Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Vaniel Santos Silva

Uma Proposta de Ensino de Funções Complexas Elementares para a 3ª Série do Ensino Médio

Juazeiro – BA

2015

Vaniel Santos Silva

Uma Proposta de Ensino de Funções Complexas Elementares para a 3ª Série do Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro - BA, como requisito para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Felipe Wergete Cruz

Juazeiro – BA

2015

Silva, Vaniel S.
S586p Uma proposta de ensino de funções elementares complexas para a 3ª série do ensino médio / Vaniel Santos Silva. -- Juazeiro-BA, 2015.
x; 50 f.: il.; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2015.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Números complexos. 3. Funções elementares. I. Título. II. Cruz, Felipe Wergete. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.7

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FUNÇÕES COMPLEXAS ELEMENTARES PARA A 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Por:

VANIEL SANTOS SILVA

Dissertação aprovada em 17 de junho de 2015.

Felipe Wergete Cruz
Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz
Orientador - PROFMAT - UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira
Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira
Examinadora Interna - UPE

Aníbal L. S. Netto
Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto
Examinador Externo – CENMEC - UNIVASF

Juazeiro
2015

A minha família, por todo apoio que me deram nos momentos que precisei e por todo carinho que me proporcionaram durante esse tempo de estudo.

Dedico

Agradecimentos

A Jeová, Deus, por sempre me guiar com sua luz; por te me fortalecido nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Felipe Wergete Cruz, que contribuiu bastante para a elaboração desse trabalho.

Aos professores da banca examinadora pelas inúmeras sugestões dadas.

À minha mãe pelo carinho e incentivo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao corpo docente do PROFMAT/UNIVASF pelo empenho e dedicação.

À Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.

Resumo

Os números complexos são apresentados pela primeira vez aos alunos na 3ª série do ensino médio apenas, basicamente, com o objetivo de resolver equações do segundo grau antes insolúveis. Assim, na busca de oferecer uma aprendizagem mais significativa para o aluno, este trabalho traz a proposta de estender a definição das funções mais conhecidas pelo educando para o caso complexo. A fim de lograr êxito na aplicação da nossa proposta, abordamos os temas presentes nos capítulos de 1 a 5, ou seja, relembramos alguns conceitos básicos como a definição de números complexos e suas representações algébrica, geométrica e trigonométrica, bem como as definições das funções mais utilizadas no ensino básico, a saber: as funções polinomiais, afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas (seno e cosseno). Com o propósito de motivar nossa proposta, apresentamos, inicialmente, uma breve história dos números complexos. Para acompanhar a real evolução da turma com relação ao objetivo deste trabalho, foram elaborados dois questionários. O questionário 1 foi aplicado com o objetivo de descobrir qual o grau de conhecimento dos alunos com relação ao estudo das funções citadas acima no caso real, isto é, os pré-requisitos para o desenvolvimento da nossa atividade. Já o questionário 2 está dividido basicamente em duas partes: uma motivacional, perguntas de 3 à 5, e a outra com o objetivo de identificar o aprendizado dos discentes (perguntas 6 e 7). Notamos que os alunos foram participativos nas aulas e que ficaram bastante impressionados quando apresentamos a fórmula de Euler para números complexos. Vimos que esta fórmula é a chave para definirmos a função exponencial complexa. Vale ainda ressaltar que ela não foi demonstrada, uma vez que, para tal, são necessários conhecimentos de Cálculo Diferencial. Enfim, podemos dizer que obtivemos um resultado satisfatório, favorecendo a descoberta dos novos fatos e instigando a curiosidade, pois, os alunos ficaram entusiasmados ao perceberem várias mudanças no comportamento das funções ao trabalharmos com números complexos, por exemplo a função exponencial pode ser negativa e que a função seno pode ser maior do que 1.

Palavras-chaves: Números complexos. Funções elementares.

Abstract

Complex numbers are first presented to students in the 3rd year of high school just basically aiming to solve high school before unsolvable equations. Thus, in seeking to provide a more meaningful learning for the student, this work brings the proposal to extend the definition of the best known functions by educating to the complex case. In order to achieve successful implementation of our proposal, we address the issues present in chapters 1-5, that is, we recall some basic concepts such as the definition of complex numbers and their algebraic, geometric and trigonometric representations, as well as the functions of the settings most commonly used in primary education, namely the polynomial functions in order, quadratic, exponential, logarithmic and trigonometric functions (sine and cosine). In order to motivate our proposal, we present initially, a brief history of complex numbers. To track the real evolution of the class with respect to the objective of this work, two questionnaires were produced. 1 The questionnaire was applied in order to find out what level of students' knowledge regarding the study of the functions listed above in the real case, that is, the prerequisites for the development of our activity. But the questionnaire 2 is basically divided into two parts: a motivational, questions 3 to 5, and the other in order to identify the learning of students (questions 6 and 7). We note that the students were participating in class and were very impressed when we present Euler's formula for complex numbers. We have seen that this formula is the key to define the complex exponential function. It is worth mentioning that it has not been demonstrated, since, for This requires knowledge of differential calculus. Finally, we can say that we have achieved a satisfactory result, favoring the discovery of new facts and instigating curiosity, because the students were thrilled when they saw several changes in the behavior of functions to work with complex numbers, for example the exponential function can be negative, the sine function can be greater than 1.

Key-words: Complex numbers. elementary functions.

Lista de figuras

Sumário

Introdução

O ensino dos números complexos em algumas escolas brasileiras tem sido deixado de lado. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's):

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2002, p.122).

O ensino dos números complexos é importante e não deve ser abandonado, ao contrário, deve ser amplamente discutido, para que surjam novas formas de abordagem, principalmente no aspecto geométrico, para auxiliar na resolução de problemas de geometria plana.

Atualmente, nas escolas onde os números complexos compõe o currículo escolar, o conceito de números complexos é introduzido no final da 3ª série do ensino médio, momento esse onde os alunos já têm fixado os conceitos de vários tipos de funções, podendo então surgir algumas indagações do tipo: por que não introduzir o conjunto C (dos números complexos) junto com os demais conjuntos numéricos? O que acontece com as funções estudadas se considerarmos C como domínio destas funções? Neste ponto nos perguntamos: qual atitude deve ser tomada pelo professor? Uma vez que a matemática é uma ciência bastante sólida, dizer que não há resposta colocaria o prestígio da ciência em cheque.

Desta forma, o problema é que os livros de matemática do ensino básico não abordam os números complexos vinculados às funções elementares. Talvez isso se dê pela necessidade de se utilizar conhecimentos além dos que foram estudados até o momento, porém os benefícios alcançados podem superar o fato de usar uma fórmula sem sua devida demonstração, como no caso da fórmula de Euler para números complexos ($e^{ix} = cos\, x + i\, sen\, x$), já que sua demonstração requer conhecimentos de Cálculo Diferencial. Vale salientar que para tal nível, saber aplicá-la é mais que suficiente.

Assim, o objetivo desta proposta é fazer com que os alunos reflitam e construam conhecimentos no contexto dos números complexos, propiciando a oportunidade de observar, analisar e tirar conclusões de casos nunca abordados em sala de aula.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos uma breve história dos números complexos, a definição e as representações algébrica, geométrica e polar de números complexos. No Capítulo 2, trabalhamos com as funções polinomiais, afins e quadráticas reais e complexas. As funções exponencial, logarítmica e trigonométricas são abordadas nos Capítulos 4, 5 e 6, respectivamente. A metodologia é apresentada no Capítulo 7, como também discutimos os resultados obtidos. E por fim, apresentamos as considerações finais.

1. NÚMEROS COMPLEXOS

1.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O surgimento dos números está ligado à necessidade do homem de organizar e realizar tarefas com precisão. Os livros didáticos justificam a evolução dos conjuntos numéricos, desde os números naturais aos números complexos, dizendo que cada ampliação foi motivada por uma situação sem solução até o momento.

Nesse sentido Carmo, Morgado e Wagner (2001, p.149-150) afirmam: “números complexos começaram a aparecer sistematicamente em Matemática com os algebristas italianos do século XVI. Quando isso aconteceu, os matemáticos não tinham nem ainda esclarecido os conceitos de números negativos e irracionais.” Isso mostra que essa evolução não aconteceu necessariamente na ordem em que aparecem nos livros didáticos: naturais, inteiros, racionais, reais e complexos.

De acordo com Pinheiro (2013, p.3), o surgimento dos números complexos está ligado diretamente à resolução de equações algébricas do 3º grau e não a resolução de equações algébricas do 2º grau com raízes quadradas de números negativos; essas eram consideradas na época como sem solução.

Assim, desde o surgimento até sua formalização como conjunto, o conceito de número complexo demorou a se firmar. Mesmo sendo utilizados constantemente, o conceito de número complexo foi se consolidando aos poucos.

Neste sentido, Rosa, Darela e Rufino (2007, p. 194), afirmam que no século XVII Descartes denominou de “imaginários” as raízes de radicando negativo que Cardano utilizava na resolução de equações do 3º grau. Rafael Bombelli passou a estudar esses novos conceitos e percebeu que equações do tipo $x^2 + a = 0$ ($a > 0$), só poderiam ser solucionadas com essas raízes.

A contribuição de vários matemáticos como: Girolamo Cardano (1501 – 1576), Rafael Bombelli (1526 – 1572), Leonhard Euler (1707 – 1783), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Jean Robert Argand (1768 – 1822), entre outros, ao longo dos anos foi fundamental para a construção do conceito de número complexo e suas representações.

