UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

IME - Instituto de Matemática e Estatística

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática

Funções Quadráticas, Contextualização, Análise Gráfica e Aplicações

Ruimar Calaça de Menezes

Goiânia

2014

Ruimar Calaça de Menezes

Funções Quadráticas, Contextualização, Análise Gráfica e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Ruimar Calaça de Menezes				
E-mail:	ruimarcalaca@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor					
Agência de fomento:			Sigla:		
País:	Brasil	UF:	Go	CNPJ:	288 988 181 49
Título:	Funções Quadráticas, Contextualização, Análise Gráfica e Aplicações				
Palavras-chave:	Função Quadrática, Parábola, Seções Cônicas, Geogebra				
Título em outra língua:					
Palavras-chave em outra língua:	Quadratic Function, Parable, Conic Sections, Geogebra				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	06/03/2015				
Programa de Pós-Graduação:	Profmat				
Orientador (a):	Mário José de Souza				
E-mail:					
Co-orientador (a):*					
E-mail:	Mariojsouza@gmail.com				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 19 / 03 / 15

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Menezes, Ruimar Calaça
Funções Quadráticas [manuscrito] : Contextualização, Análise Gráfica e Aplicações / Ruimar Calaça Menezes. - 2014.
LXX, 70 f.: il.

Orientador: Prof. Mário José Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Matemática, Goiânia, 2014.
Bibliografia.
Inclui gráfico, lista de figuras.

1. Função Quadrática. 2. Parábola. 3. Seções Cônicas. 4. Geogebra. I. Souza, Mário José, orient. II. Título.

Ruimar Calaça de Menezes

Funções Quadráticas, Contextualização, Análise Gráfica e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Mário José de Souza

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. José Éder Salvador Vasconcelos
IFG-GOIÂNIA

Prof^a^. Dr^a^. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Ruimar Calaça de Menezes

Graduou-se em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Possui especialização em Metodologia do Ensino de Matemática pela UNICLAR - Universidade Claretianas campus Batatais São Paulo. Foi Professor da FACH - Faculdade Anhanguera de Ciências Humanas. UEG - Universidade Estadual de Goiás. Faculdade Padrão. Secretaria de Estado da Educação do estado de Goiás, Secretaria Municipal de Educação de Goiânia e diversas escolas particulares de ensino médio em Goiânia. Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Iporá.

Dedico este trabalho a minha esposa Cristiane Ruben e as minhas filhas Nayara Ruben e Ariane Ruben pela compreensão, solidariedade e pelo amor a mim dedicado.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pela minha vida, pelo dom da sabedoria e força espiritual para a realização desse objetivo profissional, e toda a minha família que acreditou em mim tornando-me capaz de realizar tal curso. Agradeço com uma atenção especial às pessoas que mais amo, à minha esposa Cristiane Ruben e as minhas filhas Nayara Ruben e Ariane Ruben, que entenderam e apoiaram as minhas decisões sem nunca cobrar presença e tempo extra. Agradeço também aos meus pais pela vida, educação e moral que me deram, pois sei que sem estes ensinamentos não conseguiria seguir em frente. O meu muito obrigado aos meus amigos Carlos Antônio Ferreira Peixoto e Ulisses Fernandes Motta por sempre me apoiarem, e passarem horas e horas pacientemente estudando comigo na sexta-feira. Agradeço o incentivo financeiro concedido pela Capes para a realização deste mestrado e a todos que tiveram a iniciativa de desenvolver o Profmat. Por fim, agradeço a todos os meus mestres que me ensinaram matemática, em especial ao meu orientador, Professor Doutor Mário José de Souza, pois muitos deles foram grandes inspiradores e incentivadores da minha profissão. O meu muito obrigado a todos os colegas do Profmat polo de Goiânia pelo companheirismo e ao Professor Jesus pela excelente gestão do Curso.

“Se as pessoas não acham a Matemática simples é só por que ainda não perceberam o quanto a vida é complicada.”

John Von Neumann

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar a Função quadrática em uma nova perspectiva gráfica. O conteúdo Função Quadrática é ensinado no nono ano do Ensino Fundamental e primeira série do Ensino Médio, sendo trabalhados os seguintes conceitos: equações e inequações envolvendo polinômios de 2º grau, representação gráfica, concavidade, zeros da função quadrática, vértice da parábola, valor mínimo ou máximo e aplicações em outras áreas do conhecimento.

Para desenvolver este trabalho, foram utilizados os softwares matemáticos Winplot e Geogebra, com o intuito de facilitar a compreensão das representações gráficas das funções. A parábola foi comentada a partir de um contexto histórico e abrangeu também o conceito de termos específicos e definições envolvendo funções. Foi relacionado o conceito de retas tangentes ao crescimento e decrescimento das funções. Também foi exibido a parábola no contexto da Geometria Analítica e do cálculo diferencial, salientando a influência de cada coeficiente em relação ao gráfico. A parábola foi estudada como uma das secções cônicas tão pesquisadas por Apolônio. Foi citada algumas aplicações da parábola no cotidiano, na física e em problemas de modelagem.

Palavras-chave

Função Quadrática. Parábola. Seções Cônicas. Geogebra.

Abstract

The objective of this study is to present the Quadratic Function in a new graphic perspective. The Quadratic Function content is taught in the ninth year of elementary school and first year of high school, the following concepts are learned: equations and inequalities involving polynomials of second degree, graphing, concavity, zeros of the quadratic function, the parable vertex, minimum or maximum and applications in other fields of knowledge.

Two mathematical softwares, Winplot and Geogebra, were used in order to facilitate the understanding of graphic representations of functions. The parable was discussed from a historical point of view that also included the concept of specific terms and definitions involving functions. The concept of tangent lines to growth and decrease of functions was related. The parable was also exhibited in the context of Analytic Geometry and Calculus, emphasizing the influence of each coefficient in relation to the graph. The parable was studied as one of the conic sections so studied by Apollonius. Some applications of the parable in daily life, physics and modeling problems were cited.

Keywords

Quadratic Function. Parable. Conic Sections. Geogebra.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Este trabalho é destinado aos professores de educação básica e aos alunos de licenciatura em Matemática que possuam interesse em melhorar o processo de ensino de Funções Quadráticas, normalmente ensinado no 9º ano do Ensino Fundamental e na 1ª série do ensino médio.

A Matemática com seus processos de construção e validação de conceitos, argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir o que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. De acordo com [15] as formas de pensar essa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos pré-estabelecidos.

Muitos alunos apresentam dificuldades em interpretar problema. Ás vezes, resolvem equações, fazem cálculos, mas sentem dificuldades ao ler, interpretar as informações e analisar uma situação em busca da solução. O ensino de função permite desenvolver a habilidade do aluno elaborar modelos matemáticos para analisar problemas, através da relação entre expressões algébricas e gráficos até obter a solução desejada. Uma ferramenta importante nesse processo é a modelagem construída a partir da procura de modelos matemáticos para problemas do cotidiano. Por exemplo, a função quadrática é utilizada como modelo do movimento uniformemente variado, na queda livre dos corpos, na área de figuras planas, na receita e lucro de uma empresa, em problemas de otimização, etc.

Nesse sentido, procurou-se abordar o estudo da função quadrática através da contextualização, representação gráfica e suas aplicações. Objetivou-se também fundamentá-lo como apoio para as aulas referentes ao seu ensino, de forma a conduzir o aluno a desenvolver e construir conceitos e procedimentos matemáticos de diferentes formas, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que ele está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. Os conceitos foram relacionados desenvolvidos a partir de situações-problema. Para tanto, utilizou-se as vantagens do uso da tecnologia da informação, através de softwares Winplot e Geogebra, valorizando diferentes enfoques e articulações com diversos campos da Matemática e de outras ciências. Além disso, foram abordadas conteúdos e propriedades da função quadrática, que fazem parte do currículo do Ensino Médio atual e que o aluno precisa dominar, tais como: plano cartesiano, gráficos, a relação entre os coeficientes e o gráfico, as raízes, os pontos de máximo e mínimo, o vértice, equações, inequações e a parábola no contexto da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial.

Este trabalho foi organizado em capítulos, da seguinte forma:

- O Capítulo 2, contém uma resenha histórica organizada e que considera a ordem cronológica dos fatos, iniciando com a contribuição dos babilônios, dos gregos e dos árabes. Contém também informações sobre o desenvolvimento da Função Quadrática, desde o renascimento até a Matemática Moderna; ainda, aparece a definição de função e as visualizações gráficas das parábolas, bem como, vários conceitos trabalhados no contexto de função do 2º grau.

- O Capítulo 3, traz uma abordagem científica acerca dos conceitos, da definição, do valor numérico, das raízes, da forma canônica e da fórmula resolutiva da equação do segundo grau, assim como da forma fatorada e da caracterização da função quadrática

- O Capítulo 4, trata dos gráficos de parábolas representativas de funções quadráticas, iniciando o capítulo com a definição no contexto da geometria analítica seguindo pelo contexto do cálculo diferencial. Abordou-se também as interseções com os eixos coordenados, o vértice, a simetria e a monotonicidade da função quadrática. Além disso, Foi usado softwares tais como o Winplot e o Geogebra, para a construção dos gráficos.

- O Capítulo 5, aborda o estudo da variação dos coeficientes da Função Quadrática e mostra de forma dinâmica a influência dos coeficientes do trinômio de segundo grau que define a função no seu gráfico.

- O Capítulo 6, traz diferentes aplicações da Função Quadrática na Física e na própria Matemática, como problemas de otimização (sendo o vértice da parábola o ponto mínimo ou máximo), de taxa de variação da Função Quadrática, problemas do cotidiano entre outros.

- Por fim, apresenta-se o capítulo considerações finais, onde é feita uma conclusão sobre o trabalho, bem como sugestões de como trabalhar o conteúdo Função Quadrática em Turmas da primeira série do Ensino Médio.

2 Um Pouco de História.

A história da Matemática é útil para constatarmos que o conhecimento é construído por etapas, uns usando o trabalho de outros completando ou criando novas teorias, as novas descobertas envolvem conflitos e incertezas, mas, com certeza provoca crescimento. Vivemos atualmente numa época de intensa pesquisa, inovação e mudanças muito rápidas provocadas pela divulgação de novas descobertas em tempo real. Nesse sentido, o avanço da matemática é enorme. Assim, é importante conhecermos um pouco da história para relacionarmos os fatos e irmos em busca de novas descobertas.

2.1 Babilônios.

O estudo da Função Quadrática tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. Em torno do ano 1700 a.C. os babilônios utilizavam tabletes cuneiformes, nos quais escreviam e operavam com o sistema de numeração sexagesimal posicional. Problemas que recaem numa equação de 2º grau já se faziam presentes, como por exemplo a questão de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p.

Até então, não se usava uma fórmula para determinar os valores das raízes, pois não representavam seus coeficientes por letras. Isto começou a ser feito a partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Antes disso, o que se tinha era uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos, o modo de encontrar a solução era algorítmico. Determinar as raízes de uma equação de 2º grau consistia em determinar os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro s e a área p.

Considerando um dos números x e o outro $s-x$, seu produto é $p = x(s-x) = sx-x^2$. Os números procurados são as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$.

A receita para achar dois números com soma e produto dados era assim enunciada pelos babilônios:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número. [13]

Atualmente, para uma equação do tipo $x^2 - sx + p = 0$, o procedimento pode ser traduzido algebricamente:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

A outra raiz é dada por $s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$

Os autores dos textos cuneiformes não deixaram registrado o argumento que os levou a esta conclusão.

Atualmente encontramos as duas raízes utilizando a fórmula

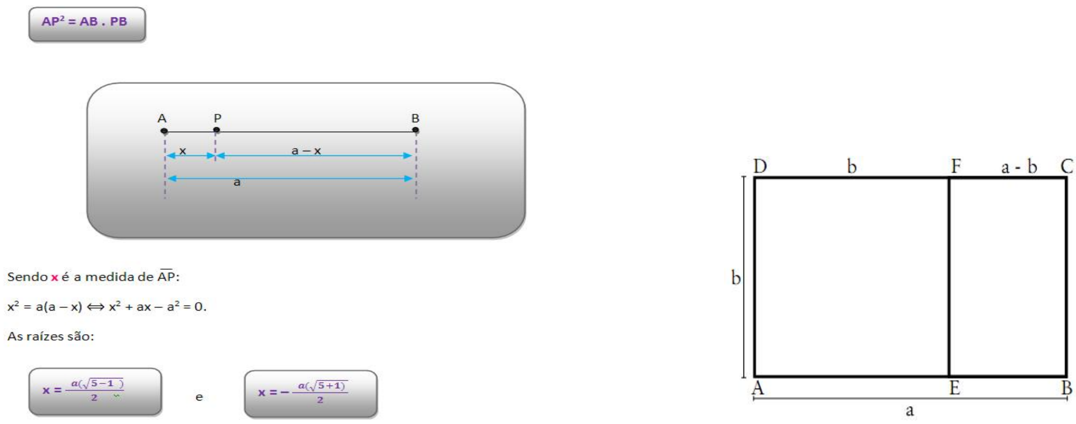
$$x = \frac{s \quad \pm \quad \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Como os dados s e p do problema eram sempre números positivos, os babilônios nunca se preocuparam com eventuais soluções negativas fornecidas por sua regra.[13]

2.2 A Matemática Grega.

Os estudiosos egípcios e babilônios continuaram a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos após 800 a.C., mas enquanto isso uma nova civilização se preparava para assumir a hegemonia cultural. Os gregos Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-600 a.C. aproximadamente) não hesitavam nada em absorver elementos de outras culturas a fim de se desenvolverem.

