



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Um Estudo sobre Construções dos Números Reais

Fabiana Moura de Queiroz

Goiânia

2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Fabiana Moura de Queiroz		
E-mail:	fabi_sweet@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor de Educação Básica		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF
		CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Um Estudo sobre Construções dos Números Reais		
Palavras-chave:	Números reais, Números racionais, Construção, Cortes de Dedekind e Sequências de Cauchy.		
Título em outra língua:	A study on Construction of the Real Numbers		
Palavras-chave em outra língua:	Real numbers, Rational numbers, Construction, Dedekind cuts and Cauchy sequences.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa:	(06/03/2015)		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática		
Orientador (a):	Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes de Carvalho		
E-mail:	marcos_leandro_carvalho@ufg.br		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

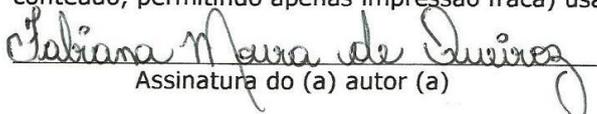
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 24 / 03 / 2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

FABIANA MOURA DE QUEIROZ

Um Estudo sobre Construções dos Números Reais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Mestrado Profissional em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho

Goiânia
2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Moura de Queiroz, Fabiana
Um Estudo sobre Construções dos Números Reais [manuscrito] /
Fabiana Moura de Queiroz. - 2015.
112 f.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Ensino na Educação Básica (Profissional), Goiânia, 2015.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Números reais. 2. Números racionais. 3. Construção. 4. Cortes
de Dedekind. 5. Sequências de Cauchy. I. Leandro Mendes
Carvalho, Marcos, orient. II. Título.

Fabiana Moura de Queiroz

**Um Estudo sobre Construções dos Números
Reais**

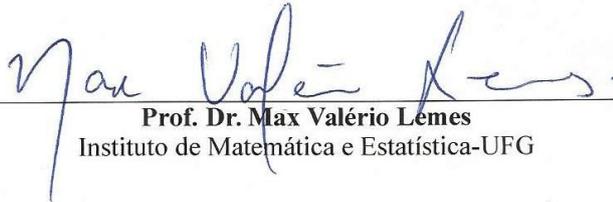
Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
IFG-GOIÂNIA



Prof. Dr. Max Valério Lemes
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Fabiana Moura de Queiroz

Graduou-se e especializou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Atualmente é professora em escolas públicas do Estado de Goiás.

Aos meus pais, ao meu esposo e a minha irmã pessoas mais importantes na minha vida e que sempre acreditaram em mim.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente e acima de tudo a Deus por ter me dado a vida e oportunidade de poder chegar até aqui.

Aos meus familiares e amigos que sempre me deram força e estiveram ao meu lado durante todo o período deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho, pela confiança, paciência, dedicação, incentivo e orientação, que foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

À todos os professores e colegas do Profmat, turma de 2013 pelo apoio, dedicação, incentivo, amizade e troca de conhecimentos.

À Capes, pelo fundamental apoio financeiro.

"Ama-se mais o que se conquista com esforço."

Benjamin Disraeli,
Ex-Primeiro-ministro do Reino Unido.

Resumo

Queiroz, Fabiana Moura de. **Um Estudo sobre Construções dos Números Reais**. Goiânia, 2015. 114p. Dissertação de Mestrado. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O objetivo central deste trabalho é apresentar a sutil passagem dos números racionais aos números reais, utilizando uma construção via Cortes de Dedekind e outra por sequências de Cauchy. Apresenta-se uma construção dos números racionais por classes de equivalência, para que o leitor tenha um alicerce que sirva de apoio para um bom entendimento das construções propostas dos números reais. Utiliza-se o método axiomático para as construções que são feitas sobre números reais, com o intuito de mostrar a existência de um corpo ordenado e completo e caracterizá-lo. Discute-se ainda, e de uma forma mais sintetizada, os números reais e a sua aplicação com alunos de ensino fundamental e médio.

Palavras-chave

Números reais, Números racionais, Construção, Cortes de Dedekind e Sequências de Cauchy.

Abstract

Queiroz, Fabiana Moura de. <**A study on Construction of the Real Numbers**>. Goiânia, 2015. 114p. MSc. Dissertation. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The main objective of this paper is to present the subtle passage of rational numbers to the real numbers, using a construction via Dedekind cuts and other by Cauchy sequences . We present a construction of rational numbers by equivalence classes, so that the reader has a foundation that serves as a support for a good understanding of proposed constructions of real numbers . We use the axiomatic method for buildings that are made on real numbers, in order to show the existence of an orderly and complete field and characterize it. It is also discussed, and a more synthesized form, the real numbers and its application to elementary and high school students.

Keywords

Real numbers, Rational numbers, Construction, Dedekind cuts and Cauchy sequences.

Sumário

Lista de Figuras	14
Lista de Tabelas	15
1 Introdução	16
2 Construção do Conjunto de Números Racionais via classes de equivalência	21
2.1 Classes de equivalência	21
2.2 Adição em \mathbb{Q}	23
2.3 Multiplicação em \mathbb{Q}	25
2.4 Relação de ordem em \mathbb{Q}	29
2.5 Imersão de \mathbb{Z} em \mathbb{Q}	33
3 Construção dos Números Reais - Cortes de Dedekind	35
3.1 Cortes de Dedekind	35
3.2 A relação de ordem	39
3.3 Adição no conjunto dos cortes	41
3.4 Multiplicação no conjunto dos cortes	45
3.5 Identificação do conjunto dos cortes racionais com o conjunto dos números racionais	55
3.6 A completude dos números reais	58
4 Construção dos Números Reais via Sequências de Cauchy	64
4.1 Classes de equivalência de sequências de Cauchy	64
4.2 Relação de ordem em $\bar{\mathbb{R}}$	72
4.3 Adição em $\bar{\mathbb{R}}$	76
4.4 Multiplicação em $\bar{\mathbb{R}}$	79
4.5 Imersão de \mathbb{Q} em $\bar{\mathbb{R}}$	83
4.6 Completude do Conjunto dos Números Reais	86
5 O conjunto dos números reais e sua aplicação em sala de aula.	94
5.1 Algumas questões sobre o ensino dos números reais.	94
5.2 Sugestões de atividades sobre números reais.	97
6 Conclusão	106
Referências Bibliográficas	107
A Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis	109

Lista de Figuras

5.1	Representação de números naturais na reta.	99
5.2	Representação de $\frac{1}{2}$.	100
5.3	Representação de $\frac{1}{3}$.	101
5.4	Triângulo auxiliar à representação de $\sqrt{2}$ na reta real.	102
5.5	Representação de $\sqrt{2}$.	102
5.6	Espiral Pitagórica.	103
5.7	Triângulo auxiliar à representação de $\sqrt{3}$ na reta real.	104
5.8	Representação de $\sqrt{3}$ na reta real.	105
A.1	Os segmentos AB e CD são comensuráveis.	109

Lista de Tabelas

5.1 Aproximações de $\sqrt{2}$

98

Introdução

A inviabilidade na conjectura da comensurabilidade de todas as grandezas, isto é a descoberta de grandezas incomensuráveis feitas pelos pitagóricos, quando por exemplo foi provado que a diagonal e o lado de um quadrado não admitem uma unidade em comum, representou um momento de crise na Matemática, que posteriormente levou os matemáticos a avanços prodigiosos. Assim surgiu a necessidade dos números que ainda não existiam e que hoje denominamos números irracionais.

Os pitagóricos admitiam que tudo dependia dos números inteiros, "o número rege o universo" e a teoria pitagórica das grandezas se baseava na crença de que duas grandezas quaisquer semelhantes seriam comensuráveis, inclusive a teoria pitagórica das proporções, com todas as suas consequências advinha deste fato e, com a descoberta dos incomensuráveis, ficou claro que isso nem sempre seria possível, deste modo a teoria pitagórica das proporções se limitariam a grandezas comensuráveis, o que comprometeu sua teoria geral. Além disso, caiu por terra a filosofia de que o número seria o fundamento de todos os fenômenos naturais, uma vez que nem sequer eram suficientes para exprimir a razão de dois segmentos quaisquer.

Assim por algum tempo houve grande empenho no sentido de nunca divulgar a questão da existência destas grandezas, ora denominadas "inexprimíveis", ora denominadas "seres disformes", para assim não deferir um golpe sobre a obra de Pitágoras e sobre a filosofia pitagórica. "Tão grande foi o escândalo lógico que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. Conta a lenda que o pitagórico Hipaso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erguido um túmulo, como se estivesse morto." [10].

Esta crise influenciou o destino da própria matemática grega, de modo que esta tentativa de estabelecer relações entre o descontínuo da Aritmética e o contínuo Geométrico (a passagem dos números naturais, 1, 2, 3, ... , aos pontos, que na linha reta se sucedem, sem lacunas e sem saltos) foi abandonada por muitos matemáticos gregos que se seguiram.

Incentivados pela carência de uma estruturação algébrica das grandezas os

gregos utilizaram um modo de falar em igualdade de razões mesmo no caso de grandezas incomensuráveis, desenvolvendo a partir daí a Teoria das Proporções, que só dependia dos números naturais. Uma definição que permitiu dar demonstrações satisfatórias dos teoremas sobre proporções e resolvendo em partes o problema da incomensurabilidade foi atribuída a Eudoxo (408 – 355a.C). Eudoxo de Cnido era discípulo de Platão e tornou-se o mais célebre matemático e astrônomo de seu tempo.

Naquela época ainda não havia um conceito específico de razão, os gregos pensavam em razão como uma espécie de relação de tamanho entre grandezas de mesmo tipo (do mesmo tipo no sentido que por exemplo área não pode ser comparada com volume).

A definição de Eudoxo é dada a seguir.

Definição 1.1 *Sejam A, B, C e D grandezas de mesmo tipo (segmentos, áreas ou volumes), diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números naturais m e n , sempre que $mA < nB$, então $mC < nD$; ou $mA = nB$, então $mC = nD$; ou se $mA > nB$, então $mC > nD$.*

Observemos que no caso comensurável dizer que A está para B assim como C está para D é equivalente a $mA = nB$, então $mC = nD$. No caso incomensurável isso não ocorre.

A definição de Eudoxo está longe das definições de número real dadas posteriormente no século XIX, mas sem dúvida foi um passo nesta direção, além de parcialmente sanar a crise da incomensurabilidade.

A partir do século XIII a Álgebra começou a se desenvolver. Mas foi em meados do século XIX que a necessidade de uma definição formal de número real começou a surgir e durante a segunda metade do século XIX vários artigos e livros foram publicados a respeito da definição de número real inclusive com investigações de funções reais baseadas nessa definição.

Abordagens distintas surgiram a cerca da construção e da definição de número real. Mas as teorias que permaneceram e que se tornaram mais conhecidas nos nossos dias foi a de Dedekind, e a de Cantor.

Richard Dedekind (1831 – 1916) estudou em Göttingen, sendo então aluno de Gauss e Dirichlet. No início de sua carreira de professor em Zurique em 1858, quando ensinando Cálculo Diferencial, pela primeira vez percebeu a necessidade de um tratamento científico acerca do conceito de continuidade, ao tentar provar que uma função crescente e limitada tem limite, a partir daí foi conduzido a reconsiderar todo o problema da definição de número real.

Refletindo sobre a questão do que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais, e tendo em vista as ideias de Galileu e Leibniz sobre a

continuidade de pontos sobre uma reta, Dedekind observou e concluiu que o fundamento da continuidade de um segmento de reta se deve a natureza da divisão dos pontos em duas partes por um ponto sobre o segmento. Assim, em toda divisão dos pontos de um segmento de linha reta em duas partes de tal forma que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda, existe um e um só ponto que produz esta decomposição de todos os pontos em duas classes.

Em 1887, Dedekind escreve:

...e se interpretarmos número como razão de duas grandezas, há de se convir que tal interpretação já aparece de maneira bem clara na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões. Aí reside a origem de minha teoria (...) e minhas outras tentativas de construir os fundamentos dos números reais[20, pág.57].

Deixando então claro que seu estímulo para a sua construção de números reais, foi buscada na teoria das proporções de Eudoxo. Inspirado na definição de Eudoxo, Dedekind notou que a sua definição levava a separação dos números racionais em dois conjuntos D e E de números racionais, tais que todo número do conjunto E , é menor do que todo número do conjunto D , existindo um e somente um número que produz este "corte", ou corte de Dedekind. Se E tem um maior elemento (máximo) ou se D tem menor elemento (mínimo), o corte define um número racional; mas se E não tem um maior elemento e nem D um menor elemento, então o corte define um número irracional.

Dedekind observa que os números racionais pode ser estendido de modo a formar um *contínuo numérico*, pois a adição dos irracionais aos racionais preencheria as lacunas de descontinuidade que existiam no conjunto dos números racionais, formando assim um conjunto, ora denominada por conjunto dos números reais.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em São Peterburgo, Rússia em 1845. Em 1856 sua família mudou-se para a Alemanha onde continuou seus estudos em filosofia, física e matemática. Estudou em Zurique, Gottingen e Berlim, onde teve grande influência de Weierstrass. Doutorou-se na Universidade de Berlim em 1867. Desenvolveu sua carreira no ensino na Universidade de Halle, pequena escola sem grande prestígio. Com 29 anos, Cantor casou-se e na sua lua de mel em Interlaken, conheceu e se tornou amigo de Richard Dedekind, que havia publicado sua teoria dos irracionais em 1872, dois anos antes de se conhecerem. No mesmo ano, 1874, Cantor publicou um de seus artigos mais revolucionário a respeito de teoria dos conjuntos e teoria do infinito.

A partir daí, partindo do pressuposto de que os racionais são conhecidos com todas as suas propriedades, Cantor criou uma abordagem dos números irracionais utilizando a noção de sequência de Cauchy de números racionais, isto é, uma sequência de números racionais $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ com a propriedade de que para dado qualquer racional $r > 0$ existe um natural n_1 tal que $|x_n - x_m| < r$ para todo $m, n > n_1$. Ele associou a toda sequência de Cauchy um número real, usando a ideia de convergência.

Tendo percebido que seqüências de Cauchy podiam convergir para o mesmo número, Cantor definiu uma relação de equivalência entre duas seqüências de Cauchy, desta maneira, x_n e y_n , seqüências de Cauchy, são equivalentes se $x_n - y_n \rightarrow 0$ e assim as organizou em classes de modo que duas seqüências pertencem a mesma classe se, e somente se, elas são equivalentes. Então todo número racional r está associado à classe a qual pertence a seqüência onde seus termos são todos constantes iguais a r . Porém muitas das classes escapam dessa associação, e daí Cantor postulou que estas classes originam os números ora denominados números irracionais.

Analisando geometricamente, podemos associar a cada número racional um ponto da reta euclidiana, porém, existem pontos da reta que não têm associado nenhum número racional. O processo de completamento de \mathbb{Q} consistirá em enxergar cada racional como limite das seqüências convergentes em \mathbb{Q} , completando a reta com as seqüências de Cauchy que não convergem em \mathbb{Q} , isto é, a cada "lacuna" sobre a reta depois de fixados os números racionais está associada alguma seqüência de Cauchy de racionais.

O Capítulo II será reservado a construção dos números racionais usando classes de equivalência, a fim de obtermos um melhor embasamento para em seguida, nos dois capítulos posteriores, apresentar as construção do conjunto dos números reais de duas maneiras distintas. Neste sentido, será considerado como conhecidos os números inteiros e suas propriedades.

No Capítulo III faremos a construção dos números reais usando a noção de cortes de Dedekind. Iniciaremos com a idéia de corte, em seguida vamos mostrar que todo número racional determina um corte, porém nem todo corte em \mathbb{Q} define um número racional. Assim para ampliar o campo numérico utilizaremos o postulado, como Dedekind o fez, de que todo o corte define um número real. Com este intuito definiremos o conjunto de todos os cortes possíveis em \mathbb{Q} e mostraremos que este conjunto possui a estrutura de um corpo ordenado completo e assim o conjunto desses cortes define \mathbb{R} , o conjunto dos números reais.

O Capítulo IV por sua vez, será dedicado à construção dos números reais, utilizando o método criado por Cantor, de construção dos números reais via seqüências de Cauchy, mostrando a construção de um corpo ordenado que estenda \mathbb{Q} e no qual toda a sucessão de Cauchy seja convergente. Por este processo identificamos toda seqüência de Cauchy de números racionais com o número para o qual ela converge.

Após ter sido realizada, a construção do conjunto dos números reais, sentimos a necessidade de falar sobre a abordagem deste conjunto, em particular dos números irracionais, em sala de aula. Com esse intuito o capítulo V, traz de modo sucinto, algumas questões sobre o universo dos números reais no sentido do processo de ensino aprendizagem, para que sirva de reflexão para discussões a cerca da dificuldade e necessidade de um ensino de modo satisfatório dos números reais no ensino fundamental e médio.

As notas históricas contidas na introdução tem como referências [2, 10, 12, 20].

Construção do Conjunto de Números Racionais via classes de equivalência

Este capítulo trata dos números racionais a partir dos números inteiros e suas propriedades, que aceitaremos como conhecidas, utilizando o conceito de relação de equivalência e será baseado em estudos contidos em [7, 9, 18].

2.1 Classes de equivalência

A divisão nem sempre é possível no conjunto dos números inteiros. Para completar a operação de divisão, se torna necessário a construção um novo conjunto numérico o qual é denominado conjunto dos números racionais. Vamos inicialmente definir uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Definição 2.1 *Seja $\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z} | m \neq 0\}$, definiremos a relação \sim sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n) | m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^*\}$ como a relação que satisfaz*

$$(m, n) \sim (p, q) \text{ se, e somente se, } mq = np.$$

A relação \sim é uma relação de equivalência, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.2 *Seja \sim como na Definição 2.1 então são válidas as seguintes propriedades:*

- (i) *Reflexiva:* $(m, n) \sim (m, n)$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$;
- (ii) *Simétrica:* $(m, n) \sim (p, q) \Rightarrow (p, q) \sim (m, n)$ para todos $(m, n), (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$;
- (iii) *Transitiva:* $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s) \Rightarrow (m, n) \sim (r, s)$ para todos $(m, n), (p, q), (r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$;

Demonstração.

- (i) Temos que se $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$ então $mn = mn$ e daí $(m, n) \sim (m, n)$.

- (ii) Se $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{Z}^*$. Então $(m, n) \sim (p, q)$ implica $mq = np$ e pela propriedade comutativa dos números inteiros $pn = qm$. Logo, $(p, q) \sim (m, n)$.
- (iii) Suponhamos que $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s)$ então $mq = np$ e $ps = qr$. Como $m, p, r \in \mathbb{Z}$ e $n, q, s \in \mathbb{Z}^*$ podemos multiplicar de ambos os lados da igualdade $mq = np$ por s e da igualdade $ps = qr$ por n , obtendo então $mqs = nps$ e $psn = qrn$, ou seja $qms = nps$ e $nps = qnr$, assim $qms = qnr$. Por $q \neq 0$, é válida a lei do cancelamento, então $ms = nr$. Donde $(m, n) \sim (r, s)$.

□

Esta proposição garante que \sim é realmente uma relação de equivalência.

Definição 2.3 A classe de equivalência a qual pertence o par ordenado $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ será denotada por $\frac{m}{n}$, isto é,

$$\frac{m}{n} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (m, n)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid nx = my\}.$$

Exemplo 2.4

$$\frac{3}{2} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 2x = 3y\} = \{(3, 2), (-3, -2), (6, 4), (-6, -4), \dots\}$$

Proposição 2.5 (Propriedade Fundamental das Frações.) Se (m, n) e (r, s) pertencem a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ então,

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow (m, n) \sim (r, s).$$

Demonstração.

(\Rightarrow) Pela Definição 2.3 se $(x, y) \in \frac{m}{n}$ então $(x, y) \sim (m, n)$. Mas $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$, logo $(x, y) \in \frac{r}{s}$ e daí $(x, y) \sim (r, s)$. Pela transitividade da relação de equivalência item (iii) da Proposição 2.2, temos $(m, n) \sim (r, s)$.

(\Leftarrow) Sabemos que $(m, n) \sim (r, s)$ então $ms = nr$, onde $m, r \in \mathbb{Z}$ e $n, s \in \mathbb{Z}^*$. Precisamos mostrar que $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ e para isto basta ver que $\frac{m}{n} \subset \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \subset \frac{m}{n}$.

- $\frac{m}{n} \subset \frac{r}{s}$.

Seja $(x, y) \in \frac{m}{n}$. Então $(x, y) \sim (m, n)$ e daí $xn = ym$, onde $x, m \in \mathbb{Z}$ e $y, n \in \mathbb{Z}^*$. Multiplicando ambos os lados da igualdade $xn = ym$ por s obtemos $xns = yms$. Por hipótese $ms = nr$, que quando multiplicado de ambos os lados da igualdade por y nos dá, $yms = ynr$. Assim $xns = ynr$ e daí pela lei do cancelamento válida para os números inteiros, como $n \neq 0$, $xs = yr$, donde $(x, y) \sim (r, s)$. Portanto $(x, y) \in \frac{r}{s}$.

- $\frac{r}{s} \subset \frac{m}{n}$. Análogo ao caso anterior.

□

Definição 2.6 O conjunto de todas as classes de equivalência dadas por \sim sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ será denotado por \mathbb{Q} e denominado conjunto dos números racionais. Assim,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Observação 2.7 Dois elementos $a, b \in \mathbb{Q}$ admitem infinitas representações de denominadores iguais. De fato, se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, onde $m, r \in \mathbb{Z}$ e $n, s \in \mathbb{Z}^*$ então $a = \frac{m}{n} = \frac{ms}{ns}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}$ pois $m(ns) = n(ms)$ e $r(ns) = s(nr)$.

Observado que todo elemento $x \in \mathbb{Q}$ admite infinitas representações, vamos agora definir as operações de adição e multiplicação, além da relação de ordem de modo que tenham sentido independente dos representantes escolhidos.

2.2 Adição em \mathbb{Q}

Definição 2.8 Sejam $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Denominaremos soma de a com b e indicamos $a + b$ o elemento de \mathbb{Q} definido por,

$$a + b = \frac{ms}{ns} + \frac{rn}{ns} = \frac{ms + rn}{ns}.$$

A operação que a cada elemento par de elementos $a, b \in \mathbb{Q}$ associa um elemento $a + b \in \mathbb{Q}$ é chamada adição.

A adição é uma operação bem definida, isto é, independe dos representantes das respectivas classes para definir a e $b \in \mathbb{Q}$, como podemos ver na seguinte proposição.

Proposição 2.9 A adição está bem definida, ou seja, se $a = \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, então $\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

Demonstração. Como $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$ e $\frac{r}{s} = \frac{e}{f}$ então, $md = nc$ e $rf = se$. Multiplicando ambos os lados da igualdades, $md = nc$ e $rf = se$ por sf e por nd respectivamente, obtemos $m dsf = n csf$ e $r fnd = s end$. Somando membro a membro as duas últimas igualdades obtemos,

$$m dsf + r fnd = n csf + s end \Leftrightarrow df(ms + nr) = ns(cf + ed)$$

o que garante

$$\frac{ms + nr}{ns} = \frac{cf + ed}{df}, \text{ isto é, } \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.$$

□

Mostraremos agora que a operação de adição satisfaz as propriedades associativa, comutativa, existência de elemento neutro, existência do oposto e a lei do cancelamento para a adição.

Proposição 2.10 *Sejam a, b e $c \in \mathbb{Q}$. A adição satisfaz as seguintes propriedades:*

(A1) *Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$*

(A2) *Comutativa: $a + b = b + a$*

(A3) *Existência de elemento neutro: $\forall a \in \mathbb{Q} \exists 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $a + 0 = a$.*

(A4) *Existência de oposto: Dado $a \in \mathbb{Q}$ existe $b \in \mathbb{Q}$ tal que $a + b = 0$.*

(A5) *Lei do cancelamento da adição: $a + b = c + b \Leftrightarrow a = c$.*

Demonstração.

(A1) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$ então $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s}, c = \frac{t}{u}$, com $m, r, t \in \mathbb{Z}$ e $n, s, u \in \mathbb{Z}^*$.