Nessa perspectiva, Pinheiro (2013, p.6) afirma que no século XVIII, os matemáticos Jean Robert Argand (1768 – 1822) e Carl Friederich Gauss (1777 – 1855) entraram num acordo que os números complexos poderiam ser representados num sistema de coordenadas retangulares, dando origem ao plano, batizado de Plano de Argand-Gauss (ou plano complexo).

Não é comum a aplicação dos Números Complexos no cotidiano, porém através deles foi possível obter grandes avanços nas áreas de Engenharia Elétrica, Mecânica Quântica, Aerodinâmica, Mecânica dos Fluidos, etc.

1.2 DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste tópico, apresentaremos a noção de números complexos, bem como as suas representações algébrica, geométrica e trigonométrica. Para maiores detalhes, sugerimos a leitura dos seguintes livros: Ávila (2013), Churchill (1975), Fernandez (2006), Soares (2007), e Zill e Shanahan (2011).

1.2.1 DEFINIÇÃO

Um número complexo é um par de números reais, com algumas operações definidas, como a igualdade, adição e multiplicação, a saber:

$$z \in C \leftrightarrow z = (x, y), com\ x\ e\ y\ reais \tag{1}$$

onde:

1) $(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c\ e\ b = d$

2) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

3) $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

No que segue denotaremos por C o conjunto dos números complexos.

Exemplo 1:

Considere os números complexos $z_1 = (2, -1)$, $z_2 = (3, 5)$ e $z_3 = (\sqrt{4},-1)$, Então:

$z_1 = z_3$, pois, $(2,-1) = (\sqrt{4},-1)$, uma vez que $\sqrt{4} = 2$.

$z_1 + z_2 = (2,-1) + (3,5) = (2+3,-1+5) = (5,4)$

$z_1.z_2 = (2,-1).(3,5) = (2.3 – (-1).5, 2.5 + 3.(-1)) = (6 + 5, 10 – 3) = (11,7)$

Um número complexo pode ser representado das seguintes formas: algébrica, geométrica e trigonométrica (polar).

1.2.2 REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Seja $z = (x, y)$ um número complexo. A representação $z = x + yi$, é denominada forma algébrica do número complexo z, onde x é chamado de parte real de z, e y de parte imaginária de z e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

Exemplo 2:

$z_1 = (1,2) \rightarrow z_1 = 1 +2i$

$z_2 = (0,3) \rightarrow z_2 = 3i$

$z_3 = (-5,0) \rightarrow z_3 = -5$

Assim, quando o valor correspondente a parte real for nulo, o número complexo é chamado de imaginário puro, no exemplo 2, z_2 é imaginário puro.

1.2.3 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA

A abordagem geométrica dos números complexos é muito importante, concordamos com Carneiro (2004, p.24) que nos adverte de que:

> A humanidade levou milhares de anos para descobrir os complexos, mas somente 200 anos após começou a perceber o verdadeiro significado e as potencialidades de aplicação dessa descoberta. Passados outros 200 anos, o ensino dos números complexos necessita beber mais nessa fonte que é a abordagem geométrica dos números complexos [...].

Desta forma, o fato de visualizar um número complexo no plano atribui a eles o seu merecido significado, ou seja, eles deixam de figurar apenas na imaginação, conforme pode ser visto na Figura 1.

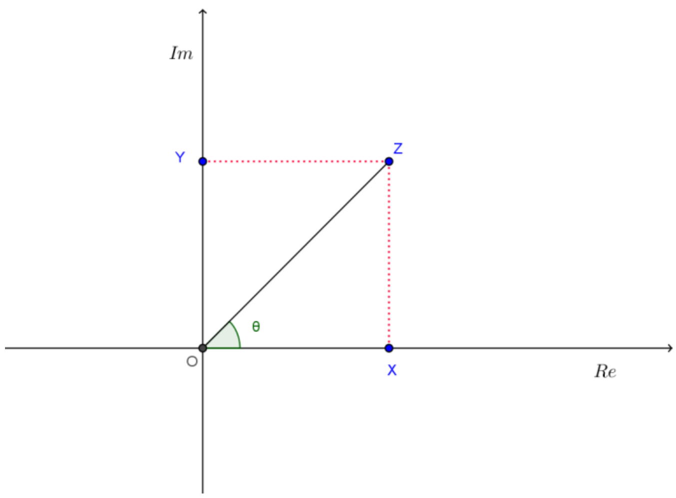

Figura 1: Complexo *z* no plano de Argand-Gauss

Esse sistema de eixos ortogonais é chamado de plano de Argand-Gauss. Como cada número complexo é formado por um par de números reais, sua representação geométrica no plano é similar à representação de pontos no plano cartesiano.

> As noções de módulo e argumento tornam-se mais concretas quando representamos os números complexos z = x+yi = (x,y) pelos pontos do plano cartesiano xOy, com a convenção de marcarmos sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z. (IEZZI et. al. 1977, p.14).

Por meio da Figura 1,

- o eixo horizontal do plano é chamado de eixo real;
- o eixo vertical do plano é chamado de eixo imaginário;
- x e y são respectivamente a parte real e imaginária do número complexo z;
- o comprimento do segmento OZ é chamado de módulo (ou norma) do número complexo z;
- o ângulo $\theta,$ formado pelo eixo real e o segmento OZ, é chamado de argumento do número complexo z. Se $\theta \in [0, 2\pi)$, θ é chamado de argumento principal.

Por meio da figura 1 é fácil notar que o módulo do número complexo z é a hipotenusa do triângulo retângulo, ou seja,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

e o argumento principal é o ângulo agudo com um lado correspondente ao eixo Ox.

Pelo fato da grande semelhança da representação de números complexos no plano de Argand-Gauss e a representação de pontos no plano cartesiano, não apresentaremos exemplos nesse tópico.

1.2.4 REPRESENTAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Considerando a Figura 1 e as razões trigonométricas, temos:

$$sen\,\theta = \frac{y}{|z|} \rightarrow y = |z|.sen\,\theta \tag{3}$$

e

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \rightarrow x = |z|.\cos\theta \tag{4}$$

Daí segue que:

$$z = x + yi = |z|\cos\theta + i.|z|sen\,\theta = |z|(\cos\theta + i.sen\,\theta)$$

Ou seja,

$$z = |z|(\cos\theta + i.sen\,\theta) \quad (5)$$

A expressão dada em (4) é chamada forma trigonométrica (ou polar) do complexo z.

Exemplo 3:

Vamos escrever o número complexo $z = 4 + 4i$ na forma trigonométrica. Primeiramente, calcularemos o módulo de z, considerando a Figura 1 e o teorema de Pitágoras, o módulo de um número complexo é dado pela expressão (2). Assim:

$$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Em seguida, calculamos o argumento principal de z:

$$sen\,\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\cos\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como o ângulo θ está localizado no primeiro quadrante, cujo seno e cosseno são iguais a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\frac{\pi}{4}$ radianos, concluímos que o argumento principal do complexo z é $\frac{\pi}{4}$ (ou 45º). Portanto, a forma trigonométrica do complexo z é:

$$z = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\,\frac{\pi}{4})$$

Agora que revisamos o conceito de número complexo, suas operações e representações, vamos então realizar "experimentos" com algumas funções. Substituiremos em todos os casos o domínio, antes real, pelo conjunto C (dos números complexos). De imediato é possível notar que a representação gráfica de cada função será perdida (uma vez que o gráfico de uma função complexa "mora" num espaço quadridimensional), restando apenas os recursos algébricos. Há, porém, um meio de tentar contornar esse problema, mas não o abordaremos aqui (trata-se da "Transformação Complexa").

2. AS FUNÇÕES POLINOMIAIS, AFIM E QUADRÁTICA REAIS E COMPLEXAS

O objetivo deste capítulo é de relembrar as definições de funções polinomiais reais, em particular, as funções afim e quadrática, e estendê-las para o corpo dos números complexos. A grande diferença no estudo das funções complexas reside no fato de que estas sempre possuem zeros (ou raízes), diferentemente das funções reais, como veremos a seguir.

2.1 A FUNÇÃO POLINOMIAL REAL

Segundo Lima et al. (2006, p.176), a função polinomial $p: R \to R$, é definida da seguinte maneira:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{6}$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ números reais e $n, n\text{-}1, \ldots, 2, 1$ números naturais, e ainda se $a_n \neq 0$ dizemos que p tem grau n. Vejamos alguns exemplos de funções polinomiais:

$p(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 8$

$m(x) = 2x^2 - 5x + 7$

$n(x) = 8x^6$

Agora, exemplos de funções que não são polinomiais:

$f(x) = x^{-2} + 3x - 5$

$g(x) = -2x^3 - 5x^{\sqrt{3}} + 10$

Ambas as funções acima não são polinomiais, pois elas possuem expoentes não naturais.

Consideremos as funções abaixo definidas de R em R, e observemos a representação gráfica das mesmas na Figura 2.

