UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: POSSIBILIDADES DIDÁTICAS USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Adilson de Campos

Santa Maria, RS, Brasil

2015

PROFMAT/UFSM, RS CAMPOS, Adilson de Mestre 2015

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: POSSIBILIDADES DIDÁTICAS USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Adilson de Campos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Fusieger
Coorientadora: Prof. Dra. Liane Teresinha Wendling Roos

Santa Maria, RS, Brasil

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Campos, Adilson de
EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: POSSIBILIDADES DIDÁTICAS USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / Adilson de Campos.-2015.
86 p.; 30cm

Orientador: Pedro Fusieger
Coorientador: Liane Teresinha Wendling Roos
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2015

1. Equações Diofantinas Lineares 2. Resolução de Problemas 3. Algoritmo de Euclides I. Fusieger, Pedro II. Roos, Liane Teresinha Wendling III. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: POSSIBILIDADES DIDÁTICAS USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

elaborada por
Adilson de Campos

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Pedro Fusieger, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Liane Teresinha Wendling Roos, Dra. (UFSM)
Coorientadora

Fidelis Bittencourt, Dr. (UFSM)

Fabiane Cristina Hopner Noguti, Dra. (UNIPAMPA)

Santa Maria, 13 de março de 2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo.

Meu agradecimento especial à companheira Aline pela compreensão, carinho e incentivo ao longo da caminhada.

Aos meus pais Lázaro e Maria pelo apoio incondicional.

Ao Nilson Rodrigues e ao Kinho.

Aos meus colegas e professores de mestrado... partilhamos juntos o bom combate e mergulhamos com intensidade no âmago dessa prodigiosa e bela ciência chamada MATEMÁTICA.

Ao professor Pedro, meu orientador, por mostrar o valor da descoberta individual na resolução de problemas.

À professora Liane, minha coorientadora,... depois de cinco anos o nosso reencontro proporcionado novamente pela...MATEMÁTICA.

EPÍGRAFE

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida a sua marca na mente e no caráter.

(POLYA, G. A arte de resolver problemas)

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (Profmat)
Universidade Federal de Santa Maria

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: POSSIBILIDADES DIDÁTICAS USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
AUTOR: ADILSON DE CAMPOS
ORIENTADOR: PEDRO FUSIEGER
COORIENTADORA: LIANE TERESINHA WENDLING ROOS
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 13 de março de 2015.

Este trabalho apresenta uma experimentação pedagógica realizada numa turma de 9ºano do Ensino Fundamental com o objetivo de aferir as possibilidades didático-pedagógicas envolvendo a temática Equações Diofantinas Lineares, tendo como suporte contextual a Resolução de Problemas. Tal aplicação tem o intento de ampliar as concepções dos alunos nos campos da aritmética e da álgebra, dando também uma possibilidade concreta de aplicabilidade do máximo divisor comum de dois números inteiros, tema tão negligenciado ao longo do Ensino Fundamental. Em um nível de Ensino Fundamental, um dos principais veículos que permite trabalhar a iniciativa, a criatividade e o espírito explorador é a Resolução de Problemas. O professor de Matemática tem, dessa forma, uma grande oportunidade de desafiar a curiosidade de seus alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e orientando-os através de indagações incentivadoras, podendo incutir-lhes o gosto pela descoberta e pelo raciocínio independente. Assim, um caminho bastante razoável é preparar o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. O trabalho está organizado em três capítulos. No primeiro capítulo intitulado “A Resolução de Problemas no ensino da Matemática” busca-se uma fundamentação teórica sobre a Didática da Resolução de Problemas no autor húngaro-americano George Polya e Luiz Roberto Dante e, também, são apresentados alguns aspectos da teoria da aprendizagem proposta por Vygotsky. No segundo capítulo intitulado “conceitos de aritmética” são tratados os temas: Máximo Divisor Comum (mdc), Algoritmo de Euclides, Teorema de Bèzout e Equações Diofantinas Lineares. No terceiro e último capítulo intitulado “experimentação pedagógica” é apresentada a experimentação supracitada numa turma de nono ano do Ensino Fundamental. Tal experimentação é baseada na metodologia Engenharia Didática, compreendendo os seguintes momentos: tema e campo de ação; análises prévias associadas às dimensões: epistemológica, didática e cognitiva; análise a priori; experimentação; análise a posteriori e validação da Engenharia Didática.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares. Resolução de Problemas. Algoritmo de Euclides.

ABSTRACT

Master's Dissertation
Professional Master's degree in National network Mathematics (Profmat)
Santa Maria Federal University

LINEAR DIOPHANTINE EQUATIONS: TEACHING POSSIBILITIES THROUGH PROBLEM SOLVING

AUTHOR: ADILSON DE CAMPOS
ADVISOR: PEDRO FUSIEGER
CO ADVISOR: LIANE TERESINHA WENDLING ROOS

Place and Date of presentation: Santa Maria, March 13, 2015.

This work presents an educational experiment carried out in a 9th grade class of elementary school, in order to assess the didactic and pedagogical possibilities involving the Linear Diophantine Equations theme, with the contextual support of Problem Solving. This application intends to expand the students' conceptions in arithmetic and algebra courses, also providing a concrete possibility of applicability of the greatest common divisor of two integers, a very neglected theme throughout the elementary school. In a level of elementary school, one of the main vehicles that allows you to work the initiative, creativity and exploring spirit is through Problem Solving. A Mathematics Teacher has a great opportunity to challenge the curiosity of the students by presenting them problems that are compatible with their knowledge and guiding them through incentive questions and this teacher can also try to input on them a taste for discovery and independent thinking. Thus, a very reasonable way is to prepare the student to deal with new situations, whatever they may be. The paper is organized in three chapters. In the first chapter entitled "Problem Solving in mathematics teaching" a theoretical foundation on the Teaching of Problem Solving is searched based on the Hungarian-American author George Polya and Luiz Roberto Dante and, it also presents some aspects from the learning theory proposed by Vygotsky. In the second chapter entitled "arithmetic concepts" the themes treated are: Greatest Common Divisor (gcd), Euclidean algorithm, Bèzout theorem and Linear Diophantine Equations. In the third and final chapter entitled "pedagogical experimentation" as mentioned above, the experimentation in a class of ninth grade of an elementary school. This experiment is based on the Didactic Engineering methodology, comprising the following stages: theme and scope of action; previous analyzes associated with the dimensions: epistemological, didactic and cognitive; prior analysis; experimentation; aftermost analysis and validation of Didactic Engineering.

Key words: Linear Diophantine Equations. Problem Solving. Euclidean Algorithm.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
CNE/CP	Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno
MEC	Ministério da Educação e Cultura do Brasil
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático

LISTA DE APÊNDICES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conceito atual de capacitação, atualização e desenvolvimento do profissional da educação pressupõe a valorização da prática educativa como ponto de partida para a reflexão teórica que a fundamenta e enriquece.

Em relação ao ensino da Matemática, observa-se um cenário preocupante, onde existe a dificuldade de motivar os estudantes para uma aprendizagem realmente significativa. Aliado a isso existe um discurso que advoga protelar um aprofundamento na aritmética e na álgebra no Ensino Fundamental, sob a justificativa de uma imaturidade intelectual dos estudantes adolescentes para abordar tais temáticas.

Com isso se perde um momento/espaço precioso no Ensino Fundamental: o de realizar tal aprofundamento e possibilitar aos alunos visualizarem a beleza estética, bem como a aplicabilidade dessa prodigiosa ciência chamada Matemática.

A partir dessas reflexões, foi elaborada e se justifica a presente pesquisa, que tem a pretensão de apresentar um estudo realizado com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental do município de Herveiras/RS, com a qual se trabalhou a resolução de problemas. Este trabalho foi desenvolvido ao longo de aproximadamente dois meses e meio, perfazendo 17 encontros (tendo cada encontro a duração de uma hora e meia) durante as aulas de Matemática onde sou o professor titular.

A pesquisa tem seu aporte teórico na Didática da Resolução de Problemas proposta pelo autor húngaro-americano George Polya, compreendendo quatro etapas: 1) compreender o problema; 2) elaborar um plano; 3) executar o plano e 4) fazer o retrospecto ou verificação. Já a metodologia utilizada é a Engenharia Didática.

O objetivo geral deste trabalho foi aferir as possibilidades didático-pedagógicas envolvendo a temática Equações Diofantinas Lineares, tendo como suporte contextual a Resolução de Problemas. E, com isso, ampliar as concepções dos alunos nos campos da aritmética e da álgebra e, também, possibilitar a aplicação do máximo divisor comum de dois números inteiros, tema este de larga importância e que está sendo tão negligenciado ao longo do Ensino Fundamental.

A temática Equação Diofantina Linear não pertence à ementa de conteúdos da Educação Básica brasileira, porém já existem pesquisas realizadas versando sobre as possibilidades didáticas das Equações Diofantinas Lineares com alunos do Ensino Médio. Assim, esta pesquisa apresenta o ineditismo de propor um trabalho com tal temática ainda no Ensino Fundamental.

O presente trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro capítulo versa sobre a Resolução de Problemas no ensino da Matemática, apresentando uma fundamentação teórica sobre a Didática da Resolução de Problemas principalmente no autor húngaro-americano George Polya e também no brasileiro Luiz Roberto Dante. Neste capítulo são apresentados, de forma resumida, alguns aspectos da teoria da aprendizagem proposta pelo pensador e psicólogo bielo-russo Lev Semenovich Vygotsky. O segundo capítulo versa sobre alguns conceitos aritméticos apresentados na experimentação pedagógica: Máximo Divisor Comum (mdc), Algoritmo de Euclides, Teorema de Bézout e Equações Diofantinas Lineares.

No terceiro e último capítulo é apresentada a experimentação pedagógica propriamente dita. Tal experimentação segue os passos de uma metodologia francesa chamada Engenharia Didática.

Dessa forma, pela pesquisa e fundamentação teórica realizada, bem como pelo trabalho prático de experimentação realizado com os alunos, pretende-se oferecer algumas considerações sobre a prática pedagógica reflexiva e fonte de pesquisa tendo por objetivo maior o aprimoramento de tais práticas e o ensino significativo da Matemática.

1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1997, as finalidades do ensino de Matemática indicam, como objetivos do Ensino Fundamental, resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis.

Dessa forma, o ensino da Matemática tem a possibilidade de instrumentalizar o estudante, de modo a possibilitar a sua efetiva atuação no mundo em que vive, sendo capaz de analisar, sintetizar, comparar, ordenar e abstrair.

Existe um questionamento muito pertinente a cerca dessa instrumentalização que o ensino da Matemática deve proporcionar: considerando o frenético avanço da tecnologia, que torna obsoletas coisas praticamente recentes e as mudanças rápidas que ocorrem na estrutura social, quais seriam as habilidades, conceitos e algoritmos matemáticos úteis para preparar um estudante para a vida futura?

Na tentativa de responder a tal questão, pode-se ter claramente que o ensino baseado apenas no treino de determinado algoritmo matemático e conceitos isolados é praticamente inócuo do ponto de vista da preparação do educando para o futuro. Pois o futuro reserva situações novas e desafios novos, que irão requerer do estudante uma postura crítica e criativa.

Assim é importante preparar o estudante para resolver situações novas, trabalhando com este a iniciativa, criatividade, espírito explorador e habilidades de resolver problemas por si próprio.

> Um dos principais objetivos no ensino da Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhes situações problema que o envolvem, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las. (DANTE,1999,p. 11).

O ser humano possui um interesse inato para resolver problemas e chegar a uma solução plausível, tanto que as maiores descobertas científicas surgiram da necessidade de solucionar um problema. Alguns exemplos disso são: o desenvolvimento de pontes altamente resistentes em face ao problema de resistir a terremotos; a invenção do forno micro-ondas, diante da necessidade de praticidade e a otimização do uso do oxigênio por astronautas no espaço; a previsão do tempo como uma necessidade para a agricultura; dentre outros.

Mas muitas vezes se soluciona um problema apenas pela volúpia encontrada na invenção e na descoberta. Um bom exemplo que corrobora isso é o espaço dedicado pelas revistas e jornais às palavras cruzadas e outros enigmas, onde se revela que as pessoas passam algum tempo solucionando situações problema sem uma aplicação prática.

> Por trás do desejo de resolver este ou aquele problema que não resulta em nenhuma vantagem material, pode haver uma curiosidade mais profunda, um desejo de compreender os meios e as maneiras, as motivações e os procedimentos da resolução. (POLYA, 1978, prefácio).

O professor de Matemática tem, dessa forma, uma grande oportunidade de desafiar a curiosidade de seus estudantes, apresentando-lhes problema compatíveis com os conhecimentos destes e orientando-os através de indagações incentivadoras, podendo assim incutir-lhes o gosto pela descoberta e pelo raciocínio independente.

Agora será apresentado e discutido alguns termos importantes envolvidos na temática Resolução de Problemas.

1.1 O que é um problema?

Um problema, segundo Dante (1999), é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. E esta questão não se dá de maneira direta através da aplicação de uma fórmula ou regra específica. Um exemplo:

- Você está indo para o trabalho de bicicleta, quando percebe que um dos pneus acabou de furar. E agora, qual a saída para não chegar atrasado no trabalho?

Dessa forma, se tem um objetivo bem claro: não chegar atrasado ao trabalho. E existem várias maneiras de atingi-lo, como por exemplo:

a) procurar uma borracharia próxima, reparar o problema o mais rápido possível e continuar a viagem;
b) deixar a bicicleta em um local conhecido e seguro, continuando a viagem de ônibus ou tomando uma carona;
c) rodar com o pneu furado mesmo avariando o aro.

É bem provável que um destes métodos possa ajudar a resolver problemas semelhantes. Ou então é possível selecionar um desses métodos como mais eficiente.

Mas, caso o infortúnio de furar o pneu, em outro dia, novamente aconteça, essa situação já deixa de ser considerada uma situação- problema. Pois, neste caso, apenas se aplicará um modelo já testado anteriormente e para cuja situação o ciclista já está preparado.

Já um problema matemático, segundo Dante (1999), é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais definem um problema matemático como uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la.

No trabalho com este tipo de problema em sala de aula é importante que o professor auxilie o estudante, de modo que a este caiba uma boa parcela de trabalho. Assim, o professor auxilia nem demais, nem de menos, mas de tal modo a ajudar o estudante com naturalidade, proporcionando uma efetiva construção do conhecimento por parte deste.

> Saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou sua construção. Quando entro em uma sala de aula devo estar sendo um ser aberto às indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, às suas inibições; um ser crítico e enriquecedor, inquieto em face da tarefa que tenho – a de ensinar e não a de transferir conhecimento. (FREIRE, 1996, p. 47).

Uma relação pode ser estabelecida entre o trabalho docente na resolução de problemas matemáticos e a seguinte frase atribuída ao religioso brasileiro Dom Hélder Câmara: “É ótimo que tua mão ajude no voo, mas que jamais tome o lugar das asas”. Dessa forma, cabe ao professor auxiliar o estudante, mostrando caminhos e encorajando-o, mas nunca ajudando demais e dessa forma tirando-lhe o protagonismo e a criatividade.

Todo problema deve ser resolvido pelos estudantes. O professor deve incutir-lhes algum interesse por problemas e proporcionando-lhes muitas oportunidades para praticar, pois um nível de dificuldade muito além do razoável pode levar os alunos à frustrações e desânimos irreversíveis.

Assim, é importante o reconhecimento pelo professor dos vários tipos de problemas que são propostos em sala de aula, descobrindo a abrangência, especificidade e pertinência que cada tipo possui.

Para Dante (1999), os vários tipos de problemas podem ser classificados em:

a) exercícios de reconhecimento: tem por objetivo fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma propriedade ou definição;

b) exercício de algoritmo: seu objetivo é treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores;

c) problemas padrão: para solucioná-lo basta aplicar de forma direta um ou mais algoritmo já aprendidos e não exige qualquer estratégia, pois a solução encontra-se no próprio enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática. De um modo geral, esses problemas não desafiam os alunos e nem desenvolvem neles a criatividade e o espírito explorador;

d) problemas processo ou heurístico: estes problemas, na sua solução, envolvem operações que não estão contidas no enunciado. Exigem do aluno o pensar crítico para arquitetar um plano de ação, uma estratégia, tendo em vista a resolução.

Os problemas heurísticos aguçam a curiosidade do estudante, permitindo que este desenvolva criatividade, iniciativa, trabalho em equipe e espírito explorador. Também é na descoberta que o estudante realiza nestes problemas, que adquire confiança em suas capacidades e se motiva a continuar aprofundando seus conhecimentos.

e) problemas de aplicação: retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da matemática para se chegar à solução.

Estes problemas exigem um rigoroso levantamento de dados, que devem ser cuidadosamente organizados. E através de técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar esta situação real, aproximando-a de um modelo matemático.

> No entanto, o ponto que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da matemática á a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização de técnicas e resultados conhecidos em outro contexto, novo. Isto é, a transferência do aprendizado resultante de uma certa situação para uma situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da matemática, e talvez o objetivo maior de seu ensino. (D'AMBRÓSIO, 1986, p.4).

O interessante do trabalho com este tipo de problema é a possibilidade que o mesmo permite para se realizar um trabalho interdisciplinar, usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a matemática.

f) problemas de quebra-cabeça: são problemas que constituem desafios para os estudantes e fazem parte da chamada Matemática Recreativa.

1.2 Como se resolve um problema?

Polya (1978), educador e escritor húngaro-americano, (considerado por muitos como o "pai" da Resolução de Problemas por ter dado substancial contribuição na teorização do tema, e sua influência no processo de ensino-aprendizagem), desenvolveu um esquema compreendendo quatro etapas principais para a resolução de um problema:

a) compreender o problema;

b) elaborar um plano;

c) executar o plano;

d) fazer a retrospectiva ou verificação.

Outros esquemas sugeridos, na verdade, tratam-se de variações do esquema de Polya. Este esquema, por sua vez, não deve ser compreendido como um algoritmo para a solução de problemas, mas como um meio de orientar o solucionador durante o processo, pois a solução de um problema é de uma complexidade e riqueza, que não se limita a seguir instruções passo a passo que levarão à solução.

Apresenta-se agora, de forma detalhada, as 4 etapas sugeridas por Polya para a solução de um problema:

1ª) Compreensão do problema.

É uma bobagem responder a uma pergunta que não tenha sido entendida. Por isso, primeiramente, o estudante precisa compreender e também desejar resolver o problema.

- O que o problema pede (incógnita)?

-Quais são os dados do problema?

- Qual é a condicionante do problema, ou seja, a relação existente entre a incógnita e os dados?

- É possível satisfazer a condicionante?

- A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

2ª) Estabelecimento de um plano.

Nesta etapa, busca-se um plano de ação para resolver o problema. Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita.

O caminho que se percorre desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso.

- Você já resolveu um problema como este antes?

- Você conhece um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?

- É possível resolver o problema por partes?

- É possível traçar caminhos em busca da solução?

3ª) Execução do plano.

Nesta etapa é necessário executar o plano elaborado, tendo o cuidado de verificar cada passo dado. Executar o plano é mais fácil, sendo necessário ter paciência e convicção da correlação de cada passo.

4ª) Retrospecto ou verificação.

Nesta última etapa, se faz a análise da solução obtida e também a verificação do resultado.

- Examine se a solução obtida está correta.

- Existe outra maneira de resolver o problema?

- É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

É no retrospecto ou verificação que, considerando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, o estudante poderá consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas.

> Um bom professor precisa conhecer e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer solução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. (POLYA, 1978, prefácio).

A resolução de situações problema deve fazer com que o aluno seja desafiado a refletir, discutir, trabalhar em grupo, elaborar hipóteses e procedimentos, extrapolar as aplicações e enfrentar situações novas que possibilitem o raciocínio e a ação.

Mas isso somente será possível trabalhando com problemas que realmente tenham significado para o aluno e que estejam dentro de suas possibilidades cognitivas.

> Parece então que a aprendizagem de Matemática e a resolução de problemas, se não estão, diretamente relacionadas com a solução de problemas práticos, não são facilmente transmitidas para a prática. Uma primeira sugestão que surge é então a de oferecer ao aluno a oportunidade de resolver problemas em contextos práticos. Isso poderia contribuir para uma melhor compreensão e para proporcionar a descoberta de estratégias novas e mais econômicas. (CARRAHER, 1991, p. 82 e 83).

Com o objetivo de se trabalhar o ensino da matemática escolar numa perspectiva da Resolução de Problemas é salutar compreender como o estudante é capaz de construir o seu conhecimento, ou seja, como estão relacionados os mecanismos subjacentes ao ato de aprender numa perspectiva da interação. Para isso busca-se um embasamento na teoria da aprendizagem proposta por Vygotsky.

1.3 Aspectos relevantes da teoria da aprendizagem de Vygotsky

Com o propósito de entender o processo de construção do conhecimento, busca-se um suporte na teoria da aprendizagem proposta pelo pensador e psicólogo bielo-russo Lev Semenovich Vygotsky.

Vygotsky foi um pensador audacioso, ao mesmo tempo que tecia críticas às correntes idealistas e mecanicistas, tentava superar esta situação através da aplicação dos métodos e princípios do materialismo dialético. Pretendia construir uma "nova psicologia", uma teoria marxista do funcionamento intelectual humano. Essa abordagem deveria conter:

> [...] a identificação dos mecanismos cerebrais subjacentes a uma determinada função: a explicação detalhada da sua história ao longo do desenvolvimento, com o objetivo de estabelecer as relações entre formas simples e complexas daquilo que apresentava ser o mesmo comportamento; e, de forma importante, deveria incluir a especificação do contexto social em que se deu o desenvolvimento de comportamento. (COLE & SCRIBNER, 1984, p. 6).

Seu projeto, segundo Teresa Rego (1995) visava articular informações dos diferentes componentes que integram os processos mentais: neurológico, psicológico, linguístico e cultural. Essa teoria histórico-cultural do psiquismo tem como objetivo principal caracterizar os aspectos tipicamente humanos do comportamento e elaborar hipóteses de como essas características se formam ao longo da história humana e de como se desenvolvem durante a vida do indivíduo.

As funções psicológicas especificamente humanas têm origem nas relações que o indivíduo estabelece no seu contexto social e cultural. Assim, o desenvolvimento mental humano não é dado a priori, nem é passivo. Para se humanizar, o indivíduo precisa crescer num ambiente social e interagir com as pessoas.

Através das intervenções constantes do adulto, os processos mais complexos começam a se formar. O desenvolvimento do psiquismo humano é sempre mediado pelo outro, que indica, delimita e atribui significados à realidade, e as conquistas individuais resultam, portanto, de um processo compartilhado.

Teresa Rego (1995) diz que o desenvolvimento pleno do ser humano depende do aprendizado que realiza num determinado grupo cultural, a partir da integração com outros indivíduos da sua espécie. Nessa perspectiva, é o aprendizado que possibilita o processo de desenvolvimento. Para Vygotsky (1984) o aprendizado pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que as cercam.

Vygotsky (1984) identifica dois níveis de desenvolvimento no indivíduo: um se refere às conquistas já efetivadas, que ele chama de nível de desenvolvimento real, ou efetivo, e o outro, o nível de desenvolvimento potencial, que se relaciona com as capacidades em vias de serem construídas.

A distância entre aquilo que a criança é capaz de realizar sozinha (nível de desenvolvimento real) e aquilo que ela faz em colaboração com os outros elementos de seu grupo social (nível de desenvolvimento potencial) forma o que Vygotsky chamou de zona de desenvolvimento proximal.

O bom ensino, recomenda Teresa Rego, é o que incide na zona de desenvolvimento proximal, pois ensinar o que a criança já sabe é pouco desafiador e ir além do que ela pode aprender é ineficaz, o ideal é partir do que ela domina para ampliar seu conhecimento.

> [...] todas as pesquisas experienciais sobre a natureza psicológica dos processos de aprendizagem da aritmética, da escrita, das ciências naturais e de outras matérias na escola elementar demonstram que o seu fundamento, o eixo em torno do qual se montam, é uma nova formação que produz em idade escolar. Estes processos estão todos ligados ao desenvolvimento do sistema nervoso central. [...]. Cada matéria escolar tem uma relação própria com o seu curso do desenvolvimento da criança, relação que muda com a passagem da criança de uma etapa para outra. Isto obriga a reexaminar todo o problema das disciplinas formais, ou seja, do papel da importância de cada matéria do posterior desenvolvimento psicointelectual geral da criança. (REGO, 1988, p.116 – 117).

O aprendizado de um modo geral e o aprendizado escolar em particular, não só possibilitam como orientam e estimulam processos de desenvolvimento.

2 CONCEITOS DE ARITMÉTICA

Segundo Eves (2004) os livros VII, VIII e IX dos Elementos de Euclides, que no total têm cento e duas proposições, tratam da teoria elementar dos números. O livro VII começa com o processo (conhecido atualmente como Algoritmo de Euclides) para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois ou mais números são primos entre si, ou seja, se possuem o máximo divisor comum igual a um. Encontra-se nele também uma exposição da teoria das proporções numéricas ou pitagóricas e estabelecem-se ainda muitas propriedades numéricas.

