UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

O USO DO DESENHO GEOMÉTRICO COMO MOTIVADOR DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS

TÂNIA PINTO DOS SANTOS SOUZA

Cruz das Almas - Bahia
2015

O USO DO DESENHO GEOMÉTRICO COMO MOTIVADOR DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS

TÂNIA PINTO DOS SANTOS SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº MSc. Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Cruz das Almas - Bahia
2015

FICHA CATALOGRÁFICA

S 719 Souza, Tânia Pinto dos Santos.

O uso do desenho geométrico como motivador de aprendizagem no ensino de área de figuras planas / Tânia Pinto dos Santos Souza._Cruz das Almas, BA, 2015.

78 f.; il.

Orientador: Erikson Alexandre Fonseca dos Santos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática - Geometria. 3. Desenho Geométrico. I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.

CDD: 510.7

O USO DO DESENHO GEOMÉTRICO COMO MOTIVADOR DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS

TÂNIA PINTO DOS SANTOS SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Orientador: Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Prof° MSc. Erikson Alexandre Fonseca dos Santos - UFRB

Membro: Hassan

Prof° Dr. Hassan Sherafat - UFS

Membro: Adson Mota Rocha.

Prof° MSc. Adson Mota Rocha - UFRB

Cruz das Almas, 9 de Julho de 2015.

Ao meu esposo Ewerton e
aos meus filhos, Tiago e Eduardo,
com muito amor.

"O único homem que está isento de erros,
é aquele que não arrisca acertar."
Albert Einsten

AGRADECIMENTOS

Não foi fácil chegar até aqui. Do processo seletivo passando pela aprovação até a conclusão do Curso, foi um longo caminho percorrido. Nada foi fácil, nem tampouco tranquilo.

"E aprendi que se depende sempre
De tanta, muita, diferente gente
Toda pessoa sempre é as marcas
das lições diárias de outras tantas pessoas.
É tão bonito quando a gente entende
Que como a gente é tanta gente
Onde quer que a gente vá.
É tão bonito quando a gente sente
Que nunca está sozinho
Por mais que pense estar..."(Caminhos do coração - Gonzaguinha.)

Quero agradecer primeiramente a Deus e a todos aqueles que sempre confiaram em mim, desde sempre.

Agradeço ao meu orientador, professor Erikson Alexandre, pela atenção e comprometimento no processo de orientação. Nada disso seria possível sem ele.

Ao corpo docente do PROFMAT, pela dedicação e responsabilidade.

À Sociedade Brasileira de Matemática por proporcionar o alcance do objetivo.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

À banca examinadora que cedeu uma parte de seu tempo precioso para poder contribuir com esse trabalho.

Enfim, a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão de mais esta fase da minha vida, os meus sinceros agradecimentos.

Tânia Pinto dos Santos Souza

RESUMO

Partindo da constatação de que o Desenho Geométrico proporciona um maior entendimento e visualização de problemas que envolvem Geometria e, em particular, o ensino de área de figuras planas. O presente texto apresenta uma proposta de trabalho com o uso de régua e compasso na construção de figuras planas associada a verificação das definições e propriedades relacionadas a tais figuras. Demonstraremos as fórmulas inerentes ao cálculo das áreas das principais figuras planas (tais como quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio) bem como as aplicações dessas fórmulas em problemas interessantes de Olimpíadas Matemáticas. Utilizaremos as construções geométricas para traçar algumas dessas figuras planas e auxiliar a compreensão das demonstrações que ora serão feitas. Por fim, relatamos as experiências vivenciadas no transcorrer da ocorrência do projeto.

Palavras-chave: Geometria, Desenho Geométrico, Áreas.

ABSTRACT

The following text suggests a working project using a ruler and compass understanding simple designs and defining properties concerning such designs. According to the concept that Geometrical Design provides a better understanding and vision about Geometrical problems and particularly, the teaching area for flat pictures. We shall provide concepts regarding calculation of the main simple projects (such as square roots, rectangles, parallelograms, triangles and isosceles triangles) as well as the use of such designs about interesting Mathematical Olympiads problems. We shall use forms to illustrate those helpful simple shapes now and their meaning. Finally, we shall describe proven experience during this project.

Keywords: Geometry, Geometry Design, Areas.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

De acordo com Jorge (2004), a linguagem gráfica é universal, pois independe dos idiomas e proporciona compreensão imediata e interpretação exata dos símbolos usados. Adquirir o conhecimento que permita compreender a linguagem gráfica e comunicar-se com ela é, hoje, essencial.

Wagner (1998) afirma que estando as construções geométricas cada vez mais ausentes dos currículos escolares, deve-se ajudar a resgatar o assunto do esquecimento e mostrar a sua importância como instrumento auxiliar no aprendizado da Geometria, pois as construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos Pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega.

Assim, partindo da constatação de que o ensino do Desenho Geométrico vem experimentando um abandono quase completo nas escolas de ensinos fundamental e médio brasileiras, o presente texto apresenta uma proposta de trabalho, a partir de atividades realizadas com alunos do quarto ano do Curso Técnico de Informática do Centro Territorial de Educação do Agreste de Alagoinhas/ Litoral Norte, situado no município de Alagoinhas-Bahia. Tais atividades foram realizadas no período de 04/08/14 a 15/12/14 com encontros semanais cuja duração eram de 100 minutos. O principal intuito deste trabalho é mostrar aos educadores a importância das construções geométricas no ensino básico, para a aprendizagem dos alunos. O Desenho Geométrico será apresentado plenamente integrado à Geometria, fazendo com que o estudo dos problemas de construções evolua naturalmente a partir de teorias geométricas. Objetivamos ainda apresentar o rigor matemático no que tange à formalização dos resultados e demonstrações.

Devlin (2004) relatou que as pessoas mais jovens nos Estados Unidos talvez não tenham tido aulas de Geometria. A matéria foi reclassificada há alguns anos, tornando-se opcional, na crença errada de que não era mais suficientemente importante ao mundo de hoje. Embora seja verdade que, hoje em dia, dificilmente alguém faça uso direto dos conhecimentos geométricos, a Geometria era a única matéria do currículo do ensino médio que expunha os jovens ao importante conceito do raciocínio formal e a prova matemática.

O Desenho Geométrico será utilizado neste trabalho como ferramenta significativa no ensino de área de figuras planas, uma vez que o ensino de área destas figuras na educação básica geralmente é desenvolvido com o professor repassando as fórmulas para os alunos sem abordar a contextualização e representação geométrica das mesmas. O conteúdo é apresentado seguido de exemplos e exercícios que são realizados de forma mecânica pelos estudantes, ou seja, os discentes apenas decoram as fórmulas sem compreendê-las.

O desenvolvimento desse trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro deles aborda os tópicos preliminares, onde mostraremos a importância do estudo da Geometria e do Desenho em termos histórico e teórico bem como a apresentação de alguns conceitos e resultados necessários para as demonstrações das fórmulas inerentes ao cálculo das áreas das principais figuras planas. O segundo capítulo mostra a visão de alguns autores com relação ao Desenho Geométrico como ferramenta de aprendizagem no ensino de Geometria. Já no capítulo III apresentamos as construções geométricas realizadas com os discentes. E, finalmente o quarto capítulo ficou reservado para o relato das atividades vivenciadas com os alunos durante o desenvolvimento do trabalho. Motivados por esse tema e após as diversas leituras e a própria vida, observaremos que as aplicações aqui registradas podem ser trabalhadas sem dificuldades na educação básica.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Nas duas primeiras seções deste capítulo trazemos um breve histórico das origens da Geometria e do Desenho Geométrico e, em particular, seus respectivos desenvolvimentos no Brasil.

Na seção seguinte vamos definir área e demonstrar as fórmulas inerentes ao cálculo da área de figuras planas elementares, como o triângulo, o paralelogramo, o retângulo, o quadrado e o trapézio. Para isto explicitaremos alguns conceitos que são essenciais para o entendimento das demonstrações, os quais estão baseados em Neto (2012).

1.1 As Origens do Desenho Geométrico e da Geometria

De acordo com Putnok (1993), o desenho nasceu há cerca de 60 mil anos a partir dos avanços das relações entre o homem e a fauna. Através de gravuras encontradas nas cavernas do homem, foi possível entender o seu cotidiano.

Figura 1.1: Desenho pré-histórico

Segundo Putnok (1993, p.7):

> Não se sabe quando ou onde ocorreu a primeira formulação, na forma de desenho, de um problema que se pretendia resolver. Talvez fosse a construção de uma moradia ou de um templo. Contudo esse fato significou um desenvolvimento na capacidade de raciocínio abstrato, pois o desenho supra citado representava algo que ainda não existia, algo que se pretendia realizar. Essa ferramenta, com o passar dos tempos foi se aprimorando de tal modo que tornou-se uma importância vital para o desenvolvimento de civilizações, como a dos babilônios e os egípcios.

Na antiguidade muitos problemas do cotidiano foram resolvidos utilizando-se de conhecimentos geométricos:

> A Geometria Babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deveriam estar familiarizados com as regras gerais de área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez do triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal (EVES, 2007, p.37).

Putnok (1993) afirma que foram os gregos que deram um molde dedutivo à Matemática. Explica o autor que na obra *Elementos* de Euclides (300 a.C.), a Geometria era desenvolvida de um modo bastante elaborado. Diz ainda que é na Geometria Grega que nasce o Desenho Geométrico. Na verdade, não havia diferença entre Desenho Geométrico e Geometria para os gregos. Apenas o primeiro ressaltava-se na forma de problemas de construções geométricas, logo após a exposição de uma situação problema dos textos de Geometria.

O traçado de construções com régua e compasso, desenvolvido pela matemática grega, era visto como um jogo em que se obedecia a duas regras:

> Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado (EVES, 2007, p.134).

Esses instrumentos somente podiam ser usados de acordo com essas duas regras e ficaram conhecidos como instrumentos Euclidianos.

Eves (2007) ainda salienta que a régua utilizada não tinha escala e que o compasso de Euclides diferenciava-se dos compassos modernos porque esses últimos possibilitam traçar um círculo com centro num ponto qualquer e tendo como raio um segmento AB qualquer. Ou seja, é possível transportar o segmento AB ao centro C, utilizando para isso o compasso como transferidor. Já o compasso Euclidiano, desmontava-se quando se levantava um de seus braços do papel.

Conforme Wagner (1998, p.1):

> As construções com régua e compasso aparecem no século V a.C. e foram muito significantes no desenvolvimento da Matemática Grega. Para os Gregos, os números limitavam-se somente aos inteiros e uma fração era considerada apenas uma razão entre inteiros. No século III a.C., passou-se a associar grandezas a segmentos de reta. Dessa forma, o conjunto dos números continuava discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos.

Nessa nova álgebra, conforme o autor, "resolver era sinônimo de construir".

1.1.1 As origens do Desenho Geométrico no Brasil

Segundo Silva (2006, p.17):

> O estudo do desenho geométrico foi iniciado no Brasil no ano de 1771 na Capitania de São Paulo e em 1779 em Pernambuco.
> A introdução do Desenho Geométrico efetivou-se durante o reinado de D. João VI, com o intuito de implementar ciência e tecnologia na colônia, e em 1812 a Real Academia Militar começa a ensinar Geometria Descritiva.

Silva (2006) afirma que durante a reforma educacional dos ensinos primário, secundário e superior nos anos de 1882 e 1883, houve uma certa valorização nos dois primeiros níveis de ensino. Tal fato deu-se à intervenção de Rui Barbosa, que propôs uma educação técnica como forma de atingir o desenvolvimento industrial e favorecer o progresso do país.

"No ensino primário o Desenho era trabalhado como parte da Geometria prática. No entanto, no secundário, o conteúdo curricular de Geometria era amplo e abrangia Geometria Descritiva, Teoria das Sombras, Perspectivas, Álgebra e Cálculo Diferencial"(SILVA, 2006, p.17).

Ainda segundo Silva (2006, p.18):

> pela Reforma Francisco Campos, proposta pelo Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931 e consolidada pelo Decreto nº 21.241 de 14 de abril de 1932, a grade curricular do ciclo Fundamental do Curso Secundário, com quatorze disciplinas dispostas em cinco anos, a de Desenho Geométrico, juntamente com outras quatro, estava presente em todas as séries. E, no Ciclo Complementar, com duas séries, instituído pela Reforma de Campos, destinado à preparação para ingresso em escolas superiores, o Desenho Geométrico estava presente na segunda série para candidatos aos cursos de Engenharia e Arquitetura.

1.2 O ensino de Geometria no Brasil

O ensino escolar brasileiro teve origem ainda quando o Brasil era colônia de Portugal com a Companhia Jesuítica, baseado no humanismo cristão e embasado na Filosofia Aristotélica. Nesse período, a Matemática era tida como uma ferramenta para desenvolver um certo modo de raciocinar, necessária para a compreensão da Física.

Mas, segundo Meneses (2007), o estudo de Geometria não recebeu um destaque de importância por grande parte dos Jesuítas. Explica o autor as seguintes razões:

"Primeiro por não haver professores qualificados para o ensino da Geometria e, segundo porque a maioria dos jesuítas considerava que o ensino da Geometria era algo sem grande importância na formação do homem."

Valente (2007, p.35) diz que:

> ... o pensamento jesuítico baseava-se na ideia de que o estudo das ciências especulativas como a Geometria, a Astronomia e a Física era um divertimento vão. Considerava esses conhecimentos estéreis, infrutíferos e inúteis por eles mesmos. Para os Jesuítas, os homens não nasciam para medir linhas, para examinar a relação entre ângulos e para empregar seu tempo em considerar os diversos movimentos da matéria.