$p_0(x) = 1$; $p_1(x) = x$; $p_2(x) = \frac{(3x^2-1)}{2}$; $p_3(x) = \frac{(5x^3-3x)}{2}$; $p_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}$;

$p_5(x) = \frac{63x^5-70x^3+15x}{8}$; $p_6(x) = \frac{231x^6-315x^4+105x^2-5}{16}$; $p_7(x) = \frac{429x^7-693x^5+315-35x}{16}$

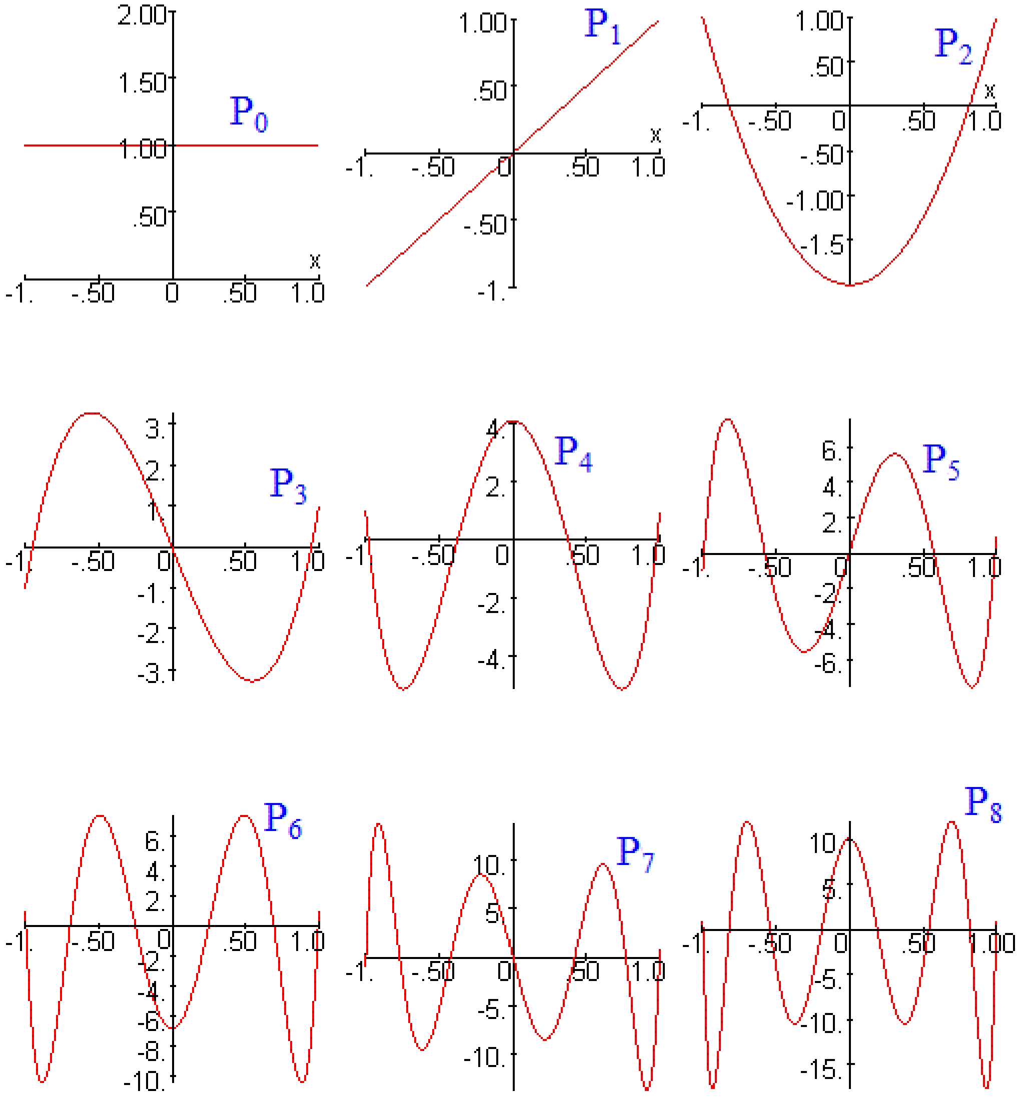

Figura 2: Gráficos de algumas funções polinomiais. Fonte: http://la-mecanica-cuantica.blogspot.com.br

As funções polinomiais são contínuas e suaves em toda a reta, isto quer dizer que seu gráfico não apresenta quebras ou saltos. Note, de acordo com a figura 2, que gráfico de funções polinomiais de grau igual ou superior a 2, representam curvas, e o gráfico de funções polinomiais com grau menor do que 2 representam retas. E ainda, as raízes reais de uma função polinomial são os pontos de interseção de seu gráfico com o eixo dos x (abcissas). Desse modo, um polinômio de grau n, tem no máximo n interseções com o eixo x.

2.2 A FUNÇÃO AFIM REAL

Consideremos a expressão (6) e façamos n=1 e n=0, logo:

- para n=1, temos: $p(x) = a_1x + a_0$, com a_1 e a_0 números reais.
- para n=1 e $a_0=0$ temos $p(x) = a_1x$.
- para n=0, temos $p(x) = a_0$, com a_0 um número real.

As funções polinomiais acima são chamadas, respectivamente, de função afim, linear e constante. Exemplos:

f(x) = 3x +2

g(x) = -2x

h(x) = 4

Então, uma função afim pode ser entendida como uma função polinomial com grau menor do que 2, e portanto, o gráfico de uma função afim representa uma reta.

Observe na Figura 3, os gráficos das seguintes funções:

f(x) = -x +1

f(x) = 2x + 4

f(x) = $\frac{-3}{2}$

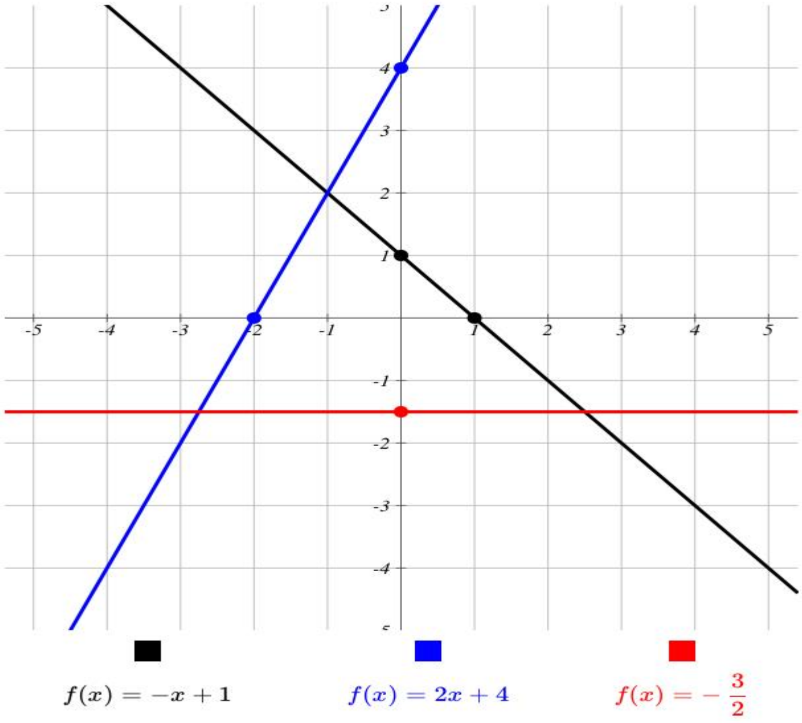

Figura 3: Gráficos de funções afins

A função afim é um modelo matemático utilizado para resolução de diversas situações de caráter linear do nosso cotidiano como, por exemplo, uma corrida de táxi.

2.3 A FUNÇÃO QUADRÁTICA REAL

Considere a expressão (6) e façamos n=2, temos:

$$p(x) = a_2x2 + a_1x + a_0,$$

Se $a_2 \neq 0$ a função polinomial de grau 2 é chamada de função quadrática.

A definição usual, que aparece nos livros didáticos é dada da seguinte forma:

Definição: Uma função $f: R \rightarrow R$, definida por *f(x)=ax²+bx+c*, com *a, b* e *c* números reais e ainda *a≠0* é chamada de função quadrática.

Considerando o domínio e contradomínio, o conjunto dos números reais, as expressões abaixo definem uma função quadrática

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$g(x) = - x^2 +3x - 7$

$h(x) = 2x^2 - 4x$

$m(x) = x^2 - 1$

$n(x) = 3x^2$

A representação gráfica de uma função quadrática é uma curva denominada parábola. Para Lima et. al. (2006, p.139), ”dados um ponto F e uma reta d que não o contém, parábola de foco F e diretriz d é o conjunto de pontos do plano que distam igualmente de F e de d”, e sua forma varia de acordo com os valores dos coeficientes a, b e c.

Assim, de acordo com Dante (2014, p.102), a parábola descreve o comportamento de diversas situações do dia a dia, como: trajetória de projéteis, linha descrita pela água de uma fonte, e ainda a grande utilidade na transmissão e recepção de dados através da antena parabólica, superfície de revolução obtida girando a parábola em torno de seu eixo, que possui grandes propriedades e inúmeras aplicações.

2.4 AS FUNÇÕES POLINOMIAIS, AFIM E QUADRÁTICA COMPLEXAS

Como visto anteriormente, as funções afim e quadrática, podem ser vistas como funções polinomiais, e a substituição do domínio pelo conjunto C acarretará na mudança do contradomínio, visto que as operações de adição e multiplicação estão definidas no conjunto C, o contradomínio então será o conjunto dos números complexos. Portanto, podemos definir função polinomial complexa da seguinte maneira:

Definição: A função complexa $p: C \to C$, é definida por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (7)$$

onde a_0, a_1, ... , a_{n-1}, a_n são números complexos e $n \in N$ é denominada de função polinomial.

