x_2$, consideremos $x_1 < x_2$.

Se $a > 1$, pelo Teorema 4.8 parte (a), $f(x_1) < f(x_2)$.

Se $0 < a < 1$, pelo Teorema 4.8 parte (b), $f(x_1) > f(x_2)$.

Portanto, nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Para $x_1 > x_2$ a demonstração é análoga.

## 5. Gráfico da função exponencial

**Proposição 5.1:** A função exponencial é contínua.

Demonstração:

Provemos que dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Escrevendo $x = x_0 + h$, $h = x - x_0$ sendo $a^{x_0}$ uma constante positiva, e considerando $|a^h - 1| < \varepsilon/a^{x_0}$ para $h$ suficientemente pequeno,

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}\,|a^h - 1| < \varepsilon,$$

Portanto, $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

**Proposição 5.2:** Seja $a > 1$ um número real. Se $x$ cresce indefinidamente, então $f(x) = a^x$ também cresce indefinidamente. Em símbolo,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

Se $x$ decresce indefinidamente, então os valores de $f(x) = a^x$ se aproximam de zero. Em símbolo,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

Demonstração:

Seja $a = 1 + h$, $h > 0$. Pela fórmula do binômio de Newton

$$(1+h)^x = 1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \ldots + \binom{x}{x}h^x.$$

Daí, $(1+h)^x \geq 1 + \binom{x}{1}h$ para $x \geq 1$. Ou seja, $a^x \geq 1 + xh$ para $x \geq 1$.

Como $h > 0$, $\lim_{x\to+\infty}(1 + xh) = +\infty$; Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

Provemos que $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{n \to +\infty} a^{-n} = \lim_{n \to +\infty} 1/a^n = 0.$$

Com as caracteristicas da função exponencial $f(x) = a^x$, para $a > 1$, resultantes do Teoremo 4.8, proposições 5.1 e 5.2, $f(0) = 1$ o gráfico de $f$ é como apresentado na figura 1.

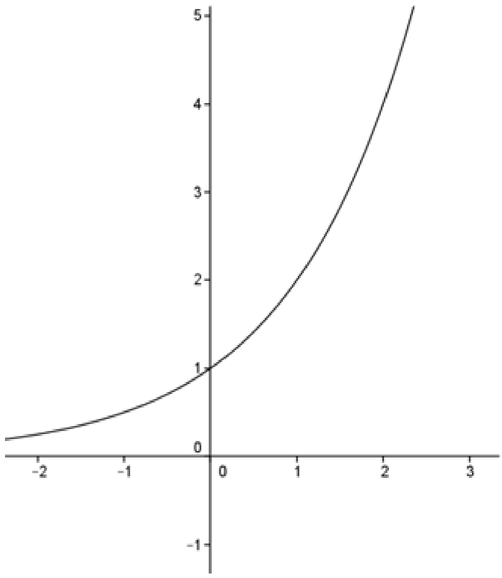



Figura 1. Gráfico de $f(x) = a^x$; $a > 1$.

**Proposição 5.3:** Seja $0 < a < 1$ um número real. Se $x$ cresce indefinidamente, os valores de $f(x) = a^x$ se aproximam de zero. Em símbolo,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Se $x$ decresce indefinidamente então os valores de $f(x) = a^x$ também cresce indefinidamente. Em símbolo,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Demonstração

Se $0 < a < 1$, $\frac{1}{a} > 1$. Da proposição 5.2,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = +\infty.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 0.$$

Provemos que $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = +\infty.$$

Com as caracteristicas da função exponencial $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$, resultantes do Teorema 4.8, proposições 5.1 e 5.3, $f(0) = 1$ o gráfico de $f$ é como apresentado na figura 2.

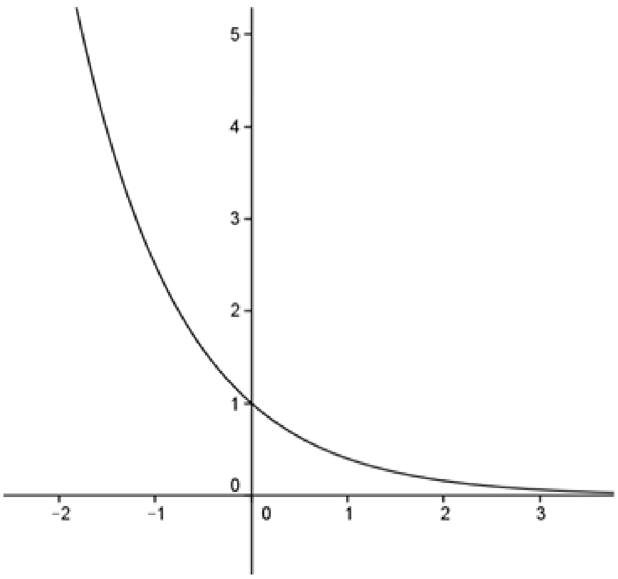



Figura 2. Gráfico de $f(x) = a^x$, $0< a <1$.

Para maiores detalhes das definições e demonstrações deste capítulo sugere-se Guidorizzi (2011).

## 5.1 Gráfico da função exponencial no Geogegra.

Os gráficos das figuras 1 e 2 foram gerados com o software Geogebra. Esse é um software livre que, pode ser baixado por meio do Google e salvo no Desktop do computador, podendo desta forma ser usado sem estar conectado a internet.

Entre as atividades propostas para serem desenvolvidas em sala de aula, no problema 7.2 o aluno depende do conhecimento do Geogebra para fazer o esboço dos gráficos das funções exponenciais. Uma descrição das ferramentas do Geogebra necessárias para isso segue.

**Para construir o gráfico de uma função no software Geogebra é necessário**

1º- Conhecer a interface do Geogebra (figura 3).