"A vida era muita curta e seu espírito grande, para se perder tempo com coisas tão pequenas....", assim pensavam os Jesuítas.

Esse modo de pensar a importância da Matemática fez com que se instalasse no país um estilo de ensino e organização curricular que preservou as características do desenvolvimento de Portugal, ancorado em suas necessidades socioeconômicas, distinto de muitos outros países da Europa.

Alguns anos após a colonização portuguesa houve o aumento populacional e o início de um processo de transformação da sociedade. Tal transformação concretizou-se com a constituição de famílias interessadas em se estabelecerem no Brasil. Com isso, houve a necessidade de se formalizar o ensino. Assim, as escolas jesuítas se expandiram por todo o território nacional. O objetivo era atender o anseio da sociedade, possibilitando aos seus filhos o ensino dado nos moldes europeus.

Segundo Silva (2006, p.52):

> as primeiras providências de criação de escolas no Brasil ocorreram em 1549, na Bahia, e em 1550 em São Vicente. Nessas duas instituições ensinavam-se a leitura e a escrita, mas somente em 1573, data em que os Jesuítas inauguraram o Colégio do Rio de Janeiro, é que o programa escolar incluiu, além da alfabetização, as quatro operações fundamentais.

Com esses dados ilustrativos, Silva (2006) constatou que o trabalho escolar com Matemática no Brasil teve sua origem nos ensinamentos dos algarismos e das quatro operações básicas. Gradativamente, o ensino foi sendo instituído desde os cursos elementares até a graduação, mas somente em 1757, na Bahia, a Matemática ganhou status de faculdade.

Na Faculdade de Matemática eram ensinados os conteúdos contidos no currículo da Universidade de Coimbra, pois os mestres Jesuítas eram oriundos de Portugal, embora com bastante conhecimento matemático, enfatizavam o que era do interesse da Corte. O foco do trabalho era a Geometria, baseada nos Elementos de Euclides, e Astronomia, pautada nos trabalhos de Ptolomeu. A Matemática trabalhada não refletia os avanços científicos que o continente europeu estava vivendo naquele momento.

De acordo com Tavares (2007), a Corte portuguesa, em 1648, contratou estrangeiros, especialistas em cursos militares, para virem ao Brasil ensinar e formar pessoal capacitado para trabalhos com fortificações militares.

Com esse fim houve uma propagação dos ensinamentos sobre artilharia, onde foram contratados especialistas na arte da guerra para iniciar a aula de Fortificação e Arquitetura Militar, e o Brasil, como colonizado, continuou seguindo o ritmo de desenvolvimento norteado pelos interesses de Portugal. Assim, a presença do ensino da Geometria no ensino brasileiro veio como currículo nos cursos para a defesa e o ataque. Com as aulas de fortificação houve o preparo para uma atividade específica e com isso um profissional qualificado, assim definido:

> *Engenheiro*: oficial que serve à guerra para ataques, defesa e fortificação de praças. É um matemático hábil, expert e astuto, que faz o reconhecimento das praças que se quer atacar e que mostra ao general o ponto mais frágil, que desenha fronteiras...Ao engenheiro cabe também a invenção de novas bombas... (VALENTE, 2007, p.41).

Tavares (2007) considera que os primeiros relatos verdadeiros de ensino de Geometria no Brasil estavam atrelados à estratégia militar.

Para ele, foi José Fernandes Pinto Alpoim que escreveu os dois livros que se tornariam os primeiros livros didáticos no Brasil. O **Exame de Artilheiro** em 1744 que compreendia três capítulos : Aritmética, Geometria e Artilharia; e em 1748 o **Exame de Bombeiro**, que foi escrito em dez tratados, sendo os dois primeiros dedicados à Geometria e à Trigonometria.

Meneses (2007) afirma que as escolas militares do século XVIII representaram toda a base do ensino de Geometria no Brasil.

> Ao retomarmos esse período do ensino brasileiro, percebemos que foram os cursos da Academia Real dos Guardas-Marinha e da Academia Real Militar que modelaram as origens do ensino de Matemática, criando programas escolares a serem seguidos e estruturando os conteúdos a ensinar (MENESES, 2007, p.41).

Ainda, segundo Meneses (2007, p.42):

> foram criadas as escolas primárias a partir da Carta outorgada por D. Pedro I, de 1824, por meio da Lei de 15 de novembro de 1827, a qual estabelecia a gratuidade do ensino primário. Nessas escolas eram ensinadas as noções básicas de Geometria, principalmente aquelas que fossem subsídios à medição de terrenos.

Também houve uma tentativa de desenvolver o Desenho Geométrico conforme afirma Meneses (2007) "havia a necessidade de exercitar o menino em traçar figuras já à mão, já com compasso e a régua."

Contudo, a introdução de Geometria no ensino primário não se concretizou por duas razões: "a ausência de professores qualificados e por não ser uma habilidade exigida no ingresso do ensino secundário"(MENESES, 2007, p.42).

As tentativas de incluir na escolarização fundamental, noções de Geometria como outro conteúdo de Matemática, além das quatro operações fundamentais foram infrutíferas do ponto de vista do que ocorreu de fato no ensino primário do Império.

> Apesar do texto de lei, o ensino de noções de Geometria não se tornou matemática escolar nas primeiras letras. De início, por não haver professores primários habilitados e depois, em razão de não ser um conhecimento escolar solicitado para o ingresso em nenhuma instituição de ensino secundário (MENESES, 2007, p.43).

Foi no ensino secundário que o ensino de Geometria ganhou importância, pois tornou-se pré-requisito para ingresso nos cursos superiores de Direito.

Meneses (2007) afirma que conforme o artigo 8º da Lei de 11 de agosto de 1827, que estabeleceu a criação das Academias de São Paulo e Olinda,

> Os estudantes que quiserem matricular nos Cursos Jurídicos devem apresentar as certidões de idade por que mostrem ter a idade de quinze anos completos, de aprovação da língua francesa, gramática latina, retórica, filosofia racional e moral e Geometria (MENESES, 2007, p.51).

Meneses (2007) afirma que, apesar de não se afinar com os demais pré-requisitos, o que gerou muitos debates sobre sua permanência, a Geometria se manteve como pré-requisito para o ingresso nos cursos jurídicos, pois havia um pensamento geral de que seu estudo levava o homem a adquirir ideias exatas em Economia Política, desenvolver a razão e fazer raciocinar com exatidão e método. O autor argumenta que em 1832, a Geometria também passou a ser exigida como pré-requisito para os cursos das Academias Médico-Cirúrgicas e nas escolas Politécnicas.

Para Meneses (2007), toda essa significação dada aos conteúdos matemáticos - Álgebra, Aritmética e, principalmente Geometria - para ingresso no curso superior serviu como fator decisivo para a inclusão desses conteúdos no ensino secundário, deixando assim, de ter um caráter somente militar e tornando-se conhecimento geral da cultura escolar, de forma que esses saberes fossem se transformando em disciplinas escolares independentes, reguladas pelo poder público e caracterizadas como conhecimentos não mais específicos, mas de cultura geral escolar.

A partir do momento, em que o poder público determinou que a Geometria deveria ser conhecimento obrigatório para quem ingressasse nos cursos Jurídicos, Médico-Cirúrgicos e das Escolas Politécnicas, ficou estabelecido, ao nosso ver, que a Geometria foi dando os primeiros passos para se caracterizar como uma disciplina escolar. Meneses (2007) afirma que "as disciplinas escolares quase sempre surgem a partir das finalidades objetivas, ou seja, as finalidades escolares quase que de uma forma geral são regidas e determinadas pelos órgãos políticos."

1.3 O ensino do Desenho Geométrico no Brasil

De acordo com Zuin (2001) o ensino do Desenho Geométrico permaneceu oficialmente por 40 anos consecutivos nos currículos escolares - de 1931 a 1971. Essa situação se manteve, apesar de que a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1961 propusesse opções de currículo onde o Desenho não era disciplina obrigatória.

Os currículos escolares do ensino fundamental no Brasil sofreram grandes mudanças em 1971 com a promulgação da lei 5692 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Havia um núcleo de disciplinas obrigatórias e outro núcleo de disciplinas optativas, as quais poderiam integrar a parte diversificada do currículo. As escolas tinham a liberdade de construir a sua grade curricular apenas dentro da parte diversificada. As instituições escolares deveriam seguir as determinações da legislação escolar, que impunham a integração da educação artística em todas as séries dos cursos de 1º e 2º graus do ensino básico. O Desenho Geométrico tornou-se uma disciplina optativa da parte diversificada do currículo. Deste modo, após a promulgação da referida lei, muitas escolas aboliram o ensino das construções geométricas ensinadas na disciplina Desenho Geométrico. Inclusive, as construções geométricas com régua e compasso não foram mais obrigatórias nos vestibulares de Arquitetura e Engenharia na década de 70. Esses fatos se entrelaçaram fortalecendo o abandono do Desenho Geométrico em escolas do ensino básico.

Algumas escolas mantiveram as construções geométricas nas aulas de Educação Artística. Essa situação confirmava a valorização dos traçados geométricos por determinados grupos, os quais prestigiavam e legitimavam esses conhecimentos.

Esse condição permaneceu até a década de 80, quando algumas editoras lançaram coleções de Desenho Geométrico para serem utilizadas no ensino fundamental, o que sugeriu uma revalorização das construções geométricas nas escolas.

De acordo com Zuin (2001), apenas em 1998, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, demonstrou-se uma real preocupação com o ensino das construções geométricas nesse nível de ensino.

1.4 Conceitos e Resultados Importantes

Definição 1.1. *Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se **triângulo** ABC.*

Notação: $\triangle ABC$.
$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$.

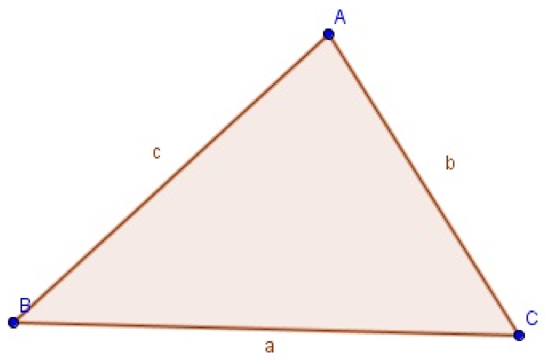

Figura 1.2: Triângulo ABC

Definição 1.2. *Um triângulo ABC é denominado:*

(a) ***Equilátero****, se* $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.

(b) ***Isósceles****, se ao menos dois dentre* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ *forem iguais.*

(c) ***Escalenos****, se* $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$.

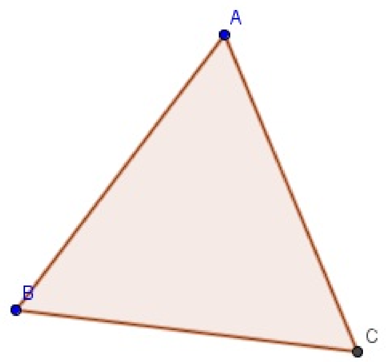

Figura 1.3: Triângulo ABC equilátero: AB=AC=BC

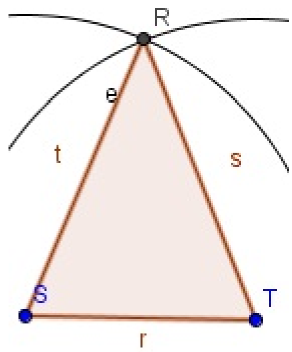

Figura 1.4: Triângulo RST isósceles: RS=RT

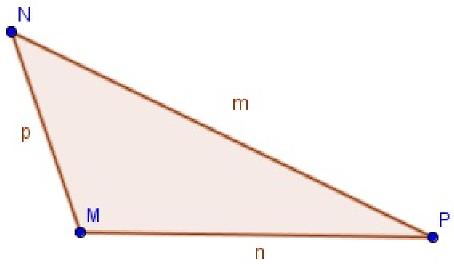

Figura 1.5: Triângulo MNP escaleno

Definição 1.3. *Um triângulo quanto às medidas de seus ângulos pode ser denominado*

(a) ***retângulo*** *se tiver um ângulo reto;*

(b) ***acutângulo*** *se todos os seus ângulos internos forem agudos;*

(c) ***obtusângulo*** *se tiver um ângulo obtuso.*

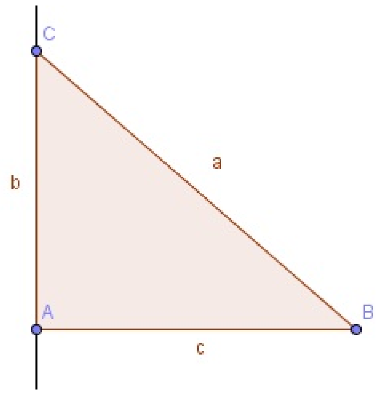

Figura 1.6: Triângulo ABC retângulo em A

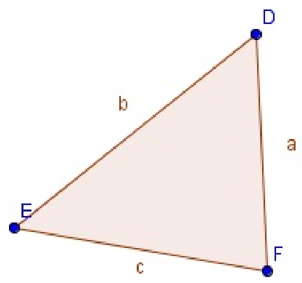

Figura 1.7: Triângulo DEF acutângulo

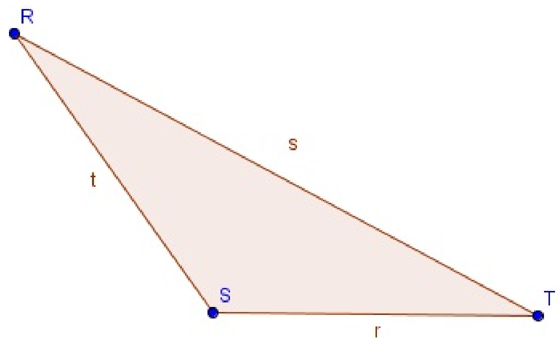

Figura 1.8: Triângulo RST obtusângulo em S

Definição 1.4. *A* ***hipotenusa*** *de um triângulo retângulo é o lado oposto ao ângulo reto; os outros dois lados do triângulo são os* ***catetos****.*

Na figura 1.6, BC é a hipotenusa e AB e AC são seus catetos.