2.1 Máximo Divisor Comum (mdc)

Definição 1: Dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito um divisor comum de a e b se $d \mid a$ e $d \mid b$.

A notação $d \mid a$ significa que d divide a ou a é um múltiplo de d.

Assim tem-se, a título de exemplo, que os números inteiros ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 e ± 12 são os divisores comuns de12 e 24.

Segundo Hefez (2013) a definição dada a seguir é essencialmente a definição dada por Euclides nos Elementos e constitui um dos pilares da sua aritmética organizada nos livros VII, VIII e IX.

Definição 2: Um número inteiro $d \geq 0$ é chamado de máximo divisor comum (mdc) de a e b, se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de a e b;

ii) Se c é um divisor comum de a e b, então $c \mid d$.

Por exemplo, o máximo divisor comum de 12 e 24 é 12.

A condição ii) implica que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números (a,b), então, $d \mid d'$ e $d' \mid d$. De fato, $d' \mid a$ e $d' \mid b$ e daí, como d é um mdc de (a,b), pela condição ii), resulta que $d \mid d'$. O mesmo raciocínio implica $d' \mid d$. Então existem x_1, x_2 inteiros tais que $d = x_1 . d'$ e $d' = x_2 .d$. Portanto, $d = x_1 . d' = x_1 . x_2 .d$

e daí segue $x_1 . x_2 = 1$ e como x_1, x_2 são inteiros e $d \geq 0$ decorre que $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ e portanto, d = d'. Denota-se o máximo divisor comum dos inteiros a e b como (a,b).Como o mdc de a e b independe da ordem em que a e b são tomados, tem-se que (a,b) = (b,a).

Pode-se ver que em alguns casos particulares é fácil verificar a existência do mdc. Sendo a um número inteiro, é claro que pela definição 2, $(0,a) = |a|$, $(1,a) = 1$ e $(a,a) = |a|$.

Para todo c inteiro, tem-se que $a | c \Leftrightarrow (a,c) = |a|$. Pois, se $a | c$, temos que $|a|$ é um divisor comum de a e c, e se b é um divisor comum de a e c, então b divide $|a|$, o que mostra que $|a| = (a,c)$. Reciprocamente, se $(a,c) = |a|$, segue-se que $|a|$ divide c, logo $a | c$.

O máximo divisor comum de a e b (a e b inteiros não nulos) sempre existe. Porém deve-se perceber a sutiliza da sua demonstração.

Seja $d > 0$ um mdc de a e b, (a e b não nulos), supõe-se que exista um inteiro c, tal que c seja um divisor qualquer desses números, então $|c|$ divide d e portanto, $c \leq |c| \leq d$. Isso mostra que o máximo divisor comum de dois números, não ambos nulos, quando existe, é o maior dentre todos os divisores comuns desses números.

Costumeiramente no Ensino Fundamental o mdc de dois inteiros a e b (não ambos nulos) é definido dessa forma, ou seja, como sendo o maior elemento dentre todos os divisores comuns desses números. Porém, além de não ser nada computacional, a definição dada dessa maneira não garante de forma automática a validade da propriedade (ii) da definição 2 de mdc, e justamente é essa propriedade que garantirá a validade de alguns resultados importantes.

Antes de prosseguir com a demonstração da existência do mdc de dois números inteiros não ambos nulos, vale uma observação: dados $a, b \in Z$, se existir (a,b), então $(a,b) = (-a,b) = (a,-b) = (-a,-b)$. Ou seja, no cálculo do mdc de dois números inteiros, pode-se sempre supô-los não negativos.

Para Hefez (2013), Euclides fez uso do lema a seguir na construção da prova da existência do máximo divisor comum de dois números não negativos.

Lema 3: Sejam $a, b, n \in Z$. Se existe $(a, b - n.a)$, então, (a,b) existe e

$$(a,b) = (a, b - n.a).$$

Demonstração: Considere $d = (a, b - n.a)$. Como $d | a$ e $d | (b - n.a)$, isso implica que d divide $b = b - na + na$. Logo d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um múltiplo comum de a e b – na. Mas c divide d. De fato, como c divide a e b, existe x_1 e x_2 inteiros tais que $a = x_1.c$, $b = x_2.c$. Então, $b - n.a = x_2.c -$

$n.x._1 c = (x_2 - n.\ x_1).c$, isto é, c divide b – n.a. Portanto, c é divisor comum de a e b – n.a. Logo, como d = (a, b – n.a), c divide d, mostrando, portanto, que d = (a,b).

O Lema 3 é absolutamente eficaz e computacional para calcular o máximo divisor comum e também fundamental para se estabelecer o Algoritmo de Euclides.

2.2 Algoritmo de Euclides

De acordo com Hefez (2013), o método conhecido como Algoritmo de Euclides é um verdadeiro primor da Aritmética e muito pouco se conseguiu aperfeiçoá-lo desde sua prova construtiva dada por Euclides. Apresenta-se a seguir esta prova seguindo a metodologia apresentada por Hefez (2013).

Dados a, b $\in$ N, pode-se supor sem perda de generalidade b $\leq$ a. Se b = 1 ou b = a, ou ainda $b \mid a$, já foi visto que (a,b) = a. Suponha, então, que 1 < b < a e que b não seja um divisor de a. Logo, pela divisão euclidiana, pode-se escrever

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b.$$

Tem-se agora duas possibilidades:

a) $r_1 \mid b$. Em tal caso, $r_1 = (b, r_1)$ e, pelo Lema 3, tem-se que

$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1 b) = (b,a) = (a,b)$ e o algoritmo termina.

b) r_1 não divide b. Em tal caso, pode-se efetuar a divisão de b por r_1, obtendo

$b = r_1 q_2 + r_2$, com $0 < r_2 < r_1$.

Novamente, tem-se duas possibilidades:

a’) $r_2 \mid r_1$. Nesse caso, $r_2 = (r_1, r_2)$ e novamente, pelo Lema 3,

$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, b - q_2 r_1) = (r_1, b) = (a - q_1 b, b) = (a,b)$, e deve-se parar, pois termina o algoritmo.

b’) r_2 não divide r_1. Nesse caso, é possível efetuar a divisão euclidiana de r_1 por r_2, obtendo $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, com $o < r_3 < r_2$.

O procedimento supracitado é realizado um número finito de vezes. O que sempre acontece, pois, caso contrário, se teria uma sequência de números naturais $b > r_1 > r_2 > \ldots$ que não possui menor elemento, mas isso é impossível pelo princípio da Boa Ordenação dos números naturais. Logo, para algum n $\in$ N, temos que $r_n \mid r_{n-1}$. o que implica que $(a,b) = r_n$.

O Algoritmo de Euclides pode ser resumido e realizado de forma prática como segue:

Inicialmente, efetua-se a divisão a = $bq_1 + r_1$ e coloca-se estes números na seguinte tabela:

	q_1
a	b
r_1	

Dando continuidade, efetua-se a divisão b = $r_1 q_2 + r_2$, colocando os números envolvidos na seguinte tabela;

	q_1	q_2
a	b	r_1
r_1	r_2	

Enquanto for possível, prossegue-se com o algoritmo (preenchendo a tabela) até encontrar o máximo divisor comum.

	q_1	q_2	...	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n = (a,b)
r_1	r_2	r_3	...	r_n		

Para exemplificar: calcular o mdc de 104 e 280.

	2	1	2	4
280	104	72	32	8
72	32	8	0	

De modo que (104,280) = 8.

Note que o algoritmo de Euclides fornece:

8 = 72 – 2.32

32 = 104 – 1.72

72= 280 – 2.104

Com isso, pode-se escrever:

8 = 72 – 2.32 = 280 – 2.104 – 2. (104 – 1.72) = 280 – 2.104 – 2.104 + 2. (104 – 1.72) =
= 280 – 2.104 – 2.104 + 2.280 – 4. 104 = 3. 280 – 8.104

Assim, por meio do Algoritmo de Euclides, é possível escrever 8 = (104,280) como um múltiplo de 104 mais um múltiplo de 280, ou seja, representar o mdc de 104 e 280 como uma combinação linear de 104 e 280.

Este fato é válido de forma geral, ou seja, é possível expressar (a,b) na forma ma+nb, com m,n $\in$ Z, resultado conhecido como Algoritmo de Euclides estendido ou também como Teorema de Bézout.

2.3 Teorema de Bézout

Teorema de Bézout: O mdc de dois números inteiros (não nulos) sempre pode ser escrito como uma combinação linear inteira dos mesmos. Simbolicamente: dados a,b $\in Z^*$, existem m,n $\in$ Z tais que (a,b) = ma + nb.

Demonstração: Uma demonstração bastante direta e interessante é apresentada por Ripoll (2011): do Algoritmo de Euclides para o mdc, é imediato que cada um dos restos envolvidos, do primeiro ao último, seja uma combinação linear de a e b. Assim:

$a = bq_1 + r_1 = r_0 q_1 + r_1 \rightarrow r_1 = a - bq_1 = M_1 a + N_1 b$

$r_0 = r_1 q_2 + r_2 \rightarrow r_2 = r_0 - r_1 q_2 = b - (M_1 a + N_1 b)\, q_2 = M_2 a + N_2 b$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \rightarrow r_3 = r_1 - r_2 q_3 = M_1 a + N_1 b - (M_2 a + N_2 b) q_3 = M_3 a + N_3 b$

...

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \rightarrow r_n = r_{n-2} - r_{n-1} q_n$

$$= M_{n-2} a + N_{n-2} - (M_{n-1} a + N_{n-1} b) q_n = M_n a + N_n b.$$

Uma observação importante é que na expressão (a,b) = ma + nb os coeficientes inteiros, m e n, não são únicos. Com efeito, existem infinitas possibilidades para eles:

ma + nb = (m + b) a + (n - a) b = (m + 2b) a + (n - 2a) b = ...

2.4 Equações Diofantinas Lineares

Uma série de problemas de aritmética são modelados, dentro do conjunto dos números inteiros, por equações do tipo $aX + bY = c$, onde $a,b,c \in Z$.

Estas equações são chamadas de equações diofantinas em homenagem ao matemático Diofanto de Alexandria. Porém, conforme Eves (2004), Diofanto não foi o primeiro a trabalhar com este tipo de equações. Contudo, pode ter sido ele o primeiro a dar os primeiros passos na direção de uma notação algébrica.

> Diofanto de Alexandria teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram à teoria dos números [...]. Além do fato de que sua carreira floresceu em Alexandria, nada mais de certo se sabe sobre ele [..].(EVES, 2004, p.207).

Na Antologia grega, existe um epigrama que dá alguns detalhes sobre a vida de Diofanto.

> Quase tudo que sabemos sobre a vida pessoal de Diofanto está contido no seguinte sumário de um epitáfio que aparece na Antologia Grega: "Diofanto passou 1/6 de sua vida como criança, 1/12 como adolescente e mais 1/7 na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai." (EVES, 2004, p.225).

As equações diofantinas nem sempre possuem solução. Por exemplo, considerando o conjunto dos números inteiros como universo, a equação $2X + 4Y = 15$ não possui solução. Basta analisar a paridade da soma $(2X + 4Y)$ e o termo independente 15. De modo que a soma $(2X+4Y)$ é par, ao passo que 15 é um número ímpar.

Então, que condição ou condições uma equação diofantina precisa cumprir para que tenha solução? Caso possua solução, ela é única ou não? Como encontrá-la(s)?

Para responder a tais questões, primeiro serão enunciados e provados alguns resultados.

Se tomarmos $a,b \in Z$ (sendo a e b não simultaneamente nulos), define-se o conjunto $I(a,b) =\{xa+yb;\ x,y \in Z\}$ e utiliza-se a seguinte notação $dZ = \{ld;\ l \in Z\}$.

Teorema 4: Sejam a,b $\in$Z, não ambos nulos. Se d = min I(a,b) $\cap$N, então:

i) d é o mdc de a e b;

ii) I(a,b) = dZ

A demonstração desse importante teorema é apresentada a seguir:

> (i) Suponha que c divida a e b, logo c divide todos os números naturais da forma xa+yb. Portanto, c divide todos os elementos de I(a,b), e, consequentemente, c divide d. Vamos agora mostrar que d divide todos os elementos de I(a,b). Seja z $\in$ I(a,b) e suponha, por absurdo, que d não divida z. Logo pela divisão euclidiana, z = dq + r, com 0 < r < d. (I) Como z = xa + yb e d = ma + nb, para alguns x,y,n,m $\in$Z, segue-se de (I) que r = (x-qm)a + (y-qn)b $\in$ I(a,b)$\cap$ N, o que é um absurdo, pois d = min I(a,b)$\cap$N e r < d. Em particular, d divide a e d divide b. Assim provamos que d é o mdc de a e b. (ii) Dado que todo elemento de I(a,b) é divisível por d, temos que I(a,b) $\subset$dZ. Por outro lado, para todo ld $\in$ Z, temos que ld = l(ma+nb) = (lm)a + (ln)b $\in$I(a,b) e, portanto, dZ $\subset$ I(a,b). Em conclusão I(a,b) = dZ.(HEFEZ, 2013, p.94).

Voltando às equações diofantinas, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 5: A equação diofantina aX + bY = c, onde a,b,c $\in$ Z, admite solução em Z se, e somente se, (a,b)$\mid$ c.

Demonstração: fazendo uso do Teorema 4, tem-se que I(a,b) = { ma + nb; m,n $\in$Z} = (a,b)Z. Assim, a equação aX + bY = c possui solução se, somente se, c $\in$ I(a,b), equivalendo a c $\in$ (a,b)Z, de modo que (a,b)$\mid$ c.

A partir da equação aX + bY = c (I) (com a,b,c $\in$ Z e a$\neq$0 ou b $\neq$ 0) e (a,b)$\mid$ c, pode-se obter uma equação equivalente, dividindo a equação original (I) por (a,b). Assim, obtem-se a equação a'X + b'Y = c'(II), onde a' = $\frac{a}{(a,b)}$, b' = $\frac{b}{(a,b)}$ e c' = $\frac{c}{(a,b)}$.

Convém notar que (a',b') = 1 e pode-se fazer uma restrição ao estudo das equações do tipo aX + bY = c , onde (a,b) = 1.

As equações diofantinas, onde os coeficientes das incógnitas são primos entre si, ou seja, considerando a equação aX + bY = c com (a,b)=1, têm infinitas soluções que podem ser determinadas a partir de uma solução particular qualquer.

A proposição a seguir relaciona as soluções gerais de uma equação diofantina com uma solução particular qualquer.

Proposição 6: Considerando x_0, y_0 uma solução particular da equação diofantina $aX + bY = c$, onde $(a,b) = 1$. As soluções gerais $x,y \in Z$ da equação são $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$, $t \in Z$.

Demonstração: Por hipótese, tem-se que x_0, y_0 formam uma solução particular de $aX + bY = c$. Assim, $a x_0 + b y_0 = ax + by = c$, isso implica que $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ (I).

Também por hipótese, tem-se que $(a,b) = 1$, assim, obrigatoriamente, $b \mid (x - x_0)$, de modo que, $x - x_0 = b.t$ ($t \in Z$) e, finalmente, isolando x, segue que $x = x_0 + b.t$.

Agora, substituindo $x - x_0 = b.t$ na expressão (I), segue que $y_0 - y = a.t$ ($t \in Z$) e, finalmente, isolando y, encontra-se $y = y_0 - a.t$.

O inteiro t também é chamado de parâmetro, sendo que para cada valor inteiro de t, tem-se uma solução distinta para a equação diofantina.

Para o caso em que a equação $aX + bY = c$ com $(a,b)=1$, pode-se facilmente encontrar um método resolutivo para tal equação. Basta, por meio do Teorema de Bézout, expressar $(a,b)=1$ como uma combinação linear de a e b, pois o Teorema de Bézout garante que existem $m,n \in Z$, tais que $ma + nb = (a,b) = 1$. Agora, multiplica-se ambos os membros da igualdade anterior por c, obtendo $cma + cnb = c$. Assim, $x_0 = cm$ e $y_0 = cn$ é uma solução particular, por meio da qual se pode escrever a solução geral.

Usando toda essa teoria, resolver a equação diofantina $90X + 28Y = 22$ no conjunto dos números inteiros.

<u>Solução:</u>

Determina-se (90,28) e verifica-se a equação tem ou não solução.

Por meio do Algoritmo de Euclides, facilmente se chega que o máximo divisor comum de 90 e 28 é 2, pela notação adotada $(90,28) = 2$, e como $2 \mid 22$, tem-se que a equação possui solução. Pode-se simplificar a equação original, dividindo-a pelo máximo divisor comum de

90 e 28, ou seja por 2, uma vez que (90,28)=2, obtendo assim a equação equivalente 45X + 14 Y = 11. Já se sabe então que (45,14)=1. Agora aplicando o Algoritmo de Euclides, vem:

	3	4	1
45	14	3	2
3	2	1	

O Algoritmo corrobora que (45,14) =1. Usando o resultado do Teorema de Bézout, pode-se escrever 5.45 – 16. 14 = 1, multiplicando ambos os membros da igualdade por 11, tem-se 55. 45 – 176. 14 = 11, de modo $x_0 = 55$ e $y_0 = -176$ é uma solução particular.

Finalmente, por meio da proposição 6, escreve-se a solução geral:

$$x = 55 + 14.t \quad \text{e } y = -176 - 45.t, \text{ com } t \in Z.$$

3 EXPERIMENTAÇÃO PEDAGÓGICA

3.1 O tema e o campo de ação

Durante as disciplinas do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, se teve a oportunidade de rever de uma forma aprofundada importantes conceitos da Matemática básica nas disciplinas de MA11, MA12, MA13 e MA14 (Números e Funções Reais, Matemática Discreta, Geometria e Aritmética, respectivamente). De modo especial, pode-se aprofundar os estudos sobre Equações Diofantinas Lineares na disciplina de Aritmética.

A temática Equações Diofantinas Lineares foi instigante durante este período de estudos e vislumbrou-se algum trabalho prático junto aos alunos do Ensino Fundamental. Tal proposta vai ao encontro da Resolução número 1 do Conselho Nacional de Educação – Conselho Pleno (CNE/CP1), de 18 de fevereiro de 2002, que apresenta as Diretrizes Curriculares para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior. Uma das novidades da referida resolução consiste na especial valorização dada à prática, definida como lugar, foco e fonte de pesquisa. Ou seja, ocorre a ênfase na necessidade de se associar o preparo do professor ao aprimoramento das práticas investigativas.

O conhecimento dos processos de investigação possibilita o aperfeiçoamento das práticas pedagógicas, desenvolvidas com ênfase na observação e reflexão, visando uma atuação contextualizada.

Tal proposta também é respaldada pelo que propõe o Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, que é dirigido para professores em exercício. O programa do mestrado prevê um trabalho final de pesquisa, de preferência aplicada, com desenvolvimento de processos de natureza educacional, visando melhorias no ensino da Matemática. Havendo assim, a oportunidade/possibilidade para que o professor possa produzir conhecimento novo e reprodutível, tomando, como foco e também alvo, seu próprio trabalho docente, numa perspectiva reflexiva.

Dessa forma, a temática escolhida para a aplicação foi Equações Diofantinas Lineares em uma turma de treze alunos do 9º ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso, situada na zona rural do município de Herveiras/RS. Os alunos da referida turma têm entre 14 e 15 anos de idade e a aplicação se deu nas aulas de Matemática, onde o professor Adilson de Campos é titular da turma no componente curricular Matemática.

Como se trata de uma turma de Ensino Fundamental, a aplicação foi de forma contextualizada tendo como suporte a Resolução de Problemas no ensino da Matemática, utilizando como referência as sugestões de Polya (1978): a) entender o problema; b) elaborar um plano; c) executar o plano e d) fazer o retrospecto ou a verificação.

No entanto, como justificar a importância do ensino de Equações Diofantinas Lineares, para alunos do Ensino Fundamental, tendo como suporte contextual a Resolução de Problemas? Para responder tal questão, se fez a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a Matemática do Ensino Fundamental, onde o mesmo pontua a cerca dos objetivos do Ensino Fundamental.

> Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis. (BRASIL,1997,p.51).

Agora falando de Equações Diofantinas Lineares, se observa que o referido assunto é extremamente rico em situações que permitem o aprofundamento da linguagem aritmética e algébrica, permitindo que os alunos possam perceber os recursos otimizadores de tais linguagens.

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e reconhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL,1997,p.55).

De modo que o trabalho com Equações Diofantinas Lineares no Ensino Fundamental pode representar uma forma de se ampliar o trato algébrico/aritmético dos alunos, representando problemas por meio de equações e também o fato de se exprimir a solução geral de uma Equação Diofantina Linear a partir de um parâmetro inteiro.

3.2 Análises prévias e o Ensino habitual de Aritmética/Álgebra no Ensino Fundamental

As análises prévias, também chamadas de análises preliminares são a primeira etapa da Engenharia Didática e estão organizadas com o objetivo de analisar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo em questão, para em seguida propor uma intervenção que implique na modificação para melhor da sala de aula usual.

> A análise é feita para esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções. A

> tradição é vista como um estado de equilíbrio do funcionamento de um sistema dinâmico, que tem falhas. A reflexão sobre essas falhas torna-se o ponto de partida para determinar condições possíveis de um ponto de funcionamento mais satisfatório. (CARNEIRO, 2005, p.89).

Esta análise deve incluir três dimensões distintas: 1) dimensão epistemológica (associada às características do saber em jogo); 2) dimensão didática (associada às características do funcionamento do sistema de ensino); e 3) dimensão cognitiva (associadas às características do público ao qual se dirige o ensino). A seguir apresenta-se de modo detalhado cada uma dessas três dimensões.

3.2.1 Dimensão epistemológica (associada às características do saber em jogo)

A temática Equações Diofantinas não pertence ao currículo de Matemática da Educação Básica, mas pode possibilitar um maior aprofundamento na linguagem aritmética e também algébrica dos alunos.

Conforme Boyer (2002) as Equações Diofantinas Lineares ocuparam lugar de relevo na história da Matemática, aparecendo de forma explicita ou implícita nos estudos dos povos egípcio, mesopotâmio, grego e hindu.

A própria designação “Equação Diofantina” nos remonta por analogia ao processo pelo qual se designou o continente Americano, em homenagem ao navegador italiano Américo Vespúcio. Mas, como se sabe, este não foi o navegador que “descobriu” o continente, embora tenha recebido esta homenagem.

No caso das Equações Diofantinas, esta denominação se dá em homenagem ao matemático Diofanto, embora foi um matemático hindu chamado Brahmagupta (que viveu na Índia central em aprox..628 d.C.) quem primeiro explicitou uma solução geral para a equação linear do tipo Ax + By = C, com A, B e C inteiros.

> Admiramos ainda mais sua atitude quanto à matemática quando percebemos que aparentemente foi o primeiro a dar uma solução geral da equação linear diofantina ax+by=c, onde a, b e c são inteiros. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de a e b deve dividir c; e Brahmagupta sabia que se a e b são primos entre si, todas as soluções da equação são dadas por x = p + mb , y = q – ma, onde m é um inteiro arbitrário[...] Brahmagupta merece muito louvor por ter dado todas as soluções inteiras da equação linear diofantina, enquanto Diofante tinha se contentado em dar uma solução particular de uma equação indeterminada.(BOYER,2002,p.151).

Como já dito, o ensino de Equações Diofantinas não pertence ao currículo de Matemática da Educação Básica, porém estudos recentes como as dissertações de mestrado de Pommer (2008) e Capilheira (2012) (realizadas com estudantes de ensino médio) apontam não para a colocação desta temática no currículo, mas para as enormes possibilidades didáticas em aritmética e álgebra aliada ao uso de jogos que o tema Equação Diofantina proporciona.

3.2.2 Dimensão didática (associada às características do funcionamento do sistema de ensino)

Uma das grandes descobertas do matemático Brahmagupta foi determinar a solução geral de equações diofantinas e a impossibilidade de solução por meio do máximo divisor comum (m.d.c.). Se fez um estudo de como a temática máximo divisor comum (tema relevante da aritmética) é tratada no Ensino Fundamental a partir da análise de livros distribuídos para as escolas públicas pelo Ministério da Educação e Cultura do Brasil através do Programa Nacional do Livro Didático (MEC-PNLD).

O máximo divisor comum é introduzido no 6º ano do Ensino Fundamental e não aparece mais ao longo de todo o Ensino Fundamental, sendo tratado como um assunto/conteúdo isolado e utilizado no 6º ano num contexto de simplificação de frações. Tal forma de tratamento dispensado a este importante tema da teoria dos números pelos livros didáticos brasileiros, faz com que muitos professores de matemática absurdamente propõem a sua retirada por completo do currículo escolar do Ensino Fundamental.

Uma das obras distribuídas é Bonjorno (2006). Em seu volume dedicado ao 6º ano do Ensino Fundamental, o máximo divisor comum é tratado de modo muito rápido, com alguns poucos problemas e o algoritmo ensinado é a decomposição em fatores primos e a decomposição simultânea.

Já em Giovanni (2002), em seu volume do 6º ano, se apresenta o conceito de máximo divisor comum de modo direto através de um exemplo usando o conjunto dos divisores, em seguida são tratadas algumas situações problema e o algoritmo da decomposição simultânea em fatores primos.