Consequentemente, podemos definir função afim complexa e função quadrática complexa, respectivamente, da seguinte forma:

Definição. Uma função $f: C \rightarrow C$ é dita *afim* quando existem constantes *a, b* complexas tais que *f(x)= ax + b* para todo $x \in C$.

Definição. Uma função $f: C \rightarrow C$ chama-se *quadrática* quando existem *a, b* e *c* complexas, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in C$.

Vejamos a seguir um exemplo:

Considerando a função $p: C \rightarrow C$, definida por $p(x) = x^2 - 2x + 1$, vamos calcular o valor de *p(2i)* e *p(1 – i).* Por um cálculo direto, é fácil ver que:

$p(2i) = (2i)^2 - 2(2i) + 1 \rightarrow p(2i) = 4i^2 - 4i + 1 \rightarrow p(2i) = -4 - 4i + 1 \rightarrow p(2i) = -3 - 4i.$

$p(1 - i) = (1 - i)^2 - 2(1 - i) + 1 \rightarrow p(1 - i) = 1 - 2i + i^2 - 2 + 2i + 1 \rightarrow p(1 - i) = -1.$

Portanto, as funções afim e quadrática não sofrem alterações significativas, bastando considerar as mesmas como funções polinomiais de 1º e 2º graus respectivamente, salvo o caso do surgimento das raízes complexas das funções quadráticas.

O diferencial no estudo dessas funções está diretamente relacionado ao cálculo das raízes (ou zeros) da função em questão. Por exemplo, vamos determinar os zeros da função $f(x) = x^3 - (2+i)x^2 + (2+2i)x - 2i$. Do teorema fundamental da álgebra (veja, por exemplo, o livro ÁVILA, 2013), sabemos que todo polinômio de grau *n* tem, exatamente, *n* raízes. Uma vez que $i^3 = -i$ e $i^2 = -1$, vemos, diretamente, que $f(i) = 0$. Logo, $x_1 = i$ é uma raíz da função *f(x)*. Usando, agora, o algoritmo da divisão euclidiana, concluímos que $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - i)$. Para encontrar as outras duas raízes, basta resolvermos a equação do 2º grau $x^2 - 2x + 2 = 0$. Usando a fórmula de Bhaskara, obtemos $x_2 = 1 + i$ e $x_3 = 1 - i$. Vemos, portanto, que a função $f(x) = x^3 - (2+i)x^2 + (2+2i)x - 2i$ possui três raízes complexas (duas delas conjugadas, a saber, x_2 e x_3). Vale ressaltar que esse último fato é geral (e não específico para o exemplo anterior). Ele é conhecido como o Teorema das Raízes Conjugadas (enunciado a seguir).

Teorema das Raízes Conjugadas: Se um número complexo $z = a + bi$ é raiz de uma função polinomial complexa *f(x)*, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz da função *f(x)*.

3. A EXPONENCIAL REAL E COMPLEXA

Neste capítulo abordaremos a exponencial complexa. Tal função apresenta um forte contraste com a exponencial real, pois, por exemplo, ela pode assumir valores reais negativos. De fato, veremos que o contradomínio da função exponencial no caso complexo é o conjunto C^* dos números complexos não nulos. Para maiores detalhes, sugerimos a leitura dos seguintes livros: Ávila (2013) e Zill e Shanahan (2011).

3.1 A FUNÇÃO EXPONENCIAL REAL

Segundo Lima et al. (2006, p.197), se *a* é um número real positivo diferente de *1,* então a função $f: R \to R^+$, definida por $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in R$:

1. $a^x.a^y=a^{x+y}$

2. $a^1 = a$

3. $x < y \to \begin{cases} a^x < a^y \text{ quando } a > 1 \\ a^y < a^x \text{ quando } 0 < a < 1 \end{cases}$.

Note que se *f* é uma função exponencial, então:

$$f(x+y)= f(x) \, . \, f(y).$$

Logo, *f* não pode assumir o valor *0*, a menos que seja identicamente nula. De fato, suponha que existe um $x_0 \in R$ tal que $f(x_0) = 0$. Então, $\forall \; x \in R,$ temos:

$$f(x) = f(x_0 +(x-x_0)) = f(x_0).f(x-x_0) = 0.f(x-x_0) = 0.$$

Portanto, *f* será identicamente nula. E mais, se f tem a propriedade 1 e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$ para todo $x \in R$, pois:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0. \qquad (8)$$

Dessa forma, podemos dizer que o contradomínio de *f* é R^+ quando o domínio é *R*.

De acordo com Lima et. al. (2006, p. 202), assim como as funções afim e quadrática a função exponencial fornece um modelo matemático de resolução de problemas elementares. O gráfico de uma função exponencial representa uma curva, e serve para descrever muitos fenômenos do cotidiano, como os juros compostos, decaimento radioativo, a concentração de uma solução, entre outros.

Os gráficos representam curvas crescentes quando o parâmetro *a* é maior do que 1 e curvas decrescentes quando o parâmetro *a* pertencer ao intervalo $(0,1)$. No próximo tópico, estenderemos a função exponencial para o plano complexo.

3.2 A FUNÇÃO EXPONENCIAL COMPLEXA

Antes de definir a função exponencial complexa é importante conhecer a fórmula de Euler, uma dentre várias.

Segundo Carneiro (2012, p. 44), temos que: $e^{ix} = \cos x + i \, sen \, x$, sendo *i* a unidade imaginária (uma das fórmulas de Euler). Na ocasião, Carneiro (2012) faz uma breve explicação da fórmula sem recorrer ao Cálculo Diferencial e Integral. No entanto, o que faremos é apenas a utilização da fórmula Euler.

Um caso especial da fórmula de Euler, também conhecido como identidade de Euler é quando $x = \pi$:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \, sen \, \pi$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa identidade reúne as cinco constantes mais importantes da matemática: $0, 1, e, \pi, i$, além das operações de adição, multiplicação e exponenciação, sendo considerada por alguns estudiosos como Richard Feynman (1918-1988), Benjamin Peirce (1809-1880) , a identidade mais bela de toda matemática.

A seguir, apresentaremos o conceito de função exponencial complexa.

3.2.1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO EXPOENCIAL COMPLEXA

Definição. Seja $f: C \to C$, uma função. Se $z = x + iy$ é um número complexo (x e y reais), a função exponencial complexa é definida da seguinte maneira:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x\,(cos\,y + i\,sen\,y). \qquad (9)$$

Observações:

1. Note que se z for real, ou seja, $z = x + i.0$, então:

$$f(z) = e^z = e^{x+i.0} = e^x \,.\, e^{i.0} = e^x\,(cos\,0 + i\,sen\,0) = e^x \,.\, (1 + i.0) = e^x.$$

Logo, a exponencial complexa coincide com a exponencial real se $z \in R$.

2. Tomando $z = x + i.\pi$, obtemos:

$$f(z) = e^z = e^{x+i\pi} = e^x \,.\, e^{i\pi} = e^x\,(cos\,\pi + i\,sen\,\pi) = e^x \,.\, (-1 + i.0) = -e^x < 0,$$

uma vez que e^x é sempre positivo, para todo x real. Daí, segue que a função exponencial complexa pode assumir valores negativos, diferenciando fortemente da exponencial real.

3. Note que $e^{z+2k\pi i} = e^z$ para todo $k \in Z$. De fato, se $z = x + iy$, então:

$$e^{z+2k\pi i} = e^x[\cos(y + 2k\pi) + i\,sen(y + 2k\pi)]$$

$$e^{z+2k\pi i} = e^x\,[\cos y + i\,sen\,y] = e^z,\ \forall\, k \in Z,$$

uma vez que as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π. Logo, a função e^z é periódica de período (complexo) $2\pi i$.

De acordo com Fernandez (2011, p.12), “é interessante observarmos que, ao contrário do que acontece no caso real, é possível termos $e^z = e^w$ com $z \neq w$. Por exemplo, $e^0 = e^{2\pi i} = 1$”. A observação 3 esclarece esse fato e ainda nos faz concluir que a função exponencial complexa não é bijetiva, nesse caso, não admitindo inversa.

Outra propriedade da função exponencial complexa segundo Zill e Shanahan (2011, p.133) é:

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i\ sen\ y)| = |e^x||\cos y\ + i\ sen\ y| = e^x.1 = e^x, \tag{10}$$

ou seja, o módulo de e^z é igual a e elevado a parte real de z.

Exemplo: Vamos encontrar as soluções da equação $e^z = -1$.

De imediato é fácil notar que se trata de uma exponencial complexa, pois, se fosse real não haveria solução, uma vez que o contradomínio da função exponencial real é R^+ e -1 não pertence ao conjunto R^+. Logo, se z é da forma:

$$z = x + yi,$$

com *x, y* reais, então:

$$e^z\ =\ e^{x+iy}\ =\ e^x.e^{iy}\ =\ e^x\ (cos\ y\ +\ i\ sen\ y)\ =\ -1 \tag{11}$$

Como e^x só pode assumir valores positivos, pois, por definição x é real, concluímos que *cos y + i sen y* deve ser real, já que o resultado é um número real, o que “força” que *sen y* seja nulo. Como o produto é um número negativo, y será igual a algum múltiplo ímpar de π. Então, fazendo y = $(2k+1)\pi$ com k inteiro, obtemos:

e^x (cos $(2k+1)\pi$ + i sen $(2k+1)\pi$) = -1 → $e^x(-1 + i\ .\ 0) = -1$ → e^x (-1) = -1 → x = 0.

