UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

KEILA MARIA BORGES DOS SANTOS

A MATEMÁTICA DO FINANCIAMENTO HABITACIONAL

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2015

KEILA MARIA BORGES DOS SANTOS

A MATEMÁTICA DO FINANCIAMENTO HABITACIONAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Prof. Dr. Rubens Robles Ortega Jr.

CURITIBA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S237m Santos, Keila Maria Borges dos
2015 A matemática do financiamento habitacional / Keila Maria Borges dos Santos.-- 2015.
72 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2015.
Bibliografia: f. 71-72.

1. Matemática financeira - Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Habitação - Financiamento - Brasil. 3. Política habitacional - Brasil. 4. Amortização. 5. Juros. 6. Indexação (Economia). 7. Educação financeira. 8. Matemática - Dissertações. I. Ortega Junior, Rubens Robles, orient. II. Universidade Tecnológica Federal Do Paraná - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Título da Dissertação No. 025

"A Matemática do Financiamento Habitacional"

por

Keila Maria Borges dos Santos

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 15h do dia 29 de junho de 2015. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Rubens Robles Ortega Junior, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Arinei Carlos Lindbeck da Silva, Dr.
(UFPR)

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

À minha tão compreensiva filha Luna

AGRADECIMENTOS

- Ao meu marido Ulysses pela ajuda em todos os momentos, nas tarefas de casa, no cuidado com nossa filha, nas discussões matemáticas. Sempre tornando meu fardo mais leve.
- À minha filha Luna que tão pequenina já soube compreender minhas ausências para estudar.
- À minha mãe e minha sogra por cuidarem com tanto carinho da minha filha em momentos que eu precisava estudar.
- Ao meu pai, irmãos e amigos que sempre acreditaram que eu tinha potencial para concluir esta jornada.
- Ao professor André Steklain por me auxiliar inúmeras vezes com o latex.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Ao meu orientador Rubens Robles Ortega Jr. pelo acolhimento, pelo aprendizado e por valorizar a proposta do meu trabalho.

RESUMO

BORGES DOS SANTOS, Keila Maria. A MATEMÁTICA DO FINANCIAMENTO HABITACIONAL. 72 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Este trabalho apresenta um estudo matemático detalhado dos sistemas de financiamento habitacional atualmente praticados no Brasil, estando alinhado com a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), política de Estado de caráter permanente, instituída pelo Decreto Federal 7.397/2010, que tem como objetivo contribuir para o fortalecimento da cidadania através de ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes. A inserção da Educação Financeira no Ensino Fundamental e Médio, como conteúdo obrigatório da disciplina de Matemática, foi objeto de projeto de Lei que tramitou na Câmara e no Senado entre 2009 e 2013, tendo sido, por fim, rejeitado. Não obstante, centenas de escolas em todo o Brasil, públicas e particulares, já vêm ministrando o assunto, de forma obrigatória ou mesmo como tema extracurricular. Neste contexto, posto que a Matemática é uma ferramenta indispensável na compreensão de diversos problemas ligados à Educação Financeira, o presente trabalho também é voltado para o ensino, principalmente como fonte de consulta daqueles profissionais que atuam na divulgação da cultura da Educação Financeira no País. Ao contratar um financiamento habitacional, o cidadão precisa optar entre o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price). Porém, muitas vezes, não dispõe de informações suficientes para realizar a escolha mais adequada ao seu perfil financeiro. Este trabalho objetiva também preencher esta lacuna, apresentando ao cidadão orientações úteis para sua tomada de decisão, podendo ser visto, desta forma, como uma contribuição social. Isto se consegue, por um lado, através da obtenção de uma série de resultados matemáticos teóricos para os dois sistemas de amortização vigentes, e, por outro, fornecendo respostas a dúvidas frequentes sobre o contrato de financiamento, tais como amortização do saldo devedor, alteração da data de vencimento e pagamento de prestações em atraso.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Financiamento Habitacional, Sistemas de Amortização, Sistema de Amortização Constante, Sistema Francês de Amortização, Tabela Price

ABSTRACT

BORGES DOS SANTOS, Keila Maria. THE MATHEMATICS OF HOUSING FINANCE. 72 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

This work presents a detailed mathematical study of housing finance systems currently practiced in Brazil and is aligned with the National Strategy for Financial Education, a State policy established by Federal Decree 7.397/2010, which aims to contribute to the strengthening of citizenship through actions that help the population to take more autonomous financial decisions and aware. A law to include financial education in primary and secondary schools as an obligatory subject of mathematic, was analysed in the House of Representatives and Senate, between 2009 and 2013, and was finally rejected. Nevertheless, hundreds of schools throughout Brazil, public and private, are already teaching this subject, as a basic subject or even as an extracurricular subject. In this context, since mathematics is an indispensable tool in understanding various problems related to financial education, this work is also for teaching, mainly as a source of consultation of those professionals who work in spreading the culture of financial education in the country. By hiring a loan to buy a propriety, citizens need to choose between the Constant Amortization System and the French Amortization System (Price Table). However, often there are not sufficient informations to make the best choice to a specific financial profile. This work aims to also fill this gap, presenting to the citizen useful guidance for its decision making, can be seen, therefore, as a social contribution. This is achieved, on the one hand, by obtaining a series of theoretical mathematical results for the two existing amortization systems, and on the other, providing answers to frequently asked questions about the financing agreement, such as amortization of the debt, change the due date and payment of installments in arrears.

Keywords: Financial Math, Housing Loan, Payment in Stallments, Constant Amortization System, French Amortization System, Price Table

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), Educação Financeira é "o processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. Assim, podem contribuir de modo mais consistente para a formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro". Instituir a Educação Financeira para a população já faz parte das políticas públicas do Brasil. Pelo Decreto n° 7.397 de 22 de dezembro de 2010 foi criada a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), com o objetivo de promover a Educação Financeira e Previdenciária. Uma das ações do ENEF é o Programa Educação Financeira nas Escolas, que é coordenado pela Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF), e tem por objetivo contribuir para o desenvolvimento da cultura de planejamento, prevenção, poupança, investimento e consumo consciente. Em 26 de abril de 2013, a AEF foi certificada pelo Ministério da Justiça como uma Organização da Sociedade Civil de Interesse Público (OSCIP).

Para o ensino fundamental, tanto o projeto pedagógico quanto as atividades educativas propostas no Programa Educação Financeira nas Escolas, foram construídos e validados por representantes dos setores educacional e financeiro, incluindo o Ministério da Educação, UNDIME (União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação) e CONSED (Conselho Nacional de Secretários da Educação). A tecnologia foi desenvolvida a partir da reprodução da ideia de ciclo e integrando os conteúdos formais (financeiros) aos conteúdos sociais (situações reais cotidianas da faixa etária dos alunos, envolvendo organização pessoal, financeira e decisões de consumo e poupança). Assim, encontram-se em fase de finalização nove livros - aluno e professor - correspondendo a cada ano do Ensino Fundamental, com o apoio da BM&FBOVESPA. Segundo a AEF, os livros foram entregues ao Ministério da Educação em setembro de 2014 e deverão entrar, antes de uma disseminação em escala, em fase de avaliação para compreender a resposta dos alunos e professores ao seu conteúdo.

O Projeto de Educação Financeira nas Escolas para o ensino médio já foi implantado como piloto nos estados do Tocantins, Rio de Janeiro, Minas Gerais, Ceará, Distrito Federal e São Paulo e já colhe bons resultados. O projeto foi testado em 891 instituições de ensino em 2010 e 2011 e até o fim de 2015, 2.962 escolas públicas de ensino médio terão acesso a essa formação (GLOBO, 2014). Em cada regional de ensino existe um técnico multiplicador que auxilia as escolas na implementação deste conteúdo. Através de debates e oficinas e com o apoio do material didático os alunos discutem sobre consumo, poupança, economia familiar, entre tantos outros itens ligados à Educação Financeira. Os livros sobre o assunto estão disponíveis para download no site www.aefbrasil.org.br, na íntegra ou por temas como: sonho planejado, vida familiar cotidiana, vida social, bens pessoais. No site podemos acessar o depoimento de professores, multiplicadores e alunos do Tocantins de como o projeto está sendo proveitoso, pois os alunos estão levando para casa o que discutiram na escola e este efeito multiplicador é bastante positivo.

Este projeto piloto ganhou um relatório do Banco Mundial: "O Impacto da Educação Financeira no Ensino Médio - A Experiência do Brasil". A instituição constatou o aumento de 1% do nível de poupança dos jovens que passaram pelo programa. Segundo os cálculos da entidade, isso pode contribuir para o crescimento também de 1% do Produto Interno Bruto brasileiro, uma vez que a poupança vira investimento. Os alunos passaram a fazer uma lista com os gastos todos os meses e a negociar o pagamento ao fazer uma compra (GLOBO, 2014).

Até mesmo no ensino infantil já existem escolas trabalhando a Educação Financeira para esta faixa etária. No município de Manaus a Educação Financeira tornou-se tema transversal na grade curricular das escolas públicas da rede municipal. A Lei nº 1787/2013, que instituiu a inclusão da temática foi aprovada na Câmara Municipal de Manaus (CMM) e sancionada pela Prefeitura.

Chegou a tramitar no Senado um Projeto de Lei da Câmara (nº 171 de 2009) que tornaria a Educação Financeira um conteúdo obrigatório nos currículos do ensino fundamental e médio dentro da disciplina de Matemática, mas o projeto foi rejeitado em 2013. Na Universidade Tecnológica Federal do Paraná foi implantada a disciplina Educação Financeira para o Curso de Licenciatura em Matemática.

A proposta desse trabalho está alinhada com os interesses e objetivos atuais da nação com referência à Educação Financeira, pois promoveremos uma discussão mais aprofundada de um tema que se encaixa perfeitamente dentro da Educação Financeira: a Matemática do Financiamento Habitacional. Como fazer simulações corretamente, qual sistema de amortização optar, como entender a taxa de juros cobrada, quais alternativas existem na fase de manutenção do contrato, entre outros assuntos serão discutidos. Faremos alguns apontamentos nos financiamentos habitacionais em diferentes instituições e uma comparação mais profunda sobre o SAC (Sistema de Amortização Constante) e a Tabela Price. Assim o leitor estará orientado para escolher de forma mais adequada e personalizada entre os dois sistemas de amortização na hora de buscar crédito para casa própria.

A Matemática do Financiamento Habitacional está inserida no conteúdo escolar Matemática Financeira. Este assunto faz parte do conteúdo estruturante de tratamento de informação e já deve ser inserido no ensino fundamental com o estudo dos juros compostos. No ensino médio o estudante deve compreender a matemática financeira de forma mais abrangente, observando a relevância que este assunto tem em diversos ramos da atividade humana e também na formação crítica, para que possa tomar decisões na área de finanças (PARANÁ, 2008).

O artigo 35 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) diz:

> “ Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
>
> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina” (BRASIL, 2013).

A Matemática Financeira atende de maneira exemplar as finalidades da educação. No item I, dando continuidade ao estudo de razão e proporção, porcentagem e juros compostos. Atende ao item II, proporcionando noções aos que escolherem a área financeira para trabalhar e mesmo aqueles que se tornarão profissionais de outras áreas no entendimento de reajustes salariais, como administrar contas pessoais e cuidar das finanças no curto e longo prazo. No item III, preparando para tomada de decisões relacionadas a aplicações, empréstimos, consumo, e para o pensamento reflexivo para escolha, seja de um produto, de um financiamento ou de uma aposentadoria, analisando os riscos e benefícios. Finalmente, no item IV, auxiliando na compreensão da economia e como ela nos influencia.

Segundo Leal e Nascimento (2008), é através da Matemática Financeira que o indivíduo adquire o conhecimento das técnicas e recursos que lhe possibilitará decidir como utilizar seu dinheiro. Através da aquisição deste conjunto de técnicas e recursos, o aluno, futuro consumidor, poderá refletir melhor antes de fazer uma escolha. Os saberes matemáticos são essenciais para o processo de alfabetização do cidadão consciente dos seus direitos (MUNIZ, 2008). Conforme (SANTOS; SANTOS, 2005), o conhecimento bem como o domínio deste conteúdo matemático esclarece o poder do tempo e do dinheiro trabalhando a favor do indivíduo. Desta maneira, questões como consumismo, imediatismo, necessidade real do bem, melhor forma de pagamento poderão ser levadas em consideração de forma mais analítica.

Este conteúdo é um importante conector de assuntos dentro da própria matemática. Conforme (PARANÁ, 2008), no Ensino Médio, no estudo de função afim e progressão aritmética, ambos vinculados ao Conteúdo Estruturante Funções, o professor pode buscar na Matemática Financeira, mais precisamente no conceito de juros simples, elementos para abordá-los. Os conteúdos função exponencial e progressão geométrica podem ser trabalhados articulados aos juros compostos. Segundo (LIMA et al., 2006), uma das mais importantes aplicações de progressões geométricas é a Matemática Financeira.

O financiamento de uma casa possivelmente fará parte da realidade do educando no futuro, e é fundamental que ele tenha pensamento crítico na hora de decidir qual o melhor momento para financiar e qual o sistema de amortização é mais adequado para sua condição financeira atual e futura. Ter conhecimento das possibilidades durante a manutenção do contrato, como amortizar a dívida para finalizá-la antecipadamente, mudar a data de vencimento do contrato para se adequar ao planejamento financeiro familiar, saber quais encargos serão pagos em caso de atrasos, também é um importante aliado do cidadão consciente que utilizará a matemática a seu favor no momento de tomada de decisões. É importante ressaltar que os exemplos propostos neste trabalho são de situações que realmente ocorrem na prática, portanto, refletem fidedignamente os cálculos que são feitos pelos sistemas de financiamento habitacional das instituições financeiras.

A questão habitacional no Brasil foi tomando relevância juntamente com o processo de industrialização a partir do século 19. Em 1964, face da necessidade de maiores investimentos na habitação, foi criado, pela lei 4.380 de 21.08.1964, o Sistema Financeiro de Habitação (SFH), que fez o número de unidades habitacionais financiadas passar de 8 mil por ano, em 1964, para 627 mil, em 1980. Neste ano a parcela das novas moradias criadas no período que foram atendidas com financiamento chegou a 70% (CASTELO et al., 2007) (CAIXA, 2009). Em 2009, segundo (PLANALTO, 2014), foi criado o Programa Minha Casa Minha Vida do Governo Federal. Com cinco anos de existência do programa foram contratadas 3,4 milhões de unidades, beneficiando mais de seis milhões de pessoas. Dos financiamentos que têm como fonte de recursos as cadernetas de poupança, de acordo com (BRASIL, 2014), tendo como base todo o território nacional, de outubro de 1994 a fevereiro de 2014, foram concedidos financiamentos para construção de 1.415.676 unidades. Nesse mesmo período foi também financiada a aquisição de 1.783.849 imóveis prontos. Embasados nestes números concluímos que não é apenas uma suposição que a chance do discente financiar um imóvel no futuro seja grande. Neste contexto o ideal seria que todos os cidadãos tivessem familiaridade com os sistemas de amortização e peculiaridades utilizadas nos sistemas de financiamento de imóveis.

O estudo da matemática envolvida nos financiamentos habitacionais é um bom exemplo de como aplicá-la na prática, em uma situação-problema em contexto real. Desta forma este conteúdo atende às seguintes premissas do PCN + (Parâmetros Curriculares Nacionais):

> [...] para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado (BRASIL, 2002).

> [...] no ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (BRASIL, 2002).

Diante desta discussão, acreditamos que parte deste trabalho (o estudo dos conceitos dos sistemas de amortização e a construção de planilhas) pode ser inserido no conteúdo de Matemática Financeira para o Ensino Médio. Sendo que o estudo mais amplo está voltado para o cidadão e poderia ser utilizado, por exemplo, nas Oficinas do Programa de Educação Financeira nas Escolas.