O último livro analisado foi Guelli (2004), volume do 6º ano. A temática máximo divisor comum é tratada em apenas duas páginas de modo muito resumido com apenas uma situação problema e o algoritmo apresentado é a decomposição em fatores primos.

Analisando os livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental, se percebe que o máximo divisor comum é tratado de forma muito superficial e rápida, dando-se muita ênfase nos algoritmos da decomposição em fatores primos e pouco na aplicação do conceito. E o que é mais grave: na maioria das vezes este será o único contato do estudante com a temática máximo divisor comum "mdc" ao longo do Ensino Fundamental e, quem sabe, ao longo de toda sua formação escolar na Educação Básica.

Ainda analisando os livros didáticos, se percebe que em nenhuma situação ocorreu o emprego do método das divisões sucessivas ou Algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum, algoritmo este de grande computabilidade e que pouco ou nada se modificou desde a sua criação por Euclides de Alexandria.

3.2.3 Dimensão cognitiva (associada às características do público ao qual se dirige)

No primeiro encontro, com o objetivo de se situar sobre os conhecimentos prévios dos alunos, foi respondido o questionário "começando nossa conversa" (APÊNDICE C).

A maioria dos alunos colocou que gosta de resolver problemas de matemática (no primeiro trimestre do corrente ano letivo foi trabalhada a temática Análise Combinatória e Probabilidade, onde os alunos tiveram contato com a Resolução de Problemas seguindo a metodologia sugerida por Polya). Em relação às perguntas, nenhum aluno conseguiu responder de forma correta a definição do máximo divisor comum de dois números naturais.

Isso corrobora com a análise que fora realizada nos livros didáticos, onde a temática máximo divisor comum "mdc" é quase esquecida no Ensino Fundamental. Os alunos conseguiram definir de modo correto o que é uma equação (tema muito trabalhado no 7º ano) e a grande maioria (10 alunos) disse gostar de Matemática e a relacionou com aspectos práticos da vida cotidiana.

A análise detida das respostas dadas pelos estudantes ao questionário "começando nossa conversa", permite concluir sobre a importância e até a necessidade da intervenção, uma vez que se pode fazer uso da Resolução de Problemas para se trabalhar conceitos relevantes de aritmética e álgebra com adolescentes na faixa etária de 14 e 15 anos.

O objetivo do trabalho foi verificar as possibilidades didático-pedagógicas envolvendo Equações Diofantinas Lineares, para alunos do Ensino Fundamental, tendo como suporte contextual a Resolução de Problemas, ampliando as concepções dos alunos nos campos da aritmética e da álgebra e dando uma possibilidade concreta de aplicabilidade do máximo divisor comum de dois números inteiros, tema tão negligenciado ao longo do Ensino Fundamental.

3.2.4 Resumo das análises prévias

De acordo com Carneiro (2005) o uso do constrangimento (alguns autores chamam isso de entrave) significa a busca, nas análises prévias, das razões pelas quais predomina a manutenção do ensino atual. A autora lista os constrangimentos que dificultam a alteração do modo de ensino vigente.

Assim, pode-se resumir os principais constrangimentos/entraves identificados como dificultadores da extensão ao quadro aritmético/algébrico, em três níveis:

1. Nível epistemológico: a) conceitos importantes da aritmética, tal como o mdc, são tratados de forma isolada no Ensino Fundamental; b) existe no Ensino Fundamental uma valorização excessiva do algoritmo em detrimento da aplicabilidade/relação do objeto; c) não se percebe as possibilidades otimizadoras das ferramentas algébrica na resolução de problemas; d) os alunos não conhecem o algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum;
2. Nível cognitivo: a) existe dificuldade cognitiva, no nível fundamental, para definir o máximo divisor comum; b) existe dificuldade cognitiva, no nível fundamental, para perceber a aplicabilidade do máximo divisor comum; c) embora os estudantes se sintam estimulados a trabalhar com a resolução de problemas, tal metodologia é pouco explorada no Ensino Fundamental.
3. Nível didático: a) aos professores, parece suficiente e satisfatório, no 6º ano do Ensino Fundamental, definir de modo isolado o máximo divisor comum de dois números naturais; b) não se retorna a esse assunto ao longo de todo o nível fundamental; c) não se utiliza de muitas possibilidades da aritmética e da álgebra no Ensino Fundamental por se achar que os estudantes adolescentes não tem maturidade para tal.

A partir destes constrangimentos, pode-se através de sua modificação, ter o sistema estabilizado em outro ponto de equilíbrio que se julga mais satisfatório.

3.3 Análise a priori da experiência didático-pedagógica e concepção

Nesta fase, conforme Machado (2012), o pesquisador orientado pelas análises preliminares delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre o qual o ensino pode atuar, denominadas de variáveis de comando. As variáveis de comando, podem ser: variáveis macrodidáticas ou globais (referentes à organização global da Engenharia Didática) ou variáveis microdidáticas ou locais (referentes à organização local da Engenharia Didática, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase).

Segundo Artigue (1996), a fase da análise a priori comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva. Sendo assim é possível formular as hipóteses da pesquisa que, posteriormente, serão validadas ou não.

Nesta pesquisa, as variáveis globais que se referem à organização global da Engenharia Didática são as seguintes:

1ª- permitir aos estudantes a possibilidade de abordar os problemas usando seus métodos próprios, usando as sugestões da resolução de problemas;

2ª- utilizar a metodologia do trabalho em pequenos grupos de forma a permitir uma maior socialização dos métodos resolutivos, bem como realçar o caráter cooperativo na construção do saber;

3ª- introduzir os conceitos de máximo divisor comum, Teorema de Bézout e a solução geral de uma equação diofantina linear somente após os estudantes perceberem a limitação (em certas ocasiões) do método da tentativa e erro;

4ª- trabalhar em sala de aula a função otimizadora da aritmética e da álgebra, mas tendo a resolução de problemas sempre presente;

5ª- iniciar o trabalho resolvendo problemas, perceber a limitação do método da tentativa e erro, buscar aprofundamento aritmético/algébrico para, em seguida, aplicar tal conhecimento na resolução de problemas novamente.

Tendo realizado estas escolhas macrodidáticas ou globais, parte-se agora para o Plano de Ação, onde deve incidir as escolhas locais. O plano apresenta uma sequência de ações, desenvolvida em três sessões, perfazendo um total de dezessete encontros, sendo cada encontro de uma hora e meia. Estas ações estão organizadas tendo como ponto de partida questões de controle, pois segundo Artigue (1996) elas ajudam a prever os comportamentos dos alunos, mostrando de que forma a análise efetuada permite controlar as relações entre o sentido das suas relações e as situações didáticas propostas.

Como a fase da análise a priori tem uma parte preditiva, as escolhas locais estão relacionadas e articuladas com as previsões a respeito do comportamento dos alunos.

> Ao mesmo tempo em que explicamos como se vai tentar desenvolver um controle das relações entre os sentidos dos comportamentos dos alunos e as situações didáticas propostas, formulamos hipóteses que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para validação da Engenharia. Procuramos deixar claro, nas setas do Mapa da Engenharia, que, cronologicamente, tomar decisões e formular hipóteses são ações simultâneas. Antes do plano, as hipóteses estão implícitas. Tornando-se explícitas e verbalizadas após o delineamento do Plano de Ação, quando se tem a ideia do todo. (CARNEIRO,2005,p.97).

Tendo em mente o processo de validação, tão importante na Engenharia Didática, as hipóteses não podem ser muito amplas e quando as expressa é importante ter em mente que se deve voltar a elas, durante a fase da experimentação, checando-as e verificando ou não a sua validade.

As hipóteses dessa pesquisa são as seguintes:

1ª - em nível cognitivo, acredita-se que, com este conjunto de ações, os alunos vão adquirir conhecimentos sobre a função otimizadora da aritmética e da álgebra na resolução de problemas;

2ª - os alunos perceberão o caráter limitado que o método da tentativa e erro possui na resolução de problemas e buscarão ou ficarão mais abertos para prospectar outros meios resolutivos;

3ª - o conjunto de ações permitirá aos estudantes um contato maior com o Algoritmo de Euclides e a sua utilização, tanto na verificação de soluções como na explicitação da solução geral das referidas equações, percebendo com isso uma aplicabilidade para o máximo divisor comum “mdc”.

3.4 Experimentação

Foram realizados 17 encontros ao longo de dois meses e meio aproximadamente, tendo cada encontro a duração de uma hora e meia, onde foram coletadas informações e protocolos para uma análise posterior. Os encontros ocorreram sempre às segundas-feira e terças-feira, no turno matutino. A maioria dos problemas propostos foram extraídos de Pommer (2013).

A experimentação foi dividida em três sessões:

1ª sessão: composta de cinco aulas, onde abordou-se os seguintes problemas: questionário (começando nossa conversa), problema do sorvete, problema do cinema, problema do futebol e problema do cd/dvd. Nesta sessão, os problema foram realizados de forma individual e em grupo, sendo que os protocolos individuais e em grupo foram arquivados (para a análise dentro da Engenharia Didática).

2ª sessão: composta de quatro aulas. Nesta sessão, após os estudantes comprovarem (via resolução de problema) a limitação do método de tentativa e erro, fez-se um aprofundamento em alguns conceitos aritméticos: Algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum “mdc” e o Teorema de Bèzout. Nesta sessão, foram realizadas muitas listas de exercícios para que os alunos pudessem praticar, tendo em vista o uso de tais dispositivos posteriormente na resolução de problemas.

3ª sessão: composta de oito aulas, abordou-se o problema do caixa eletrônico, e chegou-se a solução geral de uma Equação Diofantina Linear à luz da teoria discutida na 2ª sessão e também da proposição da solução geral de uma Equação Diofantina. Nesta sessão abordou-se ainda o problema dos coelhos e galinhas, o problema da Dinarlândia e uma avaliação final somente com problemas. Também foram arquivados alguns dos protocolos dos estudantes.

As aulas que envolviam a resolução de algum problema foram organizadas em três momentos distintos (tendo cada momento a duração de 30 minutos):

1º) Apresentação do problema e tentativa de solução individual;

2º) Organização em pequenos grupos e discussão (mediação do professor usando os passos da Resolução de Problemas sugerida por Polya);

3º) Plenária: apresentação da soluções pelos grupos para toda a turma (mediação do professor). Nesse momento, cada grupo pequeno trazia para o grande grupo a sua resolução e considerações relativas ao problema em questão.

Cabe destacar também que em algumas aulas foram realizadas algumas observações relativas ao andamento e/ou a conjectura sobre alguns comportamentos esperados dos alunos.

A seguir tem-se as dezessete aulas do Plano de Ação. Em seguida, na próxima unidade, será discutida cada uma das sessões à luz da teoria da Engenharia Didática.

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática **Professor: Adilson de Campos**

Aula 1

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Nesta primeira aula, será apresentada aos estudantes a proposta de trabalho, bem como o encaminhamento do termo de autorização (APÊNDICE B). Em seguida, os estudantes responderão ao questionário COMEÇANDO NOSSA CONVERSA (APÊNDICE C), no qual se busca resgatar alguns conceitos importantes para o nosso estudo posterior, bem como analisar o conhecimento prévio dos estudantes e o que eles entendem por problema matemático.

No final da aula, realçando a importância do trabalho em grupo na construção do bem comum, será proposto aos estudantes a dinâmica do abraço, em que cada uma das 14 pessoas presentes (incluindo o professor) deverá dar um abraço em cada um dos presentes. Em seguida, os estudantes responderão o seguinte questionamento:

- Quantos abraços foram dados no total? Explique como você chegou a esta resposta.

Após a discussão da dinâmica do abraço e as respostas dos estudantes, será feita em sala de aula a análise do questionamento seguindo as sugestões dadas por Polya (1978):

1º) Entender o problema;

2º) Elaborar um plano;

3º) Executar o plano;

4º) Fazer a verificação (retrospecto).

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Aula 2

Nome:____

<u>DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS</u>

<u>PROBLEMA DO SORVETE</u>

1) Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Existem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.
   a) Se duas pessoas dispõem de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique.
   b) E o número mínimo? Justifique.
   c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõem para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Espera-se que o aluno faça uso do processo de tentativa e erro para solucionar a questão.

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Aula 3

Nome:____

<u>DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS</u>

PROBLEMA DO CINEMA

2) O valor da entrada de um cinema é R$ 24,00 por adulto e R$ 12,00 por criança, em todas as sessões. O gerente do cinema (com lotação para 100 pessoas) sabe que há prejuízo se a renda por cada sessão for inferior a R$ 480,00.

(a) Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

(b) Qual o maior número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

(c) Se uma determinada sessão tiver vendido 5 entradas para crianças e 28 para adultos, haverá lucro ou prejuízo? Explique.

(d) Ajude o gerente a organizar uma tabela de acordo com a quantidade de ingressos adquiridos de adulto e criança, para que seja feito um controle sobre o lucro ou prejuízo de determinada sessão.

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Aula 4

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

PROBLEMA DO FUTEBOL

3) Um campeonato de futebol dispõe de dois tipos de ingresso: R$ 20,00 para a arquibancada e R$ 50,00 para o setor numerado. Um torcedor fanático por futebol disponibiliza, todo mês, R$ 250,00 para ir aos jogos. O torcedor tem muito tempo para ir aos jogos e não faz preferência por nenhum clube.

a) Em quantos jogos o torcedor pode ir? Justifique.

b) Organize todas as possibilidades de ida ao estádio por mês. Sugestão: organize os dados em uma tabela.

OBSERVAÇÃO: Organização dos três momentos a exemplo dos problemas anteriores. Apesar de poucas soluções este problema começa por demonstrar o esgotamento do método da tentativa e erro e que já se comece a utilizar uma linguagem mais algébrica para descrever o problema.

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Aula 5

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

PROBLEMA DO CD OU DVD

4) Considere a seguinte situação: Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD R$ 16,00.

Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente R$ 70,00?

OBSERVAÇÃO: Organização dos três momentos. Como a solução do problema é vazia, espera-se que os alunos não somente se convençam disso, como procurem entender por que a solução é vazia. Qual a relação existe entre os coeficientes 12 e 16 com o número 70? Aos poucos e propiciando maior tempo para a discussão no grande grupo, esperamos chegar à questão da paridade como um elemento importante para se resolver o problema, bem como conjecturar a possibilidade de existência de um método matemático que consiga detectar a solução vazia para a questão e também que relação poderia ter com o "mdc" de dois números inteiros.

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática **Professor: Adilson de Campos**

Aula 6

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Nas aulas anteriores introduzimos o conceito Equações Diofantinas Lineares na dinâmica da Resolução de Problemas, bem como sua terminologia (coeficientes e termo independente). Na aula de hoje faremos uma revisão sobre o máximo divisor comum (mdc) de números naturais, bem como apresentaremos um método muito eficiente para sua determinação, conhecido com ALGORITMO DE EUCLIDES.

Vejamos um exemplo (utilizando o problema 4 da Aula 5):

1) Dada a Equação Diofantina $12C + 16D = 70$.

a) Qual o mdc de 12 e 16? (indicaremos o mdc dos números inteiros a e b por (a,b)).
b) Verifique se (12,16) divide o termo independente 70.
c) O que podemos afirmar sobre a solução da Equação Diofantina?

2) Faça o mesmo para as seguintes Equações Diofantinas:

a) $2F + 4E = 12$ b) $12C + 24A = 480$ c) $20A + 50N = 250$

Devido à importância e utilidade do mdc em nosso estudo, veremos um algoritmo altamente eficiente para sua determinação. Tal algoritmo é chamado de ALGORITMO de EUCLIDES em homenagem ao grande matemático Euclides de Alexandria. Tal é a eficácia do método é que o mesmo pouco ou nada mudou desde sua criação a muitos séculos.

Em seguida será proposto (como dever de casa) aos alunos alguns exercícios sobre o mdc e o Algoritmo de Euclides:

1) Determine:

a) (35,10) b) (18,30) c) (15,40) d) (22,46) e) (85,75) f) (20,130)

2) Qual é o maior número que divide 24, 96, 40 e 100?

3) Responda:

a) Quais são os divisores de 5?

b) Quais são os divisores de 8?

c) Qual o único divisor comum de 5 e 8?

d) Qual é o (5,8)?

OBS: Quando o mdc de dois ou mais números é igual a 1, dizemos que são primos entre si.

4) Numa mercearia o proprietário deseja estocar 72 garrafas de água, 48 de suco e 36 de mel em caixas com o maior número possível de garrafas, sem misturá-las e sem que sobre ou falte garrafas. Qual deve ser a quantidade de garrafas por caixa?

5) Todos os alunos de uma escola de ensino médio participarão de uma gincana. Para essa competição, cada equipe será formada por alunos de uma mesma série com o mesmo número de participantes. Veja no quadro a distribuição de alunos por série.

Série	Número de alunos
1ª	120
2ª	108
3ª	100

Responda:

a) Qual é o número máximo de alunos por equipe?

b) Quantas são as equipes da 1ª série?

c) Quantas são as equipes da 2ª série?

d) Quantas são as equipes da 3ª série?

6) Dois rolos de corda, um de 200 metros e outro de 240 metros de comprimento, precisam ser cortados em pedaços iguais e no maior comprimento possível.

Responda:

a) Quanto medirá cada pedaço?
b) Quantos pedaços serão obtidos?

OBSERVAÇÃO: Ao final da aula será realizado um comentário histórico sobre os matemáticos Euclides de Alexandria e Diofanto, colocando suas contribuições dadas à Matemática (tendo por subsídio Boyer (2002) e Eves (2004)).

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Aula 7

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

A 1ª aula de hoje será dedicada à correção dos exercícios propostos na última aula. Já na segunda aula, introduziremos um resultado muito importante conhecido como Teorema de Bèzout ou como Algoritmo de Euclides Estendido (denominação adotada por algumas literaturas). Em nosso estudo, chamaremos de TEOREMA DE BÈZOUT.

TEOREMA DE BÈZOUT: Sejam a,b números inteiros e d = (a,b) (d é o mdc de a e b). Então existem inteiros **r** e **s** tais que d = r.a + s.b, ou seja, sempre podemos escrever o máximo divisor comum de dois números inteiros como uma combinação linear dos mesmos.

Exemplos:

1) Determine d = (200,240). Escreva d como uma combinação linear de 200 e 240.
2) Determine d = (120,108). Escreva d como uma combinação linear de 120 e 108.
3) Determine d = (108,100). Escreva d como uma combinação linear de 108 e 100.

OBS: Será dado um tempo para que os alunos respondam. Os exemplos 1 e 2 são facilmente resolvidos, já o exemplo 3 não é tão trivial assim. Também faremos algumas considerações sobre o matemático francês Étienne Bèzout. Em seguida, será apresentado um método algébrico que permite explicitar o Teorema de Bèzout a partir do algoritmo de Euclides:

Vejamos o exemplo 3:

* Usando o Algoritmo de Euclides, encontramos (108,100):

	1	12	2
108	100	8	4
8	4	0	

Logo (108,100) = 4.

Fazendo a = 108 e b = 100 e usando os resultados do algoritmo, podemos escrever:

4 = 100 – 8. 12 (I) e 8 = 108 – 1. 100 , i é, 8 = a – b (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

4 = 100 – 8. 12

4 = b – (a – b) . 12

4 = b – (12a – 12 b)

4 = -12 a + 13 b, isto é, 4 = -12. 108 + 13 . 100 e o resultado segue.

EXERCÍCIO:

1) Calcule o mdc em cada caso usando o algoritmo de Euclides e em seguida escreva o mdc como uma combinação linear dos números (Teorema de Bèzout).

   a) (35,10) b) (18,30) c) (15,40) d) (22,46) e) (85,75) f) (20,130) g) (24,96)
   h) (24,40) i) (24,100) j) (96,40) k) (96,100) l) (40,100) m) (72,48) n) (48,36).

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática **Professor: Adilson de Campos**

Aula 8

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Na aula de hoje faremos uma revisão sobre o ALGORITMO DE EUCLIDES para a determinação do mdc de dois números naturais e também o Teorema de Bézout.

EXERCÍCIOS:

1) Obter o máximo divisor comum entre os números 1545 e 825.
   (A)25
   (B)15
   (C)10
   (D)5
   (E) 1
2) Obter o máximo divisor comum entre os números 21 e 49.
   (A)21
   (B)49
   (C)147

(D)7

(E) 14

3) Obter o máximo divisor comum entre os números 31 e 153.

(A)1

(B)13

(C3

(D)4

(E) 51

4) Obter o máximo divisor comum entre os números 250 e 450.

(A)10

(B)20

(C)30

(D)40

(E) 50

5) Usando o resultado do Teorema de Bézout, expresse em cada exercício anterior o "mdc" dos números como uma combinação linear dos mesmos.

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática **Professor: Adilson de Campos**

Aula 9

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Dedicaremos esta aula para fazer a correção dos exercícios propostos na última aula, bem como fazer a lista final de exercícios aplicando o Algoritmo de Euclides e o Teorema de Bèzout.

EXERCÍCIO:

1) Calcule o mdc em cada caso usando o algoritmo de Euclides e em seguida escreva o mdc como uma combinação linear dos números (Teorema de Bèzout).

a) (48,65) b) (72,139) c) (140,190) d) (199,241) e) (240,220) f) (299,320)
g) (1548,321) h) (1940,5484).

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática **Professor: Adilson de Campos**

Aula 10

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Usualmente, um caixa eletrônico de banco pode dispor de cédulas (notas) para atender eventuais solicitações de saques. Suponha que todos os caixas possuam cédulas suficientes para emissão.

(a) Um usuário deseja fazer um saque e decide utilizar um caixa eletrônico que emite somente cédulas de R$ 5,00 ou R$ 10,00. Consulta o seu saldo e verifica que possui em sua conta, no momento, R$ 61,00. Indeciso, resolve efetuar um saque, mas não deseja zerar o saldo. Ajude-o, organizando todos os possíveis saques que poderiam ser realizados.

(b) Um segundo usuário entra no banco e decide utilizar um caixa eletrônico que emite somente cédulas de R$ 10,00 ou R$ 20,00. O cliente quer sacar exatamente R$ 1000,00. É possível? Se sim, de quantas maneiras?

(c) Um terceiro usuário entra no banco e deseja sacar exatamente R$ 10.030,00. Os três caixas disponíveis estão indicados na tabela abaixo. É possível? (Sim ou Não). Justifique a resposta para cada caixa eletrônico.

Notas emitidas pelo caixa eletrônico	É possível? (Sim ou Não)
R$ 5,00 e R$ 10,00	
R$ 10,00 e R$ 20,00	
R$ 20,00 e R$ 50,00	

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática **Professor: Adilson de Campos**

Aula 11

Nome:____

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Durante as últimas aulas fizemos uma revisão sobre o máximo divisor comum (mdc) de dois números naturais usando o Algoritmo de Euclides, bem como apliquemos o Teorema de Bézout para escrever o "mdc" de dois números como uma combinação linear dos mesmos. Porém, como podemos relacionar essas temáticas com as Equações Diofantinas?

Revisando ...

1) Liste as Equações que representam as situações que trabalhamos até o presente momento.

PROBLEMA	INCÓGNITAS	EQUAÇÃO REPRESENTATIVA
Problema do sorvete		
Problema do cinema		
Problema do futebol		
Problema do CD ou DVD		
Problema do caixa eletrônico		

2) Dos problemas listados, qual(is) tinha (m) solução? Dos problemas listados, qual(is) não tinha(m) solução?
3) Com base no que já vimos, qual seria a condição para uma Equação Diofantina ter solução?
4) Seria possível determinar se uma Equação Diofantina tem ou não solução antes mesmo de tentar encontrá-la.

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática **Professor: Adilson de Campos**

Nome:____

Aula 12

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Na aula de hoje trataremos de um resultado fundamental para a resolução de Equações Diofantinas. Na verdade, já realizamos a simplificação de equações e conjecturamos a respeito de uma Equação Diofantina ter solução em função do "mdc" de seus coeficientes dividir ou não o termo independente (aula 6 da 2ª sessão). Agora, definiremos de modo formal a situação:

É imediato verificar que a equação aX + bY = c é equivalente a equação $a_1X + b_1Y = c_1$, onde $a_1 = \dfrac{a}{(a,b)}$, $b_1 = \dfrac{b}{(a,b)}$ e $c_1 = \dfrac{c}{(a,b)}$.

Note que $(a_1,b_1) = 1$ e, portanto, podemos nos restringir às equações do tipo $a_1X + b_1Y = c_1$, com $(a_1,b_1) = 1$ que sempre tem soluções. Assim, a equação diofantina aX + bY = c, com (a,b) = 1 admite infinitas soluções.

EXERCÍCIOS:

1) Determine se cada Equação Diofantina tem ou não solução em Z.

a) 90X + 28Y = 22

b) 50X + 56Y = 74

c) 40X + 65Y = 135

d) 8X + 13Y = 23

e) 5X + 10Y = 61

2) Tente encontrar UMA solução p/a cada equação que possua solução.