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= \left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s} \right) + \frac{t}{u} = \frac{ms + rn}{ns} + \frac{t}{u} = \frac{(ms + rn)u + tns}{nsu} \\ &= \frac{(msu + rnu) + tns}{nsu} = \frac{msu + (rnu + tns)}{nsu} = \frac{m}{n} + \frac{ru + ts}{su} \\ &= \frac{m}{n} + \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u} \right) = a + (b + c). \end{aligned}$$

(A2) Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ então $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s}$, em que $m, r \in \mathbb{Z}$ e $n, s \in \mathbb{Z}^*$.

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms + rn}{ns} = \frac{rn + ms}{sn} = \frac{r}{s} + \frac{m}{n} = b + a$$

(A3) Consideremos a classe de equivalência $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \dots$, que indicaremos por 0 apenas.

Então sendo $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$a + 0 = \frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m \cdot 1 + 0 \cdot n}{n \cdot 1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n} = a$$

(A4) Dado $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, então $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. Tomando $-m$ temos que $-m \in \mathbb{Z}$ e daí $b = \frac{-m}{n} \in \mathbb{Q}$. Além disso,

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{mn + (-mn)}{nn} = \frac{0}{nn} = \frac{0}{1} = 0$$

(A5) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$ então $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s}, c = \frac{t}{u}$ onde $m, r, t \in \mathbb{Z}$ e $n, s, u \in \mathbb{Z}^*$. Então,

$$\begin{aligned} a + b = c + b &\Leftrightarrow \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{t}{u} + \frac{r}{s} \Leftrightarrow \frac{ms + rn}{ns} = \frac{ts + ru}{us} \\ &\Leftrightarrow (ms + rn)us = ns(ts + ru) \Leftrightarrow msus + rnus = nsts + nsru \\ &\Leftrightarrow msus = nsts \Leftrightarrow msu = nst \Leftrightarrow mu = nt \\ &\Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{t}{u} \Leftrightarrow a = c. \end{aligned}$$

□

Observação 2.11 O elemento neutro da adição em \mathbb{Q} definido na Proposição 2.10 item (A3) é único. De fato suponhamos que 0 e $0'$ pertencentes ao conjunto dos números racionais são tais que para qualquer $a \in \mathbb{Q}$, se tenha $a + 0 = a$ e $a + 0' = a$. Daí,

$$a + 0 = a = a + 0' \Rightarrow a + 0 = a + 0' \Rightarrow 0 = 0'$$

A última implicação é devido ao cancelamento da adição válido em \mathbb{Q} como vimos na proposição 2.10 item (A5).

Observação 2.12 O elemento oposto definido na Proposição 2.10 item (A4) é único. De fato, seja $b \in \mathbb{Q}$ o oposto de $a \in \mathbb{Q}$. Suponhamos que b' também seja oposto de a então, $b + a = 0$ e $b' + a = 0$. Assim, $b + a = b' + a$ e pela lei do cancelamento da adição em \mathbb{Q} obtemos $b = b'$.

Definição 2.13 Dado $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. O oposto $b = \frac{-m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $a + b = 0$ será denotado por $-a$.

Definição 2.14 Se $a, b \in \mathbb{Q}$. A diferença entre a e b , denotada por $a - b$ é definida por $a + (-b)$.

Como $(-b) \in \mathbb{Q}$ para todo $b \in \mathbb{Q}$. Então a operação que associa a cada par $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ o elemento $a - b \in \mathbb{Q}$ é de fato operação binária e é denominada subtração.

2.3 Multiplicação em \mathbb{Q}

Definição 2.15 Sejam $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s}$ elementos de \mathbb{Q} . Chamamos produto de a por b e denotamos ab o elemento de \mathbb{Q} definido por,

$$ab = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{mr}{ns}.$$

A operação que a cada $a, b \in \mathbb{Q}$ associa um elemento $ab \in \mathbb{Q}$ é chamada multiplicação.

A multiplicação de $a \in \mathbb{Q}$ por $b \in \mathbb{Q}$ não depende das particulares representações que podem ser escolhidas para definir a e b como mostra a seguinte proposição.

Proposição 2.16 *A multiplicação em \mathbb{Q} está bem definida, isto é,*

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a = \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \text{ e } b = \frac{r}{s} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{m r}{n s} = \frac{c e}{d f}.$$

Demonstração. Por hipótese $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$ e $\frac{r}{s} = \frac{e}{f}$, logo $md = nc$ e $rf = se$. Como $m, c, r, e \in \mathbb{Z}$ e $n, d, s, f \in \mathbb{Z}$ então são válidas as propriedades dos inteiros para tais números. Assim multiplicando de ambos os lados as igualdades $md = nc$ e $rf = se$ por rf e nc respectivamente temos que $mdrf = ncrf$ e $rfnc = senc$. Logo $mdrf = senc$, ou seja, $mdrf = nsce$ e então $\frac{mr}{ns} = \frac{ce}{df}$. Donde $\frac{m r}{n s} = \frac{c e}{d f}$. \square

Proposição 2.17 *Sejam a, b e $c \in \mathbb{Q}$. A multiplicação satisfaz as seguintes propriedades:*

(M1) *Associativa: $(ab)c = a(bc)$*

(M2) *Comutativa: $ab = ba$*

(M3) *Existência de elemento neutro: $\forall a \in \mathbb{Q} \exists 1 \in \mathbb{Q}$ tal que $a1 = a$.*

(M4) *Existência de inverso para todo elemento não nulo de \mathbb{Q} : Dado $a \neq \frac{0}{1}$, $a \in \mathbb{Q}$, existe $b \in \mathbb{Q}$ tal que $ab = 1$.*

(M5) *Distributiva da multiplicação com relação a adição: $a(b+c) = ab+ac$.*

(M6) *Lei do cancelamento da multiplicação: $\forall b \neq \frac{0}{1} = 0$, $ab = cb \Leftrightarrow a = c$.*

Demonstração.

(M1) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$ então $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s}, c = \frac{t}{u}$, com $m, r, t \in \mathbb{Z}$ e $n, s, u \in \mathbb{Z}^*$.

$$\begin{aligned} (ab)c &= \left(\frac{m r}{n s}\right) \frac{t}{u} = \frac{m r t}{n s u} = \frac{(m r)t}{(n s)u} \\ &= \frac{m(rt)}{n(su)} = \frac{m r t}{n s u} \\ &= \frac{m}{n} \left(\frac{r t}{s u}\right) = a(bc). \end{aligned}$$

(M2) Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ então $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s}$, onde $m, r \in \mathbb{Z}$ e $n, s \in \mathbb{Z}^*$.

$$ab = \frac{m r}{n s} = \frac{m r}{n s} = \frac{r m}{s n} = \frac{r m}{s n} = ba$$

(M3) Consideremos a classe de equivalência $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \dots$, que indicaremos por 1 apenas. Então sendo $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$a1 = \frac{m}{n} \frac{1}{1} = \frac{m1}{n1} = \frac{m}{n} = a$$

Então existe o elemento neutro da multiplicação.

(M4) Dado $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, como $a \neq \frac{0}{1}$ então $b = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$. Além disso,

$$ab = \frac{m}{n} \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = \frac{mn}{mn} = \frac{1}{1} = 1$$

(M5) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$ então $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s}, c = \frac{t}{u}$, com $m, r, t \in \mathbb{Z}$ e $n, s, u \in \mathbb{Z}^*$.

$$\begin{aligned} a(b+c) &= \frac{m}{n} \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u} \right) = \frac{m}{n} \left(\frac{ru+ts}{su} \right) = \frac{m(ru+ts)}{n(su)} \\ &= \frac{mru+mts}{nsu} = \frac{1}{1} \frac{mru+mts}{nsu} = \frac{n}{n} \frac{mru+mts}{nsu} \\ &= \frac{n(mru+mts)}{n(nsu)} = \frac{nmru+nmts}{nsnu} = \frac{mrnu+mtns}{nsnu} \\ &= \frac{mr}{ns} + \frac{mt}{nu} = \frac{m}{n} \frac{r}{s} + \frac{m}{n} \frac{t}{u} \\ &= ab+ac \end{aligned}$$

(M6) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$ então $a = \frac{m}{n}, b = \frac{r}{s}, c = \frac{t}{u}$, e ainda $b \neq \frac{0}{1}$, onde $m, t \in \mathbb{Z}$ e $n, r, s, u \in \mathbb{Z}^*$. Então,

$$\begin{aligned} ab = cb &\Leftrightarrow \frac{m}{n} \frac{r}{s} = \frac{t}{u} \frac{r}{s} \Leftrightarrow \frac{mr}{ns} = \frac{tr}{us} \\ &\Leftrightarrow mrus = nstr \Leftrightarrow mru = ntr \\ &\Leftrightarrow mu = nt \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{t}{u} \\ &\Leftrightarrow a = c. \end{aligned}$$

□

Observação 2.18 O elemento neutro da multiplicação em \mathbb{Q} definido na proposição 2.17 item (M3) é único. De fato, suponhamos que 1 e $1'$ pertencentes ao conjunto dos números racionais são tais que para qualquer $a \in \mathbb{Q}$, se tenha $a1 = a$ e $a1' = a$. Daí,

$$a1 = a = a1' \Rightarrow a1 = a1' \Rightarrow 1 = 1'$$

A última implicação é devido ao cancelamento da multiplicação válido em \mathbb{Q} como vimos na Proposição 2.17 item (M6)

Definição 2.19 O inverso de $a \neq 0, a = \frac{m}{n}$ definido na Proposição 2.17 item (M4) será indicado por a^{-1} .

Observação 2.20 O inverso multiplicativo em \mathbb{Q} definido na Proposição 2.10 item (M4) é único. De fato, seja $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ e $a^{-1'} \in \mathbb{Q}$ inversos de $a \in \mathbb{Q}$. Então $a^{-1}a = 1$ e $a^{-1'}a = 1$. Assim, $a^{-1}a = a^{-1'}a$ e pela lei do cancelamento da multiplicação em \mathbb{Q} obtemos $a^{-1} = a^{-1'}$.

Outro fato importante a cerca dos inversos é que se a e b são números racionais não nulos então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. De fato

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1})b^{-1} = a(a^{-1}b)b^{-1} = (aa^{-1})(b^{-1}b) = 1.$$

Proposição 2.21 Seja $a \in \mathbb{Q}$ e $b \in \mathbb{Q}^*$. Então existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $bx = a$.

Demonstração. De fato, como $b \in \mathbb{Q}^*$, então b possui inverso $b^{-1} \in \mathbb{Q}$. Seja $x = b^{-1}a$, então $b^{-1}a \in \mathbb{Q}$. Daí,

$$bx = b(b^{-1}a) = (bb^{-1})a = 1.a = a$$

□

Definição 2.22 A operação de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ em \mathbb{Q} que a cada par $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ faz corresponder o elemento ab^{-1} em \mathbb{Q} é denominada divisão de a por b . O elemento ab^{-1} é chamado quociente de a por b e indicado por $a : b$.

Exemplo 2.23 $a = \frac{5}{4}$ e $b = \frac{2}{3}$ então:

$$a : b = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

Como vimos nas Proposições 2.10 e 2.17 são válidas as propriedades associativa, comutativa tanto para a adição quanto para a multiplicação, existência de elemento neutro aditivo e multiplicativo, existência de oposto na adição e inverso na multiplicação, além da propriedade distributiva da multiplicação com relação a adição no conjunto dos números racionais. Assim o conjunto dos números racionais possui a estrutura de corpo. Definição de corpo em B.11, Apêndice B.

2.4 Relação de ordem em \mathbb{Q}

Veremos nesta seção que a relação de ordem que vamos definir satisfaz a compatibilidade da ordem com relação a adição e a multiplicação. Com o intuito de provar que \mathbb{Q} possui a estrutura de um corpo ordenado arquimediano (ver Definição em B.13 no Apêndice B).

Antes de definirmos relação de ordem, observemos que se $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, então n pode ser sempre tomado positivo, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 2.24 Para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ temos que:

$$\frac{-m}{n} = \frac{m}{-n} = -\frac{m}{n} = -\frac{-m}{-n}.$$

Demonstração. Para todo $m \in \mathbb{Z}$ e todo $n \in \mathbb{Z}^*$ vale:

$$\begin{aligned} (-m)(-n) = nm &\Rightarrow \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n} \\ mn = (-n)(-m) &\Rightarrow \frac{m}{-n} = -\frac{m}{n} \\ -(m)(-n) = -(-m)n &\Rightarrow -\frac{m}{n} = -\frac{-m}{-n} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{-m}{n} = \frac{m}{-n} = -\frac{m}{n} = -\frac{-m}{-n}.$$

□

Deste modo todo elemento $x \in \mathbb{Q}$ possui sempre um representante com o denominador positivo.

Definição 2.25 Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ números racionais em que $n > 0$ e $s > 0$. Dizemos que a é igual a b e escreve-se $a = b$ quando, $ms = nr$.

Definição 2.26 Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ números racionais em que $n > 0$ e $s > 0$. Dizemos que a é menor do que ou igual a b e escreve-se $a \leq b$, quando $ms \leq nr$. Equivalentemente dizemos que a é maior do que ou igual a b e escreve-se $a \geq b$, quando $ms \geq nr$.

Definição 2.27 Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ números racionais em que $n > 0$ e $s > 0$. Dizemos que a é menor do que b e escreve-se $a < b$, quando $ms < nr$. Equivalentemente dizemos que a é maior do que b e escreve-se $a > b$ se e somente se $ms > nr$.

A definição de " \leq " como em 2.26 não depende dos pares ordenados escolhidos para representar a e b como podemos ver na proposição seguinte.

Proposição 2.28 A relação \leq está bem definida, isto é,

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a = \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \text{ e } b = \frac{r}{s} = \frac{e}{f} \text{ onde } n > 0, d > 0, s > 0 \text{ e } f > 0, \frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}.$$

Demonstração. Como $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$ e $\frac{r}{s} = \frac{e}{f}$ então $md = nc$ e $rf = se$. Por hipótese temos que $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ daí,

$$\begin{aligned} ms \leq nr &\Leftrightarrow msd \leq nrd \text{ (ao multiplicar ambos os lados da desigualdade por } d > 0) \\ &\Leftrightarrow msdf \leq nrdf \text{ (ao multiplicar ambos os lados da desigualdade por } f > 0) \\ &\Leftrightarrow (md)sf \leq (rf)nd \\ &\Leftrightarrow ncsf \leq send \text{ (pois, } md = nc \text{ e } rf = se) \\ &\Leftrightarrow csf \leq sed \text{ (pois, } n > 0) \\ &\Leftrightarrow cf \leq ed \text{ (pois, } s > 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}. \end{aligned}$$

□

Verificaremos que \leq é uma relação de ordem total (ver Definição B.5 no Apêndice B) sobre \mathbb{Q} . Além disso mostraremos que tal relação de ordem é compatível com a adição e com a multiplicação de números racionais.

Proposição 2.29 Sejam a, b, c elementos de \mathbb{Q} e tomemos para cada um deles a representação $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{r}{s}$ e $c = \frac{t}{u}$ onde $n > 0, s > 0$ e $u > 0$. Então são válidas as seguintes propriedades:

(O1) Reflexiva: $a \leq a$;

(O2) Anti-Simétrica: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$;

(O3) Transitiva: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$;

(O4) Boa Ordenação: $a \leq b$ ou $b \leq a$;

(O5) Compatibilidade da relação de ordem com a adição: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$;

(O6) Compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação: $a \leq b$ e $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$.

Demonstração.

(O1) $a \leq a$, pois $a = \frac{m}{n}$ e $mn = nm$.

(O2) Se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{m}{n}$. Assim, $ms \leq nr$. E $rn \leq sm$ e pela propriedade anti-simétrica dos números inteiros temos que $ms = nr$, donde $a = b$.

(O3) Como $a \leq b$ e $b \leq c$ então $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{t}{u}$, logo $ms \leq nr$. E $ru \leq st$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade $ms \leq nr$ por $u > 0$ e da desigualdade $ru \leq st$ por $n > 0$ obtemos,

$$msu \leq nru \text{ e } run \leq stn$$

e pela propriedade transitiva com relação $a \leq$ nos números inteiros,

$$msu \leq stn.$$

Mas como $s > 0$ temos que,

$$mu \leq tn \Rightarrow a \leq c.$$

(O4) É óbvio, pois para os números inteiros temos que $ms \leq nr$ ou $nr \leq ms$ isto é,

$$\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \text{ ou } \frac{r}{s} \leq \frac{m}{n} \text{ e daí } a \leq b \text{ ou } b \leq a.$$

(O5) Observemos que de $a \leq b$ temos $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e, conseqüentemente $ms \leq nr$. Multiplicando ambos os membros de $ms \leq nr$ por $u > 0$ obtemos,

$$msuu \leq nrUU.$$

Agora somando a cada membro desta desigualdade o número inteiro $nstu$, temos que

$$msuu + nstu \leq nrUU + nstu$$

e daí,

$$su(mu + nt) \leq nu(ru + st) \Leftrightarrow \frac{mu + nt}{nu} \leq \frac{ru + st}{su} \Leftrightarrow \frac{m}{n} + \frac{t}{u} \leq \frac{r}{s} + \frac{t}{u}.$$

E assim, $a + c \leq b + c$.

(O6) Sabemos que $a \leq b$ então $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e conseqüentemente $ms \leq nr$. Multiplicando ambos os membros de $ms \leq nr$ por $u > 0$ obtemos,

$$(ms)u \leq (nr)u.$$

Agora como $c = \frac{t}{u} \geq 0$ e por $u > 0$ então $t \geq 0$. Assim multiplicando cada membro

desta desigualdade por $t \geq 0$ temos que

$$(ms)(ut) \leq (nr)(ut),$$

ou,

$$(mt)(su) \leq (nu)(rt).$$

E assim,

$$\frac{m t}{n u} \leq \frac{r t}{s u}.$$

Donde, $ac \leq bc$.

□

Notemos que é válida a tricotomia em \mathbb{Q} pois dados $a, b \in \mathbb{Q}$ uma, e apenas uma, das situações seguintes ocorre: ou $a = b$, ou $a < b$, ou $b < a$. De fato, a Proposição 2.29 item (O4) impõe que para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$ tem-se $a \leq b$ ou $b \leq a$. Assim se $a \neq b$ então $a < b$ ou $b < a$. Não se pode ter simultaneamente $a < b$ e $b < a$ pois isto equivale a $(a \leq b \text{ e } a \neq b)$ e $(b \leq a \text{ e } a \neq b)$, do que se segue $a = b$ e $a \neq b$.

Proposição 2.30 *Se $a, b \in \mathbb{Q}$ com $a < b$, então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.*

Demonstração. De $a < b$ temos que:

$$a + a < a + b \text{ e } a + b < b + b$$

logo,

$$a + a < a + b < b + b.$$

Mas,

$$a + a = 1.a + 1.a = (1 + 1)a = 2a \text{ e } b + b = 1.b + 1.b = (1 + 1)b = 2b$$

assim,

$$2a < a + b < 2b$$

Multiplicando os termos da desigualdade por $\frac{1}{2}$ obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2a) < \frac{1}{2}(a + b) < \frac{1}{2}(2b) &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) < \frac{1}{2}(a + b) < \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)a \Rightarrow 1.a < \frac{1}{2}(a + b) < 1.b \\ &\Rightarrow a < \frac{1}{2}(a + b) < b. \end{aligned}$$

Tomando $c = \frac{1}{2}(a + b)$ temos que $a < c < b$.

□

As propriedades (O1), (O2), (O3) e (O4) mostram que \leq é uma relação de ordem total sobre \mathbb{Q} . Por outro lado as Proposições 2.10, 2.17, 2.29 nos itens (A1), (A2), (A3), (A4), (M1), (M2), (M3), (M4), (M5), (O1), (O2), (O3) e (O4) nos mostram que \mathbb{Q} é um corpo ordenado (ver definição B.12 no Apêndice B).

Proposição 2.31 (Propriedade Arquimediana.) *Se a e b são dois números racionais positivos, existe um inteiro positivo n tal que $na > b$.*

Demonstração. Sejam $a = \frac{m}{p}$ e $b = \frac{r}{s}$. Suponhamos que $m \geq 1, p \geq 1, r \geq 1, s \geq 1$ elementos de \mathbb{Z} , o que pode ser feito pois a e b são positivos. Segue, então que $ms \geq 1$ ou $2ms \geq 2 > 1$. Multiplicando esta desigualdade por pr , temos que $2ms(pr) > pr$. Reescrevendo esta desigualdade da forma

$$2(pr)\frac{m}{p} > \frac{r}{s}$$

ou seja,

$$2pra > b.$$

Como $n = 2pr$ é um número natural temos que inteiro positivo n tal que $na > b$. \square

Logo a relação de ordem em \mathbb{Q} é arquimediana.

2.5 Imersão de \mathbb{Z} em \mathbb{Q}

O objetivo desta seção é definir uma função que preserva as operações de adição e multiplicação, além da relação de ordem que identifique cada número inteiro com um número racional.

Proposição 2.32 *Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(m) = \frac{m}{1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Então, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$ vale:*

(i) *f é injetiva: $f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$;*

(ii) *$f(m+n) = f(m) + f(n)$;*

(iii) *$f(mn) = f(m)f(n)$;*

(iv) *f é crescente.*

Demonstração.

(i) *f é injetiva pois,*

$$f(m) = f(n) \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Rightarrow m \cdot 1 = n \cdot 1 \Rightarrow m = n.$$

(ii) $f(m+n) = f(m) + f(n)$ uma vez que,

$$f(m+n) = \frac{m+n}{1} = \frac{m \cdot 1 + 1 \cdot n}{1 \cdot 1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = f(m) + f(n).$$

(iii) $f(mn) = f(m)f(n)$. De fato,

$$f(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{m \cdot n}{1 \cdot 1} = \frac{m}{1} \frac{n}{1} = f(m)f(n);$$

(iv) Basta ver que se $m \leq n$, então $f(m) \leq f(n)$. De fato isso ocorre pois,

$$m \leq n \Rightarrow \frac{m}{1} \leq \frac{n}{1} \Rightarrow f(m) \leq f(n).$$

□

Esta proposição nos garante que em \mathbb{Q} existe uma cópia de \mathbb{Z} , assim cada $m \in \mathbb{Z}$ pode ser identificado com a sua imagem $\frac{m}{1}$ através da função f e portanto $Im(f) \subset \mathbb{Q}$ e então $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Construção dos Números Reais - Cortes de Dedekind

O presente capítulo é dedicado a construção dos números reais via cortes de Dedekind, sendo apresentada a definição de cortes, mostrando alguns exemplos, propriedades e proposições que nos darão mais familiaridade com o assunto, seção esta que embasa-se em estudos presentes em [11, 17, 19, 20].

3.1 Cortes de Dedekind

Nesta seção vamos utilizar a noção de cortes de Dedekind para caracterizar o conjunto dos cortes como um corpo ao definir neste conjunto: relação de ordem e duas operações designadas adição e multiplicação.

Definição 3.1 Diz-se que um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$, é um corte de Dedekind, ou simplesmente corte, se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\alpha \neq \emptyset$,
- (ii) $\mathbb{Q} \setminus \alpha \neq \emptyset$, ou seja $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- (iii) Se $p \in \alpha$ e q é um número racional com $q < p$, então $q \in \alpha$,
- (iv) Em α não existe racional máximo. Em outras palavras, se $p \in \alpha$, então existe $q \in \alpha$ com $q > p$.

Exemplo 3.2 O conjunto $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < r\}$, onde r é um número racional qualquer é um corte.

De fato,

- (i) $\alpha \neq \emptyset$, pois $r - 1 \in \alpha$.
- (ii) $\alpha \neq \mathbb{Q}$, uma vez que $r + 1 \in \mathbb{Q}$ e $r + 1 \notin \alpha$.

(iii) Sejam p e q racionais quaisquer, com $p \in \alpha$ e $q < p$. Assim, $p < r$ e $q < p$ donde $q < p < r$, isto significa que $q < r$ e daí $q \in \alpha$.

(iv) α não possui elemento de máximo. De fato, seja $p \in \alpha$, mostraremos que existe $s \in \alpha$ tal que $s > p$. Tomando $s = p + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Temos que $s \in \mathbb{Q}$, $s > p$. Mostraremos que existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $s < r$.

$$p + \frac{1}{n} < r \Rightarrow \frac{1}{n} < r - p \Rightarrow \frac{1}{r-p} < n \Rightarrow n > \frac{1}{r-p}$$

Então basta tomar $n \in \mathbb{N}^*$, $n > \frac{1}{r-p}$ e daí teremos $s < r$, conseqüentemente $s \in \alpha$.
Donde, α não possui elemento de máximo.

