

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**O SOFTWARE GEOGEBRA ATRELADO AO
PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO MEDIADOR
NO ESTUDO DO CÁLCULO DO VOLUME DOS
SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

PATRICIA BARRETTO SANTOS SOUZA

Cruz das Almas - Bahia
2015

O SOFTWARE GEOGEBRA ATRELADO AO PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO MEDIADOR NO ESTUDO DO CÁLCULO DO VOLUME DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

PATRICIA BARRETTO SANTOS SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^o MSc. Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Cruz das Almas - Bahia
2015

FICHA CATALOGRÁFICA

S 719

Souza, Patricia Barretto Santos.

O software GeoGebra atrelado ao Princípio de Cavalieri como mediador no estudo do cálculo do volume dos sólidos geométricos / Patricia Barretto Santos Souza. _Cruz das Almas, BA, 2015.
108 f.; il.

Orientador: Erikson Alexandre Fonseca dos Santos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática - Geometria.
3. GeoGebra. I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.

CDD: 510.7

O SOFTWARE GEOGEBRA ATRELADO AO PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO MEDIADOR NO ESTUDO DO CÁLCULO DO VOLUME DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

PATRICIA BARRETTO SANTOS SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Orientador: Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Prof^o MSc. Erikson Alexandre Fonseca dos Santos - UFRB

Membro: Hassan

Prof^o Dr. Hassan Sherafat - UFS

Membro: Jaqueline Alexandra de Souza Azevedo

Prof^a MSc. Jaqueline Alexandra de Souza Azevedo - UFRB

Cruz das Almas, 9 de Julho de 2015.

*Aos meus pais e meu irmão,
a meu esposo, Agnaldo e
aos meus filhos, Gustavo e Danilo,
com muito amor.*

*"Para Tales... a questão primordial não era o que sabemos,
mas como sabemos."
Aristóteles*

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, porque sem Ele eu nada seria.

A Nossa Senhora, por ter atendido aos meus pedidos.

A meus pais, David e Alzira, pelo amor, apoio e incentivo incondicional que sempre me deram em tudo que acrescentasse tanto no meu crescimento pessoal quanto profissional.

A meu esposo, Agnaldo, que sempre está ao meu lado me apoiando e dando suporte para que meus sonhos se realizem.

A meus filhos, Gustavo e Danilo, os quais amo muito.

Ao meu irmão, Moises, que sempre torceu pelo meu sucesso.

Ao meu sogro, sogra, cunhados, cunhadas e sobrinhos pelo apoio e colaboração.

Ao meu orientador, MSc. Erikson Alexandre Fonseca dos Santos, pela sua disponibilidade, dedicação, profissionalismo, comprometimento e contribuições para que este trabalho fosse realizado.

Agradeço à Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas e a coordenação do PROFMAT.

Agradeço ao corpo docente do PROFMAT pela dedicação e por contribuir significativamente na minha formação.

Ao Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo sou muito grata por suas palavras incentivadoras nos momentos difíceis.

Aos meus colegas do PROFMAT, em especial, a Carlos Eduardo por ser um colega muito prestativo; a Alison e Marcos Sanches pela amizade e companheirismo. A minha amiga inseparável neste Mestrado, Tânia Pinto, que me apoiou e incentivou em todos os momentos desta caminhada.

À direção do Colégio Estadual Francisco da Conceição Menezes e aos alunos que participaram da oficina deste trabalho.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela iniciativa deste Mestrado.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por ter concedido a bolsa de estudos.

À banca examinadora por ter disponibilizado tempo para dar sua contribuição neste trabalho.

Aos meus amigos e a todos que sempre me deram força para que eu continuasse a ir ao encontro do meu objetivo.

Neste trabalho apresentamos uma proposta metodológica que consiste na realização de oficinas de estudo desenvolvidas com alunos do 3º ano do Ensino Médio, que visam proporcionar estratégias para compreensão do cálculo de volumes dos sólidos geométricos utilizando o Princípio de Cavalieri e o software de geometria dinâmica, GeoGebra, no intuito de facilitar o entendimento das fórmulas utilizadas para tais cálculos.

Palavras-chaves: Princípio de Cavalieri, Volumes, Sólidos Geométricos, GeoGebra.

ABSTRACT

This paper presents a methodological proposal that consists in carrying out workshops for students of the third grade of high school. We aim to provide strategies for understanding the volume calculation of geometric solids using Cavalieri's Principle, and also the dynamic geometry software GeoGebra in order to facilitate the understanding of the formulas used for such calculations.

Keywords: Cavalieri's Principle, Volumes, Geometric Solids, GeoGebra.

Introdução	16
1 O Software GeoGebra	18
1.1 O que é o GeoGebra?	18
1.2 Funções básicas	19
1.3 Exemplos	20
1.3.1 Atividade 1	20
1.3.2 Atividade 2	21
1.3.3 Atividade 3	22
2 Princípio de Cavalieri	23
2.1 Notas Históricas	23
2.2 Princípio	25
3 Conceitos Básicos	26
3.1 Áreas	26
3.2 Volumes	35
3.2.1 Noção Intuitiva de Volume	35
3.3 Volume do paralelepípedo retângulo	36
3.4 Volume de um Prisma	37
3.5 Volume de uma Pirâmide	38
3.5.1 Cálculo do volume de uma pirâmide triangular	40
3.5.2 Cálculo do volume de uma pirâmide qualquer	41
3.6 Volume de um Cilindro	42
3.7 Volume de um Cone	43
3.8 Volume de uma Esfera	44

4 Atividades Desenvolvidas e Relatos	45
Considerações Finais	68
Anexos	70
Referências Bibliográficas	105

LISTA DE FIGURAS

1.1	Geogebra	19
2.1	Bonaventura Cavalieri	23
2.2	Pilha de folhas de papel para ilustrar o Princípio de Cavalieri	25
2.3	Princípio de Cavalieri	25
3.1	Quadrado de lado n	27
3.2	$n \times n$ cópias de um quadrado de lado m/n	28
3.3	Quadrados	29
3.4	Áreas de um quadrado e de um retângulo	30
3.5	Retângulo de lados m e n	30
3.6	Retângulo cujos lados medem m_1 e m_2	31
3.7	Retângulos	32
3.8	Paralelogramo \mathcal{P}	33
3.9	Triângulo \mathcal{T} e \mathcal{T}'	34
3.10	Trapézio ABCD	35
3.11	Cubo unitário	36
3.12	Paralelepípedo retângulo	36
3.13	Volume paralelepípedo retângulo	37
3.14	Aplicação do Princípio de Cavalieri	38
3.15	Duas pirâmides de mesma base ABC	39
3.16	Decomposição de um prisma triangular em três pirâmides de mesmo volume	40

3.17	Pirâmide qualquer dividida em pirâmides de base triangular.	41
3.18	Aplicação do Princípio de Cavalieri	42
3.19	Aplicação do Princípio de Cavalieri	43
3.20	Calculando o volume de uma esfera	44
4.1	Primeira questão	46
4.2	Segunda questão.	46
4.3	Terceira questão.	46
4.4	Quarta questão	47
4.5	Vídeo sobre sólidos geométricos.	49
4.6	Sólidos geométricos no GeoGebra.	49
4.7	Site oficial do GeoGebra	49
4.8	Áreas figuras planas	50
4.9	Explicação sobre o cubo usando o GeoGebra.	50
4.10	Sólidos geométricos no GeoGebra.	50
4.11	Resolução do exercício no GeoGebra	51
4.12	Vídeo sobre pirâmide	51
4.13	Exercício.	52
4.14	Exercício.	52
4.15	Cilindro no GeoGebra	52
4.16	Cone no GeoGebra	52
4.17	Ideia de volume	53
4.18	Relação do volume da pirâmide x prisma.	53
4.19	Relação do volume da pirâmide x prisma.	53
4.20	Relação do volume da pirâmide x prisma.	53
4.21	Relação do volume da pirâmide x prisma.	53
4.22	Relação entre o volume do cone e do cilindro	54
4.23	Princípio de Cavalieri.	54
4.24	Aplicação do Princípio de Cavalieri com o cone e a pirâmide.	54
4.25	Relação do volume do cilindro x cone.	54
4.26	Demonstração do volume da esfera usando o Princípio de Cavalieri.	54
4.27	Questão 158 do Enem 2012 (Foto: Reprodução/Enem)	55
4.28	Resolução no GeoGebra	56

4.29	Enem 2009 - Questão 173 - caderno azul	57
4.30	Enem 2009 - Questão 173 - caderno azul - resolução GeoGebra	58
4.31	Enem 2009 - Questão 173 - caderno azul - resolução GeoGebra	58
4.32	Primeira questão	61
4.33	Segunda questão	61
4.34	Terceira questão	62
4.35	Quarta questão	62
4.36	Quinta questão	63
4.37	Sexta questão	64
4.38	Sétima questão	65
4.39	Oitava questão	66
4.40	Nona questão	66
4.41	Décima questão	67
4.42	Entes geométricos	70
4.43	Reta	71
4.44	Segmento de reta e semirreta	71
4.45	Figuras geométricas planas	72
4.46	Figuras geométricas espaciais	72
4.47	Pontos colineares	73
4.48	Pontos não-colineares	73
4.49	Regiões angulares no plano	73
4.50	Classificação dos ângulos	74
4.51	Triângulo ABC	74
4.52	Classificação dos triângulos quanto aos lados	75
4.53	Classificação dos triângulos quanto aos ângulos	75
4.54	Triângulos ABC e $A'B'C'$ congruentes	76
4.55	Triângulos congruentes pelo caso LAL	76
4.56	Triângulos congruentes pelo caso ALA	77
4.57	Triângulos congruentes pelo caso LLL	78
4.58	Triângulos congruentes pelo caso LAA_O	78
4.59	Triângulos semelhantes pelo caso LLL	80
4.60	Triângulos semelhantes pelo caso LAL	81
4.61	Triângulos semelhantes pelo caso AA	81

4.62	Teorema de Pitágoras	82
4.63	Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$	83
4.64	Exemplo de polígonos regulares	83
4.65	Circunferência	84
4.66	Circunferências circunscrita	84
4.67	Circunferências inscrita	84
4.68	Círculo	85
4.69	Círculos concêntricos C e C_1	85
4.70	Área do círculo	86
4.71	Coroa circular	86
4.72	Poliedros	87
4.73	Prisma de bases $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$	87
4.74	Classificação dos prismas quanto ao polígono da base	88
4.75	Prisma regular de bases $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$	88
4.76	Secção reta do prisma	89
4.77	Paralelepípedo reto	89
4.78	Cubo	90
4.79	Pirâmide de base $A_1A_2\dots A_n$ e vértice V	91
4.80	Nomenclatura de algumas pirâmides	91
4.81	Pirâmide reta e pirâmide oblíqua.	92
4.82	Elementos das pirâmides regulares	92
4.83	O cilindro de revolução de eixo e e raio R	93
4.84	Cilindro	94
4.85	Cilindro reto e oblíquo	95
4.86	Cilindro equilátero	95
4.87	O cone de revolução de eixo e , vértice V e abertura 2θ	96
4.88	Secção meridiana do cone	97
4.89	A esfera de centro O e raio R	99

É notória na nossa prática pedagógica a dificuldade dos alunos no que tange à exploração da Geometria. Em particular na Geometria Espacial. Talvez um dos motivos dessa dificuldade pode estar relacionado à forma de como é ministrada a disciplina nas escolas. Na maioria das vezes, as fórmulas matemáticas são impostas aos alunos sem esclarecimentos adicionais. O ensino-aprendizagem da Matemática pode assumir dinamicidade com atividades que envolvam recursos tecnológicos e permitam aos alunos desenvolverem seu próprio percurso construindo uma visão mais completa do assunto abordado. Diante disso, o foco desta pesquisa foi a inserção das tecnologias no estudo do volume dos sólidos geométricos (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera) atrelada ao Princípio de Cavalieri.

Sobre o uso das mídias nas aulas de Matemática "é preciso que a chegada de uma mídia qualitativamente diferente, como a informática, contribua para modificar as práticas do ensino tradicional vigentes" (BORBA, 2001). Pensando nisso, resolvemos realizar oficinas de estudo com discentes do 3º ano do Ensino Médio, utilizando computadores do laboratório de informática do Colégio Estadual Francisco da Conceição Menezes (Santo Antonio de Jesus-BA) com o software educacional, GeoGebra, como ferramenta facilitadora no estudo dos sólidos geométricos.

O software educacional GeoGebra foi escolhido por ser gratuito, com interface fácil de manipulação, interação e visualização. E mais, por ser um software de Geometria Dinâmica, o mesmo constitui uma ferramenta poderosa para superar obstáculos próprios da aprendizagem, uma vez que este programa possibilita experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, argumentar e deduzir propriedades matemáticas, segundo Gravina (1996). Dessa forma, é

possível verificar as propriedades válidas para o estudo de volumes.

Para Giraldo (2012) no ambiente de Geometria Dinâmica o processo de representar um objeto aumenta a condição de refletir as propriedades e suas relações matemáticas.

Segundo Abrantes (1999, p.60):

quando construímos e manipulamos objetos geométricos no computador é mais fácil investigarmos e fazermos conjecturas. As ferramentas computacionais de Geometria Dinâmica geram uma nova forma de ensinar e aprender Geometria propiciando construir e manipular objetos geométricos no intuito de descobrir suas propriedades .

“As novas tecnologias têm um grande potencial para trazer mudanças significativas à educação” (SALGADO, 2008). No entanto, para acontecer essas mudanças, faz-se necessário que o processo ensino-aprendizagem seja repensado e para tal, é de suma importância que o professor mediador faça o *link* adequado do que será trabalhado com as tecnologias computacionais. Queremos resgatar “a prática de uma disciplina propiciadora do desenvolvimento da capacidade lógica, do raciocínio e do hábito de trabalho claro para a solução de problemas” (VITTI, 1996).

Este trabalho apresenta estratégias que buscam concretizar a ideia de volume, diversas vezes não entendidas e compreendidas pelos alunos. Tal fato deve-se à ausência de aplicações concretas na condução do conteúdo. Acreditamos que atividades desenvolvidas com a utilização do software GeoGebra, essa questão seja amenizada.

O trabalho foi estruturado em quatro partes. No primeiro capítulo fazemos uma breve explanação sobre o software GeoGebra. O capítulo 2 trata das notas históricas de Bonaventura Cavalieri e o enunciado do Princípio de Cavalieri. No terceiro capítulo apresentaremos os principais conceitos e resultados sobre Áreas e Volumes. No último capítulo descrevemos as atividades desenvolvidas no laboratório de informática envolvendo o cálculo dos volumes com a aplicação do Princípio de Cavalieri no GeoGebra e relatamos as experiências vivenciadas com os estudantes ao longo das oficinas.

CAPÍTULO 1

O SOFTWARE GEOGEBRA

NESTE capítulo faremos uma breve explicação sobre o software GeoGebra. Especificamente no nosso trabalho usamos este programa para dar um enfoque na Geometria Plana calculando áreas e na Geometria Espacial, fazendo planificações dos sólidos geométricos, calculando volumes, aplicando o Princípio de Cavalieri e fazendo demonstrações.

1.1 O que é o GeoGebra?

GeoGebra é um software educacional de matemática dinâmica que engloba Álgebra, Cálculo e Geometria. Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg juntamente com uma equipe internacional de programadores desenvolveram este programa no intuito de facilitar a aprendizagem matemática nas instituições educacionais de acordo com Hohenwarter(2009).

O GeoGebra é escrito na linguagem *Java*, pode ser usado nas plataformas *Microsoft Windows*®, *Linux*, *Macintosh*® e tem acesso livre. Possibilita a abordagem de inúmeros conteúdos pertinentes ao currículo de Matemática tanto do Ensino Básico quanto do Ensino Superior.

Podemos fazer o *download* deste software no site <https://www.geogebra.org/> e encontrar materiais construídos no GeoGebra dos mais diversos assuntos de Matemática nos sites <https://tube.geogebra.org/> e <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>.

1.2 Funções básicas

Segundo Hohenwarter (2009), este software permite a construção de maneira simplificada de pontos, figuras, segmentos, retas, vetores, cônicas, além de gráficos de funções dinamicamente modificáveis com o *mouse*.

Conforme Hohenwarter (2009, p.6)

O GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica ou numérica, e a Folha de Cálculo. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (ex. pontos, gráficos de funções), algebricamente (ex. coordenadas de pontos, equações) e nas células das folhas de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

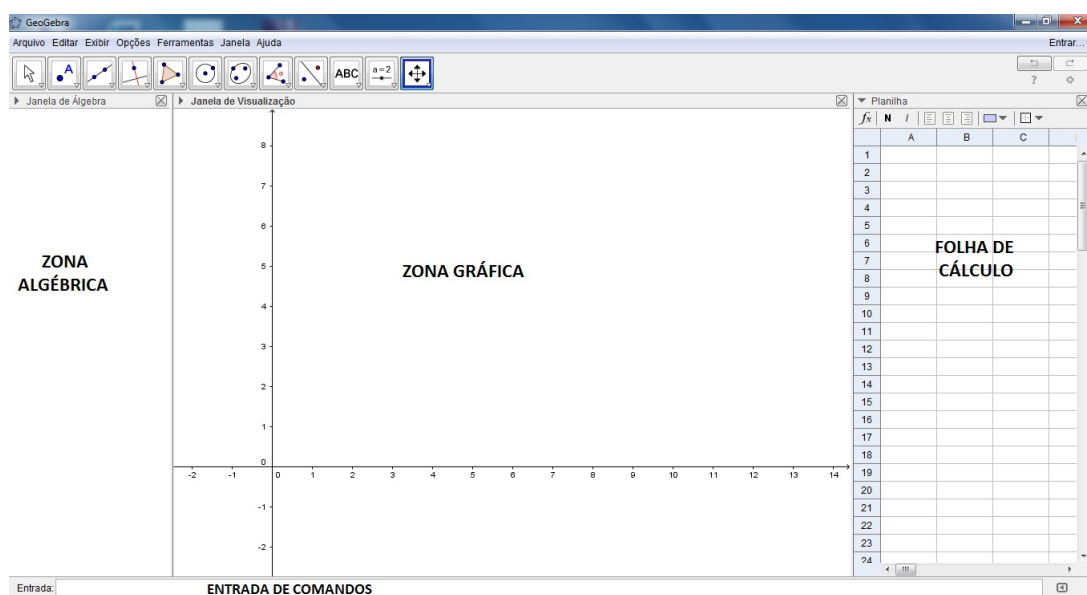


Figura 1.1: Geogebra

O leitor poderá encontrar mais informações acerca do software em Hohenwarter (2007), Hohenwarter (2009), Sá (2010) e Santos (2009).

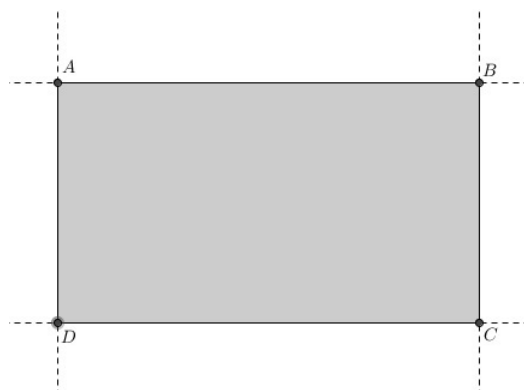
1.3 Exemplos









Vamos expor três atividades com GeoGebra propostas por Bezerra (2011), as quais proporcionam ao leitor uma ideia da potencialidade do software.

1.3.1 Atividade 1

Construção de um retângulo

Construir um retângulo conforme os procedimentos listados abaixo. Verificar se a construção está correta movimentando os vértices para certificar se as propriedades foram preservadas.