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Nome:____

Aula 13

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Apreciaremos as questões propostas na última aula. Como descobrimos uma forma de verificar se uma dada equação diofantina tem ou não solução, é natural nos perguntarmos como determinar uma solução particular e mais... como poderemos escrever todas as soluções, pois o resultado da aula anterior coloca a possibilidade de existirem infinitas soluções. A proposição a seguir pode nos auxiliar neste intento:

PROPOSIÇÃO: Seja x_0, y_0 uma solução da equação aX + bY = c, onde a,b e c são inteiros e (a,b) = 1. Então, as soluções $x,y \in Z$ da equação são: $x = x_0 + b.t$ e $y = y_0 - a.t$, $t \in Z$.

Tema de casa:

Simplifique cada uma das Equações Diofantinas propostas no exercício 1 da última aula. Usando uma solução particular (x_0,y_0) que o colega Alexssandro (Sandrinho) encontrou e também o resultado da proposição, encontre 5 soluções para cada Equação Diofantina (Sugestão: como t pode assumir qualquer valor inteiro, tome t = -2, t = -1, t = 0, t= 1 e t = 2).

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Nome:____

Aula 14

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

Nesta aula, usaremos um método algébrico para encontrar uma solução particular de uma Equação Diofantina e em seguida escrever a solução geral.

Vejamos um exemplo:

1) Resolver em Z a Equação Diofantina $24X + 14Y = 18$.

Solução:

1º) Verificaremos a existência de solução.

Como $(24,14) = 2$ e 2 é divisor de 18, temos que a Equação tem solução.

2º) Encontrar uma solução particular.

Podemos simplificar $24X + 14Y = 18$ (dividindo ambos os membros por 2), obtendo $12X + 7Y = 9$.

Agora temos $(12,7) = 1$.

Em $12X + 7Y = 9$, fazemos $12= a$ e $7 = b$ e aplicando o Algoritmo de Euclides, temos:

	1	1	2	2
12	7	5	2	1
5	2	1	0	

Assim, $1 = 5 – 2.2$ (I) ; $2 = 7 – 5$ (II) e $5 = 12 – 7$, ié, $5 = a – b$ (III).

Substituindo (III) em (II) e finalmente (II) em (I) (tal como um efeito dominó), temos:

(III) em (II): $2 = 7 – 5 \Rightarrow 2 = b – (a – b) \Rightarrow 2 = b – a + b \Rightarrow 2 = 2b – a$;

Finalmente substituindo $2 = 2b – a$ em (I), temos:

$1 = 5 – 2.2 \Rightarrow 1 = a – b – 2. (2b – a) \Rightarrow 1 = a – b – 4b – 2a \Rightarrow 1 = 3a – 5b$.

Temos que $3a – 5b = 1$ (x9) $\Rightarrow 9. 3a – 9. 5b = 1.9 \Rightarrow 27a – 45 b = 9$, ou seja, como tomamos $a= 12$ e $b = 7$, temos que $27.12 – 45.7 = 9$, de modo que, $x_0 = 27$ e $y_0 = -45$ formam uma solução particular.

A solução particular da Equação Diofantina é:

$x = x_0 +b.t$ e $y = y_0 - a. t$, $t \in Z$.

$x= 27 + 7.t$ e $y = - 45 – 12. t$, $t \in Z$.

EXERCÍCIOS:

1) Encontre a solução geral de cada Equação Diofantina a seguir:

a) $90X + 28Y = 22$

b) $50X + 56Y = 74$

c) $40X + 65Y = 135$

d) $8X + 13Y = 23$

e) $21X + 56Y = 42$

2) PROBLEMA DOS COELHOS E GALINHAS: Numa criação de coelhos e galinhas, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Nome:____

Aula 15

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

TRABALHO DE MATEMÁTICA

1) Fazendo uso da teoria construída até o momento: mdc, Algoritmo de Euclides, Teorema de Bèzout e o Método resolutivo de uma Equação Diofantina, resolva em Z a seguinte equação: $47X + 29Y = 1288$.

2) Dispondo de R$ 100,00, quais são as quantidades de selos que se pode comprar, sabendo que os selos custam R$ 5,00 e R$ 7,00?

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Nome:____

Aula 16

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

PROBLEMA DA DINARLÂNDIA

PARTE I – EM GRUPO

Em um reinado distante, de regime monarquista parlamentarista, existem cédulas de 1, 2, 5, 10, 20, 50 e 100 dinares, que permitem pagar e receber troco nas transações monetárias mais usuais (em dinares). O rei, excêntrico por natureza, resolveu, por decreto, extinguir as cédulas existentes, retirando-as de circulação. Então, instituiu operações de pagar e receber troco, somente com novas cédulas de 4 e 6 dinares.

a) O primeiro-ministro argumenta com o rei que a utilização de cédulas de 4 e 6 dinares é matematicamente imprópria. Cada grupo deve escrever uma declaração, embasada em algum argumento, de preferência matemático, mostrando se o grupo concorda ou discorda do primeiro-ministro.

Argumento:

Cada grupo terá que apresentar um veredicto quanto ao argumento do primeiro-ministro. A seguir, cada grupo deverá expor seu argumento aos demais.

( ) Argumento correto.

ou

( ) Argumento incorreto

(se assinalou argumento incorreto, descreva abaixo o motivo)

Motivo:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Problema da Dinarlândia

Nome: ____

PARTE II - INDIVIDUAL

b) O rei, descontente com seu primeiro-ministro, mas não podendo demiti-lo por causa disso, resolve estabelecer um duelo a nível nacional para resolver a questão de quais deveriam ser as duas moedas nacionais, achando que este concurso o ajudaria a desacreditar o primeiro-ministro, comprovando o mérito de seu decreto.

O rei assim proclama:

“Hoje e somente hoje, abro inscrições para os súditos reais que desejam colaborar com o Tesouro Nacional. Será paga a quantia de cem mil dinares ao(s) súdito(s) que me mostrar(em) quais são as maneiras que podem ser estabelecidas as duas cédulas necessárias para dar ou receber qualquer quantia monetária em dinares. Ainda, dentre as várias maneiras, o(s) súdito(s) deverá(ão) argumentar qual seria a mais cabível dentre todas, de modo a promover o bem estar monetário da nação. A regra única é que as cédulas deverão ser números naturais menores que 7. A única exceção desta regra é a impossibilidade de emissão de cédula de 1 dinar".

Cada súdito está convocado a procurar e achar a solução.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Nome:____

Aula 17

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

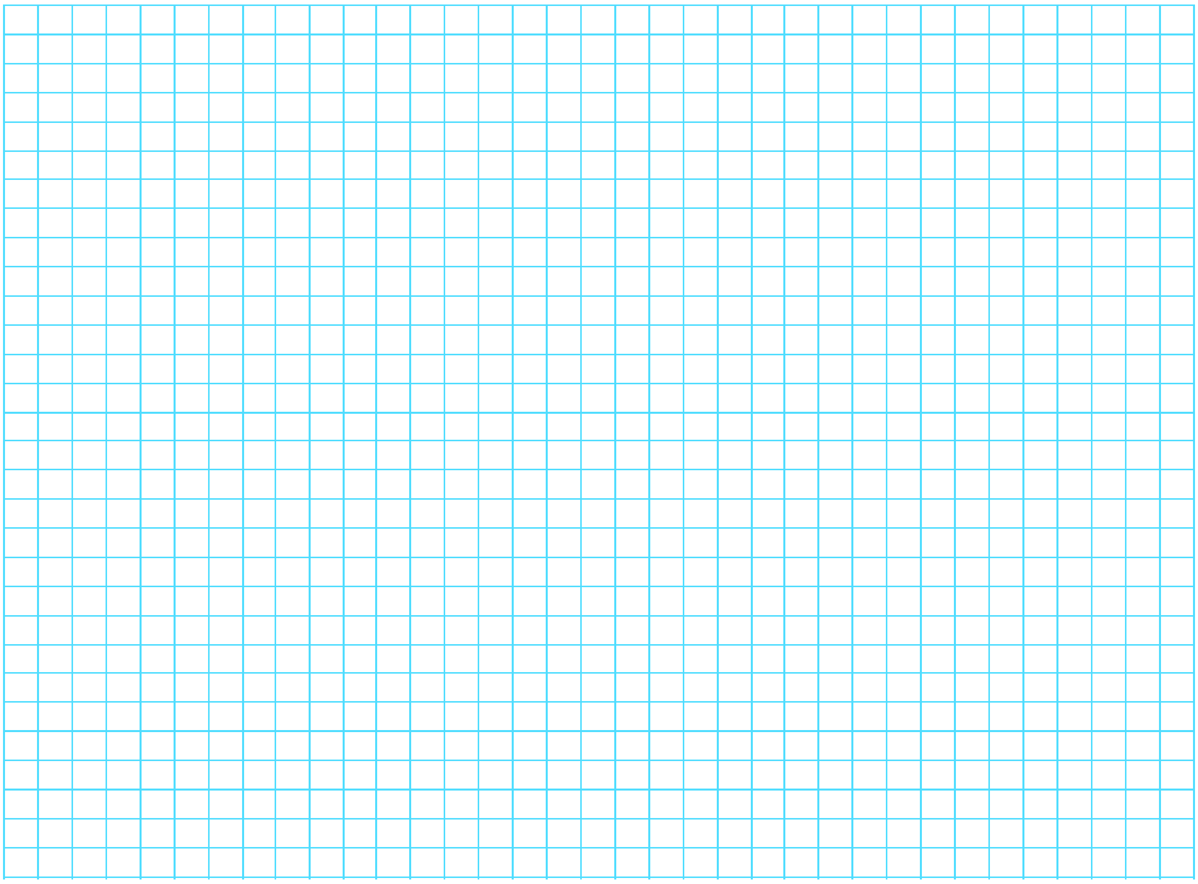
Usando os passos sugeridos por Polya na resolução de problemas, bem como as construções realizadas em aula sobre Equações Diofantinas, responda as seguintes situações-problema:

1) De quantas maneiras pode-se comprar selos de 3 reais e de 5 reais de modo que se gaste 50 reais?

2) Subindo uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau. Subindo a mesma escada de três em três degraus, sobram dois degraus. Determine quantos degraus possui a escada, sabendo que o seu número é múltiplo de 7 e está compreendido entre 40 e 100.

3) (REVISTA DA OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS, p. 13, 2003). João pediu a Pedro que multiplicasse o dia de seu aniversário por 12 e o mês do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o **produto** do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento?

4) (A) Sabendo que o preço de um pastel é R$ 2,00 e um sorvete R$ 3,00. Jonas dispõe de R$ 24,00 e pretende gastar todo esse dinheiro comprando sorvetes e/ou pasteis para seus colegas. De quantas formas é possível que Jonas faça isso? (B) Represente em um plano cartesiano as soluções do item (A). O que você pode concluir a partir desta representação?



3.4.1 Experimentação na 1ª sessão

Nesta sessão ocorreram cinco aulas. Na primeira aula, foi realizado o questionário “começando nossa conversa”, que reforçou a necessidade da intervenção. Nela, a totalidade dos alunos mostrou desconhecimento do máximo divisor comum e a grande maioria disse gostar de resolver problema e que também gosta de Matemática. Na oportunidade também foram encaminhadas as autorizações (APÊNDICE B) a serem preenchidas pelos responsáveis, bem como a proposta de trabalho que se teria a partir de então.

Na aula seguinte, quando da entrega das autorizações foi perceptível a aceitação de tal proposta junto aos responsáveis dos alunos, tal aceitação pode ser aferida pelo relato de alguns estudantes que colocaram o que seus pais acharam do projeto.

Uma caminhada estava se construindo de maneira bastante sólida: tendo nos estudantes o gosto pela resolução de problemas, uma boa relação com o componente curricular Matemática e agora, com uma boa aceitação da proposta junto aos responsáveis. Cabe ressaltar que a grande maioria dos responsáveis pelos alunos tem baixa escolaridade (muitos não concluíram o Ensino Fundamental) e percebem agora a grande possibilidade de seus filhos poderem estudar mais.

Na segunda aula, bem como nas demais, foram organizados três momentos distintos: trabalho individual (meia hora), trabalho em pequenos grupos – de três ou quatro integrantes- (meia hora) e finalmente a plenária com a discussão no grande grupo (meia hora), tendo nestes dois últimos momentos a intermediação do professor.

Estes três momentos foram preparados no sentido que coubesse ao aluno uma oportunidade de pensar por si próprio para em seguida socializar e construir o aprendizado no pequeno e no grande grupo. Pois se fosse trabalhado logo em pequenos grupos, poderia ocorrer de algum aluno ter a ideia da resolução antes mesmo que os outros começassem a conjecturar uma possível solução, dado que os tempos de aprendizagem são distintos. Outra justificativa para o trabalho inicial ser individual e sem o auxílio/mediação do professor é desenvolver a zona de desenvolvimento proximal de acordo com a teoria de Vygotsky (1984).

O primeiro problema trabalhado na segunda aula foi o problema do sorvete.

PROBLEMA DO SORVETE

Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Existem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

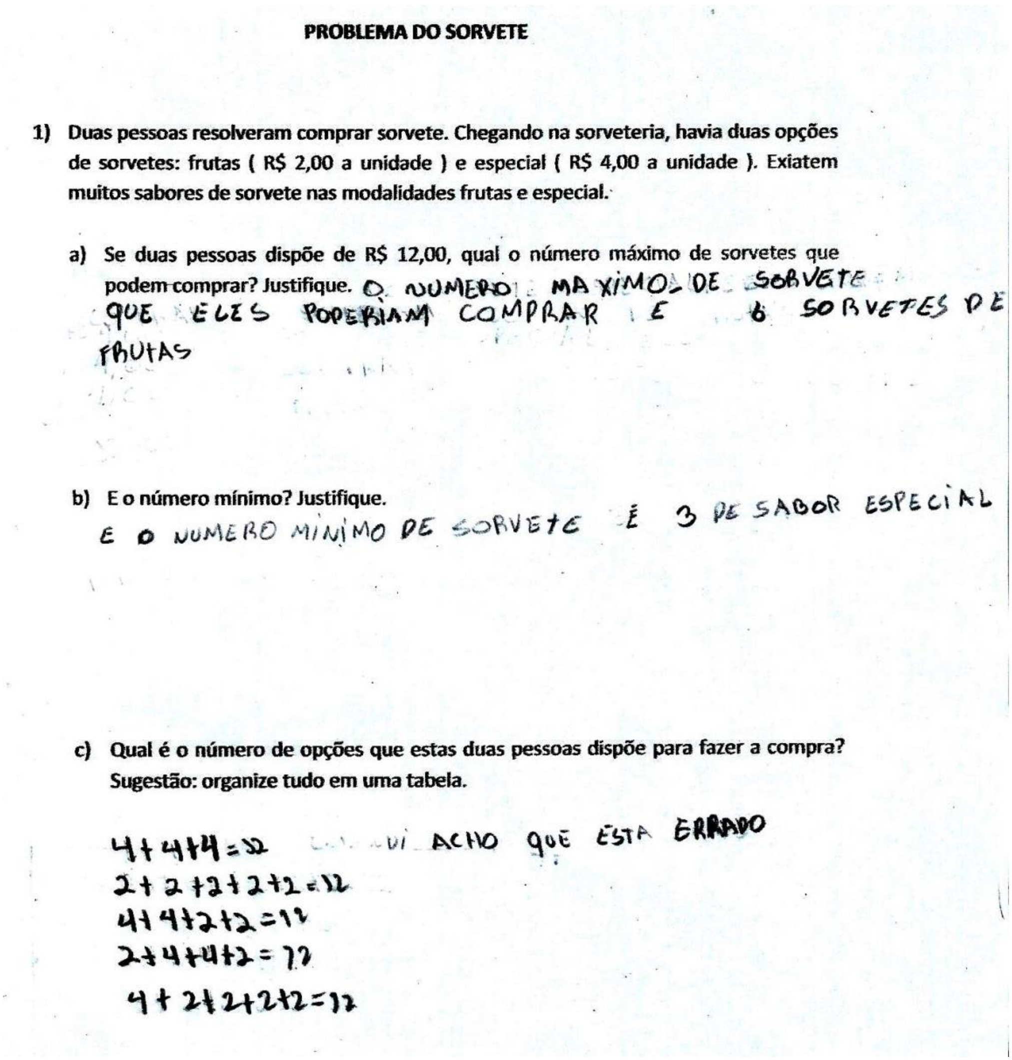
a) Se duas pessoas dispõem de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique.

b) E o número mínimo? Justifique.

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõe para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

Durante o trabalho individual, alguns questionamentos foram realizados: uma aluna perguntou se era realmente necessário construir uma tabela no item (c) da questão. O professor então lhe disse que era apenas uma sugestão, da qual ela poderia ou não fazer uso.

É interessante a análise de alguns protocolos do trabalho individual. Neste (Figura 1), o estudante acerta os itens a e b, porém no item c coloca uma opção a mais, mas deixa claro a sua dúvida colocando “acho que está errado”. A dúvida pode ter ocorrido devido ao fato de o estudante estar considerando uma possível ordem na compra dos sorvetes (algo razoável quando se trabalhou análise combinatória, mas que aqui não se aplica – não existindo uma ordem para os sorvetes), mas uma dúvida importante de ser dirimida na plenária, ou mesmo no trabalho em pequenos grupos, onde ocorre uma confrontação das respostas/estratégias.


PROBLEMA DO SORVETE

1) Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Exiatem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

a) Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique. O NUMERO MAXIMO DE SORVETE QUE ELES PODERIAM COMPRAR É 6 SORVETES DE FRUTAS

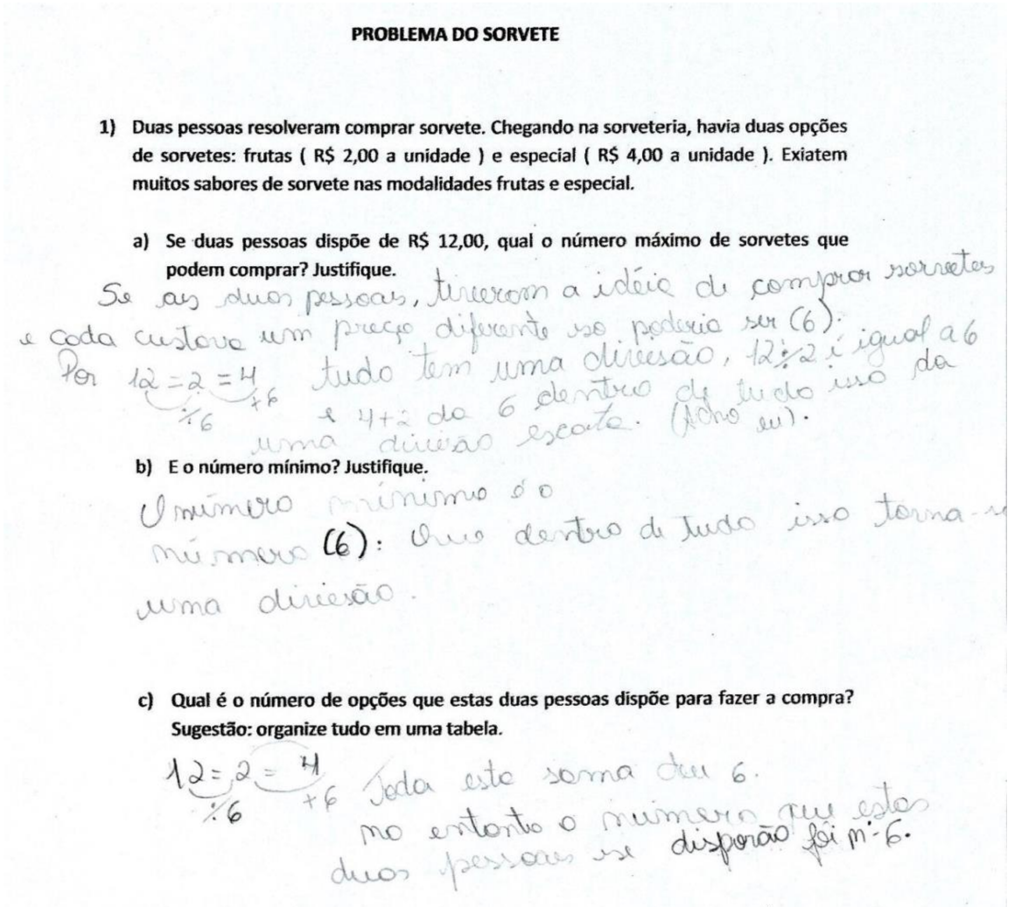
b) E o número mínimo? Justifique.
É O NUMERO MINIMO DE SORVETE É 3 DE SABOR ESPECIAL

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõe para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

4+4+4=12 ACHO QUE ESTA ERRADO
2+2+2+2+2=12
4+4+2+2=12
2+4+4+2=12
4+2+2+2+2=12

Figura 1 – Protocolo do aluno A para o problema do sorvete.

Outra aluna (Figura 2), a mesma que questionara a necessidade da construção da tabela, não entendeu o problema dando respostas insatisfatórias ao que foi solicitado em cada item. No item a), ela responde de forma correta (6 sorvetes), porém justifica de forma confusa. Já nos itens b) e c), a aluna se prende à questão do algoritmo da divisão e não consegue entender o que o problema está pedindo.


PROBLEMA DO SORVETE

1) Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Exiatem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

a) Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique.

Se as duas pessoas, tiverem a idéia de comprar sorvetes e cada custava um preço diferente só poderia ser (6). Por 12÷2 = 4 tudo tem uma divisão, 12÷2 é igual a 6 ÷6 +6 e 4+2 da 6 dentro de tudo isso da uma divisão exata. (Acho eu).

b) E o número mínimo? Justifique.

O número mínimo é o número (6): Pois dentro de tudo isso torna-se uma divisão.

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõe para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

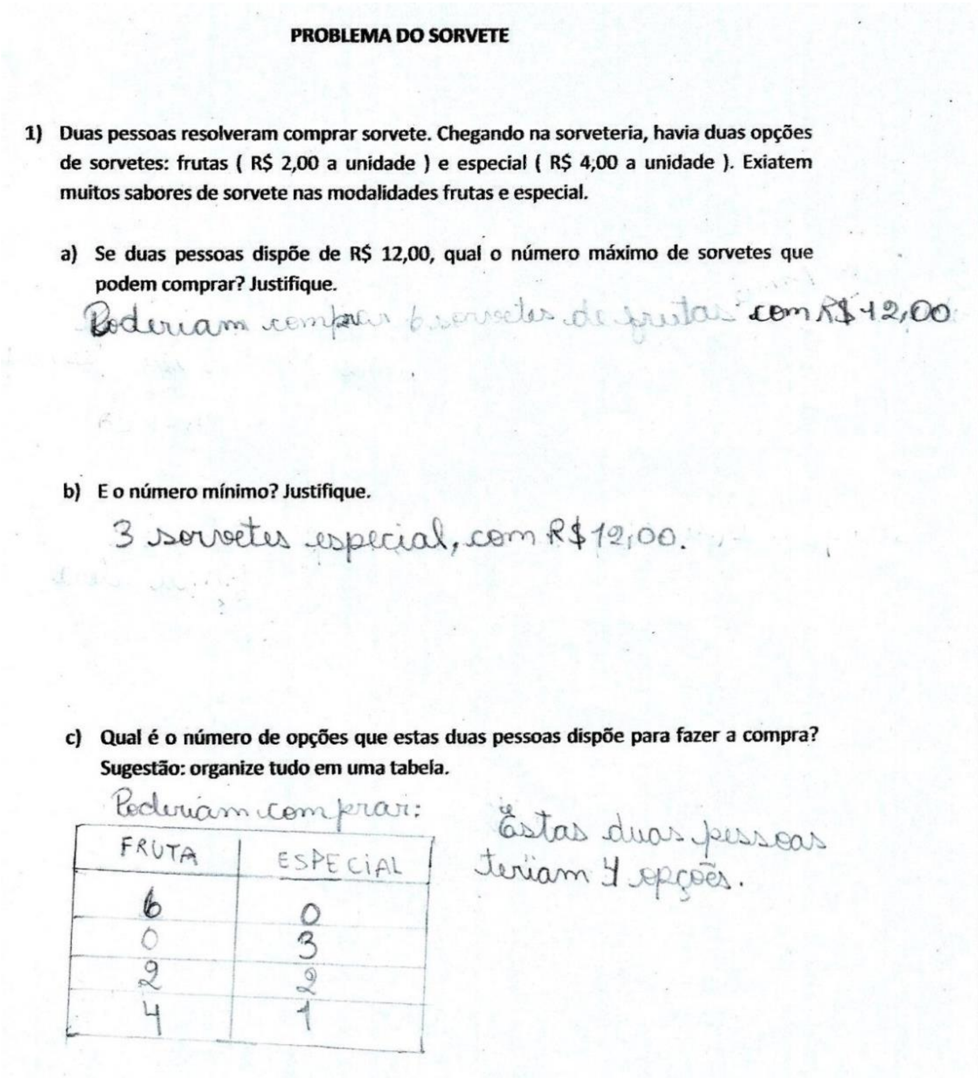
12÷2 = 4 ÷6 +6 Toda esta soma deu 6. no entanto o número que estas duas pessoas se disporão foi nº 6.

Figura 2 – Protocolo da aluna B para o problema do sorvete.

Neste outro protocolo (Figura 3), a estudante respondeu de forma satisfatória ao que foi solicitado, construindo uma tabela no item c para melhor organizar os dados.