Segundo [3] o lema da escola pitagórica era “tudo é número”. Os pitagóricos mostraram interesse considerável pela seção áurea e pela razão áurea. Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão ou seção áurea, se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo. A razão entre o segmento menor e o segmento maior chama-se razão áurea. Também está intimamente ligado à razão áurea, o retângulo áureo. Figura 1 (a). Ele é qualquer retângulo ABCD com a seguinte propriedade: possui lados de medidas a e b, se suprimirmos dele um quadrado de lado b, o retângulo restante será semelhante ao retângulo áureo ABCD. Figura 1(b).



(a) Razão Áurea

Fonte: www.colegioweb.com.br

(b) Retângulo Áureo

Fonte:

aespeculadora.blogspot.com

Figura 1: Razão Áurea e Retângulo Áureo

O período de cerca de 300 a 200 a.C. foi denominado "Idade Áurea" da Matemática grega por se destacarem nessa época três grandes nomes: Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga. Arquimedes (287-212 a.C.) calculou a área delimitada por uma reta e uma parábola, conhecido como o problema da quadratura da parábola. Figura 2.

O matemático grego Arquimedes (Siracusa, séc. 3 a.C.) foi um dos precursores do Cálculo Diferencial e Integral. Entre os antigos, ele foi o que melhor aplicou o Método de Exaustão de Eudoxo e o que mais se aproximou da atual integração. Uma de suas inúmeras descobertas foi a fórmula para a área de um segmento parabólico. Dada uma parábola, a área do segmento ACB é quatro terços da área do triângulo ABC.

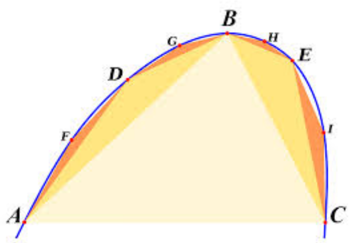


Figura 2: Quadratura da parábola

Fonte: commons.wikimedia.org

Para isso é possível provar, usando conceitos de geometria analítica, que a soma das áreas dos triângulos ADB e BCE é um quarto da área do triângulo ABC, ou seja,

$$[ABD \ + \ BCE = \frac{1}{4}ABC];$$

e a soma das áreas dos quatro triângulos AFD, DGB, BHE, EIC somadas duas a duas será

$$\frac{1}{4}ADB + \frac{1}{4}BCE = \frac{1}{4}(ADB + BCE) = \frac{1}{4^2}ABC$$

Aplicando-se exaustivas vezes esse processo, concluímos que a área do segmento parabólico é dada por

$$ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4^2}ABC + ... = ABC(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...) = \frac{4}{3}ABC.$$

Para provar o resultado obtido, Arquimedes não achou o limite da série, apenas encontrou a soma dos n termos e acrescentou o restante, que pode ser feito tão pequeno quanto se queira. Mas, é importante frisar que ele não usa a noção de limite e sim o princípio da exaustão, o qual permite considerar que a área do segmento parabólico não podia ser nem maior nem menor que o valor obtido, que é $\frac{4}{3}$A. Para definir $\frac{4}{3}$A como a soma de uma série infinita, Arquimedes precisaria valer-se de um conceito geral de número real o qual não estava disponível em sua época. Faltava a a noção de passagem ao limite, pois ele compartilhava com os gregos do chamado horror ao infinito. Os gregos trabalharam as soluções geométricas para equações de 2º grau. Embora Euclides e Arquimedes tenham sido mais comentados, Apolônio, mais novo que eles, teve grande destaque, principalmente no desenvolvimento dos conceitos das seções cônicas.

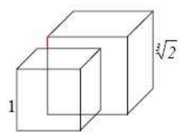


Figura 3: Duplicação do cubo

Fonte: www.jornallivre.com.br

Em [2] a origem das seções cônicas está relacionada ao problema de duplicação do cubo Figura 3, que consiste em, dada a aresta de um cubo, construir, com uso de régua e compasso, a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do anterior. Hipócrates de Chios (470-410 a.C.) e Menaechmus (cerca de 350 a. C.) pesquisaram essas curvas.

Apolônio foi um famoso membro da escola de Matemática de Alexandria. Nasceu em Perga, cidade ao sul do que hoje é a Turquia, entre 246 e 221 a.C. De suas obras, a mais importante são As Cônicas, que aperfeiçoaram e superaram os estudos anteriores sobre o assunto e introduziram as denominações elipse, parábola e hipérbole.

Segundo [1], as seções cônicas Figura 4, eram conhecidas há mais de um século, quando essa obra foi escrita. Anteriormente, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como seções de três tipos diferentes de cone circular reto, de acordo com o ângulo do vértice - agudo, reto ou obtuso. Apolônio mostrou, ao que parece pela primeira vez, que não seria necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e que de apenas um único cone poderiam ser obtidas todas as três espécies de seções, variando-se a inclinação do plano da seção, relacionando assim as curvas umas com as outras. Noutra consideração sobre o tema, prova que o cone não precisa ser reto - eixo perpendicular à base circular - podendo ser também oblíquo ou escaleno. Segundo Eutócio, Apolônio foi o primeiro geômetra a demonstrar que as propriedades das curvas independem de serem secionadas em cones oblíquos ou retos. A visão moderna dos sólidos colocados um sobre o outro em sentidos opostos, estendendo-se indefinidamente, de forma que seus vértices coincidam e os eixos estejam sobre a mesma reta, também é um legado de Apolônio, que deu inclusive a definição para cone circular utilizada nos dias de hoje:

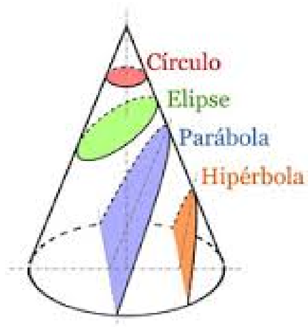


Figura 4: Seções Cônicas

Fonte: http:commons.wikimedia.org

[7] Define a superfície cônica e suas seções como segue: Sejam duas retas r e s concorrentes em O e não perpendiculares. Conservemos fixa a reta r, eixo da superfície,

e façamos a reta s geratriz, girar 360^o em torno de r mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta s gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O, "o cone duplo". Chama-se seção cônica ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica. De acordo com a Figura 4, quando uma superfície cônica é secionada por um plano α qualquer que não passa pelo vértice O, a seção cônica será: um circulo quando o plano é perpendicular ao eixo; uma elipse quando o plano não é paralelo à geratriz nem ao eixo; uma parábola se o plano α for oblíquo ao eixo e paralelo à geratriz da superfície ou uma hipérbole (curva com dois ramos) se o plano for paralelo ao eixo. No caso do plano α passar pelo vértice O, obtemos as cônicas degeneradas: um ponto, uma reta ou duas retas.

A Astronomia encontrou, nas seções cônicas, grande aplicação. Copérnico, Kepler, Halley e Newton, por exemplo, fizeram uso de suas configurações para explicar fenômenos físicos, como as trajetórias dos planetas ou a trajetória descrita por um projétil. Mostrando como obter todas as seções cônicas de um mesmo cone e dando-lhes nomes apropriados, Apolônio contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Geometria. Ao serem inseridas na Geometria Analítica, definidas como lugares geométricos (conjunto de pontos que verificam uma certa propriedade), as seções cônicas ganharam uma expressão algébrica, ampliando ainda mais sua importância e sua aplicabilidade.

2.3 Contribuição dos Árabes.

Outro povo que contribuiu para encontrar a resolução de uma equação do segundo grau foi o povo hindu. A matemática hindu era feita a partir de problemas cotidianos, cobrada de forma poética, sem fornecer fórmula para as resoluções e começou a utilizar os números negativos e o zero como um elemento de cálculo. A contribuição hindu para a história da matemática tem como personagens Aryabhata (476-550), Brahmagupta (598-665), Bhaskara I e Bhaskara II. Sobre a equação quadrática, Brahmagupta estudou a fórmula escrita e alguns anos depois, um aluno seu, conhecido como Bhaskara I (século VI), reescreveu de forma descritiva os versos nela contidos.

Segundo artigo da revista do professor de matemática [23] , o hábito de dar o nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação do segundo grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Na literatura internacional não se encontra esse nome Fórmula de Bhaskara. Esse costume brasileiro não é adequado, pois:

- Há quatro mil anos atrás, os babilônios já estudavam em forma de prosa as equações de segundo grau.

- Até o fim do século XVI não se usava fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, porque não se representavam por letras os seus coeficientes.

O período, que vai do século V até o XI, é conhecido como Baixa Idade Média ou Idade das Trevas. A civilização na Europa Ocidental atingiu níveis muito baixos no ensino, o saber grego desapareceu e artes e ofícios antigos foram esquecidos. Foi um período marcado por violência física e intensa fé religiosa. O século XIV não foi tão produtivo para a Matemática.

2.4 Renascimento.

Os gregos se preocuparam muito em descrever os movimentos dos planetas, alterando significativamente a concepção que tinham do universo.

Posteriormente as técnicas de investigação científica foram se modificando, causando também transformações no entendimento do homem quanto a si mesmo e em relação ao mundo em que vivia. Foi o período conhecido como Renascença, iniciado na Itália, nos séculos XIV e XV. O Renascimento Europeu foi um período em que se destacaram escritores, pintores, escultores e outros com espírito humanístico. A exploração geográfica e o interesse pelo comércio, navegação, astronomia e agrimensura aumentou. O humanismo e a independência de pensamento causaram conflitos religiosos. A Igreja passou pela Reforma e Contra-Reforma. A Reforma Protestante no século XVI também teve um impacto na expansão da Europa. A Reforma enfraqueceu a influência da Igreja Católica no norte europeu, tornando menos efetiva sua oposição à pesquisa científica.

Os europeus aprimoraram a técnica de obtenção das raízes de uma equação de segundo grau, fornecida pelos árabes; desenvolveram a álgebra simbólica, até então totalmente descritiva e utilizaram os números negativos como possíveis raízes de uma equação quadrática, fato esse que não era considerado pelos outros povos. Isso começou a ser feito a partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Seu trabalho mais conhecido foi In Artem com o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Ele introduziu a prática de usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Ele usa uma mesma letra, adequadamente qualificada, para as várias potências de uma quantidade. Atualmente, indica-se x, x^2, x^3 para o que Viète expressava por A, A quadratum, A cubum.

2.5 A Matemática Moderna.

O século XVII é importante na história da matemática, marcando o desenvolvimento da matemática moderna.

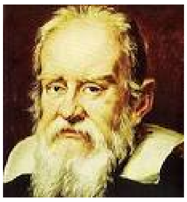


Figura 5: Galileu Galilei 1564-1642

Fonte:infoescola.com

A religião foi um obstáculo ao trabalho do italiano Galileu Galilei, Figura 5 , nascido em Pisa. De família que valorizava as artes e as novas ideias como sugere [5] . Quando era professor em Pisa, dizem que deixou cair diferentes pesos da torre inclinada, pesquisando o movimento da queda dos corpos. Aristóteles pensava que objetos mais pesados caíam mais depressa e Galileu mostra que, leves ou pesados, os objetos levam o mesmo tempo para chegar ao chão, com velocidade sempre crescente, caso não haja resistência do ar.

Ele estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda e se traduz na fórmula $s = \frac{gt^2}{2}$; provou que a trajetória de um projétil é uma parábola e fundou a ciência da dinâmica. Galileu foi um católico devoto e sentia-se angustiado por notar que seus raciocínios como cientista eram condenados pela igreja. Foi banido pelas autoridades eclesiásticas em Roma, processado pela Inquisição, condenado à prisão domiciliar, vindo a falecer no ano em que nasceu Isaac Newton.

Durante toda a história da ciência, muitas teorias revolucionárias surgiram para explicar o funcionamento do universo. Mas a revolução marcante, que gerou a moderna concepção científica, ocorreu nos séculos XV e XVI, conhecida como "A Revolução Científica".

Foi criado e utilizado pela primeira vez um sistema de coordenadas para representar gráficos, no século XVII, por René Descartes (1596 a 1650), matemático e filósofo. O sistema era constituído de eixos ortogonais e ficou conhecido por sistema cartesiano. Para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis a área de um retângulo e o produto de três variáveis ao volume de um paralelepípedo retângulo. Descartes sugeria que x^2 era o quarto termo da proporção $1 : x = x : x^2$. Inventou a geometria analítica e na primeira parte de La géométrie, marcava x num eixo dado e então um comprimento y, formando um ângulo fixo com esse eixo, com o objetivo de construir pontos cujo x e cujo y satisfazem uma relação dada. Na segunda parte de La géométrie desenvolve um método interessante de construir tangentes a curvas. Foi o primeiro a discutir a chamada folium de Descartes, uma curva nodal cúbica definida pela equação implícita $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

2.6 Função

A ideia de função, que temos atualmente foi construída por vários matemáticos ao longo da história. Sabemos que o século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, devido às novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram. Notável foi a invenção do Cálculo, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz. É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária dos textos didáticos. Primeiro surgiu o Cálculo Integral e muito tempo depois, o Diferencial. A integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos e a diferenciação, resultou de problemas sobre tangentes a curvas, máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação são operações inversas.