Portanto α é um corte.

Assim, provamos que qualquer número racional r efetua um "corte" ou separação de todos os demais números racionais no conjunto α dos números menores do que r e no conjunto β dos números maiores do que r o próprio r pode ser incluído como o menor elemento de β .

Porém nem todos os cortes são produzidos por números racionais. O exemplo a seguir nos mostra uma aplicação direta deste fato.

Exemplo 3.3 O conjunto $\alpha = \mathbb{Q}_- \cup \{p \in \mathbb{Q}_+ \mid p^2 < 2\}$ é um corte. Além disso, o conjunto $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ não possui elemento de mínimo.

De fato,

(i) $\alpha \neq \emptyset$, pois $\mathbb{Q}_- \subset \alpha$.

(ii) $\alpha \neq \mathbb{Q}$, pois $5 \in \mathbb{Q}$ e $5 \notin \alpha$.

(iii) Sejam p, q racionais quaisquer, com $p \in \alpha$ e $q < p$, devemos mostrar que $q \in \alpha$.
Temos três casos a considerar:

- Se $p \in \mathbb{Q}_-$ e $q < p$ então $q \in \mathbb{Q}_-$, conseqüentemente $q \in \alpha$.
- Se $p > 0$ e $q \leq 0$, então $q \in \alpha$.
- Se $p > 0$ e $q > 0$ com $q < p$ então $q^2 < p^2$, mas $p^2 < 2$ (pois $p \in \alpha$) donde teremos $q^2 < 2$ e assim $q \in \alpha$.

(iv) Para mostrar que α não possui elemento de máximo, basta ver que se r é um número racional positivo tal que $r^2 < 2$, ou seja, $r \in \alpha$, existe outro número racional $s \in \alpha$, $s > r$ tal que $s^2 < 2$.

Tomando $s = r + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $s > r$. Precisamos descobrir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $s^2 < 2$.

$$s^2 = \left(r + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + 2r\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + r^2$$

Daí,

$$s^2 < 2 \Rightarrow \left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + r^2 < 2 \Rightarrow \left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} < 2 - r^2 \quad (3-1)$$

Precisamos resolver a inequação (3-1). Para resolvê-la observemos que $n \geq 1$ daí $\frac{1}{n} \leq 1$. Assim,

$$\left(2r + \frac{1}{n}\right) \leq 2r + 1 \Rightarrow \left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \leq (2r + 1)\frac{1}{n} \quad (3-2)$$

Tendo em vista a inequação (3-2), e caso tenha solução a inequação

$$(2r + 1)\frac{1}{n} < 2 - r^2,$$

a solução desta equação também será solução de

$$\left(2r + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} < 2 - r^2,$$

presente em (3-1). Mas,

$$(2r + 1)\frac{1}{n} < 2 - r^2 \Rightarrow n > \frac{2r + 1}{2 - r^2}.$$

É evidente que qualquer n nessas condições teremos também $s^2 < 2$. De fato,

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < \left(r + \frac{2 - r^2}{2r + 1}\right)^2 = r^2 + 2r\left(\frac{2 - r^2}{2r + 1}\right) + \left(\frac{2 - r^2}{2r + 1}\right)^2 \\ &= r^2 + \left(\frac{2 - r^2}{2r + 1}\right)\left(2r + \left(\frac{2 - r^2}{2r + 1}\right)\right) < r^2 + \left(\frac{2 - r^2}{2r + 1}\right)(2r + 1) = r^2 + 2 - r^2 = 2 \end{aligned}$$

A última desigualdade é válida pois $\left(\frac{2 - r^2}{2r + 1}\right) < 1$, $\left(\frac{1}{n} < 1\right)$, e estamos supondo $n > 1$.

Portanto α não possui elemento máximo.

- (v) A seguir mostraremos que o conjunto $\beta = \mathbb{Q} \setminus \alpha$ não possui mínimo. Para isso provaremos que se r é um número racional positivo com $r^2 > 2$, existe outro número racional $s < r$ tal que $s^2 > 2$.

Seja $s = r - \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Encontraremos $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $s^2 > 2$.

$$s^2 = \left(r - \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 - 2r\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Daí,

$$s^2 > 2 \Rightarrow r^2 - \frac{2r}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 > 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{2r}{n} > 2 - r^2 \quad (3-3)$$

Resolveremos a inequação (3-3). Observemos primeiro que $n \geq 1$, daí $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ e $0 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq 1$, logo:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{2r}{n} > -\frac{2r}{n}. \quad (3-4)$$

Tendo em vista a inequação (3-4), vemos que uma solução da inequação

$$-\frac{2r}{n} > 2 - r^2$$

caso exista também será solução de (3-3). Resolveremos então a inequação

$$-\frac{2r}{n} > 2 - r^2.$$

Observemos que,

$$-\frac{2r}{n} > 2 - r^2 \Rightarrow \frac{-2r}{2 - r^2} > n \Rightarrow n < \frac{-2r}{2 - r^2} \Rightarrow n > \frac{2r}{r^2 - 2}.$$

É claro que qualquer $n \in \mathbb{N}^*$ que satisfaça (3-4) também satisfaça $n > \frac{2r}{r^2 - 2}$ também é solução de $s^2 > 2$. De fato,

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(r - \frac{1}{n}\right)^2 > \left(r - \frac{1}{\frac{2r}{r^2 - 2}}\right)^2 = \left(r - \frac{r^2 - 2}{2r}\right)^2 = r^2 - 2r\left(\frac{r^2 - 2}{2r}\right) \\ &+ \left(\frac{r^2 - 2}{2r}\right)^2 = r^2 - r^2 + 2 + \left(\frac{r^2 - 2}{2r}\right)^2 > 2 \end{aligned}$$

A última desigualdade é válida pois $0 < \left(\frac{r^2 - 2}{2r}\right)^2 < 1$.

Portanto β não possui elemento mínimo.

Este exemplo nos mostra que o processo de encontrar a raiz quadrada de 2 conduz à separação dos números racionais em dois conjuntos: o conjunto α das raízes

quadradas aproximadas por falta (aí incluímos também o zero e os racionais negativos) e o conjunto β das raízes quadradas aproximadas por excesso. No entanto, no conjunto dos números racionais este "corte" não possui elemento de separação, pois como vimos o conjunto α não possui máximo e nem o conjunto β possui mínimo. Assim para Dedekind, deverá ser criado um número no caso $\sqrt{2}$ como elemento de separação entre os conjuntos desse "corte".

Observemos então que na Definição (3.1) se em α não existe racional máximo e em $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ não existe racional mínimo então α é um corte de Dedekind não produzido por números racionais.

Assim podemos visualizar que o conjunto dos números racionais possui certas lacunas, que pode ser interpretada como expressão aritmética da descontinuidade. O processo de Dedekind para construção dos números reais que descreveremos, preenche essas lacunas, criando através de uma "completude" dos números racionais um conjunto ao qual será denominado conjunto dos números reais, e ao conjunto dos números criados para preencher essas lacunas conjunto dos números irracionais.

Nosso objetivo agora é mostrar que o conjunto dos cortes munido de operações adequadas possui estrutura de um corpo ordenado. Introduziremos inicialmente uma relação de ordem no conjunto dos cortes e provaremos a tricotomia para esta ordem, para em seguida definir as operações adição e multiplicação de modo a conseguirmos provar as usuais desses números preservando as mesmas noções já existentes no conjunto dos números racionais e obter no conjunto dos cortes um corpo ordenado.

3.2 A relação de ordem

Vamos agora no conjunto dos cortes definir relação de ordem.

Definição 3.4 *Sejam α e β cortes. Dizemos que α está contido em β e indicamos por $\alpha \subset \beta$ se qualquer $p \in \alpha$ implica $p \in \beta$.*

Definição 3.5 *Sejam α e β cortes. Dizemos que α é menor do que ou igual (respectivamente, maior do que ou igual) a β e, indicaremos por $\alpha \leq \beta$ (respectivamente $\alpha \geq \beta$) se $\alpha \subset \beta$ (respectivamente $\beta \subset \alpha$).*

Definição 3.6 *Dizemos que cortes α e β são iguais, e escrevemos $\alpha = \beta$ se de $p \in \alpha$ resulta $p \in \beta$ e de $q \in \beta$ resulta $q \in \alpha$. Caso contrário escrevemos $\alpha \neq \beta$.*

Definição 3.7 *Sejam α e β cortes. Dizemos que α é menor do que (respectivamente, maior do que) β , indicaremos por $\alpha < \beta$ (respectivamente $\alpha > \beta$) se $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$ (respectivamente $\beta \subset \alpha$ e $\alpha \neq \beta$).*

Proposição 3.8 *Sejam α e β cortes. Então $\alpha < \beta$ se, e somente se, existe um racional $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Por hipótese $\alpha < \beta$ isto é, $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$. Como $\alpha \neq \beta$, então existe $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$.

(\Leftarrow) Agora sabemos que α e β cortes e existe um racional $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$. Assim fica evidente que $\alpha \neq \beta$. Como todo racional menor que $p \in \beta$ e α é um corte temos que $\alpha \subset \beta$. Logo $\alpha < \beta$. \square

Proposição 3.9 *Seja α um corte e q um número racional, com $q \notin \alpha$, então $p < q$ para todo $p \in \alpha$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $q \notin \alpha$, e que $p \geq q$. Pelo item (iii) da Definição 3.1 então teríamos $q \in \alpha$. Contradição! Logo quando $q \notin \alpha$, então $p < q$ para todo $p \in \alpha$. \square

A proposição a seguir mostra que vale a tricotomia com relação a ordem definida.

Proposição 3.10 *Sejam α e β cortes. Apenas uma das três possibilidades pode ocorrer:*

- (1) $\alpha < \beta$
- (2) $\alpha = \beta$
- (3) $\beta < \alpha$.

Demonstração. Se (2) ocorrer então pela Definição 3.7 (1) e (3) não ocorrem.

Suponhamos agora que $\alpha \neq \beta$ e que (1) e (3) sejam válidas. Como $\alpha < \beta$ existe racional p tal que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Por outro lado, vale também $\beta < \alpha$, então pela existe racional q tal que $q \in \alpha$ e $q \notin \beta$. Mas α e β são cortes então pelo item (iii) da Definição 3.1 de cortes temos que:

- $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ resulta $p < q$,
- $q \in \alpha$ e $p \notin \alpha$ resulta $q < p$.

Contradição, pois p e q são racionais.

Mostramos que se $\alpha \neq \beta$, (1) e (3) não podem ocorrer simultaneamente. Provaremos então que se $\alpha \neq \beta$ (1) ou (3) deve ocorrer. De fato se $\alpha \neq \beta$ então, ou existe um racional $p \in \alpha$ tal que $p \notin \beta$ e neste caso $\beta < \alpha$ ou existe um racional $q \in \beta$ tal que $q \notin \alpha$ e neste caso $\alpha < \beta$. \square

Outro fato importante a cerca da relação $<$ é a propriedade da transitividade devido a proposição a seguir.

Proposição 3.11 *Sejam α, β e γ cortes. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.*

Demonstração. Temos que $\alpha < \beta$, então existe um racional $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$. Como $\beta < \gamma$, existe um racional $q \in \gamma$ de forma que $q \notin \beta$.

Observemos que de $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ obtemos $p < q$. Mas $p \notin \alpha$ então $q \notin \alpha$. Logo $q \in \gamma$ e $q \notin \alpha$, donde $\alpha < \gamma$.

□

Após definida a relação de ordem é preciso definir a adição e a multiplicação, bem como mostrar que o conjunto dos cortes munidos dessas duas operações possui estrutura de corpo. Isto será feito nas seções seguintes.

3.3 Adição no conjunto dos cortes

Definição 3.12 *Sejam α e β dois cortes quaisquer, a soma $\alpha + \beta$ é o corte $\gamma = \alpha + \beta = \{r = p + q | p \in \alpha \text{ e } q \in \beta\}$.*

Após uma definição como esta, devemos inicialmente mostrar que γ é realmente um corte. Para isto provaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.13 *Suponhamos que α e β sejam cortes. Então $\gamma = \alpha + \beta = \{r = p + q | p \in \alpha \text{ e } q \in \beta\}$ é um corte.*

Demonstração.

Devemos mostrar γ satisfaz os itens (i), (ii), (iii) e (iv) da Definição 3.1.

(i) $\gamma \neq \emptyset$. Basta ver que α e β são cortes, logo $\alpha \neq \emptyset$ e $\beta \neq \emptyset$, isto é existem $s \in \alpha$ e $u \in \beta$, assim $s + u \in \gamma$.

(ii) $\mathbb{Q} \setminus \gamma \neq \emptyset$. De fato, sejam s e u racionais tais que $s \notin \alpha$ e $u \notin \beta$, isto ocorre pois α e β são cortes o que resulta de $\mathbb{Q} \setminus \alpha \neq \emptyset$ e $\mathbb{Q} \setminus \beta \neq \emptyset$, então $s > p$, para todo $p \in \alpha$ e $u > q$, para todo $q \in \beta$, donde $s + u > p + q$. Assim $s + u \notin \gamma$. Portanto γ não contém todos os racionais.

(iii) Suponhamos que $r \in \gamma$ e seja u um número racional, com $u < r$, devemos mostrar que $u \in \gamma$. Mas,

$$r \in \gamma \Rightarrow r = p + q, p \in \alpha \text{ e } q \in \beta.$$

$$u \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Q} \text{ tal que } u = t + q.$$

Sabemos que $u < r$ então $t + q < p + q$, isto é, $t < p$, então $t \in \alpha$. Consequentemente $u \in \gamma$.

(iv) Seja $r \in \gamma$ qualquer. Logo $r = p + q$, onde $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Sabemos que em α e nem em β , não existe racional que seja máximo. Assim, se $p \in \alpha$, então existe $s \in \alpha$ tal que $s > p$. Por outro lado, se $q \in \beta$, então existe $t \in \beta$ tal que $t > q$. Como $s \in \alpha$ e $t \in \beta$, $s + t \in \gamma$ e $s + t > p + q$. Portanto em γ não existe racional máximo. □

Nosso objetivo agora é provar que a adição satisfaz as propriedades: associativa, comutativa, existência de elemento neutro, existência de oposto e compatibilidade com a ordem e para provar a propriedade de existência de oposto precisaremos do lema a seguir. Antes porém, definiremos cota superior de α .

Definição 3.14 *Seja α um corte. Dizemos que $q \notin \alpha$ é uma cota superior de α se para $p < q$ todo $p \in \alpha$. O conjunto de todas as cotas superiores de α será denominado M_α .*

Lema 3.15 *Sejam α um corte e $r > 0$ um racional dado. Então existem $p \in \alpha$, $q \in M_\alpha$, q não é o mínimo de M_α , denotado por $\min M_\alpha$ (caso exista), tais que $q - p = r$.*

Demonstração. Precisamos determinar $p \in \alpha$, $q \in M_\alpha$ tal que $q \neq \min M_\alpha$, com $q - p = r$.

Para isto seja $s \in \alpha$ um racional qualquer, e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $s_n = nr + s$. Agora consideremos \bar{n} o maior número natural n para o qual $s_{\bar{n}} \in \alpha$ e $s_{\bar{n}+1} \in M_\alpha$. Temos dois casos a considerar:

1º caso: $s_{\bar{n}} \in \alpha$ e $s_{\bar{n}+1} \in M_\alpha$, onde $s_{\bar{n}+1} \neq \min M_\alpha$. Tomando $p = s_{\bar{n}}$ e $q = s_{\bar{n}+1}$ temos,

$$q - p = (\bar{n} + 1)r + s - (\bar{n}r + s) = \bar{n}r + r + s - \bar{n}r - s = r.$$

2º caso: $s_{\bar{n}} \in \alpha$ e $s_{\bar{n}+1} = \min M_\alpha$, (que ocorrerá se $\min M_\alpha$ existir). Considerando, $p = s_{\bar{n}} + \frac{r}{2}$ e $q = s_{\bar{n}+1} + \frac{r}{2}$ e daí,

$$q - p = (\bar{n} + 1)r + s + \frac{r}{2} - (\bar{n}r + s) + \frac{r}{2} = \bar{n}r + r + s + \frac{r}{2} - \bar{n}r - s - \frac{r}{2} = r$$

□

Proposição 3.16 *Sejam α , β , e γ cortes quaisquer. A adição satisfaz as propriedades:*

(A1) *Associativa: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$*

(A2) *Comutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$*

(A3) *Existência de elemento neutro: \exists um corte 0^* tal que $\alpha + 0^* = \alpha$.*

(A4) *Existência de oposto: \forall corte $\alpha \exists$ um corte β tal que $\alpha + \beta = 0^*$.*

(A5) *Lei do cancelamento:* $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$.

Demonstração.

(A1) $r \in (\alpha + \beta) + \gamma \Leftrightarrow r = s + t$, onde $s \in \alpha + \beta$ e $t \in \gamma \Leftrightarrow r = (p + q) + t$, onde $p \in \alpha$, $q \in \beta$ e $t \in \gamma \Leftrightarrow r = p + (q + t)$ (propriedade associativa dos racionais, já que p , q e t são racionais) $\Leftrightarrow r \in \alpha + (\beta + \gamma)$

(A2) $r \in \alpha + \beta \Leftrightarrow r = p + q$, $p \in \alpha$ e $q \in \beta \Leftrightarrow r = q + p$, $p \in \alpha$ e $q \in \beta$ (propriedade comutativa dos racionais, já que q e p são racionais) $\Leftrightarrow r \in \beta + \alpha$.

(A3) Consideremos $0^* = \{p \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$. Pelo exemplo 3.2 temos que 0^* é um corte. Vamos então provar que $\alpha + 0^* \subset \alpha$.

$r \in \alpha + 0^* \Rightarrow r = p + q$ com $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$ (isto é $q < 0$) $\Rightarrow p + q < p \Rightarrow p + q \in \alpha \Rightarrow r \in \alpha$. Donde $\alpha + 0^* \subset \alpha$.

Para mostrar que $\alpha + 0^* = \alpha$ basta mostrar então que $\alpha \subset \alpha + 0^*$.

Seja $r \in \alpha$ e $r \in \alpha$ tal que $s > r$, o que é possível visto que α não possui máximo. Seja $q = r - s$. Logo $q < 0$, $q \in 0^*$ e $r = s + q$, daí $r \in \alpha + 0^*$. Donde $\alpha \subset \alpha + 0^*$ e portanto $\alpha + 0^* = \alpha$.

(A4) Seja α um corte qualquer. Consideremos $\beta = \{p \in \mathbb{Q} \mid -p \in M_\alpha \text{ e } -p \neq \min M_\alpha\}$. Primeiramente vamos verificar que β é um corte. Onde M_α o conjunto das cotas superiores de α e $\min M_\alpha$ é o mínimo de M_α .

(i) $\beta \neq \emptyset$. De fato, por $\alpha \neq \mathbb{Q}$, existe algum racional p tal que $p \notin \alpha$. Nos podemos assumir que $p \neq \min M_\alpha$, pois é sempre possível basta tomar $p' > p$, então $-p \in \beta$. Logo $\beta \neq \emptyset$.

(ii) $\mathbb{Q} \setminus \beta \neq \emptyset$. De fato, por $\alpha \neq \emptyset$, existe algum $p \in \alpha$ e daí $p \notin M_\alpha$. Logo $p \notin \beta$.

(iii) Se p e q são racionais com $p \in \beta$ e $q < p$, devemos mostrar que $q \in \beta$. Mas, $p \in \beta$ significa que $-p \in M_\alpha$ e $-p \neq \min M_\alpha$, isto é $-p \notin \alpha$. E de $p < q$, obtemos $-q > -p$, donde $-q \in M_\alpha$ e $-q \neq \min M_\alpha$. Assim $q \in \beta$.

(iv) Provaremos agora que β não possui elemento máximo.

Seja $p \in \beta$, precisamos mostrar que existe $s \in \beta$ tal que $s > p$. Como $p \in \beta$, $-p \in M_\alpha$ e $-p \neq \min M_\alpha$, então existe um racional q tal que $-q < -p$ e $-q \notin \alpha$.

Tomando $s = \frac{p+q}{2}$ temos $-q < -s < -p$ donde $-s \in M_\alpha$, mas $-s \neq \min M_\alpha$ então, $s > p$ e $s \in \beta$, como queríamos.

Verificaremos agora que $\alpha + \beta = 0^*$. Para tal separaremos em dois casos:

Caso 1 : $\alpha + \beta \subset 0^*$.

Seja $p \in \alpha + \beta$, então $p = r + s$, onde $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Donde $-s \notin \alpha$ ($-s \in M_\alpha$), logo $r < -s$, e assim $r + s < 0$. Portanto, $p \in 0^*$.

Caso 2 : $0^* \subset \alpha + \beta$.

Seja $p \in 0^*$. Então $p < 0$, ou seja $-p > 0$. Pelo Lema 3.15 existem $s \in \alpha$ e $r \in M_\alpha$, $r \neq \min M_\alpha$, tais que $r - s = -p$ o que nos dá $s + (-r) = p$. Como $-r \in \beta$ e $s \in \alpha$, então $p \in \alpha + \beta$.

Provando assim que $\alpha + \beta = 0^*$.

(A5) Mostraremos que $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ implica $\alpha = \beta$. Seja $p \in \alpha$ então existe $r \in \alpha + \gamma$ tal que $r = p + q$, $p \in \alpha$ e $q \in \gamma$. Mas $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, daí existe $s \in \beta$ tal que $r = s + q$, com $s \in \beta$ e $q \in \gamma$. Então $p + q = s + q$, que pela lei do cancelamento válida para os racionais, obtemos $p = s$. Logo $p \in \beta$. Deste modo mostramos que $\alpha \subset \beta$.

O caso $\beta \subset \alpha$ é análogo ao caso $\alpha \subset \beta$.

Portanto $\alpha = \beta$.

□

Observação 3.17 O elemento neutro da adição definido na Proposição 3.16 item (A3) é único. De fato, suponhamos que 0^* , tal que $\alpha + 0^* = \alpha$ não seja único. Seja então γ outro corte tal que $\alpha + \gamma = \alpha$.

$$\gamma + \alpha = \alpha \Rightarrow \gamma + \alpha = 0^* + \alpha \Rightarrow \gamma = 0^*.$$

A última implicação é devido a lei do cancelamento 3.16 item (A5)

Observação 3.18 O elemento oposto da Proposição 3.16 item (A4) é único. De fato suponhamos que exista outro corte γ tal que $\alpha + \beta = 0^*$ e $\alpha + \gamma = 0^*$. Assim,

$$\beta = 0^* + \beta = (\alpha + \gamma) + \beta = (\gamma + \alpha) + \beta = \gamma + (\alpha + \beta) = \gamma + 0^* = \gamma$$

Definição 3.19 Designaremos por $-\alpha$ o corte β da Proposição 3.16 item (A4).

Proposição 3.20 Sejam α, β e γ cortes quaisquer. Se $\alpha < \beta$ então $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

Demonstração. Observemos que outra maneira de exprimir a Definição 3.7 é dizer que $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$. Logo,

$$p \in \alpha + \gamma \Rightarrow p = q + r, q \in \alpha \text{ e } r \in \gamma.$$

Sabemos que, $\alpha < \beta$ então: $q \in \alpha \Rightarrow q \in \beta$. Assim, $p = q + r$, $q \in \beta$ e $r \in \gamma$. Logo $p \in \beta + \gamma$. Provando que, se $\alpha < \beta$ então $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

□

Mostramos que o conjunto dos cortes munido da operação adição é um grupo aditivo abeliano, uma vez que satisfaz as propriedades associativa, comutativa, existência de elemento neutro, existência de oposto aditivo. Além disso, vale a compatibilidade da adição com relação à ordem como vimos na Proposição 3.20.

3.4 Multiplicação no conjunto dos cortes

Definiremos agora a multiplicação no conjunto dos cortes e provaremos algumas propriedades a seu respeito.

Proposição 3.21 *Se α e β são cortes tais que $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$ então*

$$\gamma = \mathbb{Q}_- \cup \{r = pq \mid p \in \alpha, q \in \beta, p > 0, q > 0\}$$

é um corte.