Outro aluno (Figura 4) responde corretamente os dois primeiros itens, porém se confunde com a questão da ordem dos sorvetes, mas apresenta uma tabela bem distinta das demais.

Para o trabalho em pequenos grupos (4 e 5 integrantes), os alunos foram divididos em três grupos que sugestivamente foram denominados de EQUAÇÕES, DIOFANTINAS e LINEARES. Nesta etapa os alunos puderam confrontar as suas respostas e tinham que ao final, chegar a um consenso dando a opinião do grupo e respondendo a questão. Este momento se mostrou extremamente rico e possibilitou muitas trocas entre os alunos.



PROBLEMA DO SORVETE

1) Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Exiatem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

a) Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique.

Poderiam comprar 6 sorvetes de frutas com R$ 12,00

b) E o número mínimo? Justifique.

3 sorvetes especial, com R$ 12,00.

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõe para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

Poderiam comprar:

FRUTA	ESPECIAL
6	0
0	3
2	2
4	1

Estas duas pessoas teriam 4 opções.

Figura 3 – Protocolo do aluno C para o problema do sorvete.

PROBLEMA DO SORVETE

1) Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Exiatem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

a) Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique.

Se o valor total é R$12,00 e queremos comprar o máximo de sorvetes, temos que pegar o menor valor possível (R$2,00), sendo R$ 2,00 reais o menor valor temos 12÷2 = 6, então podemos comprar no máximo 6 sorvetes.

b) E o número mínimo? Justifique.

Se queremos comprar o menor valor possível de sorvetes tendo R$ 12,00 temos que pegar o maior valor possível (R$4,00), sendo R$4,00 então fazemos 12÷4 = 3, então o menor número de sorvetes que podemos comprar é 3.

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõe para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	E	
F	F	E	E		
E	E	E			
E	E	F	F		
E	F	F	F	F	

R. Elas dispõe de 6 opções para fazer as compras.

Figura 4 – Protocolo do aluno D para o problema do sorvete.

A seguir, são colocados os protocolos dos três grupos (Figura 5, Figura 6 e Figura 7). É interessante observar os diferentes tipos de tabelas construídas pelos grupos para organizar os dados.

Durante a plenária, cada grupo teve a oportunidade de apresentar a sua resposta e o professor realizou a mediação, dando uma ênfase especial em três aspectos fundamentais, a saber: 1) a importância da tabela na organização dos dados (respondendo a uma pergunta inicial realizada por uma aluna); 2) a ordem de cada sorvete não importa na questão, isto é, não existe um primeiro sorvete e 3) perceber as duas variáveis do problema (número de sorvetes de fruta e número de sorvetes especiais) e escrever a equação que representa o problema em suas duas variáveis (já introduzindo o conceito de equação diofantina linear de duas variáveis com coeficientes inteiros).

PROBLEMA DO SORVETE

1) Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Exiatem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

a) Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique.

R: Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00 e querem comprar o máximo de sorvetes é preciso que elas comprem o sorvete do menor valor possível (R$ 2,00), tendo como menor valor R$ 2,00, temos 12÷2=6. Sendo 6 o maior número de sorvetes.

b) E o número mínimo? Justifique.

R: Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00 e querem comprar o menor nº de sorvetes é preciso que elas comprem o sorvete do maior valor possível (R$ 4,00), tendo como maior valor R$ 4,00, temos 12÷4=3. Sendo 3 o menor número de sorvetes.

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõe para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	E	
F	F	E	E		
E	E	E			

R: Estas duas pessoas dispõe de 4 opções no total.

Figura 5 – Protocolo do grupo 1 para o problema do sorvete.

PROBLEMA DO SORVETE

1) Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Exiatem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

a) Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique.

$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$ = 6 grupos de sorvetes

Para maximizar o valor, fizemos grupos com o menor valor para dar mais grupos.

b) E o número mínimo? Justifique.

$\boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$ = 3 grupos de sorvetes

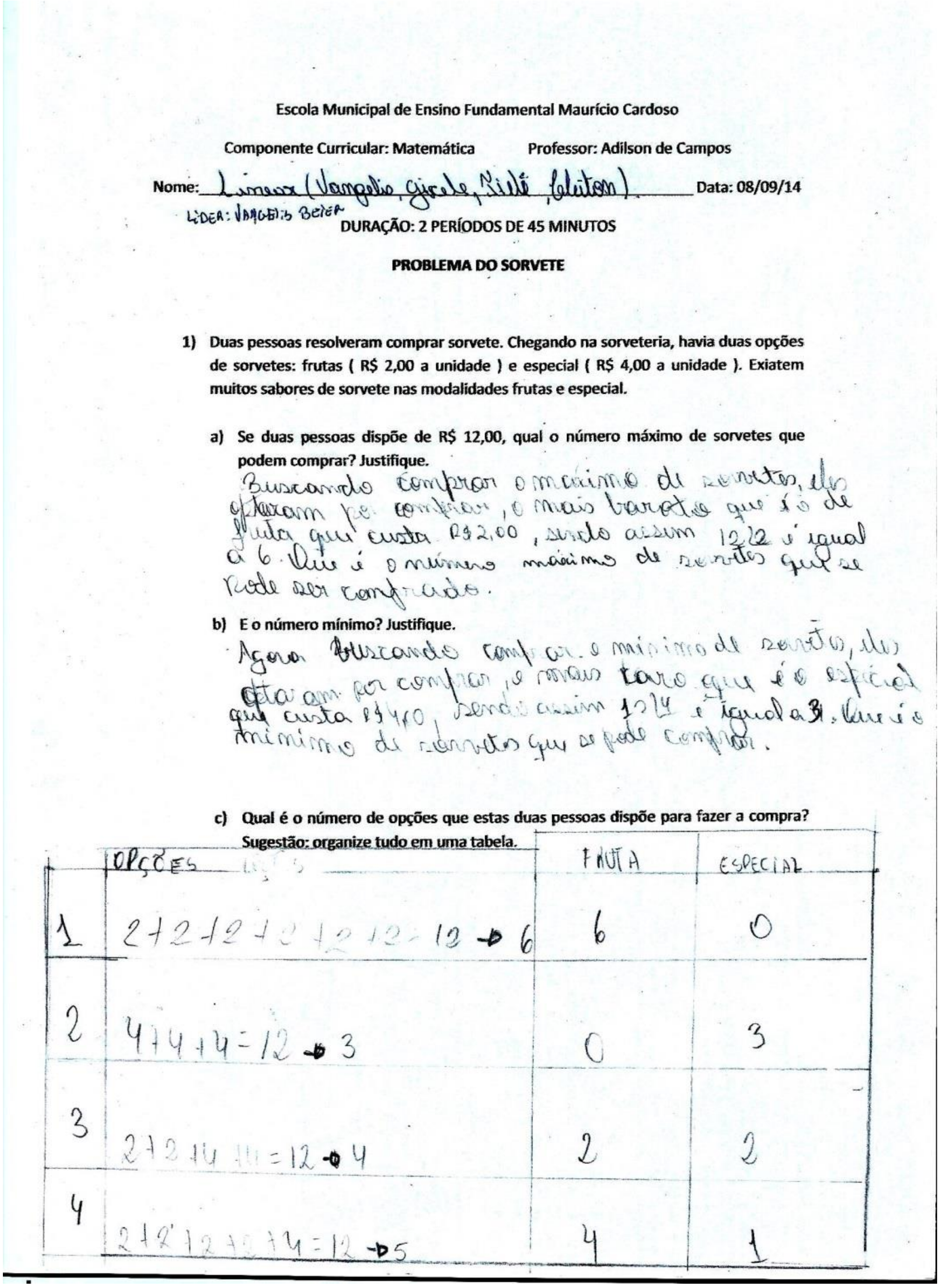
Para dar o menor valor possível, pegamos o maior valor para formar menos grupos.

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõe para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

OPÇÕES	FRUTAS	ESPECIAL
1	4	1
2	2	2
3	0	3
4	6	0

⇒ Dispõe de 4 opções, pois o valor é de R$ 12,00, e ao formar essas opções, podia ser só especial e só frutas. Mas, também podia ter os dois sabores juntos, que formaram mais 2 opções. 2+2 = 4 opções

Figura 6 – Protocolo do grupo 2 para o problema do sorvete.



Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso

Componente Curricular: Matemática Professor: Adilson de Campos

Nome: Limeira (Vangelis, Gisele, Lili, Cleiton) Data: 08/09/14

LÍDER: VANGELIS BEIER

DURAÇÃO: 2 PERÍODOS DE 45 MINUTOS

PROBLEMA DO SORVETE

1) Duas pessoas resolveram comprar sorvete. Chegando na sorveteria, havia duas opções de sorvetes: frutas (R$ 2,00 a unidade) e especial (R$ 4,00 a unidade). Exiatem muitos sabores de sorvete nas modalidades frutas e especial.

a) Se duas pessoas dispõe de R$ 12,00, qual o número máximo de sorvetes que podem comprar? Justifique.

Buscando comprar o máximo de sorvetes, eles optaram por comprar, o mais barato que é o de fruta que custa R$2,00, sendo assim 12/2 é igual a 6. Que é o número máximo de sorvetes que se pode ser comprado.

b) E o número mínimo? Justifique.

Agora buscando comprar o mínimo de sorvetes, eles optaram por comprar, o mais caro que é o especial que custa R$4,00, sendo assim 12/4 é igual a 3. Que é o mínimo de sorvetes que se pode comprar.

c) Qual é o número de opções que estas duas pessoas dispõe para fazer a compra? Sugestão: organize tudo em uma tabela.

	OPÇÕES	FRUTA	ESPECIAL
1	2+2+2+2+2+2=12 → 6	6	0
2	4+4+4=12 → 3	0	3
3	2+2+4+4=12 → 4	2	2
4	2+2+2+2+4=12 → 5	4	1

Figura 7 – Protocolo do grupo 3 para o problema do sorvete.

Na terceira aula e seguindo a mesma sistemática da aula anterior (tendo três momentos) foi proposto o problema do cinema.

PROBLEMA DO CINEMA

O valor da entrada de um cinema é R$ 24,00 por adulto e R$ 12,00 por criança, em todas as sessões. O gerente do cinema (com lotação para 100 pessoas) sabe que há prejuízo se a renda por cada sessão for inferior a R$ 480,00.

(a) Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão
de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

(b) Qual o maior número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

(c) Se uma determinada sessão tiver vendido 5 entradas para crianças e 28 para adultos, haverá lucro ou prejuízo? Explique.

(d) Ajude o gerente a organizar uma tabela de acordo com a quantidade de ingressos adquiridos de adulto e criança, para que seja feito um controle sobre o lucro ou prejuízo de determinada sessão.

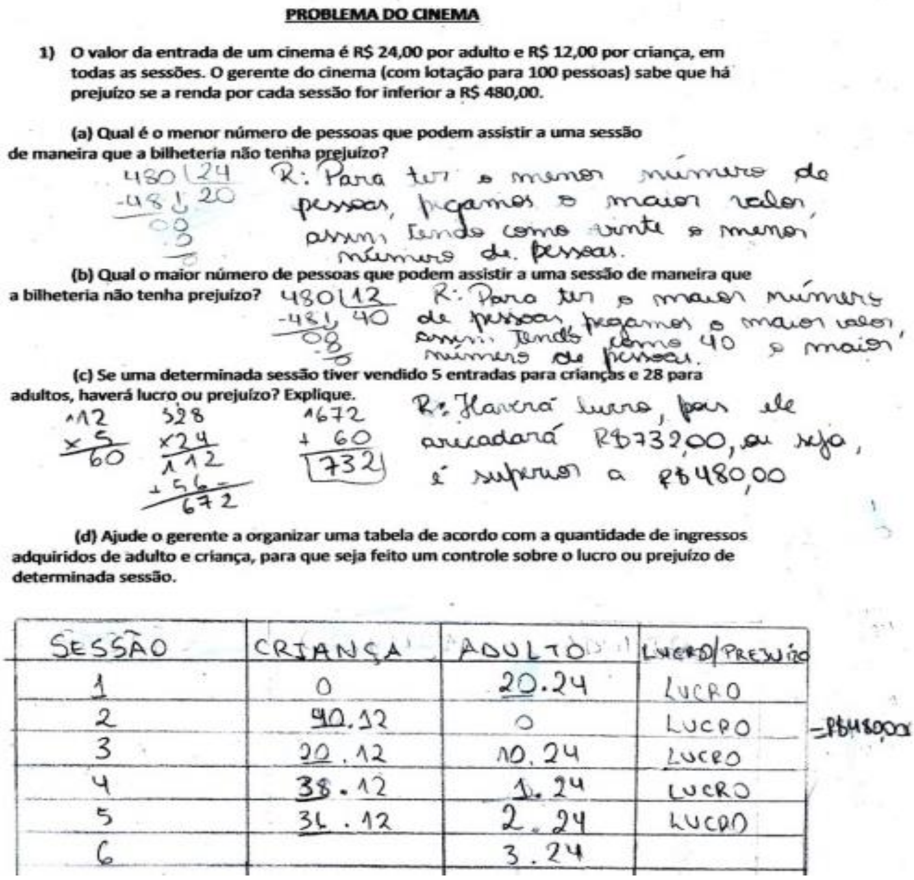
O objetivo principal desta questão era que os alunos percebessem o elevado número de soluções (21 ao todo) e já começassem a notar certa limitação no método da tentativa e erro.

No trabalho individual, os alunos conseguiram responder com certa tranquilidade os itens a, b e c. Porém, no item d não conseguiram organizar de forma correta a tabela e encontrar todas as soluções do problema.

Esta aluna (Figura 8) apresentou dificuldade na organização da tabela.

Outra aluna conseguiu encontrar mais soluções (Figura 9), porém não explicitou todas.

O protocolo do próximo aluno (Figura 10) é bem interessante. Mesmo encontrando somente três soluções das 21 possíveis, o mesmo consegue escrever a equação diofantina em função das variáveis e também realiza uma simplificação por doze, fato comentado na plenária da última aula. Já está aí o embrião da possibilidade otimizadora da linguagem algébrica para se abordar problemas.



PROBLEMA DO CINEMA

1) O valor da entrada de um cinema é R$ 24,00 por adulto e R$ 12,00 por criança, em todas as sessões. O gerente do cinema (com lotação para 100 pessoas) sabe que há prejuízo se a renda por cada sessão for inferior a R$ 480,00.

(a) Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

480 |24
-48 | 20
00

R: Para ter o menor número de pessoas, pegamos o maior valor, assim tendo como vinte o menor número de pessoas.

(b) Qual o maior número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

480 |12
-48 | 40
00

R: Para ter o maior número de pessoas, pegamos o menor valor, assim tendo como 40 o maior número de pessoas.

(c) Se uma determinada sessão tiver vendido 5 entradas para crianças e 28 para adultos, haverá lucro ou prejuízo? Explique.

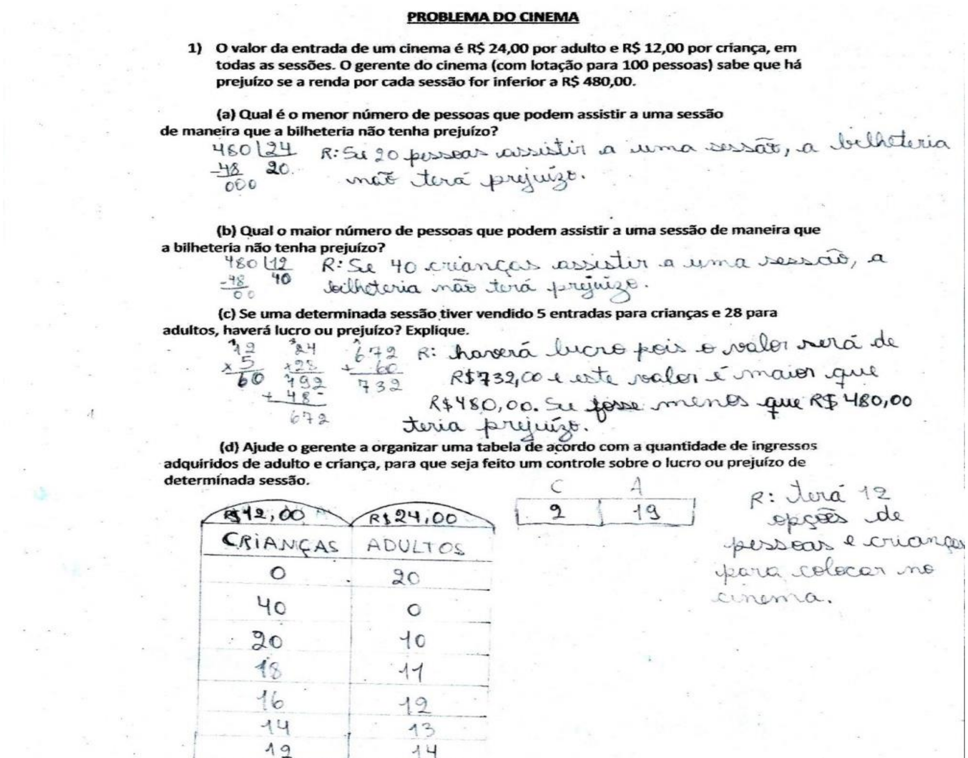
12 × 5 = 60
28 × 24: 112 + 56 = 672
672 + 60 = $\boxed{732}$

R: Haverá lucro, pois ele arrecadará R$732,00, ou seja, é superior a R$480,00

(d) Ajude o gerente a organizar uma tabela de acordo com a quantidade de ingressos adquiridos de adulto e criança, para que seja feito um controle sobre o lucro ou prejuízo de determinada sessão.

SESSÃO	CRIANÇA	ADULTO	LUCRO/PREJUÍZO
1	0	20.24	LUCRO
2	40.12	0	LUCRO = R$480,00
3	20.12	10.24	LUCRO
4	38.12	1.24	LUCRO
5	36.12	2.24	LUCRO
6		3.24	

Figura 8 – Protocolo da aluna X para o problema do cinema.



PROBLEMA DO CINEMA

1) O valor da entrada de um cinema é R$ 24,00 por adulto e R$ 12,00 por criança, em todas as sessões. O gerente do cinema (com lotação para 100 pessoas) sabe que há prejuízo se a renda por cada sessão for inferior a R$ 480,00.

(a) Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

480 |24
-48 | 20
000

R: Se 20 pessoas assistir a uma sessão, a bilheteria não terá prejuízo.

(b) Qual o maior número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

480 |12
-48 | 40
00

R: Se 40 crianças assistir a uma sessão, a bilheteria não terá prejuízo.

(c) Se uma determinada sessão tiver vendido 5 entradas para crianças e 28 para adultos, haverá lucro ou prejuízo? Explique.

12 × 5 = 60
24 × 28: 192 + 48 = 672
672 + 60 = 732

R: haverá lucro pois o valor será de R$732,00 e este valor é maior que R$480,00. Se fosse menos que R$480,00 teria prejuízo.

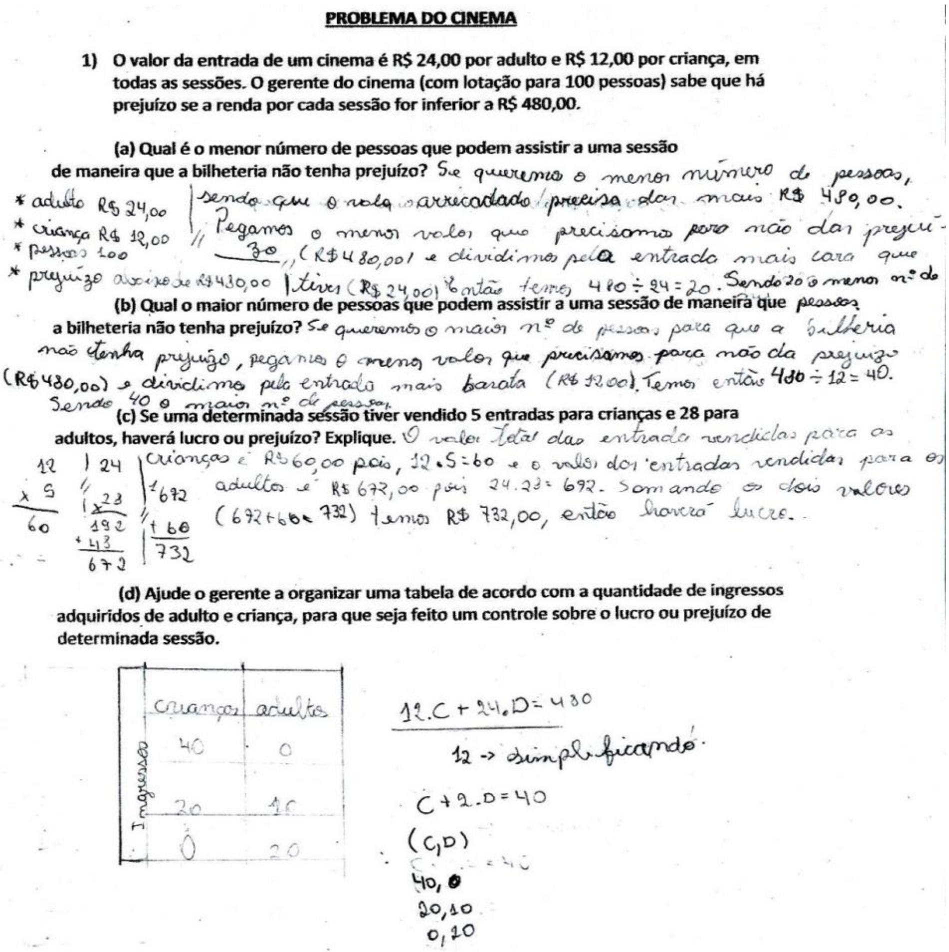
(d) Ajude o gerente a organizar uma tabela de acordo com a quantidade de ingressos adquiridos de adulto e criança, para que seja feito um controle sobre o lucro ou prejuízo de determinada sessão.

R$12,00	R$24,00
CRIANÇAS	ADULTOS
0	20
40	0
20	10
18	11
16	12
14	13
12	14
10	15
8	16
6	17
4	18

C	A
2	19

R: Terá 12 opções de pessoas e crianças para colocar no cinema.

Figura 9 – Protocolo da aluna Y para o problema do cinema.



PROBLEMA DO CINEMA

1) O valor da entrada de um cinema é R$ 24,00 por adulto e R$ 12,00 por criança, em todas as sessões. O gerente do cinema (com lotação para 100 pessoas) sabe que há prejuízo se a renda por cada sessão for inferior a R$ 480,00.

(a) Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo? Se queremos o menor número de pessoas, sendo que o valor arrecadado precisa dar mais R$ 480,00. Pegamos o menor valor que precisamos para não dar prejuízo (R$ 480,00) e dividimos pela entrada mais cara que tive (R$ 24,00) então temos 480 ÷ 24 = 20. Sendo 20 o menor nº de pessoas.

* adulto R$ 24,00
* criança R$ 12,00
* pessoas 100
* prejuízo abaixo de R$ 480,00

(b) Qual o maior número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo? Se queremos o maior nº de pessoas para que a bilheteria não tenha prejuízo, pegamos o menor valor que precisamos para não da prejuízo (R$ 480,00) e dividimos pela entrada mais barata (R$ 12,00). Temos então 480 ÷ 12 = 40. Sendo 40 o maior nº de pessoas.

(c) Se uma determinada sessão tiver vendido 5 entradas para crianças e 28 para adultos, haverá lucro ou prejuízo? Explique. O valor total das entrada vendidas para as crianças é R$ 60,00 pois, 12 . 5 = 60 e o valor dos entradas vendidas para os adultos é R$ 672,00 pois 24 . 28 = 672. Somando os dois valores (672 + 60 = 732) temos R$ 732,00, então houve lucro.

12 × 5 = 60; 24 × 28 = 192 + 48 = 672; 672 + 60 = 732

(d) Ajude o gerente a organizar uma tabela de acordo com a quantidade de ingressos adquiridos de adulto e criança, para que seja feito um controle sobre o lucro ou prejuízo de determinada sessão.

Ingressos	crianças	adultos
	40	0
	20	10
	0	20

$12.C + 24.D = 480$

12 → simplificando

$C + 2.D = 40$

(C, D)

40, 0

20, 10

0, 20

Figura 10 – Protocolo do aluno Z para o problema do cinema.

Para o trabalho em pequenos grupos, foram organizados quatro grupos que discutiram ao longo de meia hora e chegaram à uma resposta do grupo para a questão. A seguir segue o protocolo (Figura 11) apresentado pelo grupo 1.

Os outros três grupos apresentaram soluções similares nos três itens, chegando às vinte e uma soluções existentes.

Ao final da plenária, foi discutida a possibilidade de se expressar graficamente as soluções dos dois problemas até aqui abordados com o uso do plano cartesiano e também a linguagem de equações (resgatando o que propôs um dos alunos). Como dever de casa os alunos tiveram tal incumbência e a seguir são apresentado os dois protocolos referentes ao problema do sorvete (Figura 12) e ao problema do cinema (Figura 13).

PROBLEMA DO CINEMA

1) O valor da entrada de um cinema é R$ 24,00 por adulto e R$ 12,00 por criança, em todas as sessões. O gerente do cinema (com lotação para 100 pessoas) sabe que há prejuízo se a renda por cada sessão for inferior a R$ 480,00.