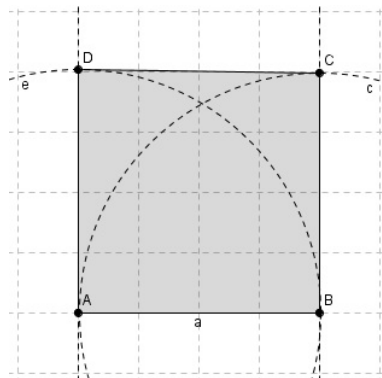


Ferramentas	Procedimentos para construção
	Selecione dois pontos A e B e construa um segmento de reta AB.
	Construa uma reta perpendicular ao segmento AB passando por B
	Obtenha um novo ponto C na reta perpendicular
	Construa uma reta paralela ao segmento AB passando por C
	Construa uma nova reta perpendicular ao segmento AB passando por A
	Marque o ponto de interseção D
	Obtenha o polígono ABCD (Dica: feche o polígono clicando no primeiro vértice novamente)
	Salve a construção.

1.3.2 Atividade 2

Construção de um quadrado

Construir um quadrado considerando as propriedades inerentes a esta figura.

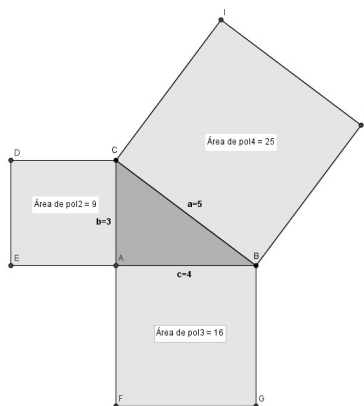









Ferramentas	Procedimentos para construção
	Segmento de reta entre dois pontos
	Círculo com centro em um ponto
	Reta perpendicular
	Ponto de interseção entre dois objetos
	Polígono ABCD (Dica: feche o polígono clicando primeiro vértice novamente)
	Mostra/ocultar objeto (opcional)
	Mover
	Salve a construção

1.3.3 Atividade 3

Teorema de Pitágoras

Os procedimentos abaixo permitem a construção de uma atividade que facilita a compreensão de uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras.



Ferramentas	Procedimentos para construção
	Selecione dois pontos A e B e construa uma reta AB.
	Construa uma reta perpendicular ao segmento AB passando por A
	Obtenha um novo ponto C na reta perpendicular
	Clique na ferramenta, nas duas retas e posteriormente, aperte a tecla ESC para que as duas retas desapareçam.
	Obtenha o triângulo ABC (Dica: feche o polígono clicando no primeiro vértice novamente)
	Com a ferramenta crie os três quadrados clicando, de cada vez em AC, BA e CB.
ABC	Inserir um texto dinâmico com o valor da área dos quadrado. Clique que uma nova janela aparecerá. Digite: $a^2 = (+ a +)^2 = + (a^2)$ para o caso do lado a. Fazer o mesmo com b e c.
	Salve a construção.

CAPÍTULO 2

PRINCÍPIO DE CAVALIERI

NESTE capítulo iremos abordar brevemente fatos históricos sobre Bonaventura Cavalieri e seu Princípio.

2.1 Notas Históricas



Fonte: <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Cavalieri.html>

Acessado em 04/05/2015.

Figura 2.1: Bonaventura Cavalieri

O matemático Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) nasceu em Milão e aos quinze anos de idade tornou-se jesuado.

Bonaventura Cavalieri foi aluno de Galileu ¹ e anos depois, na Universidade de Bolonha,

¹Conforme Boyer (2001), Galileu Galilei (1564-1642) foi matemático, físico, astrônomo e filósofo. Fundamentou cientificamente a Teoria Heliocêntrica de Copérnico. Inventou a luneta telescópica, idealizou o primeiro relógio e

atuou como professor de Matemática (1629-1647). Sua obra foi ampla no que tange à Matemática, Óptica e Astronomia. Foi um dos principais responsáveis pela introdução dos logaritmos na Europa, o que o tornou um matemático influente.

A obra de maior destaque que deu uma grande contribuição à Matemática foi o tratado *Geometria indivisibilibus*, sua versão inicial foi publicada em 1635 de acordo com Eves (2004). Ele apresenta neste trabalho seu *método dos indivisíveis* cujas raízes remontam a Demócrito² e Arquimedes³, entretanto acreditamos que seu maior incentivo tenha sido as experiências de Kepler⁴ encontrar determinadas áreas e certos volumes.

Por faltar clareza e ser muito longo o tratado de Cavalieri dificulta o entendimento do que ele entendia como "indivisível". Eves (2004, p. 425) relata que

tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma seção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de seções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das seções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original.

Podemos exemplificar com a formação de uma pilha vertical de folhas de papel e depois deformando suas laterais transformando-as em superfícies curvas. Observamos que o volume não modifica com essa deformação. Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem o chamado *Princípio de Cavalieri*.

enunciou as leis que regem o movimento pendular.

²Demócrito de Abdera (460-370 a. C.) é célebre hoje como proponente de uma doutrina materialista atômica, mas em seu tempo adquiriu também reputação como geômetra, conforme Boyer (2001).

³Arquimedes de Siracusa (287-212 a. C.) é considerado pai da Física Matemática, segundo Boyer (2001).

⁴Johannes Kepler (1571-1630) astrônomo, matemático e astrólogo alemão, de acordo com Boyer (2001).

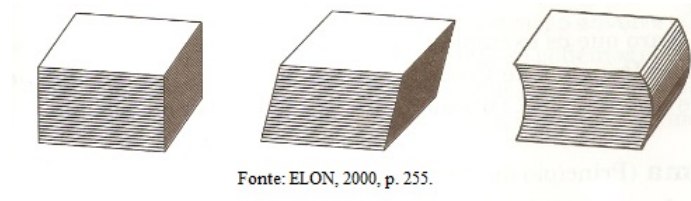


Figura 2.2: Pilha de folhas de papel para ilustrar o Princípio de Cavalieri

2.2 Princípio

O *Princípio de Cavalieri*, segundo Lima (2006), diz que **dados dois sólidos \mathcal{A} e \mathcal{B} e um plano α_0 , se todo plano α paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área S e S' , então esses sólidos têm mesmo volume.**

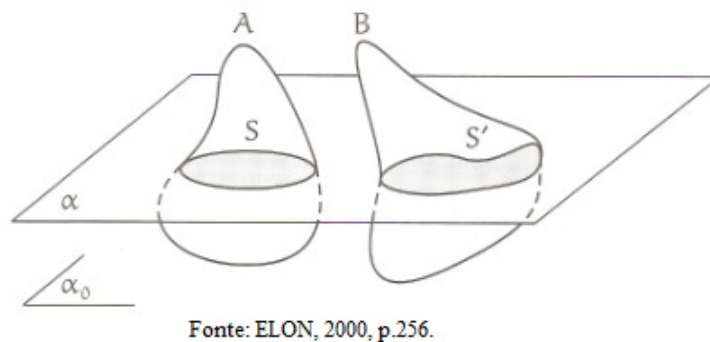


Figura 2.3: Princípio de Cavalieri

O Princípio de Cavalieri é de grande valia para o cálculo de áreas e volumes e, também, suas bases intuitivas podem tornar-se rigorosa com o Cálculo Integral Moderno. Intuitivamente, podemos solucionar diversos problemas de mensuração que geralmente exigiriam técnicas avançadas de Cálculo. Detalhes adicionais acerca do assunto podem ser encontrados em Boyer (2001), Eves (2004), Lima (2006) e Lima (1991).

CAPÍTULO 3

CONCEITOS BÁSICOS

NESTE capítulo apresentaremos os principais conceitos e resultados sobre Áreas e Volumens, os quais consideramos necessários para uma melhor compreensão do que se segue. Trazemos no anexo A deste trabalho uma compilação das principais definições e dos fatos relevantes que auxiliam, especificamente, o entendimento deste capítulo.

Para esta parte do texto, utilizamos como referências Dolce (1993a), Lima (1991), Lima (2006), Muniz Neto (2012) e Muniz Neto (2013).

3.1 Áreas

As demonstrações das áreas das figuras planas foram referenciadas em Muniz Neto (2013) e Barbosa (2001).

Muniz Neto (2013) diz que a *área* de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado e que se torna útil para polígonos quando as propriedades a seguir são válidas:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se um polígono convexo é *particionado* em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, os

quais não tem pontos interiores comuns), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. A área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2 .

Sendo válidas as propriedades 1. a 4. acima, particionamos um quadrado de lado $n \in \mathbb{N}$ em n^2 quadrados de lados 1 cada. Denotando a área do quadrado maior por A_n , devemos ter A_n igual a soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1, de forma que

$$A_n = n^2$$

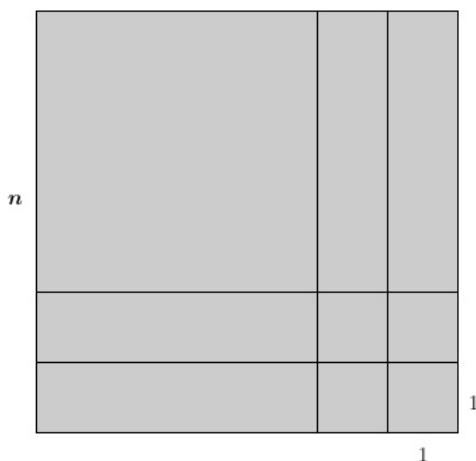


Figura 3.1: Quadrado de lado n

Iremos considerar, agora, um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, ou seja, com tamanho do lado racional e área $A_{\frac{m}{n}}$. Arranjando n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando, assim, um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$. Sendo que esse quadrado maior terá, como já sabemos, área m^2 ; por outro lado, como ele está particionado em n^2 quadrados de lado $\frac{m}{n}$ cada, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, ou seja,

$$m^2 = n^2 \cdot A_{\frac{m}{n}}.$$

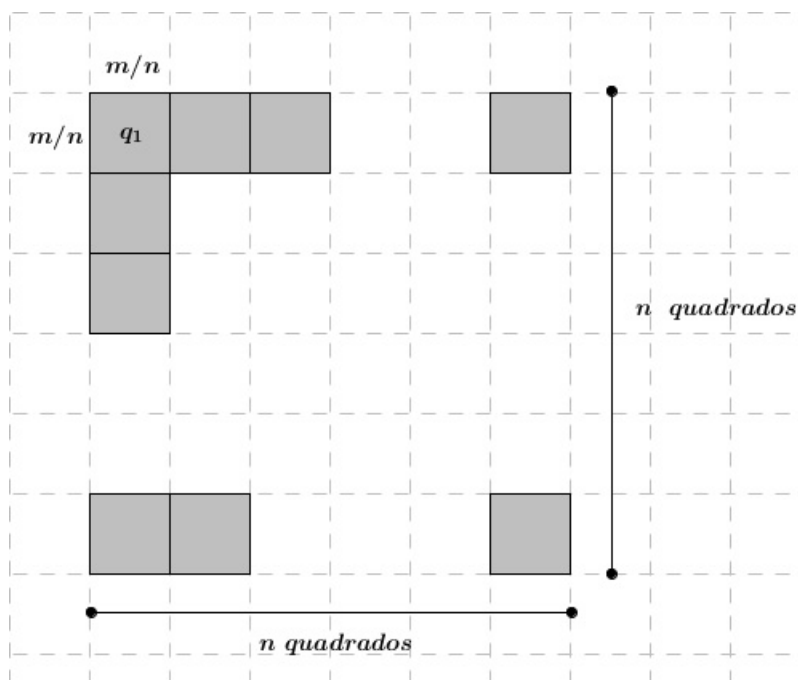


Figura 3.2: $n \times n$ cópias de um quadrado de lado m/n

Logo,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

A discussão acima sugere que a área de um quadrado de lado l deve ser igual a l^2 . Para ratificar tal suposição, argumentamos que para $k \in \mathbb{N}$, tomamos números racionais x_k e y_k tais que

$$x_k < l < y_k \quad \text{e} \quad y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

É importante ressaltar que a existência destes números está garantida pelo fato de que o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , ou seja, entre dois números reais existe sempre um número racional. Sendo assim, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais.

A seguir, construímos quadrados Q_x e Q_y de lados x_k e y_k , respectivamente, o primeiro contido no quadrado dado e o segundo o contendo.

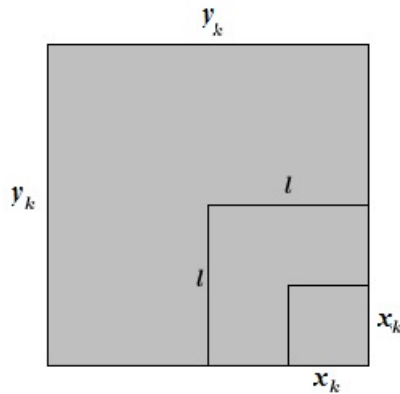


Figura 3.3: Quadrados

Uma vez que já temos o conhecimento de como calcular áreas de quadrados de lado racional, pela propriedade 3 podemos garantir que a área A_l do quadrado de lado l deve satisfazer a desigualdade

$$x_k^2 < A_l < y_k^2.$$

Mas como $x_k^2 < l^2 < y_k^2$, podemos concluir que ambos os números A_l e l^2 devem pertencer ao intervalo (x_k^2, y_k^2) , de forma que

$$\begin{aligned} |A_l - l^2| &< y_k^2 - x_k^2 = (y_k - x_k)(y_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k} (y_k - x_k + 2x_k) \\ &< \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 2l \right). \end{aligned}$$

Sendo assim, como $k \in \mathbb{N}$, quando $k \rightarrow +\infty$, temos que $\frac{1}{k} \rightarrow 0$.

Além disso, $\left(\frac{1}{k} + 2l\right) \rightarrow 2l$ também quando $k \rightarrow +\infty$, o que torna a expressão $\left(\frac{1}{k} + 2l\right)$ limitada. Assim, o produto $\frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} + 2l\right) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$. Portanto,

$$A_l = l^2.$$

Segue o seguinte resultado em função da discussão acima:

Proposição 3.1. *Seja Q um quadrado de lado l . A área de Q , que denotamos por $A(Q)$, é l^2 .*

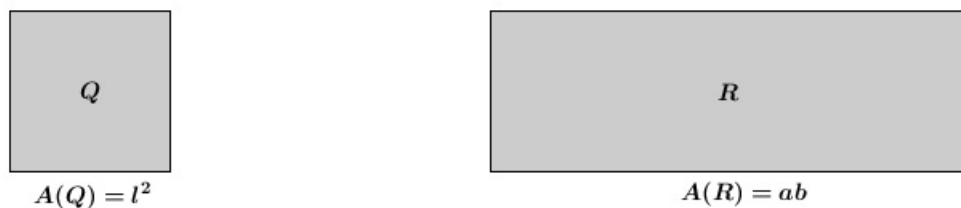


Figura 3.4: Áreas de um quadrado e de um retângulo

Iremos utilizar um argumento análogo ao que fizemos anteriormente para provar que o retângulo da figura 3.4 de lados $a, b \in \mathbb{N}$ tem área igual a ab . Começamos com um retângulo de lados $m, n \in \mathbb{N}$ (figura 3.5), particionando-o em mn quadrados de lado 1 para mostrar que sua área é mn .

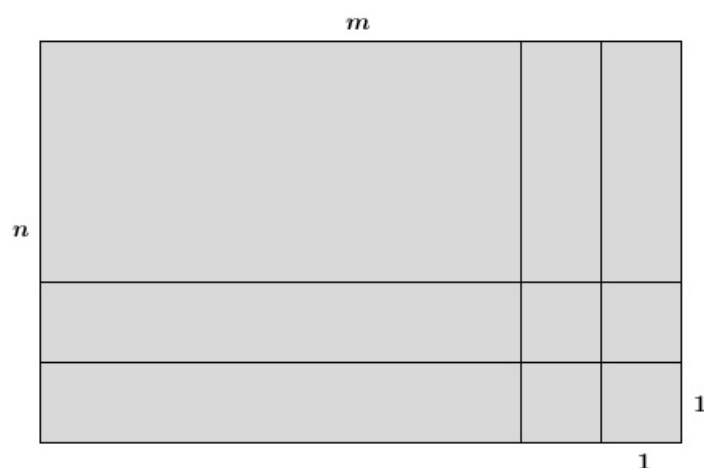


Figura 3.5: Retângulo de lados m e n

Em seguida, tomamos um retângulo de lados racionais cujas medidas são $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, e, com $n_1 n_2$ cópias do mesmo, montamos um retângulo maior de lados m_1 e m_2 . Somando áreas iguais, concluimos que a área do retângulo dado inicialmente é igual a

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}.$$

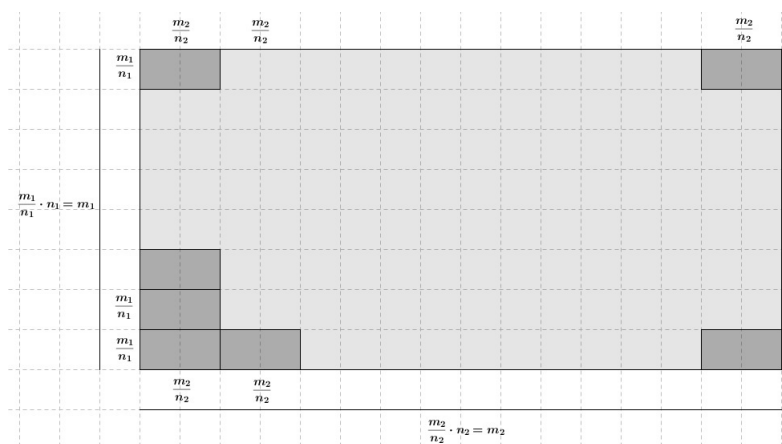


Figura 3.6: Retângulo cujos lados medem m_1 e m_2

Finalmente, tomemos um retângulo de lados $a, b > 0$ reais, e, para $k \in \mathbb{N}$, consideremos racionais x_k, y_k, u_k, v_k tais que

$$x_k < a < y_k, u_k < b < v_k \text{ e } y_k - x_k, v_k - u_k < \frac{1}{k}.$$

Seja \mathcal{R} a área do retângulo de lados a e b , um argumento análogo ao que foi feito para quadrados garante que \mathcal{R} e ab pertencem ambos ao intervalo $(u_k x_k, y_k v_k)$ e, daí, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |A - ab| &< v_k y_k - u_k x_k = (v_k - u_k) y_k + u_k (y_k - x_k) \\ &< \frac{1}{k} (y_k + u_k) < \frac{1}{k} ((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k) \\ &< \frac{1}{k} \left(\frac{2}{k} + 2a + 2b \right). \end{aligned}$$

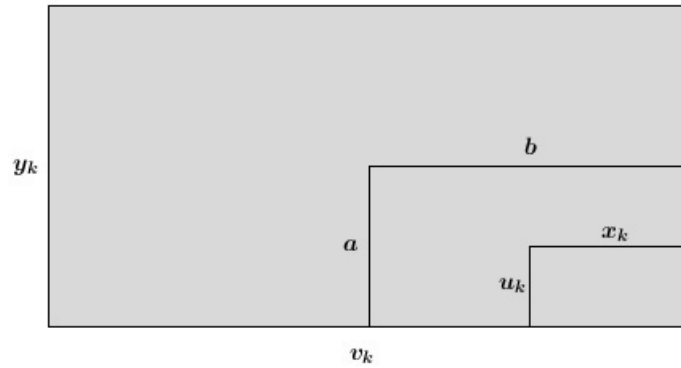


Figura 3.7: Retângulos

Daí, como $k \in \mathbb{N}$, quando $k \rightarrow +\infty$, temos que $\frac{1}{k} \rightarrow 0$. Desse modo, $\frac{2}{k} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$.