Definição 1.5. *Sejam $n \geqslant 3$ um natural e A_1, A_2, ..., A_n pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2...A_n$ é um* ***polígono (convexo)*** *se, para $1 \leqslant i \leqslant n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro* *ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).*

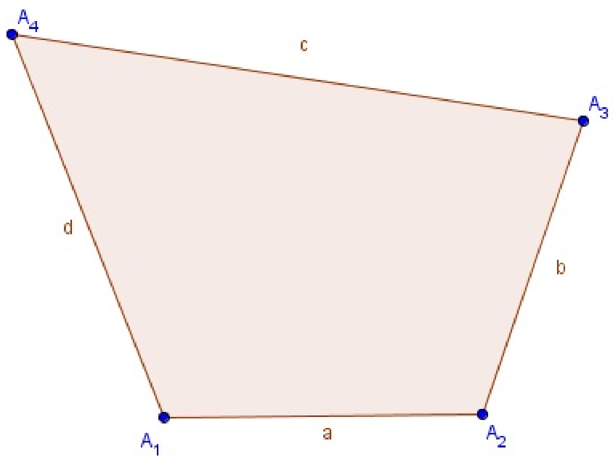

Figura 1.9: Um polígono convexo de quatro vértices (e lados).

Definição 1.6. *O quadrilátero é um polígono convexo de quatro lados.*

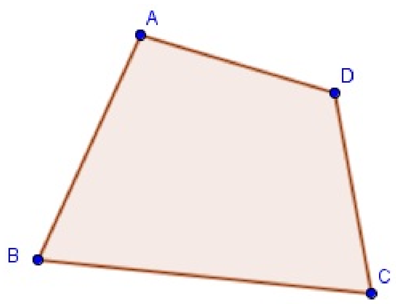

Figura 1.10: Um polígono convexo de quatro vértices (e lados).

Quadrilátero $ABCD = ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$.
O quadrilátero é um **polígono simples**, onde os segmentos
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são os lados.

Definição 1.7. *Um quadrilátero plano convexo é dito **paralelogramo** se possuir lados opostos paralelos.*

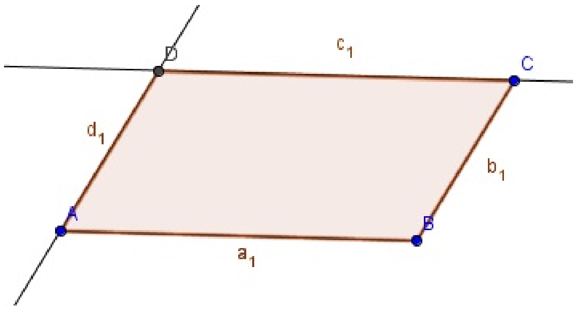

Figura 1.11: Paralelogramo ABCD

$ABCD$ é paralelogramo $\iff \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Definição 1.8. *Um quadrilátero convexo é um **retângulo** se todos os seus ângulos internos forem congruentes.*

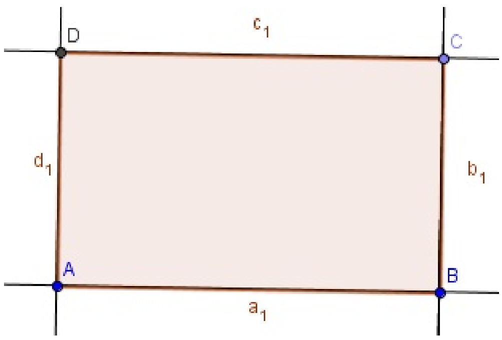

Figura 1.12: Retângulo

$ABCD$ é retângulo $\iff \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$.

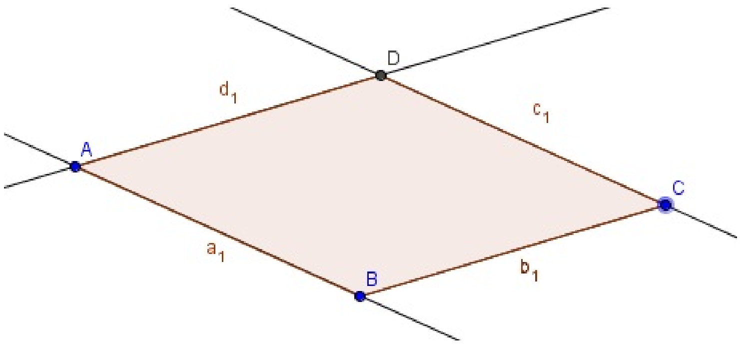

Figura 1.13: Losango

Definição 1.9. *Um quadrilátero convexo é um **losango** se todos os seus lados forem congruentes.*

$ABCD$ é losango $\Longleftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$.

Definição 1.10. *Um quadrilátero convexo é um **quadrado** quando for simultaneamente um retângulo e um losango. Assim, quadrados são quadriláteros de ângulos e lados congruentes.*

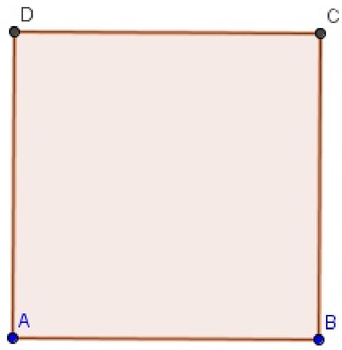

Figura 1.14: Quadrado

$ABCD$ é quadrado $\Longleftrightarrow (\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D})$ e $(\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA})$.

Proposição 1.1. *Em todo quadrado, as diagonais são congruentes e perpendiculares entre si, se intersectam em seus respectivos pontos médios e formam ângulos de* 45^o *com os lados do quadrilátero.*

Embora não façamos aqui a demonstração dessa proposição, a mesma pode ser encontrada em Neto (2012, p.88).

Definição 1.11. *Um quadrilátero plano convexo é um* ***trapézio*** *se, e somente se, possui dois lados opostos paralelos.*

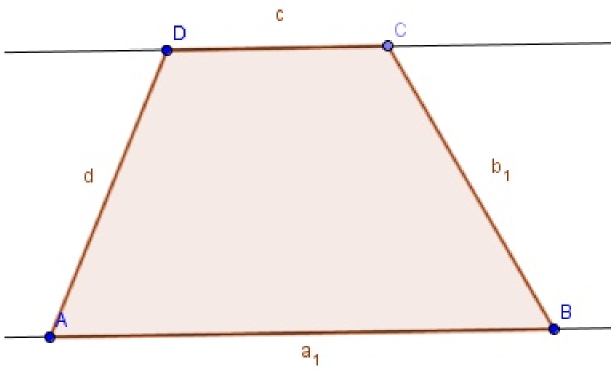

Figura 1.15: Trapézio

$ABCD$ é trapézio $\Longleftrightarrow$ $(\overline{AB} \parallel \overline{CD})$ ou $(\overline{AD} \parallel \overline{BC})$.

Os lados paralelos são as **bases** do trapézio: $\overline{AB}$ base maior e $\overline{CD}$ base menor.

Definição 1.12. *Um trapézio é denominado*

(a) ***isósceles****, se os lados que não são bases forem congruentes.*

(b) ***escaleno****, se os lados que não bases não forem congruentes.*

Definição 1.13. *Dizemos que dois triângulos são* ***congruentes*** *se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.*

Dados dois triângulos ABC e DEF escreveremos que eles são congruentes assim: $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

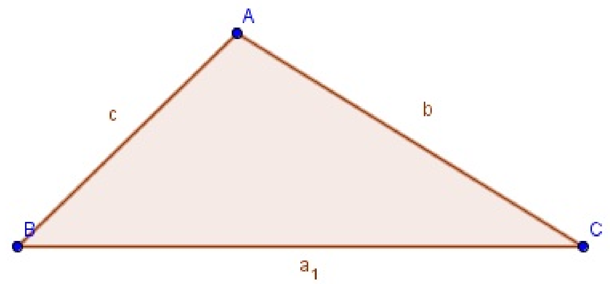

Figura 1.16: Triângulo ABC

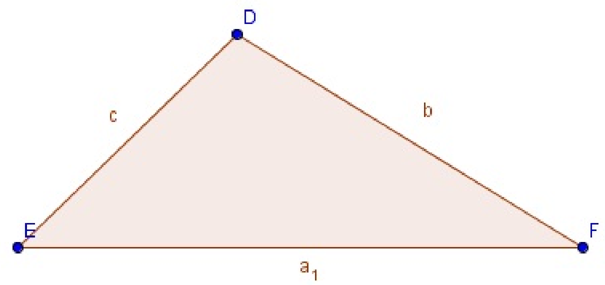

Figura 1.17: Triângulo DEF

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Longleftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

Segundo Caminha (2012), "seria interessante dispormos de critérios para decidir se dois triângulos são ou não congruentes. Tais critérios deveriam ser os mais simples possíveis, a fim de facilitar a verificação de congruência". As condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes, chamados *casos* ou *critérios* de congruência, descrevemos a seguir.

1º Caso (LAL) *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

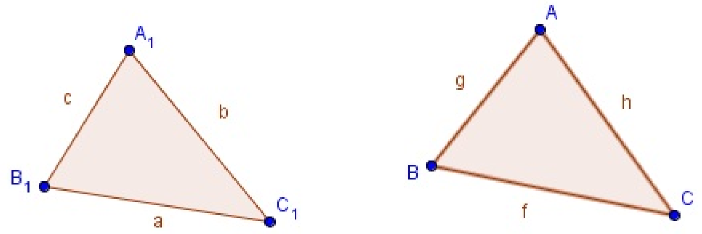

Figura 1.18: o caso de congruência LAL.

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados triângulos $A_1B_1C_1$ e ABC, se $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$, $\overline{A_1C_1} = \overline{AC}$ e $\hat{A}_1 = \hat{A}$, então, $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC$.

Com a correspondência de vértices $A_1 \leftrightarrow A$, $B_1 \leftrightarrow B$ e $C_1 \leftrightarrow C$. Em particular, segue, daí, que

$\hat{B}_1 = \hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}$ e $\overline{B_1C_1} = \overline{BC}$.

2º Caso (ALA) *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, então, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também devemos ter

$\hat{C} = \hat{C}'$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

3º Caso (LLL) *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

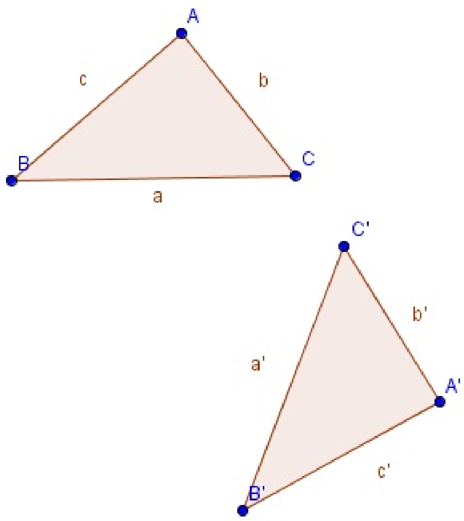

Figura 1.19: o caso de congruência ALA.

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ então, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também temos
$\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$.

4º Caso (LAA_o) *Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

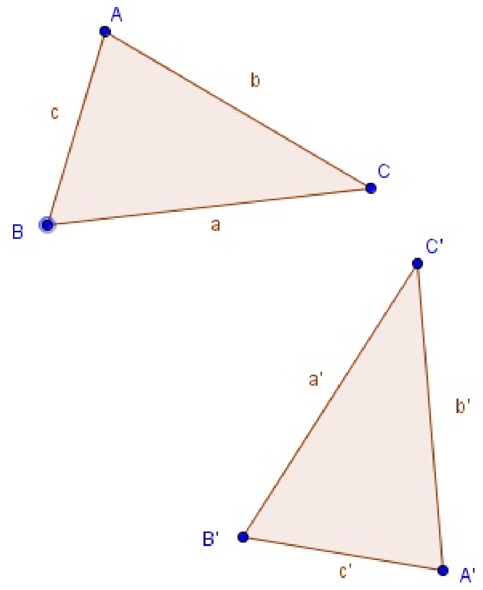

Figura 1.20: o caso de congruência LLL.