(a) Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

480 | 24
-48   20 pessoas
00

R: Para termos o menor número de pessoas na bilheteria, que não cause prejuízo temos que colocar só adultos na sessão

(b) Qual o maior número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria não tenha prejuízo?

480 | 12
-48   40 crianças
00

R: Para termos o maior número de pessoas na bilheteria, que não cause prejuízo temos que colocar só crianças na sessão.

(c) Se uma determinada sessão tiver vendido 5 entradas para crianças e 28 para adultos, haverá lucro ou prejuízo? Explique.

12 × 5 = 60

28 × 24: 112 + 56 = 672

672 + 60 = 732

R: Haverá lucro, pois R$732,00 é maior que R$480,00 e só terão prejuízo se for inferior a R$480,00.

(d) Ajude o gerente a organizar uma tabela de acordo com a quantidade de ingressos adquiridos de adulto e criança, para que seja feito um controle sobre o lucro ou prejuízo de determinada sessão.

R: Temos 21 opções para colocar pessoas e crianças em uma sessão de cinema.

Opções	Crianças	Adultos
1ª	40	0
2ª	38	1
3ª	36	2
4ª	34	3
5ª	32	4
6ª	30	5
7ª	28	6
8ª	26	7
9ª	24	8
10ª	22	9
11ª	20	10
12ª	18	11
13ª	16	12
14ª	14	13
15ª	12	14
16ª	10	15
17ª	8	16
18ª	6	17
19ª	4	18
20ª	2	19
21ª	0	20

Figura 11 – Protocolo do grupo 1 para o problema do cinema.

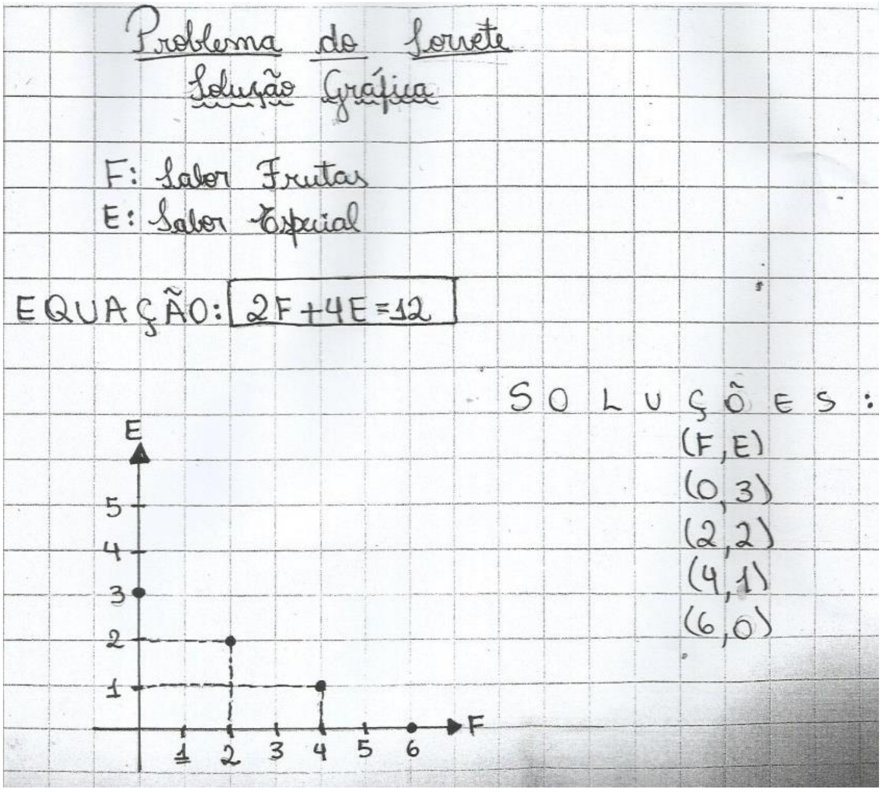


Figura 12 – Protocolo de uma aluna apresentando uma solução gráfica para o problema do sorvete.

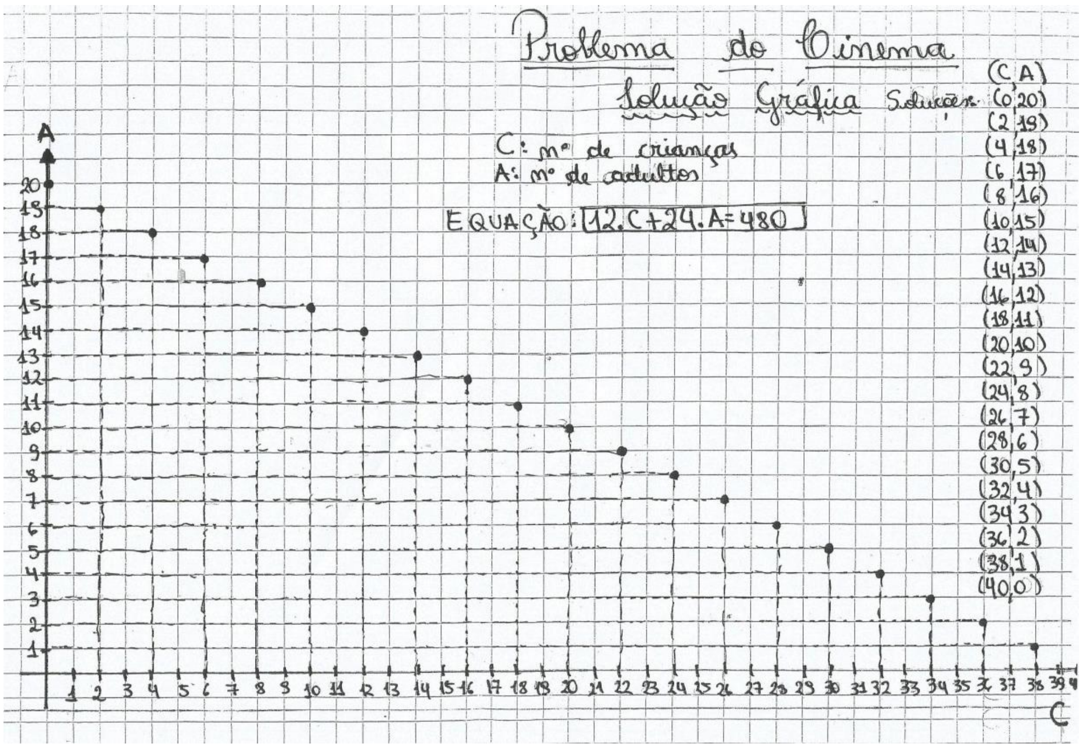


Figura 13 – Protocolo de uma aluna apresentando uma solução gráfica para o problema do cinema.

Tal forma de se expressar as soluções é extremamente interessante e permitiu um maior entendimento para aqueles alunos, possibilitando-os perceberem que as soluções são todas inteiras e mais: todas estão alinhadas. E que, embora os dois problemas admitam somente soluções não negativas, já se pode conjecturar a respeito do comportamento das soluções negativas, caso existissem.

Na quarta aula, foi apresentado o problema do futebol.

PROBLEMA DO FUTEBOL

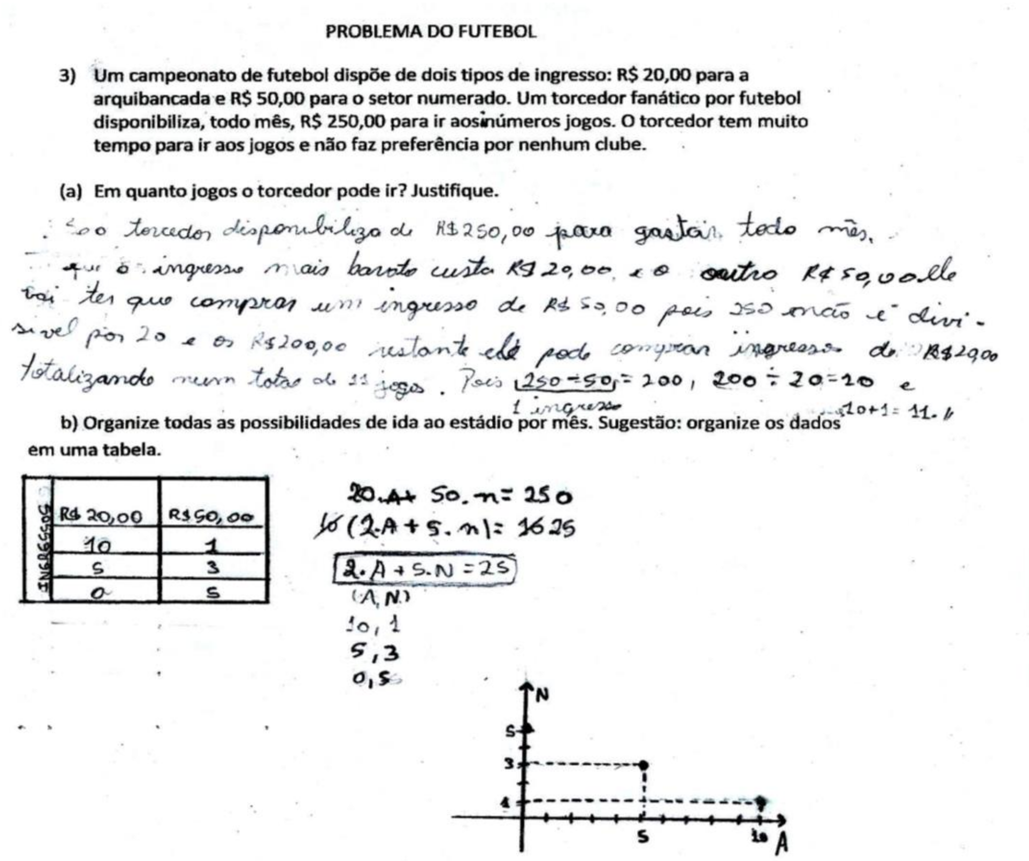
Um campeonato de futebol dispõe de dois tipos de ingresso: R$ 20,00 para a arquibancada e R$ 50,00 para o setor numerado. Um torcedor fanático por futebol disponibiliza, todo mês, R$ 250,00 para ir aos jogos. O torcedor tem muito tempo para ir aos jogos e não faz preferência por nenhum clube.

a) Em quanto jogos o torcedor pode ir? Justifique.

b) Organize todas as possibilidades de ida ao estádio por mês. Sugestão: organize os dados em uma tabela.

Neste problema, a exemplo do anterior, se coloca uma situação que começa por demonstrar o esgotamento do método da tentativa e erro, sugerindo a busca de outro método resolutivo. De acordo com o protocolo a seguir (Figura 14) apresentado por um aluno, é perceptível o uso dos divisores na busca da solução, onde o mesmo percebe no item (a) não ser possível comprar somente ingressos de R$ 20,00, pois 20 não divide 250. Já no caso dos ingressos que custam R$ 50,00 é possível comprá-los, uma vez que 50 divide 250. Cabe ressaltar o uso consciente da linguagem algébrica na escrita da equação (mesmo o problema não pedindo a escrita nesta forma), a simplificação por dez e finalmente as três soluções apresentadas de maneira gráfica.

Neste outro protocolo (Figura 15), a aluna não consegue entender bem o item (a), mas surpreendentemente, consegue organizar as três soluções no item (b) por meio de uma tabela.



PROBLEMA DO FUTEBOL

3) Um campeonato de futebol dispõe de dois tipos de ingresso: R$ 20,00 para a arquibancada e R$ 50,00 para o setor numerado. Um torcedor fanático por futebol disponibiliza, todo mês, R$ 250,00 para ir aos números jogos. O torcedor tem muito tempo para ir aos jogos e não faz preferência por nenhum clube.

(a) Em quanto jogos o torcedor pode ir? Justifique.

O torcedor disponibiliza de R$250,00 para gastar todo mês, que o ingresso mais barato custa R$20,00 e o outro R$50,00 ele vai ter que comprar um ingresso de R$50,00 pois 250 não e divisível por 20 e os R$200,00 restante ele pode comprar ingresso de R$20,00 totalizando num total de 11 jogos. Pois $\underbrace{250 - 50}_{1\ ingresso} = 200$, $200 \div 20 = 10$ e $10 + 1 = 11$.

b) Organize todas as possibilidades de ida ao estádio por mês. Sugestão: organize os dados em uma tabela.

INGRESSOS	R$ 20,00	R$50,00
	10	1
	5	3
	0	5

$20.A + 50.n = 250$

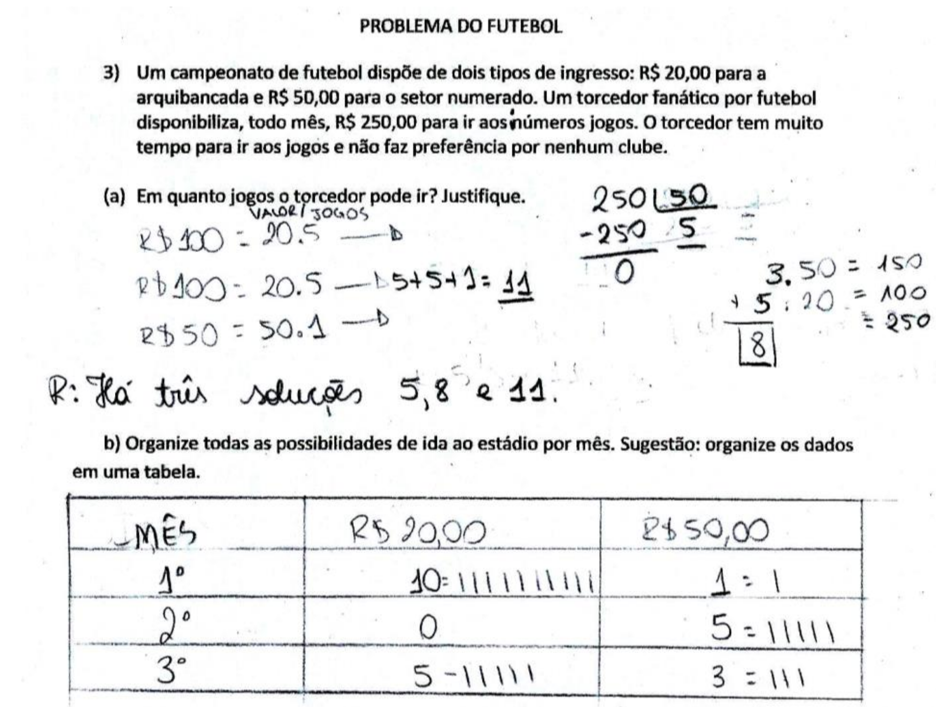
$\cancel{10}(2.A + 5.n) = 1625$

$\boxed{2.A + 5.N = 25}$

(A, N)
10, 1
5, 3
0, 5

N
5
3
1
5
10
A

Figura 14 – Protocolo apresentado pelo aluno E relativo ao problema do futebol.



PROBLEMA DO FUTEBOL

3) Um campeonato de futebol dispõe de dois tipos de ingresso: R$ 20,00 para a arquibancada e R$ 50,00 para o setor numerado. Um torcedor fanático por futebol disponibiliza, todo mês, R$ 250,00 para ir aos números jogos. O torcedor tem muito tempo para ir aos jogos e não faz preferência por nenhum clube.

(a) Em quanto jogos o torcedor pode ir? Justifique.

VALOR / JOGOS
R$100 = 20.5 →
R$100 = 20.5 → 5+5+1 = 11
R$50 = 50.1 →

250 | 50
-250 | 5
0

3.50 = 150
+ 5.20 = 100
= 250
[8]

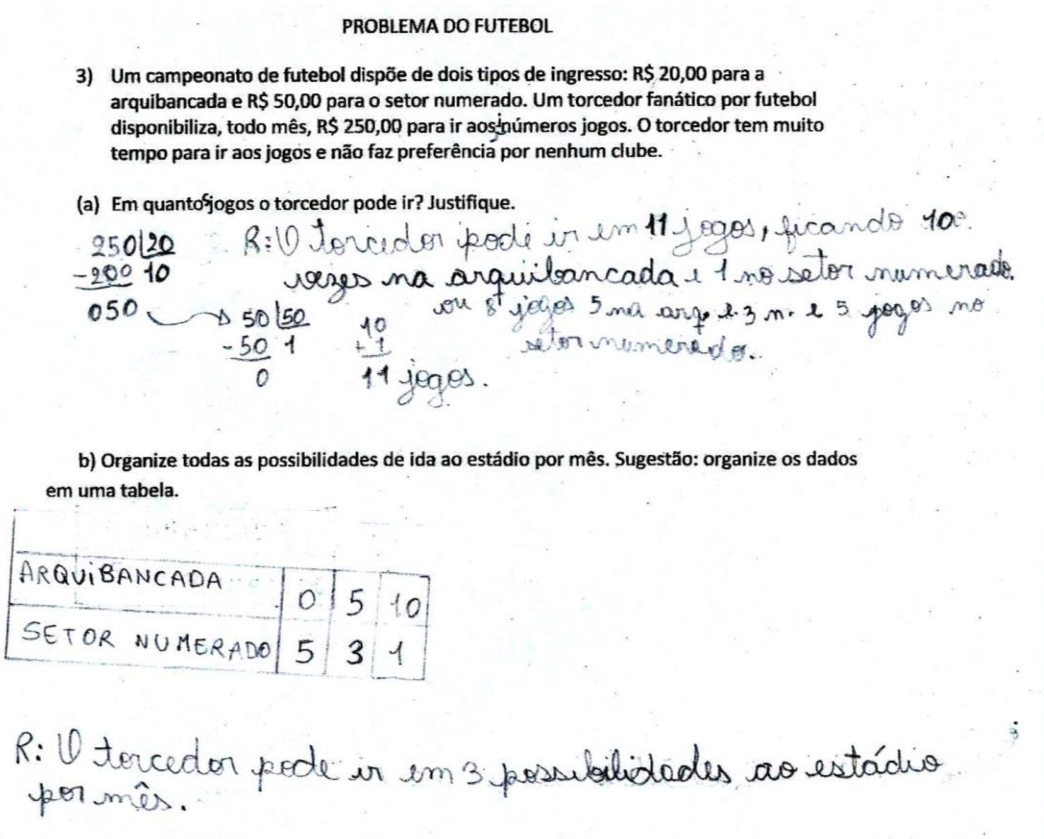
R: Há três soluções 5, 8 e 11.

b) Organize todas as possibilidades de ida ao estádio por mês. Sugestão: organize os dados em uma tabela.

MÊS	R$ 20,00	R$ 50,00
1º	10 = IIIIIIIIII	1 = I
2º	0	5 = IIIII
3º	5 - IIIII	3 = III

Figura 15 - Protocolo apresentado pela aluna F relativo ao problema do futebol.

Esta aluna (Figura 16) interpreta o item (a) como sendo o maior número possível de idas ao estádio, mas também coloca outras possibilidades, tendo em mente a questão da divisibilidade.


PROBLEMA DO FUTEBOL

3) Um campeonato de futebol dispõe de dois tipos de ingresso: R$ 20,00 para a arquibancada e R$ 50,00 para o setor numerado. Um torcedor fanático por futebol disponibiliza, todo mês, R$ 250,00 para ir aos números jogos. O torcedor tem muito tempo para ir aos jogos e não faz preferência por nenhum clube.

(a) Em quantos jogos o torcedor pode ir? Justifique.

250 | 20
-200 10
050 → 50 | 50
-50 1
0

10
+1
11 jogos.

R: O torcedor pode ir em 11 jogos, ficando 10 vezes na arquibancada e 1 no setor numerado. ou 8 jogos 5 na arq. e 3 n. e 5 jogos no setor numerado.

b) Organize todas as possibilidades de ida ao estádio por mês. Sugestão: organize os dados em uma tabela.

ARQUIBANCADA	0	5	10
SETOR NUMERADO	5	3	1

R: O torcedor pode ir em 3 possibilidades ao estádio por mês.

Figura 16 – Protocolo apresentado pelo aluno G relativo ao problema do futebol.

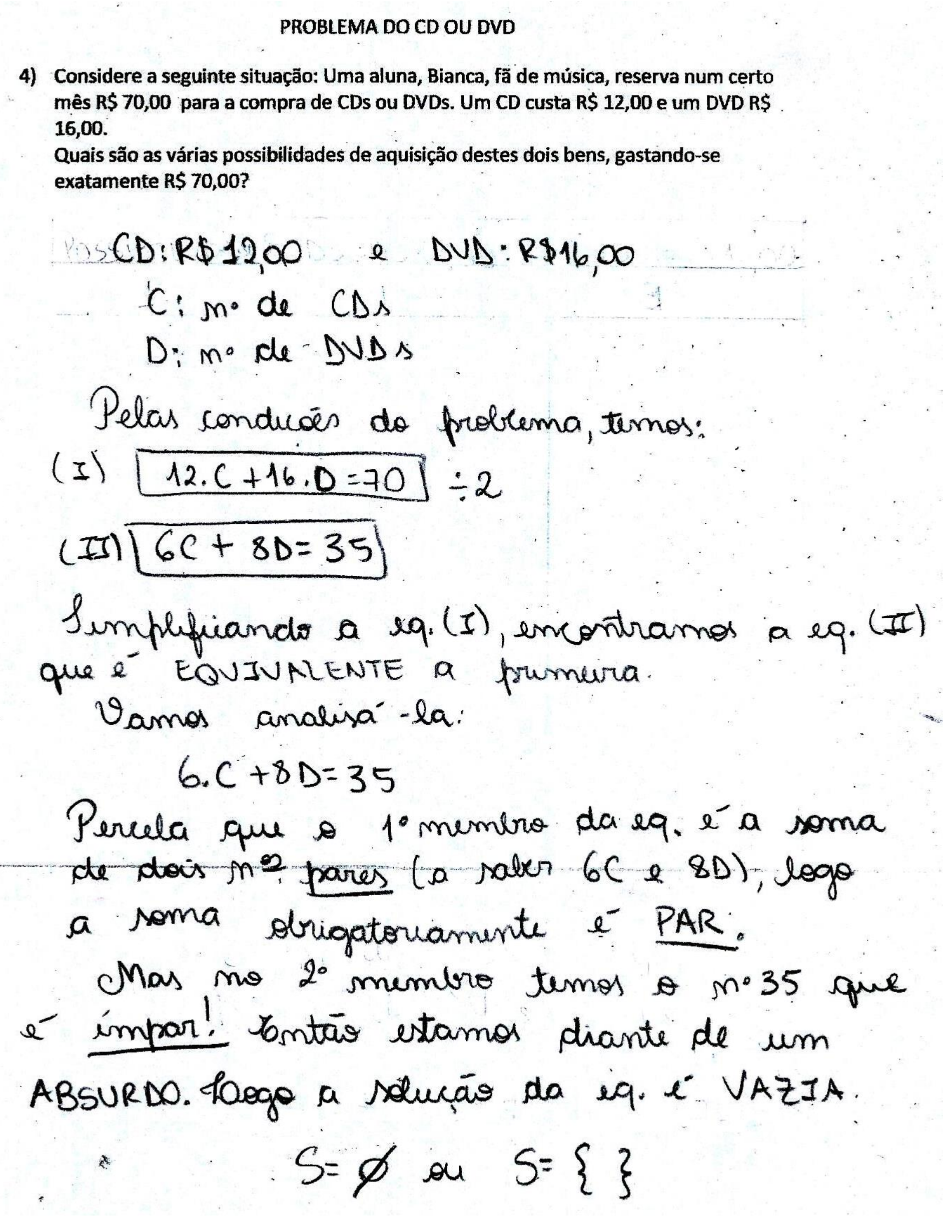
Ao final dessa aula, durante a plenária, os alunos foram encorajados a expressarem as situações contidas nos problemas em uma linguagem algébrica mais consistente, usando o exemplo do aluno que assim procedeu e logrou êxito em seu intento. Os alunos perceberam também que em cada situação sempre havia duas incógnitas e que em alguns casos era possível simplificar a equação original e assim obter uma equação equivalente e mais simples de se trabalhar.

Finalmente na quinta e última aula desta sessão foi proposto o problema do CD ou DVD. Mas agora com os alunos mais experientes e com maiores possibilidades no trato algébrico.

PROBLEMA DO CD OU DVD
Considere a seguinte situação: Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD R$ 16,00. Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente R$ 70,00?

Nesta questão, os alunos permaneceram por muito tempo fazendo uso do método da tentativa e erro. Em seguida, como não lograram êxito, alguns começaram a escrever a equação que representava o problema em função das duas variáveis e depois simplificando. Mas como, mesmo assim, não chegaram a nenhuma solução, alguns já foram logo disparando: “isto aqui é impossível professor”, outros diziam “é impossível fazer esta compra”. Procurei encorajá-los a dizerem o porquê disso, mas ninguém conseguiu dar uma resposta convincente.

Então passamos ao trabalho no grande grupo (plenária), onde (já com o auxílio do professor) os alunos novamente se debruçaram sobre a questão e de forma conjunta se chegou à solução usando-se a questão da paridade. A seguir é apresentado um protocolo (Figura 17).