1.1 OBJETIVO GERAL

- Estudar a matemática envolvida nos financiamentos habitacionais atuais.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fazer uma revisão do conteúdo de sistemas de amortização, mais especificamente o Sistema de Amortização Constante e o Sistema Francês de Amortização.

- Obter resultados matemáticos teóricos envolvendo os dois sistemas de financiamento.

- Explanar algumas definições tais como taxa de juros, taxa referencial, custo efetivo total, custo efetivo do seguro habitacional.

- Fazer um estudo das possibilidades que o proponente tem na manutenção de seu contrato habitacional, tais como alteração da data de vencimento, amortizações no saldo devedor e pagamento de prestações em atraso.

- Propor alguns problemas baseados em situações reais de financiamento habitacional que acontecem no cotidiano das instituições bancárias.

- Fazer um comparativo dos financiamentos habitacionais em 5 grandes bancos do país.

- Fazer um comparativo dos pagamentos efetuados na tabela SAC e na Tabela Price.

2 BREVE HISTÓRICO SOBRE O SISTEMA HABITACIONAL NO BRASIL

Este histórico foi baseado nos textos de CAIXA (2009) CASTELO et al. (2007) e JR (2014).

A questão habitacional brasileira é contemporânea ao desenvolvimento manufatureiro-industrial que se deu a partir do século 19. O crescimento das cidades, nas primeiras décadas do século 20, ocorreram de forma desorganizada e com carência de infraestrutura. Foram criados os cortiços que abrigavam várias famílias. Com o passar dos anos este tipo de moradia foi retirada das áreas centrais devido às epidemias e pestes e para não desvalorizar os imóveis das classes mais altas. O destino das famílias foi a periferia das cidades e assim surgiram as favelas, principalmente nos morros do Rio de Janeiro.

A construção de moradias no Brasil foi de responsabilidade da iniciativa privada durante todo o período anterior à década de 1930. Para estimular a produção habitacional o Governo oferecia incentivos convidativos à iniciativa privada. Com a intensificação do processo de industrialização e urbanização, o Estado brasileiro passou a intervir diretamente na infraestrutura e na construção dos primeiros conjuntos habitacionais, visto que estas mudanças acarretaram a regulamentação do trabalho urbano, o que reforçou o movimento migratório campo-cidade. Durante o primeiro governo do Presidente Getúlio Vargas, foram construídos os primeiros conjuntos habitacionais. Em 1946, foi criada a Fundação da Casa Popular, mas desde sua criação até 1964 quando foi extinta, não chegou a produzir 17 mil unidades.

No início da década de 1950, as necessidades habitacionais já eram estimadas em 3,6 milhões de moradias, isto sem contar com as favelas e cortiços que foram se proliferando nas cidades juntamente com o processo de industrialização. Diferentemente do que ocorreu nos países do primeiro mundo, o processo de urbanização no Brasil foi excessivamente rápido e não se fez acompanhar de um tratamento adequado das cidades.

Até meados de 1960 não havia um indexador dos contratos habitacionais, o empréstimo era geralmente obtido de maneira isolada, o crédito habitacional era desestruturado e não articulava a oferta e a demanda de recursos necessários para a realização de investimentos habitacionais.

Em face da necessidade de maiores investimentos na habitação, foi criado, pela lei 4.380 de 21.08.1964, o Sistema Financeiro de Habitação (SFH), que tinha como órgão central o Banco Nacional da Habitação (BNH) e como premissas captar recursos para a área habitacional e financiar a construção e a compra da casa própria. Era característica do novo sistema a diversificação dos objetivos dos financiamentos, que abrangiam diferentes itens de desenvolvimento urbano. Passou a existir a correção monetária dos ativos e passivos. A concepção desse sistema baseava-se na concessão de crédito habitacional com fontes próprias de recursos, as cadernetas de poupança, o Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS) e as letras imobiliárias. As cadernetas foram criadas com o objetivo de captar a poupança voluntária das famílias e contribuíram de forma decisiva para a disseminação do hábito de poupar na sociedade. A aplicação dos recursos das cadernetas obedecia a critérios de exigibilidade mínima que variaram em diferentes períodos. O FGTS foi o instrumento de poupança compulsória do sistema. Criado com o objetivo de substituir o estatuto da estabilidade no emprego, o FGTS é um fundo de indenizações trabalhistas cuja arrecadação foi destinada à concessão de crédito à habitação e ao financiamento do saneamento básico e infra-estrutura urbana.

Em 20 de abril de 1967 o Banco Central do Brasil, através da resolução 51, permitiu que os estabelecimentos bancários financiassem projetos habitacionais que já tivessem sido aprovados pelo Banco Nacional de Habitação (BRASIL, 1967).

Entre os avanços do SFH estava o prazo do financiamento que se estendeu ao prazo de validade de uma hipoteca (30 anos). A remuneração para caderneta de poupança, o FGTS e os serviços de intermediação financeira eram retirados dos juros cobrados nos financiamentos. Os saldos devedores dos contratos e as respectivas prestações eram corrigidas por um indexador do sistema, porém como o reajuste das prestações era anual e o dos saldos devedores era trimestral, isso gerava um descompasso. Para equilibrar esta falta de harmonia foram criados, em 1967, o Fundo de Compensação de Variações Salariais (FCVS), que tinha como objetivo pagar o saldo residual de contratos imobiliários assinados até 1993, e, em 1969, o Coeficiente de Equiparação Salarial (CES), plano que estabelecia o reajuste de prestações de financiamentos imobiliários do SFH de acordo com o reajuste salarial concedido à categoria profissional do mutuário, adotado de 1984 a 1993. O FCVS e o CES tinham então o intuito de solver resíduos oriundos das diferenças entre os reajustes. Já nesta época as taxas de juros eram diferenciadas sendo progressivas de acordo com o valor do financiamento, beneficiando desta forma as classes mais pobres.

Esse sistema, avançado para as condições econômicas e financeiras da época, gerou impressionante volume de fundos para o financiamento habitacional. Em poucos anos de operação, mais precisamente entre 1965 e 1980, o número de unidades habitacionais financiadas passou de 8 mil por ano, em 1964, para 627 mil, em 1980. A taxa de cobertura do sistema, definida como a parcela das novas moradias criadas no período que foram atendidas com financiamento, chegou a 70%, em 1980. Também em seus 15 primeiros anos de operação, a participação dos saldos de financiamentos habitacionais no total dos empréstimos bancários (públicos e privados) para o setor privado saltou de aproximadamente 2% para mais de 20%. De 1964 a 1986, cerca de 4,4 milhões de unidades foram financiadas pelo SFH. Porém, devido à crise econômica que o País passava em 1980, o BNH acabou por ser extinto em 1986, sendo fatores decisivos: aceleração do processo inflacionário, desemprego e a inadimplência.

Após a extinção do BNH a CEF (Caixa Econômica Federal) passou a atuar como órgão gerenciador do SFH e agente operador do FGTS, e o Banco do Brasil passou a ser o regulamentador das aplicações dos depósitos de Poupança e fiscalizador do SFH. A Caixa assumiu a condição de maior agente nacional de financiamento da casa própria e de importante financiadora do desenvolvimento urbano.

Em 31/10/1990 o Banco Central do Brasil, através da resolução 1.764, determinou que podiam exercer as funções de agente fiduciário em operações de crédito imobiliário com garantia hipotecária, nos termos do art. 30 do Decreto-Lei nº 70, de 21 de novembro de 1966, os bancos múltiplos, bancos comerciais, bancos de investimento, bancos de desenvolvimento, Caixa Econômica Federal, sociedades de crédito, financiamento e investimento, sociedades de crédito imobiliário, associações de poupança e empréstimo, companhias hipotecárias, sociedades corretoras de títulos e valores mobiliários e sociedades distribuidoras de títulos e valores mobiliários (BRASIL, 1990).

Em março de 1991 foi instituída a Taxa Referencial de Juros (TR), até os dias atuais empregada como mecanismo de correção de ativos e passivos do SFH. Com a estabilidade monetária conseguida com a implantação do Plano Real, em julho de 1994 foi possível a criação da Empresa Gestora de Ativos pelo Governo Federal (EMGEA) e o Sistema de Financiamento Imobiliário (SFI), que deram mais condições à Caixa para desenvolver programas e produtos que atendam em especial as classes mais pobres, com objetivo de reduzir o grande déficit habitacional no país. O SFI foi criado em 1997 pela lei n.º 9.514 (20/11/1997), como alternativa ao SFH. Este sistema autoriza a securitização dos créditos imobiliários, institui um novo título de crédito, o Certificado de Recebíveis Imobiliários (CRI), introduz a alienação fiduciária no mercado imobiliário, instrumento fundamental para garantia efetiva das operações de financiamento imobiliário. A alienação fiduciária combinada com a possibilidade de execução extrajudicial prevista no Decreto-Lei 70, de 1966, tornou possível destravar o crédito imobiliário. Em tais condições, oferecendo garantias firmes aos investidores e aos financiadores e liberdade de negociação entre as partes interessadas, o SFI representa a efetiva modernização do mercado imobiliário no País.

Em 2009 foi criado o Programa Minha Casa Minha Vida do Governo Federal. Segundo (PLANALTO, 2014), com cinco anos de existência do programa foram contratadas 3,4 milhões de unidades, beneficiando mais de seis milhões de pessoas. Os números consolidam o programa como a maior política pública habitacional da história do Brasil. Dos financiamentos que tem como fonte de recursos as cadernetas de poupança que são até hoje o principal mecanismo de captação de recursos do SFH, de acordo com (BRASIL, 2014), tendo como base todo o território nacional, de outubro de 1994 a fevereiro de 2014, foram concedidos financiamentos para construção de 1.415.676 unidades. Nesse mesmo período, foi também financiada a aquisição de 1.783.849 imóveis prontos. O valor total dos financiamentos concedidos foi de R$ 393,27 bilhões. Só entre março de 2013 e fevereiro de 2014, foram concedidos novos financiamentos habitacionais no valor de R$ 106.96 bilhões (527.263 unidades). Em termos de unidades, mais de 300 mil imóveis foram financiados em 2009, um recorde do sistema. Os depósitos em caderneta de poupança do SBPE (Sistema Brasileiro de Poupança e Empréstimo) somavam, no final de dezembro de 2009, R$ 253,6 bilhões, quase o dobro do saldo registrado em dezembro de 2004. Os recursos aplicados anualmente pelo SBPE saíram de R$ 2,2 bilhões (2003) para quase R$ 530,00 bilhões (2013), ou seja, quase 240 vezes mais. Em cinco décadas, o SFH financiou a aquisição de 15,3 milhões de unidades e o crédito imobilário continua crescendo em 2014.

Nos dias atuais, cabe ao Ministério das Cidades a gestão das políticas habitacionais. O Sistema Nacional de Habitação é composto pelo Conselho Monetário Nacional (CMN), pelo Banco Central do Brasil, pelo Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), pelo Banco do Brasil e pelas instituições financeiras públicas e privadas. O sistema de crédito imobiliário que iniciou há 50 anos cumpre seu papel mais importante, que é o de facilitar o acesso das famílias à casa própria. Porém para continuarmos com o crédito sustentável de longo prazo é preciso manter a inflação baixa, o nível de emprego e os juros baixos para o financiamento habitacional.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento efetuado tem dupla finalidade. Uma parte do pagamento quita os juros e a outra parte amortiza (abate) a dívida (LIMA et al., 2006).

3.1.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

É o método de pagamento de uma dívida em que a parcela de amortização (um dos componentes da prestação) é constante e a parcela de juros, que incide sobre o saldo devedor, é decrescente ao longo do prazo de financiamento.

Teorema 3.1. *No SAC, sendo D_0 a dívida contraída, n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:*

$$A_k^{SAC} = \frac{D_0}{n}, \tag{1}$$

$$D_k^{SAC} = \frac{n-k}{n} D_0, \tag{2}$$

$$J_k^{SAC} = i \times D_{k-1}^{SAC}, \tag{3}$$

$$P_k^{SAC} = A_k^{SAC} + J_k^{SAC}, \tag{4}$$

onde:
A_k^{SAC} *é a parcela de amortização no mês k,*
D_k^{SAC} *é o estado da dívida no mês k,*
J_k^{SAC} *é a parcela de juros no mês k, e*
P_k^{SAC} *é a prestação no mês k.*

Prova:

Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a

$$A_k^{SAC} = \frac{D_0}{n}.$$

O estado da dívida, após k amortizações, é

$$D_k^{SAC} = D_0 - k\frac{D_0}{n},\ logo$$

$$D_k^{SAC} = \frac{n-k}{n}D_0.$$

Para fórmula 3 é só observar que para calcular os juros que estão sendo cobrados basta multiplicar a dívida pela taxa.

Para fórmula 4 basta observar que a prestação nada mais é que a soma das parcelas de amortização e juros.

Como a amortização no SAC é constante, todo mês é abatido do saldo devedor o mesmo valor. Podemos então concluir que os saldos devedores formam uma PA (progressão aritmética) decrescente sendo a razão $-\frac{D_0}{n}$.

Desta forma as prestações do SAC também formam uma PA decrescente, pois a parcela de amortização é fixa e a parcela de juros é calculada multiplicando sempre a mesma taxa pelo saldo devedor, que decresce conforme uma PA.

Sabendo que uma sequência a_n é uma progressão aritmética quando existe um número real r tal que $a_{n+1} = a_n + r$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar a razão de decrescimento da prestação. Devemos ter para todo $k \in \mathbb{N}$ que $P_{k+1}^{SAC} = P_k^{SAC} + r$. Para encontrar o valor de r vamos substituir os termos P_{k+1}^{SAC} e P_k^{SAC} pelas fórmulas do Teorema 3.1:

$$P_{k+1}^{SAC} = A_{k+1}^{SAC} + J_{k+1}^{SAC},$$
$$P_{k+1}^{SAC} = \frac{D_0}{n} + iD_k^{SAC},$$
$$P_{k+1}^{SAC} = \frac{D_0}{n} + i\left(\frac{n-k}{n}\right)D_0,$$
$$P_{k+1}^{SAC} = \frac{D_0}{n} + \frac{inD_0}{n} - \frac{ikD_0}{n}.$$

$$P_k^{SAC} = A_k^{SAC} + J_k^{SAC},$$
$$P_k^{SAC} = \frac{D_0}{n} + iD_{k-1}^{SAC},$$
$$P_k^{SAC} = \frac{D_0}{n} + i\left[\frac{n-(k-1)}{n}\right]D_0,$$
$$P_k^{SAC} = \frac{D_0}{n} + \frac{inD_0}{n} - \frac{ik\,D_0}{n} + \frac{iD_0}{n}. \tag{5}$$

Temos:

$$
\begin{aligned}
P_{k+1}^{SAC} &= P_k^{SAC} + r, \\
\frac{D_0}{n} + \frac{inD_0}{n} - \frac{ikD_0}{n} &= \frac{D_0}{n} + \frac{inD_0}{n} - \frac{ikD_0}{n} + \frac{iD_0}{n} + r, \\
0 &= \frac{iD_0}{n} + r, \\
r &= -\frac{iD_0}{n}.
\end{aligned}
$$

3.1.2 SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO (TABELA PRICE)

É um método de cálculo das prestações de financiamento que tem, como os outros sistemas, duas parcelas, uma de amortização e outra de juros, sendo que, ao longo do prazo de financiamento, a primeira aumenta e a segunda decresce. O Sistema Francês de Amortização é também conhecido como Tabela Price e é caracterizado por prestações constantes.

Este método foi apresentado em 1771 por Richard Price (Inglaterra, 1723-1791) em sua mais famosa obra da área financeira e atuarial intitulada "Observações sobre pagamentos reversíveis". Price era especialista em finanças e seguros e quando morou em Londres recebeu sólidos conhecimentos matemáticos. Na obra em que explicou o financiamento por meio da sequência uniforme de pagamento, também discorreu sobre o montante gerado por depósitos em sequência uniforme e cálculo de prêmios de seguro de vida. Para entendermos a Tabela Price, precisamos do conceito de série uniforme.