Segundo [17], Isaac Newton (1642-1727), foi um cientista inglês, reconhecido como físico e matemático. Desenhou e construiu o primeiro telescópio refletor parabólico; inventou o método dos fluxos, como ele chamava o atual cálculo diferencial, com numerosas aplicações como determinação de máximos, mínimos, pontos de inflexão, concavidade e tangentes as curvas.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) criou os termos função, constante e variável; usou o termo função para descrever uma quantidade relacionada a uma curva, como, por exemplo, a inclinação ou um ponto qualquer situado nela; escolheu as notações dx e dy para as diferenças menores possíveis (diferenciais) em x e y e, mais tarde, o sinal de integral $\int$. Achar tangentes exigia o uso do calculus differentialis e achar quadraturas o calculus summatorius ou calculus integralis, de onde resultaram as expressões que usamos.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) criou várias fórmulas e notações. Dentre elas, $f(x)$, que agora é de utilização universal, para indicar a lei de uma função, quando uma variável depende de outra mediante uma expressão analítica, dizemos que y é uma função de x.

O matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição formal de função muito próxima da que se usa atualmente: "Se uma variável y está relacionada com uma outra variável x, de tal forma que sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y diz-se uma função da variável independente x".

Posteriormente, com a criação da teoria dos conjuntos, no fim do século XIX, a definição de função foi assim citada:

Uma função f é um conjunto de pares ordenados (x, y) em que x é elemento de um conjunto A, Y é elemento de um conjunto B e para qualquer x pertencente a A, existe um único y pertencente a B tal que o par $(x, y) \in f$.

2.7 Uma propriedade notável da parábola.

Ao girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada paraboloide de revolução ou superfície parabólica, Figura 6, que possui inúmeras aplicações interessantes, decorrentes da propriedade refletora da parábola. A fama destas superfícies remonta à Antiguidade.

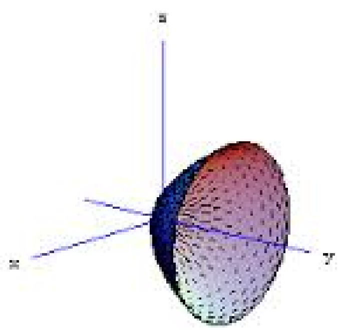


Figura 6: Parabolóide

Fonte: frsn.utn.edu.ar

Há uma lenda segundo a qual o extraordinário matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa em torno do ano 250 a.C., destruiu uma frota que sitiava aquela cidade incendiando os navios com os raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Embora isto seja teoricamente possível, há dúvidas históricas sobre a capacidade tecnológica da época para fabricar tais espelhos. Mas a lenda sobreviveu, e com ela a ideia de que ondas de luz, de calor, de rádio ou de qualquer outra natureza, quando refletidas numa superfície parabólica, concentram-se sobre o foco, ampliando enormemente a intensidade do sinal recebido.

Da lenda de Arquimedes restam hoje um interessante acendedor solar de cigarros e outros artefatos que provocam ignição fazendo convergir os raios de sol para o foco de uma superfície parabólica polida. Outros instrumentos atuam inversamente, concentrando na direção paralela ao eixo os raios de luz que emanam do foco. Como exemplos, citamos os holofotes, os faróis de automóveis e as simples lanternas de mão, que têm fontes luminosas à frente de uma superfície parabólica refletora [13].

2.8 Onde podemos visualizar parábolas?

A parábola aparece como padrão de comportamento de muitos fenômenos, tais como: a viga de sustentação de uma ponte; a trajetória de uma pedra lançada obliquamente; a trajetória de um projétil a ser lançado; a trajetória da bola num chute a gol; a linha descrita pela água numa fonte; parte da estrutura metálica de uma montanha russa; na estrutura que sustenta os faróis de um automóvel; Figura 7(a) nas antenas parabólicas; Figura 8(b), fogão solar; radares; espelhos dos telescópios e outros mais. Um importante uso recente dessas superfícies é dado pelas antenas parabólicas por seu próprio nome, sugerem a aplicação do formato da parábola na sua estrutura. São empregadas na radioastronomia, bem como na transmissão das redes de televisão.

(a) Farol de Automóvel

Fonte:htslatarias.com.br

(b) Lanterna de mão

Fonte: repel.com.br

Figura 7: Farol de Automóvel e Lanterna de mão

(a) Silibim

Fonte:

peçasautoclassicas.com.br

(b) Antena Parabólica

Fonte:

portalbelmonte.com.br

Figura 8: Silibim e Antena Parabólica

As antenas funcionam da seguinte forma: captam ondas eletromagnéticas emitidas por um satélite artificial, colocado em uma órbita geoestacionária. Essas ondas formam um feixe de raios, que atingem a antena e são refletidos fazendo-os convergir para um único ponto, chamado foco da parábola. No foco, estará um aparelho receptor amplificando consideravelmente a intensidade desses sinais provenientes do satélite e convertendo-os em sinal de TV. As antenas parabólicas geralmente têm um grande diâmetro (parábola mais aberta, a pequeno, onde a é o coeficiente de x^2) para captar uma quantidade maior de sinais do satélite, portanto a distância focal é em geral grande (p grande, onde p é a distância entre o vértice e o foco) ou seja a antena parabólica reflete o sinal vindo do espaço, que vem em todas as direções, para o centro da antena onde está o captador (chamado LNB (sigla inglesa para Low-noise block converter, numa tradução livre: "conversor de baixo ruído")). Por concentrar o sinal que é fraco em um único ponto, consegue-se a recepção aceitável. O conjunto se completa com o aparelho receptor de sinais, que tem circuitos elétricos que conseguem realizar a codificação dos sinais e o controle das faixas de frequência que vão ser utilizadas.

2.9 Número de Ouro e Equação de Segundo Grau.

Luca Pacioli [4] publicou em 1509 um livro intitulado De Divina Proportione, que foi ilustrado por Leonardo da Vinci. Nele, Pacioli focalizou o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é chamado de razão áurea ou número de ouro. Ele aparece como razão em várias figuras planas, sólidas e nas proporções mais belas que a natureza nos proporciona. Por exemplo: no arranjo das pétalas de uma rosa; nas espirais que aparecem no abacaxi; na arquitetura do templo grego Parthenon, em Atenas e em várias obras de arte. As mesmas proporções foram utilizadas por Leonardo da Vinci no Homem de Vitrúvio e na Gioconda. O símbolo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Figura 9 também utiliza a mencionada sucessão de retângulos áureos, unidas por quadrantes de circunferências. A proporção áurea é dada por $\frac{1}{x} = \frac{x}{x+1}$.

Figura 9: Logotipo da Sociedade Brasileira de Matemática

Fonte: www.sbm.org.br

Até aqui passeamos por momentos históricos diferentes, envolvendo conceitos trabalhados em Função Quadrática e suas aplicações. No próximo capítulo, faremos uma abordagem formal deste conceito.

3 Abordagem Formal.

Após uma visão histórica da evolução do estudo da parábola, abordaremos formalmente o conceito de função quadrática. Estudaremos a determinação das raízes utilizando a forma canônica, a forma fatorada e, posteriormente, os valores máximos e mínimos dessa função.

3.1 Definição de Função Quadrática.

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Os coeficientes a, b, c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Isto é se $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$, então $a = d, b = e, c = f$.

Com efeito, seja $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = 0$, obtemos $c = f$. Então desconsiderando c e f tem-se $ax^2 + bx = dx^2 + ex$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, essa igualdade vale para todo $x \neq 0$. Nesse caso, dividindo os dois membros por x, obtemos $ax + b = dx + e$ para todo $x \neq 0$. Fazendo primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$, obtemos $a + b = d + e$ e $-a + b = -d + e$, assim concluímos que $a = d$ e $b = e$.

3.2 Valor Numérico.

A função quadrática também é conhecida como função polinomial do 2º grau. Os números representados por a, b, c são os coeficientes da função. Em geral, o domínio da função quadrática é $\mathbb{R}$, ou um de seus subconjuntos. No entanto, quando está ligada a uma situação real, é preciso verificar o que representa a variável independente x para determinar o seu domínio. Em alguns problemas é importante o cálculo do valor da função quadrática num ponto; assim como, dada a imagem da função quadrática, calcular os elementos do domínio correspondentes. Isto é, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ calcular $f(x_0)$ ou dada a equação $y_0 = f(x_0)$, calcular x_0.

Teorema 1. *Se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores numéricos em três pontos distintos x_1, x_2, x_3 então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo* *valor para qualquer número real x.*

Demostração: Suponhamos que as funções quadráticas

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{e} \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

assumam os mesmos valores $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$ para três números reais distintos x_1, x_2, x_3. Escrevendo $\alpha = a - a', \beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$, queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Sabemos que $f(x_1) - g(x_1) = 0$, $f(x_2) - g(x_2) = 0$ e $f(x_3) - g(x_3) = 0$. Isto significa que:

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, vem:

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0$$

$$\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a primeira destas equações por $x_2 - x_1$ e a segunda por $x_3 - x_1$, obtendo

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0$$

$$\alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0$$

Subtraindo membro a membro, temos $\alpha(x_3 - x_2) = 0$. Como $x_3 - x_2 \neq 0$, resulta daí que $\alpha = 0$. Substituindo nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. ■

Acabamos de mostrar que se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2, x_3 então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x.

3.3 Zeros ou raízes de uma função quadrática.

Os Zeros ou raízes de uma função $f(x)$ são os valores x do domínio para os quais $f(x) = 0$.

Assim, os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Podemos determinar os zeros ou raízes de funções quadráticas das seguintes maneiras:

3.3.1. Por fatoração.

Para a função $f(x) = x^2 - 4$, podemos pensar na diferença entre dois quadrados e reescrever a função $f(x) = (x + 2)(x - 2) = 0$. Para que o produto se anule, basta que um dos fatores também seja nulo. Assim, as raízes são -2 e 2. Para a função $f(x) = x^2 - 9x$, podemos reescrever a função $f(x) = x(x - 9)$. Resolvendo, encontramos as raízes 0 e 9. Para a função $f(x) = x^2 + 6x + 9$, podemos pensar no quadrado da soma e reescrever a função $f(x) = (x + 3)(x + 3)$. considerando o produto nulo, concluímos que -3 é uma raiz dupla da função. Generalizando se $f(x) = ax^2 - c$, com $a \neq 0$ para determinar as raízes podemos reescrever a função como $(\sqrt{a}x + \sqrt{c})(\sqrt{a}x - \sqrt{c}) = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ sempre que $\frac{c}{a} > 0$. Podemos concluir que se $b = 0$ as raízes são simétricas. Se $f(x) = ax^2 + bx$, podemos reescrever como $x(ax + b) = 0$ teremos $x = 0$ ou $x = \frac{-b}{a}$. Podemos concluir que se $c = 0$ uma raiz será nula.

3.3.2. Completando quadrado.

A equação $x^2 + 6x + 5 = 0$ equivale a $x^2 + 6x + 5 + 4 = 4$ ou $x^2 + 6x + 9 = 4$ ou $(x+3)^2 = 4$. Então, $(x+3)^2 = (\pm 2)^2$. Se $x+3 = 2$, então $x = -1$ e se $x+3 = -2$, então $x = -5$. Logo os zeros da equação são -1 e -5. Generalizando se $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Para calcular as raízes podemos reescrever como:

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0$

$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$

$x = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}} - \frac{b}{2a}$ sempre que $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}} > 0$

3.3.3 Pela fórmula resolutiva de equação que envolve polinômio de 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{onde,} \qquad \Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$$

Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas;
Se $\Delta = 0$, existe uma raiz real dupla.
Se $\Delta < 0$, a equação não possui solução real.

Δ é chamado de discriminante pois discrimina a quantidade de raízes reais.

3.3.4. Pela regra da soma e do produto das raízes.

Sendo a soma $S = x' + x'' = \frac{-b}{a}$ e o produto $P = x'.x'' = \frac{c}{a}$, pode-se mentalmente calcular as raízes.

3.4 Forma canônica da função quadrática.

É a forma mais importante de escrever a função quadrática, pois, a partir dela somos capazes de demonstrar a fórmula resolutiva apelidada de Bhaskara e os valores máximos ou mínimos que a função assume.

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, podemos escrever:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

As duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Vejamos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Completando o quadrado vem

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

que é conhecida como forma canônica da função quadrática.

3.5 Fórmula resolutiva da equação do 2º grau.

Como decorrência imediata da forma canônica podemos demonstrar a fórmula resolutiva da equação do 2º grau

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\textit{ou} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \textit{com} \quad \Delta = b^2 - 4ac.
\end{aligned}$$

Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas;
Se $\Delta = 0$, existe uma raiz real dupla.
Se $\Delta < 0$, a equação não possui solução real.