PROBLEMA DO CD OU DVD

4) Considere a seguinte situação: Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD R$ 16,00.
Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente R$ 70,00?

CD: R$ 12,00 e DVD: R$ 16,00
C: nº de CDs
D: nº de DVDs

Pelas condições do problema, temos:

(I) $\boxed{12.C+16.D=70}$ $\div 2$

(II) $\boxed{6C+8D=35}$

Simplificando a eq. (I), encontramos a eq. (II) que é EQUIVALENTE a primeira.
Vamos analisá-la:

$6.C+8D=35$

Perceba que o 1º membro da eq. é a soma de dois nº pares (a saber 6C e 8D), logo a soma obrigatoriamente é PAR.
Mas no 2º membro temos o nº 35 que é ímpar! Então estamos diante de um ABSURDO. Logo a solução da eq. é VAZIA.

$S=\emptyset$ ou $S=\{\ \}$

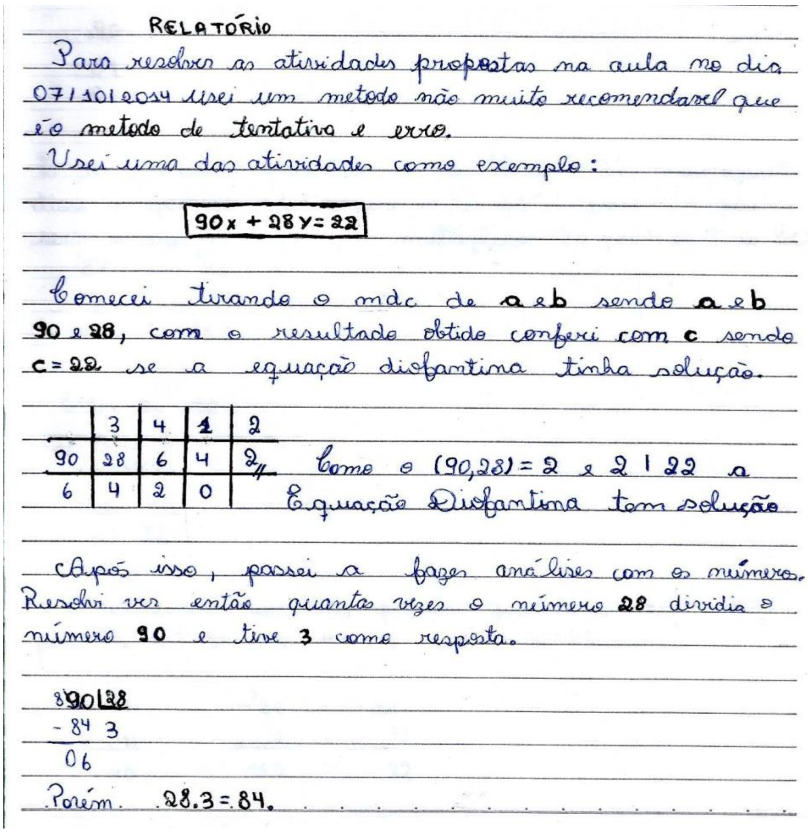
Figura 17 – Protocolo de um aluno representando a solução (elaborada em conjunto) para o problema do cd/dvd.

3.4.2 Experimentação na 2ª sessão

Ao final da última aula da primeira sessão (após uma ampla análise sobre a questão da paridade e já conjecturando sobre o uso do mdc na solução de uma equação diofantina), foram propostas algumas equações diofantinas como tema de casa.

O objetivo dessa atividade era que os alunos percebessem a limitação do método da tentativa e erro e também se começasse a trabalhar diretamente com as equações diofantinas para em um momento posterior voltar à resolução de problemas.

A maioria dos alunos não conseguiu encontrar uma solução particular para as equações, porém um aluno conseguiu exprimir uma solução particular para cada equação proposta (eram cinco equações ao todo). Questionado em aula, o mesmo disse que levou aproximadamente duas horas e trinta minutos realizando suas tentativas e fazendo os retrospectos (verificações). Fato este realmente salutar (corroborando com a constatação de os alunos serem receptivos e buscarem superar desafios/problemas). Foi solicitado pelo professor que o aluno relatasse por escrito a sua estratégia. Esse registro corresponde ao protocolo colocado a seguir (Figura 18 e Figura 19).


RELATÓRIO

Para resolver as atividades propostas na aula no dia 07/10/2014 usei um metodo não muito recomendavel que é o metodo de tentativa e erro.

Usei uma das atividades como exemplo:

$$\boxed{90x + 28y = 22}$$

Comecei tirando o mdc de **a** e **b** sendo **a** e **b** **90** e **28**, com o resultado obtido conferi com **c** sendo **c = 22** se a equação diofantina tinha solução.

	3	4	1	2
90	28	6	4	2
6	4	2	0	

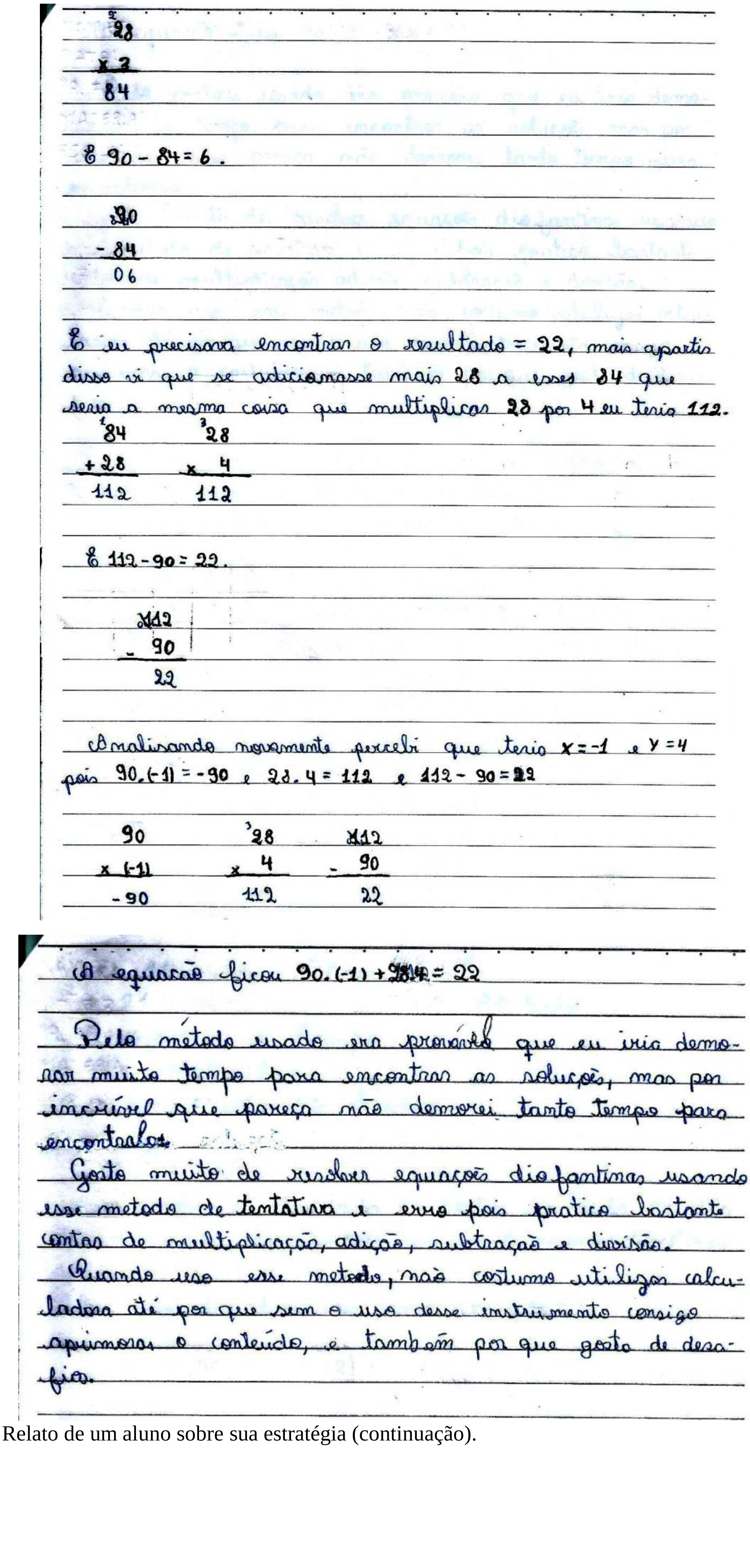
Como o (90,28) = 2 e 2 | 22 a Equação Diofantina tem solução

Após isso, passei a fazer análises com os números. Resolvi ver então quantas vezes o número **28** dividia o número **90** e tive **3** como resposta.

90 |28
-84 3
06

Porém. 28.3 = 84.

Figura 18 – Relato de um aluno sobre sua estratégia.



28
x 3
84

E 90 − 84 = 6.

90
− 84
06

E eu precisava encontrar o resultado = 22, mais apartir disso vi que se adicionasse mais 28 a esses 84 que seria a mesma coisa que multiplicar 28 por 4 eu teria 112.

84
+ 28
112

28
x 4
112

E 112 − 90 = 22.

112
− 90
22

Analisando novamente percebi que teria x = −1 e y = 4 pois 90.(−1) = −90 e 28.4 = 112 e 112 − 90 = 22

90
x (−1)
−90

28
x 4
112

112
− 90
22

A equação ficou 90.(−1) + 28.4 = 22

Pelo método usado era provável que eu iria demorar muito tempo para encontrar as soluções, mas por incrível que pareça não demorei tanto tempo para encontralas.
Gosto muito de resolver equações diofantinas usando esse metodo de tentativa e erro pois pratico bastante contas de multiplicação, adição, subtração e divisão.
Quando uso esse metodo, naò costumo utilizar calculadora até por que sem o uso desse instrumento consigo aprimorar o conteúdo, e também por que gosto de desafios.

Figura 19 – Relato de um aluno sobre sua estratégia (continuação).

É importante mencionar a necessidade de se dar espaço em sala de aula a fim de que o aluno possa justificar as sua afirmações.

> [...] muitas pesquisas estão mostrando que existem elementos referenciais exteriores (núcleos “concretos”) que participam da produção dos alunos, o que sugere fortemente que a aprendizagem pode ser fomentada na medida em que se ofereça a possibilidade de o aluno afirmar coisas e justificar suas afirmações. Parece-nos que o problema não é, então, encontrar boas “representações” (materiais manipulativos, desenhos, jogos etc), mas promover experiências e reflexões.(LINS, 1997, p.55e56).

Foi necessária uma intervenção do professor no sentido de não desqualificar o método da tentativa e erro, mas de considerar suas limitações em determinados contextos. Outro fato que se pode constatar a partir do relato colhido é a maturidade matemática deste estudante, abrindo a possibilidade da introdução de conceitos mais aprofundados de aritmética e álgebra a fim de se resolver com mais embasamento matemático as equações diofantinas.

Para muitos, a introdução da álgebra e um aprofundamento na aritmética não dever ser realizado no nível fundamental sob o pretexto de que estes adolescentes não teriam alcançado o nível de desenvolvimento intelectual requerido. Então a estratégia natural seria postergar tais estudos.

O adiamento de tais estudos foram postergados em alguns países, como a Inglaterra por exemplo, com resultados nada positivos.

> O resultado geral foi uma geração ou mais de alunos que terminavam o equivalente ao nosso primeiro grau sem qualquer educação algébrica, ou, no máximo, no caso dos alunos classificados na faixa superior em matemática, com uma formação superficial. Ainda hoje, a universidade inglesa sente o efeito desse processo sobre alunos ingressantes.(LINS,1997,p. 94).

Dessa forma, nesta segunda sessão, foi trabalhado de um modo diferente. Embora não se tivesse problema para resolver, a ideia era conhecer determinados resultados (teoremas e proposições) a fim de se voltar aos problemas. Desse modo, mesmo não se trabalhando diretamente com problemas, os mesmos sempre estiveram no horizonte.

Na aula seis realizou-se uma revisão sobre o máximo divisor comum e o método conhecido como Algoritmo de Euclides para a sua determinação. Na oportunidade também se realacionou o mdc dos coeficientes de uma equação diofantina com o termo independente (a partir da ideia de divisibilidade) e com isso a possibilidade de uma equação diofantina ter soluções ou não.

Na aula sete, a partir do Algoritmo de Euclides discutido na aula anterior, foi apresentado um resultado muito imporante: o Algoritmo de Euclides estendido ou Teorema de Bèzout. Embora a prova formal não foi apresentada aos alunos, os mesmos ficaram sabendo da existência de tal prova e que só a partir da mesma se podia fazer uso do Teorema.

Nas aulas oito e nove, foi dada a possibilidade para que os alunos praticassem muitos exercícios envolvendo o Algoritmo de Euclides e o Teorema de Bèzout. Tais exercícios se justificam, pois estão relacionados a resultados importantes para o nosso estudo de resolução de problemas e equações diofantinas. Não sendo, portanto, apenas um trabalho repetitivo, onde se tem o algoritmo pelo algoritmo.

> A questão de melhorar a "destreza" dos alunos nessa manipulação depende obviamente de algum tipo de prática, seja em atividades como as que indicamos ou mesmo em simples "exercícios". O que deve ficar claro, no entanto, é que exercícios só podem ser eficazes caso os alunos compreendam a natureza do que estão fazendo, para saber que, naquele momento, trata- se de praticar um certo conjunto de técnicas, mas que essa prática está inserida em um quadro maior, e que ela não se justificaria em si mesma. (LINS,1997,p.156).

Algo muito importante ocorrido nessa segunda sessão foram as considerações realizadas em aula sobre a biografia de três importantes matemáticos: Euclides, Diofanto e Bèzout. Essas considerações surgiram da necessidade de se contextualizar o saber matemático do ponto de vista histórico, colocando-o como uma construção humana cooperativa e paulatina ao longo dos tempos.

3.4.3 Experimentação na 3ª sessão

Nesta sessão, composta por oito aulas, após os alunos terem contato com o máximo divisor comum, Algoritmo de Euclides e Teorema de Bézout (realizado na 2ª sessão), voltou-se à resolução de problemas e buscou-se em seguida relacionar o que fora aprendido na segunda sessão com a resolução das equações diofantinas.

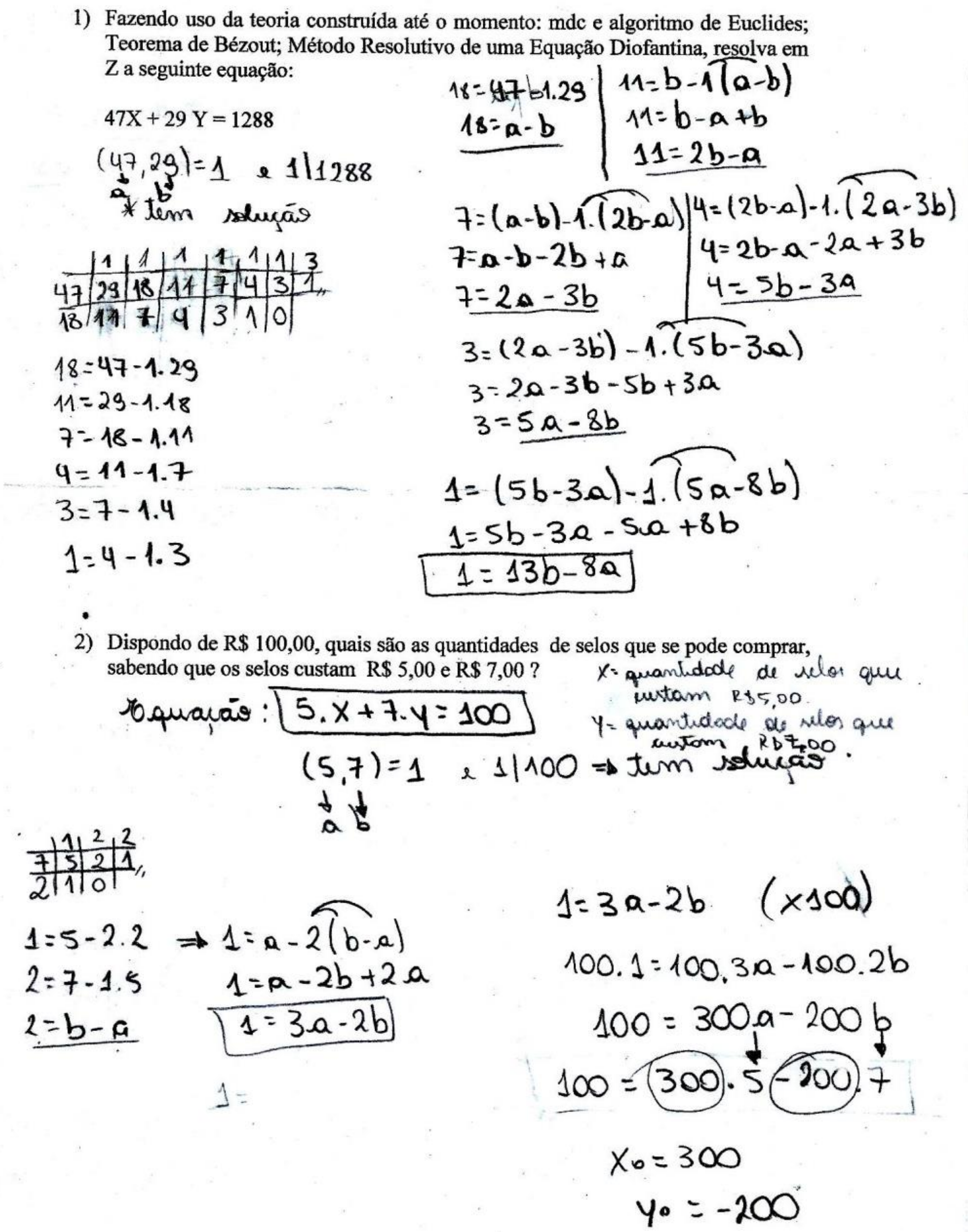
Nesta sessão foi apresentada a condição para a solução de uma equação diofantina usando o máximo divisor comum, bem como a explicitação da solução geral em função de uma solução particular de uma equação diofantina.

Dessa forma, os alunos tiveram mais subsídios matemáticos para resolver uma equação diofantina e pensar sobre o comportamento das soluções, caso existissem. A questão das soluções foi algo bem especial, pois muitos alunos acreditavam que a solução, caso existisse, seria única.

Um grande avanço para os alunos foi perceber que a partir de qualquer solução particular poder-se-ia encontrar infinitas soluções de uma equação diofantina, mas que, devido aos dados do problemas, apenas algumas (ou talvez nenhuma) satisfariam os dados do enunciado.

Um dos trabalhos propostos foi a resolução da equação diofantina 47X + 29 Y = 1288 e do seguinte problema: dispondo de R$ 100,00, quais são as quantidades de selos que se pode comprar, sabendo que os selos custam R$ 5,00 e R$ 7,00.

A maioria dos alunos conseguiu responder de maneira satisfatória as duas questões, usando toda teoria construída até o momento. A seguir tem-se um protocolo (Figura 20 e Figura 21) de uma aluna, que consegue chegar à solução geral x = - 10304 + 29t e y = 16744 – 47t , sendo t um parâmetro inteiro e na segunda questão explicita a solução geral da equação diofantina e em seguida usa os parâmetros t = - 40, t = - 41 e t = - 42 para encontrar as três soluções particulares que respondem à questão.


1) Fazendo uso da teoria construída até o momento: mdc e algoritmo de Euclides; Teorema de Bézout; Método Resolutivo de uma Equação Diofantina, resolva em Z a seguinte equação:

47X + 29 Y = 1288

(47, 29) = 1 e 1|1288 ⇒ tem solução

	1	1	1	1	1	1	3
47	29	18	11	7	4	3	1
18	11	7	4	3	1	0	

18 = 47 - 1.29
11 = 29 - 1.18
7 = 18 - 1.11
4 = 11 - 1.7
3 = 7 - 1.4
1 = 4 - 1.3

18 = 47 - 1.29
18 = a - b

11 = b - 1(a - b)
11 = b - a + b
11 = 2b - a

7 = (a - b) - 1.(2b - a)
7 = a - b - 2b + a
7 = 2a - 3b

4 = (2b - a) - 1.(2a - 3b)
4 = 2b - a - 2a + 3b
4 = 5b - 3a

3 = (2a - 3b) - 1.(5b - 3a)
3 = 2a - 3b - 5b + 3a
3 = 5a - 8b

1 = (5b - 3a) - 1.(5a - 8b)
1 = 5b - 3a - 5a + 8b
$\boxed{1 = 13b - 8a}$

2) Dispondo de R$ 100,00, quais são as quantidades de selos que se pode comprar, sabendo que os selos custam R$ 5,00 e R$ 7,00 ?

X = quantidade de selos que custam R$5,00.
Y = quantidade de selos que custam R$7,00.

Equação: $\boxed{5.X + 7.Y = 100}$

(5, 7) = 1 e 1|100 ⇒ tem solução.

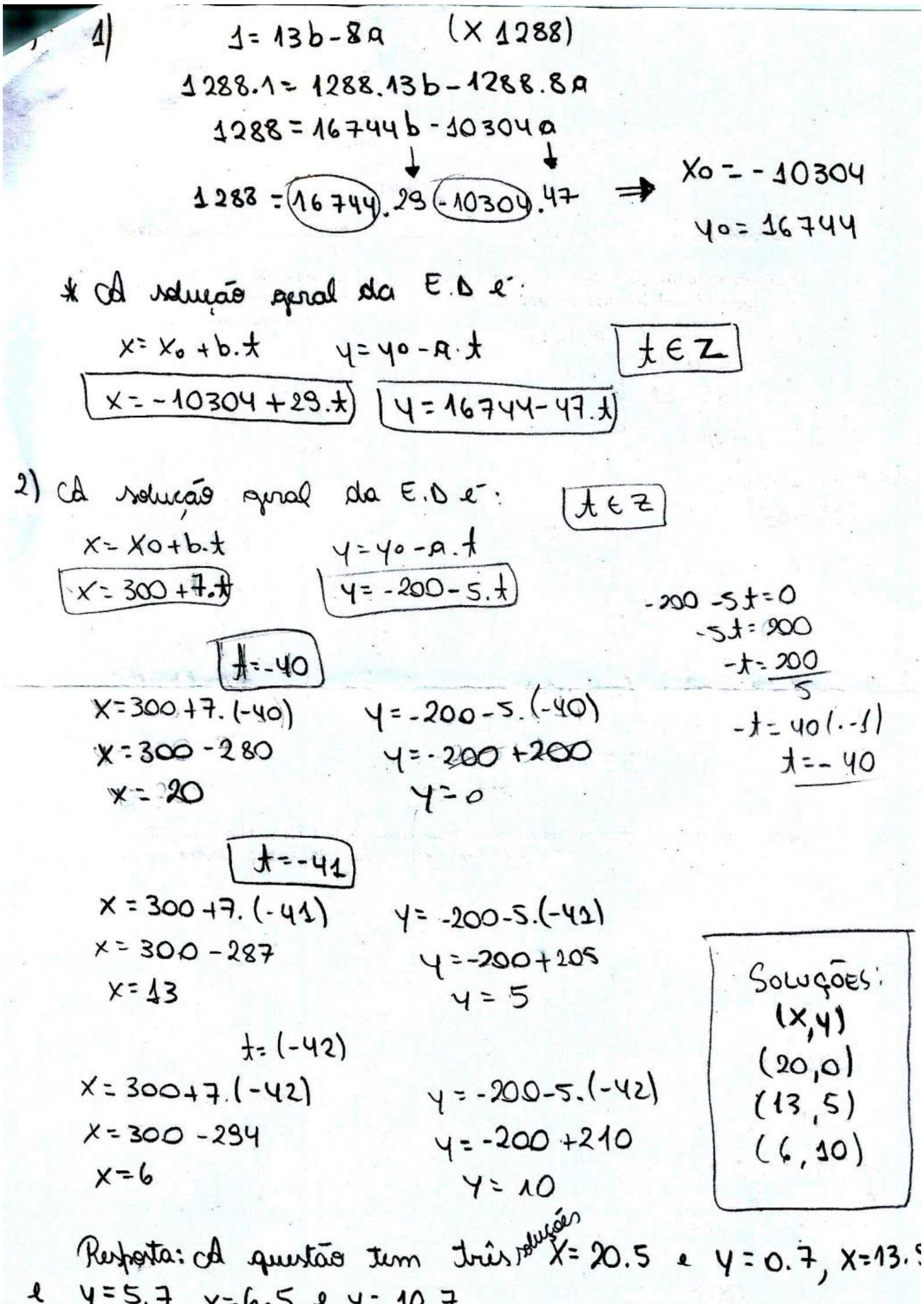
	1	2	2
7	5	2	1
2	1	0	

1 = 5 - 2.2 ⇒ 1 = a - 2(b - a)
2 = 7 - 1.5   1 = a - 2b + 2a
2 = b - a $\boxed{1 = 3a - 2b}$

1 = 3a - 2b (x100)
100.1 = 100.3a - 100.2b
100 = 300a - 200b
100 = 300.5 - 200.7

X₀ = 300
Y₀ = -200

Figura 20 – Protocolo de uma aluna Z aplicando (em duas situações) os conhecimentos adquiridos em aula.