Uma série uniforme de pagamentos é uma sequência de pagamentos iguais e igualmente espaçados. O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a

$$A = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \tag{6}$$

onde:
A é o valor atual,
P é a prestação,
i é a taxa de juros,
n é o número de pagamentos.

Para vermos isto, basta observarmos que o valor da série na época 0 é

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n},$$

que é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1+i}$. Temos:

$$A = \frac{P}{1+i} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}},$$

$$A = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

Teorema 3.2. *No Sistema Francês de Amortização, sendo D_0 a dívida contraída, n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:*

$$P_k^{Price} = D_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}, \tag{7}$$

$$D_k^{Price} = D_0 \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}}, \tag{8}$$

$$J_k^{Price} = i D_{k-1}^{Price}, \tag{9}$$

$$P_k^{Price} = A_k^{Price} + J_k^{Price}, \tag{10}$$

$$A_k^{Price} = i \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} D_0, \tag{11}$$

onde:
A_k^{Price} *é a parcela de amortização no mês k,*
D_k^{Price} *é o estado da dívida no mês k,*
J_k^{Price} *é a parcela de juros no mês k, e*
P_k^{Price} *é a prestação no mês k.*

Prova:

A fórmula 7 é simplesmente a fórmula 6 isolando a variável P. O valor indicado com A na fórmula 6 é equivalente a D_0 na fórmula 7, que é o estado da dívida no tempo zero.

As fórmulas 9 e 10 são análogas às do SAC, do Teorema 3.1.

Quanto à fórmula 8, observa-se que D_k é a dívida que será liquidada, postecipadamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos a P_k. Portanto, novamente pela fórmula 6, temos

$$D_k^{Price} = P_k^{Price} \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo o valor de P_k^{Price} da fórmula 7 obtém-se a fórmula 8.

Para obter a fórmula 11 basta substituir na fórmula 10 as fórmulas 9, 8 e 7.

3.1.3 EXEMPLO DE UM FINANCIAMENTO NO SAC E NA TABELA PRICE

Em seguida temos uma planilha comparativa entre o SAC e a Tabela Price para um financiamento de R$ 348.000,00, em 360 meses, a uma taxa de $0,87\% a.m.$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Planilha Comparativa entre o SAC e a Tabela Price						
2							
3				Esta Planilha mostra o status comparativo das três primeiras e das três últimas prestações de um financiamento pelo SAC e pela Tabela Price. Na última linha de cada tabela, é possível ver os valores do financiamento no mês k, digitando na Célula C19 o mês k.			
4	D_0	R$ 348.000,00					
5	n	360					
6	i	0,87%					
7			SAC				
8				Amortização	Saldo Devedor	Juros	Prestação
9			k	A_k	D_k	J_k	P_k
10			0		R$ 348.000,00		
11			1	R$ 966,67	R$ 347.033,33	R$ 3.027,60	R$ 3.994,27
12			2	R$ 966,67	R$ 346.066,67	R$ 3.019,19	R$ 3.985,86
13			3	R$ 966,67	R$ 345.100,00	R$ 3.010,78	R$ 3.977,45
14							
15			358	R$ 966,67	R$ 1.933,33	R$ 25,23	R$ 991,90
16			359	R$ 966,67	R$ 966,67	R$ 16,82	R$ 983,49
17			360	R$ 966,67	R$ 0,00	R$ 8,41	R$ 975,08
18							
19			40	R$ 966,67	R$ 309.333,33	R$ 2.699,61	R$ 3.666,28
20							
21			Price				
22				Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
23			k	P_k	J_k	A_k	D_k
24			0				R$ 348.000,00
25			1	R$ 3.167,69	R$ 3.027,60	R$ 140,09	R$ 347.859,91
26			2	R$ 3.167,69	R$ 3.026,38	R$ 141,31	R$ 347.718,60
27			3	R$ 3.167,69	R$ 3.025,15	R$ 142,54	R$ 347.576,05
28							
29			358	R$ 3.167,69	R$ 81,26	R$ 3.086,43	R$ 6.253,66
30			359	R$ 3.167,69	R$ 54,41	R$ 3.113,29	R$ 3.140,37
31			360	R$ 3.167,69	R$ 27,32	R$ 3.140,37	R$ 0,00
32							
33			40	R$ 3.167,69	R$ 2.971,30	R$ 196,40	R$ 341.331,87

Figura 1: Planilha comparativa para um financiamento no SAC e Tabela Price

3.1.4 SAC X PRICE

Com objetivo de obter informações que permitirão comparar as vantagens e desvantagens quando se opta por um dos dois sistemas estudados, nesta seção serão enunciados e demonstrados diversos resultados teóricos para o SAC e para a Tabela Price.

Toda a teoria desta seção (lemas, teoremas, corolário, etc.) foi produzida sem consulta a qualquer fonte bibliográfica, constituindo-se em colaboração teórica deste trabalho ao assunto em questão.

Faremos uso de um método frequentemente utilizado na economia, passagem do discreto para o contínuo para utilizar as ferramentas do cálculo diferencial e integral.

Lema 3.3. *Sejam i e D_0 números reais positivos e n um número natural, e consideremos a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \frac{(1+i)^n - (1+i)^x}{(1+i)^n - 1} D_0 - \frac{n-x}{n} D_0. \tag{12}$$

Então $f(x) > 0$ para todo $x \in (0,n)$.

Prova:

É fácil ver que f é contínua e infinitamente derivável em $\mathbb{R}$, pois é a soma de uma função exponencial com uma função afim. Calculando suas derivadas primeira e segunda, obtemos

$$f'(x) = -\frac{(1+i)^x ln(1+i)}{(1+i)^n - 1} D_0 + \frac{1}{n} D_0$$

e

$$f''(x) = -\frac{(1+i)^x [ln(1+i)]^2}{(1+i)^n - 1} D_0.$$

Como $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de f é côncavo para baixo em $\mathbb{R}$. Posto que $f(0) = f(n) = 0$, temos que o gráfico de f fica totalmente acima do eixo x no intervalo $(0,n)$, isto é, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0,n)$. Além disso, fazendo $f'(x) = 0$, encontramos como solução única

$$x = log_{(1+i)} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{ln(1+i)^n} \right],$$

que corresponde ao ponto de máximo absoluto de f em $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4. *Para todo k natural,* $0 < k < n$, *o saldo devedor do SAC é menor que o saldo devedor da Tabela Price.*

Prova:

Sejam $D_k^{SAC} = \frac{n-k}{n} D_0$ o saldo devedor no SAC e $D_k^{Price} = \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} D_0$ o saldo devedor na Tabela Price, após k pagamentos. É fácil ver que para $k = 0$ e $k = n$, estes valores são iguais a D_0 e 0, respectivamente. Considerando a função $f : \{0, 1, 2, \ldots, n\} \mapsto \mathbb{R}$ dada por:

$$f(k) = D_k^{Price} - D_k^{SAC} = \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} D_0 - \frac{n-k}{n} D_0,$$

vemos que esta é uma restrição da função do lema anterior. Logo, podemos concluir que $f(k) > 0$ para todo $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, ou seja,

$$\frac{n-k}{n} D_0 < \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} D_0.$$

Portanto,

$$D_k^{SAC} < D_k^{Price}.$$

A seguir um gráfico feito no software livre *GeoGebra* (GEOGEBRA, 2015) mostrando a diferença do saldo devedor entre a Tabela Price e o SAC. A diferença é nula quando $k = 0$, depois vai crescendo até um ponto máximo. Após este ponto, vai diminuindo até zerar no pagamento da última parcela, que neste caso é $k = 12$. O gráfico é dinâmico: se alterarmos os valores da taxa, prazo e financiamento isoladamente ou em conjunto, para valores maiores a diferença fica mais acentuada. Podemos observar também que a função de diferença dos saldos devedores é sempre positiva, como já foi demonstrado.

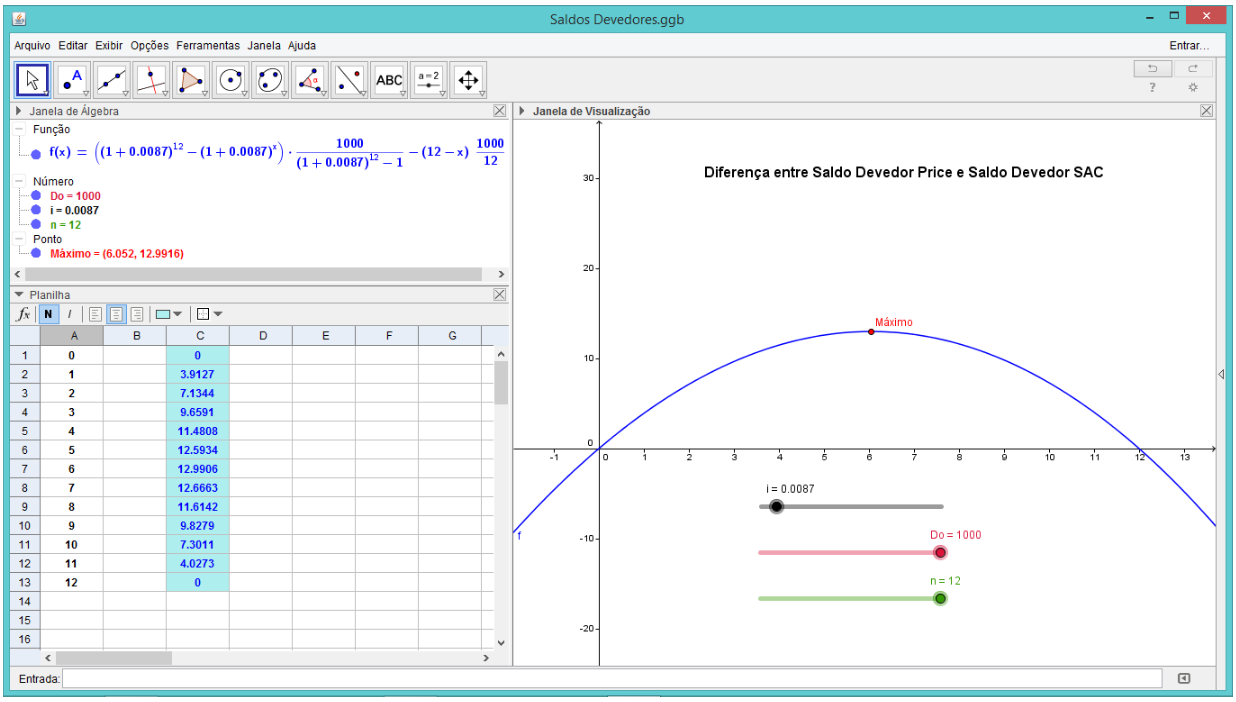

Figura 2: Gráfico Diferença Saldos Devedores

Corolário 3.5. *A soma dos valores pagos ao longo de um financiamento utilizando o SAC será sempre menor que a soma dos valores pagos utilizando a Tabela Price.*

Prova:

Primeiro, observamos que os juros pagos ao longo do financiamento utilizando o SAC serão sempre menores que os pagos utilizando a Tabela Price, pois ambos são calculados da mesma maneira, através da fórmula

$$J_k = iD_{k-1},$$

dependendo do saldo devedor que, pelo teorema anterior, sempre é menor no SAC. Como consequência, a soma dos juros pagos no SAC ao longo do financiamento será menor que a soma dos pagos pela Tabela Price, isto é,

$$\sum_{k=1}^{k=n} J_k^{SAC} < \sum_{k=1}^{k=n} J_k^{Price}.$$

Por outro lado, como cada parcela P_k é formada pela adição da amortização com os juros, $P_k = A_k + J_k$, temos que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} = \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^{SAC} + J_k^{SAC})$$

e

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price} = \sum_{k=1}^{k=n} (A_k^{Price} + J_k^{Price}).$$

Posto que

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k^{SAC} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k^{Price} = D_0,$$

concluímos que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} < \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price}.$$

Este resultado não significa que será sempre melhor optar pelo financiamento no SAC. Este assunto será abordado mais profundamente adiante, no capítulo do comparativo entre o SAC e a Tabela Price.

Lema 3.6. *Seja i um número real positivo e consideremos a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = ix(1+i)^x - (1+i)[(1+i)^x - 1].$$

Então $f(x) > 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$

Prova:

Observamos que f é contínua e infinitamente derivável em $\mathbb{R}$. Calculando sua derivada primeira, obtemos:

$$f'(x) = i(1+i)^x + ix(1+i)^x ln(1+i) - (1+i)(1+i)^x ln(1+i).$$

Para analisar o sinal de f', calculamos $f'(x) = 0$ e encontramos como solução única

$$x_0 = \frac{(1+i)ln(1+i) - i}{iln(1+i)} = 1 + \frac{1}{i} - \frac{1}{ln(1+i)} < 1,$$

pois $i > ln(1+i)$. Logo, f' terá sempre o mesmo sinal no intervalo $(x_0, +\infty) \supset [1, +\infty)$. Como

$$f'(1) = i(1+i) + i(1+i)ln(1+i) - (1+i)(1+i)ln(1+i),$$

$$f'(1) = i(1+i) + (1+i)ln(1+i)[i - (1+i)],$$

$$f'(1) = i(1+i) - (1+i)ln(1+i),$$

$$f'(1) = (1+i)[i - ln(1+i)] > 0,$$

temos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, +\infty) \supset [1, \infty)$. Em consequência, f é crescente em $[1, \infty)$. Como $f(1) = 0$, concluímos que $f(x) > 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$.

A representação gráfica de

$$P_k^{SAC} = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{[n-(k-1)]i}{n} \right\} D_0$$

como função de k é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação $-\frac{i}{n}D_0$, enquanto que a de

$$P_k^{Price} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} D_0$$

é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação zero, uma vez que na Tabela Price a prestação é constante.

Teorema 3.7. *Para $n = 1$, $P_1^{SAC} = P_1^{Price}$, e para todo $n > 1$, $P_1^{SAC} > P_1^{Price}$ e $P_n^{SAC} < P_n^{Price}$.*

Prova:

Fazendo $n = 1$ e $k = 1$ nas fórmulas anteriores, obtemos:

$$P_1^{SAC} = P_1^{Price} = (1+i)D_0.$$

Para $n > 1$ e $k = 1$, temos a seguinte sequência de desigualdades:

$$(1+i)^n = 1+ni+...+i^n > 1+ni \ (desigualdade\ de\ Bernoulli)$$

$$(1+i)^n - 1 - ni > 0,$$

$$(1+i)^n - 1 + ni(1+i)^n - ni > ni(1+i)^n,$$

$$(1+ni)[(1+i)^n - 1] > ni(1+i)^n$$

$$\frac{1+ni}{n} > \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1},$$

$$\left(\frac{1}{n} + i\right) D_0 > \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} D_0.$$

Logo,

$$P_1^{SAC} > P_1^{Price}.$$

Para $n > 1$ e $k = n$, consideramos a função $f : \{2,3,4,...\} \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$f(n) = in(1+i)^n - (1+i)[(1+i)^n - 1],$$

que é uma restrição da função do lema anterior. Logo, concluímos que $f(n) > 0$ para todo $n \in \{2,3,4,...\}$, ou seja,

$$in(1+i)^n > (1+i)[(1+i)^n - 1]$$

$$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} > \frac{1+i}{n}$$

$$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} D_0 > \frac{1+i}{n} D_0.$$

Portanto,

$$P_n^{SAC} < P_n^{Price}.$$

Observação: Sabendo que

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_k^{SAC} < \sum_{k=1}^{k=n} P_k^{Price}$$

e utilizando o resultado anterior, podemos concluir que, quando $n = 2$, $P_2^{SAC} < P_2^{Price}$, e quando $n > 2$, existe k_0, $1 < k_0 < n$, tal que $P_k^{SAC} < P_k^{Price}$ para todo k, com $k_0 \leq k \leq n$. Isto significa que sempre haverá um momento no qual a prestação do SAC se torna menor que a prestação da Tabela Price, e a partir daí até o final do financiamento. Pelas características gráficas dos dois tipos de prestações pode-se concluir que, se n é par, o menor k_0 será menor que (ou igual a)

$\frac{n}{2}+1$, e se n é ímpar, o menor k_0 será menor que (ou igual a) $\frac{n+1}{2}$.