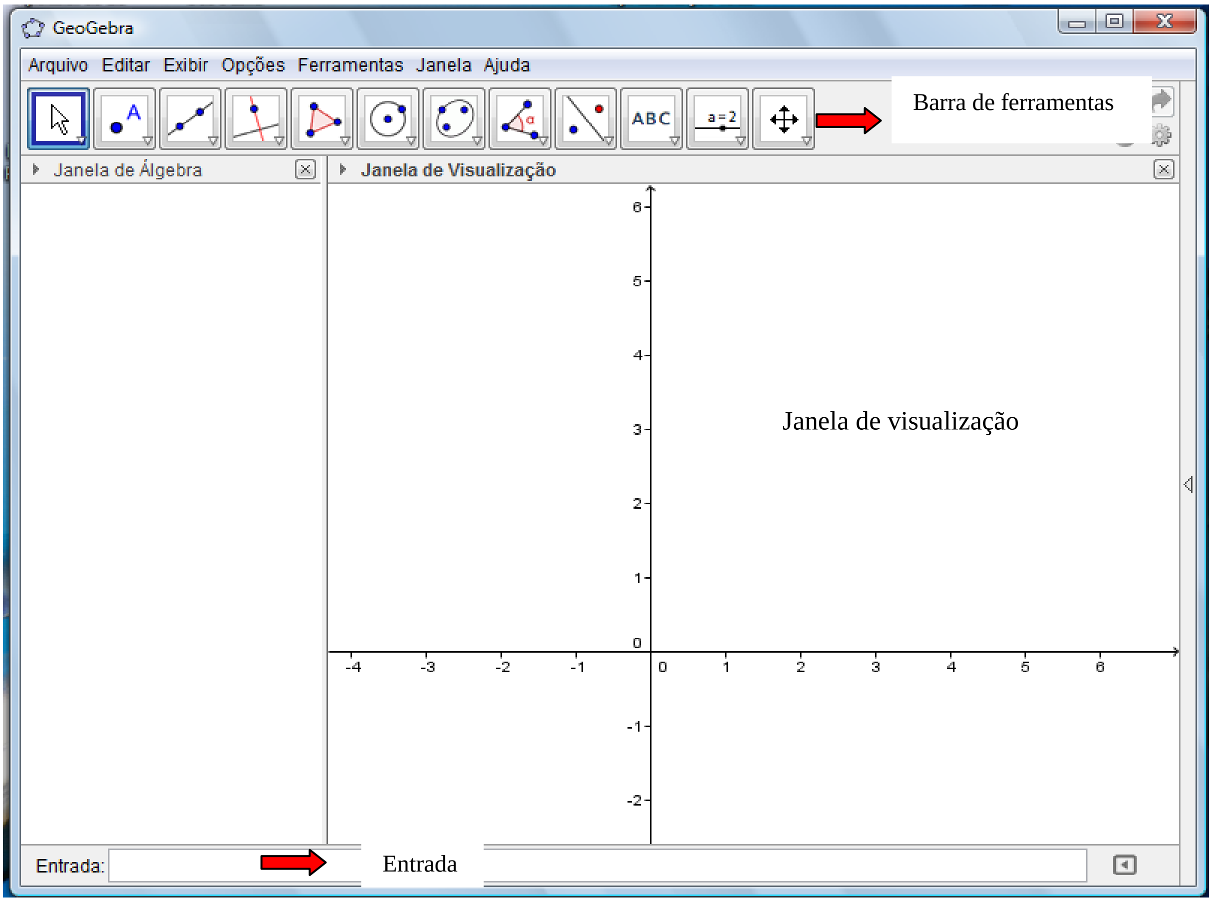



Figura 3: Interface do Geogebra.

2º- Para fazer o gráfico da função $f(x) = (1/4)^x$,no campo "Entrada" insira a $f(x) = (1/4)$^$x$ (Figura 4) e tecle "Enter" para visualizar o gráfico ( Figura 5). Observe que "^" significa a operação de potenciação.

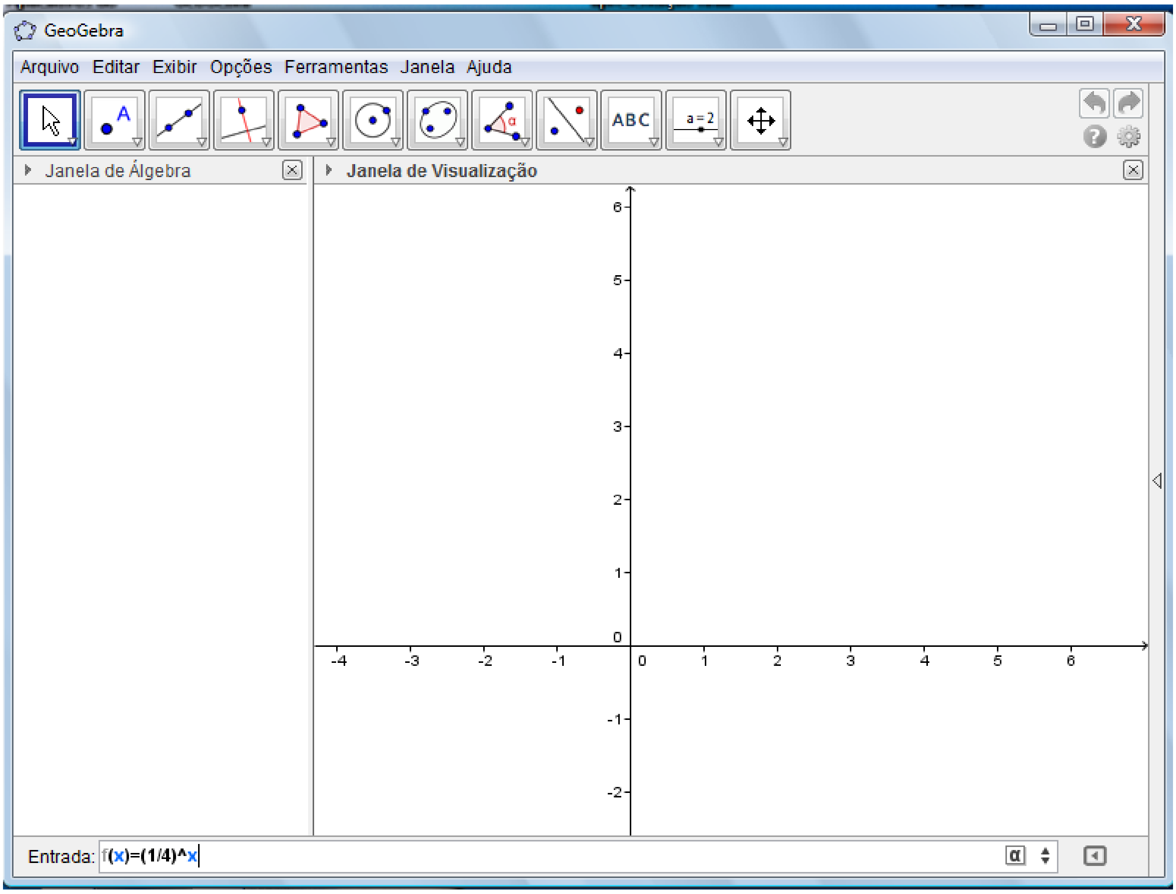



Figura 4: Inserir a função $f(x) = (1/4)^x$.

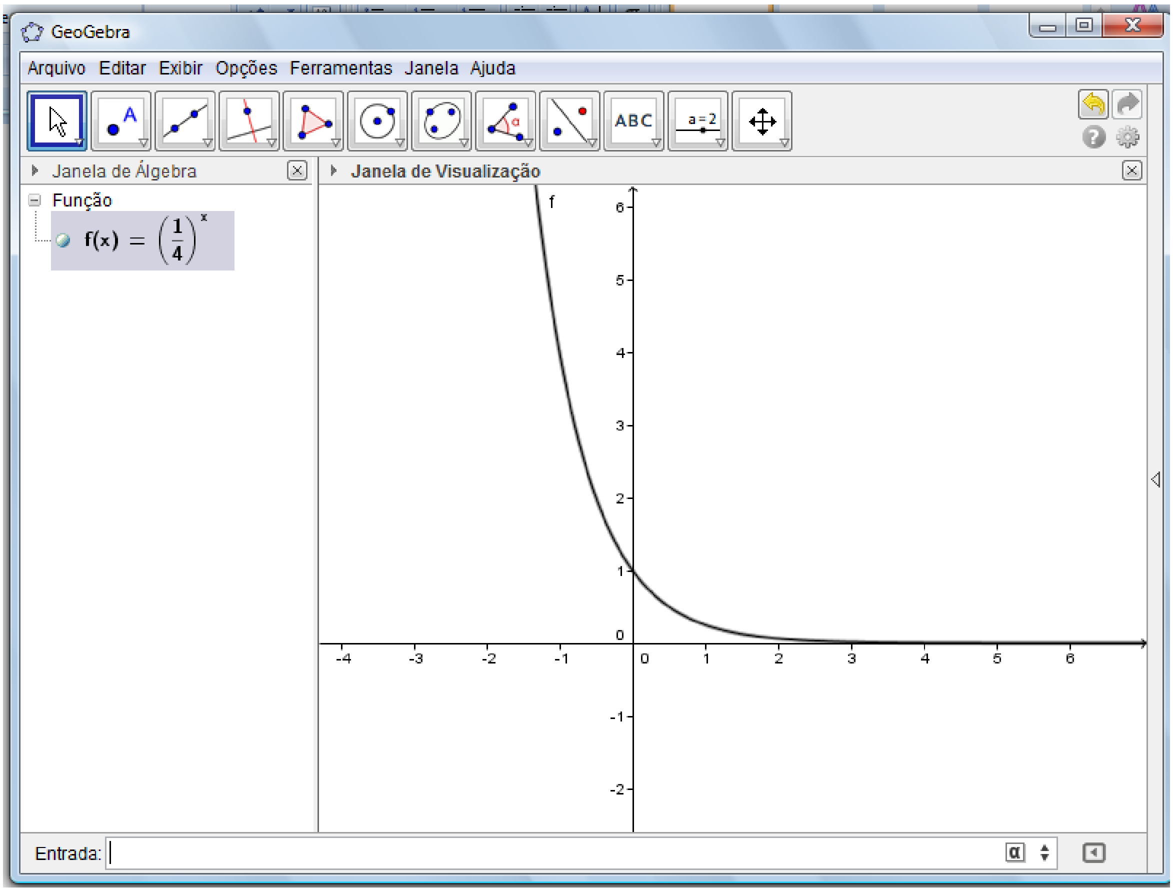
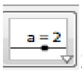



Figura 5: Gráfico de $f(x) = (1/4)^x$.