Demonstração.

(i) $\gamma \neq \emptyset$, pois $\mathbb{Q}_- \subset \alpha$.

(ii) Como α e β são cortes existem racionais p e q tais que $p \notin \alpha$ e $q \notin \beta$ Assim:

$\forall s \in \alpha$ com $s > 0$ teremos $s < p$

$\forall r \in \beta$ com $r > 0$ teremos $r < q$,

então $sr > pq$ para todo $s \in \alpha, s > 0$ e todo $r \in \beta, r > 0$ de modo que $pq \notin \gamma$. Logo, $\mathbb{Q} \setminus \gamma \neq \emptyset$.

(iii) Sejam p e q racionais com $p \in \gamma$ e suponhamos $q < p$, provaremos que $q \in \gamma$. Temos os seguintes casos:

Caso 1. Se $p \leq 0$ obviamente $q < 0$. Daí $q \in \gamma$.

Caso 2. Se $p > 0$ e $q \leq 0$, $q \in \gamma$ pois, $q \in \mathbb{Q}_-$.

Caso 3. Se $p > 0$ e $q > 0$ então $p = su$ com $s \in \alpha$ e $u \in \beta$, $s > 0$ e $u > 0$. De $0 < q < p = su$ temos $\frac{q}{s} < u$, assim $\frac{q}{s} \in \beta$ e $\frac{q}{s} > 0$, logo, $q = s\frac{q}{s}$ com $s \in \alpha$, $\frac{q}{s} \in \beta, s > 0$ e $\frac{q}{s} > 0$. Portanto, $q \in \gamma$.

(iv) Para provarmos que γ não tem máximo, basta ver que para qualquer $r \in \gamma$ e $r > 0$, existe $u \in \gamma$ com $u > r$.

$r \in \gamma, r > 0 \Rightarrow r = pq$ onde $p \in \alpha, p > 0, q \in \beta$ e $q > 0$. Como α e β são cortes então não possuem máximos. Assim $p \in \alpha$, então existe $s \in \alpha$ tal que $s > p$. Por outro lado, temos que $q \in \beta$ então existe $t \in \beta$ tal que $t > q$. Como $p \in \alpha, p > 0, q \in \beta$ e $q > 0, st \in \gamma$ e $st > pq = r$. Portanto em γ não existe máximo.

□

Definição 3.22 *Sejam α, β cortes, com $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$ definimos o produto de α por β por:*

$$\mathbb{Q}_- \cup \{pq \mid p \in \alpha, q \in \beta, p > 0, q > 0\}.$$

Para os outros casos possíveis de α e β temos que o produto de α por β apresenta-se de forma natural como consequência da Definição 3.22. Daí temos o seguinte:

Definição 3.23 *Sejam α, β cortes. Definimos o produto de α por β , para os demais casos, como consequência da Definição 3.22 por:*

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0^* & \text{se } \alpha = 0^* \text{ ou } \beta = 0^* \\ -[(-\alpha) \cdot \beta] & \text{se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ -[\alpha \cdot (-\beta)] & \text{se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \\ (-\alpha) \cdot (-\beta) & \text{se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

Como podemos perceber através das Definições 3.22 e 3.23, as provas das propriedades usuais da multiplicação envolvem redução para o caso em que os cortes são maiores que 0^* .

Para provar a existência do elemento inverso precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.24 *Sejam $\alpha > 0^*$ um corte, r um número racional $0 < r < 1$. Então existem racionais $p \in \alpha$ e $q \in M_\alpha$, com $p \neq \min M_\alpha$, caso M_α admita mínimo, tais que $\frac{p}{q} = r$.*

Demonstração. Seja $s \notin \alpha$ um racional qualquer. Como $s \notin \alpha$ então s pode ser tomado tal que $s > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o racional $s_n = sr^n$, que também será maior do que zero. Agora consideremos \bar{n} o maior número natural tal que $s_{\bar{n}} \in M_\alpha$ e $s_{\bar{n}+1} \in \alpha$. Temos dois casos a considerar:

1º caso: $s_{\bar{n}+1} \in \alpha, s_{\bar{n}} \in M_\alpha$ onde $s_{\bar{n}} \neq \min M_\alpha$. Tomando, $q = s_{\bar{n}}$ e $p = s_{\bar{n}+1}$ temos,

$$\frac{p}{q} = \frac{sr^{\bar{n}+1}}{sr^{\bar{n}}} = \frac{sr^{\bar{n}}r}{sr^{\bar{n}}} = r$$

2º caso: $s_{\bar{n}+1} \in \alpha, s_{\bar{n}} \in M_\alpha$ onde $s_{\bar{n}} = \min M_\alpha$. Considerando $q = \frac{s_{\bar{n}}}{r+1}$ e $p = \frac{s_{\bar{n}+1}}{2}$ temos que:

- $q > \min M_\alpha = s_{\bar{n}}$ pois,

$$0 < r < \frac{r+1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{r+1}{2}} > \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{s_{\bar{n}}}{\frac{r+1}{2}} > s_{\bar{n}} \Rightarrow q > \min M_\alpha.$$

E assim $q \in M_\alpha$.

- $p < \min M_\alpha = s_{\bar{n}}$ pois,

$$0 < r < \frac{r+1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{r} > \frac{1}{\frac{r+1}{2}} \Rightarrow \frac{s_{\bar{n}}}{r} > \frac{s_{\bar{n}}}{\frac{r+1}{2}} \Rightarrow \frac{s \cdot r^{\bar{n}}}{r} > \frac{s \cdot r^{\bar{n}}}{\frac{r+1}{2}} \Rightarrow s \cdot r^{\bar{n}} > s \cdot r^{\bar{n}+1}.$$

Donde $p < \min M_\alpha$ e então $q \in M_\alpha$.

Além disso,

$$\frac{p}{q} = \frac{\frac{s_{\bar{n}+1}}{\frac{r+1}{2}}}{\frac{s_{\bar{n}}}{\frac{r+1}{2}}} = r.$$

Portanto, sendo $\alpha > 0^*$ um corte, r um número racional $0 < r < 1$, existem racionais $p \in \alpha$ e $q \in M_\alpha$, com $p \neq \min M_\alpha$, tais que $\frac{p}{q} = r$. \square

Proposição 3.25 *Sejam α , β , e γ cortes quaisquer. A multiplicação satisfaz as propriedades:*

(M1) *Associativa: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$*

(M2) *Comutativa: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$*

(M3) *Existência de elemento neutro: Existe um corte 1^* tal que $\alpha \cdot 1^* = \alpha$, para todo corte α .*

(M4) *Existência de inverso multiplicativo: \forall corte $\alpha \neq 0^*$ existe um corte β tal que $\alpha \cdot \beta = 1^*$.*

(M5) *Distributiva da multiplicação em relação à adição: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.*

(M6) *Lei do cancelamento: Sendo $\gamma \neq 0$, temos: $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$*

Demonstração.

(M1) **Caso 1** : $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma > 0^*$

Para mostrar que $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ mostraremos que $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \subset \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ e que $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \subset (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

- $(\alpha.\beta).\gamma \subset \alpha.(\beta.\gamma)$

Seja $r \in (\alpha.\beta).\gamma$ então $r \in \mathbb{Q}_-$ ou $r = pq$, com $p \in \alpha.\beta$, $p > 0$, e $q \in \gamma$, $q > 0$, isto nos dá $r \in \mathbb{Q}_-$ ou $r = (su)q$, $s \in \alpha$, $u \in \beta$, $q \in \gamma$, com $s > 0$, $u > 0$, $q > 0$. Então se $r \in \mathbb{Q}_-$ é claro que $r \in \alpha.(\beta.\gamma)$. Caso $r = (su)q$, $s \in \alpha$, $u \in \beta$, $q \in \gamma$, onde $s > 0$, $u > 0$, $q > 0$, temos pela propriedade associativa dos números racionais válidas para s , u e q que $r = s(uq)$, $s \in \alpha$, $u \in \beta$, $q \in \gamma$, onde $s > 0$, $u > 0$, $q > 0$. Donde $r \in \alpha.(\beta.\gamma)$. Provando assim $(\alpha.\beta).\gamma \subset \alpha.(\beta.\gamma)$.

- $\alpha.(\beta.\gamma) \subset (\alpha.\beta).\gamma$

Seja $r \in \alpha.(\beta.\gamma)$ então $r \in \mathbb{Q}_-$ ou $r = pq$, onde $p \in \alpha$, $p > 0$, e $q \in \beta.\gamma$, $q > 0$, isto nos dá $r \in \mathbb{Q}_-$ ou $r = s(uq)$, $s \in \alpha$, $u \in \beta$, $q \in \gamma$, onde $s > 0$, $u > 0$, $q > 0$. Então se $r \in \mathbb{Q}_-$ é claro que $r \in (\alpha.\beta).\gamma$. Caso $r = s(uq)$, $s \in \alpha$, $u \in \beta$, $q \in \gamma$, onde $s > 0$, $u > 0$, $q > 0$, temos pela propriedade associativa dos números racionais válidas para s , u e q que $r = (su)q$, $s \in \alpha$, $u \in \beta$, $q \in \gamma$, onde $s > 0$, $u > 0$, $q > 0$. Donde $r \in (\alpha.\beta).\gamma$. Provando assim $\alpha.(\beta.\gamma) \subset (\alpha.\beta).\gamma$.

Caso 2 : $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma < 0^*$

Pela definição de multiplicação temos:

$$(\alpha.\beta).\gamma = -[(\alpha.\beta).(-\gamma)] = -[\alpha.(\beta.(-\gamma))] = \alpha.(\beta.\gamma)$$

A penúltima igualdade é devido a propriedade associativa para cortes nos quais $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma > 0^*$ provada acima.

Caso 3 : $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$

Pela definição de multiplicação aplicadas a α e β temos que $(\alpha.\beta) = (-\alpha).(-\beta)$, assim o produto $(-\alpha).(-\beta) > 0^*$. Logo:

$$(\alpha.\beta).\gamma = -[(-\alpha).(-\beta)].(-\gamma) = -[(-\alpha).((-\beta).(-\gamma))] = \alpha.(\beta.\gamma)$$

A penúltima igualdade deriva da propriedade associativa para cortes provada no caso 1.

Caso 4 : $\alpha = 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma < 0^*$

Pela definição de multiplicação temos:

$$(\alpha.\beta).\gamma = (0^*.\beta).\gamma = 0^*.\gamma = 0^* = 0^*.(\beta.\gamma) = \alpha.(\beta.\gamma)$$

A prova geral requer considerar todos os casos separados e seria demasiadamente grande. Porém as provas seguem procedimentos análogos aos que foram mostrados.

Ficando os outros casos a cargo do leitor.

(M2) Separaremos casos:

Caso 1 : $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$

Para mostrar que $\alpha.\beta = \beta.\alpha$, basta ver que $\alpha.\beta \subset \beta.\alpha$ e que $\beta.\alpha \subset \alpha.\beta$.

- $\alpha.\beta \subset \beta.\alpha$

Seja $r \in \alpha.\beta$, então $r \in \mathbb{Q}_-$ ou $r = pq$, $p \in \alpha$, $p > 0$, e $q \in \beta$, $q > 0$. Se $r \in \mathbb{Q}_-$ é claro que $r \in \beta.\alpha$. Agora se $r = pq$, $p \in \alpha$, $p > 0$, e $q \in \beta$, $q > 0$, por p e q serem números racionais temos que vale a propriedade comutativa isto é, $r = pq = qp$, daí $r = qp$, $q \in \beta$, $q > 0$ e $p \in \alpha$, $p > 0$. Donde $r \in \beta.\alpha$. Assim $\alpha.\beta \subset \beta.\alpha$.

- $\beta.\alpha \subset \alpha.\beta$

Seja $r \in \beta.\alpha$, então $r \in \mathbb{Q}_-$ ou $r = qp$, $q \in \beta$, $q > 0$ e $p \in \alpha$, $p > 0$. Se $r \in \mathbb{Q}_-$ é claro que $r \in \alpha.\beta$. Agora se $r = qp$, $q \in \beta$, $q > 0$ e $p \in \alpha$, $p > 0$, temos pela propriedade comutativa dos números racionais válidas para p e q que $r = qp = pq$, daí $r = pq$, $p \in \alpha$, $p > 0$, e $q \in \beta$, $q > 0$. Donde $r \in \alpha.\beta$. Concluindo que $\beta.\alpha \subset \alpha.\beta$

Caso 2 : $\alpha > 0^*$ e $\beta < 0^*$

$$\alpha.\beta = -[\alpha.(-\beta)] = -[(-\beta).\alpha] = \beta.\alpha$$

Observemos que a penúltima igualdade é devida a propriedade comutativa para o caso em que $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$.

Caso 3 : $\alpha < 0^*$ e $\beta > 0^*$ Prova análoga ao caso anterior.

Caso 4 : $\alpha = 0^*$

Pela definição temos:

$$\alpha.\beta = 0^*.\beta = 0^* = \beta.0^*$$

Caso 5 : $\beta = 0^*$

Prova análoga ao caso $\alpha = 0^*$.

(M3) Precisamos provar que $\alpha.1^* = \alpha$. Consideremos $1^* = \{x \in \mathbb{Q} | x < 1\}$ e como foi provado no Exemplo 3.2, 1^* é um corte. Separemos a prova em três casos:

Caso 1 : $\alpha > 0^*$.

Provaremos $\alpha.1^* \subset \alpha$ e que $\alpha \subset \alpha.1^*$. Onde $\alpha.1^* = \mathbb{Q}_- \cup \{rs | r \in \alpha, r > 0 \text{ e } 0 < s < 1\}$.

- $\alpha.1^* \subset \alpha$

Seja $p \in \alpha.1^*$. Então $p \in \mathbb{Q}_-$ ou $p = rs$, com $r \in \alpha, r > 0$ e $0 < s < 1$. Se $p \in \mathbb{Q}_-$ é claro que $p \in \alpha$. Agora se $p = rs$, com $r \in \alpha, r > 0$ e $0 < s < 1$, temos que $s < 1$ e $r > 0$, donde $rs < r$ o que nos dá $p = rs \in \alpha$. Assim $\alpha.1^* \subset \alpha$.

- $\alpha \subset \alpha.1^*$

Seja $p \in \alpha$. Se $p \in \mathbb{Q}_-$ é claro que $p \in \alpha.1^*$. Por outro lado se $p > 0$ então existe $s \in \alpha$, com $p < s$. Assim $p = s \frac{p}{s} \in \alpha.1^*$ pois $p \in \alpha, p > 0, \frac{p}{s} < 1$ e $\frac{p}{s} > 0$. Logo $\alpha \subset \alpha.1^*$.

Portanto $\alpha.1^* = \alpha$.

Caso 2 : $\alpha = 0^*$.

Pela definição $\alpha.1^* = 0^*.1^* = 0^* = \alpha$.

Caso 3 : $\alpha < 0^*$.

Como $\alpha < 0^*$ pela definição $\alpha.1^* = -[(-\alpha).1^*] = -[-\alpha] = \alpha$.

Segue que para todo corte α , $\alpha.1^* = \alpha$.

(M4) Suponhamos inicialmente que $\alpha > 0^*$. Consideremos o corte:

$$\beta = \mathbb{Q}_- \cup \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid p > 0, \frac{1}{p} \in M_\alpha \text{ e } \frac{1}{p} \neq \min M_\alpha \right\}$$

Provaremos inicialmente que β é um corte.

(i) $\beta \neq \emptyset$, pois $\mathbb{Q}_- \subset \beta$.

(ii) $\mathbb{Q} \setminus \beta \neq \emptyset$. De fato, como $\alpha > 0^*$, existe algum racional positivo $p \in \alpha$, isto é $p \notin M_\alpha$. Mas $p = \frac{1}{\frac{1}{p}}$. Isto significa que $\frac{1}{p} \notin \beta$, garantindo $\mathbb{Q} \setminus \beta \neq \emptyset$.

(iii) Se p e q são racionais tais que $p \in \beta$ e $q < p$, devemos mostrar que $q \in \beta$. Se $q \leq 0$ então $q \in \beta$. Por outro lado se $q > 0$, $q < p$ então $\frac{1}{q} > \frac{1}{p}$. Mas $p \in \beta$ então $p > 0$, $\frac{1}{p} \in M_\alpha$ e $\frac{1}{p} \neq \min M_\alpha$. Como $\frac{1}{q} > \frac{1}{p}$ teremos $\frac{1}{q} \in M_\alpha$ e $\frac{1}{q} \neq \min M_\alpha$, e assim $q \in \beta$.

(iv) Provaremos que β não possui elemento de máximo. Para isso devemos mostrar que qualquer $p \in \beta$ conseguimos obter $s \in \beta$ tal que $s > p$.

Se $p \leq 0$, claramente existe algum $s \in \beta$ com $s > p$ pois β contém alguns números racionais positivos. Caso $p > 0$, e como $p \in \beta$ teremos $\frac{1}{p} \in M_\alpha$ e $\frac{1}{p} \neq \min M_\alpha$, então existe um número racional $r \in M_\alpha$ tal que $r < \frac{1}{p}$. Seja s um número racional com $r < s < \frac{1}{p}$. Então $s \in M_\alpha$ e $s \neq \min M_\alpha$. Como $s = \frac{1}{\frac{1}{s}}$ então $\frac{1}{s} \in \beta$. Além disso $\frac{1}{s} > p$ como queríamos.

Assim provamos que β é um corte.

Verificaremos agora que $\alpha.\beta = 1^*$ onde

$$\beta = \mathbb{Q}_- \cup \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid p > 0, \frac{1}{p} \in M_\alpha \text{ e } \frac{1}{p} \neq \min M_\alpha \right\}.$$

Para isso mostraremos que $\alpha.\beta \subset 1^*$ e que $1^* \subset \alpha.\beta$.

Caso 1 : $\alpha > 0^*$

- $\alpha.\beta \subset 1^*$

Se $\alpha > 0^*$ é óbvio que $\beta > 0^*$. Seja $r \in \alpha.\beta$, suponhamos $r > 0$ logo $r = pq$, $p > 0, q > 0$ $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então $\frac{1}{q} \in M_\alpha$ e $\frac{1}{q} \neq \min M_\alpha$ logo $\frac{1}{q} > p$, conseqüentemente $pq < 1$, donde $r = pq \in 1^*$.

- $1^* \subset \alpha.\beta$

Seja $r \in 1^*$. Se $r \leq 0$, é claro que $r \in \alpha.\beta$. Suponhamos que $0 < r < 1$. De acordo com o lema 3.24 existem números racionais $p \in \alpha$ e $q \in M_\alpha$, com $q \neq \min M_\alpha$, tais que $\frac{p}{q} = r$, donde $r = p\frac{1}{q}$ com $p \in \alpha$ e $\frac{1}{q} \in \beta$. Provamos então que $r \in \alpha.\beta$. Conseqüentemente $1^* \subset \alpha.\beta$

Caso 2 : $\alpha < 0^*$

Se $\alpha < 0^*$, então $-\alpha > 0^*$, logo existe β tal que $(-\alpha).\beta = 1^*$, porém $(-\alpha).\beta = \alpha.(-\beta)$. Assim, $\alpha.(-\beta) = 1^*$.

(M5) Provaremos que $\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$.

Caso 1 : $\alpha > 0^*, \beta > 0^*, \gamma > 0^*$.

- $\alpha.(\beta + \gamma) \subset \alpha.\beta + \alpha.\gamma$

Se $r \in \alpha.(\beta + \gamma)$ e $r \leq 0$ então $r \in \alpha.\beta + \alpha.\gamma$.

Se $r \in \alpha.(\beta + \gamma)$ e $r > 0$ então $r = pq$ onde $p \in \alpha$ e $q \in (\beta + \gamma)$, $p > 0$ e $q > 0$. Mas, $q \in \beta + \gamma$ implica $q = s + t$ onde $s \in \beta$ e $t \in \gamma$. Assim $r = p(s + t) = ps + pt \in \alpha.\beta + \alpha.\gamma$ pois, $ps \in \alpha.\beta$ e $pt \in \alpha.\gamma$. Logo $\alpha.(\beta + \gamma) \subset \alpha.\beta + \alpha.\gamma$.

- $\alpha.\beta + \alpha.\gamma \subset \alpha.(\beta + \gamma)$

Se $r \in \alpha.\beta + \alpha.\gamma$ com $r \leq 0$ então $r \in \alpha.(\beta + \gamma)$.

Se $r \in \alpha.\beta + \alpha.\gamma$ com $r > 0$ então $r = p_1q + p_2t$, para racionais $p_1 \in \alpha, p_2 \in \alpha, q \in \beta$ e $t \in \gamma$.

Caso $p_1 \leq p_2$, então $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)q \leq q$ e daí $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)q \in \beta$. Mas, $r = p_1q + p_2t = p_2 \left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)q + t \right]$ donde $r \in \alpha.(\beta + \gamma)$.

Caso $p_2 \leq p_1$ teremos, $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)t \leq t$ e então $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)t \in \gamma$. Mas, $r = p_1q + p_2t = p_1 \left[q + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)t \right]$ garantindo que $r \in \alpha.(\beta + \gamma)$.

Caso 2 : $\alpha > 0^*, \beta < 0^*, \gamma > 0^*$, onde $\beta + \gamma > 0^*$

$\alpha.\gamma = \alpha.[(\beta + \gamma) + (-\beta)] = \alpha.(\beta + \gamma) + \alpha.(-\beta)$ que pelo caso 1 provado acima nos dá:

$$\alpha.\gamma = \alpha.(\beta + \gamma) + \alpha.(-\beta) \Rightarrow \alpha.\gamma = \alpha.(\beta + \gamma) - \alpha.\beta \Rightarrow \alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\gamma + \alpha.\beta$$

Caso 3 : $\alpha > 0^*, \beta < 0^*, \gamma > 0^*$, onde $\beta + \gamma < 0^*$

$\alpha.(-\beta) = \alpha.[\gamma + (-\beta + \gamma)] = \alpha.\gamma + \alpha.(-\beta + \gamma)$ que pelo caso 1 provado acima temos que:

$$\alpha.(-\beta) = \alpha.\gamma + \alpha.[-(\beta + \gamma)] \Rightarrow \alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$$

Quando $\alpha > 0^*, \beta > 0^*, \gamma < 0^*$, teremos dois casos: $\beta + \gamma > 0^*$ e $\beta + \gamma < 0^*$ cujas provas são análogas aos casos 2 e 3 respectivamente.

Caso 4 : $\alpha > 0^*, \beta < 0^*, \gamma < 0^*$, onde $\beta + \gamma < 0^*$

$\alpha.(-\beta) = \alpha.[\gamma + (-\beta + \gamma)]$ que pelo caso 2 provado acima nos oferece:

$$\alpha.(-\beta) = \alpha.\gamma + \alpha.[-(\beta + \gamma)] \Rightarrow -\alpha.\beta = \alpha.\gamma - \alpha.(\beta + \gamma) \Rightarrow \alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$$

Nos casos em que um ou mais cortes é ou são iguais a zero e também nos casos envolvendo $\alpha < 0^*$ a prova deriva imediatamente dos casos que foram provados e da definição de multiplicação no conjunto dos cortes.

$$\text{Portanto } \alpha.(\beta + \gamma) = \alpha.\beta + \alpha.\gamma.$$

(M6) Provaremos $\alpha.\gamma = \beta.\gamma \Rightarrow \alpha = \beta$. Temos por hipótese que $\alpha.\gamma = \beta.\gamma$ então as seguintes possibilidades podem ocorrer: $\alpha.\gamma > 0^*$ que garante $\beta.\gamma > 0^*$, $\alpha.\gamma < 0^*$ que garante $\beta.\gamma < 0^*$ e $\alpha.\gamma = 0^*$ que nos dá $\beta.\gamma = 0^*$. Separemos em casos:

Caso 1 : $\alpha.\gamma = \beta.\gamma > 0^*$ onde $\alpha > 0^*, \beta > 0^*, \gamma > 0^*$

Seja $p \in \alpha$, então existe $r \in \alpha.\gamma$ tal que $r = pq$ onde $q \in \alpha$. Mas $\alpha.\gamma = \beta.\gamma$, daí existe $s \in \beta$ tal que $r = sq$. Assim $pq = sq$ que pela lei do cancelamento válida para números racionais nos dá $p = s$. Logo $p \in \beta$, nos garantindo que $\alpha \subset \beta$.