Em seguida um gráfico feito no *GeoGebra* (GEOGEBRA, 2015) para um financiamento de $R\$1.000,00$ em 12 prestações com taxa de juros 0,87$\%a.m.$, mostrando o comportamento das prestações na Tabela Price e no SAC. Na Tabela Price as prestações são constantes e na SAC decrescem conforme uma PA. Podemos observar que para $k=6$ $\left(\frac{n}{2}\right)$ a prestação ainda é maior no SAC, já para $k=7$ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ a prestação passa a ser maior na Tabela Price até o final do financiamento. O gráfico é dinâmico se aumentarmos o valor da taxa de juros, principalmente, veremos que antes ainda ocorrerá a inversão nos valores das prestações entre SAC e Tabela Price.

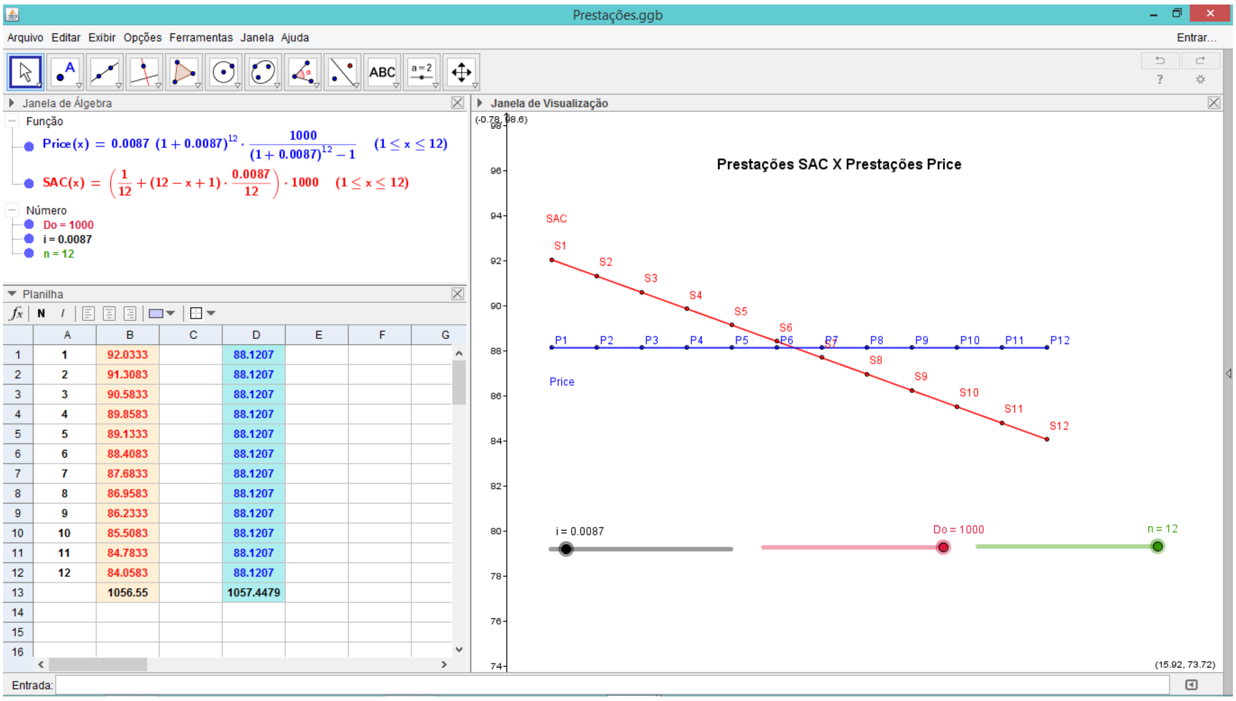

Figura 3: Gráfico Prestação SAC X Prestação Price

O valor da prestação no SAC será maior que na Tabela Price até uma prestação k_0, a partir da qual passará a ser menor. Vamos ver do que o número k_0 depende:

Já vimos que a prestação na Tabela Price é

$$P_k^{Price} = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

e no SAC, colocando D_0 em evidência na fórmula 5,

$$P_k^{SAC} = \frac{D_0(1+in-ik+i)}{n}.$$

Vamos igualar as duas equações:

$$\frac{D_0(1+in-ik+i)}{n} = D_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$
$$(1+in-ik+i)-(1+i)^{-n}(1+in-ik+i) = ni,$$
$$-(1+i)^{-n}(1+in-ik+i) = in-1-in+ik-i,$$
$$-(1+i)^{-n}(1+in-ik+i) = -1+ik-i,$$
$$-(1+i)^{-n}-in(1+i)^{-n}+ik(1+i)^{-n}-i(1+i)^{-n} = -1+ik-i$$

,

$$-(1+i)^{-n}-in(1+i)^{-n}+i(1+i)^{-n}+1+i = ik-ik(1+i)^{-n},$$
$$k[i-i(1+i)^{-n}] = (1+i)^{-n}(-1-in+i)+1+i,$$
$$k = \frac{[(1+i)^{-n}(-1-in+i)]+1+i}{[i(1-(1+i)^{-n}]}. \tag{13}$$

A representação gráfica de

$$A_k^{SAC} = \frac{1}{n}D_0$$

como função de k é um conjunto de n pontos sobre uma reta de inclinação zero, enquanto que a de

$$A_k^{Price} = i\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n-1}D_0$$

é um conjunto de n pontos sobre uma curva exponencial.

Teorema 3.8. *Para $n=1$, $A_1^{SAC} = A_1^{Price}$, e para todo $n>1$, $A_1^{SAC} > A_1^{Price}$ e $A_n^{SAC} < A_n^{Price}$.*

Prova:

Fazendo $n=1$ e $k=1$ nas fórmulas anteriores, obtemos

$$A_1^{SAC} = A_1^{Price} = D_0.$$

Para $n>1$ e $k=1$, temos a seguinte sequência de desigualdades:

$$(1+i)^n = 1+ni+...+i^n > 1+ni,$$

$$(1+i)^n-1 > ni,$$
$$\frac{1}{n} > \frac{i}{(1+i)^n-1},$$

$$\frac{1}{n}D_0 > \frac{i}{(1+i)^n - 1}D_0.$$

Logo,

$$A_1^{SAC} > A_1^{Price}.$$

Para $n > 1$ e $k = n$, basta observar que $P_n^{SAC} = (1+i)A_n^{SAC}$ e $P_n^{Price} = (1+i)A_n^{Price}$, e usar que $P_n^{SAC} < P_n^{Price}$.

Observação: Sabendo que

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k^{SAC} = \sum_{k=1}^{k=n} A_k^{Price} = D_0$$

e utilizando o resultado anterior, podemos concluir que, quando $n = 2$, $A_2^{SAC} < A_2^{Price}$, e quando $n > 2$, existe k_0, $1 < k_0 \leq n$, tal que $A_k^{SAC} < A_k^{Price}$ para todo k, com $k_0 \leq k \leq n$. Isto significa que sempre haverá um momento no qual a amortização do SAC se torna menor que a amortização da Tabela Price, e a partir daí até o final do financiamento.

A seguir podemos observar um gráfico do *GeoGebra* (GEOGEBRA, 2015) para o mesmo financiamento do caso anterior, mas agora mostrando as parcelas de amortização no SAC e Tabela Price. No SAC o valor de amortização é fixo, já na Tabela Price vai crescendo de forma exponencial. No início a parcela de amortização é maior no SAC, mas a partir de certo momento a parcela de amortização passa a ser maior na Tabela Price até o final do financiamento. Se aumentarmos a taxa de juros, mais tempo vai demorar para as amortizações ficarem maiores na Tabela Price.

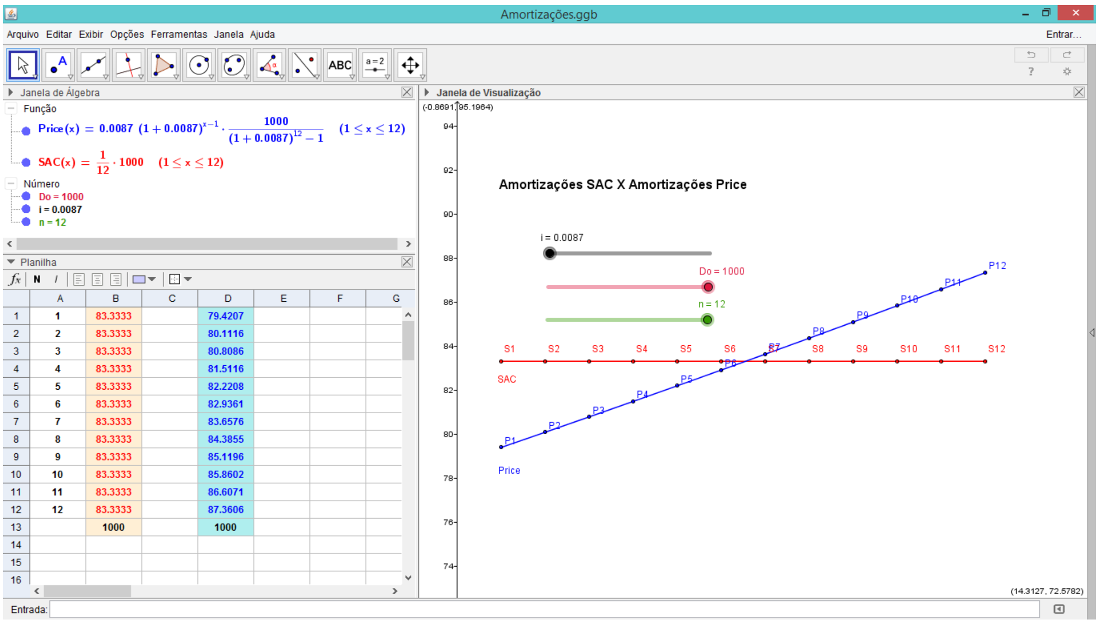

Figura 4: Gráfico Amortização SAC X Amortização Price

Sendo a amortização da Tabela Price no mês k dada por:

$$A_k^{Price} = \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

podemos encontrar o total da amortização da dívida até o mês m, da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{Price} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} D_0 + \frac{i(1+i)}{(1+i)^n - 1} D_0 + \frac{i(1+i)^2}{(1+i)^n - 1} D_0 + ... + \frac{i(1+i)^{m-1}}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=m} A_k^{Price} = [1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{m-1}] \frac{i}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

$$\sum A_m^{Price} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k^{Price} = \frac{(1+i)^m - 1}{(1+i)^n - 1} D_0.$$

Para sabermos o quanto da dívida D_0 já foi amortizada quando metade do financiamento foi quitado (este raciocínio se aplica quando n é par), basta substituir m por $\frac{n}{2}$. Assim,

$$\sum A_{\frac{n}{2}}^{Price} = \frac{(1+i)^{\frac{n}{2}} - 1}{(1+i)^n - 1} D_0,$$

$$\sum A_{\frac{n}{2}}^{Price} = \frac{1}{(1+i)^{\frac{n}{2}} + 1} D_0 < \frac{D_0}{2}.$$

Concluímos que, na Tabela Price, nunca a metade da dívida será amortizada na metade do prazo, ou seja, na segunda metade sempre amortizaremos mais do que na primeira metade do financiamento. Como

$$\lim_{i \to 0} \left(\sum A_{\frac{n}{2}}^{Price} \right) = \frac{D_0}{2},$$

concluímos que, quanto menor for a taxa de juro, mais próximo da metade do prazo se dará a amortização da metade da dívida. Por outro lado, como

$$\lim_{i \to \infty} \left(\sum A_{\frac{n}{2}}^{Price} \right) = 0,$$

concluímos que, quanto maior for a taxa de juro, mais próximo do final do prazo se dará a amortização da metade da dívida.

Para sabermos em qual mês m ultrapassaríamos a amortização da metade da dívida, basta isolar m na desigualdade

$$\frac{(1+i)^m - 1}{(1+i)^n - 1} D_0 \geq \frac{D_0}{2},$$

que dá

$$m \geq log_{(1+i)} \left[\frac{(1+i)^n + 1}{2} \right].$$

Para sabermos em qual mês m ultrapassaríamos a amortização de três quartos da dívida, basta isolar m na desigualdade

$$\frac{(1+i)^m-1}{(1+i)^n-1}D_0 \geq \frac{3D_0}{4},$$

que dá

$$m \geq log_{(1+i)}\left[\frac{3(1+i)^n+1}{4}\right].$$

Observação: A amortização do SAC é dada por

$$A_k^{SAC} = \frac{1}{n}D_0,$$

o que significa que

$$\sum A_m^{SAC} = \sum_{k=1}^{k=m} A_k^{SAC} = \frac{m}{n}D_0.$$

Desta forma, no SAC sempre teremos amortizado a metade da dívida na metade do prazo. É fácil ver que, neste sistema, a amortização é proporcional ao número de parcelas pagas.

A seguir temos um gráfico feito no *GeoGebra* (GEOGEBRA, 2015) mostrando para cada valor de k o somatório das amortizações pagas. O valor de financiamento continua sendo R$1.000,00 e o prazo igual a 12, mas agora utilizamos uma taxa de juros bem alta (de 1.000%) para evidenciar que quanto maior a taxa de juros, mais perto do final do financiamento é que as amortizações do saldo devedor vão acontecer na Tabela Price. Para este caso, até a prestação de número 10 as amortizações são quase insignificantes, na prestação 11 há amortização de aproximadamente R$90,00 e somente na última prestação é que acontece a amortização realmente significativa. O gráfico é dinâmico: se agora, ao contrário, tornarmos a taxa de juros bem próxima de zero, os gráficos do SAC e da Tabela Price tendem a coincidir.

3.2 TAXA DE JUROS

É uma taxa percentual que é cobrada periodicamente sobre um valor e constitui o lucro do capital empregado (como em empréstimos) ou é paga sobre um valor depositado (como em investimentos bancários). O juro é o preço que se paga pelo consumo antecipado de um bem ou serviço, ou seja, o indivíduo não dispõe do capital necessário para consumir certo objeto desejado, mas não quer esperar até ter o valor suficiente para fazer a aquisição. Então empresta dinheiro de um outrem para poder consumir hoje, pagando um preço por este empréstimo, o preço pela antecipação. Em contrapartida quem concedeu o empréstimo recebe a remuneração por tal feito.