Além disso, $\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right) \rightarrow 2a + 2b$ também quando $k \rightarrow +\infty$, o que torna a expressão $\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right)$ limitada. Portanto, o produto $\frac{1}{k} \left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$.
Logo,

$$A = ab.$$

Em síntese, temos o resultado a seguir:

Proposição 3.2. *Seja \mathcal{R} um retângulo de lados a e b . A área de \mathcal{R} , que denotamos por $A(\mathcal{R})$, é ab .*

Baseando-se nas propriedades anteriormente relacionadas, vamos demonstrar a área de algumas regiões poligonais simples. Iniciaremos pelo paralelogramo.

Proposição 3.3. *Seja \mathcal{P} um paralelogramo. A área de \mathcal{P} , que denotamos por $A(\mathcal{P})$ é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

Consideremos o paralelogramo \mathcal{P} de vértices A , B , C e D , conforme a figura 3.8 para a demonstração da proposição, na qual $\overline{AB} = b$ e h denota a altura relativa ao lado $\overline{AB} = \overline{CD}$.

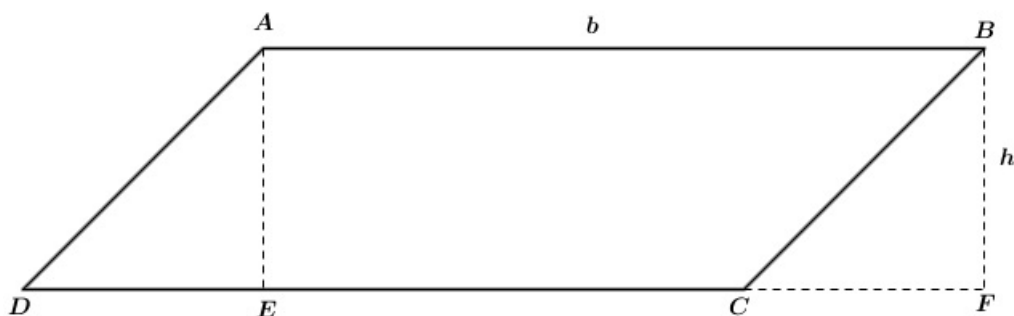


Figura 3.8: Paralelogramo \mathcal{P}

Demonstração: Conforme a notação adotada acima, devemos provar que a área do paralelogramo $A(\mathcal{P})$ é $b \cdot h$. Para isto, traçamos, a partir dos pontos A e B , dois segmentos, \overline{AE} e \overline{BF} , perpendiculares à reta que contém \overline{CD} . O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$, a qual, em termos de nossa notação, é exatamente $b \cdot h$. Para concluir a demonstração, observe que os triângulos ADE e CBF são congruentes pelo caso de congruência de triângulos retângulos, pois $\hat{E} \equiv \hat{F} = 90^\circ$ (por construção), $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ (por hipótese) e $\overline{AE} \equiv \overline{BF}$ (segmentos paralelos determinados entre retas paralelas).

Assim,

$$A(\mathcal{P}) = (ABCE) + (ADE) = (ABCE) + (CBF) = (ABFE) = b \cdot h \blacksquare$$

O resultado a seguir nos mostra a maneira como determinamos a área de um triângulo.

Proposição 3.4. *Seja \mathcal{T} um triângulo. A área de \mathcal{T} , que denotamos por $A(\mathcal{T})$ é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Demonstração: Dado um triângulo \mathcal{T} de vértices A , B e C , traçamos pelo vértice C , uma reta paralela ao lado AB , e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC . Estas duas retas se interceptam em um ponto D . O polígono $ABDC$ é um paralelogramo, e os dois triângulos \mathcal{T} e \mathcal{T}' (vértices C , D e B) são congruentes pelo caso (LAL) . Pela propriedade 1, segue que tais triângulos têm áreas iguais (figura 3.9).

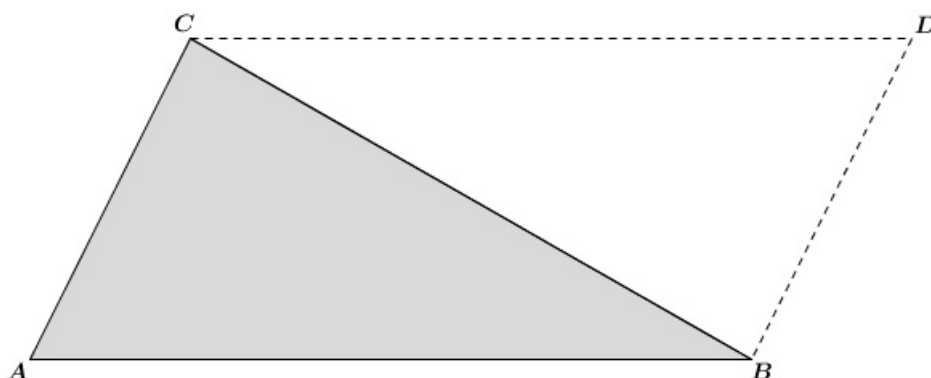


Figura 3.9: Triângulo \mathcal{T} e \mathcal{T}'

Como $(ABDC) = (ABC) + (CDB)$ e $(ABC) = (CDB)$, então: $(ABC) = \frac{1}{2} (ABDC)$. Para completar a demonstração, observe que a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativamente ao lado AB ■

As demonstrações serão finalizadas com o resultado que nos mostrará como podemos determinar a área de um trapézio.

Proposição 3.5. *A área de um trapézio é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um trapézio, cujas bases são os lados \overline{AB} e \overline{CD} . Trace a diagonal \overline{AC} para dividir o trapézio em dois triângulos.

Trace as alturas \overline{CE} , do triângulo ACB , e \overline{AF} , do triângulo ACD . Então, teremos que $\overline{AF} = \overline{CE}$, uma vez que os lados AB e CD são paralelos.

Assim, temos que

$$(ABCD) = (ACB) + (ACD) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2} \overline{DC} \cdot \overline{AF} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{CE} \blacksquare$$

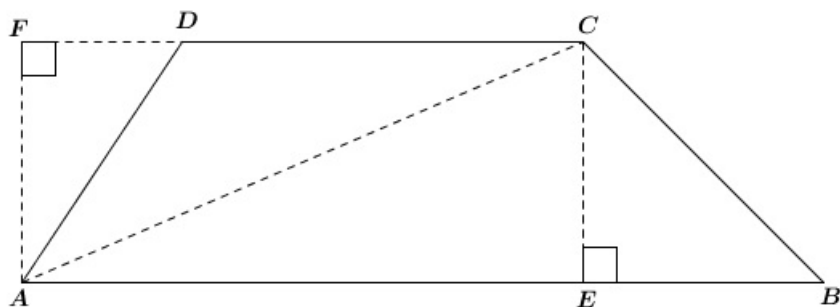


Figura 3.10: Trapézio ABCD

3.2 Volumes

3.2.1 Noção Intuitiva de Volume

Para Lima (1991) de forma intuitiva considera-se o volume de um sólido como a quantidade de espaço por ele ocupada. Para medirmos a grandeza "volume" devemos compará-la com uma unidade e o resultado dessa comparação será um número e esse número será a medida do volume.

É de costume estabelecer como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário. Assim, todo cubo que tenha aresta medindo 1, seu volume será igual a 1 por definição.

Dessa forma, o volume de um sólido S deverá ser um número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Como o sólido S pode ter uma forma bastante irregular, não é claro o que significa o "número de vezes" em que S contém o cubo unitário. Novamente, temos aqui uma ideia intuitiva, que devemos usar como guia e à qual devemos atribuir um

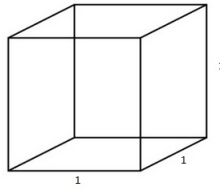


Figura 3.11: Cubo unitário

significado preciso.

3.3 Volume do paralelepípedo retângulo

Esse poliedro é determinado com exatidão por três medidas (comprimento (a), largura (b) e altura (c)).

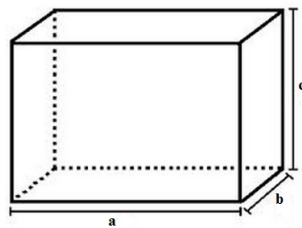


Figura 3.12: Paralelepípedo retângulo

Iremos representar o volume desse paralelepípedo retângulo por $V(a, b, c)$ e o volume do cubo unitário por $V(1, 1, 1) = 1$.

Há uma proporcionalidade no volume do paralelepípedo retângulo em relação a cada uma das suas dimensões, quer dizer que, se mantivermos constantes duas das dimensões e multiplicarmos a terceira dimensão por um número natural qualquer, o volume também será multiplicado pelo mesmo número natural. Isso pode ser observado no exemplo abaixo:

$$V(a, b, 3c) = V(a, 3b, c) = V(3a, b, c) = 3V(a, b, c)$$

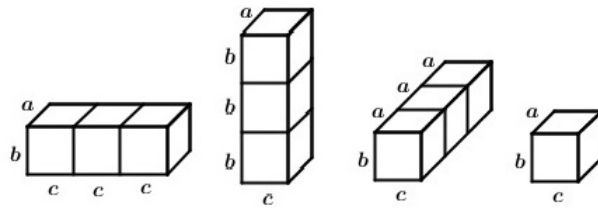


Figura 3.13: Volume paralelepípedo retângulo

Esse fato vale para qualquer número real positivo, isto é, se mantivermos constantes duas dimensões do paralelepípedo retângulo, seu volume será proporcional a terceira dimensão. Desta forma, temos:

$$V(a, b, c) = a.V(1, b, c) = ab.V(1, 1, c) = abc.(1, 1, 1) = abc.1 = abc.$$

Assim,

$$V(a, b, c) = abc.$$

Logo, o volume do bloco retangular é determinado pelo produto das suas dimensões.

3.4 Volume de um Prisma

Vamos considerar um paralelepípedo reto retângulo S_1 e um prisma S_2 que tenham a mesma altura h e com bases (A) equivalentes (mesma área), apoiados num plano β e situados num mesmo semiespaço.

Proposição 3.6. *O volume de um prisma é o dado pelo produto entre a área da base a sua altura.*

Demonstração. Considere A_{S_1} e A_{S_2} a área da base dos sólidos S_1 e S_2 como definimos acima, respectivamente.

Como qualquer secção transversal de cada prisma possui a mesma área que a base desse prisma e as áreas das bases (A) são iguais, temos que qualquer plano α paralelo a β que intercepte os dois prismas determina secções transversais de mesma área: $A_{S_1} = A_{S_2}$.

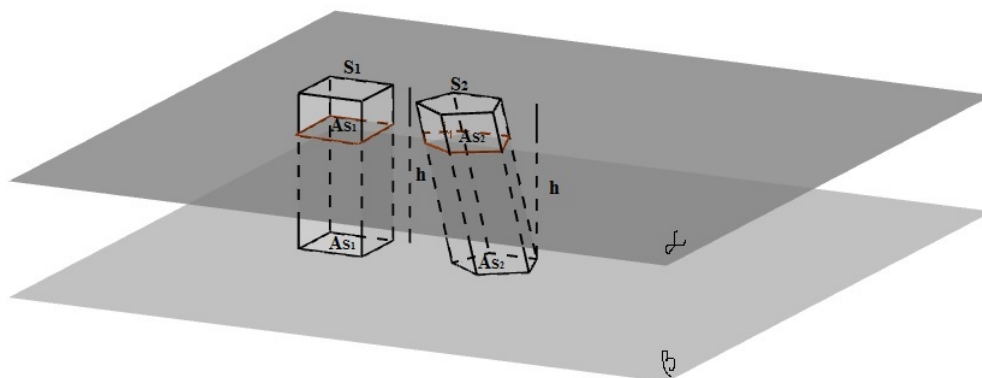


Figura 3.14: Aplicação do Princípio de Cavalieri

Desta forma, pelo Princípio de Cavalieri, os dois prismas têm volumes (V) iguais, ou seja, $V_1 = V_2$, sendo V_1 o volume do prisma S_1 e V_2 o volume do prisma S_2 .

Como S_1 é um paralelepípedo reto retângulo, seu volume pode ser calculado da seguinte maneira:

$$V_1 = A_{S_1} \times h.$$

Como as áreas das bases de S_1 e de S_2 são iguais e $V_1 = V_2$, temos:

$$V_2 = A_{S_2} \times h.$$

Assim, o volume de um prisma qualquer é calculado assim:

$$V_{prisma} = A \times h.$$

3.5 Volume de uma Pirâmide

Proposição 3.7. *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.*

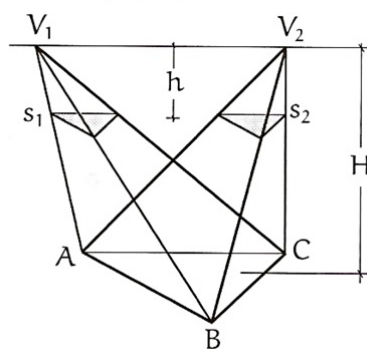
Demonstração.

A figura 3.15 apresenta duas pirâmides de mesma base ABC , vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H . Um plano paralelo ao plano (ABC) e distando h dos vértices das pirâmides, produziu seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2 , respectivamente. Sabemos que a razão entre as áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice. Desta forma,

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A},$$

donde concluímos que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm o mesmo volume.



Fonte: ELON, 2006, p. 260.

Figura 3.15: Duas pirâmides de mesma base ABC

3.5.1 Cálculo do volume de uma pirâmide triangular

Proposição 3.8. *O volume da pirâmide triangular é igual a um terço do volume do prisma.*

Demonstração. Decompondo um prisma triangular em três pirâmides, temos:

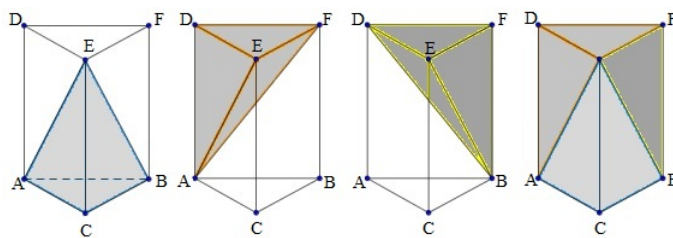


Figura 3.16: Decomposição de um prisma triangular em três pirâmides de mesmo volume

Considerando V_{pir} , o volume da pirâmide, podemos observar na figura 3.16 que:

✓ As pirâmides $EACB$ e $ADEF$ possuem bases congruentes e mesma altura. Os triângulos ABC e DEF são congruentes, pois são as bases do prisma original e a distância de E ao plano ABC é a mesma que a distância de A ao plano DEF - altura do plano original. Então, as pirâmides $EACB$ e $ADEF$ têm o mesmo volume (V).

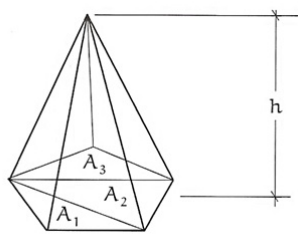
✓ As pirâmides $ADEF$ e $BDEF$ têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo DEF é comum às duas pirâmides e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de A ao plano DEF que é a mesma de B a esse mesmo plano - altura do plano original. Assim, $V_{EACB} = V_{ADEF} = V_{BDEF} = V_{pir}$, temos que:

$$V_{prisma} = 3V_{pir} \Rightarrow V_{pir} = \frac{V_{prisma}}{3}$$

3.5.2 Cálculo do volume de uma pirâmide qualquer

Proposição 3.9. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Com efeito, observemos que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular (figura 3.17). Essa divisão é feita particionando a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.



Fonte: ELON, 2006, p. 263.

Figura 3.17: Pirâmide qualquer dividida em pirâmides de base triangular.

Suponhamos agora que a pirâmide tenha altura h e que sua base, de área A , tenha sido dividida em n triângulos de áreas

$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$V = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \dots + \frac{1}{3}A_nh$$

$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)h$$

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

como afirmamos. Fica estabelecido que:

$$V_{pir} = \frac{1}{3}A_b h.$$

3.6 Volume de um Cilindro

Para determinar o volume do cilindro (V_{ci}), iremos utilizar novamente o Princípio de Cavalieri, uma vez que em todo cilindro, a seção paralela à base é congruente a essa base.

Proposição 3.10. *O volume do cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura.*

Demonstração. Vamos supor um cilindro com altura h e base de área A_b contida em um plano horizontal α . Consideremos um prisma qualquer (por exemplo, um paralelepípedo retângulo) no mesmo plano e que tem a área da base igual à área da base do cilindro e altura igual à do cilindro. Consideremos um outro plano horizontal β paralelo seccionando os dois sólidos teremos figuras de áreas $A_1 = Prisma \cap \beta$ e $A_2 = Ci \cap \beta$, logo $A_1 = A_b = A_2$ para qualquer plano horizontal. Então, pelo Princípio de Cavalieri temos que,

$$V_{ci} = V_{prisma}.$$

Como já vimos que o volume do paralelepípedo retângulo é obtido pela multiplicação da área da base (A_b) pela altura (h), então segue que

$$V_{ci} = V_{prisma} = A_b \cdot h.$$

Dessa forma os dois sólidos têm o mesmo volume.

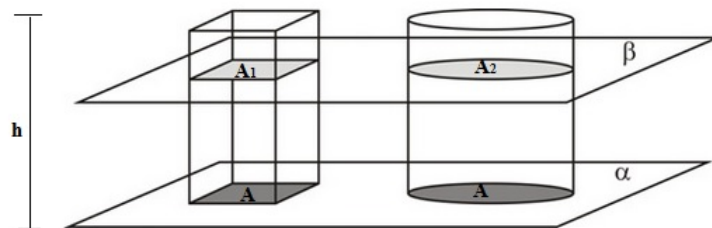


Figura 3.18: Aplicação do Princípio de Cavalieri

3.7 Volume de um Cone

Proposição 3.11. *O volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Consideramos um cone de altura h e base de área B contida em um plano horizontal β . Iremos considerar também uma pirâmide de altura h e base de área B que está contida em β . Consideremos um plano horizontal α com distância d dos vértices secciona os dois sólidos, determinando regiões planas de áreas B_1 e B_2 , temos:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{d^2}{h^2} \text{ e } \frac{B_2}{B} = \frac{d^2}{h^2} \Rightarrow \frac{B_2}{B} = \frac{B_1}{B} \Rightarrow B_1 = B_2.$$

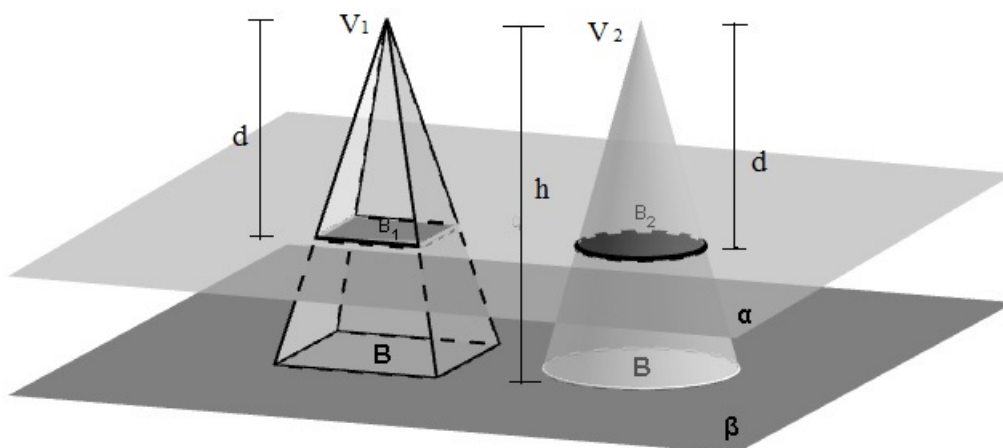


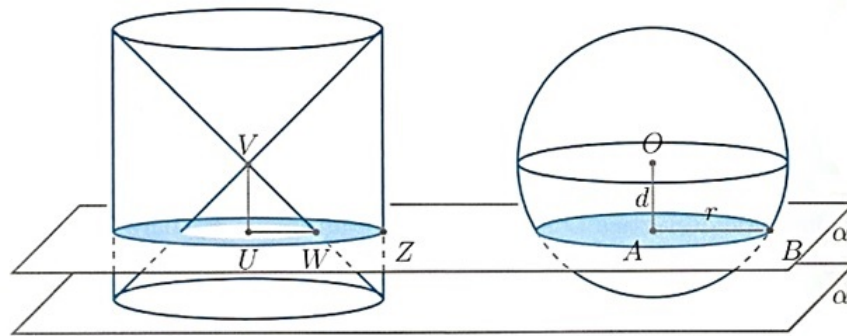
Figura 3.19: Aplicação do Princípio de Cavalieri

Temos, pelo Princípio de Cavalieri, que o cone e a pirâmide possuem o mesmo volume. Logo,

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

3.8 Volume de uma Esfera

Proposição 3.12. *O volume de uma bola fechada de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$.*



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 406.