Logo, todas as soluções da equação (11) são da forma

$$z_k = (2k+1)\pi i, \text{ com } k \in Z.$$

Isso mostra uma diferença marcante em relação ao caso real, pois uma vez que a eq. (11) não admite *nenhuma* solução real, para o caso complexo temos infinitas soluções.

Observação. Notemos que a exponencial complexa nunca se anula. Com efeito, se $z = x + iy$, então $e^z = e^x\ (cos\ y + i\ sen\ y)$. Como $e^x > 0$ para todo *x* real, a função e^z só se anularia se *cos y + i sen y* fosse nulo para algum *y* real. Mas isso nunca ocorre, pois as funções seno e cosseno não se anulam simultaneamente já que $cos^2\ y +$

$sen^2\, y = 1$ para todo y real. Portanto, o contradomínio da exponencial complexa é o conjunto C^*, isto é, o conjunto dos números complexos não nulos.

4. A FUNÇÃO LOGARÍTMICA REAL E COMPLEXA

Neste capítulo, apresentaremos o conceito de logaritmo complexo. Com ele poderemos calcular logaritmos de números negativos (algo impossível para o caso real). Diferentemente do caso real, a função logarítmica complexa em C^* não é a inversa da exponencial, como veremos a seguir.

4.1 A FUNÇÃO LOGARÍTMICA REAL

Segundo Lima et al. (2006, p. 211), a inversa da função exponencial $g(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$ é a função $f: R^+ \to R$ definida por $f(x) = \log_a x$, que associa cada número positivo *x* o número real $\log_a x$, chamado o logaritmo de *x* na base *a*.

Por definição de função inversa, temos:

$$a^{log_a x} = x \quad e \quad log_a a^x = x. \tag{12}$$

Logo, a função logarítmica real é definida pela expressão:

$$y = log_a x \leftrightarrow a^y = x. \tag{13}$$

Fazendo *a* = *e* (*e* = número de Euler), o logaritmo é dito natural e representado da seguinte forma:

$$y = ln\, x \to e^y = x \tag{14}$$

Segue diretamente da definição de função logarítmica que o gráfico desta função intercepta o eixo das abscissas em $x_0 = 1$, ou seja, o gráfico da função logarítmica sempre passa pelo ponto (1,0).

Ainda de acordo com Lima et. al. (2006, p. 212), o surgimento de calculadoras cada vez mais modernas fez com que o uso dos logaritmos, antigamente usado como um eficiente instrumento de cálculo, perdesse sua utilidade inicial, embora tenha ainda grande importância na matemática e suas aplicações.

4.2 A FUNÇÃO LOGARÍTMICA COMPLEXA

Vimos no tópico anterior que a função logarítmica real é a função inversa da função exponencial real. Esse fato não se repete com a função logarítmica complexa, ou seja, ela não é a inversa da função exponencial complexa. Isso se dá pelo fato da função exponencial complexa não ser injetiva (em particular, não ser bijetiva); fato este observado no capítulo anterior. Vejamos, então, o que ocorre com a função logaritmo se seu domínio for o conjunto dos números complexos.

Definição. Dizemos que *w* é um logaritmo do complexo não nulo *z* se $e^w = z$.

De acordo com Zill e Shanahan (2011), dado um complexo não nulo *z*, a equação $e^w = z$ admite infinitas soluções, isto é, todo número complexo não nulo possui infinitos logaritmos. Mais especificamente, se *w* é um logaritmo de $z \in C^*$, então

$$w = ln\,|z| + i\,.\,arg\,z, \tag{15}$$

onde arg z é um argumento do complexo não nulo *z*. Note que, como todo número complexo não nulo tem infinitos argumentos, a expressão (15) nos oferece, de fato, infinitas soluções para a equação $e^w = z$. Assim,

$$w = \ln|z| + i(Arg\,z + 2k\pi), \quad k \in Z,$$

onde $Arg\,z$ representa o argumento principal de z (isto é um número real maior do que ou igual a zero e menor do que 2π). Representaremos por $log\,z$ o conjunto de todos os logaritmos do complexo $z \in C^*$, isto é

$$\log z = \{\ln|z| + i(Arg\,z + 2k\pi)\ /k \in Z\}. \tag{16}$$

Conclui-se, portanto, que, para cada $z \in C^*$, $\log z$ é o conjunto solução da equação $e^w = z$, e é chamado de *logaritmo complexo.* O número Complexo

$$Log\,z \coloneqq \ln|z| + i\,Arg\,z \tag{17}$$

será chamado de *logaritmo principal* de *z.*

De acordo com Ávila (2013, p.65), o fato de um número complexo possuir infinitos logaritmos, dependendo do argumento usado para o complexo *z*, costumase dizer que a função logarítmica complexa é uma função multivalente*, que a rigor é uma denominação imprópria, uma vez que o valor de uma função tem de ser determinado univocamente, ou seja, sem margem para outra forma de interpretação.

Desta forma, como cada argumento de $z \in C^*$ pode ser escolhido num conjunto infinito de valores que diferem de múltiplos inteiros de 2π, se restringirmos o argumento a um intervalo semiaberto de comprimento 2π, os logaritmos complexos assim definidos, serão extensões do logaritmo real, e segundo Dias e Dantas (2006, p.18-19), terão propriedades básicas semelhantes ao logaritmo real. De fato, se $z, w \in C^*$, então:

$$Log(zw) = Log\, z + Log\, w; \tag{18}$$

$$Log\left(\frac{z}{w}\right) = Log\, z - Log\, w; \tag{19}$$

$$Log\, z^n = n\, Log\, z,\ \ se\ n \in Z. \tag{20}$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Façamos z = - 3. Note que o argumento principal de z é π radianos (180º), pois z = - 3 está sobre o eixo real negativo (ou seja, a parte imaginária do complexo z = - 3 é nula). Logo, Arg z = π. Desta forma, temos que:

$$Log(-3) = \ln|-3| + \pi i = \ln 3 + \pi i$$

$$log(-3) = \{\ln 3 + (2k+1)\pi i\ \ /k \in Z\}.$$

Observe que, segundo a definição, $Log(-3)$ é um número complexo, enquanto que $log(-3)$ é um conjunto (infinito) de números complexos.

Definição. A função $f: C^* \rightarrow C$ definida por $f(z) = Log\, z$, onde $Log\, z$ é dado na identidade (16) é denominada de função logarítmica principal.

Diferentemente da função logarítmica real, na função logarítmica complexa principal podemos calcular logaritmos de números reais negativos, e ainda obtemos infinitas soluções para a equação, como visto no exemplo 1.

* Relação binária que associa cada elemento do domínio a pelo menos um elemento do contradomínio.

No próximo exemplo, calcularemos o logaritmo principal de $z= -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Exemplo 2. Se $z= -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, então *z* pode ser reescrito da seguinte maneira (forma polar):

$$z=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\ sen\frac{3\pi}{4}\right).$$

Pela definição de logaritmo principal, ou seja, pela equação (16), temos que:

$$Log(z)= \ln 2 + \frac{3\pi i}{4}.$$

Observação: A principal diferença entre os logaritmos real e complexo está além da não restrição do domínio a somente números positivos, também na infinidade de soluções da equação $e^w = z$ cuja solução é dada em (14) ou (15). Vimos que no caso complexo é possível calcular logaritmos de números negativos, porém o logaritmo do complexo z=(0,0) continua não definido, pois como esse complexo possui módulo igual a 0, é impossível calcularmos o logaritmo *ln 0*.

Observação. Vimos que a função exponencial complexa definida em C não é injetiva. Porém, de acordo com Cruz (2014), se restringirmos a exponencial complexa e^Z a faixa $(-\infty,\infty)X\,[0,2\pi)$, isto é, se $z = x + i\,y$ com $x \in (-\infty,\infty)$ e $y \in [0,2\pi)$, teremos uma função bijetora cuja inversa é o logaritmo principal *Log(z).*

5. AS FUNÇÕES SENO E COSSENO REAIS E COMPLEXAS

Neste capítulo estenderemos as funções seno e cosseno para o corpo dos números complexos. Veremos que várias propriedades destas funções são análogas ao caso real. Por exemplo: periodicidade com período fundamental 2π; a paridade das funções é preservada; as fórmulas da soma de dois ângulos e a clássica relação fundamental da trigonometria $sen^2 z + \cos^2 z = 1$ também continuam válidas para números complexos. Uma vez que em C não há uma ordenação, é claro que estas "novas" funções não são limitadas.

5.1 AS FUNÇÕES SENO E COSSENO REAIS

De acordo com Lima et al (2006, p.252), as funções sen: $R \to R$ e cos: $R \to R$ são definidas da seguinte forma:

$$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \text{ para cada } t \in R,$$

onde *E(t)* é um ponto da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$. Ou seja, $x = \cos t$ e $y =$ *sem t* formam, respectivamente, a abcissa e a ordenada do ponto *E(t)* da circunferência unitária.