A prova de que $\beta \subset \alpha$ é análoga.

Caso 2 : $\alpha.\gamma = \beta.\gamma > 0^*$ onde $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$, $\gamma < 0^*$

Pela definição 3.23 temos, $\alpha.\gamma = (-\alpha).(-\beta)$ e $\beta.\gamma = (-\beta).(-\gamma)$. Assim pela lei do cancelamento provado para o caso 1, temos:

$$\alpha.\gamma = \beta.\gamma \Rightarrow (-\alpha).(-\beta) = (-\beta).(-\gamma) \Rightarrow \alpha.\beta$$

Caso 3 : $\beta.\gamma = \alpha.\gamma < 0^*$ onde $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$, $\gamma > 0^*$. Pela definição 3.23 temos, $\alpha.\gamma = -[(-\alpha).\gamma]$ e $\beta.\gamma = -[(-\beta).\gamma]$. Assim pela lei do cancelamento provado para o caso 1, temos:

$$\alpha.\gamma = \beta.\gamma \Rightarrow -[(-\alpha).\gamma] = -[(-\beta).\gamma] \Rightarrow \alpha.\beta$$

Caso 4 : $\beta.\gamma = \alpha.\gamma < 0^*$ onde $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$, $\gamma < 0^*$. Pela definição 3.23 temos, $\alpha.\gamma = -[\alpha.(-\gamma)]$ e $\beta.\gamma = -[\beta.(-\gamma)]$. Assim pela lei do cancelamento provado para o caso 1, temos:

$$\alpha.\gamma = \beta.\gamma \Rightarrow -[\alpha.(-\gamma)] = -[\beta.(-\gamma)] \Rightarrow \alpha.\beta$$

Caso 5 : $\alpha.\gamma = \beta.\gamma = 0^*$ onde $\gamma \neq 0^*$.

$\alpha.\gamma = 0^*$, pela definição 3.23 temos $\alpha = 0^*$ ou $\gamma = 0^*$. Mas $\gamma \neq 0^*$ então teremos $\alpha = 0^*$. Por outro lado de $\beta.\gamma = 0^*$ e através da definição 3.23 temos que $\beta = 0^*$ ou $\gamma = 0^*$, como $\gamma \neq 0$ nos resta então $\beta = 0^*$. Logo $\alpha = 0^* = \beta$.

Portanto vale a lei do cancelamento com relação a multiplicação. □

Observação 3.26 *O elemento neutro da multiplicação definido na Proposição 3.25 item (M3) é único. De fato, suponhamos que 1^* , tal que $\alpha.1^* = \alpha$ não seja único. Seja então γ outro corte tal que $\alpha.\gamma = \alpha$.*

$$\alpha.\gamma = \alpha \Rightarrow \alpha.\gamma = \alpha.1^* \Rightarrow \gamma = 1^*.$$

A última implicação é devido a lei do cancelamento item (M5) da Proposição 3.25.

Observação 3.27 *O elemento inverso da Proposição 3.25 item (M4) é único. De fato suponhamos que exista outro corte γ tal que $\alpha.\beta = 1^*$ e $\alpha.\gamma = 1^*$. Assim,*

$$\beta = 1^*.\beta = (\alpha.\gamma).\beta = (\gamma.\alpha).\beta = \gamma.(\alpha.\beta) = \gamma.1^* = \gamma$$

Definição 3.28 *Designaremos por α^{-1} o corte β da Proposição 3.25 item (M4).*

Proposição 3.29 *Sejam α, β e γ cortes quaisquer. Se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma > 0^*$ então $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.*

Demonstração.

Caso 1 : $\alpha > 0^*, \beta > 0^*, \gamma > 0^*$

$$\alpha \cdot \gamma = \mathbb{Q}_- \cup \{st \mid s \in \alpha, t \in \gamma, s > 0, t > 0\}$$

e

$$\beta \cdot \gamma = \mathbb{Q}_- \cup \{uv \mid u \in \beta, v \in \gamma, u > 0, v > 0\}.$$

Sabemos que $\alpha \leq \beta$ então $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$. Caso $\alpha = \beta$ temos,

$$p \in \alpha \Leftrightarrow p \in \beta$$

então para qualquer $q \in \gamma$ teremos

$$pq \in \alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow pq \in \beta \cdot \gamma.$$

Logo $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

Agora se $\alpha < \beta$ então existe $q \in \beta$ tal que $q \notin \alpha$. Assim para qualquer $p \in \gamma$ teremos que $pq \in \beta \cdot \gamma$ e $pq \notin \alpha \cdot \gamma$. Logo $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Logo $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

Caso 2 : $\alpha < 0^*, \beta > 0^*, \gamma > 0^*$

Pela definição de multiplicação, pelo caso 1 e por $\alpha \leq \beta$ temos:

$$-[(-\alpha) \cdot \gamma] < \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma.$$

Caso 3 : $\alpha < 0^*, \beta < 0^*, \gamma > 0^*$

Pela definição de multiplicação, pelo caso 1 e por $\alpha \leq \beta$ temos:

$$-[(-\alpha) \cdot \gamma] < -[(-\beta) \cdot \gamma] \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma.$$

Caso 4 : $\alpha = 0^*, \beta > 0^*, \gamma > 0^*$

Pela definição de multiplicação,

$$\alpha \cdot \gamma = 0^* \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = 0^* \leq \beta \cdot \gamma.$$

Caso 5 : $\alpha < 0^*, \beta = 0^*, \gamma > 0^*$

Pela definição de multiplicação,

$$\beta \cdot \gamma = 0^* \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq 0^* = \beta \cdot \gamma.$$

Caso 6 : $\alpha = 0^*, \beta = 0^*, \gamma > 0^*$

Pela definição de multiplicação,

$$\beta \cdot \gamma = 0^* \text{ e } \alpha \cdot \gamma = 0^* \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma.$$

Os outros casos é impossível visto que a hipótese exige $\alpha \leq \beta$. Portanto se $\alpha \leq \beta$ e $\gamma > 0^*$ então $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$. \square

Com todas essas definições e propriedades correlatadas estabelecidas temos a garantia de que o conjunto dos cortes é um corpo ordenado. Mais precisamente para as operações de adição e multiplicação definidas valem as propriedades associativa, comutativa, existência de elemento neutro bem como oposto aditivo e inverso multiplicativo, distributividade da multiplicação em relação a adição, além de que com a ordem definida vale a compatibilidade da ordem com relação a adição e a multiplicação.

3.5 Identificação do conjunto dos cortes racionais com o conjunto dos números racionais

O objetivo desta seção é mostrar que podemos identificar o corpo ordenado dos racionais com o corpo ordenado dos cortes racionais, através de um isomorfismo de corpos (ver Definição B.17 no Apêndice B) que preserva ordem.

Definição 3.30 *O conjunto de todos os cortes racionais será denominado $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Definição 3.31 *O corte racional determinado por um número racional r , isto é o corte $\{p \in \mathbb{Q} | p < r\}$, será denominado r^* .*

Proposição 3.32 *Seja $f : \mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ definida por $f(r) = r^*$, que a cada racional r associa um corte racional r^* . A função f é um isomorfismo de corpos que preserva ordem, isto é para quaisquer $\forall r, s \in \mathbb{Q}$ temos:*

- (i) f é bijetora
- (ii) $f(r + s) = f(r) + f(s)$

$$(iii) f(rs) = f(r) \cdot f(s)$$

$$(iv) r < s \Leftrightarrow f(r) < f(s).$$

Demonstração.

(i) f é bijetora.

- f é injetora.

De fato, sejam r e $s \in \mathbb{Q}$.

$$r \neq s \Rightarrow r < s \text{ ou } s < r.$$

Se $r < s$ temos que $r \in s^*$ e $r \notin r^*$ donde $r^* < s^*$ e daí $f(r) < f(s)$ isto é $f(r) \neq f(s)$. Se $s < r$ temos que $s \in r^*$ e $s \notin s^*$ donde $s^* < r^*$ e daí $f(s) < f(r)$ isto é $f(r) \neq f(s)$.

Assim f é injetora.

- f é sobrejetora.

Dado $r^* \in \overline{\mathbb{Q}}$, isto é o corte determinado por um racional r basta tomar $r \in \mathbb{Q}$ que teremos $f(r) = r^*$.

$$(ii) f(r+s) = f(r) + f(s)$$

Mostrar que $f(r+s) = f(r) + f(s)$ é equivalente a mostrar que $(r+s)^* = r^* + s^*$.

- $(r+s)^* \subset r^* + s^*$

Seja $p \in (r+s)^*$ então $p < r+s$. Consideremos:

$$q = r - \frac{r+s-p}{2} \quad \text{e} \quad t = s - \frac{r+s-p}{2}$$

Como $r+s > p$ então $r+s-p > 0$ e conseqüentemente $-(r+s-p) < 0$, daí

$$q = r - \frac{r+s-p}{2} < r \text{ e } t = s - \frac{r+s-p}{2} < s.$$

Logo $q \in r^*$ e $t \in s^*$. Além disso,

$$q+t = r - \frac{r+s-p}{2} + s - \frac{r+s-p}{2} = \frac{2r-r+s+p+2s-r-s+p}{2} = p$$

O que garante $p \in r^* + s^*$. Portanto $(r+s)^* \subset r^* + s^*$.

- $r^* + s^* \subset (r+s)^*$

Seja $p \in r^* + s^*$, então $p = q+t$, onde $q \in r^*$ e $t \in s^*$ daí $q < r$ e $t < s$ donde $p = q+t < r+s$. Logo $p \in (r+s)^*$. Portanto $r^* + s^* \subset (r+s)^*$.

Assim, $f(r+s) = f(r) + f(s)$.

(iii) $f(rs) = f(r).f(s)$

Mostrar que $f(rs) = f(r).f(s)$ é equivalente a provar que $(rs)^* = r^*.s^*$.

Caso 1. $r^* > 0^*$ e $s^* > 0^*$.

- $(rs)^* \subset r^*.s^*$

Seja $p \in (rs)^*$ então $p < rs$. Considerando q como a média aritmética entre $\frac{p}{s}$ e r isto é, $q = \left(\frac{p}{s} + r\right) \frac{1}{2}$. Temos que $p < rs$. Então $\frac{p}{s} < r$, deste fato e do fato de q ser média aritmética entre $\frac{p}{s}$ e r temos que, $\frac{p}{s} < q$ e $r > q$. Donde $\frac{p}{s} < q < r$ e conseqüentemente $q \in r^*$. Por outro lado, $\frac{p}{s} < q$ isso implica que $\frac{p}{q} < s$ e assim $\frac{p}{q} \in s^*$. Como $p = q \frac{p}{q}$ e $q \in r^*$, $\frac{p}{q} \in s^*$ temos $p \in r^*.s^*$. Portanto $(rs)^* \subset r^*.s^*$.

- $r^*.s^* \subset (rs)^*$

Seja $p \in r^*.s^*$. Se $p \in \mathbb{Q}_-$ é claro que $p \in (rs)^*$, uma vez que $p \in (rs)^* > 0^*$. Caso $p > 0$ então $p = qt$ onde $q \in r^*$ e $t \in s^*$. Assim $q < r$ e $t < s$, logo $p = qt < rs$. Donde $p \in (rs)^*$. Portanto, $f(rs) = f(r).f(s)$.

No caso em que $r^* > 0^*$ e $s^* > 0^*$ temos $(rs)^* \subset r^*.s^*$.

Caso 2. $r^* < 0$ e $s^* > 0$.

$$r^*.s^* = -[(-r^*).s^*] = -[(-rs)^*] = (rs)^*.$$

A penúltima igualdade é devido ao Caso 1.

Caso 3. $r^* > 0^*$ e $s^* < 0^*$.

$$r^*.s^* = -[r^*.(-s^*)] = -[(-rs)^*] = (rs)^*.$$

A penúltima igualdade é devido ao Caso 1.

Caso 4. $r^* < 0^*$ e $s^* < 0^*$.

$$r^*.s^* = (-r^*).(-s^*) = [-r(-s)]^* = (rs)^*.$$

A penúltima igualdade é devido ao Caso 1.

Caso 5. $r^* = 0^*$

$$r^*.s^* = 0^* = (0.s)^* = (rs)^*.$$

Os casos em que $s^* = 0^*$ a demonstração é análoga ao Caso 5.

(iv) $r < s \Leftrightarrow f(r) < f(s)$.

Se $r < s$ então $r \in s^*$, mas $r \notin r^*$, donde $r^* < s^*$ ou seja $f(r) < f(s)$. Por outro lado se $f(r) < f(s)$ isto é, $r^* < s^*$, então existe um racional q de modo que $q \in s^*$ e $q \notin r^*$, assim $q < s$ e $q > r$, logo $r < s$.

□

Até aqui provamos que o corpo ordenado dos números racionais é isomorfo ao corpo ordenado de todos os cortes racionais. Desta forma quando somamos ou multiplicamos dois números racionais suas imagens através da função f definida na Proposição 3.32 se somam ou se multiplicam respectivamente. Além disso f preserva a ordem e é uma função bijetiva. Então do ponto de vista das operações algébricas, bem como da relação de ordem não há motivos para diferenciar o corpo ordenado dos números racionais com o corpo ordenado dos cortes racionais. Donde podemos identificar o corpo ordenado dos números racionais com o corpo ordenado dos cortes racionais. Ou ainda podemos considerar o conjunto \mathbb{Q} como um subconjunto do conjunto dos cortes.

Definição 3.33 *O conjunto dos cortes será, a partir de agora, denominado de conjunto dos números reais e denotado por \mathbb{R} . Os cortes racionais serão identificados, via injeção f como definida na proposição 3.32, com os números racionais. Todo corte que não for racional será denominado número irracional.*

3.6 A completude dos números reais

A construção dos números reais via processo de Dedekind fica praticamente completa com a identificação de \mathbb{Q} com $\overline{\mathbb{Q}}$. Porém ao postularmos a existência do elemento separador quando o corte não for racional na construção feita neste capítulo, ficamos com um impasse: Não podíamos repetir a mesma construção feita anteriormente, considerando agora o conjunto de todos os cortes reais e postular que todo corte possui elemento separador, de forma a ampliar ainda mais o corpo dos reais? A resposta é não. Como mostraremos no teorema denominado Teorema de Dedekind que diz que todo corte de números reais possui um número real como elemento separador. Mostraremos então que o corpo ordenado dos números reais é completo.

Antes de demonstrarmos o Teorema de Dedekind mostraremos duas outras proposições.

Proposição 3.34 *Sejam α, β cortes, com $\alpha < \beta$. Então existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.*

Demonstração. De $\alpha < \beta$, temos que existe um racional $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$. Por p ser racional e β ser corte, podemos determinar $r > p$, r racional de modo que $r \in \beta$. Como $r \in \beta$ e $r \notin r^*$ então $r^* < \beta$. Por outro lado como $p \in r^*$, já que $r > p$ e $p \notin \alpha$, temos então que $\alpha < r^*$. Portanto $\alpha < r^* < \beta$. \square

Proposição 3.35 *Seja α um corte e p um racional qualquer. Então $p \in \alpha$ se e somente se $p^* < \alpha$.*

Demonstração. Para todo racional p , $p \notin p^*$, mas por hipótese $p \in \alpha$, logo $p^* < \alpha$. Por outro lado se $p^* < \alpha$, existe um racional s tal que $s \in \alpha$ e $s \notin p^*$, assim $s \geq p$. Como $s \in \alpha$ consequentemente $p \in \alpha$. \square

Teorema 3.36 (Dedekind). *Sejam A e B subconjuntos de números reais tais que:*

- (a) $A \cup B = \mathbb{R}$
- (b) $A \cap B = \emptyset$
- (c) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$
- (d) se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, temos $\alpha < \beta$.

Então, existe um, e somente um, número real γ , tal que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$ e $\gamma \leq \beta$, para todo $\beta \in B$.

Demonstração. Existência.

Seja γ o conjunto de todos os racionais p tais que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Mostraremos que γ é um corte, isto é γ satisfaz os itens da definição 3.1. De fato,

- (i) $\gamma \neq \emptyset$, pois $A \neq \emptyset$.
- (ii) $\mathbb{Q} \setminus \gamma \neq \emptyset$. De fato $B \neq \emptyset$, então tomemos $\beta \in B$. Como $\alpha < \beta$ para todo $\alpha \in A$ existe $q \in \beta$ tal que $q \notin \alpha$ para todo $\alpha \in A$ e $q \in \mathbb{Q}$. Assim $\mathbb{Q} \setminus \gamma \neq \emptyset$.
- (iii) Sejam $p \in \gamma$ e q um racional tal que $q < p$ mostraremos que $q \in \gamma$. Como $p \in \gamma$ então $p \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$ e por $q < p$ temos que $q \in \alpha$, para α ao qual p pertença, logo $q \in \gamma$.
- (iv) γ não possui elemento de máximo. De fato, $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$, logo existe $q > p$ tal que $q \in \alpha$ (pois α é um corte) e então não possui elemento de máximo, logo $q \in \gamma$.

Desta forma mostramos que γ é um número real.

Além disso $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$.

Nos resta mostrar que $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in B$. Suponhamos que exista $\beta \in B$ tal que $\beta < \gamma$, isto significa que existe um racional $p \in \gamma$ tal que $p \notin \beta$. Como $p \in \gamma$, então $p \in \alpha$, para algum $\alpha \in A$, de modo que $p \notin \beta$, donde $\beta < \alpha$, contrariando o item (d) contido nas hipóteses do teorema. Logo $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in B$.

Unicidade

Suponhamos que exista dois números reais distintos γ_1 e γ_2 , sem perda de generalidade podemos supor $\gamma_1 < \gamma_2$, tais que γ_1 e γ_2 , satisfaçam as condições do Teorema de Dedekind. Assim, $\alpha \leq \gamma_1$ e $\alpha \leq \gamma_2$ para todo $\alpha \in A$ e $\gamma_1 \leq \beta$, $\gamma_2 \leq \beta$ para todo $\beta \in B$. Consideremos γ_3 tal que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$ que existe em virtude da proposição 3.34. De $\gamma_3 < \gamma_2$ e por $\alpha \leq \gamma_2$ para todo $\alpha \in A$ temos que $\gamma_3 \in A$. Por outro lado $\gamma_1 < \gamma_3$ e por $\gamma_1 \leq \beta$ resulta $\gamma_3 \in B$. Assim $\gamma_3 \in A$ e $\gamma_3 \in B$ o que contradiz o item (b) contido nas hipóteses do teorema. Portanto não podemos ter γ_1 e γ_2 distintos para os quais a conclusão do teorema é válida. \square

Corolário 3.37 *Nas condições do Teorema de Dedekind 3.36, ou existe em A , um número máximo, ou, em B , um número mínimo.*

Demonstração. Seja γ o conjunto de todos os racionais p tais que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Pelo item (a) do Teorema de Dedekind, γ está em A ou em B . Pelo item (b) do Teorema de Dedekind, γ não está simultaneamente em A e em B . Se $\gamma \in A$, γ é o maior número de A . Se $\gamma \in B$ é o menor número de B . \square

Definição 3.38 *Seja C um conjunto de números reais. Dizemos que C é limitado superiormente se existe um número $K \in C$ tal que $x \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O número K é dito cota superior de C .*

De modo análogo temos a definição de um conjunto ser limitado inferiormente.

Definição 3.39 *Seja C um conjunto de números reais. Dizemos que C é limitado inferiormente se existe um número $k \in C$ tal que $x \geq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O número k é dito cota inferior de C .*

Definição 3.40 *Chama-se supremo de um conjunto C de números reais ao número s que satisfaz as duas condições seguintes:*

- (a) S é uma cota superior de C ;
- (b) se $x < S$, então x não é uma cota superior de C .

Nestas condições S é denominado supremo de C . A abreviação \sup será usada para supremo.

A definição de supremo acima é equivalente a dizer que o supremo de C é a menor de suas cotas superiores. Basta notar que o item (a) nos diz que S é cota superior de C e que o item (b) afirma que não há outra cota menor do que S , logo ela é a menor de todas.

Para mostrar que o corpo ordenado dos números reais é completo precisamos mostrar que todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$ que é limitado superiormente possui supremo em \mathbb{R} .

Proposição 3.41 *Seja C um conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente. Então existe o supremo de C pertencente a \mathbb{R} .*

Demonstração. Consideremos os conjuntos A e B tais que: $\alpha \in A$ se, e somente se, existe $x \in C$ tal que $\alpha < x$ e B o conjunto de todos os números reais que não estão em A .

Pela definição do conjunto A e do conjunto B temos que nenhum elemento de A é cota superior de C , e todo elemento de B é cota superior de C . Mostraremos que o conjunto B possui mínimo que é equivalente a provar que C possui \sup .

Os conjuntos A e B satisfazem as hipóteses do Teorema de Dedekind 3.36. De fato,

- (a) $A \cup B = \mathbb{R}$, pela definição de A e B .
- (b) $A \cap B = \emptyset$, pela definição de A e B .
- (c) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. De fato, $C \neq \emptyset$, então existe $x \in C$ e todo $\alpha < x$ está em A . Sendo C limitado superiormente, existe y tal que $x \leq y$ para todo $x \in C$ e assim $y \in B$.
- (d) Se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, temos $\alpha < \beta$. De fato, se $\alpha \in A$, existe $x \in C$ tal que $\alpha < x$. Se $\beta \in B$, $x \leq \beta$ e assim $\alpha < \beta$ para todo $\alpha \in A$ e todo $\beta \in B$.

Visto que as hipóteses do Teorema de Dedekind 3.36 são válidas para A e B então pelo Corolário do Teorema de Dedekind 3.37, temos que ou A possui máximo ou B possui mínimo. Porém A não possui máximo. Suponhamos que $\alpha \in A$ seja máximo, então existe $x \in C$ tal que $\alpha < x$, considerando α_1 tal que $\alpha < \alpha_1 < x$, que existe pela Proposição 3.34, temos que $\alpha_1 \in A$ de modo que α não é o máximo de A . Portanto B possui mínimo. \square

Essa propriedade válida para \mathbb{R} não se verifica em \mathbb{Q} , isto é, não é verdade que todo subconjunto de números racionais não vazio e limitado superiormente em \mathbb{Q} sempre admita supremo em \mathbb{Q} . Por exemplo, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$ não possui supremo racional, mas tem supremo, como vimos no exemplo 3.3 se considerado como subconjunto de \mathbb{R} .

Com esse teorema as lacunas preenchidas pelos números racionais na construção de Dedekind dos números reais não ocorrem aqui, visto que todo corte de números reais possui um número real como elemento separador. Dizemos então que o conjunto dos números reais é um corpo completo.

Definição 3.42 *Chama-se ínfimo de um conjunto C de números reais ao número s que satisfaz as duas condições seguintes:*

- (a) s é uma cota inferior de C ;
- (b) se $x > s$, então x não é uma cota inferior de C .

Nestas condições s é denominado ínfimo de C . A abreviação \inf será usada para ínfimo.

A definição de ínfimo acima é equivalente a dizer que o ínfimo de C é a maior de suas cotas inferiores. Basta notar que o item (a) nos diz que s é cota inferior de C e que o item (b) afirma que não há outra cota maior do que s , logo ela é a maior de todas.

Proposição 3.43 *Seja C um conjunto não vazio de números reais, limitado inferiormente. Então existe em C existe ínfimo.*

Demonstração. Consideremos B o conjunto de todas as cotas inferiores a C . É claro que B é não vazio pois C é limitado inferiormente. Além disso B é limitado superiormente por qualquer elemento de C , e então pela Proposição 3.41, B tem supremo. Consideremos s esse supremo, daí todo número menor que $s \in B$. Vamos provar que s é ínfimo de C . Observemos que $s \leq x$ para todo $x \in C$, pois qualquer número menor do que s está em B e assim s é cota inferior de C , satisfazendo o item (a) da Definição 3.42. Por outro lado se $x > s$ então x não é uma cota inferior de C pois caso contrário s não seria supremo de B , satisfazendo o item (b) da Definição 3.42. Portanto s é ínfimo de C . \square

Tendo visto a noção de supremo e ínfimo no conjunto dos números reais e fazendo uso da propriedade do supremo, vamos demonstrar que qualquer número positivo possui raiz n -ésima. Assim o problema da irracionalidade de $\sqrt{2}$ proposto no início deste capítulo pode ser contornado.