3º- Na barra de ferramentas; clique com o botão esquerdo do mouse inicialmente na opção controle deslizante ; em seguida, clique em qualquer ponto da janela de visualização (zona gráfica) e tecle “Enter”. Nesse instante aparecerá o parâmetro *a* com valor inicial igual a 1, nesse momento você pode alterar o valor mínimo e máximo do intervalo para o valor que desejar (Figura 6).

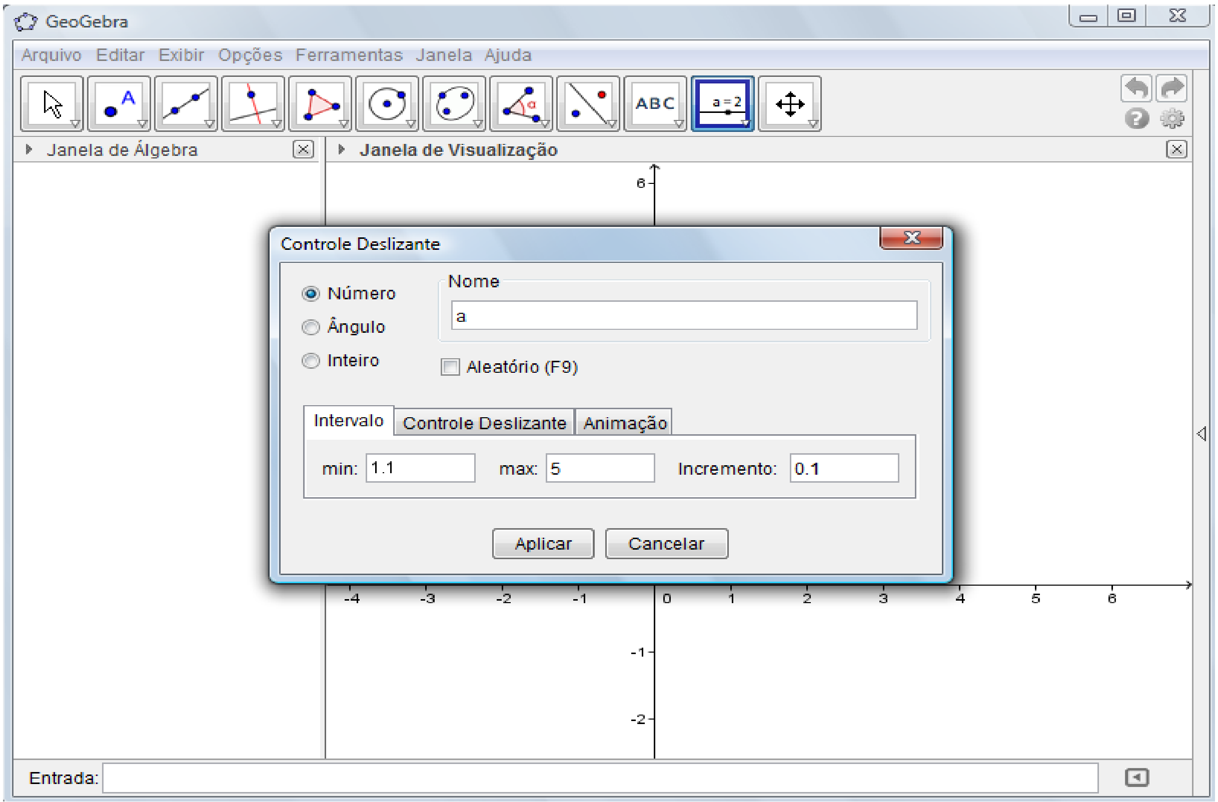



Figura 6: Controle deslizante.

4º- No campo “Entrada” insira a função *f(x)* = *a^x* e tecle “Enter” (Figura 7).

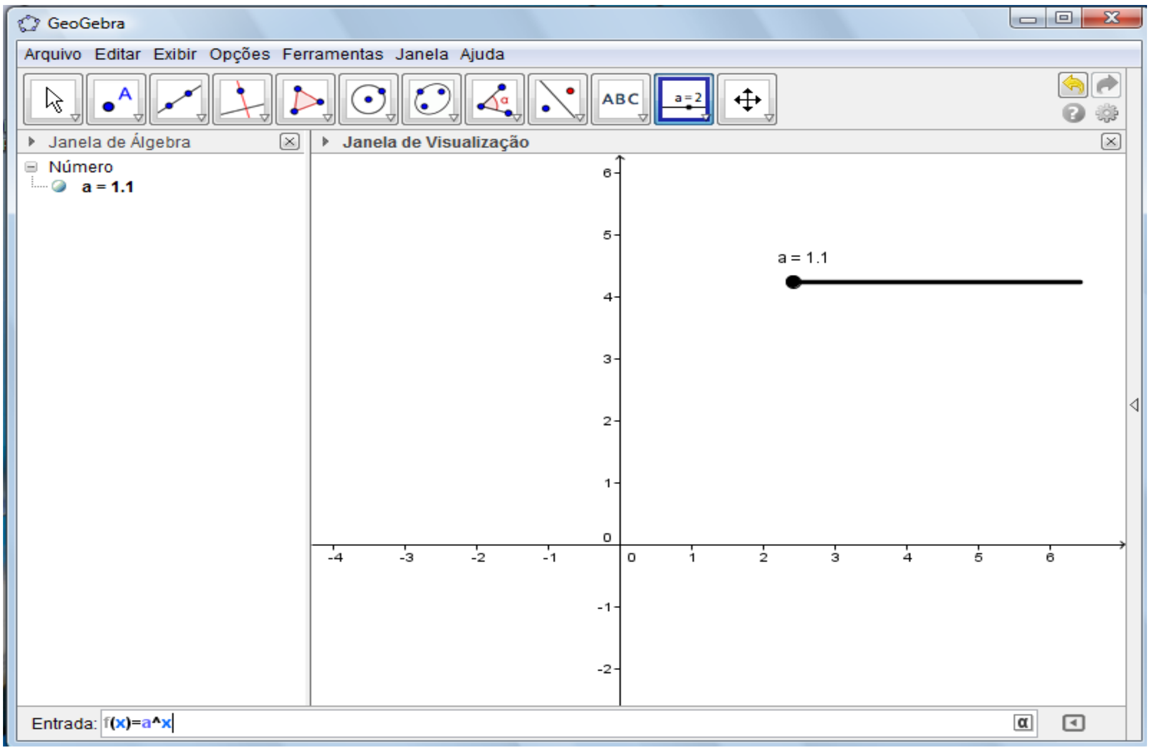



Figura 7: Inserir a função $f(x) = a^x$.

Movimentando o controle deslizante obtêm-se os gráficos referentes a $f(x) = a^x$ para cada $a$ (de 1.1< $a$ < 5). A figura 8 mostra o gráfico para $a$ = 2.1.