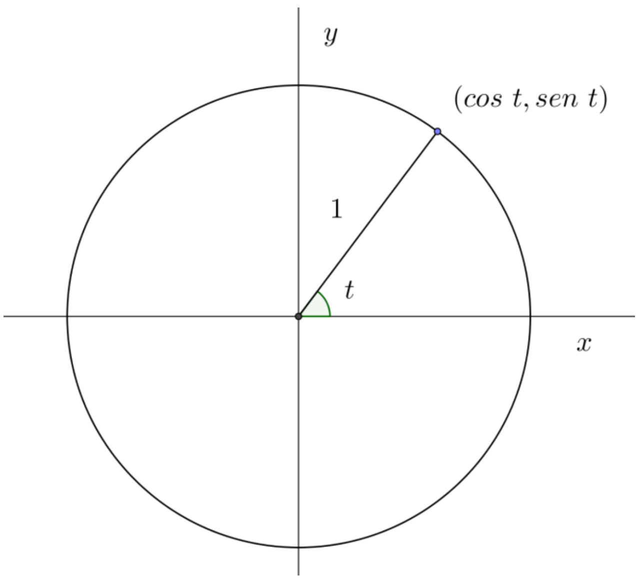

Figura 4: Circunferência unitária

Usando a fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i\, sen\, x,$ é fácil ver que (GOMES, 2013, p.32):

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \tag{21}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \tag{22}$$

para todo $x \in R$.

As funções seno e cosseno no campo dos reais gozam da propriedade $f(t + 2k\pi) = f(t)$, com $k \in Z$, ou seja, são periódicas, de período 2π, e ainda, como são coordenadas de uma circunferência unitária, são limitadas no intervalo [-1, 1], isto é:

$$-1 \leq \cos t \leq 1, \forall\, t \in R \quad \text{e} \quad -1 \leq sen\, t \leq 1, \forall\, t \in R.$$

Não nos estenderemos às funções tangente, cotangente, secante e cossecante, pois essas derivam das funções seno e cosseno.

5.2 AS FUNÇÕES SENO E COSSENO COMPLEXAS

Vejamos agora o comportamento das funções seno e cosseno complexas. De acordo com Gomes (2013, p.32), as funções seno e cosseno complexas são definidas da seguinte maneira:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{23}$$

e

$$sen\, z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{24}$$

Note a similaridade com as fórmulas (21) e (22). Se *z=(x,y)* tem parte imaginária nula, ou seja, *z* = *x* é um número real, temos:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x$$

e

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{sen} x.$$

Isso nos leva à conclusão que se z for real as funções seno e cosseno complexas coincidem com as funções seno e cosseno reais. Há mais semelhanças entre ambas. Por exemplo, as funções seno e cosseno complexas são periódicas de período 2π e a igualdade $sen^2 z + \cos^2 z = 1$, também se verifica para todo $z \in Z$. De fato, com relação à periodicidade das funções cosseno e seno complexas, temos que

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{\left[e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right]}{2} = \frac{\left[e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}\right]}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

e

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \frac{\left[e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right]}{2i} = \frac{\left[e^{iz+2\pi i} - e^{-iz-2\pi i}\right]}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \operatorname{sen} z,$$

uma vez que a exponencial complexa é periódica de período $2\pi i$ (conforme vimos no Capítulo 4). Por outro lado,

$$\cos^2 z + sen^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(e^{2iz} + e^{-2iz} + 2\right)}{4} + \frac{\left(e^{2iz} + e^{-2iz} - 2\right)}{-4} = \frac{4}{4} = 1.$$

De acordo com Zani (2001, p.32) as propriedades abaixo também são análogas às das funções seno e cosseno reais:

$$\cos(-z) = \cos z \tag{25}$$

$$sen(-z) = -sen\, z \tag{26}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = cos\, z_1 \cos z_2 \mp sen\, z_1 sen\, z_2 \tag{27}$$

$$sen(z_1 \pm z_2) = sen\, z_1 \cos z_2 \pm sen\, z_2 \cos z_1. \tag{28}$$

Através das equações (25) e (26), concluímos que as funções cosseno e seno complexas são, respectivamente, par e ímpar.

Exemplo: Vamos calcular o cosseno e o seno do complexo z= *2i*. Segue diretamente da definição da equações (23) e (24), respectivamente,

$$\cos z = \frac{e^{i2i} + e^{-i2i}}{2} = \frac{e^{2i^2} + e^{-2i^2}}{2} = \frac{e^{-2} + e^{2}}{2} \cong 3{,}76$$

e

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{i2i} - e^{-i2i}}{2i} = \frac{e^{2i^2} - e^{-2i^2}}{2i} = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} \cong 3{,}63i.$$

Observação: Apesar das grandes semelhanças entre as funções seno e cosseno reais e as funções seno e cosseno complexas, as mesmas apresentam diferenças, sendo que uma delas é que as funções seno e cosseno complexas não são limitadas ao intervalo [-1,1], como as funções cossenos e seno reais. Isso ocorre uma vez que C não é um *corpo ordenado*[*].

[*] Um corpo é um conjunto, munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem certas condições, chamadas os axiomas de um corpo, e diz-se ordenado quando está definida entre seus elementos uma relação de ordem, ou seja, uma relação binária, com as seguintes propriedades: Dados, x, y e z $\in$ A, temos que x<y, ou y<x, ou x=y, cada uma das possibilidades exclui as outras, denominamos isso de tricotomia. E se x<y e y<z, então x<z, denominamos isso de transitividade.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

6.1 METODOLOGIA

O desenvolvimento do trabalho se deu no Colégio Estadual Centro Educacional Antônio Honorato, localizado na cidade de Casa Nova - BA, no período de 16/03 a 18/03 do ano de 2015, dividido em três aulas para 30 alunos da 3ª série do ensino médio.

Iniciamos os trabalhos na primeira aula com uma revisão do conjunto dos números complexos: introdução histórica, definição, operações e propriedades, representação algébrica, geométrica e trigonométrica. Com o auxílio do projetor multimídia foram apresentados os referidos tópicos, e na lousa foram dados exemplos e aplicações. Além disso, foi dedicado um tempo para comentários e esclarecimento de possíveis dúvidas referente ao conteúdo aplicado.

Na segunda aula foi realizada uma revisão das seguintes funções reais: funções afim e quadrática, função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas (seno e cosseno). Os conceitos foram exibidos através do projetor multimídia. A representação gráfica ficou por conta do software de geometria dinâmica Geogebra. Exemplos foram resolvidos na lousa e no final foi aplicado um questionário para a verificação da aprendizagem.

No terceiro e último encontro, dia 18/03/2015 (quarta-feira), foi feita a apresentação da fórmula de Euler para números complexos ($e^{ix} = cos\,x + i\,sen\,x$, $\forall\, x \in R$) e foi introduzido o conceito das seguintes funções complexas: funções afim e quadrática, função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas (seno e cosseno). Em cada caso era enfatizada a diferença entre aquela função com domínio real e com domínio complexo, fazendo um paralelo entre função real e função complexa de maneira algébrica, já que a representação geométrica é perdida com a substituição do domínio pelo conjunto dos números complexos.

A pesquisa foi finalizada com a aplicação de um novo questionário para avaliar o alcance dos objetivos (os questionários estão no apêndice).

6.2 RESULTADOS OBTIDOS

Após a aplicação dos questionários, foram constatados os seguintes resultados:

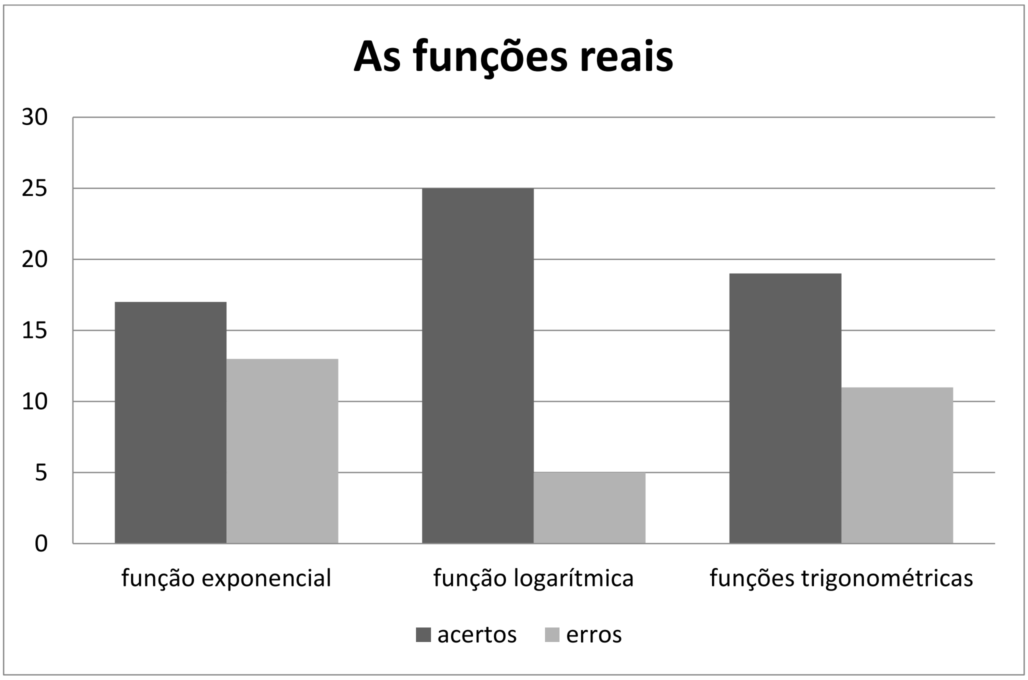

Figura 5: Questionário 1 - Perguntas 3, 4 e 5

De acordo com a Figura 5, a revisão dos conceitos e principais características referentes às funções exponencial, logarítmica e trigonométricas reais foram compreendidos pela maioria dos alunos, com maior destaque à função logarítmica real, os mesmos foram questionados quanto a definição das funções reais citadas, respondendo perguntas do tipo “sim ou não” (ver apêndices).