Em símbolos, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também temos

$\hat{C} = \hat{C}'$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

5º Caso *(triângulo retângulo) Se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos do primeiro são respectivamente congruentes à hipotenusa e a um dos catetos do outro, então os dois triângulos são congruentes.*

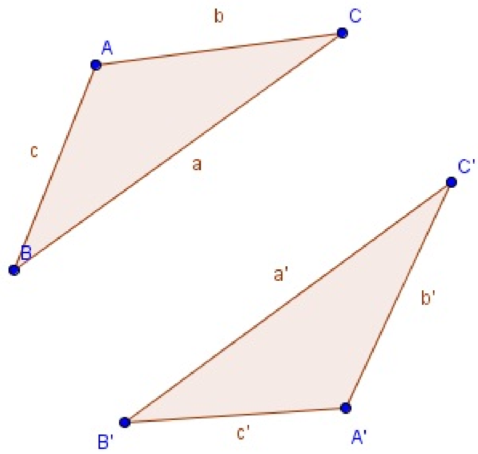

Figura 1.21: o caso de congruência LAAo.

Em símbolos, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, se as hipotenusas $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ são tais que $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, então pelo de congruência de triângulos retângulos, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Definição 1.14. *Uma* ***região triangular*** *é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos, cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo (vide figura 1.22). O triângulo é chamado de* ***fronteira*** *da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular, que não pertencem a sua fronteira, é chamado de* ***interior*** *da região triangular.*

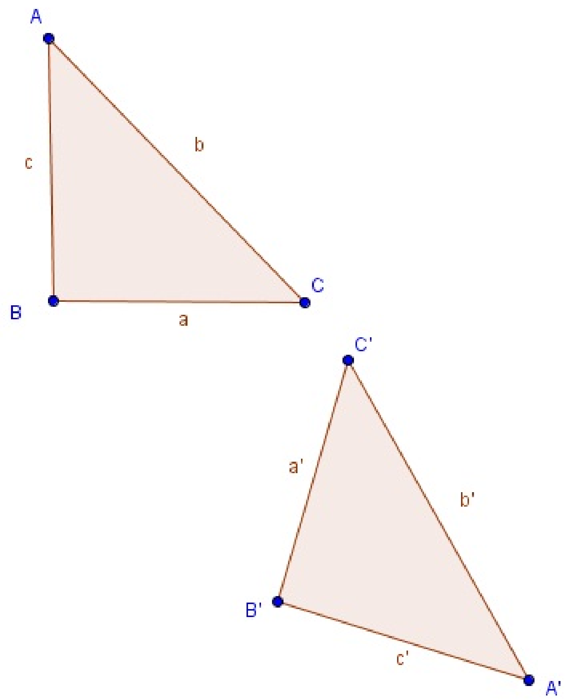

Figura 1.22: o caso de congruência de triângulos retângulos.

Definição 1.15. *Uma região* ***região poligonal*** *é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não têm pontos interiores em comum.*

A região poligonal pode ser vista na figura 1.23.

Definição 1.16. *Um ponto é* ***interior*** *a uma região poligonal se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto no seu interior. O* ***interior*** *da região poligonal é o conjunto de pontos que lhe são interiores. A* ***fronteira*** *da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.*

Nos respaldamos em Neto (2012) para demonstrar as áreas das figuras explicitamente trabalhadas no projeto, por entender que mecanicamente os discentes sabiam aplicar as fórmulas contudo sem entender o seu porquê. Convenientemente utilizamos a demonstração adotada por Neto no intuito de confirmar o que na prática eles faziam.

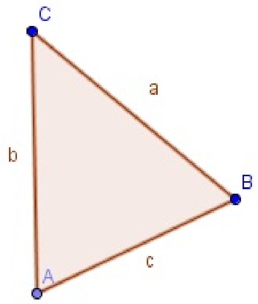

Figura 1.23: Região Triangular

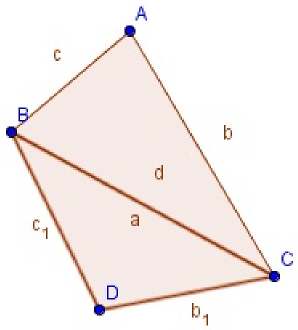

Figura 1.24: Região Poligonal

Segundo Neto (2012, p.234), a *área* de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado e que para polígonos se torna útil quando as propriedades abaixo relacionadas são válidas:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.

2. Se um polígono convexo é *particionado* em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, os quais não têm pontos interiores comuns), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

4. A área de um quadrado de lado $1cm$ é igual a $1cm^2$.

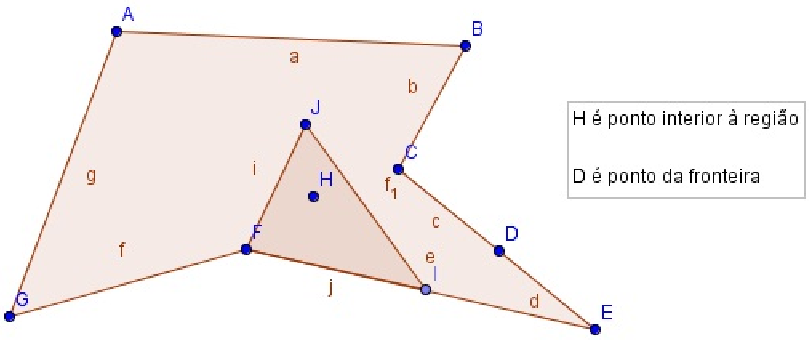

Figura 1.25: Ponto interior e Fronteira de uma região

Valendo as propriedades 1. a 4. acima, particionamos um quadrado de lado $n \in \mathbb{N}$ em n^2 quadrados de lados 1 cada. Denotando a área do quadrado maior por A_n, devemos ter A_n igual à soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1, de maneira que

$$A_n = n^2$$

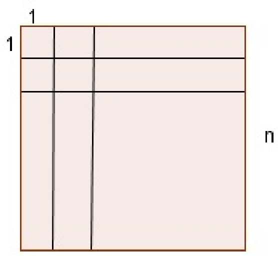

Figura 1.26: Quadrado de lado n

Consideramos agora um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, isto é, com tamanho do lado racional e área $A_{\frac{m}{n}}$. Arranjando n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n}.n = m$. Tal quadrado maior terá, como já sabemos, área m^2; por outro lado, como ele está particionado em n^2 quadrados de lado $\frac{m}{n}$ cada, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, isto é,

$$m^2 = n^2.A_{\frac{m}{n}}.$$

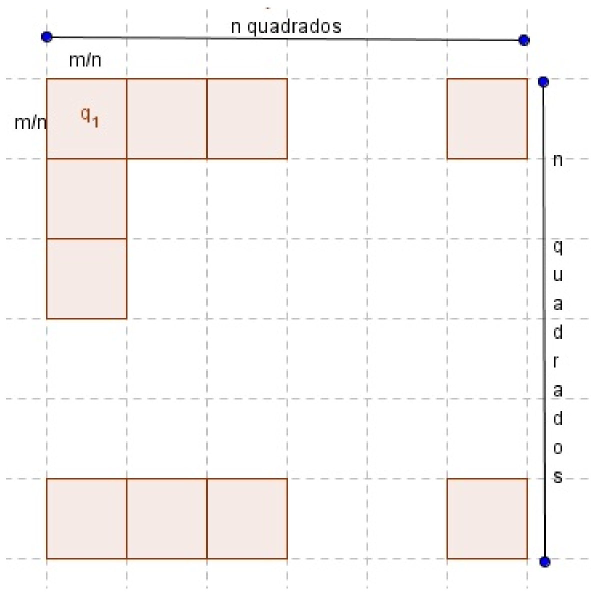

Figura 1.27: n x n cópias de um quadrado de lado m/n

Portanto,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

A discussão acima sugere que a área de um quadrado de lado l deve ser igual a l^2. Para confirmar tal suposição, utilizamos o seguinte argumento: para $k \in \mathbb{N}$, tomamos números racionais x_k e y_k tais que

$$x_k < l < y_k \quad \text{e} \quad y_k - x_k < \frac{1}{k}.$$

É importante ressaltar que a existência destes números está garantida pelo fato de que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, entre dois números reais existe sempre um número racional.

Em seguida, construímos quadrados Q_x e Q_y de lados x_k e y_k, respectivamente, o primeiro contido no quadrado dado e o segundo o contendo.

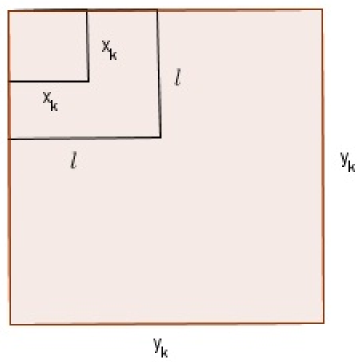

Figura 1.28: Quadrados

Como já sabemos calcular áreas de quadrados de lado racional, pela propriedade 3 podemos garantir que a área A_l do quadrado de lado l deve satisfazer as desigualdades

$$x_k^2 < A_l < y_k^2.$$

Mas como $x_k^2 < l^2 < y_k^2$, concluímos que ambos os números A_l e l^2 devem pertencer ao intervalo (x_k^2, y_k^2), de maneira que

$$\begin{aligned} |A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2 &= (y_k - x_k)(y_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right). \end{aligned}$$

Daí, como $k \in \mathbb{N}$, quando $k \longrightarrow +\infty$, temos que $\dfrac{1}{k} \longrightarrow 0$.

Além disso, $\left(\dfrac{1}{k} + 2l\right) \longrightarrow 2l$ também quando $k \longrightarrow +\infty$, o que torna a expressão $\left(\dfrac{1}{k} + 2l\right)$ limitada. Portanto, o produto $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{k} + 2l\right) \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow +\infty$. Logo,

$$A_l = l^2.$$

Resumimos a discussão acima no resultado que segue:

Proposição 1.2. *Um quadrado de lado l tem área l^2.*

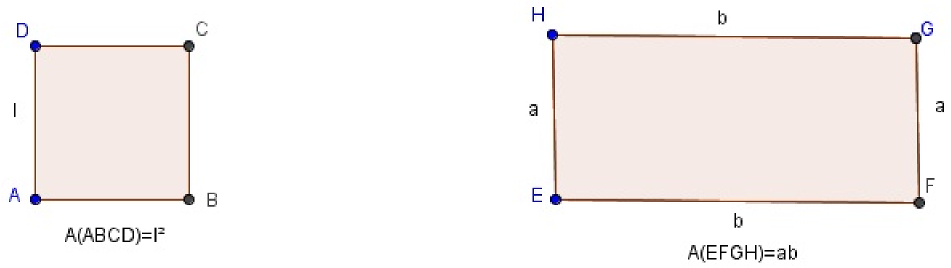

Figura 1.29: Áreas de um quadrado e de um retângulo.

Um argumento análogo ao acima permite provar que o retângulo (figura 1.29) de lados a, $b \in \mathbb{N}$ tem área igual a ab. Começamos com um retângulo de lados m, $n \in \mathbb{N}$, particionando-o em mn quadrados de lado 1 para mostrar que sua área é mn.

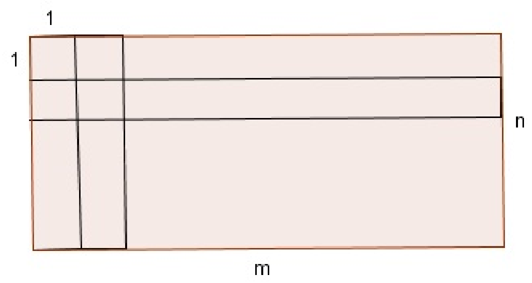

Figura 1.30: Retângulo de lados m e n.

Em seguida, tomamos um retângulo de lados racionais cujas medidas são $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com m_1, m_2, n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, e, com $n_1 n_2$ cópias do mesmo, montamos um retângulo maior de lados m_1 e m_2. Somando áreas iguais, concluímos que a área do retângulo dado originalmente é igual a

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} . \frac{m_2}{n_2} .$$

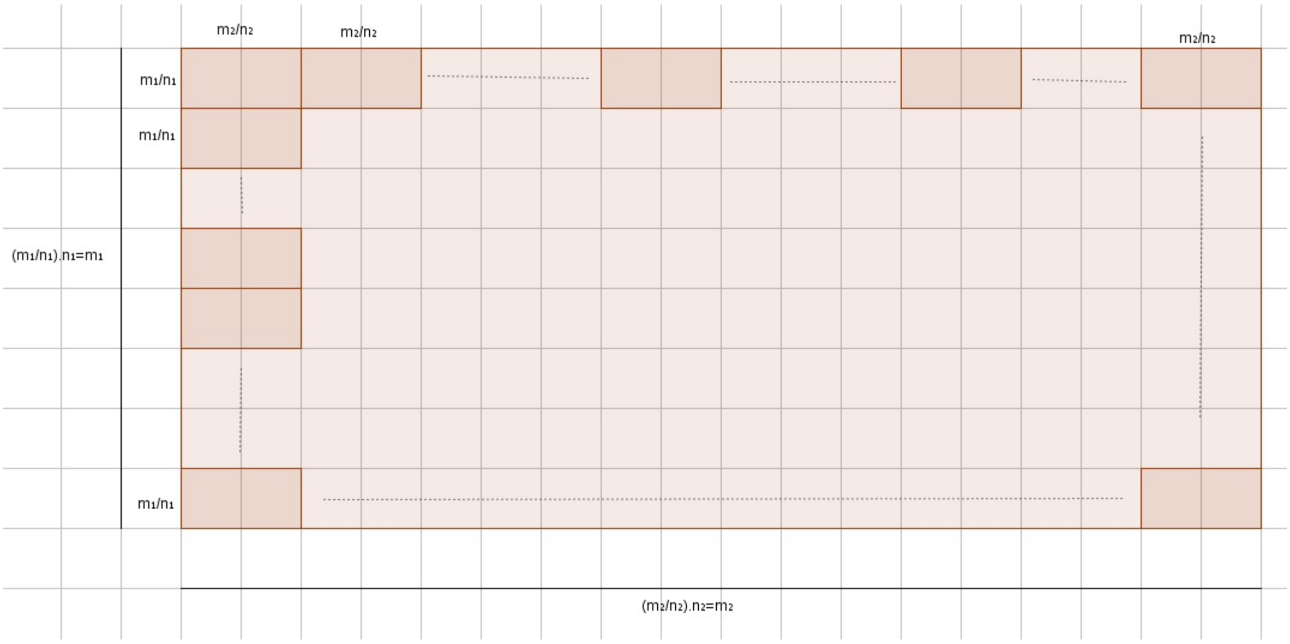

Figura 1.31: Retângulo cujos lados medem m_1 e m_2

.