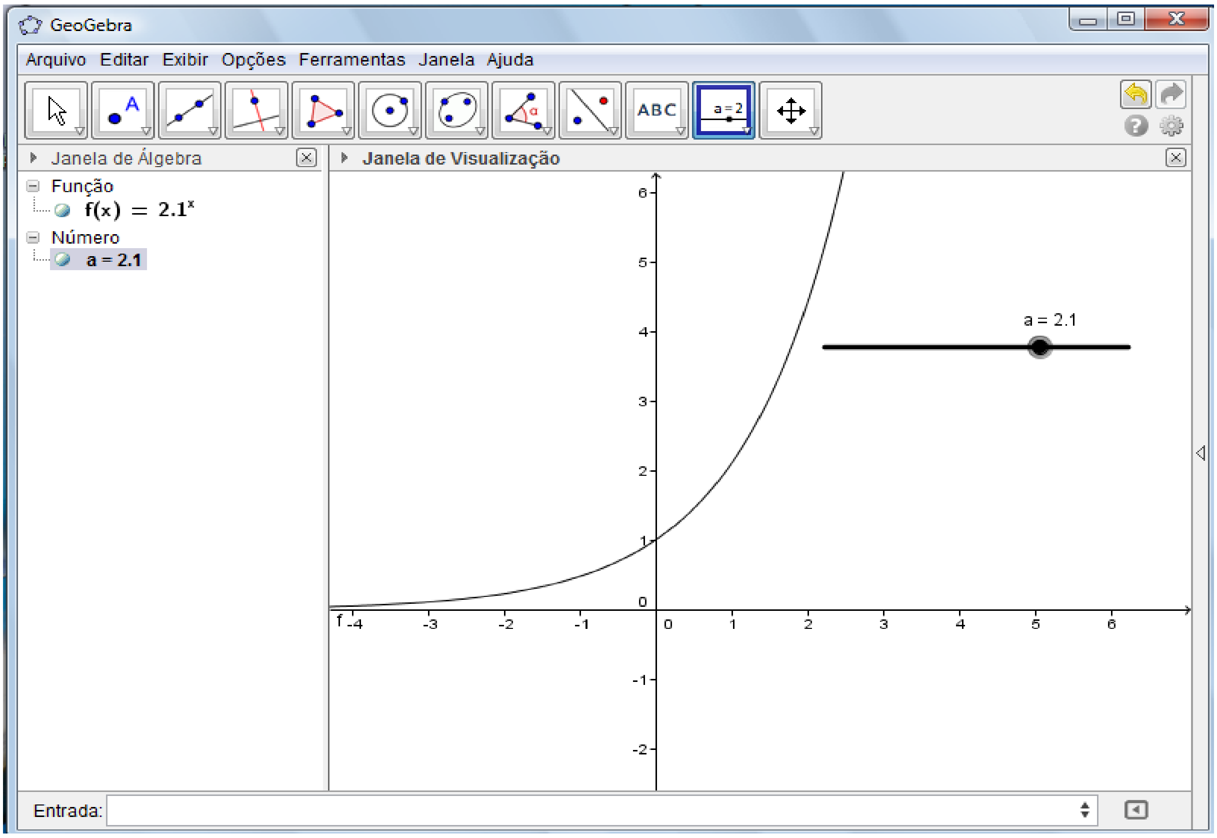



Figura 8: Gráfico da função $f(x) = (2.1)^x$.

5º- Na barra de ferramentas (parte superior da tela) clique na aba "Exibir" e depois em "malha" (Figura 9).

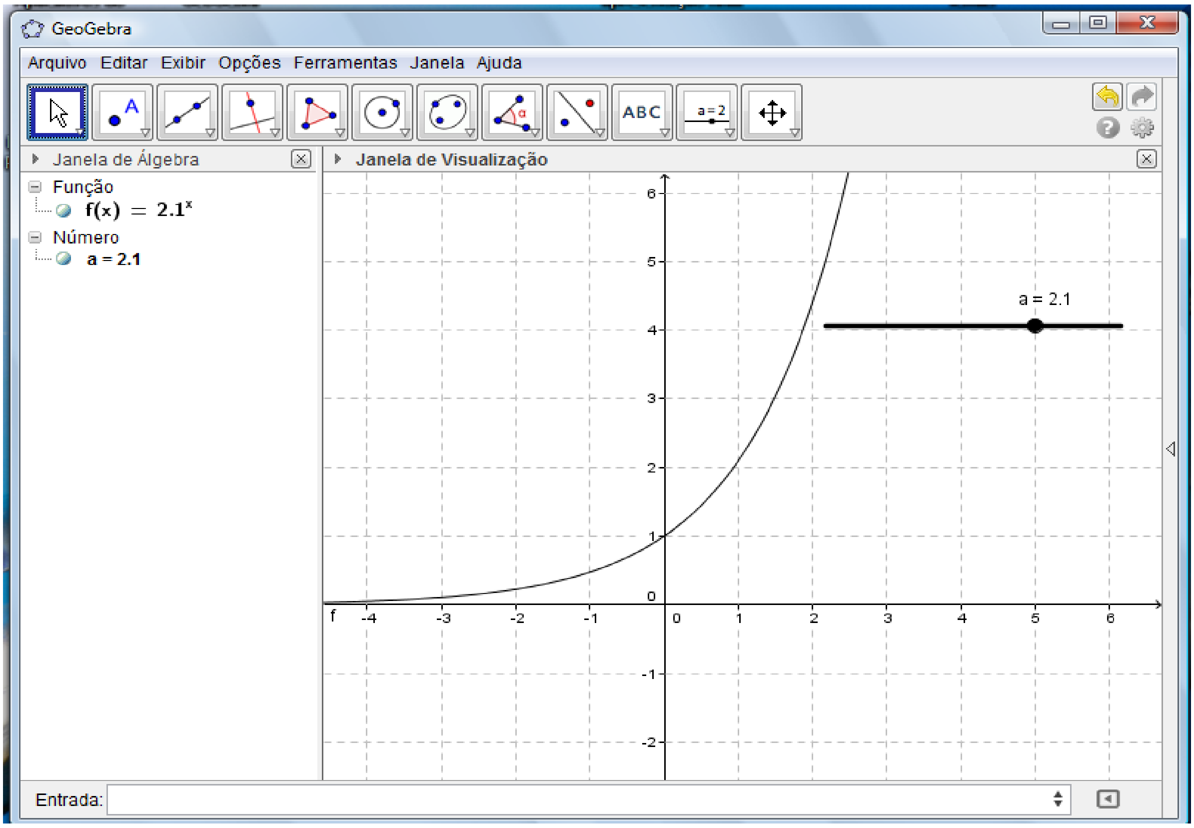



Figura 9: Gráfico da função $f(x) = (2.1)^x$ com malha.

6º- Para melhorar a visualização, pode-se mudar a cor do gráfico e sua espessura, basta clicar em "Propriedades" e fazer as mudanças (Figura 10).