3.6 Soma das raízes.

$$S = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad + \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

3.7 Produto das raízes.

$$P = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad . \quad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

3.8 Valor mínimo e valor máximo da função quadrática.

Outra decorrência da forma canônica é a determinação do valor mínimo ou máximo da função quadrática.

Supondo $a > 0$. A forma canônica

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas sendo a segunda constante e a primeira $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ depende de x sempre, não negativa. Logo o menor valor que esta soma pode atingir será obtido quando $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, ou seja, quando $x = \frac{-b}{2a}$. Neste ponto $f(x)$ também assume o seu valor mínimo que será

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Não podemos determinar o maior valor que a função assume pois quanto maior for o valor de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ maior será o valor de $f(x)$.

Supondo $a < 0$ teremos a primeira parcela da forma canônica $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ sempre não negativa. Logo o maior valor que a função pode assumir será obtido quando $x = \frac{-b}{2a}$. Neste pondo $f(x)$ também assume o seu valor máximo que será.

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = \frac{-\Delta}{4a}.$$

E não podemos determinar o menor valor que a função assume pois quanto maior for o valor de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ menor será o valor de $f(x)$

3.9 Forma Fatorada da função quadrática.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Podemos reescrever $f(x)$ da seguinte forma

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left[x^2 - (x' + x'')x + x'x''\right]$$
$$f(x) = a(x^2 - x'x - x''x + x'x'')$$
$$f(x) = a[x(x - x') - x''(x - x')]$$
$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

3.10 Caracterização da função quadrática.

Em [6] vê-se que a função afim $f(x) = ax + b$ transforma uma progressão aritmética em outra progressão aritmética. Vemos que essa propriedade caracteriza a função afim.

Vejamos o que ocorre com a função quadrática $f(x) = x^2$ e a progressão aritmética (1, 3, 5, 7, 9, ... ,2n+1,...) e vejamos o que ocorre com $f(1) = 1,\ f(3) = 9,\ f(5) = 25,\ f(7) = 49, ..., f(2n-1) = 4n^2 - 4n + 1\ e\ f(2n+1) = 4n^2 + 4n + 1, ...$

Essa nova sequência não é uma progressão aritmética, pois a diferença entre dois termos consecutivos não é constante. Mas se tomarmos as diferenças entre os termos consecutivos teremos:

$$(8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40, ..., 8n, ...)$$

que é uma progressão aritmética de razão 8.

Isso ocorre não só com a função função quadrática mais simples $f(x) = x^2$, mas com qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Essa propriedade caracteriza a função quadrática, ou seja, se f é uma função quadrática, então ela transforma uma P.A. numa P.A. de segunda ordem, ou seja, numa sequência cujas diferenças dos termos consecutivos formam uma P.A.. E, reciprocamente, se uma função transforma uma P.A. em uma P.A. de segunda ordem então ela é quadrática.

Proposição 1. *A função quadrática transforma uma progressão aritmética em uma progressão aritmética de segunda ordem*

Demonstração: Seja $f(x) = ax^2+bx+c$ com $a \neq 0$ uma função quadrática arbitrária e

$$x_1,\ x_2,\ x_3, ...$$

uma progressão aritmética qualquer então a sequência

$$y_1,\ y_2,\ y_3, ...$$

dos valores $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ y_3 = f(x_3)$, etc. goza da propriedade de que as diferenças sucessivas:

$$d_1 = y_2 - y_1,\ d_2 = y_3 - y_2,\ d_3 = y_4 - y_3, ...$$

formam uma progressão aritmética pois: $d_{n+1} - d_n = 2ar^2$, onde $r = x_{n+1} - x_n$ vejamos:
$d_{n+1} = y_{n+2} - y_{n+1}$
$d_{n+1} = a(x_{n+2})^2 + bx_{n+2} + c - [a(x_{n+1})^2 + b(x_{n+1}) + c]$
$d_{n+1} = a(x_{n+1} + r)^2 + b(x_{n+1} + r) + c - [a(x_{n+1})^2 + bx_{n+1} + c]$
$d_{n+1} = a(x_{n+1})^2 + 2ax_{n+1}r + ar^2 + bx_{n+1} + br + c - a(x_{n+1})^2 - bx_{n+1} - c$
$d_{n+1} = 2ax_{n+1}r + ar^2 + br$
$d_{n+1} = 2a(x_n + r)r + ar^2 + br$
$d_{n+1} = 2ax_nr + 2ar^2 + ar^2 + br$
desenvolvendo $d_n = y_{n+1} - y_n$ obtemos:
$d_n = a(x_{n+1})^2 + b(x_{n+1}) + c - [a(x_n)^2 + bx_n + c]$
$d_n = a(x_{n+r})^2 + b(x_n + r) + c - a(x_n)^2 - bx_n - c$
$d_n = a(x_n)^2 + 2ax_nr + ar^2 + bx_n + br + c - a(x_n)^2 - bx_n - c$
$d_n = 2ax_nr + ar^2 + br$
calculando a diferença $d_{n+1} - d_n$ encontramos $2ar^2$ o que prova que as diferenças formam uma progressão aritmética.

Proposição 2. *Toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$*

Demonstração: Se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ é uma P.A., de razão r então a igualdade $X_n = x_1 + (n-1)r$ pode ser escrita como $x_n = a_n + b$, onde $a = r$ e $b = x_1 - r$. Logo a função afim $f(x) = ax + b$, quando, restrita aos números naturais, fornece os termos $x_1 = f(x_1),\ x_2 = f(x_2),\ ..., x_n = f(x_n), ...$ da P.A..

De modo análogo, se $y_1, y_2, y_3, ...y_n, ...$ é uma P.A. de segunda ordem então as diferenças sucessivas:

$$y_2 - y_1, y_3 - y_2, ..., y_{n+1} - y_n, ...$$

formam uma P.A. ordinária, cujo primeiro termo é $d = y_2 - y_1$ e cuja razão chamaremos de r; portanto seu n-ésimo termo é:

$$y_{n+1} - y_n = d + (n-1)r,$$

para$n = 1,\ 2,\ 3, ...$. Temos então:
$y_{n+1} = (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + ... + (y_3 - y_2) + y_1$

$y_{n+1} = [d + (n-1)r] + [d + (n-2)r] + ... + [d + r] + d + y_1$
$y_{n+1} = nd + \frac{n(n-1)}{2}r + y_1$
para todo $n \in \mathbf{N}$.

Como essa igualdade é verdadeira quando $n = 0$, podemos escrever:
$y_n = (n-1)d + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r + y_1$
$y_n = \frac{r}{2}n^2 + (d - \frac{3r}{2})n + r - d + y_1$
$y_n = an^2 + bn + c,$
para todo $n \in \mathbb{N},$com: $a = \frac{r}{2},\ b = d - \frac{3r}{2},\ c = r - d + y_1.$

O que demonstra que que toda função que transforma P.A. em P.A. de segunda ordem é quadrática ■

Demonstração retirada de [13]

4 Estudo do Gráfico da função quadrática.

Neste capítulo, estudaremos o gráfico da função quadrática; a influência de cada coeficiente e translações verticais e horizontais. Usaremos o software Geogebra para melhor visualização do que acontece com o gráfico quando alteramos algum parâmetro. A ajuda da tecnologia no estudo dos gráficos é muito útil, pois facilita a visualização e o aprendizado daquilo que estamos imaginando.

4.1 Definição no contexto da Geometria Analítica.

Já vimos que a parábola é obtida pela seção paralela a geratriz em um cone circular reto. Figura 10

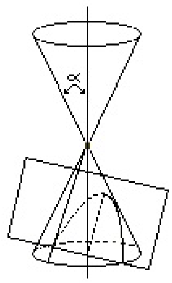


Figura 10: Seção cônica

Fonte: www.educ.fc.ul.pt

Inicialmente consideremos, no plano do papel, uma reta **d** e um ponto **F** que não pertence a ela. Vamos marcar, agora, uma série de pontos que estão a uma mesma distância do ponto fixado **F** e da reta **d**. Construindo o gráfico ponto a ponto teremos a parábola que é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância de **F** e **d**.

Na figura devemos destacar:

- o ponto **F**, foco da parábola;
- a reta **d**, diretriz da parábola;
- o ponto **V**, vértice da parábola (ponto médio de FD, distância de **F** até **d**)

- a reta que passa por **F**, perpendicular à diretriz **d**, que se chama eixo de simetria da parábola;

- a medida de FD, parâmetro (**p**) da parábola.

Definição 2. *O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d. A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o vértice dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.*

Assim, definimos que a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa **d**, chamada diretriz, e de um ponto fixo **F**, não pertencente à diretriz, chamado foco, Figura 11.

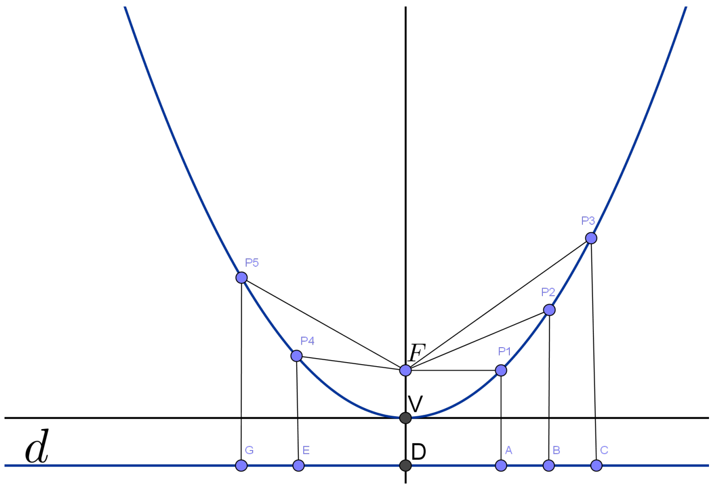


Figura 11: Elementos da Parábola

4.2 Equação da Parábola.

Equação da parábola com vértice na origem

A partir do foco **F** e da diretriz **d**, podemos chegar a equação da parábola formada por todos os pontos P(x,y) do plano tais que d(P,F) = d(P,d).

1º caso: Diretriz y = -c e foco F(0,c). figura 12.

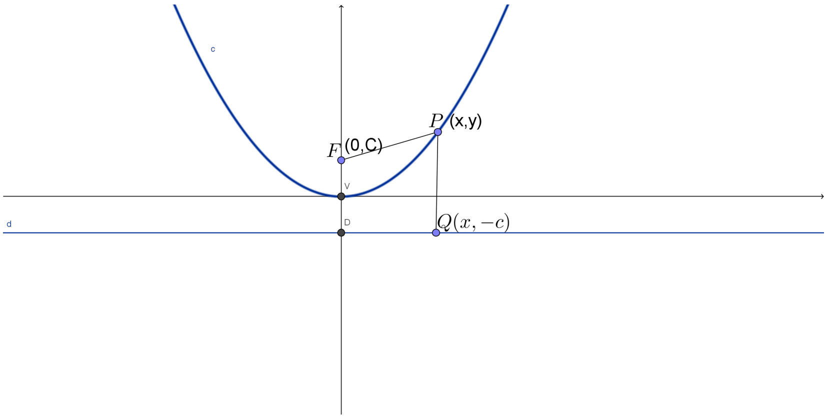


Figura 12: Equação da Parábola com diretriz y = -c e foco F(0,c)

d(P,F) = d(P,Q)

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+c)^2} =$$

$$x^2+y^2-2cy+c^2 = y^2+2cy+c^2 \Rightarrow x^2 = 4cy.$$

- Se $c > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima
- Se $c < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo

2º caso: Diretriz x = -c e foco F(c,0). Figura 13.

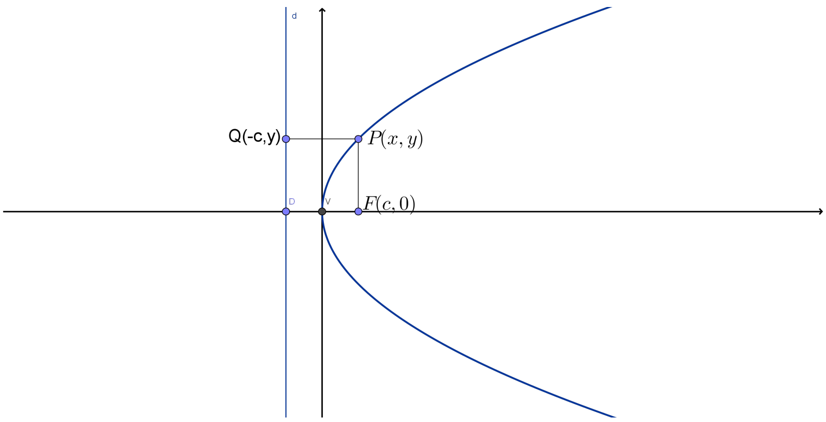


Figura 13: Equação da parabola com diretriz x = -c e foco F(c,0)

d(P,F) = d(P,Q)

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+(y-y)^2} =$$

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 =$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 \Rightarrow x^2 = 4cy$$

- Se $c > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a direita.
- Se $c < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

4.3 Definição no Contexto do Cálculo Diferencial.

Nesta sessão, vamos apresentar algumas definições e proposições estudados no Cálculo Diferencial na intenção de ajudar a compreender melhor o gráfico da função quadrática.