Proposição 3.44 *Sejam $x > 0$ um número real e $n > 0$ inteiro. Então existe um único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$.*

Demonstração. Seja y_1 e y_2 números reais tais que $0 < y_1 < y_2$ então $y_1^n < y_2^n$ e assim temos que não pode existir mas de um y nas condições acima.

Consideremos agora $A = \{t \in \mathbb{R} | t^n < x\}$. O conjunto A é não vazio, uma vez que se $t = \frac{x}{1+x}$ então $0 < t < 1$ e daí $t^n \leq t < x$, donde $t \in A$. Temos também que $t_0 = 1 + x$ é

uma cota superior de A . De fato, se $t > t_0$, então $t^n \geq t > x$ e daí $t \notin A$, provando assim que $t_0 = 1 + x$ é uma cota superior de A . Então pela Proposição 3.41, A possui supremo. Seja y o supremo de A .

Provaremos que y é tal que $y^n = x$.

Suponhamos que $y^n < x$. Seja h tal que $0 < h < 1$ e $h < \frac{x-y^n}{(1+y)^n - y^n}$. Designaremos por $\binom{n}{m}$ o coeficiente de z^m no desenvolvimento de $(1+z)^n$. Então:

$$\begin{aligned} (y+h)^n &= y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} h + \binom{n}{2} y^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n \\ &\leq y^n + h \left[\binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \right] \\ &= y^n + h[(1+y)^n - y^n] \\ &< y^n + (x - y^n) = x \end{aligned}$$

Provamos então que $y+h \in A$, contradizendo o fato de y ser uma cota superior de A . Portanto y^n não é menor que x .

Suponhamos que $y^n > x$. Tomemos k tal que $0 < k < 1$, $k < y$, de modo que $k < \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}$. Então para $t \geq y - k$, temos

$$\begin{aligned} t^n \geq (y-k)^n &= y^n - \binom{n}{1} y^{n-1} k + \binom{n}{2} y^{n-2} k^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} k^n \\ &= y^n - k \left[\binom{n}{1} y^{n-1} - \binom{n}{2} y^{n-2} k + \dots - (-1)^n \binom{n}{n} k^{n-1} \right] \\ &\geq y^n - k \left[\binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \right] \\ &= y^n - k[(1+y)^n - y^n] \\ &> y^n - (y^n - x) = x \end{aligned}$$

Assim, $y-k$ é uma cota superior de A , contradizendo a afirmação de que y é o supremo de A .

Portanto $y^n = x$. □

Construção dos Números Reais via Sequências de Cauchy

Neste capítulo o conjunto dos números reais será criado a partir dos números racionais, que é corpo ordenado por uma construção na qual juntamos pontos representando certas classes de equivalência de sequências de Cauchy. Nesta construção, cada número racional r é identificado com a classe de equivalência que contém a sequência de todos os termos constante e iguais a r . As classes que escapam a essa identificação corresponde aos novos elementos introduzidos, os números irracionais. Para um estudo mais aprofundado, indicamos ao leitor as referências [1, 15, 16, 18].

4.1 Classes de equivalência de sequências de Cauchy

Precisaremos de alguns conceitos e propriedades a cerca de sequências de Cauchy que nos serão úteis a posteriori.

Definição 4.1 *Uma sequência de números racionais é uma família $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ onde para cada n , $x_n \in \mathbb{Q}$.*

Notemos que as sequências de números racionais podem ser interpretadas como funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ que associa a cada número natural um número racional definido por $f(n) = x_n$.

Definição 4.2 *Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ converge para $a \in \mathbb{Q}$, e indicamos por $x_n \rightarrow a$, ou ainda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, se dado $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n > n_0$ tem-se*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Proposição 4.3 *O limite de uma sequência quando existe é único.*

Demonstração. Suponhamos que $a \neq b$, de forma que $x_n \rightarrow a$ e $x_n \rightarrow b$.

Tomando $\varepsilon = |b - a|$ temos que $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$. Mas, como $x_n \rightarrow a$, então,

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E por $x_n \rightarrow b$ temos,

$$x_n \rightarrow b \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, assim temos que para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_0$,

$$\varepsilon = |b - a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donde $\varepsilon < \varepsilon$ o que é um absurdo. Portanto $a = b$. □

Definição 4.4 Uma seqüência $\{x_n\}$ de números racionais, diz-se limitada se existe $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 4.5 Esta definição pode ser dada de forma equivalente da seguinte maneira: Uma seqüência $\{x_n\}$ de números racionais, diz-se limitada se existem $a, b \in \mathbb{Q}$, de forma que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, são equivalentes pois se $a \leq x_n \leq b$ então c pode ser tomado de forma que $c > \max\{|a|, |b|\}$ e se $|x_n| \leq c$ então $a = -c$ e $b = c$.

Proposição 4.6 Sejam c um número racional e $\{x_n\}$ uma seqüência de números racionais. Se $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $a \in \mathbb{Q}$ então $a \leq c$.

Demonstração. Suponhamos que $a > c$. Como $x_n \rightarrow a$ podemos tomar $\varepsilon = \frac{a-c}{2}$ assim $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$, e então

$$\begin{aligned} \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo } n > n_1 &\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \\ &\Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow a - \frac{a-c}{2} < x_n < a + \frac{a-c}{2} \\ &\Rightarrow \frac{a+c}{2} < x_n. \end{aligned}$$

Mas

$$c = \frac{c+c}{2} < \frac{a+c}{2} < x_n < \frac{a-c}{2} + a$$

Donde $x_n > c$ para todo $n > n_0$. Assim teríamos infinitos termos x_n com $x_n > c$, o que contradiz a hipótese que garante que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $a \leq c$. □

Definição 4.7 Uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos de \mathbb{Q} é chamada seqüência de Cauchy se para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon,$$

ou seja $\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = 0$.

Proposição 4.8 Toda seqüência de Cauchy de números racionais é limitada.

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de Cauchy de números racionais. Então tomando $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < 1,$$

Em particular $|x_m - x_{n_0}| < 1$ para todo $m \in \mathbb{N}, m > n_0$.

Mas para todo $m \geq n_0$ temos,

$$|x_m| = |x_m - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Sendo $c = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x_{n_0}|\}$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $|x_n| \leq c$. Logo $\{x_n\}$ é limitada. \square

Proposição 4.9 Se $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ são seqüências de Cauchy de números racionais então $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$ também o é.

Demonstração. Como $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ são seqüências de Cauchy de números racionais, então para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall r, s \in \mathbb{N}, r, s > n_2 \Rightarrow |y_r - y_s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ então para todo $i, j \in \mathbb{N}, i, j > n_0$,

$$\begin{aligned} |(x_i + y_i) - (x_j + y_j)| &= |(x_i - x_j) + (y_i - y_j)| \leq |(x_i - x_j)| + |(y_i - y_j)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\{x_n\} + \{y_n\}$ é seqüência de Cauchy de números racionais. \square

Proposição 4.10 Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ seqüências de Cauchy de números racionais então $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\}$, também o é.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ temos que:

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_m| &= |x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_n + x_m \cdot y_n - x_m \cdot y_m| \\ &= |y_n(x_n - x_m) + x_m \cdot (y_n - y_m)| \\ &\leq |y_n||x_n - x_m| + |x_m||y_n - y_m|. \end{aligned}$$

Como $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ são seqüências de Cauchy de números racionais, então pela Proposição 4.8 temos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ são limitadas e assim existem $c > 0, d > 0$ com $c, d \in \mathbb{Q}$ tais que $|x_n| \leq c$, $|y_n| \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $k = \max\{c, d\}$ então $|x_n| \leq k$ e $|y_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E daí,

$$|x_n \cdot y_n - x_m \cdot y_m| \leq |y_n||x_n - x_m| + |x_m||y_n - y_m| \leq k|x_n - x_m| + k|y_n - y_m|.$$

Ainda pelo fato de $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ serem seqüências de Cauchy de números racionais, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2k}$$

$$\forall r, s \in \mathbb{N}, r, s > n_2 \Rightarrow |y_r - y_s| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Sendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ então para todo $i, j \in \mathbb{N}, i, j > n_0$ temos que

$$|(x_i \cdot y_i) - x_j \cdot y_j| < k \frac{\varepsilon}{2k} + k \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon$$

Portanto $\{x_n\} \cdot \{y_n\}$ é seqüência de Cauchy de números racionais. \square

Proposição 4.11 *Se $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais então a seqüência $\{|x_n|\}$ constituída pelos valores absolutos de $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy.*

Demonstração. Sabemos que $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais então para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Por outro lado para todo $m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0$,

$$||x_n| - |x_m|| \leq |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Portanto $\{|x_n|\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais. \square

Proposição 4.12 Se $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais que não converge para zero, e ainda $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a seqüência $\{\frac{1}{x_n}\}$ é uma seqüência de Cauchy.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$. Observemos que:

$$\left| \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} \right| = \left| \frac{x_n - x_m}{x_m \cdot x_n} \right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_m| \cdot |x_n|}$$

Mas como $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais segue da Proposição 4.11 que o mesmo acontece com $\{|x_n|\}$, daí qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ e $k > 0, k \in \mathbb{Q}$ tais que

$$\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1 \Rightarrow |x_m| > \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{|x_m|} < k.$$

Por outro lado $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais, então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_2 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{k^2}.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ então para todo $n, m \in \mathbb{N}$ onde $n, m < n_0$ temos

$$\left| \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} \right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_m| \cdot |x_n|} < \frac{\varepsilon}{k^2} k^2 < \varepsilon.$$

Portanto $\{\frac{1}{x_n}\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais. □

Proposição 4.13 Toda seqüência convergente de números racionais é uma seqüência de Cauchy.

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma seqüência convergente de números racionais tal que $x_n \rightarrow a, a \in \mathbb{Q}$. Então dado $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

assim

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Toda seqüência convergente de números racionais são seqüências de Cauchy em \mathbb{Q} , então ser seqüência de Cauchy é uma condição necessária de convergência, porém

não é condição suficiente. O fato dos termos de uma seqüência de números racionais se aproximarem entre si não implica que a seqüência converge para um número racional. Existem seqüências de Cauchy em \mathbb{Q} que não convergem em \mathbb{Q} , como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.14 *A seqüência de Cauchy de números racionais tais que $x_n^2 \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ não possui como limite um número racional. De fato, consideremos $\{x_n\}$ a seqüência das raízes aproximadas de 2, construída como se segue:*

x_0 : o maior inteiro tal que $x_0^2 \leq 2$. Substituindo os possíveis valores para x_0 descobrimos 1.

x_1 : o maior racional na forma $1 + \frac{b_1}{10}$ onde b_1 pode ser 0, 1, 2, ... ou 9, determinado por substituição direta de modo que $x_1^2 \leq 2$. Fazendo os cálculos obtemos $b_1 = 4$.

x_2 : o maior racional na forma $1 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2}$ onde b_2 pode ser 0, 1, 2, ... ou 9, determinado por substituição direta de modo que $x_2^2 \leq 2$. Fazendo os cálculos obtemos $b_2 = 1$.

E assim sucessivamente. Logo o termo geral da seqüência $\{x_n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é dado por:

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n}.$$

Mostraremos que $\{x_n\}$ não converge para nenhum número racional. Com esta finalidade vamos inicialmente provar que $x_n^2 \rightarrow 2$.

Sabemos que $x_n^2 \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também que,

$$\left(1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{b_n + 1}{10^n}\right)^2 > 2.$$

logo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\right)^2 > 2 &\Rightarrow \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 > 2 \Rightarrow x_n^2 + \frac{2x_n}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} > 2 \\ &\Rightarrow 2 - x_n^2 < \frac{2x_n}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{1}{10^{2n}} < \frac{1}{10^n} \text{ e } x_n \leq 2$$

então

$$2 - x_n^2 < \frac{1}{10^n} + \frac{4}{10^n} \Rightarrow 2 - x_n^2 < \frac{5}{10^n}.$$

Como $x_n^2 \leq 2$ então $2 - x_n^2 \geq 0$ e assim,

$$2 - x_n^2 < \frac{5}{10^n} \Rightarrow |2 - x_n^2| < \frac{5}{10^n} \Rightarrow |x_n^2 - 2| < \frac{5}{10^n}$$

Assim, dado $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ de modo que $\varepsilon > 0$, para que $|x_n^2 - 2| < \varepsilon$ é suficiente tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{5}{10^n} < \varepsilon$. Então tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{5}{10^{n_0}} < \varepsilon$ temos,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |x_n^2 - 2| < \varepsilon.$$

Portanto $x_n^2 \rightarrow 2$.

Agora vamos provar que $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy.

Acabamos de provar que $\{x_n^2\}$ é convergente, em consequência da Proposição 4.13 segue que $\{x_n^2\}$ é uma seqüência de Cauchy. Então dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_0 \Rightarrow |x_m^2 - x_n^2| < 2\varepsilon.$$

Mas,

$$\begin{aligned} |x_m^2 - x_n^2| &= |x_m - x_n||x_m + x_n| \Rightarrow |x_m - x_n||x_m + x_n| < 2\varepsilon \\ &\Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{2\varepsilon}{|x_m + x_n|} \end{aligned}$$

Como $|x_m + x_n| > 2$, então para todo $m, n > n_0$ temos

$$|x_m - x_n| < \frac{2\varepsilon}{|x_m + x_n|} < \frac{2\varepsilon}{2}$$

Mostrando assim que $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy.

Suponhamos finalmente que existe um número racional $\frac{a}{b}$ tal que $x_n \rightarrow \frac{a}{b}$. Pela Proposição 4.6 temos que $\frac{a}{b} \leq 2$. Além disso,

$$\left| x_n^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right| = \left| x_n + \frac{a}{b} \right| \left| x_n - \frac{a}{b} \right| \Rightarrow \left| x_n^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right| \leq 4 \left| x_n - \frac{a}{b} \right|$$

Como $x_n \rightarrow \frac{a}{b}$ então dado $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \left| x_n - \frac{a}{b} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

logo qualquer $n > n_0$

$$\left| x_n^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right| \leq 4 \left| x_n - \frac{a}{b} \right| = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left| x_n^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right| < \varepsilon$$

Donde $x_n^2 \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Porém já provamos que $x_n^2 \rightarrow 2$. Como o limite de uma seqüência de números racionais é único de acordo com a Proposição 4.3 então

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que a e b são naturais e primos entre si e $b \neq 0$, pois podemos escrever toda fração na forma irredutível. Assim,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2.$$

Assim a^2 é par e conseqüentemente a é par. Daí a^2 é um múltiplo de 4. Como $a^2 = 2b^2$ então b^2 é um múltiplo de 2 e então b também o é. Contradição pois a e b são primos entre si, não podendo ser então ambos pares.

Portanto $\{x_n\}$ não converge para nenhum número racional.

Outro fato importante é que um número racional pode ser limite de infinitas seqüências de números racionais, por isso juntaremos em uma mesma classe todas as seqüências que terão o mesmo limite. Assim definiremos uma condição de equivalência de seqüências de Cauchy de modo a obtermos um conjunto, onde cada elemento corresponde a um conjunto de elementos equivalentes, para depois construirmos a estrutura de corpo neste conjunto.

Definição 4.15 *Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas seqüências de Cauchy de números racionais. Dizemos que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são equivalentes e denotamos por $\{x_n\} \approx \{y_n\}$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$, onde*

$$\{x_n - y_n\} = \{x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots\}$$

A Definição 4.15 é uma relação de equivalência como mostra a seguinte proposição.

Proposição 4.16 *Se $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ são seqüências de Cauchy de números racionais e \approx como definida em 4.15. Então são válidas as seguintes propriedades:*

- (i) Reflexiva: $\{x_n\} \approx \{x_n\}$
- (ii) Simétrica: $\{x_n\} \approx \{y_n\} \Leftrightarrow \{y_n\} \approx \{x_n\}$
- (iii) Transitiva: $\{x_n\} \approx \{y_n\}$ e $\{y_n\} \approx \{z_n\} \Rightarrow \{x_n\} \approx \{z_n\}$

Demonstração.

- (i) $\{x_n\} \approx \{x_n\}$ pois, $|x_n - x_n| = 0 \rightarrow 0$.
- (ii) $\{x_n\} \approx \{y_n\} \Leftrightarrow |x_n - y_n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |y_n - x_n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \{y_n\} \approx \{x_n\}$.
- (iii) $\{x_n\} \approx \{y_n\}$ e $\{y_n\} \approx \{z_n\} \Rightarrow |x_n - y_n| \rightarrow 0$ e $|y_n - z_n| \rightarrow 0$.

Mas,

$$|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|.$$

Como $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ e $|y_n - z_n| \rightarrow 0$ então $|x_n - z_n| \rightarrow 0$. Donde $\{x_n\} \approx \{z_n\}$

□

No conjunto de todas as sequências de Cauchy de números racionais agrupemos num mesmo subconjunto as que são equivalentes via relação de equivalência \approx . Consideremos o conjunto $\bar{\mathbb{R}}$ como sendo o conjunto de todas as classes de equivalências definidas pela relação de equivalência \approx . Assim, os elementos de $\bar{\mathbb{R}}$ são conjuntos de sequências de Cauchy que podem ser separados em duas famílias: uma constituída por todas as sequências de Cauchy de números racionais que converge para algum número racional e a outra constituída por todas as sequências de Cauchy de números racionais não convergentes em \mathbb{Q} .

Vamos agora construir um corpo ordenado, que seja uma extensão de \mathbb{Q} pois como provaremos adiante a família constituída por todas as sequências de Cauchy de números racionais que converge para algum número racional possui a propriedade de que cada um dos seus elementos corresponde biunivocamente um número racional.

Definição 4.17 Designaremos por $[x_n]$ o elemento de $\bar{\mathbb{R}}$ constituído pelo conjunto de todas as sequências equivalentes a $\{x_n\}$.

Definição 4.18 Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy de números racionais, se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, com $a \in \mathbb{Q}$ então o elemento $[a] \in \bar{\mathbb{R}}$ será representado apenas por a .

Esta definição não perde a generalidade uma vez que qualquer sequência de Cauchy convergindo para $a \in \mathbb{Q}$ é equivalente a sequência em que todos os seus termos são iguais a a .

4.2 Relação de ordem em $\bar{\mathbb{R}}$

Definição 4.19 Seja $[x_n] \in \bar{\mathbb{R}}$. Dizemos que $[x_n]$ é maior do que 0 e, denotamos por $[x_n] > 0$, se existem $d \in \mathbb{Q}, d > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow x_n > d.$$

Isto significa que todos os termos da sequência $[x_n]$, a partir do índice n_0 , são maiores do que algum $d > 0$.

Definição 4.20 Seja $[x_n] \in \bar{\mathbb{R}}$. Dizemos que $[x_n]$ é menor do que 0 e, denotamos por $[x_n] < 0$, se existem $d \in \mathbb{Q}, d > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow x_n < -d.$$

Definição 4.21 Sejam $[x_n], [y_n] \in \bar{R}$. Dizemos que $[x_n]$ é igual a $[y_n]$ e indicamos por $[x_n] = [y_n]$ se $\{x_n\} \approx \{y_n\}$.

Definição 4.22 Sejam $[x_n], [y_n] \in \bar{R}$. Dizemos que $[x_n]$ é maior do que $[y_n]$ e indicamos por $[x_n] > [y_n]$ se $[x_n - y_n] > 0$ ou $[y_n - x_n] < 0$.

Definição 4.23 Sejam $[x_n], [y_n] \in \bar{R}$. Dizemos que $[x_n]$ é menor do que $[y_n]$ e indicamos por $[x_n] < [y_n]$ se $[x_n - y_n] < 0$ ou $[y_n - x_n] > 0$.

A Definição $<$ como em 4.23 é bem definida, pois independe das sequências representativas a que dizem respeito como podemos perceber na proposição seguinte.

Proposição 4.24 A relação $<$ está bem definida, isto é, se $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ e $\{w_n\}$ são seqüências de Cauchy de números racionais então:

$$\{x_n\} \approx \{z_n\} \text{ e } \{y_n\} \approx \{w_n\} \text{ com } \{x_n\} < \{y_n\} \Rightarrow \{z_n\} < \{w_n\}.$$

Demonstração. Sabemos que $\{x_n\} < \{y_n\}$ então $[y_n] > [x_n]$, isto é, $[y_n - x_n] > 0$ e daí existem $d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n > n_1 \Rightarrow y_n - x_n > d \Rightarrow d < y_n - x_n$$

Por outro lado, $\{x_n\} \approx \{z_n\}$ e $\{y_n\} \approx \{w_n\}$ isto significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - z_n| = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - w_n| = 0$. Então existem $n_2 \in \mathbb{N}$ e $n_3 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n > n_2 \Rightarrow -\frac{d}{4} < z_n - x_n < \frac{d}{4}$$

$$\forall n > n_3 \Rightarrow -\frac{d}{4} < w_n - y_n < \frac{d}{4}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ então

$$\forall n > n_0 \Rightarrow -\frac{d}{4} - \frac{d}{4} < z_n - x_n + w_n - y_n < \frac{d}{4} + \frac{d}{4} \Rightarrow -\frac{d}{2} < (y_n - x_n) - (w_n - z_n) < \frac{d}{2}$$

logo,

$$\forall n > n_0 \Rightarrow d < y_n - x_n < (w_n - z_n) + \frac{d}{2} \Rightarrow d - \frac{d}{2} < (w_n - z_n) + \frac{d}{2} - \frac{d}{2} \Rightarrow w_n - z_n > \frac{d}{2}.$$

Donde $\{z_n\} < \{w_n\}$, uma vez que $\frac{d}{2} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{d}{2} > 0$. \square

Proposição 4.25 Sejam $[x_n]$ e $[y_n] \in \bar{R}$. Então apenas uma das três possibilidades pode ocorrer:

- (1) $[x_n] < [y_n]$
 (2) $[x_n] = [y_n]$
 (3) $[y_n] < [x_n]$.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que pelo menos uma das três opções ocorre. De fato, dados $[x_n]$ e $[y_n] \in \bar{R}$ ou $[x_n] = [y_n]$, ou $[x_n] \neq [y_n]$. Caso for igual vale o item (2). Caso contrário, temos que $[x_n]$ e $[y_n]$ não são equivalentes via relação de equivalência \approx daí, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| \neq 0$. Então, existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n > n_0$ tem-se:

$$|x_n - y_n| > \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon > x_n - y_n > \varepsilon.$$

Mas $x_n - y_n > \varepsilon$ para todo $n > n_0$ implica $[x_n - y_n] > 0$ e daí $[x_n] > [y_n]$. E, $x_n - y_n < -\varepsilon$ para todo $n > n_0$ implica $[x_n - y_n] < 0$ isto é, $[x_n] < [y_n]$, ou ainda $[y_n] < [x_n]$. Assim de $[x_n] \neq [y_n]$, deve ocorrer (1) ou (3).

Provaremos agora que (1), (2) e (3) não podem ocorrer simultaneamente.

Suponhamos que (2) seja válida. Suponhamos também que (3) também ocorra simultaneamente com (2). De $[y_n] < [x_n]$, ou ainda $[x_n - y_n] > 0$, existem um racional $d > 0$ e um natural n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_1$ nos dá:

$$x_n - y_n > d.$$

Por outro lado, temos também que $[x_n] = [y_n]$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$. Assim existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_2$ temos:

$$|x_n - y_n| < d \Leftrightarrow -d < x_n - y_n < d.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ teremos que para todo $n > n_0$,

$$x_n - y_n > d \text{ e } x_n - y_n < d. \quad (4-1)$$

Como $d \in \mathbb{Q}$ então (4-1) não pode ser satisfeita. Suponhamos agora que (2) seja válida e que também (1) seja válida. Como $[x_n] < [y_n]$, ou ainda $[y_n - x_n] > 0$, então existem um racional $d_1 > 0$ e $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_3$ temos:

$$y_n - x_n > d_1.$$

Mas temos também que $[x_n] = [y_n]$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$. Assim existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_4$ temos:

$$|x_n - y_n| < d_1 \Leftrightarrow |y_n - x_n| < d_1 \Leftrightarrow -d_1 < y_n - x_n < d_1.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_3, n_4\}$ teremos que para todo $n > n_0$,

$$y_n - x_n > d_1 \text{ e } y_n - x_n < d_1. \quad (4-2)$$

Como $d_1 \in \mathbb{Q}$ então a equação (4-2) não pode ser satisfeita.