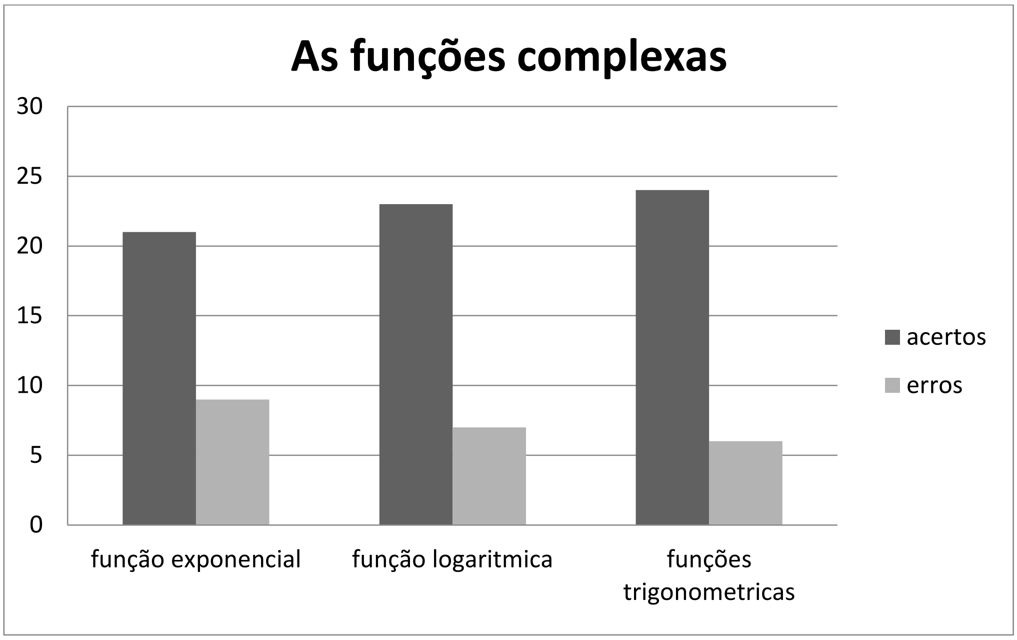

Figura 6: Questionário 2 - Perguntas 3, 4 e 5

Em relação às definições e características das funções exponencial, logarítmica e trigonométricas complexas, a Figura 6 nos mostra que os alunos, em sua maioria, compreendeu respondendo corretamente as perguntas, e ainda revela que apenas uma pequena parte desses alunos não conseguiram entender.

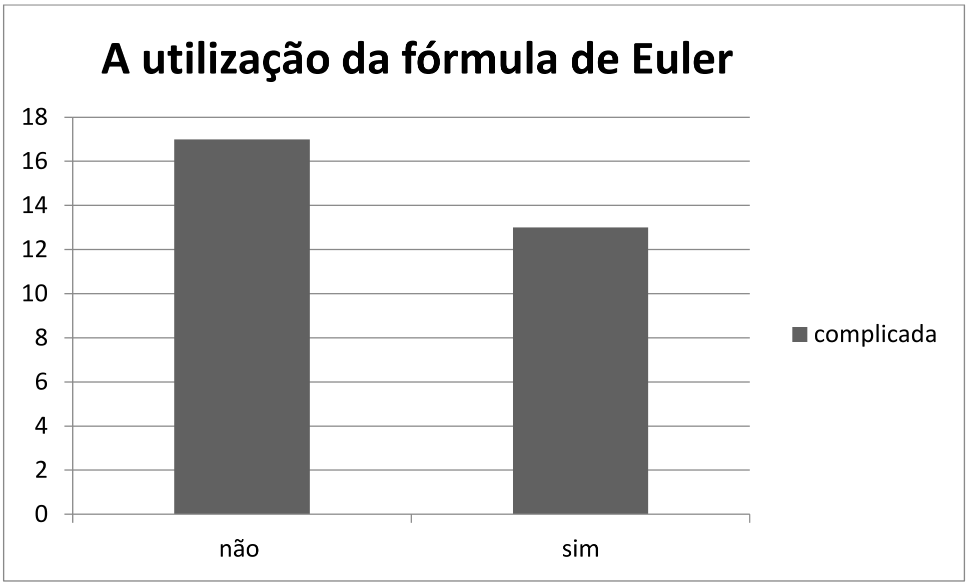

Figura 7: Questionário 2 - Pergunta 7

A demonstração da fórmula de Euler foi omitida pelo fato de serem necessários conhecimentos de Cálculo Diferencial. No entanto, os alunos foram questionados quanto a sua utilização. De acordo com a Figura 7, a maioria dos alunos consideraram que não é complicado a utilização de tal fórmula. Visto que a aplicação da mesma necessita apenas de conhecimentos sobre trigonometria, potenciação e operações básicas, estudadas por todos os alunos ao longo do ensino médio.

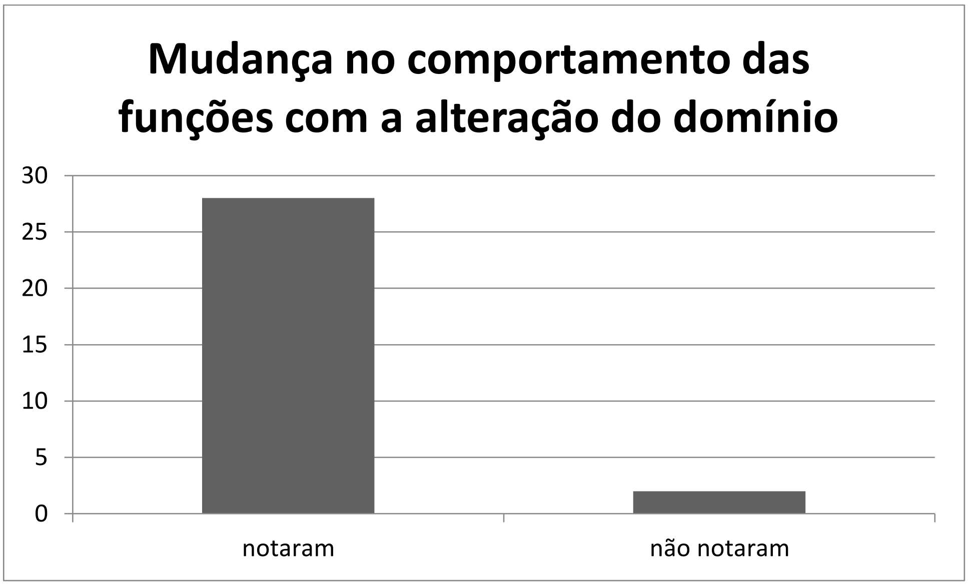

Figura 8: Questionário 2 - Pergunta 6

Os alunos foram questionados se houve alterações no comportamento das funções elementares quando as mesmas passaram a ter o conjunto C como domínio. A Figura 8 mostra que quase todos perceberam as alterações. Note que, através da análise das figuras 5 e 6 é também possível determinar a situação apresentada na Figura 8, uma vez que a maioria distinguiu as funções elementares reais das complexas.

Por fim, foi feita uma pesquisa de opinião a respeito do desenvolvimento e importância do trabalho, veja os resultados expostos na figura 9.

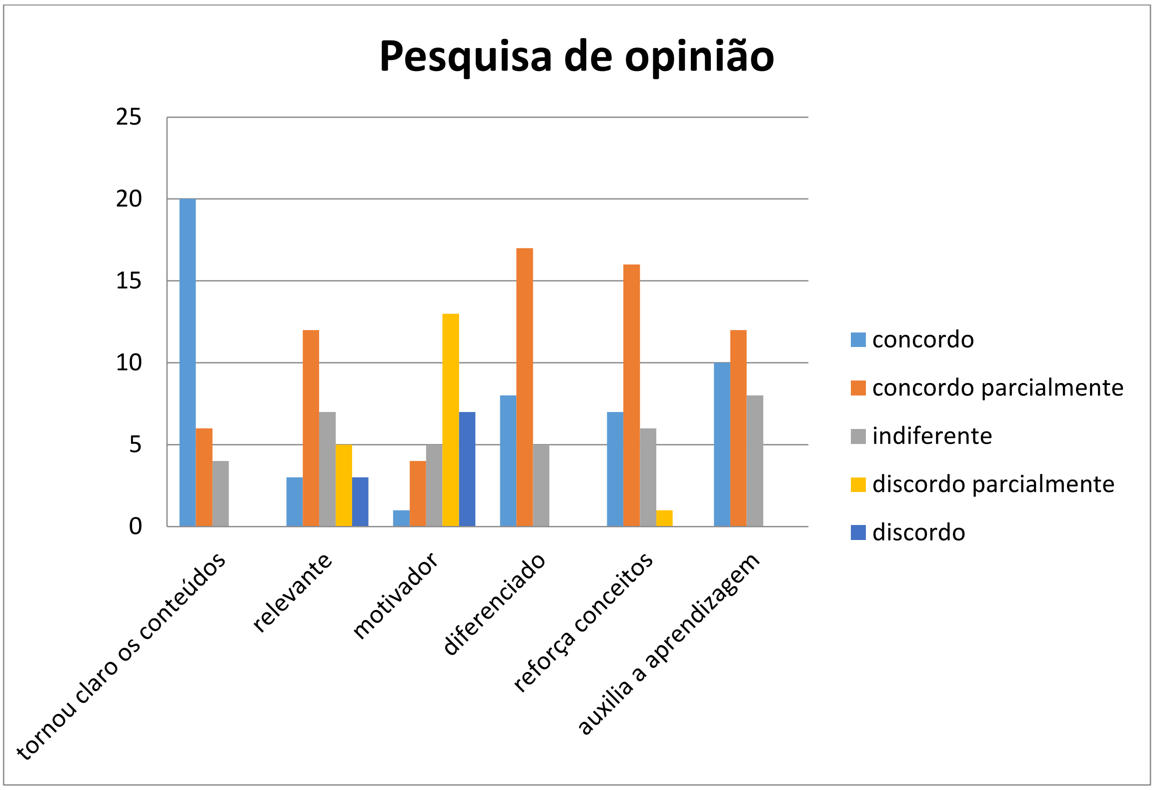

Figura 9: Questionário 2 - Pergunta 8

Foi dada a oportunidade de cada aluno expressar sua opinião através de comentários. No entanto, nenhum deles utilizou-se desse recurso.