Definição 3. *Uma função f tem um máximo relativo em c se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$, em que $D(f)$ é o domínio da função f.*

Definição 4. *Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.*

Definição 5. *A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$, (lê-se f linha de x, no ponto x_1), é definida pelo limite*

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta_x) - f(x_1)}{\Delta_x},$$

quando este limite existe. Também podemos escrever

$$f'(x) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1 representa a inclinação da curva neste ponto.

Proposição 3. *Suponhamos que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe então $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a Definição 3 , $f'(c) \geq f(x)$ se x estiver suficientemente próximo de c, o que implica que se h estiver suficientemente próximo de O, h sendo positivo ou negativo, então:

$$f(c) \geq f(c+h)$$

e portanto,

$$f(c+h) - f(c) \leq 0.$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desiqualdade por um número positivo. Sem alterar a desigualdade. Assim se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Tomando o limite a direita de ambos os lados dessa desigualdade obtemos:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0.$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe temos:

$$f'(c) = \lim_{h \to} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

e assim mostramos que $f'(c) \leq 0$.

Se $h < 0$,então
$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$. Logo, tomando o limite esquerdo, temos:

$$f\text{"}(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Mostramos que $f'(c) \geq 0$ e também que $f'(c) \leq 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$. ■

Definição 6. *Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é crescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$.*

Definição 7. *Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é decrescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$.*

Definição 8. *Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. f é definida no ponto a;
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposição 4. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em [a,b];*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em [a,b].*

Demostração: Seja x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo [a,b] com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de função crescente devemos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como estamos supondo $f'(x) > 0$, sabemos que f é diferenciável em $[x_1, x_2]$. Logo pelo Teorema do Valor Médio, existe c entre x_1 e x_2 tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Agora $f'(c) > 0$ por hipótese e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da equação acima é positivo, e

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{ou} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Isso mostra que f é crescente. ■

A parte (2) é provada de maneira análoga.

Teorema 2. ***(Critério da derivada primeira para determinação de extremos).***

Seja f uma função contínua num intervalo fechado [a,b] que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a,b), exceto possivelmente num ponto c.

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.*

O Critério da Derivada Primeira é uma consequência da Proposição 2. Na parte (1), por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita. Segue-se que f tem um máximo local em c.

Teorema 3. ***Critério da derivada segunda para determinação de extremos de uma função.***

Seja f uma função derivável num intervalo (a,b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a,b), temos;

1. *Se $f''(x) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.*

2. *Se $f''(x) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.*

3. *o teste e inconclusivo caso $f = 0$.*

Demostração do caso 1, pois o caso 2 é análogo.

Suponha $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. então:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$$

. Logo, há um intervalo (a,b) contendo c tal que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Portanto,

$$a < x < c \Rightarrow x - c < 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$$
$$c < x < b \Rightarrow x - c < 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Portanto, f passa de crescente para decrescente em c. Pelo teste da derivada primeira, f tem máximo local em $x = c$. ■

Construiremos agora, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. O gráfico é uma parábola e este poderá ter concavidade para cima ou para baixo, isso dependerá do valor do coeficiente a. De fato,
Calculando $f'(x)$ obtém-se $f'(x) = 2ax + b$
Calculando $f''(x)$ obtém-se $f''(x) = 2a$.

Pelo teste da derivada segunda concluímos que:

- Se $a > 0$ a concavidade da parábola será voltada para cima, Figura 14 (a)

- Se $a < 0$ a concavidade da parábola será voltada para baixo, Figura 14 (b)

(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Figura 14: Concavidade da Parábola

4.4 Interseção com o eixo das ordenadas.

O gráfico da função quadrática intersepta o eixo das ordenadas quando $x = 0$. Como o seu domínio é o conjunto dos números reais ela sempre vai interceptar o eixo Oy no ponto (0,f(0)). Efetuando os cálculos tem-se:

$$f(0) = a.0^2 + b.0 + c$$

$$f(0) = c.$$

Desse modo conclui-se que o gráfico sempre interseptará o eixo Oy em c, Figura 15.

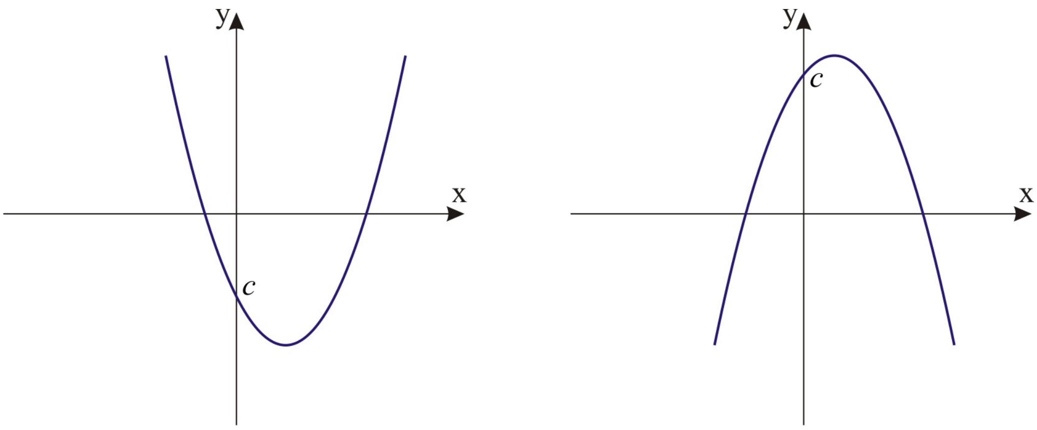


Figura 15: Interseção com o eixo Oy

4.5 Interseção com o eixo das abscissas.

O gráfico da função quadrática intercepta o eixo Ox nos pontos em que $f(x) = 0$, ou seja, nas raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$. Como vimos anteriormente temos três casos à considerar, dependendo do discriminante, vejamos:

- Se $\Delta > 0$ teremos duas raízes reais e distintas. Figura 16

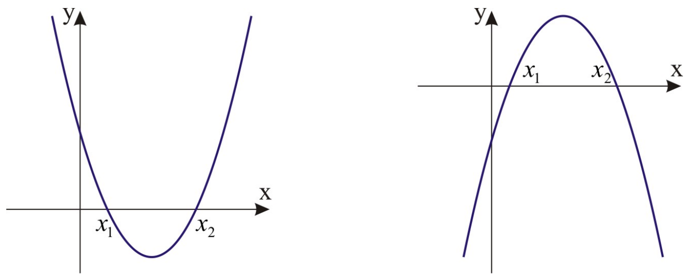


Figura 16: Parábola com duas raízes reais e distintas

- Se $\Delta = 0$, teremos duas raízes reais e iguais. Figura 17.

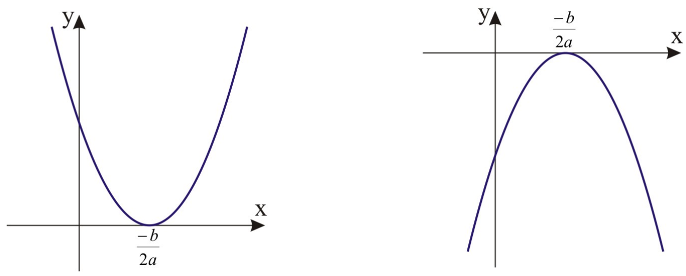


Figura 17: Parábola com duas raízes reais e iguais

- Se $\Delta < 0$, não teremos raízes reais. Figura 18.

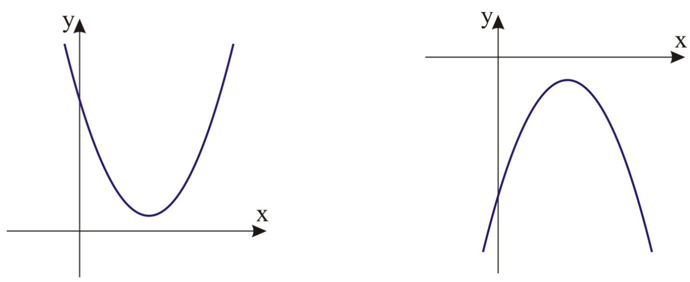


Figura 18: Parábola que não possui raiz real

4.6 Vértice da Parábola.

O vértice V da parábola é o ponto mínimo absoluto ou máximo absoluto do gráfico da função quadrática, podemos calculá-lo da seguinte forma:

Deriva-se a função $f(x)$. Em seguida resolve-se a equação $f'(x) = 0$ ou $2ax + b = 0$, donde vem $x = \frac{-b}{2a}$.

Como a abscissa do vértice é dada por $x_v = \frac{-b}{2a}$, a ordenada $f(x_v)$ do vértice é calculada assim:

$$f(x_v) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$f(x_v) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x_v) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(x_v) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(x_v) = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Portanto, o vértice da parábola é o ponto de coordenadas V $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Como $x = \frac{-b}{2a}$ é o único ponto em que $f'(x) = 0$ a parábola possui apenas um ponto crítico que é o vértice, no caso em que $\Delta > 0$, a abscissa do vértice será a média aritmética das raízes, Figura 19.

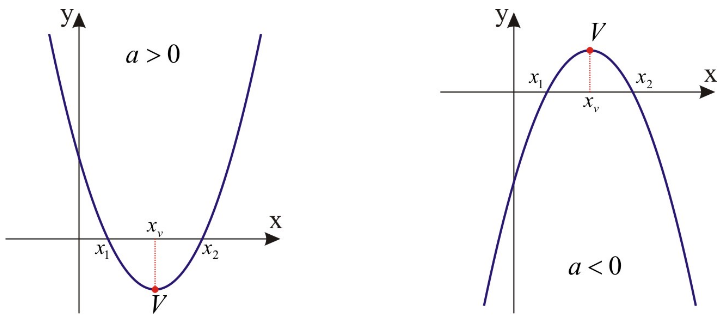


Figura 19: X_v Ponto médio das raízes

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2a} =$$

$$\frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a} = X_v.$$

No caso em que $\Delta = 0$, o vértice é o próprio ponto de interseção com o eixo das abscissas, Figura 20.

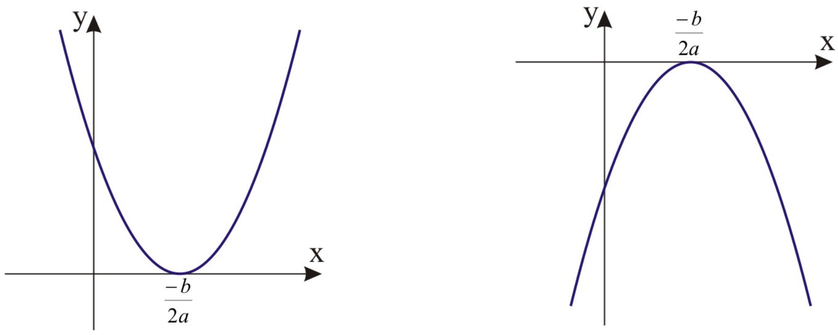


Figura 20: X_v é a própria raiz

Podemos concluir que:

- se $a > 0$ o vértice é o ponto mínimo da função
- se $a < 0$ o vértice é o ponto máximo da função

4.7 Simetria.

Teorema 4. *Em uma parábola quaisquer dois pontos equidistantes do vértice, possuem imagens iguais. Logo existe uma simetria em relação a reta y=x_v, que será chamada eixo de simetria da parábola, Figura 21.*

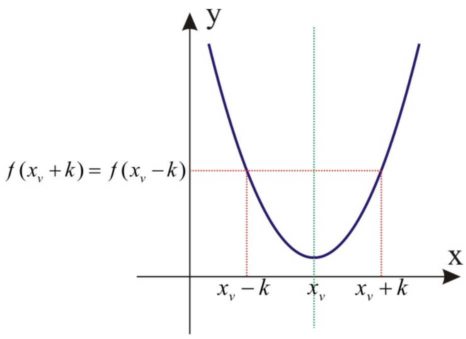


Figura 21: Simetria de dois pontos

Demonstração: Sejam dois pontos equidistantes do vértice com abscissas $x_1 = x_v - k$ e $x_2 = x_v + k$, respectivamente, com $k > 0$. Queremos demonstrar que $f(x_1) = f(x_2)$.