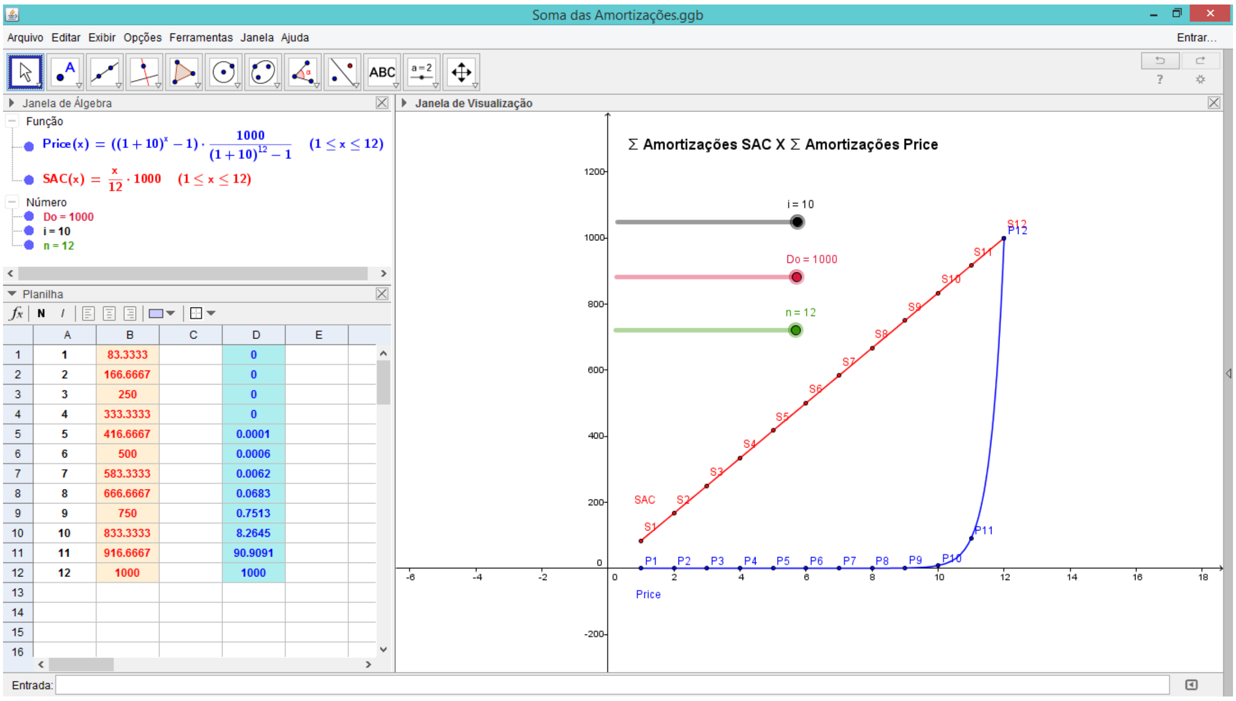

Figura 5: Soma das amortizações SAC X Price

Sendo J os juros e C o capital a razão $i = \frac{J}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, referida ao período da operação é chamada taxa de juros.

O tempo, o risco e a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos interferem na formação da taxa de juros. O governo, quando deseja reprimir o consumo, na tentativa de conter a inflação, diminui a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos, por exemplo, aumentando a taxa de juros (MISSAGIA; VELTER, 2012). A taxa bruta de juro é formada pela taxa de inflação do período de capitalização e pela taxa de juro real, que é dividida em taxa livre de risco e taxa de risco, que espera-se receber por quem emprestou ou investiu por estar correndo um risco (HOJI, 2009).

3.2.1 TAXA DE JUROS NOMINAL

A taxa nominal é uma taxa referencial em que os juros são capitalizados mais de uma vez no período a que a taxa se refere. É a taxa de juro firmada em contrato que se acrescentará às prestações. Nos contratos de financiamento imobiliário pelo SFH, por exemplo, a taxa nominal máxima é de $12\%a.a.$ Uma taxa de $10\%a.a.$ capitalizada mensalmente é dita taxa nominal de $10\%a.a.$

3.2.2 TAXA DE JUROS EFETIVA

Taxa de juros efetiva é aquela na qual a unidade de tempo de referência coincide com a unidade de tempo de ocorrência da capitalização (dos juros). É a taxa resultante da aplicação periódica do juro previsto na taxa nominal. Por exemplo, a uma taxa nominal de 12% ao ano, a taxa efetiva será de 1% ao mês. Como a aplicação desse percentual é feita mês a mês, juro sobre juro, a taxa total, no final de um ano, não será mais os 12% contratados, e sim 12,68%. Nesse caso, em geral omite-se o período de capitalização. Assim, a taxa de 10% ao ano é apresentada como $10\%a.a.$, em vez de $10\%a.a.$ capitalizados anualmente.

3.2.3 TAXA DE JUROS PROPORCIONAL

A taxa proporcional é determinada pela relação simples entre a taxa considerada na operação (taxa nominal) e o número de vezes em que ocorrem juros (quantidade de períodos de capitalização). Por exemplo, a taxa proporcional ao mês para uma taxa nominal de $18\%a.a.$, capitalizada mensalmente, é de $1{,}5\%a.m.$

3.2.4 TAXA DE JUROS EQUIVALENTE

O valor futuro de uma quantia C após um período de tempo inteiro é $(1+I)C$. Por outro lado o período inteiro é igual a n frações $\frac{1}{n}$ deste período e se a taxa correspondente a fração $\frac{1}{n}$ do período é i, então o valor futuro de uma quantia C após n frações $\frac{1}{n}$ do período é:

$$(1+i)^n C$$

Portanto,

$$(1+I)C = (1+i)^n C,$$

$$1+I = (1+i)^n. \tag{14}$$

Neste caso as taxas I e i são ditas equivalentes.

Uma frase como “144% ao ano, com capitalização mensal” significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 144% anunciada e sim a taxa mensal que lhe é proporcional. Portanto, a tradução da expressão “144% ao ano, com capitalização mensal” é “12% ao mês”. E a taxa anual equivalente a $12\%a.m.$ é $290\%a.a.$ e não $144\%a.a.$

3.2.5 TAXA DE JUROS PRO-RATA

De acordo com o dicionário Aurélio, pro-rata significa proporcionalmente, dando (ou recebendo) cada um a parte que lhe toca. Se a taxa de juros é mensal, a taxa de juros pro-rata é a taxa proporcional aos dias que se passaram antes de completar o mês para haver a capitalização.

3.2.6 CUSTO EFETIVO TOTAL

Custo Efetivo Total (CET) é a taxa que corresponde a todos os encargos e despesas incidentes nas operações de crédito e de arrendamento mercantil financeiro, contratadas ou ofertadas a pessoas físicas, microempresas ou empresas de pequeno porte.

O CET deve ser expresso na forma de taxa percentual anual, incluindo todos os encargos e despesas das operações, isto é, o CET deve englobar não apenas a taxa de juros, mas também tarifas, tributos, seguros e outras despesas cobradas do proponente, representando as condições vigentes na data do cálculo.

Conhecendo previamente o custo total da operação de crédito, fica mais fácil para o cidadão comparar as diferentes ofertas de crédito feitas pelas instituições do mercado, o que gera maior concorrência entre essas instituições. Assim antes de contratar uma operação, o ideal é comparar o CET fornecido por outras instituições financeiras para um crédito de mesmo valor e prazo.

De acordo com a Resolução CMN (Conselho Monetário Nacional) 3.517, de 2007, a fórmula do CET é dada por

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{FC_j}{(1+CET)^{\frac{(d_j-d_0)}{365}}} - FC_0 = 0, \tag{15}$$

onde:

FC_0 é o valor do crédito concedido, deduzido, se for o caso, das despesas e tarifas pagas antecipadamente,

FC_1 são os valores cobrados pela instituição, periódicos ou não, incluindo as amortizações, juros, prêmio de seguro e tarifa de cadastro ou de renovação de cadastro, quando for o caso, bem como qualquer outro custo ou encargo cobrado em decorrência da operação,

j é o j-ésimo intervalo existente entre a data do pagamento dos valores periódicos e a data do desembolso inicial, expresso em dias corridos,

N é o prazo do contrato, expresso em dias corridos,

d_j é a data do pagamento dos valores cobrados, periódicos ou não,

d_0 é a data da liberação do crédito pela instituição (FC_0).

3.3 CORREÇÃO MONETÁRIA

O aumento persistente e generalizado dos preços de bens e de serviços, com consequente perda do poder aquisitivo da moeda, denomina-se inflação. O Brasil conviveu, até meados da década de 1990, com a taxa de inflação galopante. Quando o período de altas taxas de inflação for longo, ocorre o desalinhamento dos preços relativos, isto é, os preços de determinados produtos e serviços aumentam mais do que os preços de outros produtos e serviços (HOJI, 2009). A correção monetária foi criada para corrigir as distorções geradas pela inflação e, dessa forma, diminuir os riscos de um investimento. Os bancos, que operam com recursos de terceiros, utilizam esse instrumento de proteção, uma vez que as operações com correção monetária, principalmente a prazos mais longos, se tornam mais seguras (MENDONCA et al., 2010). A indexação é o reajuste de um valor em função de um índice, cuja variação pode ser calculada.

No Brasil são utilizados vários indexadores. Por exemplo:

> CDI (certificado de depósito interbancário): muito usado nas operações interbancárias, fundos de investimento e outros tipos de captação e empréstimos;
>
> TR (taxa referencial de juros): corrige os saldos das cadernetas de poupança, saldos devedores do Sistema Financeiro da Habitação e também utilizada em operações de captação e empréstimos;
>
> TJLP (taxa de juros de longo prazo): utilizada, basicamente, em financiamento de projetos de longo prazo;
>
> IGP-M (índice geral de preços de mercado): empregado em diversas formas de captação e empréstimos;
>
> VC (variação cambial): utilizada, basicamente, em operações internacionais.

3.3.1 TR

A Taxa Referencial (TR) é um dos indexadores utilizados para correção monetária. A TR é definida todo mês pelo Banco Central, de acordo com a remuneração média das aplicações bancárias e o cálculo é feito com base em remuneração dos CDB's (certificados de depósitos bancários) com aplicação de um redutor. É a referência para reajustes da caderneta de poupança e de diversos tipos de contratos e dívidas, inclusive financiamentos imobiliários.

3.4 FINANCIAMENTO HABITACIONAL

É o financiamento para aquisição de moradia, que atualmente usa o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema Francês de Amortização (Tabela Price) para cálculo das prestações a serem pagas. Nos dois sistemas, o saldo devedor é corrigido mês a mês pela TR, e a cada período de 12 meses é feito o recálculo da prestação (a partir do terceiro ano ele pode passar a ser feito trimestralmente), com base no saldo devedor e no período restante (SAMANEZ, 2010).

A taxa de juros geralmente é pós-fixada que é a taxa de juros definida para o contrato, com incidência de atualização pela remuneração básica dos depósitos de poupança (TR) no saldo devedor do contrato. É diferente da taxa de juros pré-fixada que é a taxa de juros acrescida do percentual referente à TR travada (fixa) definida para o contrato, sem a incidência de atualização pela remuneração básica dos depósitos de poupança (TR) no saldo devedor do contrato.

3.4.1 COMPONENTES DA PRESTAÇÃO HABITACIONAL

Prestação é o pagamento a prazo para liquidar uma dívida. É também a própria quantia em dinheiro paga periodicamente. No caso dos financiamentos imobiliários, as prestações são compostas de uma parcela de amortização e outra de juros. Aos valores das prestações calculados nas planilhas, muitas vezes é acrescentada uma taxa administrativa e uma taxa referente a seguros (seguro MIP, que cobre morte e invalidez permanente, e seguro DFI, que faz a cobertura de danos físicos no imóvel) (SAMANEZ, 2010).
Observação: para as próximas subseções como os cálculos são todos para o sistema de amortização constante, omitiremos a palavra SAC das fórmulas.

3.4.2 CÁLCULO PARA PAGAMENTO DE PRESTAÇÕES EM ATRASO

O pagamento de prestações em atraso ocorre quando o mutuário não paga o valor da prestação na data de vencimento estabelecida, mas sim em uma data posterior. Os encargos incidentes no pagamento de prestações em atraso são a atualização monetária, os juros remuneratórios, os juros moratórios e a multa. Seguem as definições:

Atualização monetária: atualização pela TR do valor da prestação até a data de pagamento efetivo.

Juros remuneratórios: juros cobrados do devedor com a finalidade de remunerar o credor pelo uso do capital emprestado.

Juros moratórios: juros cobrados do devedor com a finalidade de ressarcir o credor pelo atraso no cumprimento de obrigação.

Multa: penalidade imposta aos que não cumprem leis, regulamentos, contratos.

Cálculo da prestação atualizada monetariamente até a data do pagamento

$$P_{atual.monet} = P_{venc}\left(\frac{IND_{valor.aniversario.mes.pagamento}}{IND_{valor.aniversario.mes.vencimento}}\right)\left(\frac{indice}{100}+1\right)^{\frac{n}{30}}, \tag{16}$$

onde:

$P_{atual.monet}$ = valor do encargo total atualizado monetariamente até a data do pagamento;

P_{venc} = valor do encargo total no vencimento;

$IND_{valor.aniversario.mes.pagamento}$ = índice acumulado no mês de pagamento da prestação (utiliza-se a TR (índice acumulado) do último vencimento do encargo considerando a data de pagamento);

$IND_{valor.aniversario.mes.vencimento}$ = índice acumulado no mês do vencimento da prestação (utiliza-se a TR do mês do vencimento do encargo considerando a data de pagamento);

$indice$ = índice mensal (utiliza-se a TR do próximo vencimento do encargo);

n = número de dias corridos existentes entre a data de vencimento do último encargo (inclusive), e a data do pagamento, (exclusive).

Cálculo dos juros remuneratórios sobre atraso

$$JR = P_{atual.monet}\left\{\left[\left(\frac{i}{1200}+1\right)^{m}\left[\left(\frac{i}{1200}\frac{n}{30}\right)+1\right]-1\right]\right\}, \tag{17}$$

onde:

JR = juros remuneratórios para o período;

$P_{atual.monet}$ = valor do encargo total atualizado monetariamente até a data do pagamento;

i = taxa nominal de juros remuneratórios do contrato;

m =número inteiro de meses entre a data do vencimento e a data do pagamento;

n = número de dias corridos do último aniversário do encargo mensal (exclusive) até a data do pagamento (inclusive).

Cálculo dos juros moratórios

$$JM = P_{atual.monet} \times \%J_{Mo} \times n, \tag{18}$$

onde:
$JM =$ valor de juros moratórios para o período;
$P_{atual.monet} =$ valor do encargo total atualizado monetariamente até a data do pagamento;
$\%JMo =$ taxa de juros moratórios do contrato;
$n =$número de dias em atraso.

Cálculo da multa sobre encargo em atraso

$$Mu = P_{atual.monet} \times \%Mm, \tag{19}$$

onde:
$Mu =$ valor da multa sobre pagamento de encargos em atraso;
$P_{atual.monet} =$ valor do encargo total atualizado monetariamente até a data do pagamento;
$\%Mm =$ percentual de multa sobre pagamento de encargos em atraso prevista em contrato.

3.4.3 ALTERAÇÃO DA DATA DE VENCIMENTO

A alteração de data de vencimento de um contrato consiste na mudança do dia que é paga a prestação e ocorre por vontade do mutuário que formaliza o pedido na instituição financeira onde possui seu contrato de financiamento. O valor dos juros diários devidos na alteração de data de vencimento é calculado pelo critério pro-rata de acordo com o período compreendido entre a data do último vencimento e a nova data de vencimento.

A fórmula utilizada para cálculo dos juros diários devidos na alteração da data de vencimento é

$$JP = SD\left\{\left[\left(1+\frac{i}{1200}\right)\right]^{\frac{n}{30}} - 1\right\}, \tag{20}$$

onde: $JP =$ juros proporcionais devidos no intervalo entre o último encargo mensal vencido e pago e a nova data de aniversário do contrato;
$SD =$ saldo devedor atualizado pela TR na nova data de aniversário do contrato;
$i =$ taxa de juros contratual vigente para o contrato na data do evento;
$n =$ número de dias corridos ente o último vencimento e a nova data de vencimento, limitado a 59 dias.

3.4.4 AMORTIZAÇÃO DO SALDO DEVEDOR

É o ato de diminuir o saldo devedor do contrato utilizando recursos próprios ou valor de FGTS. A amortização é feita por vontade do cliente, que faz a solicitação na instituição financeira detentora do contrato habitacional. A amortização com recursos próprios é feita a qualquer tempo e a amortização com FGTS passa por análise, respeitando as regras impostas pelo Conselho Curador do FGTS, podendo ser feita em intervalos de dois em dois anos.

3.4.4.1 AMORTIZAÇÃO PARA DIMINUIÇÃO DO ENCARGO MENSAL

É a amortização do saldo devedor, destinada à redução do valor do encargo, com ou sem a utilização de recursos do FGTS.