Figura 3.20: Calculando o volume de uma esfera

Demonstração. Seja C um cilindro sólido de altura $2R$, tendo por bases dois círculos de raio R (figura 3.20, à esquerda).

Inscrevamos em C dois cones sólidos, ambos com altura R e tendo por bases as bases do cilindro; então, o vértice dos cones coincide com o centro do quadrado. Por fim seja S o sólido formado pela porção do cilindro exterior à união dos cones.

Sejam α o plano de uma das bases do cilindro e $\bar{B} = \bar{B}(O; R)$ uma bola fechada de centro O e raio R , tangente a α e situada, em relação a α , no mesmo semiespaço que C (figura 3.20, à direita).

Sejam α' um plano paralelo a α , contido no mesmo semiespaço, em relação a α , que S e \bar{B} , e situado à distância d do ponto O , com $d < R$. Como C tem altura igual ao diâmetro de \bar{B} , segue que α' intersecta S se, e só se, intersecta \bar{B} . Sendo esse o caso, temos que α' secciona S segundo uma coroa circular de raios $\overline{UW} = d$ e $\overline{UZ} = R$, enquanto secciona \bar{B} em um disco de centro A e raio $\overline{AB} = \sqrt{R^2 - d^2}$. Logo, as áreas de tais seções são sempre iguais, de forma que, pelo princípio de Cavalieri, S e \bar{B} têm volumes iguais.

Por fim, como o volume S é a diferença entre os volumes do cilindro sólido C e da união dos dois cones de vértice V , temos

$$V(\bar{B}) = V(C) - 2V_{cone} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

CAPÍTULO 4

ATIVIDADES DESENVOLVIDAS E RELATOS

PARA a concretização deste trabalho foram realizadas seis oficinas com dez discentes do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Francisco da Conceição Menezes (Santo Antonio de Jesus-BA), visando proporcionar estratégias para uma melhor compreensão do cálculo do volume dos sólidos geométricos. Para tal foram utilizados vídeos, o software de geometria dinâmica GeoGebra e o Princípio de Cavalieri.

As oficinas aconteceram no período de 23/04 a 18/05/15 no laboratório de informática da Unidade Escolar supracitada no turno oposto ao que os alunos estudam. As mesmas tiveram a duração média de três horas cada.

Entendemos que tanto a quantidade pequena de estudantes como o curto período de tempo em que as oficinas foram aplicadas nos refletem uma situação razoavelmente pontual, mas não global. No entanto, estas condições adversas não foram empecilhos para que tivéssemos uma compreensão mais aprofundada deste grupo de trabalho.

Descreveremos a seguir a maneira como as oficinas foram organizadas.

Na primeira oficina fizemos um teste sondagem (vide Anexo B) com os discentes para observar seus conhecimentos a cerca do assunto que seria abordado. Obtivemos o seguinte resultado no teste de sondagem:

(01) A respeito de um sólido geométrico podemos afirmar que:

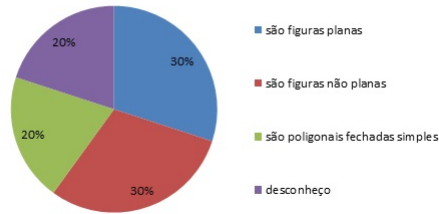


Figura 4.1: Primeira questão

(02) São elementos de um sólido geométrico:

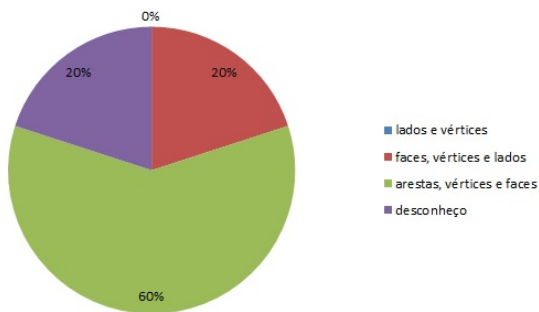


Figura 4.2: Segunda questão.

(03) São sólidos geométricos:

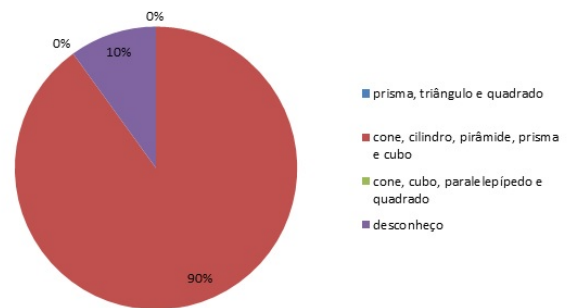


Figura 4.3: Terceira questão.

Em relação a esta questão:

✓100% dos alunos fizeram a associação corretamente no que diz respeito ao cone e a pirâmide;

✓80% relacionaram corretamente o cubo e

✓70% associaram corretamente a esfera e o cilindro.

(04) Considerando um reservatório de água que possui 5m de comprimento, 4m de largura e 2m de altura, ao multiplicarmos todas as suas dimensões, estamos na verdade calculando:

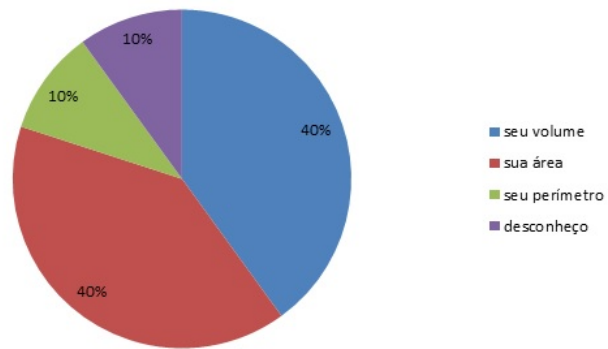
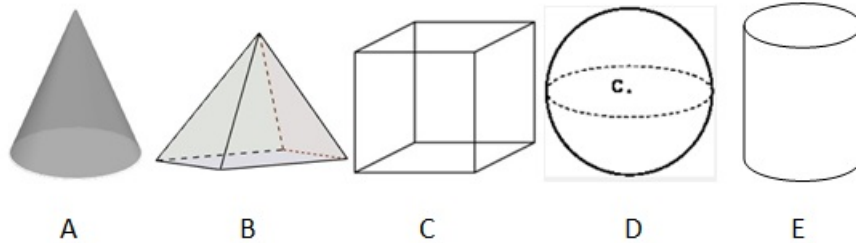


Figura 4.4: Quarta questão

05) Faça a associação corretamente:



- () Cilindro
- () Pirâmide
- () Cone
- () Cubo
- () Esfera

06)Elabore um pequeno texto sobre a ideia que você tem sobre sólidos geométricos, identificando suas características. Na oportunidade exemplifique através de uma situação do cotidiano a importância do conhecimento sobre eles.

Neste item apenas:

- ✓20 % definiram corretamente os sólidos geométricos;
- ✓30 % identificaram as suas características;
- ✓40 % exemplificaram adequadamente os sólidos geométricos com situações do cotidiano.

O teste de sondagem mostrou que 80% dos alunos demonstram dificuldades em saber o que é um sólido geométrico, 40% em identificar seus elementos, 10% em identificar quais figuras são sólidos geométricos, 60 % em calcular volume e a maioria mostrou embaraço em relacionar esses sólidos com objetos do cotidiano. Diante do exposto, planejamos as oficinas abordando os pontos principais de cada sólido atrelado ao uso do Geogebra com aplicação de exercícios com um menor grau de dificuldade nas primeiras oficinas e nas últimas, questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e de vestibulares que são exames almejados pelo público que estamos trabalhando. Para finalizar aplicamos novamente o teste de sondagem inicial para verificarmos se eles conseguiram absorver os conteúdos trabalhados.

Para iniciar, assistimos vídeos sobre o tema em questão e dialogamos sobre a geometria no nosso dia-a-dia (figura 4.5). Em seguida, fizemos uma explanação sobre o software GeoGebra, onde os alunos tiveram a oportunidade de acessar o site oficial [https : //www.geogebra.org/](https://www.geogebra.org/) e outro site que tem um banco de dados deste software [http : //geogebraTube.org/](http://geogebraTube.org/), o qual podemos fazer download dos arquivos existentes e compartilhar os que criamos. Mostramos, também, diversos sólidos construídos no programa, aproveitando para fazer diversas manipulações nos sólidos permitidas pelo programa (figuras 4.6 e 4.7).



Figura 4.5: Vídeo sobre sólidos geométricos.

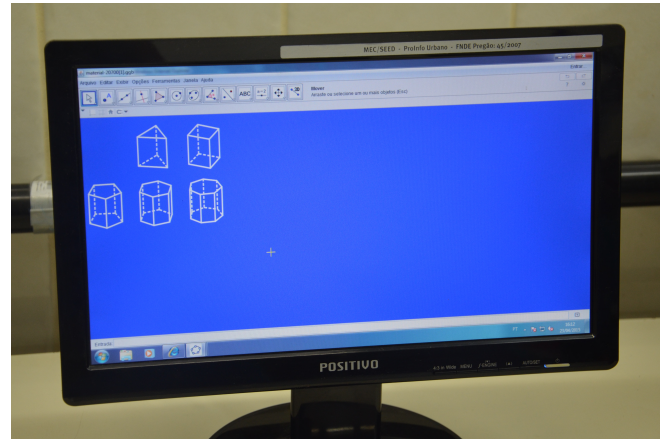


Figura 4.6: Sólidos geométricos no GeoGebra.



Figura 4.7: Site oficial do GeoGebra

Como há a necessidade de sabermos calcular as áreas das bases dos sólidos para determinar seu volume, então fizemos uma revisão das áreas das figuras planas. Propomos aos alunos atividades envolvendo áreas e eles utilizaram o GeoGebra para confirmarem seus resultados, como podemos observar a imagem 4.8.

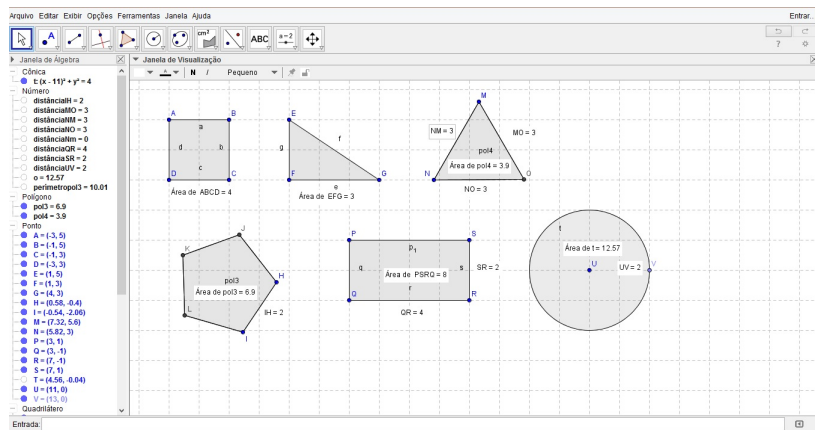


Figura 4.8: Áreas figuras planas

Na sequência, usamos o data show para assistirmos vídeos sobre prismas, no qual exploramos seus elementos, classificação, secções, áreas da base, lateral, total e volume (figura 4.9).

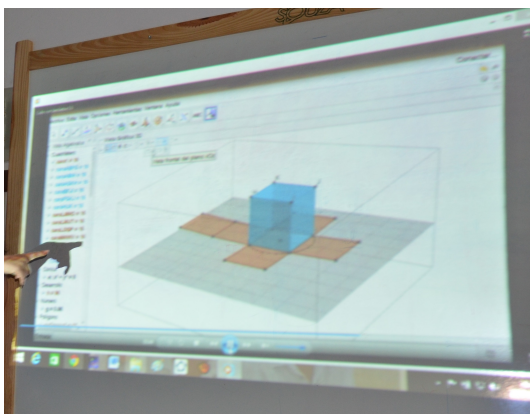


Figura 4.9: Explicação sobre o cubo usando o GeoGebra.

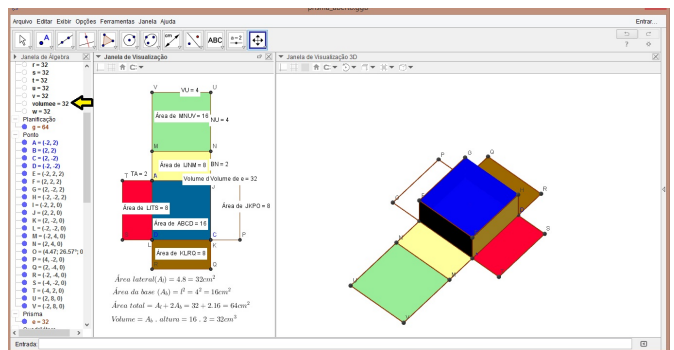


Figura 4.10: Sólidos geométricos no GeoGebra.

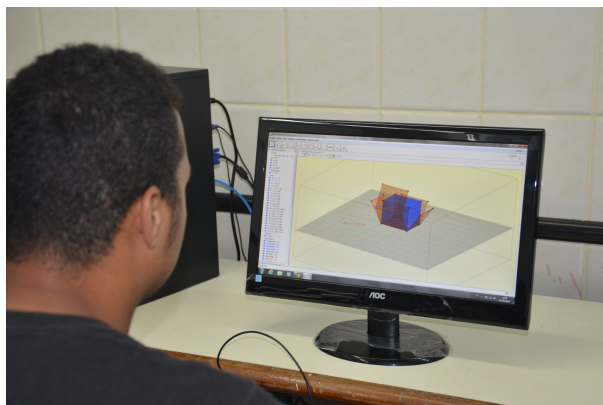


Figura 4.11: Resolução do exercício no GeoGebra

Os alunos também pesquisaram no <http://geogebraTube.org/> arquivos referentes ao assunto em questão e foram resolvidos exercícios, os quais os resultados foram verificados no GeoGebra como mostram as figuras 4.10 e 4.11.

Na 2ª e 3ª oficinas trabalhamos com a pirâmide abordando os elementos, a classificação, as pirâmides regulares e seus elementos e a área da sua superfície; o cilindro, cone e esfera com abordagem análoga. Seguimos a mesma dinâmica da primeira oficina com o uso do vídeo e a resolução de exercícios, como vemos nas figuras de 4.12 a 4.16.

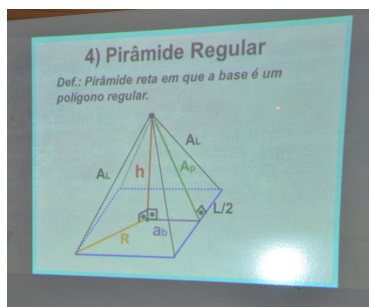


Figura 4.12: Vídeo sobre pirâmide

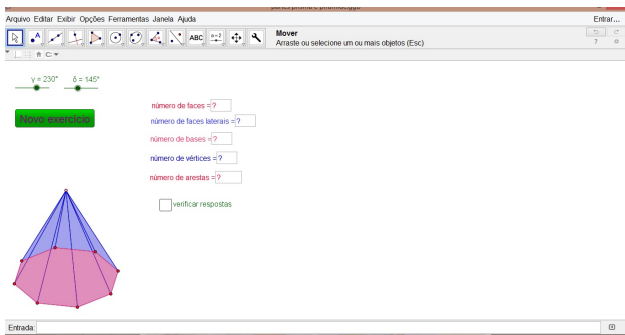


Figura 4.13: Exercício.

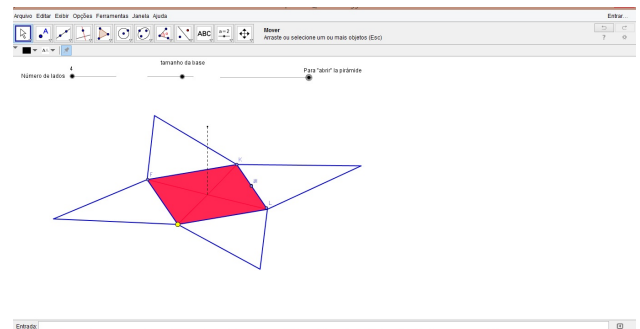


Figura 4.14: Exercício.

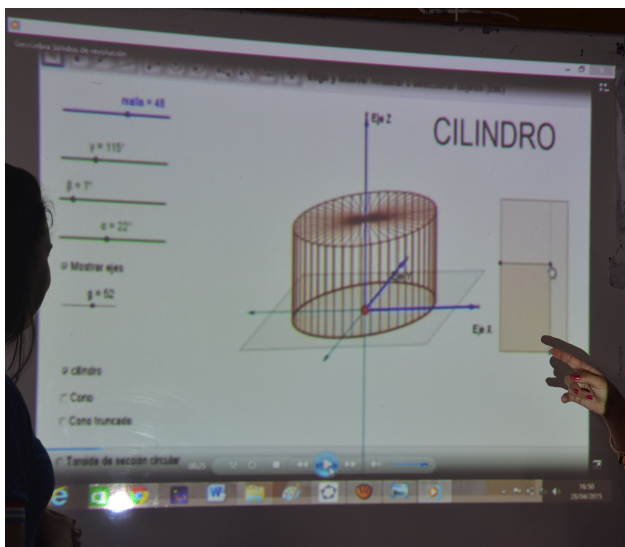


Figura 4.15: Cilindro no GeoGebra

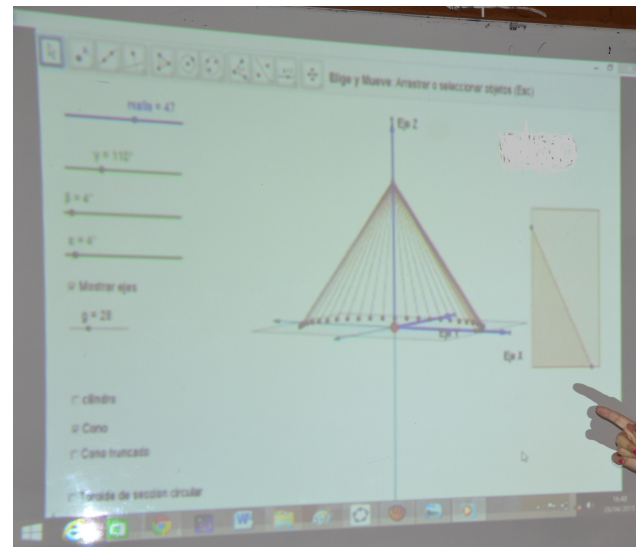


Figura 4.16: Cone no GeoGebra

Iniciamos a 4ª oficina mostrando a ideia de volume (4.17), a partir da ideia intuitiva do volume do cubo, generalizamos e obtivemos o volume do bloco retangular. Apresentamos o Princípio de Cavalieri e o aceitamos como verdadeiro. Segundo Lima (1991) a utilização deste Princípio "permite a simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume". A partir daí abordamos as fórmulas para os cálculos dos volumes dos principais sólidos geométricos (prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas), no intuito dos alunos compreenderem melhor, uma vez que em sua maioria são impostas aos alunos sem esclarecimentos.