Suponhamos agora que (2) não seja válida, isto é $[x_n] \neq [y_n]$, e (1) e (3) sejam válidas.

Como (1) é válida $[x_n] < [y_n]$ isto nos garante que $[y_n - x_n] > 0$ ou seja existem $d_1 \in \mathbb{Q}, d_1 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1 \Rightarrow y_n - x_n > d_1.$$

Por outro lado (2) é válida isto é, $[x_n] > [y_n]$ assim $[x_n - y_n] > 0$ ou seja existem $d_2 \in \mathbb{Q}, d_2 > 0$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2 \Rightarrow x_n - y_n > d_2.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ então

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow y_n - x_n + x_n - y_n > d_1 + d_2 \Rightarrow 0 > d_1 + d_2 \Rightarrow d_1 + d_2 < 0$$

Isso é uma contradição, já que d_1 e d_2 são números racionais tais que $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$ nos garante $d_1 + d_2 > 0$.

Mostramos que se $[x_n] \neq [y_n]$, (1) e (3) não podem ocorrer simultaneamente, □

A relação $<$ como definida em 4.23 é completa e reflexiva. Veremos agora que ela satisfaz a transitividade.

Proposição 4.26 *Sejam $[x_n], [y_n]$ e $[z_n]$ elementos de \bar{R} . Se $[x_n] < [y_n]$ e $[y_n] < [z_n]$ então $[x_n] < [z_n]$.*

Demonstração. Como $[x_n] < [y_n]$ então $[y_n - x_n] > 0$ e daí existem $d_1 \in \mathbb{Q}, d_1 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1 \Rightarrow y_n - x_n > d_1.$$

Por outro lado $[y_n] < [z_n]$, isto é $[z_n - y_n] > 0$ e então existem $d_2 \in \mathbb{Q}, d_2 > 0$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2 \Rightarrow z_n - y_n > d_2.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ então

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow y_n - x_n + z_n - y_n > d_1 + d_2 \Rightarrow z_n - x_n > d_1 + d_2.$$

Como $d_1 + d_2 \in \mathbb{Q}$ com $d_1 + d_2 > 0$ então $[x_n] < [z_n]$. \square

Graças as Proposições 4.25 e 4.26, $<$ define uma relação de ordem em \bar{R} .

Proposição 4.27 *Se $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy de números racionais tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ então $\{x_n\}$ é equivalente a uma sequência $\{y_n\}$ de termos todos diferentes de zero.*

Demonstração. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$, temos duas possibilidades: $[x_n] > 0$ ou $[x_n] < 0$.

Caso $[x_n] > 0$ existem $d_1 \in \mathbb{Q}, d_1 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1 \Rightarrow x_n > d_1.$$

Isto significa que todos os termos $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots$ são maiores que d_1 . Assim as sequências $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots\}$ e $\{y_n\} = \{d_1, \dots, d_1, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\}$ são equivalentes, visto que para todo $n > n_1$ todos os termos $x_n - y_n$ são iguais a zero garantindo então que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$. Donde $\{x_n\} \approx \{y_n\}$.

Por outro lado, se $[x_n] < 0$ existem $d_2 \in \mathbb{Q}, d_2 > 0$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow x_n < -d_2.$$

Assim todos os termos $x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \dots$ são menores que $-d_2$. Desta maneira as sequências $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_2}, x_{n_2+1}, \dots\}$ e $\{y_n\} = \{-d_2, -d_2, \dots, x_{n_2+1}, x_{n_2+1}, \dots\}$ são equivalentes, uma vez que para todo $n > n_2$ todos os termos $x_n - y_n$ são iguais a zero garantindo então que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$. Logo $\{x_n\} \approx \{y_n\}$.

Nos dois casos $\{y_n\}$ é constituída de termos todos diferentes de zero. Como queríamos. \square

4.3 Adição em \bar{R}

No conjunto \bar{R} definiremos agora a operação de adição e mostraremos que $(\bar{R}, +)$ é um grupo abeliano (ver Definição B.3 no Apêndice B), provido de uma relação de ordem, que mais tarde nos ajudarão a mostrar que \bar{R} é um corpo ordenado completo.

Tendo em vista a Proposição 4.9 temos a seguinte definição:

Definição 4.28 Sejam $[x_n]$ e $[y_n]$ elementos de \bar{R} . A soma de $[x_n]$ com $[y_n]$, indicada por $[x_n] + [y_n]$ é o conjunto $[x_n + y_n]$ de todas as seqüências de Cauchy equivalentes a $\{x_n + y_n\}$.

A operação da Definição 4.28 é bem definida. Isto é, não depende das particularidades que podem ser escolhidos cada elemento que representara cada parcela da soma.

Proposição 4.29 Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ e $\{w_n\}$ seqüências de Cauchy de números racionais. Se $\{x_n\} \approx \{z_n\}$ e $\{y_n\} \approx \{w_n\}$ então $\{x_n + y_n\} \approx \{z_n + w_n\}$.

Demonstração. Por hipótese $\{x_n\} \approx \{z_n\}$ e $\{y_n\} \approx \{w_n\}$ isto significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - z_n| = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - w_n| = 0$. Então dado $\varepsilon > 0$ existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1 \Rightarrow |x_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x_n - z_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2 \Rightarrow |y_n - w_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < y_n - w_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ então,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < x_n - z_n + y_n - w_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\varepsilon < (x_n + y_n) - (z_n + w_n) < \varepsilon$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n + y_n) - (z_n + w_n)| = 0.$$

E daí $\{x_n + y_n\} \approx \{z_n + w_n\}$. □

Assim a operação que a cada par de elementos $([x_n], [y_n]) \in \bar{R} \times \bar{R}$ associa o elemento $[x_n + y_n] \in \bar{R}$ será denominada adição, que como vimos, na Proposição 4.29, está bem definida.

Proposição 4.30 Sejam $[x_n]$, $[y_n]$ e $[z_n]$ elementos de \bar{R} . Então são válidas as seguintes propriedades:

(A1) *Associativa:* $[x_n] + ([y_n] + [z_n]) = ([x_n] + [y_n]) + [z_n]$

(A2) *Comutativa:* $[x_n] + [y_n] = [y_n] + [x_n]$

(A3) *Existência de elemento neutro:* Existe $0 \in \bar{R}$ tal que $[x_n] + 0 = [x_n]$.

(A4) *Existência de oposto:* $\forall [x_n] \in \bar{R}, \exists [y_n] \in \bar{R}$ tal que $[x_n] + [y_n] = 0$.

(A5) *Compatibilidade da adição com relação a ordem:* $[x_n] < [y_n] \Rightarrow [x_n] + [z_n] < [y_n] + [z_n]$.

Demonstração.

(A1) Como o conjunto dos números racionais possui a propriedade associativa e $[x_n]$, $[y_n]$ e $[z_n]$ são seqüências de números racionais então,

$$\begin{aligned} [x_n] + ([y_n] + [z_n]) &= [x_n] + [y_n + z_n] = [x_n + (y_n + z_n)] = [(x_n + y_n) + z_n] \\ &= [x_n + y_n] + [z_n] = ([x_n] + [y_n]) + [z_n]. \end{aligned}$$

(A2) Sabemos que o conjunto dos números racionais possui a propriedade comutativa e como $[x_n]$, $[y_n]$ são seqüências de números racionais então,

$$[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n] = [y_n + x_n] = [y_n] + [x_n].$$

(A3) Para mostrar a existência de elemento neutro basta tomar 0 como a classe de equivalência da seqüência em que todos os seus termos são iguais a $0 \in \mathbb{Q}$. Tal seqüência é de fato de Cauchy pois ele converge para $0 \in \mathbb{Q}$. Além disso,

$$[x_n] + 0 = [x_n + 0] = [(x_1 + 0), (x_2 + 0), (x_3 + 0), \dots] = [x_1, x_2, x_3, \dots] = [x_n]$$

(A4) Seja $[x_n] \in \bar{R}$, defina $[y_n] = [-x_n]$, daí temos que $[y_n] \in \bar{R}$. De fato, $\{-x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais pois, como x_n é um número racional para todo $n \in \mathbb{Q}$ então $-x_n$ é um número racional para todo $n \in \mathbb{Q}$. Além disso $\{x_n\}$ seqüência de Cauchy, então para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Por outro lado para todo $m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0$,

$$|-x_n - (-x_m)| = |-x_n + x_m| = |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Assim $\{-x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy de números racionais. Portanto, $[y_n] \in \bar{R}$.

Além de $[y_n]$ pertencer a \bar{R} , temos que

$$[x_n] + [-x_n] = [x_n - x_n] = 0.$$

(A5) Compatibilidade da adição com relação a ordem: $[x_n] < [y_n] \Rightarrow [x_n] + [z_n] < [y_n] + [z_n]$. Sabemos que $[x_n] < [y_n]$ então $[x_n - y_n] < 0$ e daí existem $d \in \mathbb{Q}$, com $d > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\forall n > n_1 \Rightarrow x_n - y_n > -d \Rightarrow x_n > y_n - d$$

Observemos para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n, y_n e z_n são números racionais e vale a compatibilidade da adição em relação a ordem. Logo para todo $n > n_1$ temos:

$$\begin{aligned} x_n + z_n > y_n - d + z_n &\Rightarrow x_n + z_n - y_n - z_n > y_n + z_n - y_n - z_n - d \\ &\Rightarrow x_n + z_n - (y_n + z_n) > y_n - y_n + z_n - z_n - d \\ &\Rightarrow x_n + z_n - (y_n + z_n) > -d \end{aligned}$$

Portanto $[x_n] < [y_n] \Rightarrow [x_n] + [z_n] < [y_n] + [z_n]$.

□

4.4 Multiplicação em \bar{R}

Agora definiremos a operação de multiplicação no conjunto \bar{R} e mostraremos que \bar{R} é grupo com relação a esta operação. Além disso, provaremos que vale a compatibilidade da multiplicação com a relação de ordem.

Como visto na Proposição 4.10 o produto de duas seqüências de Cauchy é também uma seqüência de Cauchy então podemos definir o produto de dois elementos de \bar{R} do seguinte modo:

Definição 4.31 *Sejam $[x_n]$ e $[y_n]$ elementos de \bar{R} . O produto de $[x_n]$ por $[y_n]$, indicado por $[x_n] \cdot [y_n]$ é o conjunto $[x_n \cdot y_n]$ de todas as seqüências de Cauchy equivalentes à $\{x_n \cdot y_n\}$, isto é $[x_n] \cdot [y_n] = [x_n \cdot y_n]$*

Mostraremos a seguir que operação que a cada par de elementos $([x_n], [y_n]) \in \bar{R} \times \bar{R}$ associa um elemento $[x_n] \cdot [y_n] = [x_n \cdot y_n] \in \bar{R}$ é bem definida. Essa operação é denominada multiplicação em \bar{R} .

Proposição 4.32 *Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ e $\{w_n\}$ seqüências de Cauchy de números racionais. Se $\{x_n\} \approx \{z_n\}$ e $\{y_n\} \approx \{w_n\}$ então $\{x_n \cdot y_n\} \approx \{z_n \cdot w_n\}$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Observemos que:

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - z_n \cdot w_n| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot w_n + x_n \cdot w_n - z_n \cdot w_n| \\ &= |x_n(y_n - w_n) + w_n \cdot (x_n - z_n)| \\ &\leq |x_n| |y_n - w_n| + |w_n| |x_n - z_n|. \end{aligned}$$

Como $\{x_n\}$, $\{w_n\}$ são limitadas, garantidos pela Proposição 4.8, já que $\{x_n\}$, $\{w_n\}$ são seqüências de Cauchy de números racionais, temos que existem $c > 0, d > 0$ com $c, d \in \mathbb{Q}$ tais que $|x_n| \leq c$ e $|w_n| \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $k = \max\{c, d\}$ então $|x_n| \leq k$ e $|w_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. E daí,

$$|x_n \cdot y_n - z_n \cdot w_n| \leq |x_n| |y_n - w_n| + |w_n| |x_n - z_n| \leq k |y_n - w_n| + k |x_n - z_n|.$$

Por outro lado $\{x_n\} \approx \{z_n\}$ e $\{y_n\} \approx \{w_n\}$ isto significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - z_n| = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - w_n| = 0$. Então existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1 \Rightarrow |x_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2 \Rightarrow |y_n - w_n| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Sendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ então para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ temos que

$$|x_n \cdot y_n - z_n \cdot w_n| \leq k |y_n - w_n| + k |x_n - z_n| < k \frac{\varepsilon}{2k} + k \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n \cdot y_n) - (z_n \cdot w_n)| = 0.$$

E daí $\{x_n \cdot y_n\} \approx \{z_n \cdot w_n\}$. □

Assim a multiplicação está bem definida.

Proposição 4.33 *Sejam $[x_n]$, $[y_n]$ e $[z_n]$ elementos de \bar{R} . Então são válidas as seguintes propriedades:*

(A1) *Associativa:* $[x_n] \cdot ([y_n] \cdot [z_n]) = ([x_n] \cdot [y_n]) \cdot [z_n]$

(A2) *Comutativa:* $[x_n] \cdot [y_n] = [y_n] \cdot [x_n]$

(A3) *Existência de elemento neutro:* Existe $[1] \in \bar{R}$ tal que $[x_n] \cdot [1] = [x_n]$.

(A4) *Existência de oposto:* $\forall [x_n] \in \bar{R}$ com $[x_n] \neq 0 \Rightarrow \exists [y_n] \in \bar{R}$ tal que $[x_n] \cdot [y_n] = [1]$.

(A5) *Compatibilidade da multiplicação com relação a ordem:* $[x_n] < [y_n]$ e $[z_n] > 0 \Rightarrow [x_n] \cdot [z_n] < [y_n] \cdot [z_n]$.

Demonstração.

(A1) Observemos que o conjunto dos números racionais possui a propriedade associativa em relação à multiplicação e como $[x_n]$, $[y_n]$ e $[z_n]$ são sequências de números racionais então,

$$\begin{aligned} [x_n] \cdot ([y_n] \cdot [z_n]) &= [x_n] \cdot [y_n \cdot z_n] = [x_n \cdot ([y_n \cdot z_n])] = [(x_n \cdot y_n) \cdot z_n] \\ &= [x_n \cdot y_n] \cdot [z_n] = ([x_n] \cdot [y_n]) \cdot [z_n]. \end{aligned}$$

(A2) Sabemos que o conjunto dos números racionais possui a propriedade comutativa em relação a multiplicação e como $[x_n]$, $[y_n]$ são sequências de números racionais então,

$$[x_n] \cdot [y_n] = [x_n \cdot y_n] = [y_n \cdot x_n] = [y_n] \cdot [x_n].$$

(A3) Para mostrar a existência de elemento neutro basta tomar $[1]$ que indicaremos apenas por 1 como a identificação com a classe de equivalência da sequência constante correspondente a sequência em que todos os seus termos são iguais a $1 \in \mathbb{Q}$. Tal sequência é de fato de Cauchy pois ele converge para $1 \in \mathbb{Q}$. Além disso,

$$[x_n] \cdot [1] = [x_n \cdot 1] = [(x_1 \cdot 1), (x_2 \cdot 1), (x_3 \cdot 1), \dots] = [x_1, x_2, x_3, \dots] = [x_n]$$

(A4) Como $[x_n] \in \bar{R}$ com $[x_n] \neq 0$. Então pela Proposição 4.27 temos a garantia que a sequência $\{x_n\}$ representativa de $[x_n]$ pode ser tomada de modo que todos os seus termos sejam diferentes de zero. Assim, definindo $\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ temos pela Proposição 4.12 que $\{y_n\}$ é também uma sequência de Cauchy. Donde $[y_n] = \left[\frac{1}{x_n} \right] \in \bar{R}$.

Além de $[y_n] = \left[\frac{1}{x_n} \right]$ pertencer a \bar{R} , temos que por cada termo de x_n é um número racional diferente de zero. Logo,

$$[x_n] \cdot \left[\frac{1}{x_n} \right] = \left[x_n \cdot \frac{1}{x_n} \right] = 1.$$

(A5) Mostraremos agora que se $[x_n] < [y_n]$ e $[z_n] > 0$ então $[x_n] \cdot [z_n] < [y_n] \cdot [z_n]$.

Sabemos que $[x_n] < [y_n]$ então $[x_n - y_n] < 0$ e daí existem $d_1 \in \mathbb{Q}$, com $d_1 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\forall n > n_1 \Rightarrow x_n - y_n < -d_1$$

Temos também que $[z_n] > 0$ daí existem $d_2 \in \mathbb{Q}$, com $d_2 > 0$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\forall n > n_2 \Rightarrow z_n > d_2.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ e observando que para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n, y_n e z_n são números racionais e vale a compatibilidade da multiplicação com relação a ordem, temos:

$$x_n \cdot z_n - y_n \cdot z_n < -d_1 \cdot z_n \tag{4-3}$$

e

$$z_n \cdot d_1 > d_2 \cdot d_1 \quad (4-4)$$

Das equações (4-3) e (4-4) temos que para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_0$:

$$x_n \cdot z_n - y_n \cdot z_n < -d_1 \cdot z_n < -d_2 \cdot d_1 \Rightarrow x_n \cdot z_n - y_n \cdot z_n < -d_2 \cdot d_1$$

Como $d_2 \cdot d_1 > 0$ então $[x_n \cdot z_n - y_n \cdot z_n] < 0$. Isto é $[x_n] \cdot [z_n] < [y_n] \cdot [z_n]$.

Portanto,

$$[x_n] < [y_n] \text{ e } [z_n] > 0 \Rightarrow [x_n] \cdot [z_n] < [y_n] \cdot [z_n].$$

□

Observação 4.34 Designaremos por $[x_n^{-1}]$ o elemento $[y_n]$ da Proposição 4.33 item (A4).

Proposição 4.35 Sejam $[x_n], [y_n], [z_n] \in \bar{R}$, com $[y_n] \neq 0$. Então $[x_n] \cdot [y_n] = [z_n] \cdot [y_n]$ se e somente se, $[x_n] = [z_n]$.

Demonstração. (\Rightarrow) Dado $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$.

Como $[y_n] \neq 0$, pela Proposição 4.27 temos a garantia que a sequência $\{y_n\}$ representativa da classe $[y_n]$ pode ser tomada de modo que todos os seus termos sejam diferentes de zero. Tendo em vista que $\{y_n\}$ é uma sequência de Cauchy de números racionais então a Proposição 4.12 nos garante que $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ é uma sequência de Cauchy de números racionais. Pela Proposição 4.8 temos que $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ é limitada. Assim existe $c \in \mathbb{Q}, c > 0$ tal que $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leq c$.

Também sabemos que $[x_n] \cdot [y_n] = [z_n] \cdot [y_n]$ isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n \cdot y_n) - (z_n \cdot y_n)| = 0$. Daí existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n - z_n \cdot y_n| < \frac{\varepsilon}{c},$$

Então para todo $n \geq n_0$ temos,

$$\begin{aligned} |x_n - z_n| &= |x_n \cdot 1 - z_n \cdot 1| = \left| x_n \cdot y_n \cdot \frac{1}{y_n} - z_n \cdot y_n \cdot \frac{1}{y_n} \right| \\ &= |x_n \cdot y_n - z_n \cdot y_n| \cdot \frac{1}{|y_n|} \\ &< \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - z_n| = 0 \Rightarrow [x_n] = [z_n].$$

(\Leftarrow) Sabemos que $[x_n] = [z_n]$ isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - z_n| = 0$. Também temos que y_n é uma sequência de Cauchy de números racionais então pela Proposição 4.8, y_n é limitada. Assim, existe $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - z_n| = 0,$$

então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{c},$$

Mas

$$|(x_n \cdot y_n) - (z_n \cdot y_n)| = |y_n \cdot (x_n - z_n)| = |y_n| \cdot |(x_n - z_n)| \leq c |(x_n - z_n)| < c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Donde $[x_n] \cdot [y_n] = [z_n] \cdot [y_n]$.

□

Esta proposição é conhecida como lei do cancelamento da multiplicação em $\bar{\mathbb{R}}$.

Observação 4.36 *O elemento neutro da multiplicação definido na Proposição 4.33, item (A3) é único. De fato, suponhamos que 1 e 1' são elementos neutros de $\bar{\mathbb{R}}$. Seja $[x_n] \neq 0$. Então $[x_n] \cdot 1 = [x_n]$ e $[x_n] \cdot 1' = [x_n]$. Assim, pela lei do cancelamento,*

$$[x_n] \cdot 1' = [x_n] \cdot 1 \Rightarrow 1 = 1'.$$

Observação 4.37 *O inverso multiplicativo definido no item (A4) da Proposição 4.33 é único. De fato, suponhamos que $[y_n]$ e $[y'_n]$ são inversos multiplicativos de $[x_n] \in \bar{\mathbb{R}}$, $[x_n] \neq 0$. Então $[x_n] \cdot [y_n] = 1$ e $[x_n] \cdot [y'_n] = 1$. Logo, pela lei do cancelamento,*

$$[x_n] \cdot [y_n] = [x_n] \cdot [y'_n] \Rightarrow [y_n] = [y'_n].$$

Até aqui mostramos que $\bar{\mathbb{R}}$ é um corpo ordenado já que existe uma relação de ordem total, e em que as operações binárias do corpo são compatíveis com essa relação de ordem como vimos nas três últimas seções.

4.5 Imersão de \mathbb{Q} em $\bar{\mathbb{R}}$

O nosso objetivo aqui é mostrar que $\bar{\mathbb{R}}$ pode ser visto como uma ampliação de \mathbb{Q} . Com esta finalidade encontraremos um subconjunto Q' de $\bar{\mathbb{R}}$ que seja isomorfo a \mathbb{Q} , inclusive com relação a ordem. Isto significa que definiremos uma função de Q' em \mathbb{Q} bijetiva, que preserva adição e multiplicação, além da relação de ordem.

Definição 4.38 Consideremos como Q' o conjunto de todos os elementos de $[x_n] \in \bar{\mathbb{R}}$ de modo que a sequência $\{x_n\}$ representativa de $[x_n]$ seja convergente para um número racional.

Observemos que a sequência representativa de todo elemento $[r] \in Q'$ pode ser tomada como a sequência constante de termos iguais a r .

Proposição 4.39 A função $f : \mathbb{Q} \rightarrow Q'$, que associa a cada número racional r um elemento $[r]$ gerado pela sucessão constante de termos todos iguais a r , é um isomorfismo que preserva a relação de ordem. Isto é f satisfaz para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$:

- (i) f é bijetora
- (ii) $f(r+s) = f(r) + f(s)$
- (iii) $f(rs) = f(r) \cdot f(s)$
- (iv) $r < s \Leftrightarrow f(r) < f(s)$.

Demonstração.

(i) f é bijetora.

- f é injetora. De fato, sejam r e $s \in \mathbb{Q}$, temos:

$$f(r) = f(s) \Leftrightarrow [r] = [s] \Leftrightarrow [r-s] \rightarrow 0 \Leftrightarrow |r-s| = 0 \Leftrightarrow r = s.$$

Assim f é injetora.

- f é sobrejetora.

Dado $[x_n] \in Q'$, então a sequência x_n representativa da classe $[x_n]$ converge para um número racional r assim x_n pode ser tomada como a sequência cujos termos são todos constantes e iguais ao racional r . Como $r \in \mathbb{Q}$, então teremos $f(r) = [r]$. Assim, qualquer elemento $[r]$ que tomamos em Q' obtemos um representante em \mathbb{Q} , a saber o próprio r , de modo que $[r]$ seja imagem de r pela função f . Portanto, f é sobrejetora.