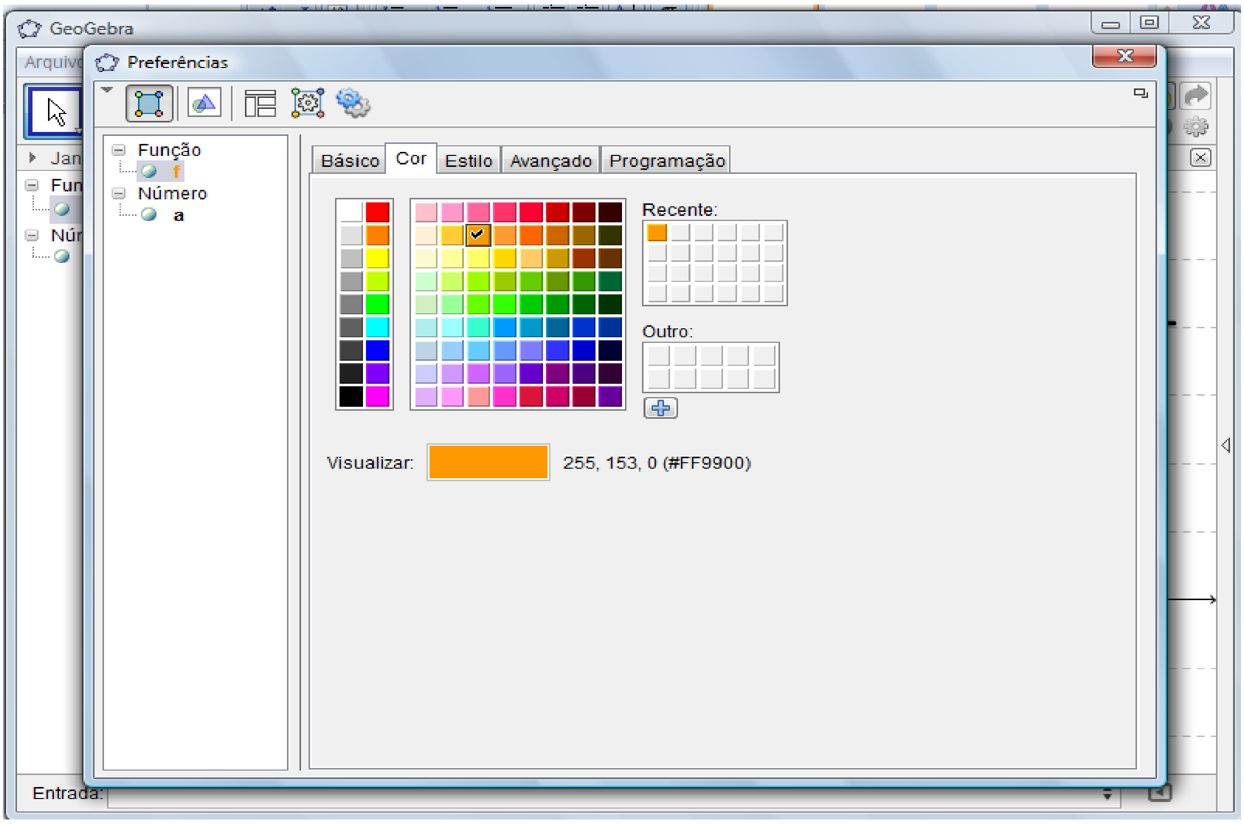



Figura 10: Mudando a cor do gráfico.

7º- Pode-se mover, ampliar ou reduzir a imagem do gráfico utilizando o scroll do mouse (aquela "bolinha" que fica na parte superior da maioria dos mouses) (Figura 11).

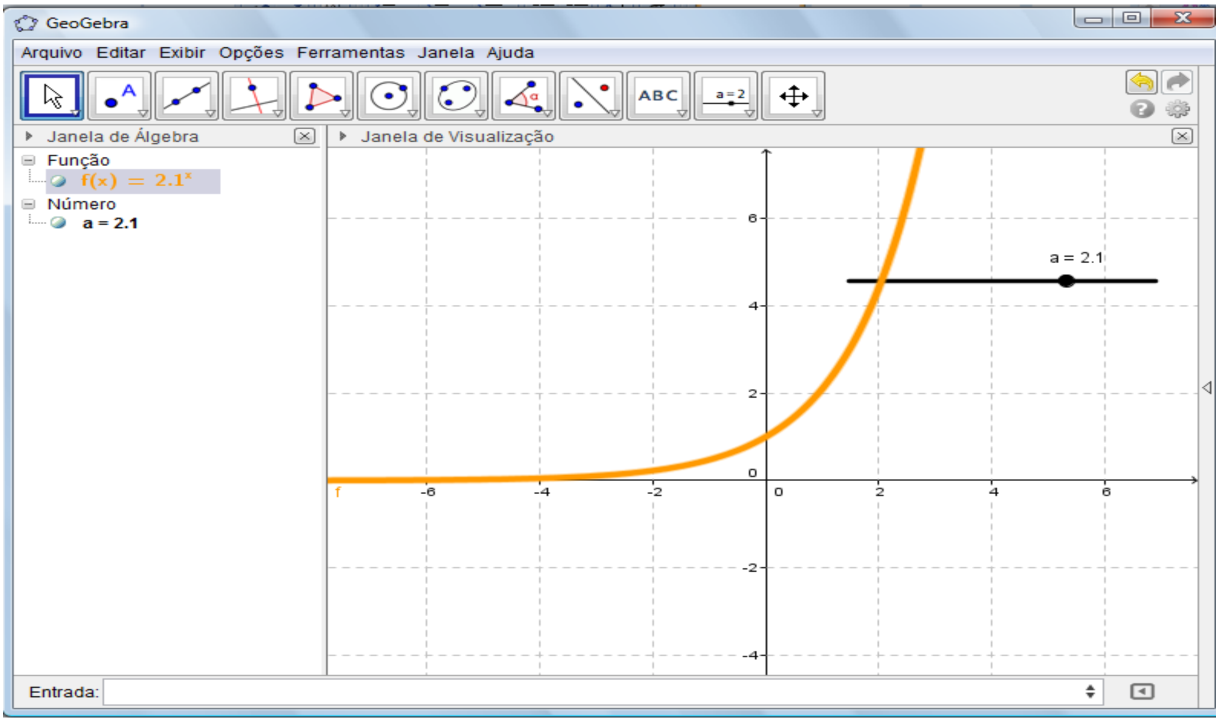



Figura 11: Mudança de escala.

8º Para marcar um ponto no gráfico, na barra de ferramentas clique com o botão esquerdo do mouse inicialmente na opção ponto (Figura 12), em seguida, clique com o botão esquerdo em qualquer lugar do gráfico e marque quantos pontos precisar (Figura 13).

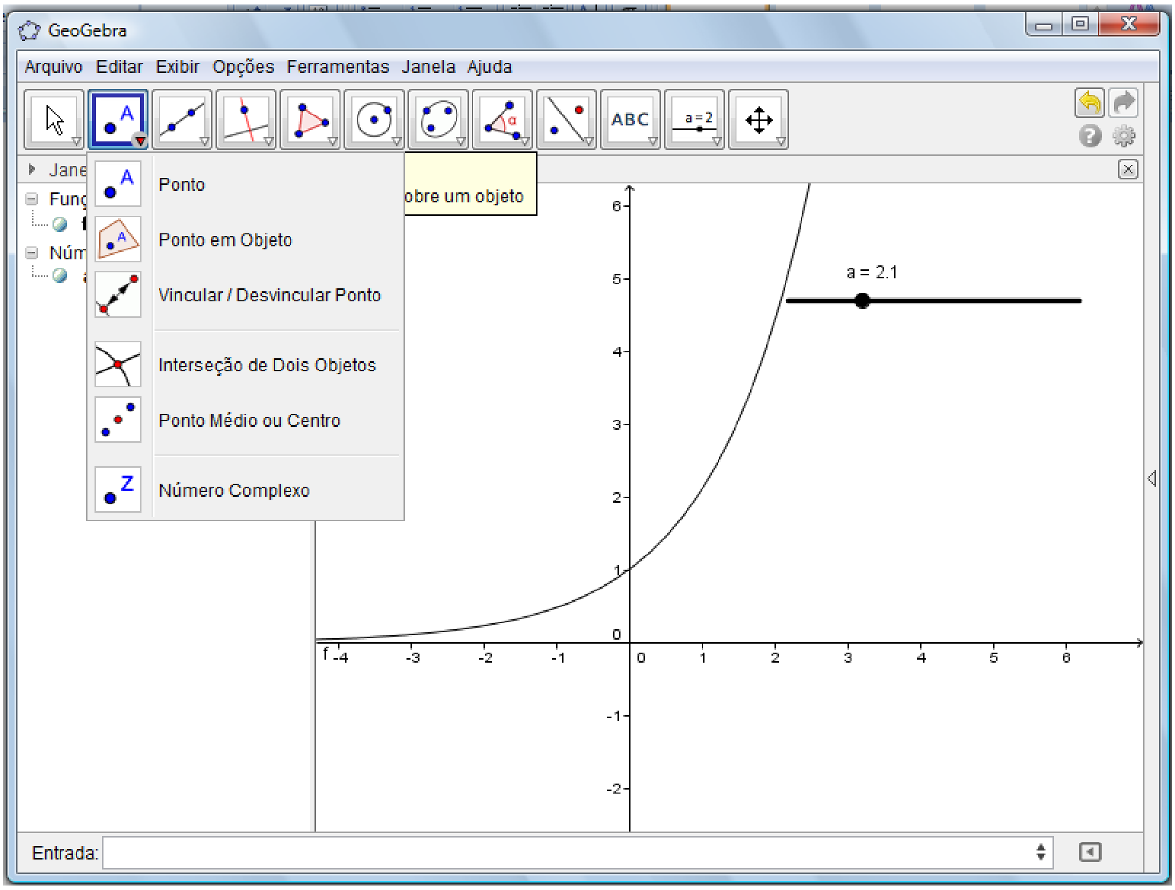



Figura 12: Marcar ponto no gráfico.