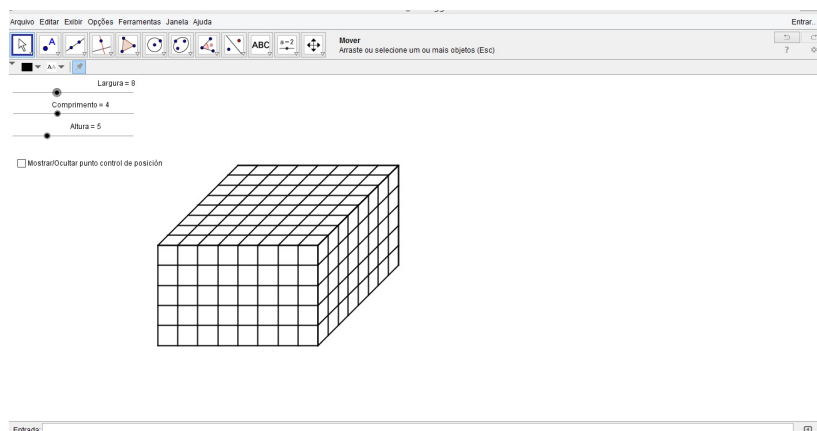


Figura 4.17: Ideia de volume

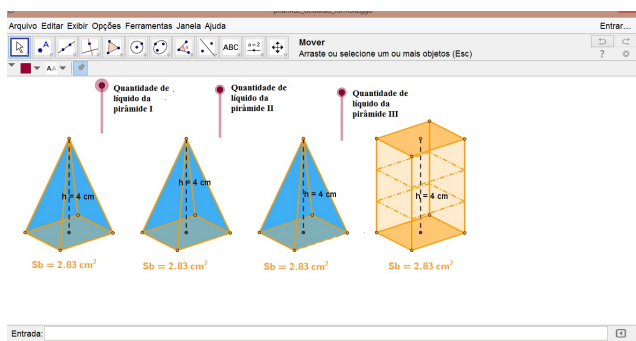


Figura 4.18: Relação do volume da pirâmide x prisma.

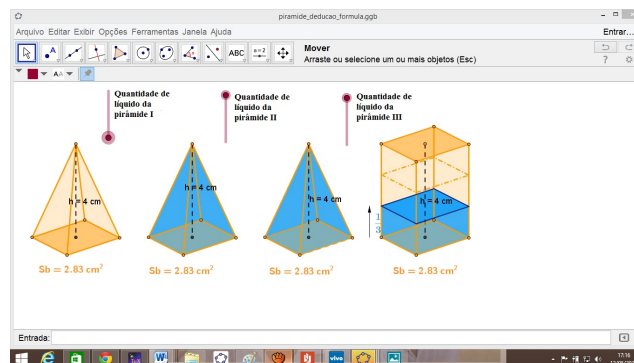


Figura 4.19: Relação do volume da pirâmide x prisma.

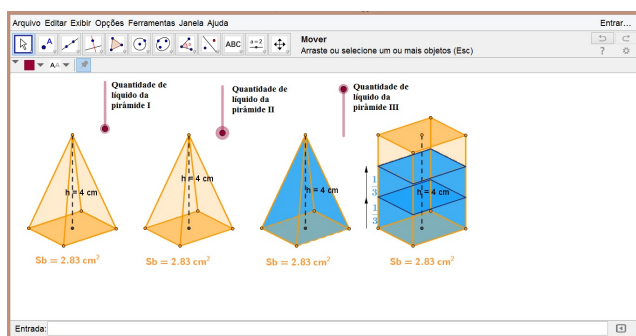


Figura 4.20: Relação do volume da pirâmide x prisma.

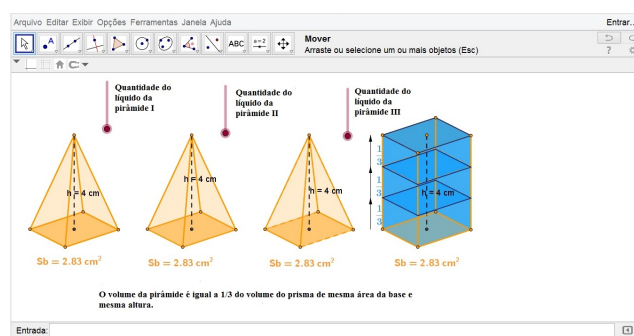


Figura 4.21: Relação do volume da pirâmide x prisma.

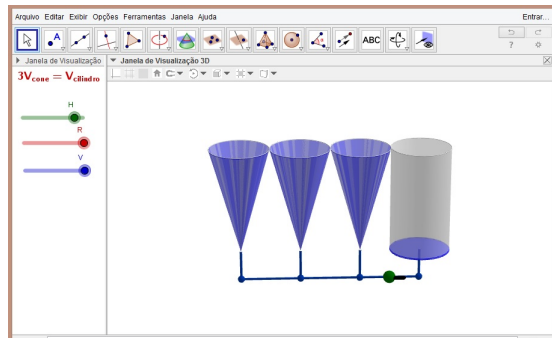


Figura 4.22: Relação entre o volume do cone e do cilindro



Figura 4.23: Princípio de Cavalieri.

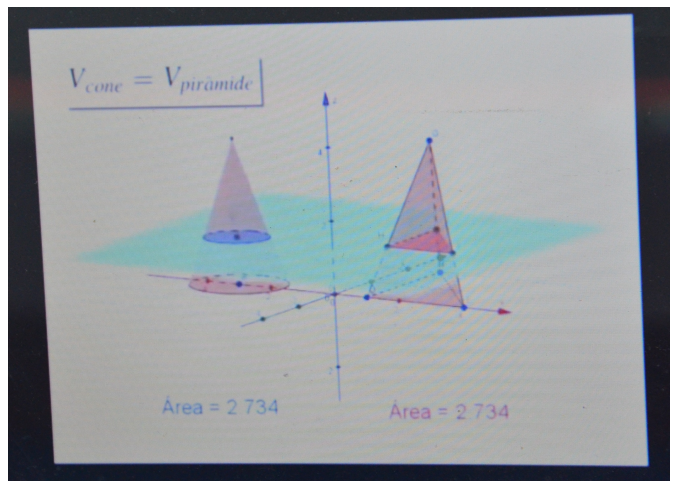


Figura 4.24: Aplicação do Princípio de Cavalieri com o cone e a pirâmide.

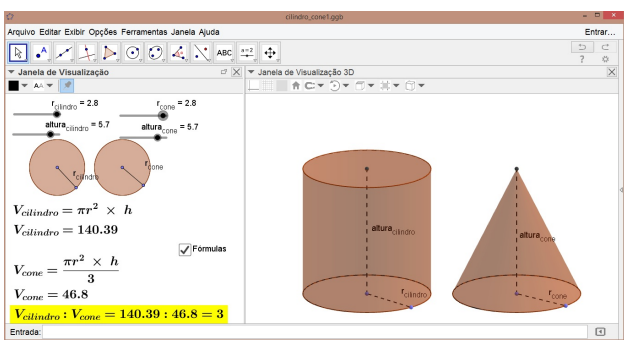


Figura 4.25: Relação do volume do cilindro x cone.

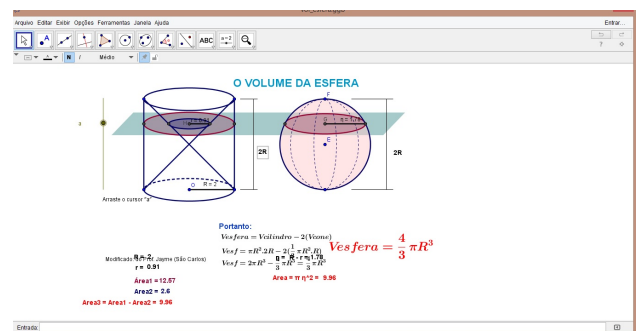


Figura 4.26: Demonstração do volume da esfera usando o Princípio de Cavalieri.

Os discentes resolveram questões do ENEM e de vestibulares na 5ª oficina, conferindo os resultados no GeoGebra. Tais questões são listadas a seguir.

Questão 1: (ENEM-2012) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.

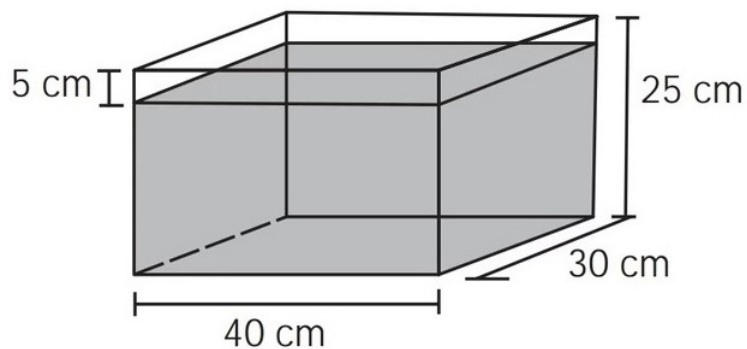


Figura 4.27: Questão 158 do Enem 2012 (Foto: Reprodução/Enem)

O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2400cm^3 ?

- a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
- b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
- c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
- d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
- e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

Resolução no GeoGebra

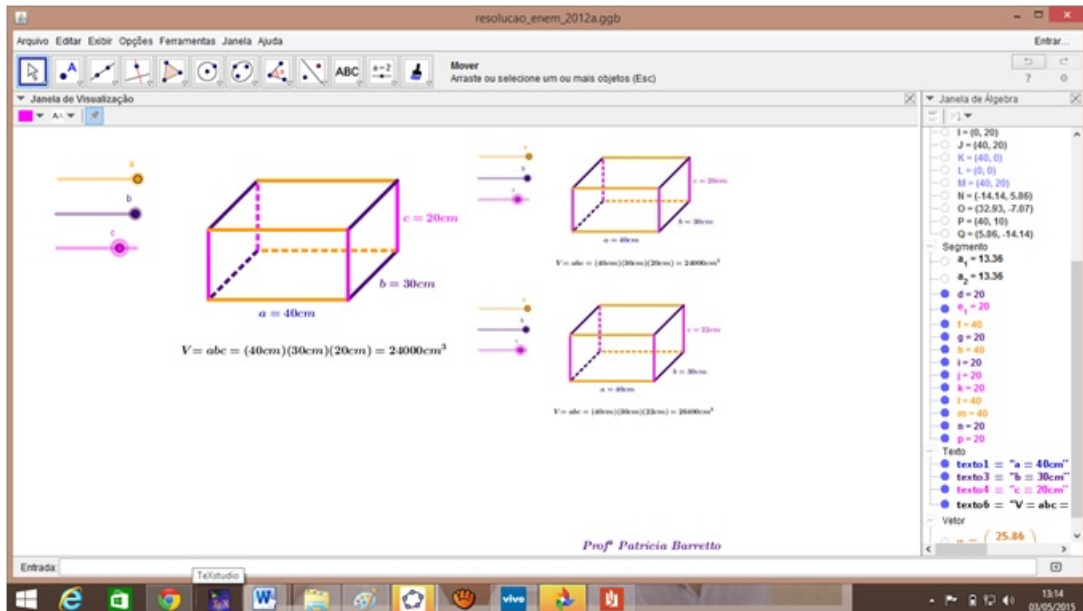


Figura 4.28: Resolução no GeoGebra

Questão 2: (ENEM - 2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura - 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior - espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?



Figura 4.29: Enem 2009 - Questão 173 - caderno azul

- a) 156cm^3 .
- b) 189cm^3 .
- c) 192cm^3 .
- d) 216cm^3 .
- e) 540cm^3 .

Resolução no GeoGebra

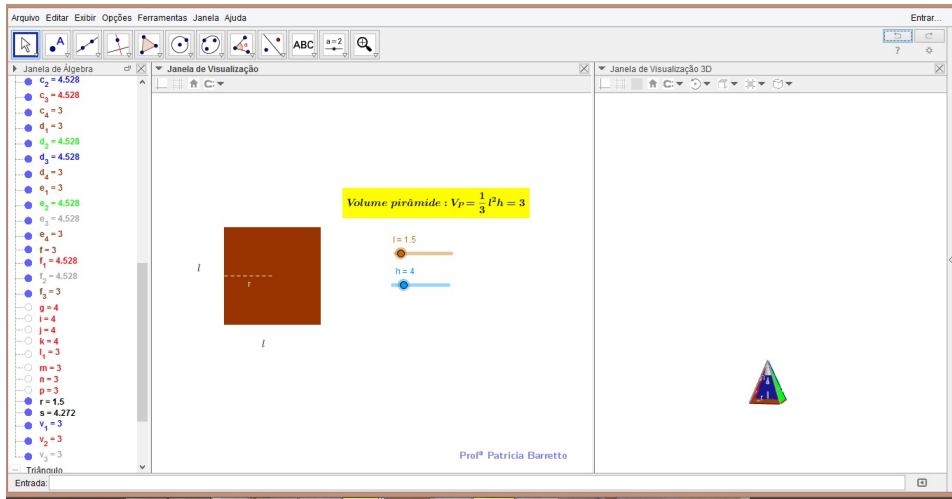


Figura 4.30: Enem 2009 - Questão 173 - caderno azul - resolução GeoGebra

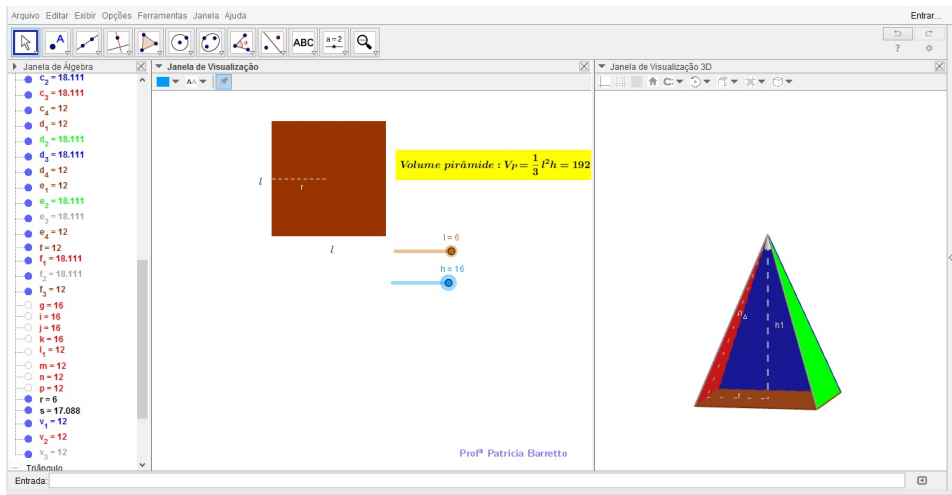
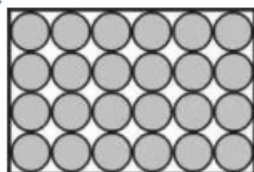


Figura 4.31: Enem 2009 - Questão 173 - caderno azul - resolução GeoGebra

Questão 3: (UTFPR) Uma lata de achocolatado em pó tem 10 cm de diâmetro e 10 cm de altura, e são embaladas em caixas de papelão, com quatro fileiras de seis latas, conforme a figura a seguir. A caixa comporta 2 latas na sua altura, tendo uma capacidade total para 48 latas.



Com base nos estudos de cilindros e paralelepípedos, afirma-se que: ($\pi=3,14$)

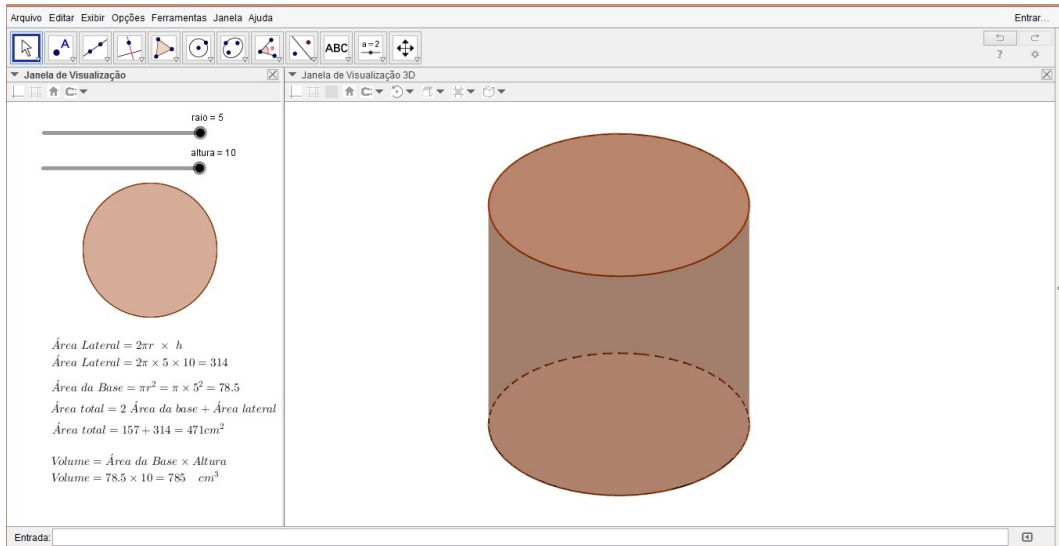
- I) o volume de cada lata é de 785cm^3 .
- II) a área total de cada lata é de 471cm^2 .
- III) o volume da caixa de papelão é de 24000cm^3 .

Analisando-se as afirmações acima, conclui-se que:

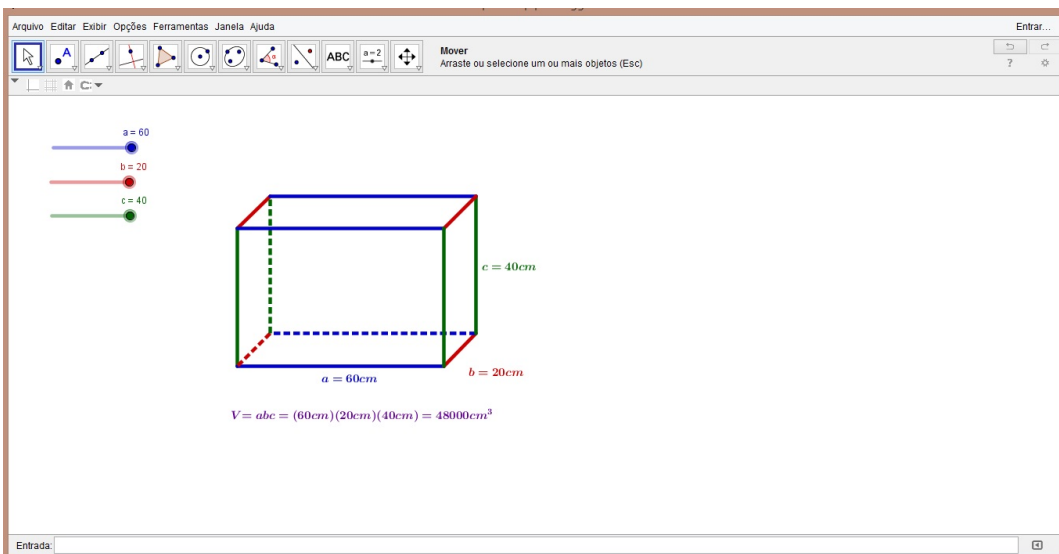
- a) I e II estão corretas.
- b) I e III estão corretas.
- c) II e III estão corretas.
- d) I, II e III estão corretas.
- e) I, II e III estão incorretas.

Resolução no GeoGebra

Análise dos itens I e II



Análise do item III



Aplicamos um teste de verificação na 6ª oficina (vide anexo C). As seis primeiras questões foram as mesmas do teste de sondagem e acrescentamos quatro exercícios relativos ao cálculo de volumes dos sólidos geométricos.

Veamos abaixo os resultados do teste de verificação. Nas questões iguais ao teste de sondagem, fizemos um gráfico comparativo da evolução dos discentes.