Temos:
$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 2ax_v = -b,$$
multiplicando os dois membros por 2k, vem:

$$4ax_vk = -2bk$$

$$2ax_vk + 2ax_vk = -bk - bk$$

$$2ax_vk + bk = -2ax_vk - bk$$

Somando $ax_v^2 + ak^2$ nos dois membros da igualdade, tem-se:

$$ax_v^2 + 2ax_vk + ak^2 + bk = ax_v^2 - 2ax_vk + ak^2 - bk$$

$$a\left(x_v^2 + 2x_vk + k^2\right) + bk = a\left(x_v^2 - 2x_vk + k^2\right) - bk$$

Somando $bx_v + c$ nos dois membros da igualdade, obtém-se

$$a\left(x_v^2 + 2x_vk + k^2\right) + bk + bx_v + c = a\left(x_v^2 - 2x_vk + k^2\right) - bk + bx_v + c$$

$$a(x_v + k)^2 + b(x_v + k) + c = a(x_v - k)^2 + b(x_v - k) + c$$

$$f(x_v + k) = f(x_v - k).$$

■

O que mostra que dois pontos equidistantes do vértice têm a mesma ordenada, ou seja, são simétricos em relação a reta $y = x_v$, eixo de simetria da parábola.

4.8 Monotonicidade da função quadrática.

Pela Proposição 2 temos que:

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em [a,b];

2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em [a,b].

Como o domínio de f é o conjunto dos números reais e $f'(x) = 2ax + b$ temos que:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

E chegamos ao quadro com o sinal da primeira derivada,

Estudo do sinal da derivada primeira		
$f'(x) = 2ax + b$	$]-\infty, x_v]$	$[x_v, \infty[$
$a > 0$	f' negativa, f é decrescente	f' positiva, f é crescente
$a < 0$	f' positiva, f é crescente	f' negativa, f é decrescente

5 Variação dos coeficientes da função quadrática.

A utilização de uma ferramenta computacional favorece a manipulação da representação gráfica de maneira mais rápida que a utilização de lápis e papel, permitindo que o aluno investigue relações existentes entre a lei que define a função e seu gráfico. Por isso, nesta seção, sempre trabalharemos com a utilização do Winplot ou Geogebra, com o intuito de mostrar o significado de cada coeficiente da função quadrática em relação ao gráfico.

5.1 Influência de cada coeficiente a, b, c da função quadrática no seu gráfico.

O parâmetro a está relacionado à concavidade e à abertura da parábola:

O gráfico da função quadrática é uma parábola e este poderá ter concavidade para cima ou para baixo, isso dependerá do valor do coeficiente a de fato,
Calculando $f'(x)$ obtém-se $f'(x) = 2ax + b$
Calculando $f''(x)$ obtém-se $f''(x) = 2a$.

Pelo critério da derivada segunda para determinação de extremos de uma função temos:

- quando $a > 0$, a concavidade está voltada para cima e o vértice da parábola é um ponto mínimo;
- quando $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo e o vértice da parábola é um ponto máximo;

Como $2a$ é o coeficiente angular da reta tangente temos que:

- quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola;
- quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola;

Por exemplo, vamos construir no Geogebra os gráficos das funções $f(x) = 2x^2$ e $f(x) = -2x^2$. Veremos que são parábolas simétricas, figura 22 ou os gráficos são reflexões em relação ao eixo x.

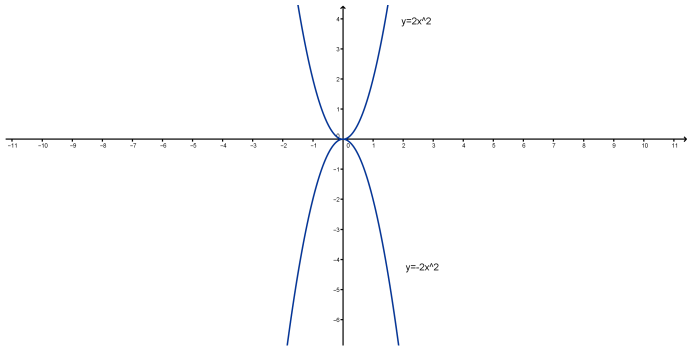
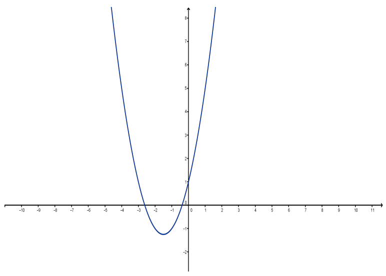


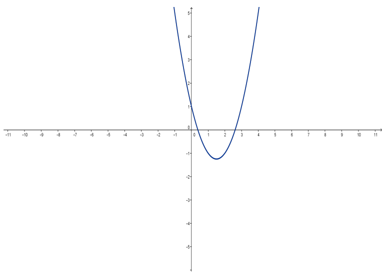
Figura 22: Parábolas Simétricas

O parâmetro b indica se a parábola intersepta o eixo y, no seu ramo crescente ($b > 0$), ou decrescente ($b < 0$) ou no vértice ($b = 0$), Figura 23.

Por exemplo, vamos construir os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 3x + 1$ e $f(x) = x^2 - 3x + 1$ e veremos como fica a interseção com o eixo y.



(a) $b > 0$



(b) $b < 0$

Figura 23: Variação do parâmetro b

O parâmetro c indica onde a parábola intersecta o eixo y, no ponto $(0,\ c)$.

5.2 Variação do coeficiente a.

Segundo [19] dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ e $k \neq a$, ao variar o coeficiente a em k unidades tem-se $f_1(x) = a_1x^2 + bx + c$, com $a_1 = a + k$. Existem dois casos distintos a considerar para o movimento da parábola quando o coeficiente a varia. Considere inicialmente o caso em que $b \neq 0$. Como o coeficiente c não varia, as duas funções: $f(x)$ e $f_1(x)$, intersectam o eixo das ordenadas no mesmo ponto, ou seja, no ponto $(0, c)$. Sabe-se que a função $f(x)$ tem vértice no ponto $\mathrm{V}\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Calculando as coordenadas do vértice V_1 da função $f_1(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_{v_1} &= \frac{-b}{2a_1} \\ x_{v_1} &= \frac{-b}{2(a+k)} \\ x_{v_1} &= \frac{-b}{2a+2k}. \end{aligned}$$

A ordenada de V_1 é

$$\begin{aligned} y_{v_1} &= \frac{-\Delta}{4a_1} \\ y_{v_1} &= \frac{-(b^2-4a_1c)}{4a_1} \\ y_{v_1} &= \frac{-b^2+4(a+k)c}{4(a+k)} \\ y_{v_1} &= \frac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k}. \end{aligned}$$

Assim, $f_1(x)$ tem como vértice $V_1\left(\frac{-b}{2a+2k}, \frac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k}\right)$.

Observe que não é possível notar diretamente qual deslocamento sofre o vértice, porém, tanto a abscissa quanto a ordenada dependem do valor de k. Como estamos considerando os coeficientes a, b e c constantes e o valor de k como uma variação do coeficiente a, logo k é um parâmetro para x_{v_1} e y_{v_1} , ou seja, eles estão em função de k.

$$\begin{cases} x_{v_1} = \frac{-b}{2a+2k} \\ \\ y_{v_1} = \frac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k} \end{cases}$$

Isolando k na primeira equação, obtém-se:

$$2ax_{v_1} + 2kx_{v_1} = -b$$

$$2kx_{v_1} = -b - 2ax_{v_1}$$
$$k = \frac{-b-2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}.$$

Substituindo na equação: $y_{v_1} = \frac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k}$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
y_{v_1} &= \frac{-b^2+4ac+4\left(\frac{-b-2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}\right)c}{4a+4\left(\frac{-b-2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}\right)} \\
y_{v_1} &= \frac{-b^2+4ac+\frac{-4bc-8acx_{v_1}}{2x_{v_1}}}{4a+\frac{-4b-8ax_{v_1}}{2x_{v_1}}} \\
y_{v_1} &= \frac{\frac{-2b^2x_{v_1}+8acx_{v_1}-4bc-8acx_{v_1}}{2x_{v_1}}}{\frac{8ax_{v_1}-4b-8ax_{v_1}}{2x_{v_1}}} \\
y_{v_1} &= \frac{-2b^2x_{v_1}+8acx_{v_1}-4bc-8acx_{v_1}}{8ax_{v_1}-4b-8ax_{v_1}} \\
y_{v_1} &= \frac{-2b^2x_{v_1}-4bc}{-4b} \\
y_{v_1} &= \frac{bx_{v_1}}{2}+c.
\end{aligned}
$$

Observamos que $f_v(x) = \frac{bx}{2} + c$ é uma função afim cujo gráfico é uma reta que intersepta o eixo Oy no ponto $(0, c)$. Logo, concluímos que ao variar o coeficiente a da função $f(x)$ em k unidades, o vértice desloca-se sobre a reta $y = \frac{bx}{2} + c$.

A Figura 24, representa os gráficos de $f(x)$ e $f_v(x)$, bem como, os gráficos de duas outras funções $f_n(x)$ para valores distintos de k .

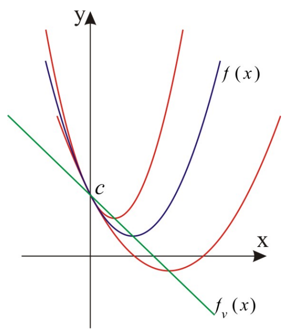


Figura 24: Variação do coeficiente a

Observamos que quanto mais próximo da origem estiver o valor de x_{v_1}, mais fechada será a concavidade da parábola. Temos que

$$x_{v_1} = \frac{-b}{2(a+k)}$$

Logo, quanto mais próximo estiver de $-a$ o valor de k, menor será o valor de $a+k$, e consequentemente, maior será o valor de x_{v_1}. Sendo assim, a abertura da parábola está diretamente ligada ao módulo do coeficiente de x^2, quanto maior for, mais fechada será a parábola.

Observamos que para $a+k=a_1$, tem-se:

$$b<0 \Rightarrow \begin{cases} a_1<0 \Rightarrow x_{v_1}=\frac{-b}{2a}<0 \\ ou \\ a_1>0 \Rightarrow x_{v_1}=\frac{-b}{2a}>0 \end{cases}.$$

Concluímos que $b<0, a_1<0 \Rightarrow x_{v_1}<0$ e além disso o gráfico deve interceptar o eixo $0y$ em (0,c). As parábolas cujos vértices estão no semi plano esquerdo terão concavidade voltadas para baixo. De maneira análoga $b<0, a_1>0 \Rightarrow x_{v_1}>0$. As parábolas cujos vértices estão no semiplano direito terão concavidades para cima, Figura 25.

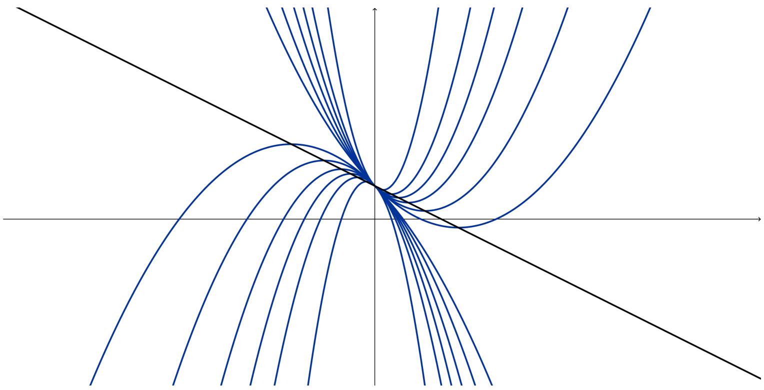


Figura 25: Parábolas para $b<0$

Para b positivo, tem-se:

$$b>0 \Rightarrow \begin{cases} a_1<0 \Rightarrow x_{v_1}=\frac{-b}{2a}>0 \\ a_1>0 \Rightarrow x_{v_1}=\frac{-b}{2a}<0 \end{cases}.$$

Se $b>0, a_1<0 \Rightarrow x_{v_1}>0$ e além disso, o gráfico deve interceptar o ponto o eixo y no ponto (0,c), as parábolas cujos vértices estão no semi plano direito terão concavidades voltadas para baixo. De maneira análoga, para $b>0, a_1>0 \Rightarrow x_{v_1}<0$, as parábolas cujos vértices estão no semi plano esquerdo terão concavidades voltadas para cima, Figura 26.

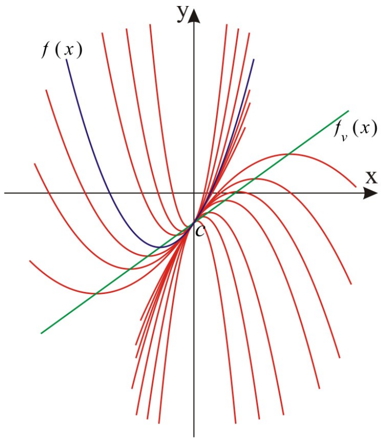


Figura 26: Parábolas para $b > 0$

.

Portanto constatamos que ao atribuir valores para k, tem-se várias parábolas $f_k(x) = (a+k)x^2 + bx + c$ interceptando o eixo das ordenadas no ponto (0,c), com vértice sobre a reta $f_v(x) = \frac{bx}{2} + c$ e cujas concavidades mudam de sentido conforme o lado direito ou esquerdo do eixo $0y$. Considerando agora a função $f(x) = ax^2 + c$, caso $b = 0$. O gráfico tem como vértice o ponto V(0,c) e as funções $f_k(x) = (a+k)x^2 + c$ também possuem vértices no ponto (0,c) diferenciando-se apenas por suas aberturas. Na equação da reta suporte dos vértices $f_v(x) = \frac{bx}{2} + c$ para $b = 0$, tem-se que $f_v(x) = c$. Não haverá variação dos vértices das várias funções $f_k(x)$, Figura 27.