O cálculo dos juros diários referente ao valor amortizado é feito através da fórmula

$$JD = AM\left[\left(1+\frac{i}{1200}\right)^{\frac{n}{30}}-1\right], \tag{21}$$

onde:
$JD =$juros diários;
$n =$ número de dias entre o último vencimento e a data do evento;
$i =$ taxa de juros nominal anual;
$AM =$ valor da amortização.

A amortização efetiva para o contrato é:

$$AM_{efetiva} = AM - JD. \tag{22}$$

O novo valor do saldo devedor é

$$SD_{novo} = SD_{antigo} - AM_{efetiva}, \tag{23}$$

onde:
$SD_{novo} =$ novo saldo devedor;
$SD_{antigo} =$ antigo saldo devedor;
$AM_{efetiva} =$ amortização efetiva.

A nova parcela de amortização será

$$PAM_{nova} = \frac{NSD}{n}, \tag{24}$$

onde:

PAM_{nova} = nova parcela de amortização

SD_{novo} = novo saldo devedor

n = prazo remanescente do contrato na data do evento

A nova prestação será

$$NP = \frac{SD_{novo}}{n} + SD_{novo}\frac{i}{1200}, \tag{25}$$

onde:

NP = nova prestação;

SD_{novo} = novo saldo devedor;

i = taxa nominal de juros;

n = prazo remanescente do contrato na data de evento.

3.4.4.2 AMORTIZAÇÃO PARA DIMINUIÇÃO DO PRAZO

É a amortização do saldo devedor, destinada à redução do prazo, com ou sem a utilização de recursos do FGTS.

O cálculo dos juros diários, da amortização efetiva e do novo saldo devedor são análogos ao da amortização para diminuição do encargo mensal.

O cálculo do novo prazo remanescente é dado pela fórmula

$$NPra = \frac{SD_{novo}}{P - SD_{novo}\frac{i}{1200}}, \tag{26}$$

onde:

$NPra$ = novo prazo remanescente;

SD_{novo} = novo saldo devedor;

P = valor da última prestação calculada;

i = taxa de juros nominal.

A nova prestação será

$$NP = \frac{SD_{novo}}{NPra} + SD_{novo}\frac{i}{1200}, \tag{27}$$

onde:

NP = nova prestação;

$NPra$ = novo prazo remanescente;

SD_{novo} = novo saldo devedor;
i = taxa de juros nominal.

4 APLICAÇÕES EM SITUAÇÕES REAIS

4.1 EXEMPLO DE CÁLCULO DE TAXA DE JUROS EFETIVA

Um financiamento de imóvel é anunciado pela taxa nominal de $8,51\%a.a.$ sendo a capitalização mensal. Qual é a taxa anual efetiva deste financiamento?

A taxa proporcional ao mês é $i = \frac{8,51}{12} = 0,709\%a.m.$

Então a taxa equivalente a 0,709$\%a.m$ é I tal que

$$1+I = (1+0,00709)^{12},$$

$$1+I = 1,0885,$$

$$I = 0,0885.$$

Portanto, a taxa que está sendo efetivamente cobrada é $8,85\%a.a.$

Para facilitar os cálculos construímos no Excel a planilha eletrônica abaixo, colocando na célula C6 a fórmula da taxa equivalente (a taxa nominal, a taxa proporcional representada por i e a taxa equivalente representada por I estão representados na tabela em taxa percentual)

C6 = (((1+C5/100)ˆ C4)-1)*100

	A	B	C
1	Planilha taxa equivalente		
2			
3		taxa nominal=	8,51
4		n=	12
5		i=	0,709
6		I=	8,85

Figura 6: Taxa equivalente

É importante ficar atento para qual taxa está sendo anunciada em um financiamento. Geralmente a taxa que aparece nas simulações é a nominal, que não é a efetivamente cobrada. Não podemos, por exemplo, comparar a taxa nominal em um banco com a taxa efetiva em outro, pois chegaremos a conclusões equivocadas.

4.2 EXEMPLO DE PLANILHA DE AMORTIZAÇÃO NO SAC COM CORREÇÃO PELA TR

Nesta seção, apresentaremos uma planilha de amortização de um financiamento de R$ 100.000,00 a ser pago em 10 meses, com juros de $1\% a.m.$ no SAC, utilizando a tabela da TR abaixo (valores de TR de janeiro a outubro de 2014) para atualizar o saldo devedor em cada um dos meses do financiamento.

Mês	TR
1	0,1126
2	0,0537
3	0,0266
4	0,0459
5	0,0604
6	0,0465
7	0,1054
8	0,0602
9	0,0873
10	0,0567

No SAC, como a amortização é constante para encontrá-la basta dividirmos o valor a ser financiado pelo número de meses do financiamento:

$$A_k^{SAC} = \frac{100.000}{10},$$

$$A_k^{SAC} = 10.000.$$

Se não fosse a TR, neste caso teríamos que o saldo devedor decresce conforme uma PA de razão -10.000 e a prestação decresce conforme uma PA de razão -100.

O somatório do valor a ser pago é o total das prestações mais o saldo devedor residual que foi gerado pela correção monetária. Como houve a correção pela TR, as parcelas de amortização "não dão conta" de zerar o saldo devedor. Por isso é que acontece o recálculo da prestação nos contratos a cada 12 meses ou quando for detectado desequilíbrio financeiro, para que no final do prazo o saldo devedor realmente seja zerado.

Construindo a planilha, temos:

A	B	C	D	E	F	G
k	A_k	D_k	TR	D_k corrigido	J_k	P_k
0		100.000,00	0,1126	100.112,60		
1	10.000,00	90.112,60	0,0537	90.161,00	1001,13	11.001,13
2	10.000,00	80.161,00	0,0266	80.182,32	901,61	10.901,61
3	10.000,00	70.182,32	0,0459	70.214,53	801,82	10.801,82
4	10.000,00	60.214,53	0,0604	60.250,90	702,14	10.702,14
5	10.000,00	50.250,90	0,0465	50.274,27	602,51	10.602,51
6	10.000,00	40.274,27	0,1054	40.316,72	502,74	10.502,74
7	10.000,00	30.316,72	0,0602	30.335,00	403,17	10.403,17
8	10.000,00	20.335,00	0,0873	20.352,75	303,35	10.303,35
9	10.000,00	10.352,75	0,0567	10.358,62	203,53	10.203,53
10	10.000,00	358,62			103,59	10.103,59
Total		358,62				105.525,59

Figura 7: SAC com TR

4.3 EXEMPLO DE PLANILHA DE AMORTIZAÇÃO NA TABELA PRICE COM CORREÇÃO PELA TR

Nesta seção, apresentaremos uma planilha de amortização de um financiamento de R$ 100.000,00 a ser pago em 10 meses, com juros de $1\% a.m.$ na Tabela Price. Utilizamos a tabela da TR do exemplo anterior para atualizar o saldo devedor em cada um dos meses do financiamento.

Na Tabela Price a prestação é constante e vamos encontrar seu valor através da fórmula 7:

$$P_k^{Price} = 100.000\frac{0,01}{1-(1+0,01)^{-10}},$$

$$P_k^{Price} = \frac{1000}{0,09471},$$

$$P_k^{Price} = 10.558,55.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica a seguir colocando na célula C6 a fórmula da prestação:

C6 = C3 *(C4/(1-(1+C4)^ (-C5))).

A diferença de R$0,34 entre o calculado pela fórmula e depois pela planilha eletrônica ocorreu devido aos arredondamentos. O cálculo pela fórmula foi feito por calculadora e na

	A	B	C
1	Planilha Prestação Price		
2			
3		D_0=	100.000,00
4		i=	1%
5		n=	10
6		P_k=	10558,21

Figura 8: Prestação Price

última divisão arredondamos para duas casas decimais, sendo que o cálculo pela planilha foi feito no Excel.

Agora, construindo a tabela, temos:

	A	B	C	D	E	F	G
1	k	P_k	J_k	A_k	D_k	TR	D_k corrigido
2	0				100.000	0,1126	100.112,60
3	1	10.558,55	1.001,13	9.557,42	90.555,18	0,0537	90.603,81
4	2	10.558,55	906,04	9.652,51	80.951,30	0,0266	80.972,83
5	3	10.558,55	809,73	9.748,82	71.224,01	0,0459	71.256,70
6	4	10.558,55	712,57	9.845,98	61.410,72	0,0604	61.447,81
7	5	10.558,55	614,48	9.944,07	51.503,74	0,0465	51.527,69
8	6	10.558,55	515,28	10.043,27	41.484,42	0,1054	41.528,14
9	7	10.558,55	415,28	10.143,27	31.384,87	0,0602	31.177,72
10	8	10.558,55	314,04	10.244,51	21.159,25	0,0873	21.177,72
11	9	10.558,55	211,78	10.346,77	10.830,95	0,0567	10.837,09
12	10	10.558,55	108,37	10.450,18	386,91		
13	Total	105.585,50			386,91		

Figura 9: Price com TR

O somatório do valor a ser pago é o total das prestações mais o saldo devedor residual que foi gerado pela correção monetária. Assim como ocorreu no SAC, a correção pela TR fez com que as parcelas de amortização "não dessem conta" de zerar o saldo devedor. Portanto, houve uma sobra de saldo a ser pago.

Calculando a diferença entre o total a ser pago na Tabela Price com atualização da TR e o total a ser pago no SAC com atualização da TR, temos:

$R\$105.972,41 - R\$105.884,21 = R\$88,20.$

4.4 EXEMPLO SOBRE TABELA PRICE

Consideremos o financiamento de um imóvel na Tabela Price com taxa de juros de $1\%a.m.$ em 240 meses.

$a)$ Quando a dívida será reduzida à metade do valor contratado?

O valor contratado é D_0. Queremos saber quando $D_k^{Price} = \frac{D_0}{2}$.

Podemos utilizar a fórmula da página 32:

$$m \geq log_{(1+i)}\left[\frac{(1+i)^n+1}{2}\right]$$
$$m \geq log_{(1,01)}(5,946276827)$$
$$m \geq \frac{log(5,946276827)}{log(1,01)}$$
$$m \geq \frac{0,774245123}{0,004321373}$$
$$m \geq 179,16$$

Portanto, apenas no pagamento da prestação 180 é que o valor contratado será reduzido pela metade.

$b)$ Em quanto a prestação ficaria aumentada se o financiamento fosse feito na metade do tempo?

Em 240 meses, pela fórmula 7,

$$P_k^{Price} = D_0\frac{0,01}{1-(1,01)^{-240}},$$
$$P_k^{Price} = D_0\frac{0,01}{0,9082},$$
$$P_k^{Price} = D_0\ (0,0110).$$

Em 120 meses,

$$P_k^{Price} = D_0\frac{0,01}{1-(1,01)^{-120}},$$

$$P_k^{Price} = D_0 \frac{0,01}{0,697},$$
$$P_k^{Price} = D_0(0,0143).$$

Usando regra de três:

$$D_0(0,0110) = 100\%,$$

$$D_0(0,0143) = x,$$

$$(0,011)x = 1,43,$$

$$x = 130\%.$$

A prestação ficaria aumentada em 30%.

4.5 EXEMPLO SOBRE O SAC

Consideremos o financiamento de um imóvel no SAC com taxa de juros de $1\% a.m.$ em 240 meses.

$a)$ Quando a dívida será reduzida à metade do valor contratado?

O valor contratado é D_0. Queremos saber quando $D_k^{SAC} = \frac{D_0}{2}$.

Ulitizando a fórmula 2,

$$D_0 \frac{1}{2} = \frac{240-k}{240} D_0,$$
$$240 = 480 - 2k,$$

$$2k = 240,$$

$$k = 120.$$

Portanto, na metade do prazo o valor contratado será reduzido pela metade.

$b)$ Em quanto a prestação ficaria aumentada se o financiamento fosse feito na metade do tempo?

Vamos calcular o valor da primeira prestação no prazo de 240 meses.

Utilizando a fórmula 4,

$$P_1^{SAC} = \frac{D_0}{240} + (0,01)D_0,$$
$$P_1^{SAC} = \frac{3,4D_0}{240},$$
$$P_1^{SAC} = (0,01416)D_0.$$

Em 120 meses temos:

$$P_1^{SAC} = \frac{D_0}{120} + (0,01)D_0,$$
$$P_1^{SAC} = \frac{2,2D_0}{120},$$
$$P_1^{SAC} = (0,01833)D_0.$$

Usando regra de três:

$$D_0(0,01416) = 100\%,$$
$$D_0(0,01833) = x,$$
$$(0,01416)x = 1,833,$$
$$x = 129,45\%.$$

A prestação ficaria aumentada em 29,45%.

4.6 EXEMPLO DE AMORTIZAÇÃO DO SALDO DEVEDOR COM REDUÇÃO DO ENCARGO MENSAL

Lidia tem seu apartamento financiado por uma instituição financeira e sua prestação é R$ 2.392,96. No dia 25/08 compareceu ao banco para solicitar uma amortização no seu saldo devedor. Ela possui o valor de R$ 179.585,46 em sua conta do FGTS e deseja que suas parcelas diminuam de valor, pois está prevendo aumento em suas despesas mensais. Sabendo que o vencimento de sua prestação é todo dia 20, a taxa de juros nominal é 7,9%$a.a.$, o prazo remanescente do financiamento é 327 meses e que o saldo devedor atualizado para o contrato é de R$ 247.984,26 como ficará o novo valor da parcela de Lidia?

Primeiro, devemos calcular os juros diários sobre o valor da amortização, pois afinal entre o dia 20/08 e 25/08 o valor a ser amortizado fazia parte do saldo devedor, assim os juros sobre este valor entre os dias indicados é devido. Desta forma saberemos o valor que Lidia realmente diminuiu do saldo devedor, a amortização efetiva.

Utilizando a fórmula 21,

$$JD = 179.585,46\left[\left(1+\frac{7,9}{1200}\right)^{\frac{5}{30}}-1\right],$$

$$JD = 179.585,46[(1,006583333)^{0,16666666}-1],$$

$$JD = 179.585,46 \times 0,001094224,$$

$$JD = 196,50.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica abaixo, colocando na célula C6 a fórmula dos juros diários:

C6 = (C5 *((1+C4/12)^ (C3/30)-1)).

	A	B	C
1	Planilha juros diários		
2			
3		n=	5
4		i=	7,9%
5		AM=	179585,46
6		JD=	196,51

Figura 10: Juros diários

Agora que descobrimos os juros diários é fácil saber a amortização efetiva, bastando efetuarmos a diferença entre o valor da amortização e os juros diários:

$$AM_{efetiva} = 179.585,46 - 196,50,$$

$$AM_{efetiva} = 179.388,96$$

Utilizando a fórmula 23, o novo saldo devedor é:

$$SD_{novo} = 247.984,26 - 179.388,96,$$

$$SD_{novo} = 68.595,30.$$

A nova prestação, de acordo com a fórmula 25,

$$NP = \frac{68.595,30}{327} + 68.595,30\left(\frac{7,9}{1200}\right),$$

$$NP = 661,35.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica abaixo, colocando na célula C6 a fórmula da nova prestação:

C6 = (C3/C5)+(C3 *(C4/12)).

	A	B	C
1	Planilha Nova Prestação		
2			
3		SD_{novo}=	68.595,31
4		i=	7,9%
5		n=	327
6		NP=	661,36

Figura 11: Nova prestação

4.7 EXEMPLO DE CÁLCULO DE AMORTIZAÇÃO NO PRAZO

Gilson é diretor financeiro de uma empresa de informática, e encaminhou um e-mail para o seu gerente do banco perguntando quanto deveria dar em dinheiro para que o financiamento do seu imóvel diminuísse o prazo de 5 anos. O gerente pesquisou os seguintes dados para poder dar uma resposta a Gilson:
Saldo devedor: R$ 377.482,39
Taxa de juros nominal anual: 10,935$\% a.a.$
Prazo remanescente da operação: 169 meses
Prestação atual: R$5.660,00

A condição do Sr. Gilson é que seu financiamento fique com um prazo 5 anos menor. Portanto, deve-se dimiunir o prazo remanescente de 60 meses:

$169 - 60 = 109.$

Então, o novo prazo deverá ser de 109 meses.