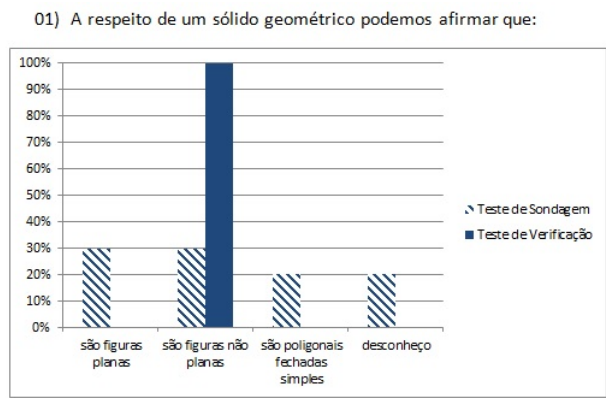


Figura 4.32: Primeira questão

Na primeira questão no teste de sondagem apenas 20% dos alunos responderam corretamente a questão, enquanto que no teste de verificação 100% acertaram.

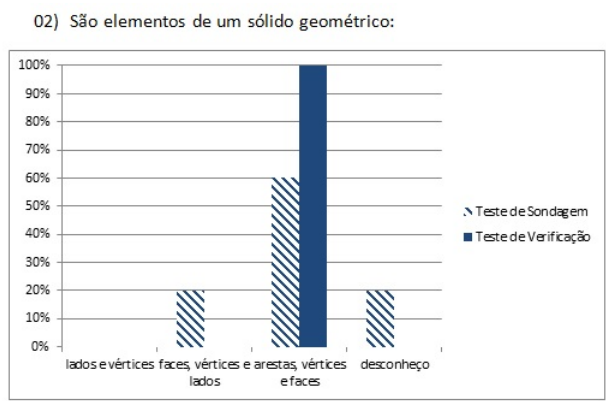


Figura 4.33: Segunda questão

Sessenta por cento dos discentes acertaram a segunda questão no teste de sondagem e cem por cento, no de verificação.

03) São sólidos geométricos:

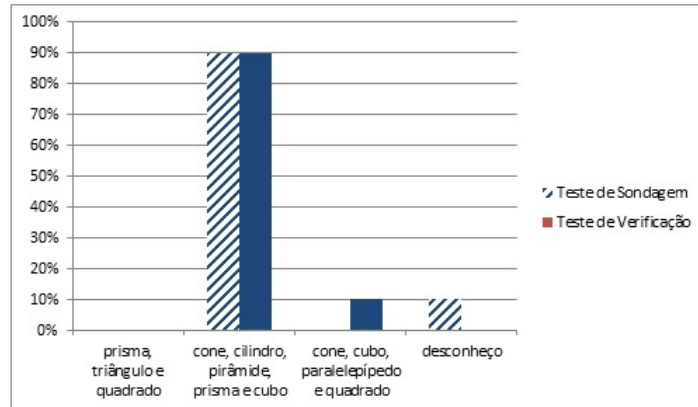


Figura 4.34: Terceira questão

Na terceira questão tanto no teste de sondagem quanto no de verificação 90% dos alunos acertaram.

04) Considerando um reservatório de água que possui 5m de comprimento, 4m de largura e 2m de altura, ao multiplicarmos todas as suas dimensões, estamos na verdade calculando:

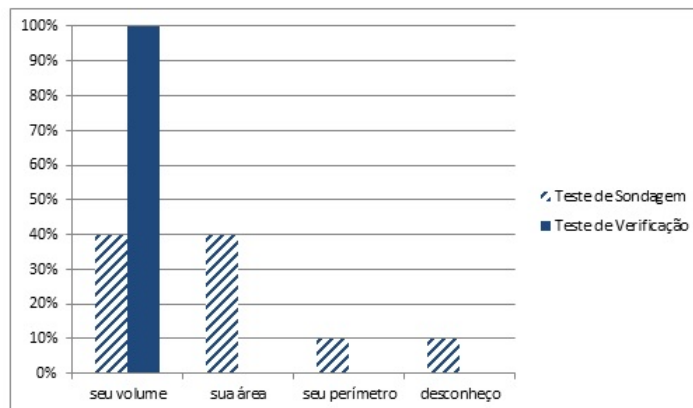
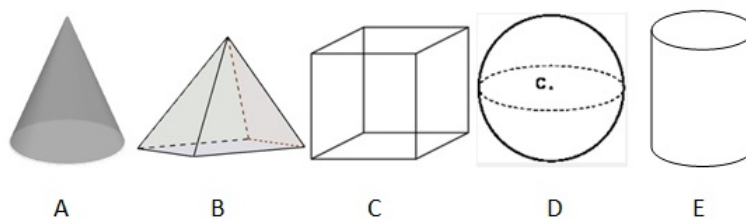


Figura 4.35: Quarta questão

Na quarta questão 40% responderam corretamente no teste de sondagem, já no teste de verificação 100% dos discentes acertaram.

05) Faça a associação corretamente:



- () Cilindro
- () Pirâmide
- () Cone
- () Cubo
- () Esfera

Figura 4.36: Quinta questão

Em relação a esta questão no teste de sondagem:

✓100% dos alunos fizeram a associação corretamente no que diz respeito ao cone e a pirâmide;

✓80% relacionaram corretamente o cubo e

✓70% associaram corretamente a esfera e o cilindro.

E no de verificação 100% dos alunos fizeram a associação corretamente.

06)Elabore um pequeno texto sobre a ideia que você tem sobre sólidos geométricos, identificando suas características. Na oportunidade exemplifique através de uma situação do cotidiano a importância do conhecimento sobre eles.

Figura 4.37: Sexta questão

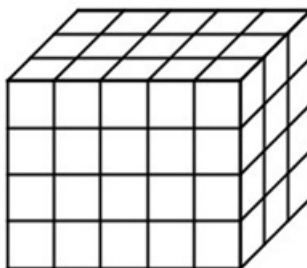
Neste item no teste de sondagem apenas:

- ✓20% definiram corretamente os sólidos geométricos;
- ✓30% identificaram as suas características;
- ✓40% exemplificaram adequadamente os sólidos geométricos com situações do cotidiano.

Enquanto que no de verificação,

- ✓80% definiram corretamente os sólidos geométricos;
- ✓70% identificaram as suas características;
- ✓100% exemplificaram adequadamente os sólidos geométricos com situações do cotidiano.

07)(UNESP) Quantos cubos **A** precisa-se empilhar para formar o



paralelepípedo **B**?

() 60

() 47

() 94

() 39

() 48

Figura 4.38: Sétima questão

Nesta questão 100% dos alunos calcularam corretamente quantos cubos eram necessários empilhar para formar o paralelepípedo.

08) (Unirio – RJ) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura a seguir.

Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3 , então o volume do cubo, em m^3 , é igual a:

() 9

() 12

() 15

() 18

() 21

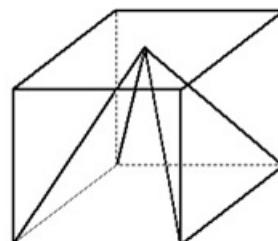


Figura 4.39: Oitava questão

Em relação a questão 8, 80% dos discentes calcularam o volume do cubo adequadamente.

09) (UEL-PR) Dois recipientes cilíndricos tem altura de 40 cm e raios da base medindo 10 cm e 5 cm. O maior deles contem água até $\frac{1}{5}$ de sua capacidade. Essa água é despejada no recipiente menor, alcançando a altura h de:

() 32 cm

() 24 cm

() 16 cm

() 12 cm

() 10 cm

Figura 4.40: Nona questão

Na questão 9, 70% calcularam corretamente a altura alcançada pela água no recipiente menor.

- 10) (UNESP) Um copinho de sorvete, em forma de cone, tem 10 cm de profundidade, 4 cm de diâmetro no topo e tem aí colocadas duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos afirmar que:
- () não transbordará.
 - () transbordará.
 - () os dados são insuficientes.
 - () os dados são incompatíveis.
 - () todas as afirmações anteriores são falsas.

Figura 4.41: Décima questão

E na questão 10, 70% acertaram a questão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

NESTE trabalho apresentamos uma proposta de estudo para os alunos do 3º ano do Ensino Médio com o intuito de oferecer um maior significado ao estudo do cálculo dos volumes dos sólidos geométricos. Para que isto ocorresse utilizamos o Princípio de Cavalieri atrelado ao GeoGebra.

Na análise realizada observamos que os participantes das oficinas propostas tinham conhecimento razoável sobre áreas, o qual é necessário para o cálculo dos volumes, e o mínimo de conhecimento sobre o volume dos sólidos geométricos. Quando mostramos o volume do cubo e do paralelepípedo a partir do preenchimento desses sólidos com os "cubinhos" menores, ou seja, as unidades de medida, entenderam como o volume é obtido.

A utilização das figuras espaciais construídas no GeoGebra foi primordial no desenvolvimento das fórmulas de volumes, uma vez que eles tiveram a oportunidade de posicionar o plano paralelo para seccionar e comparar os diversos sólidos geométricos, possibilitando, assim, deduzir que através do Princípio de Cavalieri podemos encontrar as fórmulas dos volumes do cilindro, cone e esfera fazendo uma comparação com o volume já visto do paralelepípedo (prisma). Mostramos, também, no GeoGebra a decomposição do prisma em três pirâmides, o que facilitou o entendimento do porquê da fórmula do volume da pirâmide ser um terço do volume do prisma.

Com o desenvolvimento das oficinas foi evidente o crescimento do aprendizado em relação ao assunto abordado. Foram propostas questões de exames do interesse dos alunos, ENEM e vestibulares, as quais foram resolvidas, também, com a utilização do GeoGebra. Eles acharam que a interpretação das questões ficou mais fácil com a visualização e a manipulação das

figuras no programa.

Utilizar um software de geometria dinâmica ajudou bastante na compreensão do conceito de volume e no desenvolvimento de estratégias para o cálculo do volume dos sólidos geométricos, uma vez que os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver o pensamento geométrico e a visualização espacial em relação aos sólidos estudados.

Concluimos, no final deste trabalho, que faz-se necessário que os educadores propiciem aos alunos metodologias diferenciadas, dinamizando o ambiente de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Nesse sentido, acreditamos que as oficinas de estudo expostas possam contribuir nesse sentido.

Anexo A - Preliminares do Capítulo 3

1. Definições Preliminares

Utilizamos como referências Dolce (1993a), Lima (1991), Lima (2006), Muniz Neto (2012) e Muniz Neto (2013).

1.1 Conceitos primitivos

As noções primitivas sobre ponto, reta e plano são adotadas sem definição. Exemplificando, temos:

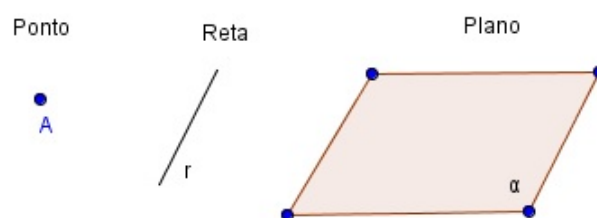


Figura 4.42: Entes geométricos

Para representar o ponto usamos letras latinas maiúsculas; para a reta, letras latinas minúsculas e para o plano, letras gregas minúsculas. Podemos também denotar as retas usando dois de seus pontos, por exemplo reta \overleftrightarrow{AB} .



Figura 4.43: Reta

1.2 Segmento de reta e semirreta

Definição 4.1. *Segmento de reta* é a porção da reta r que fica entre dois pontos diferentes, A e B , que estão sobre essa reta r . Assim teremos o segmento de reta \overline{AB} , como mostra a figura 4.44.

Definição 4.2. Um ponto C sobre a reta r divide-a em duas **semirretas** de origem C . Se colocarmos um ponto D sobre a reta r , teremos a **semirreta** \overrightarrow{CD} de origem C , como ilustra a figura a seguir.



Figura 4.44: Segmento de reta e semirreta

1.3 Figura geométrica

Definição 4.3. No plano (ou espaço), definiremos todo e qualquer conjuntos de pontos como **figura geométrica**.

Dessa forma, teremos dois tipos de figuras geométricas: planas e espaciais.

Figuras geométricas planas

É quando o conjunto de pontos considerados está situado numa superfície plana, como a seguir:

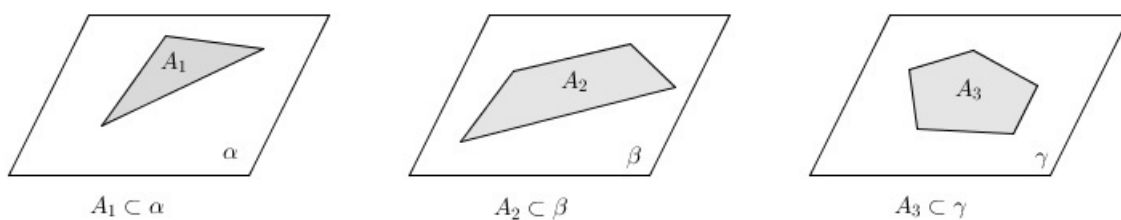


Figura 4.45: Figuras geométricas planas

Figuras geométricas espaciais

É quando o conjunto de pontos considerados está situado numa superfície não-plana, como vemos na figura abaixo:

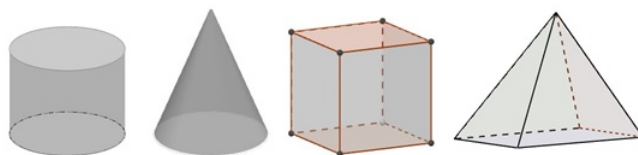


Figura 4.46: Figuras geométricas espaciais

1.4 Pontos colineares e não-colineares

Definição 4.4. Consideremos três pontos A, B e C sobre um plano. Se C estiver sobre a reta \overleftrightarrow{AB} , diremos que A, B e C são **colineares**; caso contrário, diremos que A, B e C são **não-colineares**.

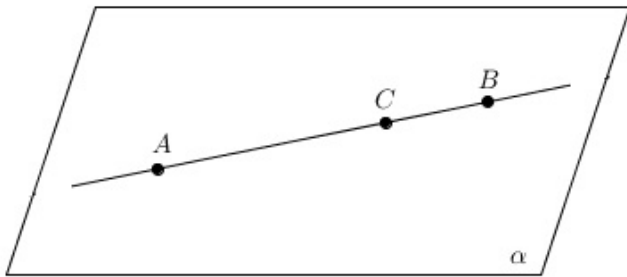


Figura 4.47: Pontos colineares

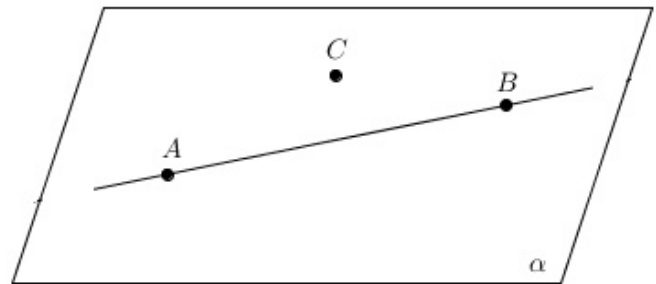


Figura 4.48: Pontos não-colineares

1.5 Ângulo

Definição 4.5. Dadas duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} no plano, um **ângulo** ou **região angular** de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .

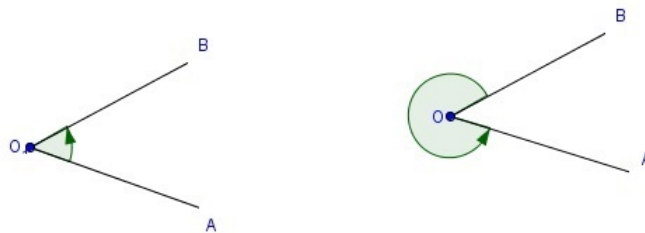


Figura 4.49: Regiões angulares no plano

Notação

Com relação à figura acima denotamos o ângulo assim: \widehat{AOB} ou \widehat{O} .

Classificação dos ângulos

✓ **Reto**, se for igual a 90° .

✓ **Agudo**, se for maior que 0° menor que 90° .

✓ **Obtuso**, se for maior que 90° e menor que 180° .

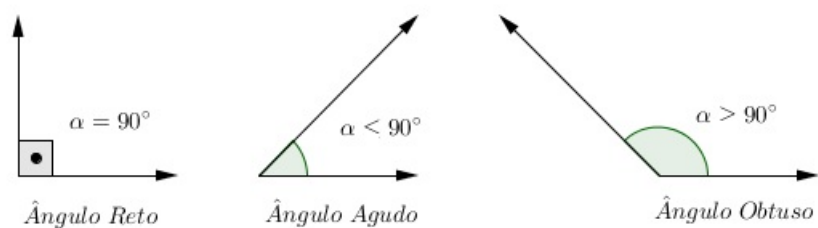


Figura 4.50: Classificação dos ângulos

1.6 Triângulo

Definição 4.6. Ao conjunto de três pontos não-colineares num plano chamamos de **triângulo**. A , B , e C são os **vértices** do triângulo ABC e os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são seus **lados**.

Denotaremos o triângulo ABC assim: $\triangle ABC$.

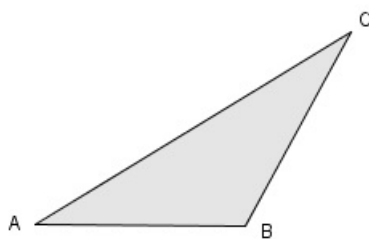


Figura 4.51: Triângulo ABC

Classificação dos triângulos quanto aos lados

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

- ✓ **Equilátero**, se os três lados forem congruentes entre si.
- ✓ **Isósceles**, se pelo menos dois dentre seus lados forem congruentes.
- ✓ **Escaleno**, se os três lados possuírem medidas distintas entre si.

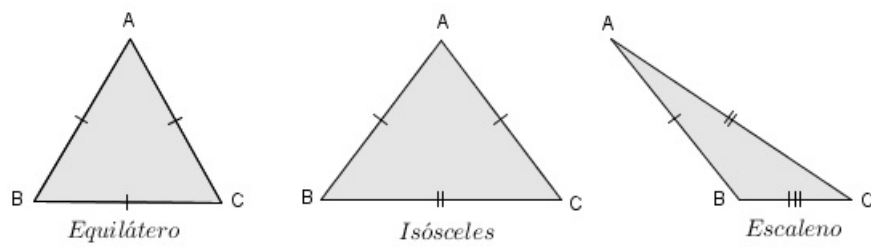


Figura 4.52: Classificação dos triângulos quanto aos lados

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

- ✓ **Retângulo** se, tem um ângulo interno reto.
- ✓ **Acutângulo** se, tem os três ângulos internos agudos.
- ✓ **Obtusângulo** se, tem um ângulo interno obtuso.

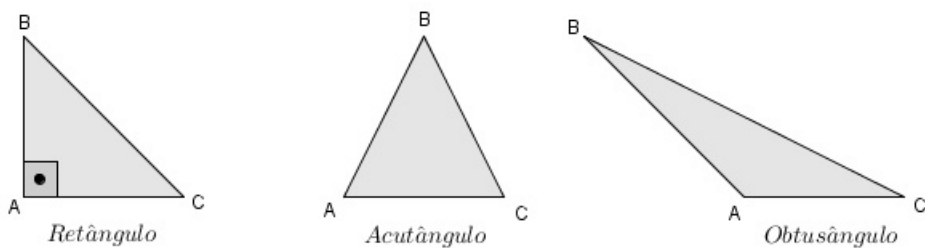


Figura 4.53: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

1.7 Triângulos congruentes

Definição 4.7. Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são considerados **congruentes** se, e somente se, houver a possibilidade de uma correspondência entre seus vértices, de forma que seus lados sejam ordenadamente congruentes e seus ângulos ordenadamente congruentes, também.