Diante da análise dos dados coletados e da participação dos alunos em sala de aula, pudemos observar que, inicialmente, o estudo das funções complexas causou um espanto na maioria dos discentes (principalmente devido à natureza da palavra complexo). Porém, no decorrer do trabalho, esse “preconceito” foi ficando pelo caminho, favorecendo a descoberta dos novos fatos.

Assim, a proposta de ensino de funções complexas elementares na 3ª série do ensino médio serviu, entre outras coisas, para fortalecer a ideia de que a matemática é uma ciência cujos conteúdos são interligados e não somente um punhado de teorias soltas e sem nexos (como pensam alguns de nossos alunos).

Considerações finais

Esse trabalho teve como objetivo a construção do conhecimento no contexto dos números complexos sob a perspectiva da expansão de funções trabalhadas no Ensino Médio para o plano complexo.

De acordo com os dados coletados e apresentados, foi possível identificar que o conhecimento dos alunos referente aos números complexos foi consideravelmente ampliado, os conceitos das funções complexas elementares foram compreendidos, bem como suas características, conforme pudemos observar nas figuras 6 e 8 do Capítulo 8.

Percebemos, rapidamente, que a maior dificuldade dos alunos era com respeito aos pré-requisitos da pesquisa, ou seja, os conceitos relativos às funções reais (que já deveriam estar fixados). No entanto, com a revisão que foi realizada, esse problema foi minimizado.

Nesse sentido, sugerimos para quem for seguir esta proposta, seguir o seguinte roteiro: realizar uma revisão das funções reais discutindo cautelosamente os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função; fazer análises do comportamento dos gráficos das funções reais; apresentar a fórmula de Euler (sem demonstração) e, por fim, definir as funções complexas fazendo um paralelo com as funções reais (i.e., mostrando a diferença de comportamento da tal função quando seu domínio passa a ser o conjunto dos números complexos).

Como proposta para trabalhos futuros, além de trabalhar com outras funções complexas, como as funções hiperbólicas, podemos sugerir o estudo de potências complexas de números complexos. Por exemplo, se considerarmos o argumento principal da unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, a potência i^i é um caso bastante curioso, pois, apesar de possuir base e expoente complexos, seu resultado é um número real; a saber, $e^{-\pi/2} \cong 0{,}21$, isto é, $i^i = e^{-\pi/2} \cong 0{,}21$.

Referências bibliográficas

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e Aplicações**. LTC, 3ª ed. 2013.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 244p.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria & Números Complexos**. Rio de Janeiro SBM, 2001.

CARNEIRO, José Carlos. **Por que $e^{i\theta}= \cos\theta + i\, sen\, \theta$?**. RPM, 77, p. 44-49, 2012.

CARNEIRO, José Paulo. **A geometria e o ensino dos números complexos**. RPM, 55. SBM, 3º quadrimestre de 2004.

CHURCHILL, Ruel V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. Mcgraw-Hill. 1975.

CRUZ, Felipe Wergete. **Notas de Aula: "É possível calcular o logaritmo de um número negativo?"**. UNIVASF, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações – volume 1**. 2ª ed. São Paulo. Ática. 2014

DIAS, Cláudio Carlos; DANTAS, Neuza Maria. **Geometria Analítica e Números Complexos**. Natal. EDUFRN. 2006.

FERNANDEZ, Cecília S.; JUNIOR, Nilson C. Bernardes. **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**. Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM-IMPA, 2006.

GOMES, Carlos A. **Pode o seno ser maior do que 1?**.RPM, 81, p. 31-33, 2013.

IEZZI, Gelson, et al. **Fundamentos de matemática elementar 6**. 2ª ed. São Paulo. Atual 1977.

LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do ensino médio – volume 1.** 9ª ed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

PINHEIRO, Roberto Batista. **Números Complexos**: Alguns aspectos algébricos e geométricos. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Maranhão. São Luiz. 2013.

ROSA, Rosana Camilo da; DARELA, Eliane; RUFINO, Paulo Henrique. **Trigonometria e Números Complexos**. 2ª ed. rev. e atual. Palhoça, Unisul Virtual, 2007.

SOARES, Marcio Gomes. **Cálculo em uma variável complexa**. Coleção Matemática Universitária, 4ª ed. Rio de Janeiro, SBM-IMPA, 2007.

ZANI, Sérgio Luís. **Funções de uma variável complexa**. material online, 2001 (Material Didático). p. 1-145. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/~szani/complexa.pdf> . Acesso em: 23 de fevereiro de 2015.

ZILL, Dennis G; SHANAHAN, Patrick D. **Curso Introdutório à Análise Complexa com Aplicações**. LTC. 2011.

APÊNDICES

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO – UNIVASF
CAMPUS DE JUAZEIRO-BA - CEP: 48902-300
TELEFONE (74) 2102-7662
E-mail: profmat@univasf.edu.br

Prezado aluno(a), sou discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, e estou realizando uma pesquisa, cujo o tema é "uma proposta de ensino de funções complexas elementares para a 3ª série do Ensino Médio". Necessito de sua atenção para preencher esse formulário, com a finalidade de verificar se foram alcançados os objetivos da pesquisa.

Questionário 1

1) Idade:____ anos

2) Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

3) Considere a função $f: R \to R$, definida por $f(x) = e^x$. É verdade que essa função é sempre positiva qualquer que seja o valor de x?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Comentário:

____

____

4) Considere a função $h: R \to R$, definida por $h(x) = \ln(x)$. É possível calcular o $\ln(-1)$?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Comentário:

____

____

5) Considere a função $g: R \to R$, definida por $g(x) = Sen\,x$. Existe algum x real tal que $Sen\,x > 1$ ou $Sen\,x < -1$?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Comentário:

____

____

PROFMAT

UNIVASF
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO – UNIVASF
CAMPUS DE JUAZEIRO-BA - CEP: 48902-300
TELEFONE (74) 2102-7662
E-mail: profmat@univasf.edu.br

Prezado aluno(a), sou discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, e estou realizando uma pesquisa, cujo o tema é “uma proposta de ensino de funções complexas elementares para a 3ª série do Ensino Médio”. Necessito de sua atenção para preencher esse formulário, com a finalidade de verificar se foram alcançados os objetivos da pesquisa.

Questionário 2

1) Idade:____ anos

2) Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

3) Considere a função $f: C \rightarrow C$, definida por $f(x) = e^x$. É verdade que essa função é sempre positiva qualquer que seja o valor de x?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Comentário:

____

____

4) Considere a função $h: C \rightarrow C$, definida por $h(x) = \ln(x)$. É possível calcular o $\ln(-1)$?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Comentário:

____

____

5) Considere a função $g: C \rightarrow C$, definida por $g(x) = Sen\, x$. É possível encontrar um complexo x tal que $Sen\, x > 1$ ou $Sen\, x < -1$?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Comentário:

____

____

6) A mudança no domínio das funções das questões anteriores alterou significativamente o comportamento das mesmas?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Comentário:

____
____

7) A aplicação da fórmula de Euler para números complexos é complicada?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Comentário:

____
____

8) Você considera que uma atividade como a apresentada auxilia na aprendizagem? Responda a esta pergunta utilizando a seguinte escala:

5	Concordo
4	Concordo parcialmente
3	Indiferente
2	Discordo parcialmente
1	Discordo

Em sua opinião, a atividade:

	1	2	3	4	5
Foi clara em relação ao conteúdo abordado					
Foi relevante em relação ao conteúdo abordado					
Foi motivadora					
Foi diferenciada					
Foi apropriada para o Ensino Médio					
Reforça conceitos					
Auxilia na aprendizagem					

Sugestões e comentário:

____
____
____

PLANO DE ENSINO

Disciplina: Matemática

Carga Horária: 6h

Objetivo:

Refletir e construir conhecimentos no contexto dos números complexos, propiciando a oportunidade de observar, analisar e tirar conclusões de casos nunca abordados em sala de aula.

Cronograma de atividades:

1ª aula	2ª aula	3ª aula
Números complexos: • Um pouco da história dos números complexos; • Definição; • Representação algébrica • Representação geométrica; • Representação trigonométrica.	As funções elementares reais: • As funções polinomiais, afim e quadráticas reais; • A função exponencial real; • A função logarítmica real; • As funções seno e cosseno reais	As funções elementares complexas: • As funções polinomiais, afim e quadráticas complexas; • A função exponencial complexa; • A função logarítmica complexa; • As funções seno e cosseno complexas

Instrumentos avaliativos:

Participação do aluno nas atividades desenvolvidas;

Aplicação de questionários.