Finalmente, tomemos um retângulo de lados a, $b > 0$ reais, e, para $k \in \mathbb{N}$, consideremos racionais x_k, y_k, u_k, v_k tais que

$$x_k < a < y_k,\ u_k < b < v_k \text{ e } y_k - x_k,\ u_k - v_k < \frac{1}{k}$$

.

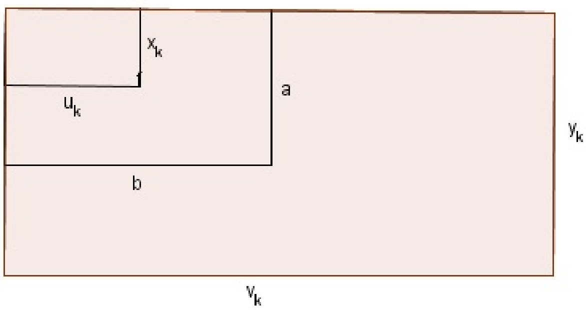

Figura 1.32: Retângulos

Sendo A a área do retângulo de lados a e b, um argumento análogo ao que foi feito para quadrados garante que A e ab pertencem ambos ao intervalo $(u_k x_k, y_k v_k)$ e, daí, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|A - ab| &< v_k y_k - u_k x_k = (v_k - u_k)y_k + u_k(y_k - x_k) \\
&< \frac{1}{k}(y_k + u_k) < \frac{1}{k}((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k) \\
&< \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right).
\end{aligned}$$

Daí, como $k \in \mathbb{N}$, quando $k \longrightarrow +\infty$, temos que $\frac{1}{k} \longrightarrow 0$. Desse modo, $\frac{2}{k} \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow +\infty$.

Além disso, $\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right) \longrightarrow 2a + 2b$ também quando $k \longrightarrow +\infty$, o que torna a expressão $\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right)$ limitada. Portanto, o produto $\frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right) \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow +\infty$.

Portanto,

$$A = ab$$

Sintetizamos a discussão acima com o seguinte resultado:

Proposição 1.3. *Um retângulo de lados a e b tem área ab.*

Baseando-se nas propriedades anteriormente relacionadas, vamos demonstrar a área de algumas regiões poligonais simples. Iniciaremos pelo paralelogramo.

Proposição 1.4. *A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

Consideremos o paralelogramo $ABCD$ da figura a seguir para a demonstração da proposição, no qual $\overline{AB} = b$ e h denota a altura relativa ao lado $\overline{AB} = \overline{CD}$. Denotaremos por $(ABCD)$ a área do paralelogramo $ABCD$.

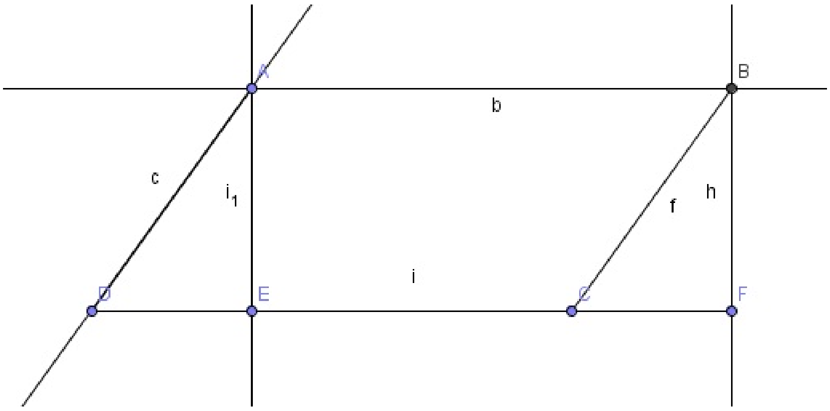

Figura 1.33: Paralelogramo ABCD

Nos basearemos em Barbosa (2012) para sua prova.

Demonstração: Em termos da notação fixada acima, devemos provar que a área do paralelogramo $ABCD$ é $b.h$. Para isto, traçamos, a partir dos pontos A e B, dois segmentos, $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$, perpendiculares à reta que contém $\overline{CD}$. O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB}.\overline{BF}$, a qual, em termos de nossa notação, é exatamente $b.h$. Para concluir a demonstração, observe que os triângulos ADE e CBF são congruentes pelo caso de congruência de triângulos retângulos, pois $\hat{E} \equiv \hat{F} = 90^o$ (por construção), $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ (por hipótese) e $\overline{AE} \equiv \overline{BE}$ (segmentos paralelos determinados entre retas paralelas).

Daí,

$(ABCD) = (ABCE) + (ADE) = (ABCE) + (CBF) = (ABFE) = b.h$ ■

O próximo resultado nos fornece a maneira como calculamos a área de um triângulo. Utilizaremos (ABC) como notação para a área de um triângulo ABC.

Proposição 1.5. *A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Demonstração: Dado um triângulo ABC, traçamos pelo vértice C, uma reta paralela ao lado AB, e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC. Estas duas retas se interceptam em um ponto D. O polígono $ABDC$ é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes pelo caso (LAL). Pela propriedade 1, segue que tais triângulos têm áreas iguais.

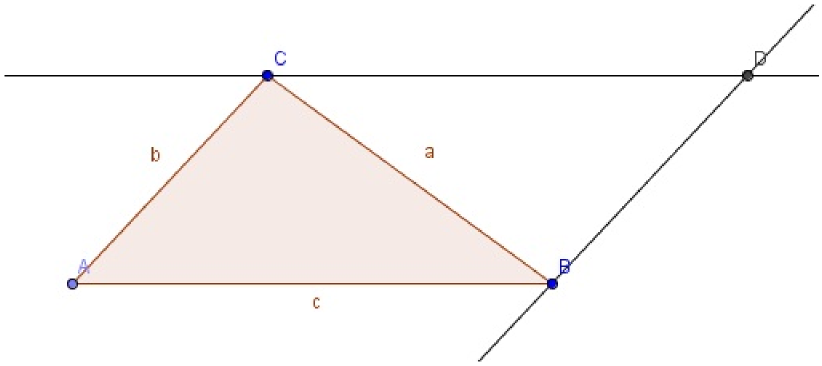

Figura 1.34: Triângulo ABC

Como $(ABDC) = (ABC) + (CDB)$ e $(ABC) = (CDB)$, então: $(ABC) = \dfrac{1}{2}(ABDC)$. Para completar a demonstração, observe que a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativamente ao lado AB ■

Finalizaremos as demonstrações com o resultado a seguir, o qual nos mostrará como calcularemos a área de um trapézio.

Proposição 1.6. *A área de um trapézio é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um trapézio, cujas bases são os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Trace a diagonal $\overline{AC}$ para dividir o trapézio em dois triângulos.

Trace as alturas $\overline{CE}$, do triângulo ACB, e $\overline{AF}$, do triângulo ACD. Então, teremos que $\overline{AF} = \overline{CE}$, já que os lados AB e CD são paralelos.

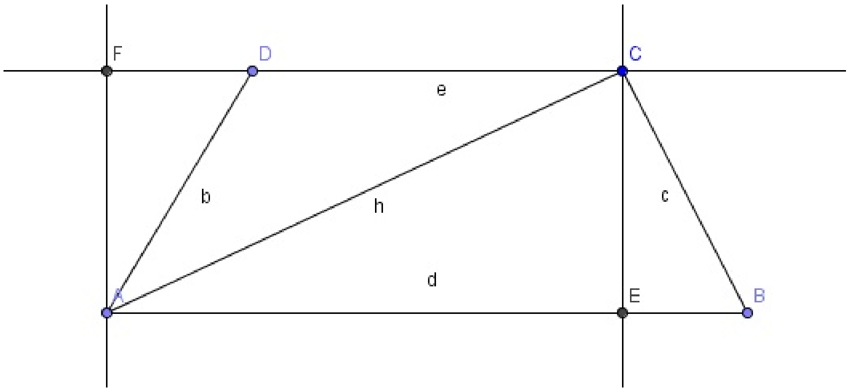

Figura 1.35: Trapézio ABCD

Como consequência

$$(ABCD) = (ACB) + (ACD) = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{CE} + \frac{1}{2}\overline{DC}.\overline{AF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}).\overline{CE} \blacksquare$$

CAPÍTULO 2

O DESENHO GEOMÉTRICO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM

NESTE capítulo veremos o que alguns autores dizem a respeito da importância do Desenho Geométrico como ferramenta de aprendizagem, mostrando que ele ajuda a desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento divergente, a organização e a criatividade.

2.1 A importância do Desenho Geométrico na aprendizagem

O estudo do Desenho Geométrico é significativo para uma boa aprendizagem nos assuntos referentes à Geometria.

Silva (2006) afirma que os desenhos das figuras geométricas representam parte importantíssima para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa. Assim, podemos entender que é importante que o estudante por si só desenhe a figura, procurando caminhos, imaginando construções, pesquisando interconexões, forçando o raciocínio, e exercitando a mente.

Dante (2002) faz uma observação muito importante a respeito do Desenho Geométrico quando diz:

> ...tudo o que nos rodeia lembra formas geométricas, basta olharmos os objetos que nos cercam. Vivemos em um mundo de formas geométricas. Elas constituem um mundo de diversidades e podem ser constatadas nas artes, na natureza, nas construções, etc (DANTE, 2002, p.89).

Kalter (1986) afirma que o ensino do desenho pode ser entendido como essencial no aprendizado do aluno em Geometria para que não haja bloqueio das capacidades de planejar, projetar ou abstrair, estabelecendo assim uma relação contínua entre a percepção visual e o raciocínio espacial. Argumenta o autor que fez uma investigação exploratória consistindo de um teste de geometria aplicado a 136 alunos de 8ª série de seis escolas de Curitiba com a finalidade de comparar os rendimentos entre aqueles alunos que tiveram e aqueles que não tiveram a oportunidade de estudar desenho geométrico; um questionário (com questões abertas e fechadas) aplicado a quatorze professores das mesmas, com o objetivo de coletar opiniões sobre a importância do Desenho Geométrico e a Geometria. Os resultados mostraram que os alunos das escolas que ofereceram Desenho Geométrico apresentaram um desempenho significativamente melhor em relação aos outros. Os professores, por outro lado, opinaram que o Desenho Geométrico "concretiza os conteúdos abstratos"da Geometria e as duas disciplinas se completam.

Isso nos leva a entender que o Desenho Geométrico poderá contribuir em diferentes campos da Matemática. Efetivamente detectamos correlações entre o Desenho Geométrico e a Geometria, em determinados campos do cotidiano dos homens, em particular, no cálculo de áreas de figuras planas.

Enfim, o Desenho Geométrico permite concretizar os conhecimentos teóricos da Geometria, confirmando as propriedades das figuras geométricas, o que possibilita ao aluno uma maior habilidade na resolução de problemas correlatos.

2.2 Os instrumentos

Os instrumentos de Desenho Geométrico são a régua, o compasso e o par de esquadros.

1. A régua

   No sentido original da palavra, a régua não é um instrumento de medida, mas apenas um instrumento que permite traçar linhas retas, e fundamentalmente nesse sentido é que ela foi utilizada nas construções realizadas durante as atividades com os alunos, as quais serão mostradas no capítulo seguinte.

2. O compasso

   O compasso é o instrumento que permite traçar circunferências ou arcos de circunferências. Entretanto, seu uso requer algumas recomendações: o uso de grafite HB no compasso, manutenção da grafite sempre bem apontada, condição essencial para se conseguirem figuras precisas.

3. O par de esquadros

   Os esquadros são usados como instrumentos de desenho para o traçado de retas paralelas, divisão de segmentos em partes iguais, perpendiculares.

   Entretanto não foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho em função de pouco tempo disponível.

CAPÍTULO 3

AS ATIVIDADES

NESTE capítulo trazemos as atividades realizadas com os alunos da turma 4TIV1 do Curso de Informática do Centro Territorial de Educação Profissional do Agreste de Alagoinhas - Litoral Norte no município de Alagoinhas-Bahia, no período de 04/08/14 a 15/12/14 com encontros semanais cuja duração eram de 100 minutos. Tais atividades foram de grande importância para o desenvolvimento do projeto. Antes de trabalharmos com as demonstrações das fórmulas para o cálculo de áreas das figuras planas elementares tais como o triângulo, o retângulo, o quadrado, o paralelogramo e o trapézio verificamos que seria necessária a construção geométrica das figuras em epígrafe. Trabalhando nesse viés foi possível verificar as propriedades e características inerentes a cada figura.