Notação

Denotamos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes assim: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

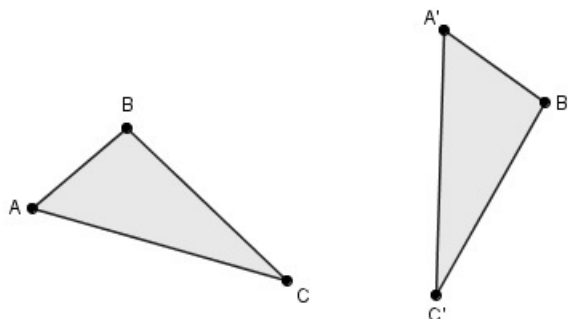


Figura 4.54: Triângulos ABC e $A'B'C'$ congruentes

Casos de congruência

- 1º caso - LAL

Se dois triângulos têm respectivamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido por esses dois lados, então eles são congruentes.

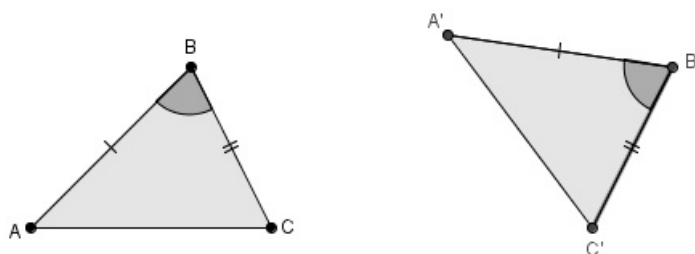


Figura 4.55: Triângulos congruentes pelo caso LAL

Em símbolos, o caso de congruência garante que, dados triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\hat{A} = \hat{A}'$, então, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular, segue que

$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

- **2º caso - ALA**

Se dois triângulos têm respectivamente congruentes dois ângulos e o lado compreendido por esses dois ângulos, então eles são congruentes.

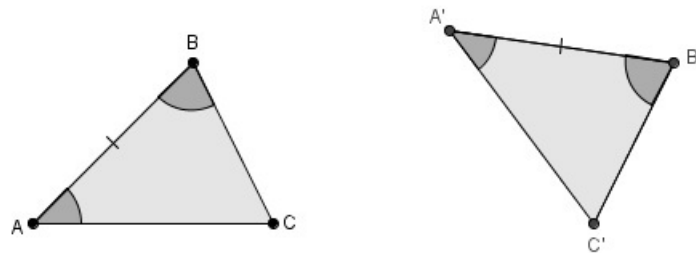


Figura 4.56: Triângulos congruentes pelo caso ALA

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, então, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular, devemos ter também

$$\hat{C} = \hat{C}', \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

- 3º caso - LLL

Se dois triângulos têm respectivamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.

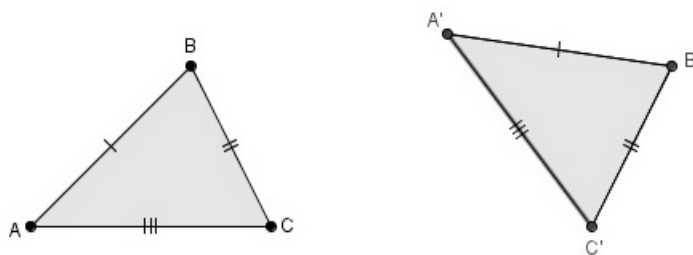


Figura 4.57: Triângulos congruentes pelo caso LLL

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ temos que, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C'}.$$

- 4º caso - LAA_o

Se dois triângulos tem respectivamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.

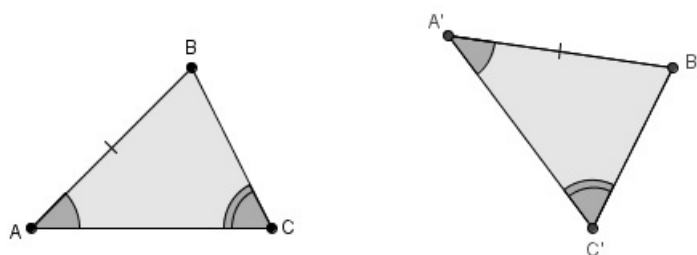


Figura 4.58: Triângulos congruentes pelo caso LAA_o

Em símbolos, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\hat{A} = \hat{A'}$ e $\hat{B} = \hat{B'}$, então, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também temos

$$\hat{C} = \hat{C}', \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

1.8 Lugares geométricos

Definição 4.8. Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico** (abreviamos **LG**) dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

- (a) Todo ponto de L possui a propriedade P ;
- (b) Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L .

Em outras palavras, L é o LG da propriedade P se L for constituído exatamente pelos pontos do plano que têm a propriedade P , nem mais nem menos.

1.9 Semelhança de Triângulos

Definição 4.9. Dois triângulos são **semelhantes** quando há entre esses triângulos uma correspondência biunívoca em relação aos vértices, de forma que os ângulos correspondentes sejam iguais e haja proporcionalidade nos lados homólogos.

Notação

Denotamos que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes assim: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Razão de semelhança

Sejam a , b e c as medidas dos lados do triângulo ABC e a' , b' e c' as medidas dos lados do triângulo $A'B'C'$. Então, vale a seguinte igualdade

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

onde k é denominado **razão de semelhança** dos triângulos.

Casos de semelhança de triângulos

- 1º caso - LLL

Sejam dois triângulos no plano ABC e $A'B'C'$, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Então, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$.

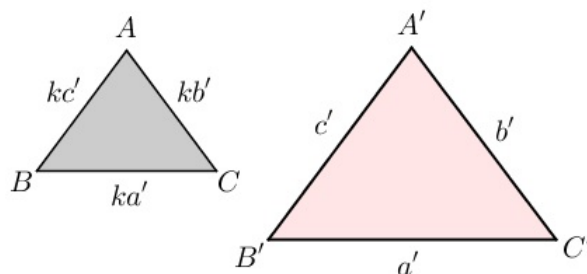


Figura 4.59: Triângulos semelhantes pelo caso LLL

- 2º caso - LAL

Sejam dois triângulos no plano ABC e $A'B'C'$, tais que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \quad \text{e} \quad \hat{C} = \hat{C}'.$$

Então, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k$.

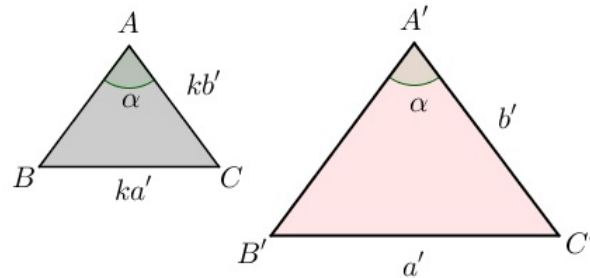


Figura 4.60: Triângulos semelhantes pelo caso LAL

• 3º caso - AA

Sejam dois triângulos no plano ABC e $A'B'C'$, tais que

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{B}'.$$

Então, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, com correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

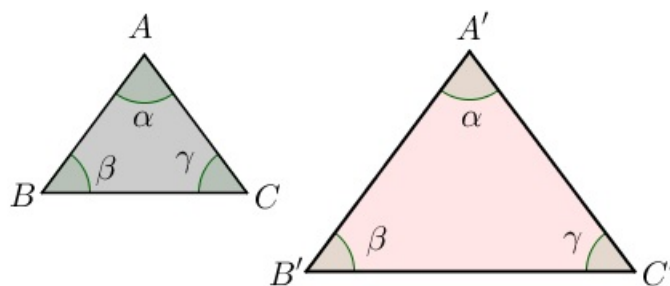


Figura 4.61: Triângulos semelhantes pelo caso AA

1.10 Teorema de Pitágoras

Teorema 4.1. *Em um triângulo retângulo a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual à medida do quadrado da hipotenusa.*

Sejam a a medida da hipotenusa, b e c as medidas dos catetos de um triângulo retângulo ABC . Reescrevendo o teorema acima de outro modo, temos: $a^2 = b^2 + c^2$, vide figura 4.62.

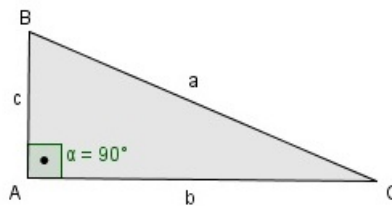


Figura 4.62: Teorema de Pitágoras

1.11 Polígono

Definição 4.10. *Sejam $n \geq 3$ um número natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. Dizemos que A_1, A_2, \dots, A_n é um **polígono convexo** se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$). Os **vértices do polígono** são os pontos A_1, A_2, \dots, A_n . Os **lados do polígono** são os segmentos $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3}, \dots, \overline{A_{n-1} A_n}, \overline{A_n A_1}$.*

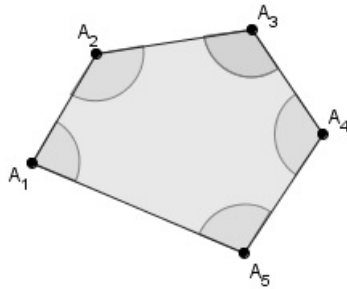


Figura 4.63: Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$

1.12 Polígonos regulares

Definição 4.11. Dizemos que um polígono é **regular** quando todos os seus lados e ângulos internos são congruentes.

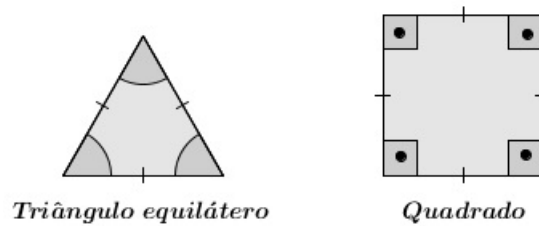


Figura 4.64: Exemplo de polígonos regulares

1.13 Circunferência

Definição 4.12. Sejam O um ponto e $r > 0$ um número real. A **circunferência** de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano que estão à distância r de O , isto é, tais que $d(O, P) = r$.

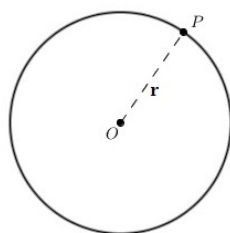


Figura 4.65: Circunferência

Existem duas circunferências associadas a um polígono regular:

Circunferência circunscrita: em um polígono regular com n lados, podemos construir uma circunferência circunscrita, que é uma circunferência que passa em todos os vértices do polígono e que contém o polígono em seu interior.

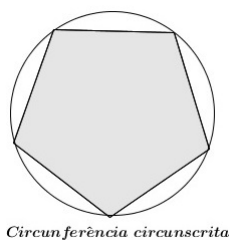


Figura 4.66: Circunferências circunscrita

Circunferência inscrita: em um polígono regular com n lados, podemos colocar uma circunferência inscrita, isto é, uma circunferência que passa tangenciando todos os lados do polígono e que está contida no mesmo.

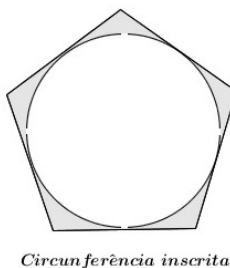


Figura 4.67: Circunferências inscrita

1.14 Círculo

Definição 4.13. *Sejam O um ponto e $r > 0$ um número real. O **círculo** de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do plano que distam de O uma medida menor que ou igual a r , isto é, $d(O, P) \leq r$.*

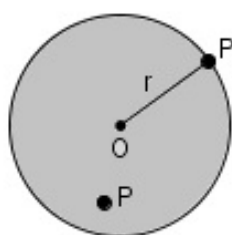


Figura 4.68: Círculo

Círculos concêntricos

Definição 4.14. *Denominamos de **círculos concêntricos** os círculos que têm o mesmo centro O .*

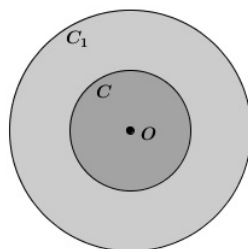


Figura 4.69: Círculos concêntricos C e C_1

Área do círculo

Seja R o raio de um círculo. Então, a sua área (A_{circ}) é dada por

$$A_{circ} = \pi R^2.$$

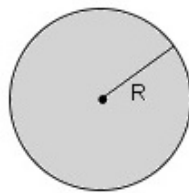


Figura 4.70: Área do círculo

1.15 Coroa circular

Definição 4.15. *Coroa circular é a região limitada por dois círculos concêntricos.*

Área da coroa circular

Sejam R o raio da circunferência externa e r o raio da circunferência interna. A área da coroa circular (A_{coroa}) é dada pela diferença entre as áreas do círculo externo e do círculo interno.

$$A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)$$

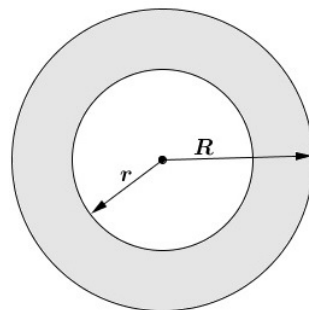


Figura 4.71: Coroa circular

1.16 Poliedro

Definição 4.16. É a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos. Cada lado de um desses polígonos é também **lado** de um outro único polígono. Cada polígono desse é considerado uma **face** do poliedro. O lado comum a exatamente duas faces chamamos de **aresta** do poliedro. E cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.

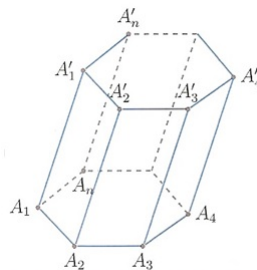
As figuras espaciais a seguir são exemplos de poliedros.



Figura 4.72: Poliedros

1.17 Prisma

Definição 4.17. O **prisma** de bases $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$, é a porção limitada do espaço, delimitada pelos polígonos $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$ e pelos paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$, para $1 \leq i \leq n$.



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 347.

Figura 4.73: Prisma de bases $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$.

Dado o prisma da figura 4.73, temos:

✓ **Vértices:** os pontos $A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.

✓ **Faces laterais:** os paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$.

✓ **Arestas das bases:** os segmentos A_iA_{i+1} , $A'_iA'_{i+1}$ e $A_iA'_i$.

✓ **Arestas laterais:** os segmentos $A_iA'_i$, para $1 \leq i \leq n$.

✓ **Altura do prisma (h):** distância entre os planos de suas bases.

Os prismas classificam-se segundo suas bases. Por exemplo, um *prisma triangular* é aquele cuja base é um triângulo, um prisma **quadrangular** é aquele cuja base é um quadrilátero e assim por diante.

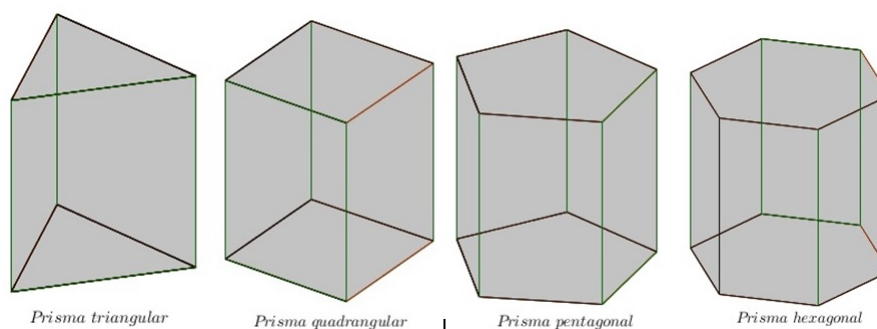
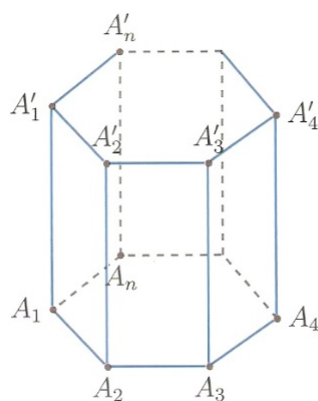


Figura 4.74: Classificação dos prismas quanto ao polígono da base

Um **prisma reto** é um prisma cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos de suas bases; em particular, se $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$ são as bases de um prisma reto, então $\overline{A_1A'_1} = \overline{A_2A'_2} = \dots = \overline{A_nA'_n}$ e tal valor comum coincide com a altura do prisma. Um prisma reto é **regular** (figura 4.75) se suas bases forem polígonos regulares.



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 348.

Figura 4.75: Prisma regular de bases $A_1A_2\dots A_n$ e $A'_1A'_2\dots A'_n$.

Secção de um prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Podemos observar que a secção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral (figura 4.76).

Secção reta é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.

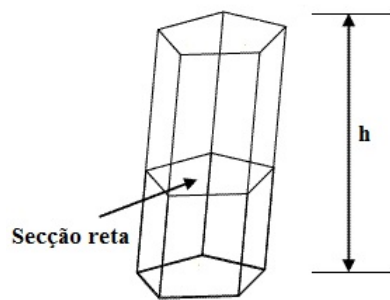


Figura 4.76: Secção reta do prisma

Paralelepípedo

Os **paralelepípedos** são prismas quadrangulares cujas bases são paralelogramos. Um **paralelepípedo reto** (figura 4.77) é um paralelepípedo que é um prisma reto e um **paralelepípedo reto retângulo** é um paralelepípedo reto cujas bases são retângulos.

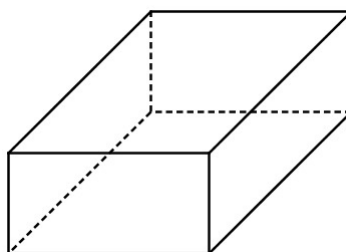


Figura 4.77: Paralelepípedo reto

Cubo

Dizemos que um paralelepípedo reto retângulo é um **cubo** (figura 4.78) se todas as suas arestas (a) forem iguais.

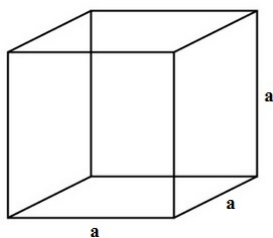


Figura 4.78: Cubo

Área da superfície de um prisma

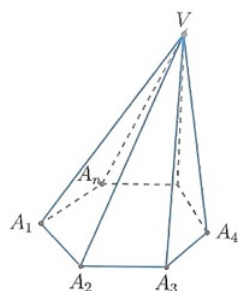
Considerando um prisma qualquer, temos:

- ✓ **Área lateral** (A_l): soma das áreas das faces laterais.
- ✓ **Área da base** (A_b): área de uma das faces que é base.
- ✓ **Área total** (A_t): é a soma da área lateral com as áreas das duas bases.

$$A_t = A_l + 2A_b.$$

1.18 Pirâmide

Definição 4.18. Dados um polígono convexo $A_1A_2\dots A_n$ e um ponto V não pertencente ao plano de $A_1A_2\dots A_n$, definimos a **pirâmide** $VA_1A_2\dots A_n$, de **vértice** V e **base** $A_1A_2\dots A_n$, como a porção limitada do espaço, delimitado por $A_1A_2\dots A_n$ e pelos triângulos VA_iA_{i+1} , para $1 \leq i \leq n$, com a convenção de que $A_{n+1} = A_1$ (figura 4.79).



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 335.

Figura 4.79: Pirâmide de base $A_1A_2\dots A_n$ e vértice V .

Dizemos ainda, que os segmentos VA_i e A_iA_{i+1} são as **arestas** e os triângulos VA_iA_{i+1} são as **faces laterais** da pirâmide.

Se P é o pé da perpendicular baixada do vértice V ao plano da base $A_1A_2\dots A_n$ de uma pirâmide $VA_1A_2\dots A_n$, dizemos que o segmento \overline{VP} é a **altura** da pirâmide. A referida pirâmide é dita **regular** se sua base $A_1A_2\dots A_n$ for um polígono regular de centro P .

As pirâmides são classificadas segundo suas bases. Se a base é um triângulo a pirâmide é dita **triangular**, se a base é um quadrilátero a pirâmide é dita **quadrangular**, e assim por diante.