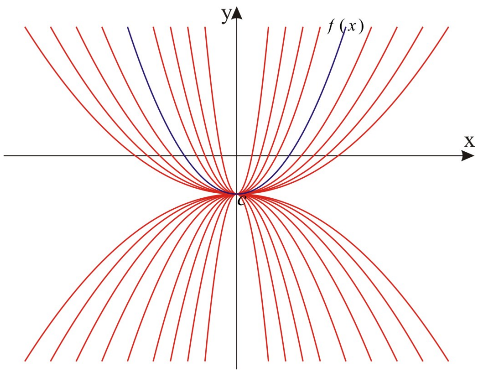


Figura 27: Movimento abre e fecha da parábola

5.3 Variação do coeficiente b.

Segundo [19] se considerarmos a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R}$. Ao variar o coeficiente b em k unidades tem-se $f_1(x) = ax^2 + b_1x + c$, com $b_1 = b + k$. Como o coeficiente c não varia, as duas funções $f(x)$ e $f_1(x)$, interceptam o eixo das ordenadas no mesmo ponto, ou seja, no ponto $(0, c)$.

Sabe-se que a função $f(x)$ tem vértice no ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

Determinando-se a abscissa do vértice V_1 da função $f_1(x)$, tem-se

$x_{v_1} = \frac{-b_1}{2a}$
$x_{v_1} = \frac{-b-k}{2a}$
$x_{v_1} = \frac{-b}{2a} + \frac{-k}{2a}$
$x_{v_1} = x_v - \frac{k}{2a}$.

A ordenada de V_1 será

$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-(b_1^2-4ac)}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-(b+k)^2+4ac}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-b^2-2bk-k^2+4ac}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} + \frac{-2bk-k^2}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a} - \frac{k^2+2bk}{4a}$
$y_{v_1} = y_v - \frac{k^2+2bk}{4a}$.

Assim, tem-se

$$\begin{cases} x_{v_1} = x_v - \dfrac{k}{2a} \\ \\ y_{v_1} = y_v - \dfrac{k^2+2bk}{4a} \end{cases}$$

Isolando k na equação $x_{v_1} = x_v - \dfrac{k}{2a}$ obtemos

$$2ax_{v_1} = 2ax_v - k$$

$$k = 2ax_v - 2ax_{v_1}$$

$$k = 2a\left(\frac{-b}{2a}\right) - 2ax_{v_1}$$

$$k = -b - 2ax_{v_1}.$$

Substituindo na equação $y_{v_1} = y_v - \dfrac{k^2 + 2bk}{4a}$, tem-se

$$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a} - \frac{(-b-2ax_{v_1})^2 + 2b(-b-2ax_{v_1})}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2 + 4ac - (b^2 + 4abx_{v_1} + 4a^2x_{v_1}^2) - 2b(-b-2ax_{v_1})}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2 + 4ac - b^2 - 4abx_{v_1} - 4a^2x_{v_1}^2 + 2b^2 + 4abx_{v_1}}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{4ac - 4a^2x_{v_1}^2}{4a}$$

$$y_{v_1} = -ax_{v_1}^2 + c.$$

Observe que $f_v(x) = -ax^2 + c$ é uma função quadrática onde todas as parábolas são semelhantes a $f(x)$, porém como $a < 0$ possuem a concavidade invertida. Observa-se ainda que o vértice de $f_v(x)$ é o ponto $(0, c)$, isto é, o ponto de interseção com o eixo das ordenadas.

A Figura 28, apresenta os gráficos de $f(x)$ e $f_v(x)$, bem como, os gráficos de várias funções $f_n(x)$ para valores diversos de k, ou seja, a figura apresenta o movimento parabólico de uma função quadrática cujo coeficiente a é positivo.

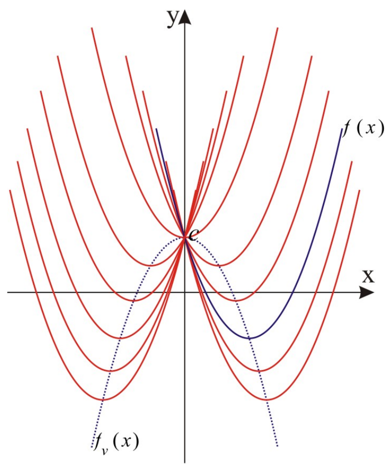


Figura 28: Movimento parabólico de uma parábola.

Assim, constatamos que ao variar o coeficiente b em uma função quadrática, os pontos que representam os vértices descrevem uma parábola de concavidade inversa a concavidade da função e possui eixo de simetria coincidente com o eixo $0y$.

5.4 Variação do coeficiente c.

De acordo com [19] ao considerar-se a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R}$ então, ao variar o coeficiente c em k unidades tem-se $f_1(x) = ax^2 + bx + c_1$, com $c_1 = c + k$.

Sabe-se que a função $f(x)$ tem vértice no ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, observa-se então que a função $f_1(x) = ax^2 + bx + c_1$ tem a mesma abscissa x_{v_1} do vértice, pois ela não depende do coeficiente c. Logo, sua ordenada é

$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-(b^2-4ac_1)}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-b^2+4a(c+k)}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-b^2+4ac+4ak}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} + \frac{4ak}{4a}$
$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a} + k$
$y_{v_1} = y_v + k.$

Desse modo o vértice V da função $f(x)$ sofre um deslocamento de $|k|$ unidades no sentido vertical, pois $V_1\,(x_v, y_v + k)$.

Como já foi visto, o coeficiente c é o ponto onde a parábola intercepta o eixo das ordenadas. Portanto, ao variar o coeficiente c em uma função quadrática, muda-se o ponto em que o gráfico intersepta o eixo $0y$. Logo, o ponto em que $f_1(x)$ intersepta o eixo das ordenadas é $|k|$ unidades distante do ponto onde $f(x)$ intersepta o mesmo eixo.

Seja agora um ponto (x_0, y_0) de $f(x)$, onde $y_0 = f(x_0) = ax_0^2+bx_0+c$. Determinando a imagem de x_0 para $f_1(x)$, tem-se

$$f_1(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c_1$$

$$f_1(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + k$$

$$f_1(x_0) = f(x_0) + k$$

$$f_1(x_0) = y_0 + k.$$

Ou seja, um ponto qualquer sofre também um deslocamento de $|k|$ unidades, Figura 29.

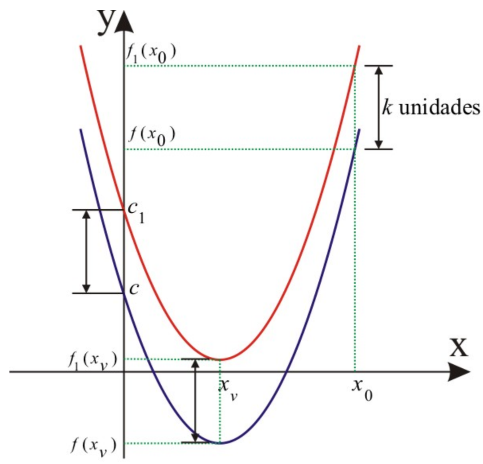


Figura 29: Movimento vertical da parábola.

É importante observar que a parábola sofre um movimento vertical quando se varia o coeficiente c, este movimento pode ser para cima ou para baixo, ou seja, se $k > 0$ a parábola deslocará para cima, e se $k < 0$ ela deslocará para baixo.

6 Aplicações da Função Quadrática e Atividades.

Os problemas serão apresentados em seções, conforme tipos de atividades ou área de aplicação. Assim, teremos as seguintes seções: atividades relacionadas a problemas do cotidiano; problemas de otimização; atividades com uso do Winplot ou Geogebra para observação de translações e parâmetros; atividades envolvendo a parábola no contexto da Geometria Analítica; aplicações da função quadrática na Física, no Cálculo Diferencial e atividades aplicadas em sala de aula. Todos os problemas vêm acompanhados de soluções.

6.1 Problemas do Cotidiano.

O objetivo principal desta seção é a modelagem e resolução de problemas através da função quadrática, mostrando que esta função elementar é aplicada em diferentes situações do cotidiano.

Problema 1. Futebol Brasileiro. Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Vamos verificar quantos jogos serão realizados. Contamos o número de jogos que cada clube participará no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$. Sabendo que o campeonato brasileiro é disputado por 20 clubes, calculamos a quantidade de jogos com o mesmo raciocínio: $20 \cdot 19 = 380$ jogos. Enfim, para cada quantidade x de clubes participantes, é possível calcularmos o número y de jogos do campeonato, ou seja, x é função de y. Generalize e escreva uma equação (regra) que permita calcular y a partir de x. (Problema retirado de [10]).

Solução:
Para a resolução deste problema, lembre-se da definição da função quadrática $y = x(x-1) = x^2 - x$.

Problema 2. Esporte. Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o espaço em volta de uma quadra poliesportiva, Figura 30, com dimensões oficiais 20m e 36m. Tendo recebido 200m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível. (Problema foi retirado de [6]).

Solução:

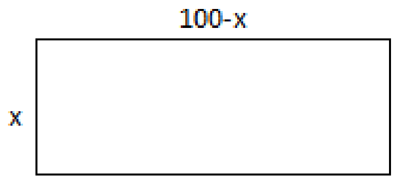


Figura 30: Quadra Poliespoetiva

A área é dada por $A(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$. Como o coeficiente a é negativo, a função $A(x)$ é representada por uma parábola com a concavidade voltada para baixo e seu vértice é um ponto máximo. Logo, para que a área seja máxima, a dimensão x é a abscissa do vértice

$x_v = \frac{-b}{2a}$

$x_v = \frac{-100}{-2}$

$x_v = 50$

A área máxima a ser cercada é um quadrado de lado 50m, o que está adequado para cercar a quadra $20m$ por $36m$.

Problema 3. Número de Ouro. (Problema extraído de [14]).

A raiz positiva $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ da equação $x^2 - x - 1 = 0$ é chamada número de ouro. Como motivação desta definição, resolva a equação $x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

Solução:

Manipulando algebricamente a equação dada, obtemos: $x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

$x = 1 + \frac{x}{1+x}$

$x = \frac{1+2x}{1+x}$

$x^2 - x - 1 = 0$

Resolvendo a equação, obtemos $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

O número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, com expansão decimal aproximadamente igual a $1,61803398$ e muitas vezes indicado pela letra ϕ ou τ.

Os problemas a seguir exigem a determinação de uma equação matemática de uma função que modele um problema da vida real. Neste trabalho, só nos interessa a modelagem da função quadrática.

Problema 4. Modelagem. O comprimento de um lote de construção retangular é três vezes a sua largura. Encontre uma equação que modele sua área em função da largura. (Problema retirado de [25]).

Solução: Considerando:
c= comprimento do lote
l= largura do lote
A =Área do lote
temos: $c = 3l$ e $A = cl$. Então, $A(l) = 3l^2$.

Problema 5. Modelagem. Um retângulo tem um perímetro de 20cm. Encontre uma função que modele sua área em termos do comprimento x de um de seus lados(Problema extraído [25]).

Solução: O perímetro do retângulo é dado por $2x + 2y = 20$ e $A = xy$. Como $2y = 20 - 2x \Rightarrow y = 10 - x$ então, $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.

6.2 Aplicações na Física.

Segundo Galileu, as distâncias percorridas por um corpo em queda livre são proporcionais ao quadrado dos tempos gastos em percorrê-las, ou seja, a função horária das posições é quadrática e definida pela equação $S(t) = S_o + v_o t + \frac{1}{2}gt^2$. Quando se diz que o corpo foi abandonado, sua velocidade inicial $v_o = 0$. A aceleração da gravidade, ao nível do mar é $g \approx 9,8m/s^2$ e $S_o = 0$. Assim é possível reescrever a função como $S(t) = 4,9t^2$.

Dedução de $S(t)$.

Podemos dizer que V_m (velocidade média) é a média aritmética da velocidade inicial e a final:
$V_m = \frac{(V_o+V)}{2}$ (I)

Sabemos também que:
$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (II)

Substituindo a equação II em I, obtemos: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(V_o+V)}{2}$
$\Delta x = \frac{1}{2}\Delta t(V_o + V)$
$\Delta x = \frac{1}{2}\Delta t V_o + \frac{1}{2}\Delta t V$
$x - x_o = \frac{1}{2}\Delta t V_o + \frac{1}{2}\Delta t V$
$x = x_o + \frac{1}{2}\Delta t V_o + \frac{1}{2}\Delta t V$ (III)

Porém $a_m = \frac{V-V_o}{t-t_o}$ para a constante temos: $a_m = a$ e $t_o = 0$
Logo: $a = \frac{V-V_o}{t} \Rightarrow V = V_o + at$

Substituindo-a em III, obtemos:

$x = x_o + \Delta t V_o + \frac{1}{2}a\Delta t^2$
Se $t_o = 0$, temos que $\Delta t = t$, Então:
$x = x_o + V_o t + \frac{1}{2}at^2$

Para queda livre $a = -g$ daí vem:
$y = Y_o + V_o t - \frac{1}{2}gt^2$.
Isto mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

Problema 6. Queda Livre. Um atleta vai pular de um trampolim de 44,1 metros de altura em relação ao solo. Desprezando-se a resistência do ar, quantos segundos vai demorar sua queda? Quantos metros o atleta já se deslocou após 1s? (Extraído de [11]).