Atividade 1: Construir um triângulo ABC dadas as medidas de seus lados: AB = 7cm , BC = 5cm e AC = 4cm .

Procedimentos para a construção da figura:

1. Utilizando a régua marcamos o segmento $\overline{AB} = 7cm$.
2. Com centro do compasso no ponto A e abertura igual a $4cm$ traçamos um arco de circunferência.
3. Com centro do compasso no ponto B e abertura igual a $5cm$ traçamos um arco.
4. A intersecção entre os dois arcos acima citados determinou-se o ponto C.

5. Com a régua ligamos o ponto A ao ponto C e este último ao ponto B, obtendo-se o triângulo ABC pedido. (figura 3.1)

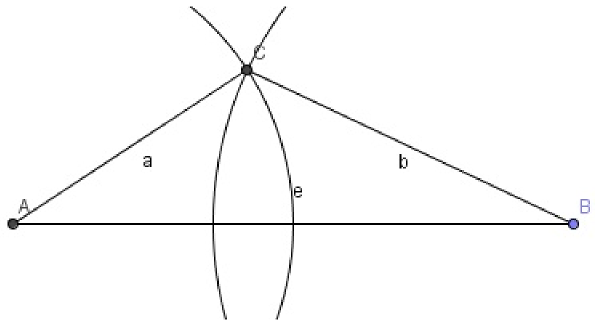

Figura 3.1: Triângulo ABC

Atividade 2: Construir um paralelogramo de lados medindo 6cm e 4cm .

Procedimentos:

1. Com a régua marcamos o segmento $\overline{AB} = 6cm$.
2. Centro do compasso em A e abertura igual a $4cm$ traçamos um arco de circunferência e marcamos o ponto C qualquer.
3. Com igual abertura anterior, centro do compasso em B traçamos um arco qualquer.
4. Com centro do compasso em C e abertura $\overline{AB} = 6cm$ traçamos um arco de circunferência o qual interceptou o arco anteriormente traçado, determinando assim o ponto D.
5. Ligamos o ponto A ao ponto C e esse último ao ponto D .
6. Finalmente ligamos o ponto D ao ponto B obtendo-se a construção do paralelogramo solicitado. (figura 3.2)

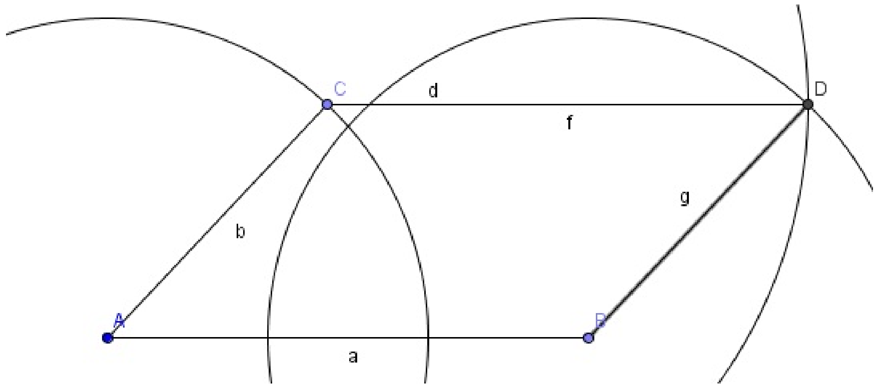

Figura 3.2: Paralelogramo ABDC

Logo após as construções das duas figuras anteriormente descritas, percebemos que para as posteriores precisaríamos de duas construções auxiliares significantes para a conclusão das mesmas, pois era um dos nossos objetivos que o Desenho Geométrico associado à Geometria fosse evoluindo naturalmente, propiciando assim as atividades 3 e 4.

Atividade 3: Dada uma reta e um ponto fora dela, traçar uma reta paralela à reta dada que passe por esse ponto.

Procedimentos:

1. Traçamos a reta que passa por A e B e marcamos o ponto C fora dela.
2. Com centro do compasso em A e abertura até o ponto C traçamos um arco qualquer que passou por esse último, obviamente.
3. Com centro do compasso em B e abertura do compasso igual a AC traçamos um arco de circunferência.
4. Com centro do compasso em C e abertura igual ao segmento $\overline{AB}$ traçamos um arco de circunferência tal que interceptou o último arco traçado.
5. A intersecção dos dois arcos supracitados anteriormente determinou o ponto D.
6. Com a régua traçamos a reta que passa pelos pontos C e D, obtendo-se assim a reta pedida. (figura 3.3)

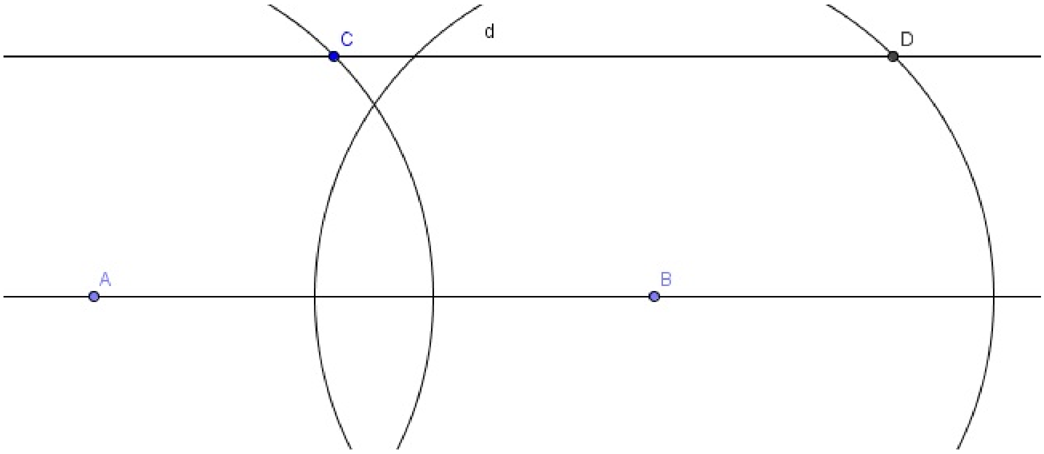

Figura 3.3: AB e CD são retas paralelas

Atividade 4: Dada uma reta qualquer, construir uma reta perpendicular a esta reta.

Procedimentos:

1. Marcamos a reta **a** que passa por A e B.
2. Centro do compasso em A traçamos o arco $\widehat{\text{CD}}$
3. Centro do compasso em C e abertura igual ao segmento $\overline{CD}$ traçamos um arco de circunferência.
4. Com a mesma abertura do compasso e centro do compasso em D interceptamos o arco anterior determinando-se o ponto E .
5. Traçamos a reta que passa pelos pontos A e E obtendo-se assim a reta **b** perpendicular a reta **a** dada. (figura 3.4)

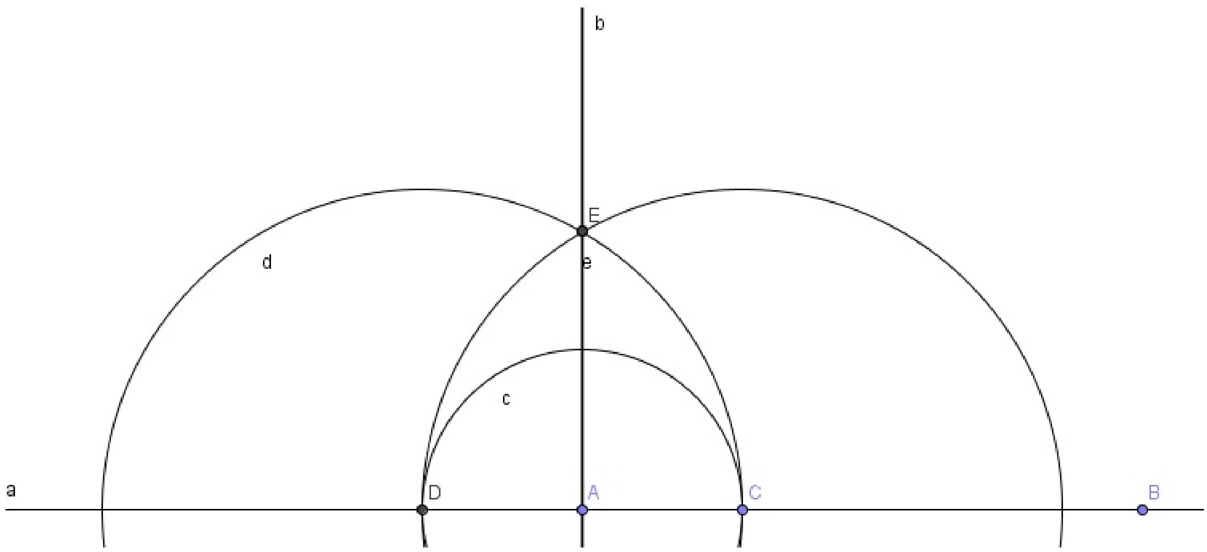

Figura 3.4: **a** é perpendicular a **b**

Atividade 5: Construir um quadrado de lado 5cm.

Procedimentos:

1. Marcamos o segmento $\overline{AB} = 5cm$.
2. Em A traçamos a reta **b** perpendicular a $\overline{AB}$.
3. Centro do compasso em A com abertura igual a $\overline{AB}$ traçamos o arco que interceptou **b** no ponto F.
4. Centro do compasso em B e abertura $\overline{AB}$ traçamos um arco.
5. Centro do compasso em F e abertura $\overline{FA}$ traçamos um arco de modo que interceptou o arco anteriormente traçado no ponto G.
6. Ligamos o ponto F ao ponto G e seguidamente G a B, obtendo-se o quadrado $ABGF$ de lado $5cm$. (figura 3.5)

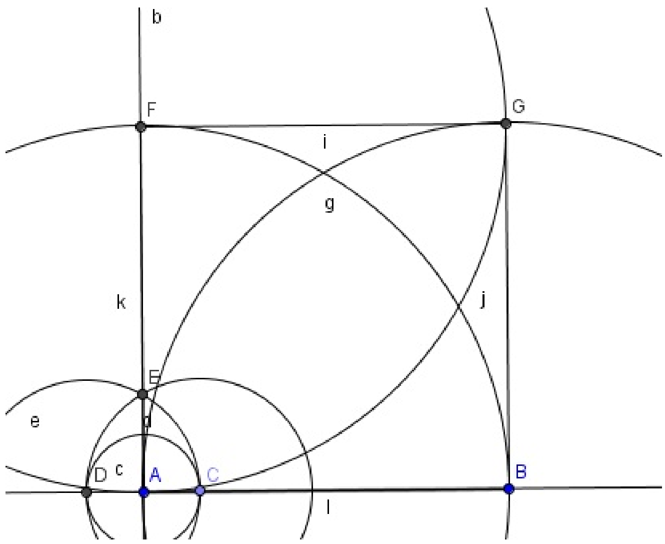

Figura 3.5: Quadrado ABGF

Atividade 6: Construir um retângulo de lados 8cm e 5cm.

Procedimentos:

1. Traçamos o segmento $\overline{AB}$ igual a $8cm$.
2. Traçamos a reta **f** perpendicular a $\overline{AB}$ passando por A.
3. Centro do compasso em A traçamos um arco de abertura $3cm$ sobre **f** determinando-se o ponto F.
4. Centro do compasso em B traçamos um arco de abertura $3cm$.
5. Com centro do compasso em F traçamos um arco de abertura $8cm$ que interceptou o arco anteriormente determinando-se o ponto G.
6. Ligamos o ponto F ao ponto G e esse último ao ponto B construindo assim o retângulo solicitado. (figura 3.6)

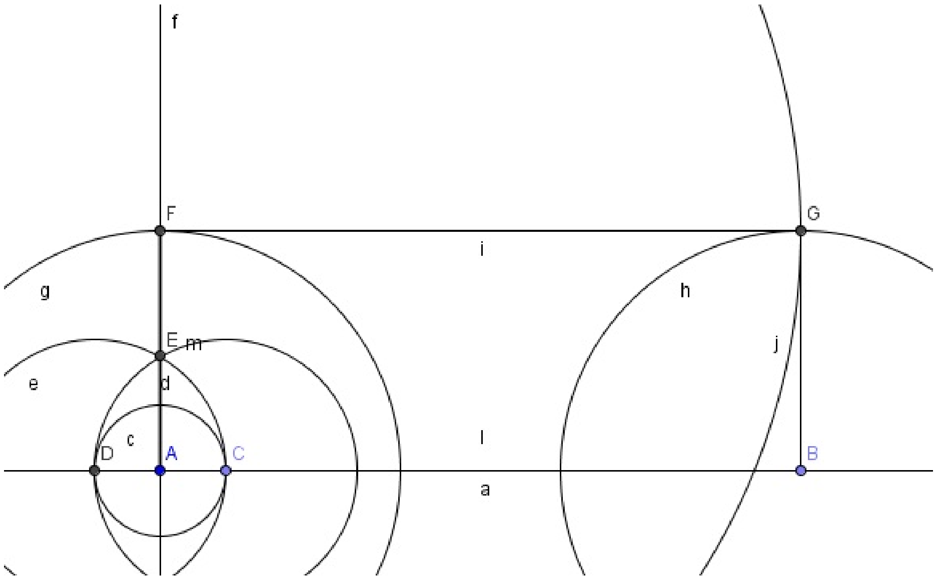

Figura 3.6: Retângulo ABGF

Atividade 7: Construir um trapézio sabendo-se que a base maior mede 10 cm, a menor 5cm , um dos lados oblíquos 4cm e sua altura 3cm.