Agora, vamos descobrir qual deve ser o valor do saldo devedor para que com as mesmas condições do financiamento original o novo prazo seja de 109 meses.

Utilizando a fórmula 25,

$$109 = \frac{SD_{novo}}{5660 - \frac{SD_{novo}(10{,}935)}{1200}},$$

$$109 = \frac{SD_{novo}}{\frac{6792000 - 10{,}935(SD_{novo})}{1200}},$$

$$740328000 - 1191,915(SD_{novo}) = 1200(SD_{novo}),$$

$$740328000 = 2391,915(SD_{novo}),$$

$$SD_{novo} = 309.512,67.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica abaixo, colocando na célula C6 a variável novo saldo devedor:

C6 = (12 *(C3 *C4)/(12+(C3 *C5))).

	A	B	C
1	Planilha SD_{novo}		
2			
3		NPra=	109
4		P=	5.660,00
5		i=	10,935%
6		SD_{novo}=	309512,67

Figura 12: Novo saldo devedor

Subtraindo o novo saldo devedor do atual temos a amortização efetiva:

$$AM_{efetiva} = 377.482,39 - 309.512,67$$

$$AM_{efetiva} = 67.970,00.$$

Para encontrarmos a amortização que o cliente deverá fazer, devemos somar a amortização efetiva aos juros diários sobre o valor amortizado, entre o dia do vencimento da prestação e a data de evento da amortização. Sabemos que

$$AM = AM_{efetiva} + juros.$$

Vamos descobrir o valor dos juros diários pela fórmula 21:

$$JD = (A_{efetiva} + JD)\left[\left(1 + \frac{10,935}{1200}\right)^{\frac{10}{30}} - 1\right],$$

$$JD = (67970 + J)[1,0091125)^{0,33333333} - 1],$$

$$JD = (67970 + J)(0,003028319),$$

$$JD = 205,835 + J(0,003028319),$$

$$0,996971681(JD) = 205,835,$$

$$JD = 206,46.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica abaixo colocando na célula C5 a fórmula para cálculo do fator que multiplica a variável amortização, que é a parte mais difícil de manipular na fórmula:

C5 = (1+(C4/12))^ (C3/30)-1.

	A	B	C
1	Fator que multiplica Amortização		
2			
3		n=	10
4		i=	10,935%
5		fator=	0,00302832

Figura 13: Fator que multiplica a amortização

Como já vimos que a amortização é a amortização efetiva mais os juros diários, obtemos:

$$AM = 67970 + 206,46,$$

$$AM = 68176,46.$$

Portanto o gerente responderá ao Sr. Gilson que, para diminuir em 5 anos o prazo de financiamento, ele precisará dispor de R$ 68.176,46 para amortizar seu saldo devedor.

4.8 EXEMPLO DE CÁLCULO DE PRESTAÇÕES EM ATRASO

Vanuza perdeu o emprego e deixou atrasar algumas prestações de seu financiamento habitacional. Agora que conseguiu um novo trabalho, foi até o banco para acertar o atraso. O vencimento das prestações de Vanuza acontecem todo dia 06 e ela não pagou os meses de 07/2014 a 09/2014. Sabendo que Vanuza foi ao banco no dia 11/09, que a taxa de juros nominal para seu contrato é 4,5%$a.a.$, e que a prestação na data de vencimento é R$ 496,44 vamos calcular as prestações atualizadas para pagamento. Vale ressaltar que o contrato de Vanuza prevê uma taxa de juros moratórios de 0,3333%$ao.dia$ e multa no valor de 2% sobre o valor em atraso. Abaixo segue uma tabela com os valores de TR para atualização monetária dos encargos.

Data	Índice	Índice TR Acumulado
06/07/2014	1,001800000	1,000014947877
06/08/2014	1,002150000	1,000051285614
06/09/2014	1,002710000	1,000049321058
06/10/2014	1,002500000	1,000063150020

Tabela 1: Tabela TR

Para o cálculo atualizado da prestação que venceu em 06/07/14 primeiramente vamos fazer a atualização monetária da prestação utilizando a fórmula 16:

$$P_{atual.monet} = 496,44\left(\frac{1,000049321058}{1,000014947877}\right)\left(\frac{0,25}{100}+1\right)^{\frac{5}{30}},$$

$$P_{atual.monet} = 496,44(1,000034373)(1,0025)^{0,1666666},$$

$$P_{atual.monet} = 496,4570641(1,000416233),$$

$$P_{atual.monet} = 496,66.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica a seguir colocando na célula C8 a fórmula da atualização monetária:

C8 = (C3 *(C4/C5) *(((C6/100)+1))ˆ (C7/30)).

No passo seguinte vamos calcular os juros remuneratórios pela fórmula 17:

$$JR = 496,66\left[\left(\frac{4,5}{1200}+1\right)^{2}\left[\left(\frac{4,5}{1200}\frac{5}{30}\right)+1\right]-1\right],$$

$$JR = 496,66[(1,007514063)(1,000625)-1],$$

	A	B	C
1	Planilha Prestação atualizada		
2			
3		P_{venc}=	496,44
4		IND_{pag}=	1,00004932
5		IND_{venc}=	1,00001495
6		índice=	0,25
7		n=	5
8		$P_{atual.\ monet.}$	496,66

Figura 14: Prestação atualizada monetariamente

$$JR = 496,66(1,008143759 - 1),$$

$$JR = 4,04.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica abaixo, colocando na célula C7 a fórmula dos juros remuneratórios

C7 = C3 *(((C4/12)+1)^ C5 *((C4/12) *(C6/30)+1)-1).

	A	B	C
1	Planilha juros remuneratórios		
2			
3		$P_{atual.monet}$=	496,66
4		i=	4,50%
5		m=	2
6		n=	5
7		JR=	4,04

Figura 15: Juros remuneratórios

Agora vamos calcular os juros moratórios conforme fórmula a 18:

$$JM = 496,66\left(\frac{0,03333333}{100}\right)67,$$

$$JM = 11,09.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica a seguir, colocando na célula C6 a fórmula dos juros moratórios

C6 = C3 *C4 * C5.

	A	B	C
1	Planilha juros moratórios		
2			
3		$P_{atual.monet}$=	496,66
4		$\%JM_0$=	0,000333333
5		n=	67
6		JM=	11,09

Figura 16: Juros moratórios

Finalmente, vamos calcular a multa pela fórmula 19:

$$Mu = 496,66(0,02),$$

$$Mu = 9,93.$$

Somando todos os encargos, temos:

$496,66 + 4,04 + 11,09 + 9,93 = 521,72.$

Para o cálculo atualizado da prestação que venceu em 06/08, primeiramente vamos fazer a atualização monetária da prestação utilizando a fórmula 16:

$$P_{atual.monet} = 496,44\left(\frac{1,000049321058}{1,000051285614}\right)\left(\frac{0,25}{100}+1\right)^{\frac{5}{30}},$$

$$P_{atual.monet} = 496,44(1,000034373)(1,0025)^{0,1666666},$$

$$P_{atual.monet} = 496,44(0,999998036)(1,000416233),$$

$$P_{atual.monet} = 496,65.$$

No passo seguinte vamos calcular os juros remuneratórios pela fórmula 17:

$$JR = 496,65\left[\left(\frac{4,5}{1200}+1\right)^{1}\left[\left(\frac{4,5}{1200}\frac{5}{30}\right)+1\right]-1\right],$$

$$JR = 496,65[(1,00375)(1,000625)-1],$$

$$JR = 496,65(1,004377-1),$$

$$JR = 2,17.$$

Agora vamos calcular os juros moratórios pela fórmula 18:

$$JM = 496,65\left(\frac{0,03333333}{100}\right)36,$$

$$JM = 5,96.$$

Finalmente, vamos calcular a multa pela fórmula 19:

$$Mu = 496,65(0,02),$$

$$Mu = 9,93.$$

Somando todos os encargos, temos:

$496,65 + 2,17 + 5,96 + 9,93 = 514,71.$

Por último, vamos calcular o valor atualizado da prestação que venceu em 06/09.

Primeiro, vamos fazer a atualização monetária da prestação utilizando a fórmula 14:

$$P_{atual.monet} = 496,44\left(\frac{1,000049321058}{1,000049321058}\right)\left(\frac{0,25}{100}+1\right)^{\frac{5}{30}},$$

$$P_{atual.monet} = 496,44(1)(1,0025)^{0,1666666},$$

$$P_{atual.monet} = 496,44(1,000416233),$$

$$P_{atual.monet} = 496,64.$$

No passo seguinte vamos calcular os juros remuneratórios pela fórmula 17:

$$JR = 496,64\left(\frac{4,5}{1200}\frac{5}{30}\right),$$

$$JR = 496,64(0,00375)(0,166666666),$$

$$JR = 0,31.$$

Agora vamos calcular os juros moratórios pela fórmula 18:

$$JM = 496,64\left(\frac{0,03333333}{100}\right)5,$$

$$JM = 0,83.$$

Finalmente, vamos calcular a multa segundo a fórmula 19:

$$Mu = 496,64(0,02),$$

$$Mu = 9,93.$$

Somando todos os encargos, temos:

$496,64 + 0,31 + 0,83 + 9,93 = 507,71$

4.9 EXEMPLO DE CÁLCULO DE ALTERAÇÃO DA DATA DE VENCIMENTO

Lourenço mudou de emprego e agora está recebendo o salário no 5º dia útil do mês. A prestação do financiamento da sua casa vence todo dia 29 o que está gerando transtornos, pois frequentemente ele tem pagado a prestação com atraso, visto que no dia 29 ainda faltam alguns dias para ele receber o pagamento. Lourenço resolve ir ao banco solicitar que a data de vencimento do seu financiamento ocorra todo dia 10, que é um dia bem próximo ao pagamento do seu salário. Ele comparece a sua agência bancária e solicita que a prestação de 29/08 só ocorra em 10/09. Para isso concorda em pagar os juros proporcionais sobre os dias que está postergando o seu saldo devedor até que ocorra o pagamento do encargo. Sabendo que a taxa de juros do financiamento de Lourenço é 4,5$\%a.a.$ e que o valor do saldo devedor atualizado para 10/09 é R$ 47.076,20, vamos calcular os juros que ele terá que pagar pela alteração da data de vencimento.

Se Lourenço não tivesse alterado a data de vencimento, sua parcela de juros a ser cobrada seria a multiplicação da taxa de juros do seu contrato pelo saldo devedor. Dividindo a taxa nominal por 12, para encontrarmos a taxa mensal do contrato, e multiplicando pelo saldo devedor, ficamos com:

$$J = 47.076,20\left(\frac{4,5}{1200}\right),$$

$$J = 47.076,20(0,00375),$$

$$J = 176,53.$$

Porém, entre a data do último vencimento, que foi dia 29/07, até a data alterada para 09/10, temos 43 dias e não apenas 30. Então, utilizando a fórmula 20,

$$JP = 47076,20\left[\left(1+\frac{4,5}{1200}\right)^{\frac{43}{30}}\right]-1,$$

$$JP = 47076,20(0,005379364),$$

$$JP = 253,24.$$

Para facilitar os cálculos podemos construir no Excel a planilha eletrônica a seguir colocando na cédula C6 a fórmula dos juros proporcionais

C6 = C3 *((1+(C4/12))^ (C5/30)-1).

	A	B	C
1	Planilha juros proporcionais		
2			
3		SD=	47.076,20
4		i=	4,5%
5		n=	43
6		JP=	253,24

Figura 17: Juros proporcionais

Portanto, os juros proporcionais que Lourenço pagará pelos 13 dias que está postergando seu saldo devedor é:

$$253,24 - 176,53 = 76,71.$$

Este valor será diminuído da parcela de amortização da prestação de 10/09, para que Lourenço possa pagar o mesmo valor de prestação que está habituado a pagar.

5 COMPARATIVO ENTRE SAC E TABELA PRICE

Para fazer a comparação de um exemplo particular entre o valor total pago no SAC e na Tabela Price utilizamos a simulação feita no site de um banco que chamaremos de B. Os dados preenchidos foram:

- Financiamento para pessoa: física
- Tipo de imóvel: residencial usado
- Valor: R$ 300.000,00
- Renda: R$ 12.000,00
- Data de nascimento: 01/03/1980
- Valor do financiamento: R$ 240.000,00
- Prazo: 240 meses
- Sistema de amortização: SAC e Tabela Price
- Seguradora: a do próprio banco da simulação

As taxas resultantes foram:

Banco B

- Taxa efetiva anual: 9,2$\%a.a.$
- CET - Custo efetivo total no SAC: 10,17$\%a.a.$
- CESH - Custo efetivo do seguro habitacional no SAC: 3,1610$\%a.a.$
- CET - Custo efetivo total na Price: 10,28$\%a.a.$
- CESH - Custo efetivo do seguro habitacional na Price: 3,6847$\%a.a.$

Algumas prestações calculadas foram:

- Primeira prestação no SAC: R$ 2.864,82
- Primeira prestação na Price: R$ 2.231,95
- Prestação 86 no SAC: R$ 2.234,57
- Prestação 86 na Price: R$ 2.238,67
- Última prestação no SAC: R$ 1.032,36
- Última prestação na Price: R$ 2.158,70

Alguns saldos devedores após o pagamento da prestação:

- Após a primeira prestação no SAC: R$ 239.000,00
- Após a primeira prestação na Price: R$ 239.632,99
- Após a prestação 120 no SAC: R$ 120.000,00
- Após a prestação 120 na Price: R$ 169.642,74
- Após prestação 239 no SAC: R$ 1.000,00
- Após prestação 239 na Price: R$ 2.118,11

A própria simulação já fornece os pagamentos efetivos no SAC e na Tabela Price:

- SAC: R$ 474.970,50
- Tabela Price: R$ 537.932,74

A diferença do valor pago entre os dois sistemas de amortização foi que pela Tabela Price pagaremos R$ 62.962,24 a mais que no SAC.

Na planilha da simulação feita no banco B as prestações iniciais são menores na Tabela Price e amortizam menos o saldo devedor, e nas fases posteriores, os pagamentos mensais precisam ser maiores para compensar as diferenças não amortizadas na fase inicial. Antes da metade do prazo, mais precisamente a partir da prestação 87, o valor da prestação no SAC já se torna menor até o final do contrato. Já comprovamos que na Tabela Price nunca amortizamos metade do saldo devedor até metade do prazo de contratação; já no SAC sempre amortizamos metade do que foi financiado exatamente na metade do prazo.

Demonstramos que o saldo devedor no SAC é sempre menor em qualquer uma das fases do contrato. Consequentemente o somatório de prestações pagas é menor no SAC já que a parcela de juros é calculada multiplicando-se a taxa de juros pelo saldo devedor, portanto esta parcela é sempre menor no SAC, e o somatório total das parcelas de amortização deve ser igual ao valor financiado. Na prática já discutimos que temos também uma parcela de administração, porém esta parcela é fixa e desta forma não vai mudar o fato de que o somatório dos valores pagos no SAC é menor que na Tabela Price. Além da taxa administrativa temos as parcelas de Seguro DFI e MIP. No caso do Seguro DFI, este é um fator multiplicado pelo valor da garantia atualizada do imóvel, então será o mesmo valor de parcela tanto no SAC quanto na Tabela Price. Já a parcela do seguro MIP é sempre menor no SAC, visto que esta parcela é calculada multiplicando-se um fator, que depende da idade do proponente mais velho, pelo saldo devedor que já sabemos ser menor no SAC. Concluindo, na prática, mesmo a prestação habitacional não sendo composta apenas por uma parcela de juros e outra de amortização, vamos obter o mesmo resultado de que o somatório total de valores pagos é sempre menor no SAC.