Solução:
Para esta resolução, devemos aplicar o valor da função quadrática. Encontraremos $44,1 = 4,9t^2 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3s \quad e \quad S(1) = 4,9m.$
Resposta: Sua queda vai durar 3 segundos e após 1 segundo, ele já se deslocou 4,9 metros.

Problema 7. Movimento Uniformemente Variado (MUV). Partindo do repouso, um avião percorre a pista de decolagem com aceleração constante e atinge a velocidade de $v = 360km/h$ em $20s$. Calcule o valor da aceleração desse avião $(\frac{m}{s^2})$ e o comprimento mínimo da pista de decolagem para que o avião consiga decolar.

Solução:
Sabemos que $\frac{360.1000}{3600} = 100$, portanto consideremos a velocidade igual a $100\frac{m}{s}$. Para o cálculo da aceleração, basta a razão $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100m/s}{20s} = 5m/s^2$.

Como a posição do objeto em função do tempo, no MUV, é dada pela função quadrática $S(t) = S_o + v_o t + \frac{1}{2}gt^2$, temos: $S - S_o = v_o t + \frac{at^2}{2}$ então $\Delta s = v_o t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow \Delta s = 100.20 + \frac{5.202}{2} = 3000$.Logo, $\Delta s = 3000m = 3km$ é a variação da posição, o deslocamento do avião, ou seja, o comprimento mínimo da pista para que o avião consiga decolar.

6.3 Aplicações no Cálculo Diferencial.

Problema 8. Taxa de Variação da Função Quadrática. Se um objeto é solto, em queda livre, de uma altura de 100 pés e se a resistência do ar pode ser desprezada, a altura h do objeto no instante t (em segundos) é dada por $h(t) = -16t^2 + 100$.
a) Lembrando que a velocidade média é dada por $v_m = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, calcule a velocidade média do objeto nos intervalos [1, 2], [1; 1, 5] e [1; 1, 1].
b) A taxa de variação instantânea, nesse caso chamada de velocidade instantânea é a derivada da função h. Lembre que a derivada da função quadrática é dada por $f'(x) = 2ax + b$. Calcule a velocidade do objeto quando $t = 1$.

Solução:

a)$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{36-84}{1} = -48$pés/segundo; $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{64-84}{0,5} = -40$ pés/segundo e $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{80,64-84}{0,1} = -33,6$pés/segundo. Observe que as velocidades médias são negativas porque o objeto está se deslocando para baixo, ou seja, a altura h do objeto está diminuindo.

b) Neste item, precisamos calcular a velocidade instantânea. A velocidade é dada por $v(t) = -32t$. Logo, $v(1) = -32$ pés/segundo, um valor bem próximo de $-33,6$, que é a velocidade média com $\Delta t \to 0$, ou seja, a variação do tempo bem pequena.

6.4 Otimização.

Em problemas de otimização, buscamos encontrar os pontos ótimos, ou seja, os mínimos ou máximos. No caso da função quadrática, o ponto máximo ou mínimo é o vértice da parábola. Para uma função que representa o lucro de uma empresa, há interesse no valor máximo; para uma função que representa a quantidade de material num processo de manufatura, buscaria-se o valor mínimo. Com estes problemas, aprenderemos a determinar máximos e mínimos da função quadrática.

Problema 9. Futebol. A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h(t) = -t^2 + 6t$. Em que instante a bola atinge a altura máxima? Qual é essa altura máxima atingida pela bola? (extraído do livro de autoria de [6]).

Solução:

O que está sendo perguntado corresponde às coordenadas do vértice da parábola, que possui concavidade voltada para baixo. Portanto, o vértice é o ponto máximo da função. Como buscamos encontrar o ponto máximo, este é um problema de otimização. O instante será dado por $t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3s$. A altura máxima atingida pela bola é $h_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{36}{4} = 9m$. A altura também é a imagem de 3 pela função, ou seja, $h(3) = -9 + 18 = 9$.

Problema 10. Lançamento Oblíquo. Um ponto material é lançado do solo, verticalmente para cima e tem posições s no decorrer do tempo t dadas pela função horária $s = 60t - 5t^2$ (s em metros e t em segundos).
a) Escreva os intervalos de crescimento e decrescimento da função;
b) Calcule o tempo gasto para atingir a altura máxima;
c) Determine a altura máxima em relação ao solo;
d) Grafique o problema.

Solução:
a) Os intervalos de crescimento e decrescimento da função são determinados através do estudo do sinal da derivada primeira da função. Como $s'(t) = 60 - 10t, s'(t) < 0$ quando $t > 6, s'(t) = 0$ quando $t = 6$ e $s'(t) > 0$ quando $t < 6$. Sendo s decrescente se $t \in (6, \infty)$ e crescente se $t \in (-\infty, 6)$.

b) O tempo gasto para atingir a altura máxima corresponde ao valor de t que anula a derivada primeira, ou seja, $t = 6$ segundos. Esse valor também poderia ser calculado como a abscissa do ponto máximo, já que a parábola tem concavidade voltada para baixo e o vértice é um ponto máximo. Logo, $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{-10} = 6$

c) A altura máxima em relação ao solo corresponde ao y do vértice (valor máximo da função) que pode ser calculado como $s(6) = 360 - 5 * 36 = 180m$ ou $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-3600}{-20} = 180$

d) Observe Figura 31.

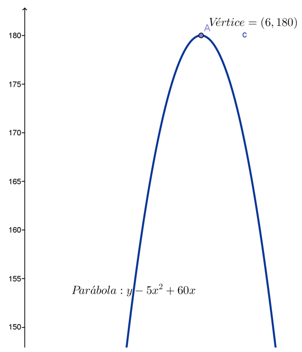


Figura 31: Parábola e Ponto Máximo

Problema 11. Área Máxima. O dono de uma granja quer construir um cercado retangular aproveitando um muro já existente. As dimensões do cercado podem variar, desde que o comprimento da parte cercada, sem contar o muro, seja 36m (perímetro igual a 36), pois o granjeiro só tem 36 m de tela.

a) Determine a área A desse cercado, em função de x.

b) A é uma função quadrática na variável x. Elabore o gráfico dessa função, que deve ter a concavidade voltada para baixo.

c) O granjeiro quer um cercado que tenha maior área. Qual é essa área e quais devem ser as dimensões do cercado? (Problema retirado de [11])

Solução:

Este é um problema também de modelagem. Precisamos identificar a variável; expressar todas as incógnitas em função da variável; montar um modelo (equação matemática); resolver a equação e comprovar a resposta.

a) $A(x) = x(36 - 2x) \Leftrightarrow A(x) = -2x^2 + 36x$

b) Observe o gráfico, Figura 32(b)

(a) Granja (b) Função Área

Figura 32: Granja e Função Área

c) O $x_v = \frac{-36}{-4} = 9m$ e $A(9) = -2.81 + 36.9 = -162 + 324 = 162m^2$ é a área máxima. Assim, as dimensões do retângulo devem ser 9m e 18m, para que a área seja máxima.

Problema 12. Economia. Seja p o preço de venda por unidade de determinado bem e q a respectiva quantidade vendida a este preço. A receita total R auferida pela venda de q unidades ao preço p é dada por $R = pq$. O lucro total é dado pela diferença entre a receita e o custo total, ou seja, $L = R - C$. Considerando $q = 20 - p$ a equação da demanda de um bem é $C = 2q + 17$ a equação do custo associado, determine:
a) a equação da receita;
b) a função lucro;
c) o valor de q para se obter a receita máxima;
d) o valor de $q$para a obtenção de um lucro máximo. (problema extraído de [24]

Resolução:
a) A equação da receita é $R(q) = (20 - q)q = -q^2 + 20q$.
b) A função lucro é definida por $L(q) = -q^2 + 18q - 17$

c) O valor de q para se obter a receita máxima é a abscissa do vértice de R, o que corresponde a $q = \frac{-20}{-2} = 10$ unidades.
d) O valor de q para a obtenção de um lucro máximo também é a abscissa do vértice de L, o que corresponde a $q = \frac{-18}{-2} = 9$ unidades.

7 Considerações finais

.

Acreditamos que, com este enfoque dado a Função Quadrática, o professor do ensino médio poderá desenvolver conceitos poucos usuais, mas acessíveis aos estudantes do Ensino Básico.

Uma das motivações para o desenvolvimento desta dissertação, foi a constatação durante o exercício da docência, do fato de que alguns livros didáticos não explicam de modo satisfatório, Por exemplo a influência de cada coeficiente da Função Quadrática em seu gráfico, ficando a impressão que que a matemática é vista como um conjunto de regras prontas. Diante disto, o estudante atua como mero expectador e é estimulado a seguir regras de memorização e repetição, sem associar de forma adequada suas próprias ideias ao que lhe foi apresentado.

Consideramos oportuna a utilização da tecnologia para a visualização das parábolas e a animação que o software Geogebra proporciona, deixando bem claro ao aluno o que representa cada coeficiente no gráfico, concavidade, abertura da parábola, interceptos, vértices e imagem e também o seu formato.

Ao construir todo o conteúdo da antiguidade aos tempos atuais justificando cada passo, esperamos que o professor de matemática que atua no ensino básico, tenha uma fonte confiável para pesquisar qualquer conceito relativo ao estudo da Função Quadrática, fugindo dos atuais materiais comercializados. E que cada docente se sinta incentivado a usar a abordagem histórica, formal e tecnológica para uma melhor formação dos nossos alunos.

Referências

[1] Boyer, C. B. ,*História da Matemática.* Edgard Blucher, São Paulo, 2ª edição, 2001

[2] Eves H., *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:* Geometria. Atual, São Paulo, 1993

[3] Eves H., *Introdução a história da matemática.* Editora da UNICAMP, São Paulo, 2008

[4] Eves B. H., *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:*1993

[5] Ronan, C. A., *História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge: da Renascença à Revolução Científica*, volume III. Zahar, Rio de Janeiro, 2001

[6] Dante L. R., *Matematica: contexto e aplicações,* volume 1. Ática, São Paulo, 1ª edição, 2011a

[7] Steinbruch A. *Geometria Analítica.* Pearson Makron Books, São Paulo, 2006

[8] Dante L. R., *Matemática: contexto e aplicações*, volume 3. Ática, São Paulo, 1ª edição, 2011b

[9] Giovanni, J. R.;Bonjorno, J. R.;,*Matemática Completa* volume 1. FTD, São Paulo, 2ª edição, 2005

[10] Iezzi G., *Matemática: ciência e aplicações,* volume 1. Saraiva, São Paulo, 6ª edição, 2010

[11] Imenes L. M.; Jakubovic, J. L. M. C., *Equação do 2º Grau.* Atual, São Paulo, 1992

[12] Imenes L. M.; Lellis, M. C.. Matemática: 9º ano. Moderna, São Paulo, 1ª edição, 2010

[13] Lima E. L.. *A matemática do ensino médio,* volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 9ª edição, 2006

[14] Oliveira K. I. M., *Iniciação a Matemática: um curso com problemas e soluções.* SBM, Rio de Janeiro, 1ª edição, 2010

[15] PCNEM 2000, *Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio.* www.portal.mec.gov.br/

[16] Coleção Profmat, *Fundamentos do Cálculo,* 2012

[17] Coleção Profmat, *Geometria analítica,* 2012

[18] Reis, G. L.; Silva, V.V., *Geometria Analítica.* ed. da Universidade Federal de Goiás, 1981.

[19] Sousa, Fábio Antônio Leão, *Funções quadráticas, estudo do gráfico das funções quadráticas*, Trabalho de Conclusão de Curso, 2013

[20] Flemming, D. M.; Gonçalves, M. B., *Cálculo A;* funções limites, derivação, integração. Pearson, São Paulo 2011.

[21] Lang, S., *Cálculo* - volume 1. Ao livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971

[22] Renascença a Revolução Científica, volume III. Zahar, Rio de Janeiro.

[23] Revista do professor de matemática:, *A fórmula é de bhaskara?* 39:54, 1999

[24] Silva S. M.; Silva, E. M. , *Matemática para os cursos de Economia, Administração e Ciências Contábeis,* volume 1. Atlas, São Paulo, 3ª edição, 1993

[25] Stewart J.; Redlin, L. W. S. , *Precálculo:* Matemáticas para el cálculo. Cengage Learning, 5ª edição. 2000

[26] Swokowski E. W. , *Cálculo com Geometria Analítica,* volume 1. Makron Books, São Paulo, 2ª edição, 1995

[27] Ávila G. , *Revista do professor de matemática:* Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de fibonacci. 6:9–14, 1985

[28] Ávila G. S. , *Várias faces da matemática:* Tópicos para licenciatura e leitura geral, 2010