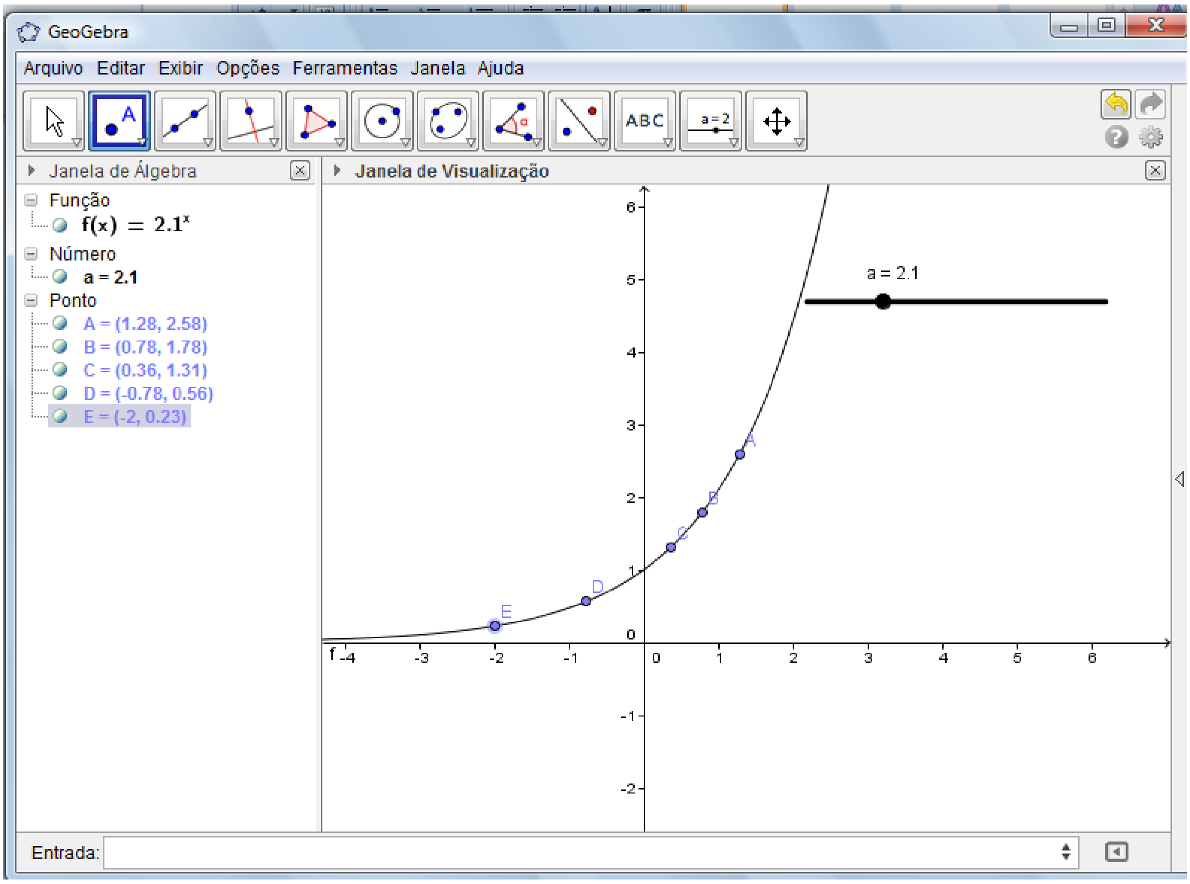



Figura 13: Pontos marcados no gráfico.

## 6. Caracterização da Função Exponencial

**Teorema 6.1:** Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x$, $h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]\,/g(x)$ depende apenas de $h$, mas não de $x$. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)\,/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

A hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = g(x+h)\,/g(x)$ independente de $x$. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)\,/b$, onde $b = g(0)$, obtemos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$monótona injetiva, com $f(x+h)\,/f(x)$ independente de $x$ e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h)\,/f(x)$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva $f$ cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$. Segue então que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$.

**Teorema 6.2:** Seja *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_n,...$ numa progressão geométrica $y_1, y_2,..., y_n ,..., y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Seja $b = f(0)$. A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua e transforma progressões aritméticas em progressões geométricas. Tem-se que $g(0) = 1$.

Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, ..., nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x),...,g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão é $g(x)$. Então seu $(n + 1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$.

Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema 6.1 que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 6.3**

Considere $f$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ uma função crescente que transforma a PA (1,4,7,10,13,16,...) na PG(10,80, 640,5120,40960,...), com $f(0) = 5$ . Do Teorema 6.2, $f(x) = ba^x$, com $b = f(0) = 5$ e $a = f(1)/f(0) = 10/5 = 2$.

Portanto, $f(x) = 5.2^x$.

## 7. Proposta para Sala de Aula

A "Proposta em Sala de Aula" consiste em dois problemas os quais foram desenvolvidos por mim em sala de aula para alunos da 1ª série do Ensino Médio, para atender os objetivos específicos, com o uso da Metodologia de Resolução de Problemas, baseado no capítulo 2, e uso do software Geogebra conforme capítulo 5.

Seguindo o Caderno do Professor e do Aluno (SÃO PAULO, 2014), o problema 7.1 foi adaptado de Dante (2014). O problema aborda potenciação para representar um produto em que os fatores são iguais. Este tem por objetivo consolidar tais noções, assim como suas extensões para os casos em que os expoentes são negativos, racionais ou mesmo irracionais quando relacionado com a função exponencial. As funções exponenciais constituem um novo padrão para a descrição e a compreensão de uma nova classe de fenômenos de natureza não linear, ampliando consideravelmente a capacidade dos alunos de expressar e de modelar fenômenos naturais, o que favorecerá uma compreensão mais ampla nos diversos contextos em que eles surgem. O problema 7.2 aborda o gráfico da função exponencial, e suas propriedades como crescimento e decrescimento, comportamento para $x$ crescendo e decrescendo ilimitadamente, com uso do software Geogebra.

**Sequência metodológica**

Na apresentação do problema o professor deve deixar que os alunos compreendam o problema e decidam qual a melhor estratégia a ser utilizada em sua resolução. Nesta etapa o professor tem o papel de mediador e é desenvolvido o diálogo professor-aluno quando necessário (DANTE, 2000). Depois de resolvido o problema os alunos devem socializar suas respostas. Isso permite que conheçam diferentes maneiras de resolver o problema verificando possíveis erros.

**Ano Escolar recomendado**

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo essa proposta é recomendada para a 1ª série do Ensino Médio.

**Problema7. 1**

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Calcule o número de bactérias nas primeiras 5 horas sabendo que há 1 bactéria no início do experimento.

**Objetivo**

Fazer conexão das noções sobre potências já estudadas anteriormente, com ênfase em algumas propriedades fundamentais de potência consideradas importantes para a compreensão da função exponencial, utilizar a linguagem matemática para expressar a situação-problema apresentada.