1) $1 = 13b - 8a \quad (\times 1288)$

$1288 \cdot 1 = 1288 \cdot 13b - 1288 \cdot 8a$

$1288 = 16744b - 10304a$

$1288 = 16744 \cdot 29 - 10304 \cdot 47 \Rightarrow x_0 = -10304$, $y_0 = 16744$

* A solução geral da E.D é:

$x = x_0 + b \cdot t \qquad y = y_0 - a \cdot t \qquad \boxed{t \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{x = -10304 + 29 \cdot t} \quad \boxed{y = 16744 - 47 \cdot t}$

2) A solução geral da E.D é: $\boxed{t \in \mathbb{Z}}$

$x = x_0 + b \cdot t \qquad y = y_0 - a \cdot t$

$\boxed{x = 300 + 7 \cdot t} \quad \boxed{y = -200 - 5 \cdot t}$

$-200 - 5t = 0$

$-5t = 200$

$-t = \frac{200}{5}$

$-t = 40 \; (\cdot -1)$

$t = -40$

$\boxed{t = -40}$

$x = 300 + 7 \cdot (-40) \qquad y = -200 - 5 \cdot (-40)$

$x = 300 - 280 \qquad y = -200 + 200$

$x = 20 \qquad y = 0$

$\boxed{t = -41}$

$x = 300 + 7 \cdot (-41) \qquad y = -200 - 5 \cdot (-41)$

$x = 300 - 287 \qquad y = -200 + 205$

$x = 13 \qquad y = 5$

$t = (-42)$

$x = 300 + 7 \cdot (-42) \qquad y = -200 - 5 \cdot (-42)$

$x = 300 - 294 \qquad y = -200 + 210$

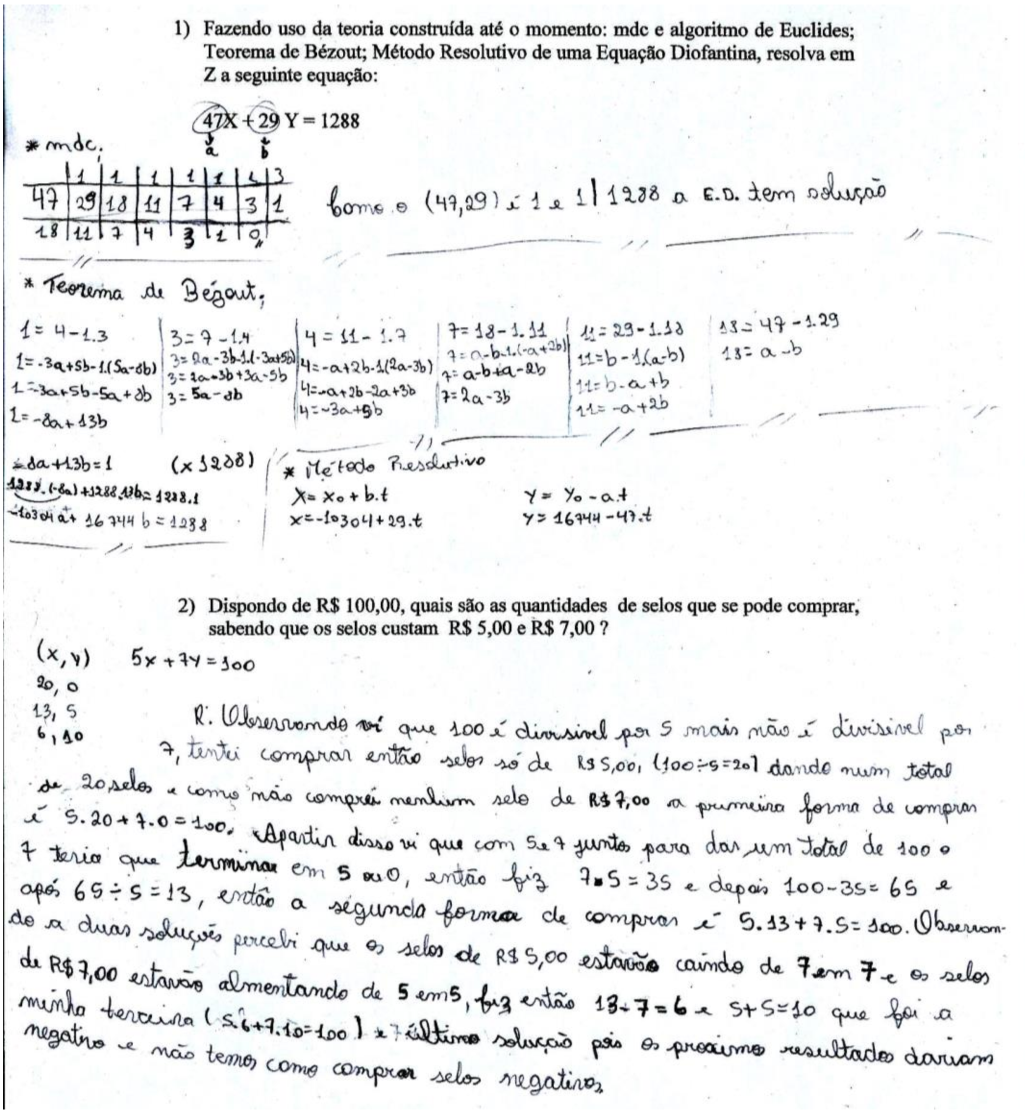
$x = 6 \qquad y = 10$

Soluções: (x, y): $(20, 0)$, $(13, 5)$, $(6, 10)$

Resposta: A questão tem três soluções $x = 20.5$ e $y = 0.7$, $x = 13.5$ e $y = 5.7$, $x = 6.5$ e $y = 10.7$.

Figura 21 – Protocolo de uma aluna Z aplicando (em duas situações) os conhecimentos adquiridos em aula (continuação).

Neste outro protocolo (Figura 22), o estudante resolve de maneira similar a primeira questão, mas na segunda não parte para a solução algébrica da equação diofantina, preferindo pensar usando conceitos de divisibilidade e finalmente explicitando e justificando as três soluções do problema.



1) **Fazendo uso da teoria construída até o momento: mdc e algoritmo de Euclides; Teorema de Bézout; Método Resolutivo de uma Equação Diofantina, resolva em Z a seguinte equação:**

47X + 29 Y = 1288

a b

* mdc.

	1	1	1	1	1	1	3
47	29	18	11	7	4	3	1
18	11	7	4	3	1	0	

Como o (47,29) é 1 e 1 | 1288 a E.D. tem solução

* Teorema de Bézout.

1 = 4 − 1.3
1 = −3a + 5b − 1.(5a − 8b)
1 = −3a + 5b − 5a + 8b
1 = −8a + 13b

3 = 7 − 1.4
3 = 2a − 3b − 1.(−3a + 5b)
3 = 2a − 3b + 3a − 5b
3 = 5a − 8b

4 = 11 − 1.7
4 = −a + 2b − 1.(2a − 3b)
4 = −a + 2b − 2a + 3b
4 = −3a + 5b

7 = 18 − 1.11
7 = a − b − 1.(−a + 2b)
7 = a − b + a − 2b
7 = 2a − 3b

11 = 29 − 1.18
11 = b − 1.(a − b)
11 = b − a + b
11 = −a + 2b

18 = 47 − 1.29
18 = a − b

−8a + 13b = 1 (x 1288)
1288.(−8a) + 1288.13b = 1288.1
−10304 a + 16744 b = 1288

* Método Resolutivo

X = x₀ + b.t → $X = x_0 + b.t$
x = −10304 + 29.t

Y = y₀ − a.t → $Y = y_0 - a.t$
y = 16744 − 47.t

2) **Dispondo de R$ 100,00, quais são as quantidades de selos que se pode comprar, sabendo que os selos custam R$ 5,00 e R$ 7,00 ?**

(x, y) 5x + 7y = 100
20, 0
13, 5
6, 10

R: Observando vi que 100 é divisível por 5 mais não é divisível por 7, tentei comprar então selos só de R$ 5,00, (100 ÷ 5 = 20) dando num total de 20 selos e como não comprei nenhum selo de R$ 7,00 a primeira forma de comprar é 5.20 + 7.0 = 100. Apartir disso vi que com 5 e 7 juntos para dar um total de 100 o 7 teria que terminar em 5 ou 0, então fiz 7.5 = 35 e depois 100 − 35 = 65 e após 65 ÷ 5 = 13, então a segunda forma de comprar é 5.13 + 7.5 = 100. Observando a duas soluções percebi que os selos de R$ 5,00 estavão caindo de 7 em 7 e os selos de R$ 7,00 estavão almentando de 5 em 5, fiz então 13 − 7 = 6 e 5 + 5 = 10 que foi a minha terceira (5.6 + 7.10 = 100) e última solução pois os proximos resultados dariam negativo e não temos como comprar selos negativos

Figura 22 – Protocolo de um aluno W aplicando (em duas situações) os conhecimentos adquiridos em aula.

Dessa forma, na terceira sessão, os alunos tiveram a oportunidade de voltar à resolução de problemas, mas agora podendo fazer o uso de resultados importantes que foram apresentados. Vale destacar que se deu muito valor aos processor heurísticos da tentativa e erro e do uso dos critérios de divisibilidade para a resolução das questões. Por se tratarem de adolescentes filhos de pequenos agricultores, fazia-se a seguinte analogia: “as vezes é mais interessante se usar o serrote ao invés da motosserra”, ou seja, um método bastante simples como da tentativa e erro pode muito bem responder o problema, ao passo que usar toda a teoria construída para a resolução pode ser até desnecessário e dispendioso (como exemplo disso temos os protocolos anteriores).

3.5 Análise a posteriori

Uma das características fundamentais da Engenharia Didática é a sua validação interna, pois ela se baseia na confrontação entre a análise a priori, que, por sua vez, se apoia no quadro teórico, e a análise a posteriori. De modo que a singularidade da Engenharia Didática não repousa em seus objetivos, mas em suas características de funcionamento metodológico.

> As investigações que recorrem à experimentação em sala de aula, muitas vezes, incluem uma avaliação externa de grupos experimentais ou grupos de testemunhos diferentes, para verificar sua validade. Na Engenharia Didática, a validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori [...] o confronto destas duas análises, a priori e a posteriori, consiste em investigar aquilo que foi considerado nas hipótese e que, na prática, sofreu distorções, deixando de ser válido.(CARNEIRO,2005, p. 101).

A ideia central deste trabalho é mostrar o quanto a caminhada proposta pela Engenharia Didática contribui para a formação dos alunos e para a produção de conhecimento, justamente em razão da reflexão e do enfrentamento das dificuldades e dos impasses.

Conforme se pôde observar ao longo do trabalho, os alunos conseguiram perceber as dificuldades e limitações do emprego do método da tentativa e erro na solução dos problemas propostos. Mas isso se deu de uma forma natural, onde os alunos puderam experimentar, traçar planos e estratégias e perceber tal limitações. Não foi simplesmente uma verdade incontestável dada pelo professor.

> Essencialmente, o contrato didático é o conjunto das condições que determinam, quase sempre implicitamente, aquilo que cada um dos dois parceiros (professor e aluno) da relação didática tem a responsabilidade de gerenciar e aquilo que tem que prestar conta ao outro. Ele depende da estratégia de ensino adotada, adaptando-se a diferentes contextos, tais como: as escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho proposto aos alunos, a história do professor, as condições de avaliação, etc. (MACHADO, 2012, p. 71).

Esse impasse foi tratado com muito cuidado, pois em algumas situações o método da tentativa e erro pode ser mais eficaz do que uma abordagem usando uma estratégia mais algébrica. Esse trabalho se deu após o seguinte comentário realizado por um aluno: “gosto muito de resolver equações diofantinas usando esse método da tentativa e erro, pois pratico bastante contas de multiplicação, adição, subtração e divisão. Quando uso este método não costumo usar calculadora até porque sem o uso desse instrumento consigo aprimorar o conteúdo e também porque gosto de desafios.”

Foi perceptível ao longo da caminhada, fato corroborado pela afirmação anterior, o gosto pelo cálculo mental.

> As razões pelas quais o cálculo mental hoje é prioritário são as seguintes: 1) requer e fomenta uma habilidade muito útil num segmento no qual o escrito é menos importante pela introdução de calculadoras; 2) é um elemento chave que permite o domínio estrutural numérico, que pode ajudar a contrastar concepções e procedimentos que permanecem ocultos em outros tipos de e cálculos; 3) é promotor de estratégias cognitivas de grande interesse como as generalizações, a aplicabilidade de situações matemáticas, a flexibilidade; 4) favorece a análise, a exploração, a criatividade, a imaginação e a memória; 5) pode gerar uma visão lúdica das matemáticas. (LINS,1997, p. 78 e 79).

Mas, pelos problemas propostos e o grau de dificuldade crescente, os alunos compreenderam que precisavam de outras ferramentas para abordar os problemas. Os alunos acreditavam que professor não traria algo insolúvel para a aula ou ocorrendo o caso de não haver solução, este fato deveria ser identificado de algum modo.

Tendo por base os relatos dos alunos, suas produções em aula tanto individuais como em grupo, os protocolos recolhidos pelo professor ao longo de todo o trabalho, pode-se confirmar as três hipóteses levantadas anteriormente.

3.6 Validação da Engenharia Didática

A hipótese número um foi: “em nível cognitivo, acredita-se que, com este conjunto de ações, os alunos vão adquirir conhecimentos sobre a função otimizadora da aritmética e da álgebra na resolução de problemas”. Esta hipótese foi largamente comprovada ao longo de todo o trabalho, onde já desde o início os alunos perceberam as prodigiosas possibilidades proporcionadas pelo tratamento aritmético/algébrico das questões propostas.

Essa função otimizadora ganhou muita força com os seguintes resultados apresentados: Algoritmo de Euclides, Teorema de Bèzout e a solução geral de uma Equação Diofantina. Cabe destacar que esses resultados foram apresentados sem a prova matemática, pois acabaria fugindo do escopo e das finalidades deste trabalho, concebido para o Ensino Fundamental. Porém, de forma recorrente foi mencionado que tais provas existiam e por este motivo podia-se fazer uso dos resultados.

A hipótese dois tinha a seguinte redação: “os alunos perceberão o caráter limitado que o método da tentativa e erro possui na resolução de problemas e buscarão ou ficarão mais abertos para prospectar outros meios resolutivos”. Tal hipótese também foi comprovada, porém também se comprovou que o método da tentativa e erro não pode ser simplesmente abandonado, pois em muitas situações o mesmo pode ser muito útil e até representar uma economia de tempo e energia. Além do fato de propiciar as vantagens inerentes ao uso do cálculo mental pelos alunos.

Apesar da constatação de uma aparente insistência dos alunos por esta metodologia (tentativa e erro), ocorre que houve, ao longo de todo o trabalho, uma ação docente deliberada no sentido de não desqualificá-la, mas de apontar as possíveis limitações da mesma.

Já na hipótese três tinha-se: “o conjunto de ações permitirá aos estudantes um contato maior com o Algoritmo de Euclides e a sua utilização, tanto na verificação de soluções como na explicitação da solução geral das referidas equações, percebendo com isso uma aplicabilidade para o mdc.

Tal hipótese foi comprovada e mais: foi possível exercitar o trato algébrico dos alunos usando o Algoritmo de Euclides na aplicação do resultado do Teorema de Bèzout, onde eles podiam escrever o mdc de dois números inteiros como combinação linear dos mesmos. Fato este que propiciou uma enorme revisão sobre as operações básicas envolvendo os números inteiros, algo bastante desejável em alunos que estão concluindo o Ensino Fundamental e ingressando no Ensino Médio.

3.6.1 Considerações sobre a reprodutibilidade da Engenharia Didática

Considerando a possibilidade de se reproduzir esta experiência didática, buscou-se bibliografia que ajudasse a entender quais as perspectivas e os objetivos do ensino da aritmética e da álgebra.

Em LINS (1997) encontra-se algo que endossa a experiência realizada e aqui apresentada, colocando que os objetivos da educação aritmética e algébrica deve ser o de encontrar um equilíbrio em três frentes:

a) o desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo as habilidades de resolver problemas e de investigar e explorar situações;

b) o desenvolvimento de diferentes modos de produzir significado (pensar), o que pode-se chamar de atividades de inserção e tematização;

c) o aprimoramento de habilidades técnicas, isto é, da capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade.

Diante do exposto e também da validação interna das hipótese levantadas, mesmo não sendo o foco do trabalho, pode-se concluir pela reprodutibilidade da engenharia no Ensino Fundamental a nível de 9º ano e também das possibilidades do emprego da solução geométrica que neste trabalho não foi tão explorada, uma vez que se deu maior destaque para o tratamento aritmético/algébrico.

O trabalho realizado contempla o fato de tratar o fazer pedagógico como reflexivo e fonte para pesquisa e também está inscrito na necessidade de se associar o preparo do professor ao aprimoramento das práticas investigativas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para estudar a realidade educacional atual, bem como realizar um trabalho docente significativo é imprescindível se usar da pesquisa. Partir para a prática é como um mergulho no desconhecido e a pesquisa é justamente o que permite a interface interativa entre a teoria e a prática.

Com isso o docente deve ser um pesquisador que problematiza o seu fazer e consegue significar a sua ação a partir da reflexão.

A experimentação pedagógica foi extremamente gratificante. Com o desenrolar das atividades e os resultados obtidos, pode-se afirmar que o estudante só é capaz de construir o seu aprendizado quando descobre experimentando, coordenando as suas ações e estratégias, enfim, quando ele é o protagonista.

Percebe-se que a resolução de problemas proporciona este protagonismo e insere o estudante no mundo da aventura do pensamento, fazendo-o assumir uma posição ativa e responsável na construção de seu aprendizado.

O objetivo principal da pesquisa que foi aferir as possibilidades didático-pedagógicas envolvendo a temática Equações Diofantinas Lineares, tendo como suporte contextual a Resolução de Problemas foi plenamente alcançado, possibilitando ampliar as concepções dos alunos nos campos da aritmética e da álgebra e também permitir a aplicação do máximo divisor comum de dois números inteiros.

Com isso, mostrou-se nesse caso a inconsistência da corrente que advoga protelar aprofundamentos em aritmética e álgebra no Ensino Fundamental sob o pretexto de uma imaturidade matemática. Essa pesquisa aponta o que recentes literaturas estão dizendo: é preciso olhar com mais cuidado para o Ensino Fundamental, pois ele é base sólida para um aprendizado significativo e para futuros aprofundamentos.

Tal preocupação já é endossada pelo programa nacional chamado Pacto Nacional da Alfabetização na idade certa, onde o ensino da Matemática ocupa destaque na formação dos professores para atuarem com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Percebeu-se pela pesquisa que a aprendizagem não se dá apenas quando se apresenta um conteúdo de forma organizada, nem quando os alunos repetem exemplos resolvidos. Ela ocorre pela reflexão do aluno à frente das situações que envolvem uma mesma ideia. Aprender com compreensão é mais do que dar respostas certas a determinado problema semelhante a outros já estudados. Aprender é poder construir um número cada vez maior de relações entre os diferentes significados da ideia investigada.

Um aspecto de destaque na pesquisa realizada foi o trabalho em pequenos grupos e depois a apreciação das mesmas questões na plenária.

A plenária foi justamente o momento final das aulas que envolviam a resolução de problemas, em que os grupos apresentavam as suas resoluções e onde ocorria um intenso debate acerca dos métodos resolutivos adotados. Nesse instante, os grupos explicitavam como entenderam o problema, como elaboraram e executaram um plano e também como fizeram a verificação para validar a resposta dada (seguindo as sugestões de Polya).

Já o trabalho com pequenos grupos também se mostrou muito eficaz, pois o pequeno grupo desinibe, promove trocas e ajuda aprimorar a questão a ser feita na plenária. E desse modo, desenvolve a zona de desenvolvimento proximal, tão importante na teoria da aprendizagem de Vygotsky.

Diante dos resultados obtidos pela experimentação pedagógica, não se defende a inclusão da temática Equação Diofantina Linear no currículo do Ensino Fundamental, mas se aponta como uma possibilidade a mais para a construção de um aprendizado significativo e um maior aprofundamento nos campos da aritmética e da álgebra. Experiência tal com alunos adolescentes pode gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida a sua marca na mente e no caráter.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. **Engenharia Didática**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BONJORNO, José Roberto. **Matemática: fazendo a diferença, 5ª série**. São Paulo: FTD, 2006.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blucher Ltda, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, 1997.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática: um referencial para a ação investigativa e para a formação de professores de Matemática**. Zetetike, Campinas-UNICAMP, v.13, n.23, 2005, p. 85-118.

CAPILHEIRA, Bianca Herreira. **Equações Diofantinas Lineares: uma proposta para o Ensino Médio**. 2012. 148 p. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2012.

CARRAHER, T.;SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. **Na vida dez, na escolar zero.** 6. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

CARVALHO, Dionei Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Cortez, 1992.

COLE M.;SCRIBNER, S. Introdução. In: VIGOTSKY, L.S. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1984.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (Brasil). Conselho Pleno. Resolução n. 1, de 18 de fevereiro de 2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Poder Executivo, Brasília, DF, 9 de abril de 2002. Seção 1, p. 31. Republicada por ter saído com incorreção do original no D.O.U. de 4 de março de 2002. Seção 1, p. 8.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à Ação: reflexões sobre a Educação e Matemática.** 3 ed. São Paulo: Summus, 1986.

______________________. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papirus,1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12 ed. São Paulo: Ática, 1999.

______________________. **Criatividade e Resolução de Problemas na Prática Educativa Matemática.** São Paulo: Ática, 1988.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Higyno H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. 29 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIOVANNI, José Ruy. **A conquista da Matemática, 5ª série.** São Paulo: FTD, 2002.

GUELLI, Oscar. **Matemática em construção, 5ª série**. São Paulo: Ática, 2004.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

KRULIK, Stephen (org.); REYS, Robert E. (org.). **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** Tradução de Hygino Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

LINS, Romulo Campos. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas, SP: Papirus, 1997.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara Machado et al. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2012.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POMMER, Wagner Marcelo. **Equações Diofantinas Lineares: um desafio motivador para alunos do ensino médio**.2008. 153p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC-SP, 2008.

POMMER, Wagner Marcelo. **Equações Diofantinas Lineares: uma abordagem didático-epistemológica.** São Paulo: Edição do Autor. 2013. Disponível em: <http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20695/Livro+EDL+Uma+abordagem+didatico+epistemogica.pdf> . Acesso em: 4 de dezembro de 2014.

REGO, Teresa. **Vygotsky, uma Perspectiva Histórico-Cultural da Educação.** São Paulo: Vozes, 1995.

REVISTA DA OLIMPÍADA DE MATEMÁICA DO ESTADO DE GOIÁS. Goiás: Universidade Federal de Goiás. **Coletânea de Problemas**. n.4 abr. 2003.

RIPOLL, Jaime Bruck. **Números racionais, reais e complexos**. Porto Alegre: Editora da UFRGS,2011.

VYGOTSKY,L. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

______________. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

______________. **Et al. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

Apêndice A – Solicitação junto à direção da escola

Venho por meio deste solicitar a autorização junto à direção da Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso para a realização da pesquisa: “Equações Diofantinas Lineares: possibilidades didáticas usando a Resolução de Problemas” a ser realizada na turma do 9º ano.

A pesquisa faz parte do trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional de Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria e ocorrerá nos meses de setembro e outubro do corrente ano nas aulas de Matemática, componente curricular em que sou professor titular.

Professor Adilson de Campos

Herveiras, 02 de setembro de 2014.

Apêndice B – Autorizações dos responsáveis legais

Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso
Linha Pinhal / Herveiras

AUTORIZAÇÃO

Eu,____, responsável legal pelo(a) aluno(a) ____ 9º ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental Maurício Cardoso, autorizo mediante a assinatura deste termo que o aluno(a) supracitado participe da pesquisa: "Equações Diofantinas Lineares: possibilidades didáticas usando a Resolução de Problemas" realizada pelo professor Adilson de Campos.

O referido trabalho terá por objetivo introduzir e problematizar o tema Equações Diofantinas no Ensino Fundamental por meio da Resolução de Problemas. Notadamente será um grande momento para os estudantes aprofundarem seus conhecimentos matemáticos no campo da Aritmética.

Qualquer dúvida pode ser dirimida diretamente com o professor Adilson de Campos, que está presente na escola sempre nas segundas e terças no turno matutino.

____
Professor Adilson de Campos

____
Diretora Fernanda Büchle Machado

____
Responsável legal pelo aluno(a)

Apêndice C – Questionário “começando nossa conversa”

COMEÇANDO NOSSA CONVERSA.....

1) Para você, o que é um problema matemático?

2) Você gosta de resolver problemas matemáticos? Caso afirmativo, que tipo de problemas?

3) Defina:
   a) Mínimo Múltiplo Comum de dois números naturais.

   b) Máximo Divisor Comum de dois números naturais

   c) Número Natural

   d) Número Inteiro

   e) Número Racional

   f) Equação

4) Como é a minha relação com a Matemática e qual a importância de seu estudo para mim.

“ Quem nunca cometeu um erro, nunca tentou algo novo.” Albert Einstein