Procedimentos:

1. Traçamos a reta **a** e sobre ela marcamos o segmento $\overline{AB} = 10cm$.
2. Ainda sobre **a** marcamos o ponto C qualquer.
3. Por C traçamos a perpendicular **d** e marcamos $\overline{CP} = 3cm$, o que representa a altura do trapézio.
4. Traçamos uma reta paralela à reta suporte do segmento $\overline{AB}$ que passa por P.
5. Com centro do compasso em A e abertura igual a $4cm$ traçamos um arco de modo que o mesmo interceptou a reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ no ponto Q .
6. Ligamos o ponto A ao ponto Q obtendo-se o segmento $\overline{AQ}$ que representa um dos lados oblíquos do trapézio.
7. Centro do compasso em Q e abertura igual a $5cm$ traçamos um arco de tal modo que interceptou a reta $\overleftrightarrow{QP}$ no ponto R.
8. Ligamos o ponto R ao ponto B construindo então o trapézio $ABRQ$. (figura 3.7)

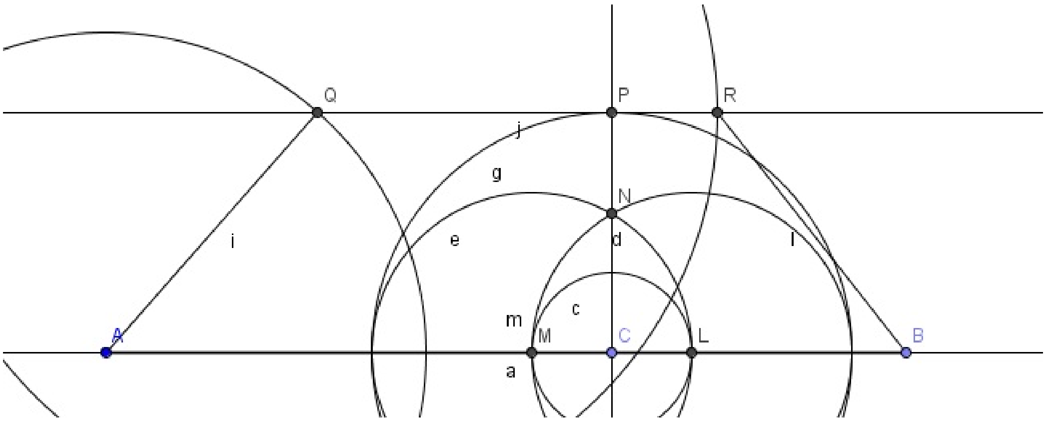

Figura 3.7: Trapézio ABRQ

Embora não tinham sido realizadas com os discentes, as atividades que seguem são básicas e auxiliam o entendimento das demais.

Atividade 8: Dado um ângulo qualquer, determinar sua bissetriz.

Procedimentos:

1. Centro do compasso no vértice do ângulo, trace um arco de circunferência de tal modo que intercepte seus lados.
2. Centro do compasso no ponto A e abertura igual a $\widehat{AB}$ traçamos um arco qualquer.
3. Com a mesma abertura utilizada no item anterior e centro do compasso em B interceptamos o arco anteriormente traçado tal que marcamos o ponto C.
4. Com a régua traçamos uma semirreta de origem O passando por C.
5. $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo indicado. (figura 3.8)

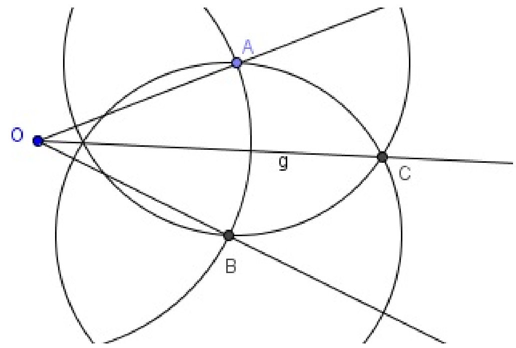

Figura 3.8: Bissetriz de um ângulo

Atividade 9: Dado um segmento $\overline{AB}$, construir sua mediatriz.

Procedimentos:

1. Centro do compasso em A e abertura maior que a metade de $\overline{AB}$ traçamos um arco de circunferência.
2. Com a mesma abertura, centro do compasso em B interceptamos o arco anteriormente traçado e marcamos os pontos C e D.
3. Ligamos o ponto C ao ponto D obtendo a reta que intercepta $\overline{AB}$ no ponto E.
4. $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz do segmento indicado. (figura 3.9)
5. Consequentemente, E é o ponto médio do segmento dado. (figura 3.9)

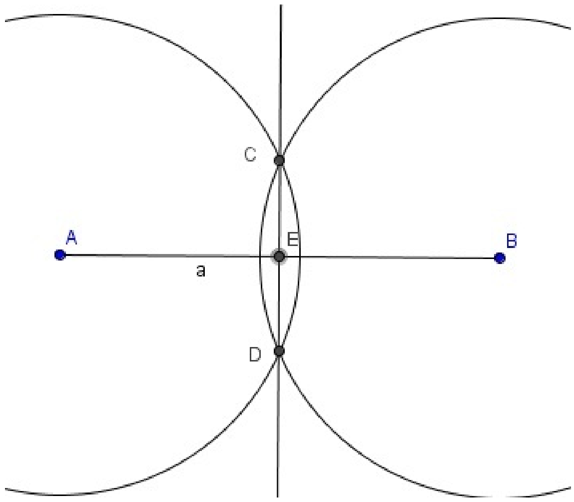

Figura 3.9: Mediatriz de um segmento

Atividade 10: Sejam λ uma circunferência de centro O e $A \in \lambda$ um ponto qualquer. Traçar uma reta tangente a λ no ponto A.

1. Traçamos o raio $\overline{OA}$ prolongando-o externamente à circunferência.
2. Centro em A e abertura do compasse menor que o raio $\overline{OA}$ traçamos um arco de circunferência obtendo-se os pontos B e C.
3. Traçamos a mediatriz de $\overline{BC}$.
4. $\overleftrightarrow{DE}$ é a reta pedida. (figura 3.10)

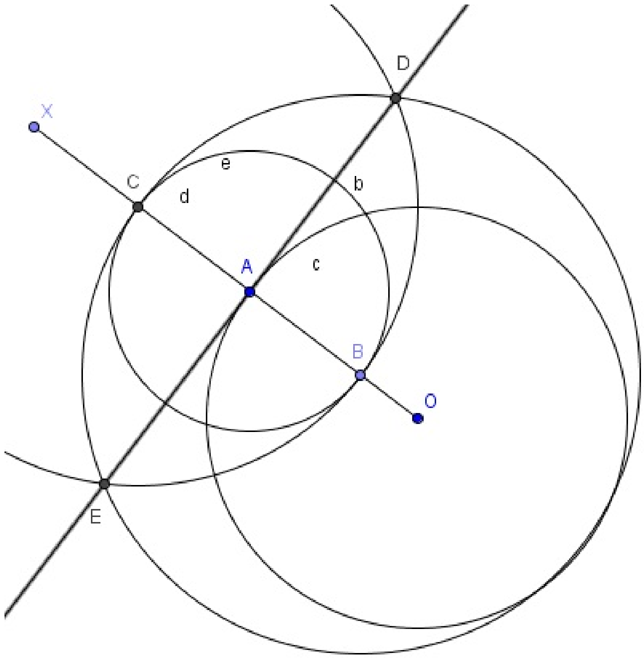

Figura 3.10: Reta tangente

Após o manuseio com a régua e o compasso para a construção de figuras geométricas, percebemos que os alunos tornaram-se mais cuidadosos e preparados para o entendimento de como deduzir e calcular a área de algumas figuras planas elementares, uma vez que os mesmos já tinham conhecimento das propriedades inerentes às figuras trabalhadas durante as construções geométricas das mesmas.

CAPÍTULO 4

RELATOS DE EXPERIÊNCIA

Neste capítulo trazemos os caminhos percorridos para concretização deste trabalho. Antes de mais nada é importante salientar o quanto essa experiência proporcionou um resultado exitoso.

O trabalho foi realizado com todos os discentes da turma 4TIV1 do Curso de Informática do Centro Territorial de Educação Profissional do Agreste de Alagoinhas.

A turma em epígrafe não representava um exemplo de turma dinâmica e era uma grande preocupação para nós torná-la mais movimentada, que os alunos fossem mais participativos, pois bem sabíamos que naquela turma havia alunos com grande potencial em Matemática.

Para iniciarmos o trabalho efetuamos um Teste de Sondagem (anexo A) a respeito do conhecimento que eles tinham sobre as definições das figuras planas elementares que iríamos trabalhar.

Por tratar-se de figuras planas percebemos a necessidade que tínhamos de saber se eles possuíam a ideia do que era uma figura plana. Assim, a nossa primeira aula consistiu em fazer a identificação entre algumas figuras e objetos trazidos por eles para definirmos o que era uma figura plana. (Figuras 4.1 e 4.2)

Figura 4.1: Objetos trazidos pelos Estudantes

Figura 4.2: Objetos trazidos pelos Estudantes

As aulas seguintes foram desenvolvidas efetuando as construções geométricas das figuras planas descritas no capítulo três. Vale ressaltar que não houve grandes dificuldades para o manuseio do compasso e da régua. Percebemos na verdade que os discentes tiveram a oportunidade de desenvolver a habilidade de construir figuras com o uso dos instrumentos supracitados, o que tornou as aulas mais motivadas e dinâmicas como desejávamos.

As construções propiciaram a verificação das definições e propriedades inerentes às figuras as quais estávamos construindo. As argumentações eram efetivadas conforme à formalidade matemática, pois a elegância do saber matemático se expressa através de sua escrita e oralidade.

Imbuídos dos conhecimentos adquiridos por meio das construções geométricas das figuras planas trabalhadas, a proposta foi definir área de uma figura plana, demonstrar as expressões das áreas para os cálculos dessas figuras e efetivar suas aplicações nos exercícios selecionados para verificação desses conhecimentos (anexo B).

Foi notória a importância dessa sequência didática uma vez que durante a resolução dos exercícios os alunos fizeram conjecturas acerca dos conhecimentos desde às construções geométricas quanto às demonstrações das fórmulas para o cálculo das áreas, possibilitando assim uma significação ao trabalho efetuado.

Após as demonstrações das fórmulas para o cálculo das áreas das figuras procuramos usar uma metodologia diferente daquela que é normalmente utilizada. Ao invés de fazer um exercício a cada dedução demos preferência em deduzir todas as fórmulas para depois então verificar durante a resolução dos problemas o discernimento dos alunos em reconhecer as propriedades das figuras, bem como a linha de raciocínio tomada por eles. Isso porque os discentes argumentaram que quando se deparavam com problemas relativos ao cálculo de área de figuras planas comumente eles não se achavam aptos para resolvê-los por não saberem quais as fórmulas que iriam utilizar e por verificarem que não se trata de cálculos de figuras isoladas - os mesmos possuem um conhecimento muito precário para resolver problemas mais elaborados. Pensando nesse viés procuramos trabalhar em torno de problemas interessantes e que serviriam de embasamento para a vida deles. Desse modo priorizamos alguns exercícios de Olimpíadas Matemáticas por tratar-se de um projeto em âmbito nacional que funciona como um atrativo no ensino de Matemática.

Após a aplicação dos 2 questionários percebemos um maior entusiasmo nas aulas de Matemática, os alunos tornaram-se mais questionadores e vimos uma melhoria na oralidade e escrita matemáticas.

Podemos expressar com firmeza que a experiência foi de muito sucesso uma vez que os objetivos foram alcançados. Como resultado desse trabalho foi criado na Unidade Escolar da aplicação desse projeto um grupo de estudos que reúne interessados pelo saber matemático. Esse grupo ficou bastante motivado pela resolução de exercícios, os quais eram todos de Olimpíadas Matemáticas, pois segundo um deles, ..."Agora eu tenho condições de resolver os exercícios que apareciam na prova das Olimpíadas de Matemática da segunda fase...".

Esse grupo se reúne todas as quartas-feiras pela manhã de 7h às 11h na biblioteca da Unidade Escolar para estudar os conteúdos que fazem parte do currículo do ensino médio. O mais recente trabalho desse grupo é a execução de uma Olimpíada Matemática interna a qual se iniciou em 25/05/15 visando preparar todos os discentes da unidade para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) 2015.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do percurso pedagógico no ensino de Matemática, pudemos constatar as dificuldades apresentadas por alunos de ensino médio em desenvolver o pensamento geométrico.

Com base nesta constatação, elaboramos um projeto que serviu de base para essa Dissertação, que teve como principal objetivo analisar se o uso do Desenho Geométrico, contribui no processo de aprendizagem de Geometria no Ensino Médio e em particular, no ensino de área de figuras planas.

Durante o início do presente trabalho, buscamos, na revisão bibliográfica, entender o processo histórico de como se desenvolveu o ensino de Geometria e do Desenho Geométrico no Brasil.

Acreditamos que o trabalho com o Desenho Geométrico contribui no desenvolvimento das habilidades de raciocinar e organizar dados matemáticos, visto que os alunos estabeleceram relações entre as etapas seguidas nas construções e as propriedades das figuras, que os levaram ao entendimento das demonstrações das fórmulas necessárias para o cálculo de suas áreas. Aprenderam a reconhecer uma figura geométrica plana pelas suas propriedades e a relacionar propriedades entre figuras. O trabalho também permitiu desenvolver a iniciativa e a autonomia.