**Conteúdos abordados**

Potências de números naturais, introdução da função exponencial, expressões numérica e algébrica.

**Possíveis estratégias para resolução do problema**

É esperado que os alunos:

- Construam uma tabela para perceber o padrão de regularidade;
- Percebam a regularidade da multiplicação pelo fator 2, a cada hora;
- Concluam que $x$ horas após o início a quantidade de bactérias será $2^x$, e assim expressem a função $f(x) = 2^x$.

**Formalização**

É sugerido para o professor introduzir as Propriedades de Potências como no capítulo 3 e a definição de função exponencial e suas propriedades como está no capítulo 4, através do diálogo professor-aluno durante a resolução do problema.

**Problema 7.2**

**A**nalise o comportamento das funções exponenciais dadas a seguir, com o uso do software Geogebra.

a) $f(x) = 2^x$
b) $g(x) = 3^x$
c) $f(x) = (1/2)^x$
d) $g(x) = (1/3)^x$

**Objetivo**

Construir gráficos de funções exponenciais com o uso do Geogebra para levar a compreensão das suas propriedades.

**Conteúdos abordados**

Domínio e contradomínio da função exponencial, crescimento e decrescimento da função, limite da função (ideia intuitiva).

**Possíveis estratégias para resolução do problema**

É esperado que os alunos:

- Construam os gráficos com o Geogebra;
- Comparem valores específicos da função através do gráfico e concluam propriedades desejadas.

**Formalização**

À medida que os alunos verificam a propriedade de crescimento e decrescimento da função exponencial através de pontos específicos dos gráficos separadamente, utilizando do seu conhecimento sobre definição de função crescente e decrescente para funções já estudadas anteriormente (função afim e quadrática) o professor utiliza o controle deslizante no Geogebra em um mesmo plano cartesiano e os teoremas 4.8, para generalizar tais propriedades. O limite da função como está no capítulo 5 é direcionado ao professor. Para o aluno deve ser formalizado apenas o comportamento da função, isto é, quando $x$ cresce (ou decresce) $y = f(x)$ cresce (ou decresce) ilimitadamente.

## 8. Resultados das propostas

O diálogo professor – aluno a seguir mostra como os alunos resolveram o problema 7. 1.

1) **Lendo e compreendendo o problema**
   - O que está sendo pedido no problema?

   A quantidade de bactérias a cada hora nas primeiras 5 horas.

   - O que o problema nos fornece?

   Que no início tinha uma bactéria e que a cada hora o número de bactéria dobra.

2) **Planejando como solucionar o problema**

   O problema será resolvido construindo uma tabela, relacionando a coluna das horas com a coluna do número de bactérias.

3) **Colocando em prática o que foi planejado**

| HORAS | Número de bactérias |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |

**4) Analisando a resposta.**

O número de bactérias aumenta muito rápido em relação ao número de horas.

Como o número de bactérias dobra a cada hora a tabela pode ser escrita na forma de potência de 2, conforme segue.

| HORAS | NÚMERO DE BACTÉRIAS |
|---|---|
| 0 | $2^0$ |
| 1 | $2^1$ |
| 2 | $2^2$ |
| 3 | $2^3$ |
| 4 | $2^4$ |
| 5 | $2^5$ |

Percebe-se que o valor que está na coluna das horas é o expoente da potência de 2. Ou seja, se for 0 horas o expoente vai ser 0; se for 1 hora o expoente vai ser 1 e assim por diante.

E se quiser saber a quantidade de bactérias daqui a 10 horas?

Não precisamos continuar a tabela, basta calcular $2^{10}$, já que sabemos que basta elevar 2 ao número de horas que queremos.

Após essas análises é possível saber a quantidade de bactérias após $x$ horas?

Como o número de horas é o expoente da potência de base 2, o número de bactérias será $2^x$ .

Assim com a orientação do professor conclui-se que o número de bactérias é dado em função do número de horas, na forma $f(x) = 2^x$, a qual é chamada função exponencial na base 2. Neste momento é conveniente generalizar a definição de $f(x) = a^x$.

Para resolver 7.2 os alunos utilizaram o Geogebra e fizeram os gráficos como nas figuras 14 e 15, marcando alguns pontos no gráfico. Perceberam que na figura 14, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$. Portanto, a função é crescente. Na figura 15, se $x_1 > x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$ e a função é decrescente.

Para levar os alunos a perceber que para $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente e para $0 < a < 1$ é decrescente, o professor usou o controle deslizante do Geogebra de forma a obter as figuras 16, 17 e 18. Com isso, foram generalizadas as propriedades, conforme Teorema 4.8.

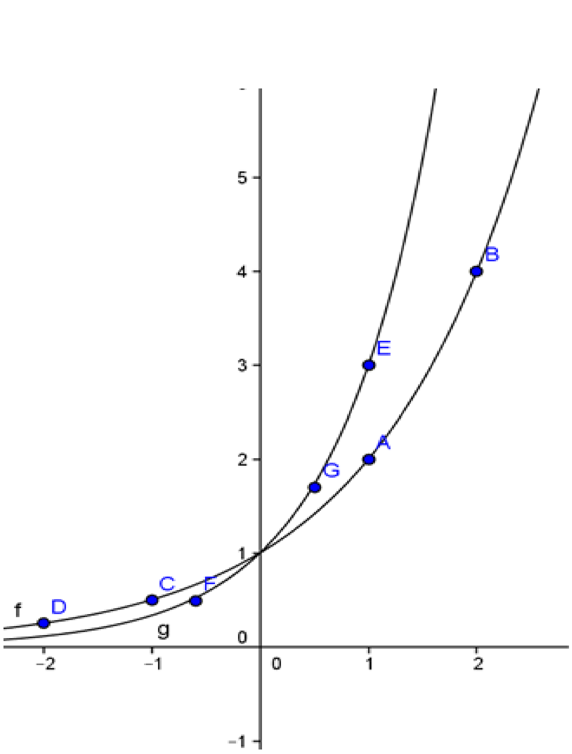



Figura 14: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$.

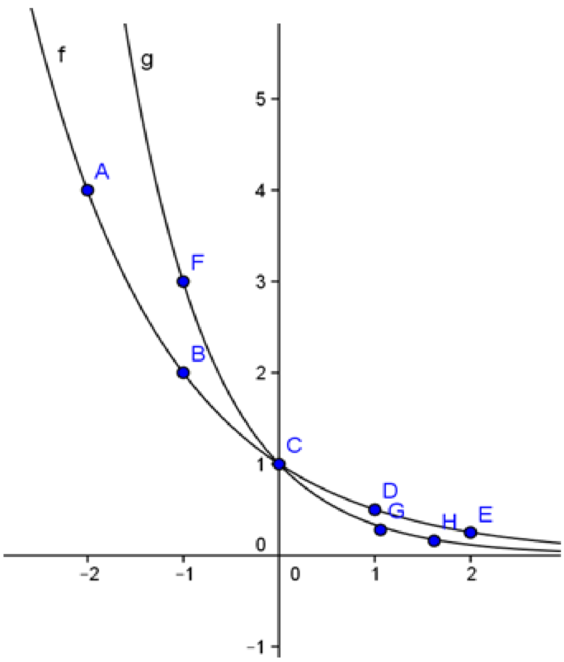



Figura 15: $f(x) = (1/2)^x$ e $g(x) = (1/3)^x$.