Desta forma é verdadeiro que, se estamos buscando pagar um somatório de valores menor, a melhor opção seria o SAC. Não estamos afirmando que esta opção necessariamente seria mais vantajosa no que se refere a "dinheiro em caixa", pois os valores pagos inicialmente são menores na Tabela Price e os valores gerados pela diferença das prestações nos dois sistemas de amortização poderiam ser aplicados de forma a terem um excelente retorno financeiro. Assim, essa comparação fica mais complexa, pois depende onde o dinheiro foi aplicado, a que taxa e prazo, sem contar que quando as prestações se tornam menores no SAC as diferenças entre as prestações nos dois sistemas também poderiam ser aplicadas visando uma remuneração. Agora, quando levamos em consideração outros aspectos diferentes do somatório de valores pagos pode ser mais adequado financiar na Tabela Price. De acordo com (BRADESCO, 2014) para os profissionais mais jovens que possuam boas expectativas de aumento salarial, sem condições de assumir prestações maiores no início do contrato, a Price pode ser mais indicada, pois neste sistema as prestações iniciais são menores. Para os clientes que não conseguem aprovação de uma prestação maior para o SAC, visto que a prestação do financiamento não pode comprometer mais que 30% do salário bruto dos proponentes, a Tabela Price seria a única opção. Ainda temos o caso dos clientes que possuem valores consideráveis a serem recebidos em curto prazo e precisam, enquanto isto não acontece, de uma prestação menor. Um exemplo desta situação são os compradores que estão vendendo o imóvel que residiam anteriormente.

Para exemplificar como pode ser significativa a diferença da prestação inicial entre a Tabela Price e o SAC, vamos utilizar um exemplo do artigo (FERREIRA, 2014). Para um financiamento em 60 meses, a uma taxa de 1,5% ao mês, a primeira prestação da Price será 20% menor que a do SAC. No exemplo da simulação do Banco B a prestação inicial da Price é 22,09% menor que no SAC. Por este motivo o SAC pode tornar-se um empecilho em alguns casos.

Finalizando a discussão, vale a pena comentar que o cliente tem a opção de alterar o sistema de amortização durante a vigência do contrato. Desta maneira o proponente pode escolher um sistema de amortização de início que lhe for mais adequado, e quando entender que por algum motivo em um outro momento o outro sistema de amortização tornou-se o ideal, ele pode solicitar a troca na instituição financeira onde contratou o financiamento.

6 COMPARATIVO ENTRE SIMULAÇÕES DE DIFERENTES INSTITUIÇÕES FINANCEIRAS

Foram feitas 5 simulações em diferentes instituições financeiras para discutirmos um pouco sobre o processo de concessão de um financiamento habitacional e comparar valores. Vamos chamar os bancos onde as simulações foram feitas de A, B, C, D e E respectivamente. As simulações foram feitas nos sites dos bancos (ITAU, 2014), (CAIXA, 2014), (BRASIL, 2014), (BRADESCO, 2014) e (SANTANDER, 2014).

Antes de efetuarmos simulações para respaldarem comparação entre os valores a serem pagos para cada um dos bancos, devemos ter em mente que os dados informados devem ser idênticos para cada uma das simulações. Não basta apenas que a quantia financiada seja igual para podermos chegar a uma conclusão de onde pagaremos menos pelo mesmo financiamento. Devemos colocar um mesmo valor para o imóvel, pois imóveis até certo preço tem uma taxa de juros e os que ultrapassam este valor tem uma taxa maior. A renda segue este mesmo raciocínio, clientes com renda menor até um certo limite pagam uma taxa, clientes com renda maior pagam uma taxa maior. O tipo de imóvel também deve ser igual, pois pode haver diferença de taxas e descontos para imóveis novos ou usados, comerciais ou residencias, etc. Até mesmo a idade deve ser idêntica nas diversas simulações, pois o valor dos seguros para morte e invalidez dependem da idade do proponente. Quanto mais velha a pessoa for, mais caro é o seguro, devido ao maior risco de morte e invalidez. Até o final do financiamento a pessoa não pode ultrapassar 80 anos e 6 meses. Resumindo, para termos resultados fidedignos na comparação entre as simulações, precisamos colocar exatamente os mesmos dados em cada uma delas.

Já discutimos neste trabalho os componentes da prestação habitacional: parcela de juros + parcela de amortização + taxa de administração + seguro MIP + seguro DFI. Além destes componentes podemos ter outras despesas no financiamento, por exemplo, a taxa para vistoria e avaliação do imóvel que será financiado. Todos estes valores somados formarão o já definido custo efetivo total, que é a taxa que corresponde a todos os encargos e despesas incidentes no financiamento. Na simulação o CET deve ser expresso na forma de taxa percentual anual e ele vai englobar a taxa de juros, tarifas, tributos, seguros e outras despesas cobradas do cliente, representando as condições vigentes na data do cálculo da simulação.

Para as simulações feitas nos bancos A, B, C, D e E utilizamos os seguintes dados:

- Financiamento para pessoa: física
- Tipo de imóvel: residencial usado
- Valor: R$ 300.000,00
- Renda: R$ 12.000,00
- Data de nascimento: 01/03/1980
- Valor do financiamento: R$ 240.000,00
- Prazo: 240 meses
- Sistema de amortização: SAC
- Seguradora: a do próprio banco da simulação

As taxas para cada um dos bancos ficou da seguinte forma:

Banco A

- Taxa efetiva anual: 9,1%$a.a.$
- CET - Custo efetivo total: 9,9446%$a.a.$
- CESH - Custo efetivo do seguro habitacional: 2,7588%$a.a.$

Banco B

- Taxa efetiva anual: 9,2%$a.a.$
- CET - Custo efetivo total: 9,98%$a.a.$
- CESH - Custo efetivo do seguro habitacional: 2,3115%$a.a.$

Banco C

- Taxa efetiva anual: 9,2%$a.a.$
- CET - Custo efetivo total: 10,2%$a.a.$

- CESH - Custo efetivo do seguro habitacional: 3,2236%$a.a.$

Banco D

- Taxa efetiva anual: 9,2%$a.a.$
- CET - Custo efetivo total: 10,17%$a.a.$
- CESH - Custo efetivo do seguro habitacional: 3,1610%$a.a.$

Banco E

- Taxa efetiva anual: 9,3%$a.a.$
- CET - Custo efetivo total: 10,05%$a.a.$
- CESH - Custo efetivo do seguro habitacional: 2,2702%$a.a.$

Analisando a taxa efetiva anual chegaríamos à conclusão de que pagaríamos um valor final menor no banco A, um valor igual nos bancos B, C e D e um valor maior no banco E. Porém, como a prestação não é somente formada pela parcela de juros e pela parcela de amortização, temos que considerar o CET das simulações que é o somatório de tudo que vamos pagar no financiamento. Analisando o CET, observamos que realmente no banco A pagaremos um valor total menor, pois é a simulação com menor CET. Porém o banco onde sai mais caro o financiamento não é o banco E, mas sim o banco C, mesmo o banco E tendo uma taxa efetiva anual maior que a de C. Na verdade, o banco E fica em terceiro na lista em relação à classificação de valores pagos em ordem crescente. E os bancos B e D, apesar de possuírem a mesma taxa efetiva anual, também têm diferença no somatório total dos valores pagos, sendo que no banco B sai mais barato financiar que no banco D. Então ficamos com a seguinte ordem do mais barato para o mais caro: A, B, E, D e C.

Observando o custo efetivo do seguro habitacional podemos concluir que este fator influencia consideravelmente no custo efetivo total do financiamento. Do mais barato para o mais caro fica: E, B, A, D e C. Vemos que existe uma inversão na ordem A, B, E para E, B, A. O custo efetivo do seguro habitacional sendo mais baixo em um dos financiamentos faz a diferença do custo efetivo total ficar menor na comparação entre os dois financiamentos. Por exemplo, a diferença entre as taxas efetivas dos bancos A e B é 0,1, mas como o CESH é menor no banco B a diferença entre o CET dos dois bancos diminui para 0,0354.

Para encerrar este capítulo, é importante colocar duas informações que trazem benefícios para as pessoas que desejam fazer um financiamento ou já possuem um. A primeira é que as instituições financeiras oferecem mais de uma opção de seguradora. Sendo assim, podemos simular o mesmo financiamento com a cobertura de uma ou outras seguradoras para chegar na opção onde o CESH fique mais baixo, consequentemente chegando ao CET mais baixo, já que a taxa e os outros encargos são idênticos independentemente da seguradora escolhida, e finalmente chegando à opção mais barata. A segunda informação é que é possível fazer a portabilidade do financiamento habitacional de uma instituição para outra. Com esta nova possibilidade o mutuário tem a opção de mudar o banco ou instituição do seu financiamento habitacional. Por exemplo, caso um outro banco lhe ofereça uma taxa menor durante a fase de amortização de seu contrato, você pode solicitar a portabilidade do seu financiamento para este outro banco e ter o benefício de passar a pagar uma prestação menor.

7 CONCLUSÕES

A Educação Financeira dá suporte para tomada de decisões em relação à administração do dinheiro a curto e longo prazo. Questões como consumismo, imediatismo, necessidade, compra e venda são pensadas de maneira mais crítica quando possuímos conhecimentos sólidos deste conteúdo matemático. O indivíduo é melhor preparado para estabelecer comparações no mercado financeiro e fazer as escolhas mais adequadas para seu perfil e enquadradas dentro de sua economia doméstica.

Financiar um imóvel é uma prática cada vez mais comum entre os brasileiros e isto pode ser constatado quando observamos o histórico das unidades habitacionais financiadas no país. Desta forma existe considerável probabilidade do discente vir a ter contato com um financiamento imobiliário no futuro. Conhecer como funciona a matemática financeira envolvida na concessão e na manutenção de um contrato habitacional dá subsídios para se fazer escolhas personalizadas como quando, quanto e onde financiar. Inclusive optando pelo sistema de amortização que se enquadre melhor para situação de renda, emprego e perspectivas de cada um na época da contratação.

Através de exemplos que realmente refletem o que ocorre no cotidiano das instituições financeiras, esperamos ter despertado o interesse para este assunto. Com aplicações na prática fica mais fundamentada a importância do estudo da Matemática Financeira.

Conhecer as alternativas na fase de amortização do contrato habitacional traz benefícios principalmente para quem faz o financiamento. Neste trabalho comentamos sobre a alteração da data de vencimento que ajuda o mutuário a manter seu contrato em dia, escolhendo a data de pagamento do encargo mensal mais apropriada, e também esclarecemos o que é devido por tal escolha. Discutimos sobre como é calculado o pagamento de prestações em atraso para mostrar que no caso de inadimplência pagamos não somente os juros remuneratórios sobre o atraso, mas também juros moratórios, multa e atualização monetária. Desta forma se conscientiza a importância de se manter o contrato adimplente. Por fim falamos sobre a amortização do saldo devedor para diminuição do encargo ou do prazo de contratação. Esta é uma possibilidade bastante atraente para os devedores que possuem recursos disponíveis, pois diminuindo o saldo devedor paga-se menos juros no contrato, já que a parcela de juros é calculada aplicando-se a taxa de juros sobre o saldo devedor vigente.

Com as orientações de como se fazer uma simulação corretamente o cidadão fica habilitado a analisar simulações distintas e concluir a qual é mais interessante com referência ao total de valores pagos olhando para o custo efetivo total.

No comparativo entre o SAC e a Tabela Price pudemos concluir que independentemente do valor financiado e do prazo, mantida as mesmas condições, o montante a ser pago é sempre menor no SAC. Porém, em algumas situações, pode ser mais conveniente financiar na Tabela Price. Por exemplo, quando precisamos pagar uma parcela menor no início da amortização, seja por não conseguirmos aprovação de uma parcela maior ou por comprometer em demasia o orçamento familiar.

REFERÊNCIAS

BRADESCO. 2014. Disponível em: <http://wspf.bradesco.com.br/CreditoImobilario>. Acesso em: 23/09/2014.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 02/10/2014.

BRASIL. **LDB Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: Câmara, 2013. Disponível em: <http://bd.camara.leg.br>. Acesso em: 02/10/2014.

BRASIL, B. C. do. **Resolução 51**. Brasília: Bacen, 1967. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/pre/normativos/res/1967/pdf/res_0051_v1_O.pdf>. Acesso em: 02/09/2014.

BRASIL, B. C. do. **Resolução 1.764**. Brasília: Bacen, 1990. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/pre/normativos/res/1990/pdf/res_1764_v4_P.pdf>. Acesso em: 02/09/2014.

BRASIL, B. C. do. **SFH Dados Estatísticos: Resumo Mensal do Setor**. Brasília: Bacen, 2014. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/FIS/SFH/PORT/est2014/02>. Acesso em: 15/08/2014.

BRASIL, B. D. 2014. Disponível em: <https://wwW42.bb.com.br/portalbb/creditoImobiliario/Proposta,2,2250,2250.bbx>. Acesso em: 23/09/2014.

CAIXA. **Introdução à habitação**. Brasília: Universidade Corporativa Caixa, 2009. Disponível em: <http://universidade.caixa/repositorios/pacotes-alternativos/introducao-a-habitacao>. Acesso em: 03/09/2014.

CAIXA. 2014. Disponível em: <www8.caixa.gov.br/siopiinternet/simulaOperacaoInternet>. Acesso em: 23/09/2014.

CASTELO, A. M. et al. **O crédito imobiliário no Brasil: Caracterização e Desafios**. São Paulo: FGV, 2007. Disponível em: <http://www.abecip.org.br/imagens/conteudo/publicacoes_e_artigos/trabalho_fgv.pdf>. Acesso em: 12/08/2014.

FERREIRA, D. B. Sac ou price? **Revista do Professor de Matemática**, n. 85, p. 42–45, 2014.

GEOGEBRA. 2015. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 18/02/2015.

GLOBO, O. 2014. Disponível em: <oglobo.globo.com/sociedade/educacao/educacao-financeira-chegara-29-mil-escolas-publicas-ate-2015-/12395869>. Acesso em: 27/03/2015.

HOJI, M. **Administração Financeira e Orçamentária**. 8ª. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

ITAU. 2014. Disponível em: <https://ww3.itau.com.br/imobline/novolayout/simuladores/simulador.aspx>. Acesso em: 23/09/2014.

JR, F. P. Sfh 50 anos - a maturidade do sistema de crédito imobiliário. **Revista do SFI**, n. 40, p. 18–19, 2014.

LEAL, C. P.; NASCIMENTO, J. A. R. d. **Planejamento Financeiro Pessoal**. [S.l.: s.n.], 2008.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MENDONCA, L. G. et al. **Matemática Financeira**. 10ª. ed. Rio de Janeiro: FGV, 2010.

MISSAGIA, L.; VELTER, F. **Aprendendo Matemática Financeira**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

MUNIZ, C. A. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 4 - TP4: construção do conhecimento matemático em ação**. Brasília: Ministério da Educação, 2008. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/2008/gestar2/matematica/tp4_matematica.pdf>. Acesso em: 09/10/2014.

PARANÁ. **DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA MATEMÁTICA**. Curitiba: Secretaria de Estado de Educação do Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.nre.seed.pr.gov.br/irati/arquivos/File/matematica.pdf>. Acesso em: 03/10/2014.

PLANALTO, B. D. 2014. Disponível em: <blog.planalto.gov.br/index.php?s=MCMV>. Acesso em: 15/08/2014.

SAMANEZ, C. P. **Matemática Financeira**. 5ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SANTANDER. 2014. Disponível em: <www.santander.com.br/portal/wps/script/templates/GCMRequest.do?page=5516>. Acesso em: 23/09/2014.

SANTOS, G. L. d. C.; SANTOS, C. S. d. S. **Rico ou pobre: uma Questão de Educação**. 1ª. ed. Campinas: Armazém do Ipê, 2005.