Podemos afirmar que a experiência aqui relatada neste trabalho é muito válida, pois o Desenho Geométrico revelou-se uma boa ferramenta de aprendizagem para o ensino de Geometria. A sua aplicação é viável, pois exige um material de baixo custo, régua e compasso, que pode ser incluído nas listas de materiais escolares e pode ser realizado durante as aulas de Matemática no que tange aos conteúdos de Geometria nas escolas de Ensino Médio.

Vemos esta pesquisa como uma alternativa, para os professores de Matemática trabalharem com o Desenho Geométrico em suas práticas de ensino, porque permite um ensino de Geometria que traz resultados significativos, diferente de um ensino centrado na aplicação de fórmulas em figuras prontas.

Acreditamos que esta forma de trabalho propicia ao discente e ao docente experiência diferenciada porque permite uma participação ativa na construção de conceitos geométricos. Sendo assim, somos favoráveis ao uso do Desenho Geométrico como motivador de aprendizagem no ensino de área de figuras planas.

ANEXOS

ANEXO A - TESTE DE SONDAGEM

1. Defina os seguintes polígonos:

   a) Triângulo

   b) Paralelogramo

   c) Retângulo

   d) Losango

   e) Quadrado

   f) Trapézio

2. Como podem ser classificados os triângulos quantos aos lados?

3. Defina os seguintes tipos de triângulos:

   a) Equilátero

   b) Isósceles

   c) Escaleno

4. Quais as principais características de um paralelogramo?

5. Quais as propriedades que se aplicam em um retângulo?

6. E em um losango?

7. Quais as propriedades de um quadrado?

8. Todo quadrado é retângulo? Justifique sua resposta.

9. Todo quadrado é losango? Faça uma argumentação sobre sua resposta.

ANEXO B - EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

Exercício 1-(BQ.2007-OBMEP). Sejam $ABCD$ um quadrado, M o ponto médio de $\overline{AB}$, N o ponto médio de BC e I a intersecção de $\overline{DN}$ e $\overline{CM}$. Calcule a área do triângulo NIC, tomando $AB = 1$.

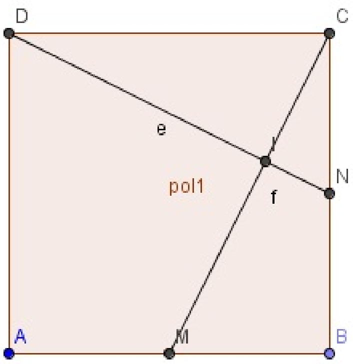

Figura 4.3: Quadrado ABCD

Exercício 2-(BQ.2006-OBMEP). Calcule a área do triângulo ABC abaixo, dados $BD = 4$, $DE = 2$, $EC = 6$, $BF = FC = 3$.

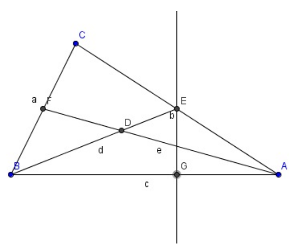

Figura 4.4: Triângulo ABC

Exercício 3-(BQ.2006-OBMEP). Uma placa decorativa consiste num quadrado branco de $4m$ de lado, pintado de forma simétrica com, partes em cinza, conforme figura abaixo. Qual é a fração da área da placa que foi pintada?

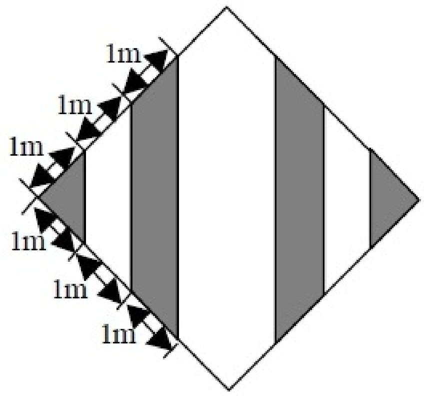

Figura 4.5: Quadrado de lado 4m

Exercício 4-(BQ.2010-OBMEP). Com seis retângulos idênticos formamos um retângulo maior com um dos seus lados medindo $21cm$, como na figura. Qual é a área do retângulo maior?

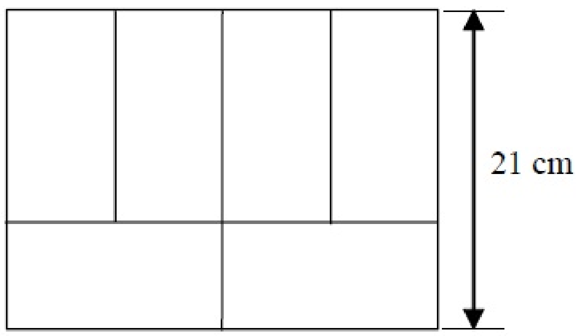

Figura 4.6: Retângulo

Exercício 5-(BQ.2007-OBMEP). Quatro quadrados iguais, com $3cm^2$ de área cada um, estão superpostos formando a figura abaixo. Qual é a área dessa figura?

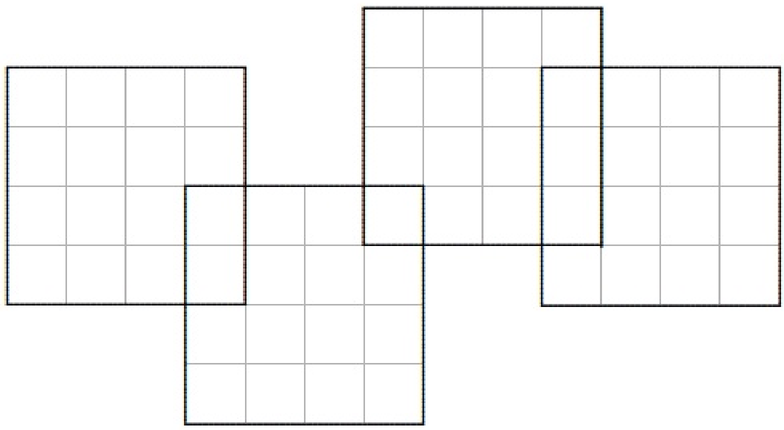

Figura 4.7: Quadrados

Exercício 6- (BQ.2012-OBMEP). As medidas em centímetros dos lados de cada um dos dois quadrados são números inteiros. Se o menor quadrado tivesse $2001cm^2$ a mais de área, os dois quadrados teriam áreas iguais. Quanto poderá medir o lado do maior quadrado?

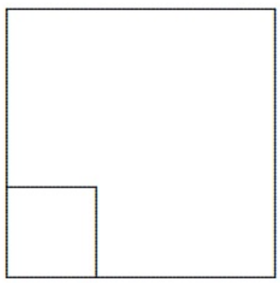

Figura 4.8: Quadrados

Exercício 7-(BQ.2008-OBMEP). Na figura a seguir, o trapézio $ABCD$ é isósceles, AB é paralelo a CD e as diagonais AC e BD cortam-se no ponto P. Se as áreas dos triângulos ABP e PCD são $4cm^2$ e $9cm^2$, respectivamente, qual é a área do triângulo PBC?

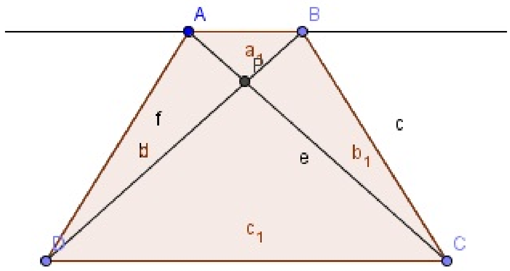

Figura 4.9: Trapézio ABCD

.

Exercício 8-(BQ-2009-OBMEP). Um quadrado tem $(\sqrt{3}+3)cm$ de lado, e as dimensões de um retângulo, em centímetros, $(\sqrt{72}+3\sqrt{6})$ e $\sqrt{2}$. Qual dos dois polígonos tem maior área?

Exercício 9- (BQ.2009-OBMEP). Unindo quatro trapézios iguais de bases $30cm$ e $50cm$ e lados não paralelos iguais, cujos ângulos da base maior medem 45^o, podemos formar um quadrado de área $2500cm^2$, com um "buraco"quadrado no meio. Qual é área de cada trapézio, em cm^2?

(a)200

(b)250

(c) 300

(d) 350

(e) 400

Exercício 10- (BQ.2011-OBMEP). Para construir a pipa de papel representada na figura, Eduardo começou por pintar um retângulo $ABCD$ numa folha de papel. Em seguida, prolongou cada um dos lados do retângulo triplicando o seu comprimento e obteve o quadrilátero $A'B'C'D'$.

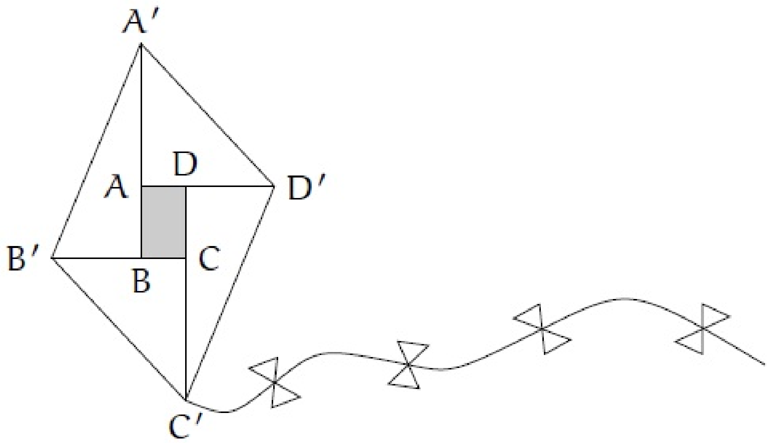

Figura 4.10: Pipa A'B'C'D'

Sabendo que a área do retângulo $ABCD$ é $200cm^2$, qual é a área da pipa construída por Eduardo?

Exercício 11- (BQ.2013-OBMEP). A figura mostra um retângulo $ABCD$ de lado $AD = 4$ e onde M é o ponto médio do segmento AB.

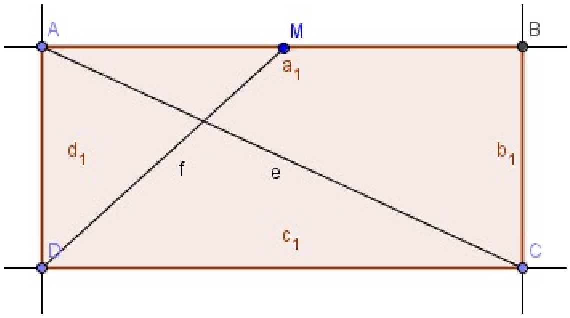

Figura 4.11: Retângulo ABCD

Sabendo que os segmentos AC e DM são ortogonais, calcule a área do retângulo $ABCD$.

Exercício 12 - (BQ.2014-OBMEP). O quadrado $ABCD$ desenhado na figura abaixo tem lado $3cm$.

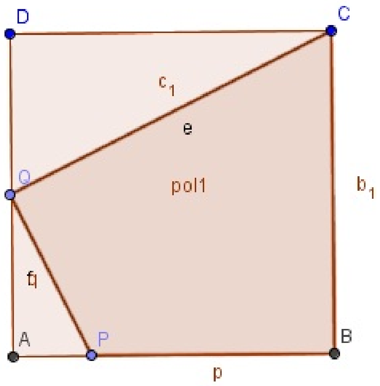

Figura 4.12: Quadrilátero CBPQ

Os pontos P e Q podem ser deslocados sobre os segmentos AB e AD respectivamente de forma que o comprimento do segmento AP meça a metade do comprimento do segmento AQ.

(a) Determine o valor da área do quadrilátero hachurado em função do segmento AB.

(b) Determine a área máxima que o quadrilátero hachurado pode assumir.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. 1. ed., Ed. Ática, 2002.

[3] DEVLIN, K. **O Gene da Matemática**. Ed.Record, São Paulo, 2004.

[4] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Ed. Unicamp, 2007.

[5] JORGE, S. **Desenho Geométrico: ideias e imagens**. 3. ed., São Paulo, 2004.

[6] KALTER. R. S. **Geometria e o Desenho Geométrico no ensino de 1º grau em Curitiba: Contribuições para uma proposta de integração de conteúdos curriculares**. Curitiba: UFPr, 1986.

[7] MENESES, R. S. **Uma História da Geometria Escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino**. São Paulo, 2007. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

[8] NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar** . vol. 2, *Geometria Euclidiana Plana*,Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[9] PUTNOKI, J. C. **Desenho Geométrico**. Ed. Scipione, 1993.

[10] SILVA, C. I. D. N. **Proposta de Aprendizagem Sobre a Importância do Desenho Geométrico e da Geometria Descritiva**. Curitiba, 2006. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

[11] TAVARES, M. C. **Desenho Geométrico**. vol. 3, 14. ed., São Paulo, 2007.

[12] VALENTE, W. R. **Uma História da Matemática no Brasil (1730 - 1930)**. São Paulo: Annablume, 2007.

[13] WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 2. ed., Rio de Janeiro, 1998.

[14] ZUIN, E. **Da Régua do Compasso: as construções geométricas como um saber no Brasil**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: http//www.anped.org.br/25/excedentes25/elenicezuint19.rtf. Acesso em julho de 2015.