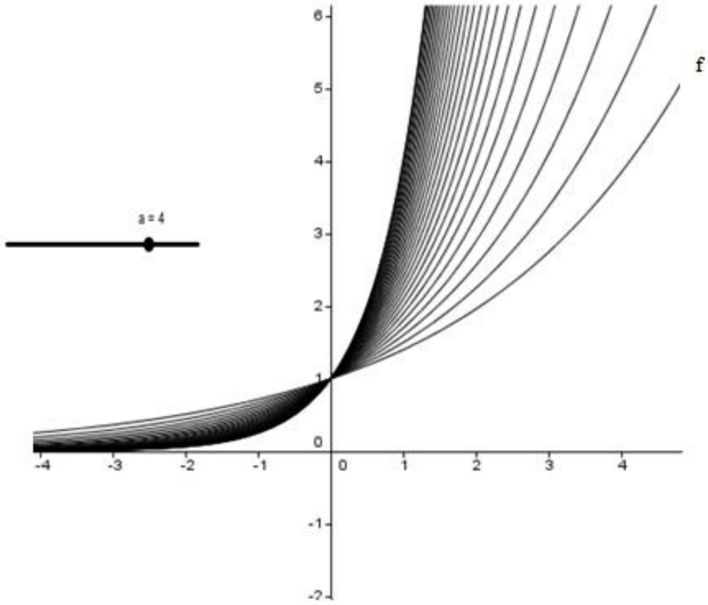



Figura 16: $f(x) = a^x$, $a > 1$.

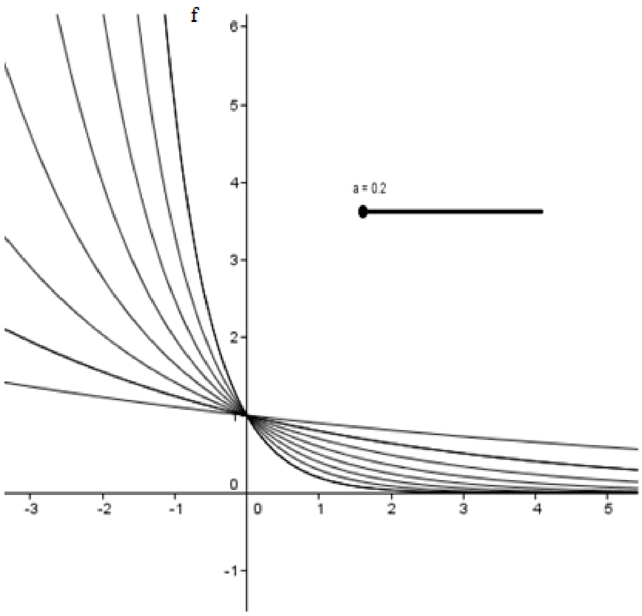



Figura 17: $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$.

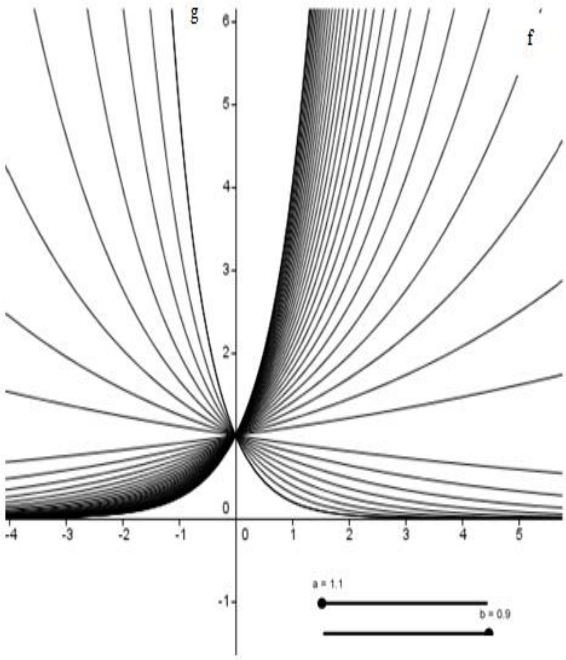



Figura 18: $f(x) = a^x$, $a > 1$ e $g(x) = b^x$, $0 < b < 1$.

## 9. Resultados e conclusões

Comparando os resultados de aprendizagem obtidos com a aplicação dessa proposta, com resultados anteriores quando foi ensinada a função exponencial sem o uso da metodologia de Resolução de Problemas, concluímos que os alunos entenderam melhor o conceito. Tornaram-se alunos investigativos que participavam mais da aula dando suas opiniões, sem medo de errar, até porque perceberam que o erro pode levar a uma resposta correta.

Os alunos discutiam com os colegas quais estratégias a serem adotadas nos problemas. Se algum outro colega apresentava um plano diferente, executavam os planos e discutiam a solução. Foi muito bom ver o entusiasmo dos alunos em sala de aula.

Quanto ao uso do Geogebra eles ficaram eufóricos, porque podia utilizar de seus recursos para desenhar vários gráficos em um mesmo plano cartesiano, mudar a cor dos gráficos para identificá-los melhor. Através dos pontos marcados nos gráficos, e comparações entre eles, perceberam as propriedades de crescente (decrescente). Entenderam melhor o comportamento do gráfico da função exponencial principalmente o fato de se aproximar do eixo *x* e não cortá-lo .

Foi observado que introduzir novas tecnologias faz com que a aula fique dinâmica e auxilia os alunos na resolução de problemas. A construção dos gráficos na resolução do problema 2 foi bem mais rápida no Geogebra comparado com o que acontecia em anos anteriores, em que os alunos tinham que fazer manualmente os gráficos em folha quadriculada. Isso despertou um maior interesse para construir os gráficos e foi possível usá-los para ensinar novos conceitos.

## 10. Considerações Finais

A proposta resultou em uma melhor aprendizagem dos alunos. Nas avaliações foram colocados problemas e foi observado um melhor desempenho após o desenvolvimento da proposta. Mesmo sem a interferência do professor eles mostraram utilizar as etapas de Polya.

Para mim foi empolgante trabalhar com a metodologia de Resolução de Problemas porque consegui fazer com que os alunos tivessem mais interesse pela Matemática. Porém, foi um grande desafio, pois substituir métodos tradicionais por métodos novos leva certo tempo e requer muito estudo e paciência, até porque os alunos também têm certa resistência em aceitar novas metodologias. Entretanto, foi muito gratificante ver também a mudança deles em relação ao aprendizado da Matemática.

A maior dificuldade que tive foi em preparar e ministrar as aulas, porque tive que ter uma mudança de postura, não sendo mais aquela professora que passa os conceitos na lousa e explica, mas sim aquela que constrói com os alunos os conceitos, passando a mediar suas respostas.

Diante da experiência com este trabalho outros conteúdos foram desenvolvidos de maneira análoga. Destacamos o conteúdo das funções trigonométricas desenvolvidas para alunos da 2º série do Ensino Médio com resultados positivos. Com isso, sugerimos que outros professores utilizem da metodologia de Resolução de Problemas, bem como recursos computacionais no ensino de matemática. Isso contribui para que o aluno entenda melhor os conceitos matemáticos.

## 11. Referências

DANTE, L. R. Matemática: Contexto & aplicações. São Paulo: Ática, 2014.

DANTE, L. R. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. São Paulo: Ática. 2000.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADE,A. C. A matemática do ensino médio, volume 1, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos e funções. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. Fundamentos de matemática elementar, 8: limites. São Paulo: Atual, 2005.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo, volume 1, Rio de Janeiro: LTC, 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOVAGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. INBICUDO, M. A. V.(org). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo; Editora da UNESP, cap.12. pp.199-200,1999.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, 1997.29p.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: Caderno do Professor; Matemática, Ensino Médio, 1ª série, volume 2, Secretária da Educação. São Paulo: SE, 2014.

POLYA, G. A arte de resolver problemas, 1995. Disponível em <www.mat.ufrgs.br/~portalsil/resu2.html>. Acesso em: 10/12/2014.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ONUCHIC, L. R. Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/lourdes.pdf>.Acesso em:10/12/2014.

HOWAISS, Inst. A. Dic.H. Língua Portuguesa. Rio de Janeiro; Editora Objetiva, 2001.

HAMILTON, G. Entrevista. Revista Cálculo Matemática para Todos, v. 43, p. 16-23, 2014.