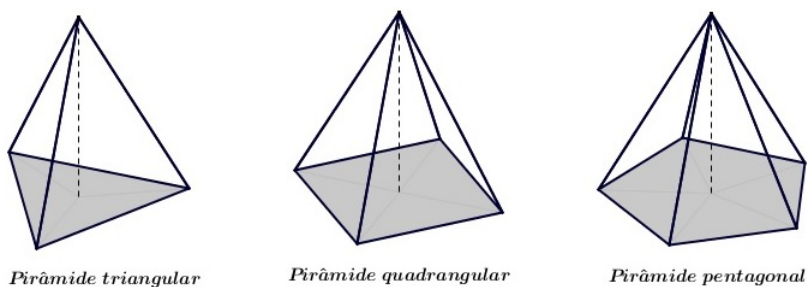


Figura 4.80: Nomenclatura de algumas pirâmides

A **pirâmide reta** é aquela cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Caso contrário a **pirâmide** é dita **oblíqua**.

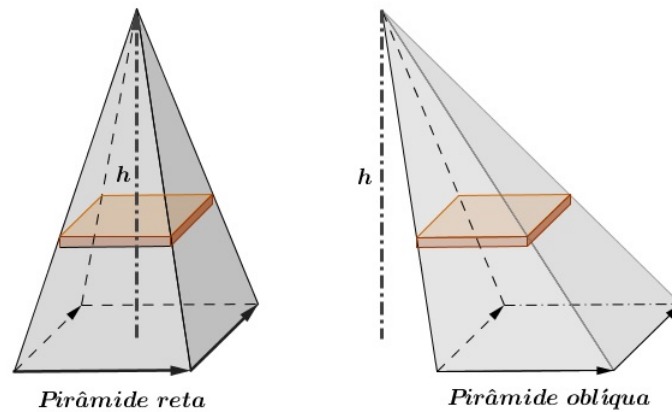


Figura 4.81: Pirâmide reta e pirâmide oblíqua.

Elementos das pirâmides regulares

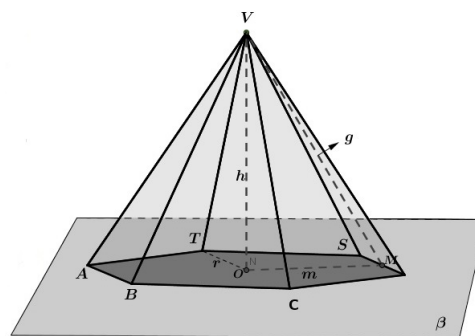


Figura 4.82: Elementos das pirâmides regulares

- ✓ **Apótema da pirâmide (g)**: altura relativa ao lado de qualquer face lateral.
- ✓ **Apótema da base (m)**: segmento que determina o raio da circunferência inscrita no polígono da base.
- ✓ **Raio da base (r)**: raio da circunferência circunscrita ao polígono da base.

Área da superfície de uma pirâmide

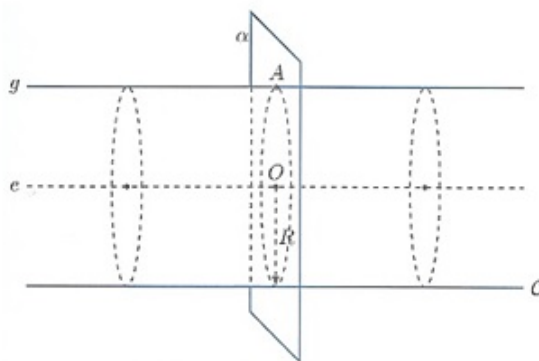
Dada uma pirâmide qualquer, temos:

- ✓ **Área lateral** (A_l): soma das áreas das faces laterais.
- ✓ **Área da base** (A_b): área do polígono que forma a base.
- ✓ **Área total** (A_t): é a soma da área lateral com a área da base.

$$A_t = A_l + A_b$$

1.19 Cilindro

Definição 4.19. Dados um real positivo R e uma reta e no espaço, o **cilindro (de revolução)** de eixo e e raio R , denotado $C(e; R)$, é o conjunto dos pontos do espaço, os quais estão à distância R da reta e (4.83).



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p.321.

Figura 4.83: O cilindro de revolução de eixo e e raio R .

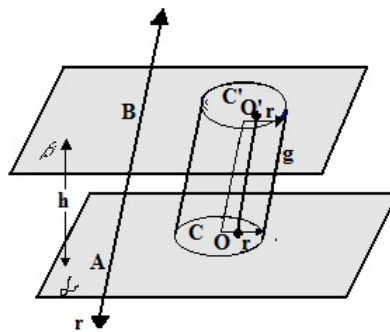


Figura 4.84: Cilindro

Considerando o cilindro da figura 4.84, temos:

✓ **Bases:** os círculos C e C' , de raio r e centros O e O' , respectivamente.

✓ **Eixo:** a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.

✓ **Altura:** distância h entre os planos das bases.

✓ **Geratrizes (g):** os segmentos paralelos ao eixo os quais tem uma extremidade em um ponto da circunferência de centro O e raio r e a outra extremidade no ponto correspondente da circunferência de centro O' e raio r .

Classificação

✓ **Cilindro reto:** quando as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Denominamos, também, o cilindro circular reto de **cilindro de revolução**, uma vez que ele é gerado pela rotação de um retângulo em torno do eixo determinado por um dos seus lados.

✓ **Cilindro oblíquo:** quando as geratrizes são oblíquas aos planos das bases.

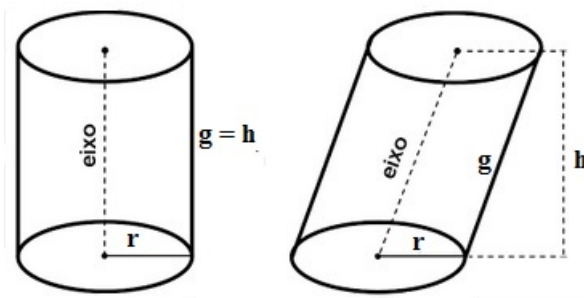


Figura 4.85: Cilindro reto e oblíquo

Seces de um cilindro

✓ **Secção transversal**  a intersecção do cilindro com um plano paralelo às suas bases.

✓ **Secção meridiana**  a intersecção do cilindro com um plano que contém o seu eixo.

Cilindro equilátero

É aquele cuja secção meridiana é um quadrado. Considere g a geratriz, h a altura e r o raio do cilindro. Assim, temos que:

$$g = h = 2r$$

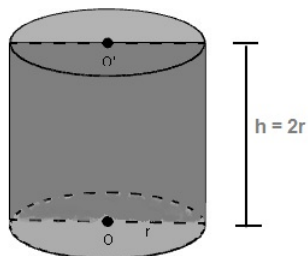


Figura 4.86: Cilindro equilátero

Área da superfície de um cilindro

Dado um cilindro reto de altura h e raio da base r , temos:

✓ **Área lateral** (A_l): é a reunião das geratrizes que forma um retângulo cujos lados medem $2\pi r$ e h .

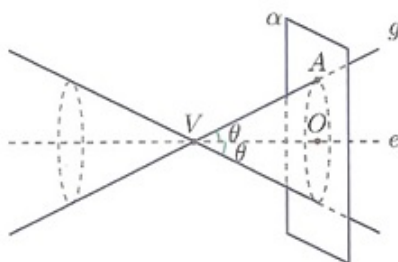
✓ **Área da base** (A_b): área do círculo de raio r .

✓ **Área total** (A_t): é a soma das áreas das bases com a área lateral.

$$A_t = A_l + 2A_b$$

1.20 Cone

Definição 4.20. Dados um ângulo θ , uma reta e e um ponto $V \in e$, o **cone (de revolução)** $C(e; V; \theta)$, de eixo e , vértice V e abertura 2θ é o conjunto dos pontos A do espaço, tais que \overleftrightarrow{AV} forma um ângulo θ com a reta e (figura 4.87).



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 325.

Figura 4.87: O cone de revolução de eixo e , vértice V e abertura 2θ .

Sejam A um ponto sobre o cone $C(e; V; \theta)$ e α o plano que passa por A e é perpendicular a e . Se α intersecta e em O , então $\overleftrightarrow{AO} \perp e$ e $\overleftrightarrow{AO} \subset \beta$, onde β é o plano que contém A e e ; como $V \in e$, temos $\overline{AO} = \overline{VO} \cdot \operatorname{tg}\theta$. Portanto, A pertence ao círculo que todo ponto de tal

círculo está contido em C . Por outro lado, temos que g é uma reta de β que forma ângulo θ com e , de sorte que $g \subset C$. A reta g é a **geratriz** do cone C .

Os cones podem ser classificados pela posição da reta \overleftrightarrow{VO} em relação ao plano da base:

✓ **Cone reto:** se o eixo VO for perpendicular ao plano que contém a base.

✓ **Cone oblíquo:** se o eixo VO for oblíquo ao plano que contém a base.

Secções de um cone

✓ **Secção meridiana:** é a interseção do cone com um plano que contenha o eixo VO . A secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles.

Se a secção meridiana do cone for um triângulo equilátero teremos um **cone equilátero**.

✓ **Secção transversal:** é a interseção do cone com um plano paralelo ao plano que contém a base.

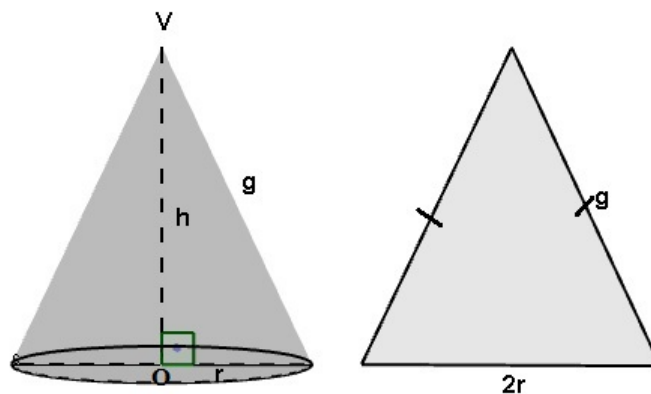


Figura 4.88: Secção meridiana do cone

Área da superfície de um cone reto

Seja um cone qualquer. Temos:

✓ **Área da base** (A_b): área do círculo de raio r .

✓ **Área lateral** (A_l): é a área de um setor circular onde o comprimento do raio equivale a medida da geratriz (g) e a medida do arco é equivalente a $2\pi r$.

A área lateral pode ser calculada da seguinte maneira:

$$A_l = \pi r g.$$

✓ **Área total** (A_t): é a soma da área da base com a área lateral.

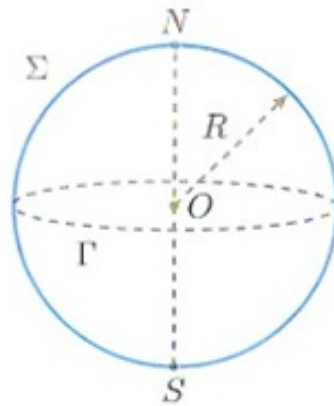
$$A_t = A_l + A_b$$

$$A_t = \pi r g + \pi r^2$$

$$A_t = \pi r (g + r)$$

1.21 Esfera

Definição 4.21. *Sejam dados um ponto O do espaço e um real positivo R . A esfera Σ^3 , de centro O e raio R , denotada por $\Sigma(O; R)$, é o lugar geométrico dos pontos do espaço que distam R de O (figura 4.89).*



Fonte: MUNIZ NETO, 2013, p. 317

Figura 4.89: A esfera de centro O e raio R

Denominamos por **superfície esférica** de centro O e raio R ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a R .

A superfície de uma esfera é também a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo.

Na esfera toda secção plana é um círculo.

Temos como secção um círculo máximo da esfera quando um plano secante passa pelo centro dessa esfera, por exemplo, Γ na figura 4.89.

Área da esfera

A área da superfície esférica de raio R é dada por $4\pi R^2$.

Anexo B - Teste de Sondagem

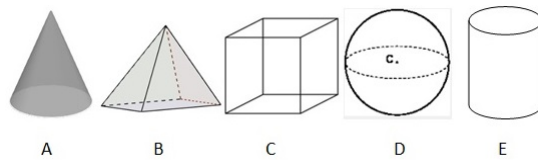
1. A respeito de um sólido geométrico podemos afirmar:
 - são figuras planas.
 - são figuras não planas.
 - são poligonais fechadas simples.
 - desconheço.

2. São elementos de um sólido geométrico:
 - lados e vértices.
 - faces, vértices e lados.
 - arestas, vértices e faces.
 - desconheço.

3. São sólidos geométricos:
 - prisma, triângulo e quadrado.
 - cone, cilindro, pirâmide, prisma e cubo.
 - cone, cubo, paralelepípedo e quadrado.
 - desconheço.

4. Considerando um reservatório de água que possui 5 m de comprimento, 4 m de largura e 2 m de altura, ao multiplicarmos todas as suas dimensões, estamos na verdade calculando:
 - seu volume.
 - sua área.
 - seu perímetro.
 - desconheço.

5. Faça a associação corretamente:



- Cilindro.
- Pirâmide.
- Cone.
- Cubo.
- Esfera.

6. Elabore um pequeno texto sobre a ideia que você tem sobre sólidos geométricos, identificando suas características. Na oportunidade, exemplifique através de uma situação do cotidiano a importância do conhecimento sobre eles.

Anexo C - Teste de Verificação

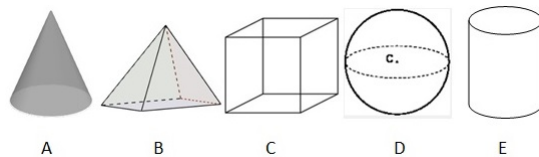
1. A respeito de um sólido geométrico podemos afirmar:
 - são figuras planas.
 - são figuras não planas.
 - são poligonais fechadas simples.
 - desconheço.

2. São elementos de um sólido geométrico:
 - lados e vértices.
 - faces, vértices e lados.
 - arestas, vértices e faces.
 - desconheço.

3. São sólidos geométricos:
 - prisma, triângulo e quadrado.
 - cone, cilindro, pirâmide, prisma e cubo.
 - cone, cubo, paralelepípedo e quadrado.
 - desconheço.

4. Considerando um reservatório de água que possui 5 m de comprimento, 4 m de largura e 2 m de altura, ao multiplicarmos todas as suas dimensões, estamos na verdade calculando:
 - seu volume.
 - sua área.
 - seu perímetro.
 - desconheço.

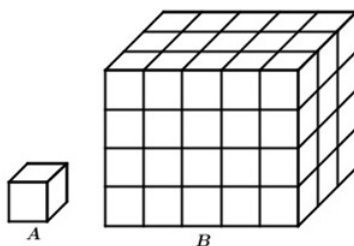
5. Faça a associação corretamente:



- Cilindro.
- Pirâmide.
- Cone.
- Cubo.
- Esfera.

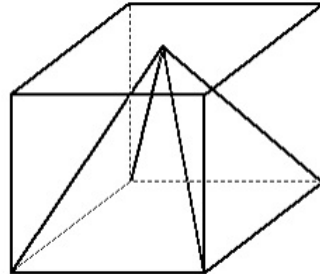
6. Elabore um pequeno texto sobre a ideia que você tem sobre sólidos geométricos, identificando suas características. Na oportunidade, exemplifique através de uma situação do cotidiano a importância do conhecimento sobre eles.

7. (Unesp) Quantos cubos **A** precisa-se empilhar para formar o paralelepípedo **B**?



- 60
- 47
- 94
- 39
- 48

8. (Unirio-RJ) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura a seguir.



Sabendo-se que o volume da pirâmide é de $6 m^3$, então o volume do cubo, em m^3 , é igual a:

- () 9
 - () 12
 - () 15
 - () 18
 - () 21
9. (UEL-PR) Dois recipientes cilíndricos tem altura de 40 cm e raios da base medindo 10 cm e 5 cm. O maior deles contém água até $\frac{1}{5}$ de sua capacidade. Essa água é despejada no recipiente menor, alcançando a altura h de:
- () 32 cm
 - () 24 cm
 - () 16 cm
 - () 12 cm
 - () 10 cm

10. (Unesp) Um copinho de sorvete, em forma de cone, tem 10 cm de profundidade, 4 cm de diâmetro no topo e tem aí colocadas duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos afirmar que:
- não transbordará.
 - transbordará.
 - os dados são insuficientes.
 - os dados são incompatíveis.
 - todas as afirmativas anteriores são falsas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABRANTES, Paulo. SERRAZINA, Lurdes. OLIVEIRA, Isolina. **A Matemática na educação básica**. Lisboa, 1999. Disponível em [http : //departamentos.esramada.pt/mat/3ciclo/matematica_na_educacao_basica.pdf](http://departamentos.esramada.pt/mat/3ciclo/matematica_na_educacao_basica.pdf). Acesso em 19/02/2015.
- [2] BEZERRA. Maria da Conceição Alves. ASSIS. Cibelle Castro de. **Atividades com o GeoGebra: possibilidades para o ensino e aprendizagem da Geometria no Fundamental**. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, 2011. Disponível em [http : //www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1646.pdf](http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1646.pdf). Acesso em 21/02/2015.
- [3] BORBA, Marcelo de Carvalho. PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.
- [4] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2^a ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2001.
- [5] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**, v. 10. Atual, São Paulo, 1993.
- [6] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**, v. 9. São Paulo: Atual, 1993a.

- [7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- [8] GeoGebra, Instituto Geogebra no Rio de Janeiro. Disponível em [http : //www.geogebra.im – uff.mat.br/](http://www.geogebra.im-uff.mat.br/)>. Acesso em 20/02/2015.
- [9] GeoGebra. Disponível em [http : //tube.geogebra.org/](http://tube.geogebra.org/)>. Acesso em 20/02/2015.
- [10] GeoGebra. Disponível em [https : //www.geogebra.org/](https://www.geogebra.org/)>. Acesso em 20/02/2015.
- [11] GIRALDO, Victor. CAETANO, Paulo. Mattos, Francisco. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).
- [12] GRAVINA, Maria Alice. **Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria**. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, pp. 1-13, 1996. Disponível em [http : //www.geogebra.im – uff.mat.br/bib.html](http://www.geogebra.im-uff.mat.br/bib.html)>. Acesso em 21/02/2015.
- [13] HOHENWARTER, Markus. textbf GeoGebra - INFORMAÇÕES. 2007. Disponível em [http : //static.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf](http://static.geogebra.org/help/docuptBR.pdf)>. Acesso em 20/02/2015.
- [14] HOHENWARTER, Markus. HOHENWARTER, Judith. **Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2**. 2009. Disponível em [http : //static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf](http://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf)>. Acesso em 20/02/2015.
- [15] LIMA, Elon et al. **A Matemática do Ensino Médio**, v. 2. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).
- [16] LIMA, Elon. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).
- [17] BARBOSA, João Lucas Barbosa. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2001. (Coleção do Professor de Matemática).
- [18] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**, v. 2. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).
- [19] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

- [20] SÁ. Ilydio Pereira de. **Primeiros passos com o software livre - GeoGebra**. Rio de Janeiro: Teresópolis, 2010. Disponível em [http : //www.magiadamatematica.com/diversos/apostilas/GEOGEBRA.pdf](http://www.magiadamatematica.com/diversos/apostilas/GEOGEBRA.pdf)>. Acesso em 23/02/2015.
- [21] SALGADO, Maria Umbelina Caiafa. AMARAL, Ana Lúcia. **Tecnologias da educação: ensinando e aprendendo com as TIC: guia do cursista**. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação à Distância, 2008.
- [22] SANTOS. Carlos Henrique (Org.). **GeoGebra: Aplicações ao Ensino da Matemática**. Paraná: Curitiba, 2009. Disponível em [https : //cristianopalharini.files.wordpress.com/2009/11/apostila – de – geogebra – ufpr.pdf](https://cristianopalharini.files.wordpress.com/2009/11/apostila-de-geogebra-ufpr.pdf)>. Acesso em 23/02/2015.
- [23] VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria**. 2^a ed. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1991.