(ii) $f(r+s) = f(r) + f(s)$ pois,

$$f(r+s) = [r+s] = [r] + [s] = f(r) + f(s)$$

(iii) $f(rs) = f(r)f(s)$ pois,

$$f(r \cdot s) = [r \cdot s] = [r] \cdot [s] = f(r) \cdot f(s)$$

(iv) Observamos que, para cada $x \in \mathbb{Q}$, se tem $x > 0$ em \mathbb{Q} se e só se $x > 0$ em \mathcal{Q}' , pois x é definido, em \mathcal{Q}' , por uma sequência de termos constantes e iguais a x . Assim, dados $r, s \in \mathbb{Q}$, tem-se:

$$r < s \Leftrightarrow s - r > 0 \Leftrightarrow [s - r] > 0 \Leftrightarrow [s] - [r] > 0 \Leftrightarrow [r] < [s].$$

□

Assim provamos que o conjunto \mathcal{Q}' pode ser identificado com o corpo ordenado dos números racionais. Isto significa que do ponto de vista de operação algébricas e de ordenação não há porque diferenciar estes dois conjuntos.

Definição 4.40 *O conjunto $\bar{\mathbb{R}}$ constituído pelas classes de equivalência das sequências de Cauchy de números racionais, mais precisamente, se $[x_n] \in \bar{\mathbb{R}}$ então $[x_n]$ é o conjunto das sequências de Cauchy $\{y_n\}$ tais que $\{x_n\} \approx \{y_n\}$, isto é $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$, será denominado a partir de agora conjunto dos números reais e denotado por \mathbb{R} .*

Vamos ver que a seguir que entre dois números reais existe sempre um número racional. Para isto mostraremos inicialmente que o corpo ordenado \mathbb{R} é arquimediano.

Proposição 4.41 *Qualquer que seja o número real x , existe um número natural n tal que $x < n$.*

Demonstração. Se x é um número real, então $x = [x_n]$, onde x_n é uma sequência de Cauchy de números racionais. Como $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy de números racionais temos pela Proposição 4.8 que $\{x_n\}$ é limitada, daí existe $k > 0$ com $k \in \mathbb{Q}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$|x_n| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x_n \leq k.$$

Seja $\{y_n\} = [k]$ a sequência de Cauchy de termos todos iguais a k . Então para todo índice n temos $x_n - y_n \leq 0$, ou seja, $0 \leq y_n - x_n$. Logo,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = k - x,$$

donde $k - x \geq 0$. Assim, temos que, $k - x \geq 0$ ou seja, $x \leq k$. Como k é um número racional existe números naturais m e b tais que $k = \frac{b}{m}$. Como $\frac{b}{m} \leq b < b + 1$, tomando $b + 1 = n$ temos que $x \leq n$. □

Proposição 4.42 *Dados dois números reais x e y , sendo $x > 0$, então existe um número natural p tal que $y < px$.*

Demonstração. Suponhamos que existam números reais x e y , sendo $x > 0$, tais que $px \leq y$, para todo número natural p . Então pela compatibilidade da multiplicação com relação a ordem

$$px \leq y \Rightarrow pxx^{-1} \leq yx^{-1} \Rightarrow p \leq yx^{-1},$$

para todo número natural p . Mas isso contradiz a Proposição 4.41. Portanto, existe um número natural p tal que $y < px$. \square

Assim provamos que o corpo \mathbb{R} é arquimediano.

Proposição 4.43 *Sejam x e y números reais tais que $x < y$. Então existe um número racional r tal que $x < r < y$.*

Demonstração. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ respectivamente as sequências geradoras de x e y . Então $\{\frac{y_n - x_n}{2}\}$ é a sequência geradora do número real $\frac{y-x}{2}$. Como $x < y$ então $\{\frac{y_n - x_n}{2}\}$ não converge para zero. Temos então que, a partir de certo $n \in \mathbb{N}$, existe $h > 0$, $h \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{y_n - x_n}{2} > h$ e portanto $\frac{x_n - y}{2} \geq h$. Logo, $h < y$ e como \mathbb{R} é arquimediano, visto na Proposição 4.42, então existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $y < th$. De $x < y$ obtemos $x < th$.

Consideremos agora a sequência cujos termos são da forma $n.h$ com $n \in \mathbb{N}$. Como $x < th$ para certo $t \in \mathbb{N}$, existem termos desta sequência que são maiores que x . Mas \mathbb{N} é bem ordenado então podemos fixar o mínimo do conjunto $\{k \in \mathbb{N} | x < kh\}$. Seja p esse mínimo e $r = ph$. Logo,

$$r = (p-1)h + h \leq x + \frac{1}{2}(y-x) < x + (y-x) = y,$$

donde $x < r < y$. \square

4.6 Completude do Conjunto dos Números Reais

Nesta seção completaremos a construção do corpo dos números reais mostrando que toda sequência de Cauchy de números reais converge para um número real.

Definição 4.44 *Uma sequência de números reais é uma família $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ onde para cada n , $x_n \in \mathbb{R}$.*

Definição 4.45 *Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ de números reais converge para $a \in \mathbb{R}$, e indicamos por $x_n \rightarrow a$, ou ainda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ se, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$ tem-se:*

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Definição 4.46 Uma sequência de $\{x_n\}$ de elementos de \mathbb{R} é chamada sequência de números reais de Cauchy se para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon,$$

ou seja $\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = 0$.

Proposição 4.47 Uma sequência de Cauchy de números racionais $\{x_n\}$ converge para $a \in \mathbb{Q}$ em \mathbb{Q} se, e somente se, $\{x_n\}$ converge para a em \mathbb{R} .

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy de números racionais que converge para $a \in \mathbb{Q}$ em \mathbb{Q} . Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Pela Proposição 4.43, existe um número racional $r > 0$ tal que $r < \varepsilon$. Como $\{x_n\}$ converge para $a \in \mathbb{Q}$ em \mathbb{Q} , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos, $|x_n - a| < r$ e por $r < \varepsilon$ então $|x_n - a| < \varepsilon$.

Portanto $\{x_n\}$ converge para a em \mathbb{R} .

(\Leftarrow) Suponhamos agora que $\{x_n\}$ converge para $a \in \mathbb{Q}$ em \mathbb{R} . Seja $\varepsilon > 0$ um número racional. Mas $\varepsilon \in \mathbb{R}$ logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$.

□

Proposição 4.48 Uma sequência de números racionais $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{Q} se, e somente se, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} .

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy de números racionais em \mathbb{Q} . Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Pela Proposição 4.43, existe um número racional $r > 0$ tal que $r < \varepsilon$. Como $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{Q} , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$ temos, $|x_n - x_m| < r$ e por $r < \varepsilon$ então $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Portanto $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} .

(\Leftarrow) Suponhamos agora que $\{x_n\}$ seja uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} . Seja $\varepsilon > 0$ um número racional. Daí $\varepsilon \in \mathbb{R}$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $mn \geq n_0$ implica $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Portanto $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{Q} . □

Proposição 4.49 Toda sequência de Cauchy de números racionais $\{x_n\}$ converge em \mathbb{R} para o número real que define.

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy números racionais e x o número real por ela definido. Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Consideremos ainda $r > 0$ um número racional tal que $r < \varepsilon$, cuja existência é garantida pela Proposição 4.43. Como $\{x_n\}$ é uma

seqüência de Cauchy números racionais existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n \geq n_0$ tem-se:

$$|x_n - x_m| < r \Leftrightarrow -r < x_m - x_n < r \Leftrightarrow -r + x_n < x_m < r + x_n.$$

Então para $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq n_0$,

$$[-r + x_n] \leq x_m \leq [r + x_n] \Rightarrow [-r] + [x_n] \leq [x_m] \leq [r] + [x_n]$$

como r e x_m são números racionais obtemos

$$-r + x \leq x_m \leq r + x \Leftrightarrow -r \leq x_m - x \leq r \Leftrightarrow |x_m - x| \leq r \Leftrightarrow |x_m - x| < \varepsilon.$$

Portanto $\{x_n\}$ converge em \mathbb{R} para o número real que define. \square

Teorema 4.50 *Toda seqüência de Cauchy de números reais converge para um número real.*

Demonstração. Seja $\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ uma seqüência de Cauchy de números reais. Sendo x_0, x_1, x_2, \dots números reais existem seqüências de Cauchy de números racionais $\{x_{in}\}$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = x_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Sendo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{0n} = x_0$, podemos escolher um termo x_{0k_0} da seqüência $\{x_{0n}\}$ tal que:

$$|x_{0k_0} - x_0| < 1.$$

Da mesma forma, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1n} = x_1$, podemos escolher um termo x_{1k_1} da seqüência $\{x_{1n}\}$ tal que:

$$|x_{1k_1} - x_1| < \frac{1}{2}.$$

De modo geral podemos escolher um termo x_{nk_n} da seqüência $\{x_{kn}\}$ tal que

$$|x_{nk_n} - x_n| < \frac{1}{n+1}.$$

Logo obtemos a seqüência $\{x_{0k_0} - x_0, x_{1k_1} - x_1, x_{2k_2} - x_2, \dots\}$ que por construção converge para zero.

Portanto dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que quaisquer $r, s \in \mathbb{N}$ com $r, s \geq n_1$ temos:

$$|x_{rk_r} - x_r| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } |x_{sk_s} - x_s| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por hipótese sabemos que $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ é uma sequência de Cauchy, daí existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que quaisquer $i, j \in \mathbb{Q}$ com $i, j \geq n_2$ implica

$$|x_i - x_j| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos que quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |x_{nk_n} - x_{mk_m}| &= |x_{nk_n} - x_n + x_n - x_m + x_m - x_{mk_m}| \\ &\leq |x_{nk_n} - x_n| + |x_{mk_m} - x_m| + |x_n - x_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donde $x_{0k_0}, x_{1k_1}, x_{2k_2}, \dots$ é uma sequência de Cauchy de números racionais que pela Proposição 4.49 é convergente para o número que ela define, isto é existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk_n} = x$. Como $\{x_{0k_0} - x_0, x_{1k_1} - x_1, x_{2k_2} - x_2, \dots\}$ converge para zero e $x_{0k_0}, x_{1k_1}, x_{2k_2}, \dots$ converge para x temos que:

$$\exists n_3 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_3 \Rightarrow |x_{nk_n} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n_4 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_4 \Rightarrow |x_{nk_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $n_5 = \max\{n_3, n_4\}$ temos que quaisquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_5$ nos dá,

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - x_{nk_n} + x_{nk_n} - x| \\ &\leq |x_n - x_{nk_n}| + |x_{nk_n} - x| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto a sequência x_0, x_1, x_2, \dots converge para x . □

Para mostrar que \mathbb{R} é um corpo ordenado completo seguindo a Definição B.16 no Apêndice B, vamos então provar que todo conjunto não vazio de \mathbb{R} , limitado superiormente possui supremo em \mathbb{R} .

Definição 4.51 *Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais. Dizemos que $\{x_n\}$ é crescente se,*

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

e decrescente se,

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$$

Definição 4.52 Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais. Dizemos que $\{x_n\}$ é não-decrescente se,

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

e não-crescente se,

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

Em qualquer uma das situações das Definições 4.51 e 4.52, dizemos que $\{x_n\}$ é monótona.

Definição 4.53 Uma sequência $\{x_n\}$ de números reais, diz-se limitada se existe $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 4.54 Se $\{x_n\}$ é uma sequência monótona e limitada de números reais então, $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Consideremos que $\{x_n\}$ seja monótona não-decrescente. Como $\{x_n\}$ é limitada superiormente, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n < a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots < a.$$

Suponhamos por absurdo que $\{x_n\}$ não seja uma sequência de Cauchy, isto significa que, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $n_0 \in \mathbb{N}$, existe dois índices r, s , podemos supor $r < s$ com $r > n_0$ e $s > n_0$ tais que:

$$x_s - x_r \geq \varepsilon.$$

Então para tal $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ podemos determinar números naturais,

$$r_1 \text{ e } s_1; r_2 \text{ e } s_2; \dots r_i \text{ e } s_i; \text{ com } r_i < s_i; i = 1, 2, 3, \dots$$

tais que,

$$r_i \leq s_i \text{ e } s_i \leq s_{i+1}.$$

Assim,

$$x_{s_1} \geq x_{r_1} + \varepsilon; x_{s_2} \geq x_{r_2} + \varepsilon \geq x_{r_1} + 2\varepsilon; \dots x_{s_k} \geq x_{r_1} + k\varepsilon.$$

Tendo em vista a propriedade arquimediana dos números reais, Proposição 4.42, então podemos tomar k de modo que,

$$k\varepsilon > a - x_{r_1}.$$

Então,

$$x_{s_k} \geq x_{r_1} + k\varepsilon > x_{r_1} + a - x_{r_1} = a.$$

Deste modo existe pelo menos um elemento de $\{x_n\}$ que é maior que a , isto contradiz o fato de que $x_n < a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy de números reais.

A demonstração para os outros casos possíveis de sequência monótonas, são análogas. \square

Teorema 4.55 *Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequências de números reais tais que:*

(i) $\{x_n\}$ é monótona não-decrescente,

(ii) $\{y_n\}$ é monótona não-crescente,

(iii) $x_i < y_j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$,

(iv) para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se

$$y_n - x_n < \varepsilon.$$

Então existe um único número real que pertence a todos os intervalos $[x_i, y_j]$, com $i, j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como as hipóteses do teorema nos diz que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são monótonas e limitadas, então pela Proposição 4.54 temos que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sequências de Cauchy. Deste modo, o Teorema 4.50 nos garante que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são convergentes para um número real.

Consideremos então, x e $y \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

O item (iii) do enunciado do teorema nos diz que, $x_i < y_j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Daí, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i \leq y_j,$$

isto é,

$$x \leq y_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado,

$$x \leq \lim_{j \rightarrow \infty} y_j \Rightarrow x \leq y.$$

Não pode ocorrer $x < y$. De fato, pelo item (iv) das hipóteses do teorema, como $y - x > 0$ então, tomando $\varepsilon = y - x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se,

$$y_n - x_n < \varepsilon = y - x.$$

Mas $x_n \leq x$ e $y \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\{x_n\}$ é monótona não-decrescente, $\{y_n\}$ é monótona não-crescente, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Logo,

$$x_n + y \leq y_n + x, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

isto é,

$$y_n - x_n \geq y - x, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

contradizendo o fato de que $y_n - x_n < \varepsilon = y - x$ para todo $n > n_0$.

Assim, $x = y$. □

Teorema 4.56 *Seja X um conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente. Então existe supremo de X pertencente aos reais.*

Demonstração. Consideremos x_0 uma cota superior de X . Seja $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que y_0 não seja cota superior de X . Designemos por:

x_1 : o menor dos números $\frac{x_0+y_0}{2}$ e x_0 , que seja cota superior de X .

y_1 : o maior dos números $\frac{x_0+y_0}{2}$ e y_0 , que não seja cota superior de X .

Observemos que se $x_1 = \frac{x_0+y_0}{2}$ então, $y_1 = y_0$ e se $x_1 = x_0$ então, $y_1 = \frac{x_0+y_0}{2}$. Em ambos os casos

$$x_1 - y_1 = \frac{x_0 - y_0}{2}.$$

Sejam,

x_2 : o menor dos números $\frac{x_1+y_1}{2}$ e x_1 , que seja cota superior de X .

y_2 : o maior dos números $\frac{x_1+y_1}{2}$ e y_1 , que não seja cota superior de X .

Analogamente se $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$ então $y_2 = y_1$ e se $x_2 = x_1$ então $y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$. Em ambos os casos temos,

$$x_2 - y_2 = \frac{x_0 - y_0}{2^2}.$$

Generalizando, podemos determinar:

x_{n+1} : o menor dos números $\frac{x_n+y_n}{2}$ e x_n , que seja cota superior de X .

y_{n+1} : o maior dos números $\frac{x_n+y_n}{2}$ e y_n , que não seja cota superior de X .

Observemos que se $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ então $y_{n+1} = y_n$ e se $x_{n+1} = x_n$ então $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$.

Teremos então:

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_0 - y_0}{2^{n+1}}.$$

A sequência $\{x_n\}$ como foi construída é monótona não-crescente, e a sequência $\{y_n\}$ monótona não-decrescente. Além disso,

- Pela construção das sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ temos que $x_i < x_j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

- Dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_0 + y_0}{2^{n_0 - 1}} < \varepsilon$. Daí para qualquer $n > n_0$ tem-se:

$$x_n - y_n = \frac{x_0 + y_0}{2^n} < \frac{x_0 + y_0}{2^{n_0 - 1}} < \varepsilon.$$

Então são satisfeitas as hipóteses do Teorema 4.55, e então existe um único número real k que pertence a todos os intervalos $[y_n, x_m]$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

O número real k é o supremo de X . De fato, qualquer que seja $x \in X$, se tem $x \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E, então

$$x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k.$$

Suponhamos que exista $s \in \mathbb{R}$ tal que $s < k$ e s é cota superior de X . Assim, $k - s > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = k$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se:

$$|y_n - k| < k - s \Rightarrow s - k < y_n - k < k - s \Rightarrow s < y_n < 2k - s.$$

Logo para $n \geq n_0$, $s < y_n$. Mas por construção nenhum termo y_n é cota superior de x_n , então s também não o é. Deste modo temos uma contradição pois supomos que s é cota superior de X . Portanto $k \in \mathbb{R}$ e k é supremo de X . \square

O conjunto dos números reais e sua aplicação em sala de aula.

Faremos aqui uma breve discussão da aplicação dos números reais em sala de aula. Propondo algumas possíveis formas de apresentação na educação básica deste conteúdo.

5.1 Algumas questões sobre o ensino dos números reais.

O conceito de número real está intrinsecamente ligado à estrutura básica do Cálculo, bem como de toda a matemática do ensino fundamental e médio. É um suporte para a compreensão e aplicação de vários conceitos e propriedades da matemática.

A Lei de Diretrizes e Bases da educação nacional, Lei 9394/96 em seu artigo 22, diz:

Art 22. A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

Analisando o artigo descrito acima podemos perceber que uma das funções da educação básica é o desenvolvimento do educando para avançar nos estudos, sendo então notória a necessidade de um embasamento real e verdadeiro aos componentes curriculares que estão presentes na maior parte dos cursos superiores. É necessário oferecer condições aos futuros cidadãos para que tenham uma bagagem conceitual e metodológica que lhes permita ser participativos desses conhecimentos.

Deve ser levado em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica

No entanto a maior parte dos alunos do ensino básico entram e saem da escola sem um domínio adequado dos números reais. Os números reais, são na maioria dos casos, tratados no ensino básico de forma rápida e superficial, sem muita importância, escondendo suas principais características, bem como suas complexidades. Sabemos que

existem muitos problemas com relação ao ensino e aprendizagem deste tema, mas talvez o principal seja a abordagem.

A maior parte dos professores utilizam o livro didático como norteador para sua prática em sala de aula, não se desvinculando muito deles, geralmente por não possuírem um conhecimento adequado do tema. Estes em sua maioria, trabalham números reais de forma breve e vaga. Muitos apresentam os números irracionais como números reais que não são racionais, aqueles cuja expansão é infinita e não periódica, sem dar uma definição formal de número real. Apresentam alguns exemplos do tipo, π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e algumas operações com radicais, porém de modo bem sucinto. Abordam dos números irracionais pelas suas expressões decimais aproximadas e geralmente sem quaisquer argumentos teóricos para justificá-las. Além disso, é frequente nos exercícios propostos para a classificação de números como racionais ou irracionais não terem informações suficientes em seus enunciados para realizar tal classificação. Isso acaba por produzir nos alunos a sensação de que esse assunto não tem importância.

Propriedades em relação à ordem, à densidade, ao infinito, às definições de número racional e de número irracional, e, ao próprio conceito de número e suas representações são poucas desenvolvidas, impossibilitando o aluno desenvolver aptidões para uma compreensão adequada dos números reais.

O estudo sobre a construção do conjunto dos números reais por meio de duas abordagens distintas que propomos neste trabalho: cortes de Dedekind no Capítulo 3 e por seqüências de Cauchy no Capítulo 4, traz subsídios para uma melhor compreensão por parte principalmente dos professores, para que assim tenham um melhor embasamento para elaboração de suas propostas de ensino a cerca deste assunto. Elas não foram criadas para se ensinar números reais no ensino básico, mas para solucionar problemas de natureza puramente matemática, a existência de um corpo arquimediano completo.

É preciso que saiba matemática e saiba bem, inclusive além do que se está ensinando, para que assim tenha maior clareza do objeto que se ensina e então conseguir, melhorar o processo de ensino aprendizagem e aumentar a aprendizagem. Ensinar matemática é um empenho complexo e não há receitas fáceis para isso. Não há um caminho único. É essencial que se ensine de modo que os alunos possam ver a Matemática como algo natural e agradável, no caminho de uma aprendizagem mais efetiva e significativa.

Para o ensino fundamental a abordagem dos números irracionais, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática, deve ser feita de maneira cautelosa, evitando seguir linha muito formal, levando inicialmente o aluno a perceber que os números racionais são insuficientes para resolver determinadas situações, e posteriormente explorar algumas propriedades desses números.

O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados,

reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números [6, p.83].

A prova da irracionalidade de alguns números por exemplo do número π , não deve ser feita nesta fase, porém deve-se propor situações que envolvam aproximações sucessivas no intuito de que o aluno perceba que estes números podem ser expressos por infinitas casas decimais e de modo não periódico.

Os Parâmetros Curriculares que regulamentam o Ensino Médio traz uma explicitação das habilidades básicas, das competências específicas, que se pretende que o aluno desenvolva em várias áreas do conhecimento, em particular na Matemática. Entre outros fatores descritos nos PCN-EM, destacamos que o aluno deve ter a capacidade de criar, de pesquisar, de formular, de observar, de analisar, de perceber, de ter curiosidade e que sejam capazes de utilizar as diversas tecnologias relacionadas às áreas de atuação. Eles têm como funções apresentar reflexões, orientações e embasamentos para a estruturação do currículo a ser adotado, bem como a prática docente.

No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional [5, p.111].

Citaremos a seguir alguns objetivos que devem ser alcançados pelo aluno a cerca do ensino da Matemática no Ensino Médio, já que, não são apresentados os objetivos específicos a serem alcançados sobre o estudo do conjunto dos números reais. Estes objetivos podem ser encontrados em [4, p.111].

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

No Ensino Médio, a matemática deve ter um caráter de apropriação, construção de conhecimentos e instrumentos para que o aluno tenha a possibilidade de continuar aprendendo. Assim, se faz necessário que o estudo dos números reais seja feita, de modo a propiciar ao aluno tais possibilidades.

5.2 Sugestões de atividades sobre números reais.

Apresentaremos a seguir, algumas atividades que podem surgir efeitos positivos para a compreensão dos números para alunos do ensino básico. Porém frisamos que são apenas sugestões que depende das peculiaridades de cada turma e da maneira de abordagem utilizada pelo professor.

Atividade 1

Como $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, então $1^2 < 2 < 2^2$. Extraindo raiz quadrada temos, $\sqrt{1^2} < \sqrt{2} < \sqrt{2^2}$ ou seja, $1 < \sqrt{2} < 2$. Fazendo tentativas:

$$(1,1)^2 = 1,21 < 2$$

$$(1,2)^2 = 1,44 < 2$$

$$(1,3)^2 = 1,69 < 2$$

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2$$

$$(1,5)^2 = 2,25 > 2$$

Então podemos observar que $1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2$ e extraindo a raiz quadrada nos permite concluir que $\sqrt{1,4^2} < \sqrt{2} < \sqrt{1,5^2}$, ou seja $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Continuando

este procedimento, use a calculadora (sem empregar a tecla $\sqrt{}$) para completar a tabela abaixo, obtendo aproximações por falta e por excesso para $\sqrt{2}$ com n casas decimais.

Tabela 5.1: Aproximações de $\sqrt{2}$

n	Aproximação por falta de $\sqrt{2}$	Aproximação por excesso de $\sqrt{2}$	Desigualdade
1	1,4	1,5	$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
2			
3			
4			
5			
6			

Esta atividade tem como objetivo determinar aproximações decimais de $\sqrt{2}$. Por este processo o aluno pode ser levado a pensar que se pode determinar quantas casas decimais quisermos e que as aproximações por falta, bem como por excesso, tem aproximações cada vez melhores do valor de $\sqrt{2}$, sugerindo subjetivamente a ideia de limite. Aqui o uso da calculadora ou mesmo de recursos computacionais apresenta-se como recurso didático de grande ajuda, pois auxilia nos cálculos e dinamiza a aula.

Atividade 2

Os resultados da figura abaixo, são resultados que apareceram no visor de uma calculadora após efetuar certas operações matemáticas. Sem saber quais operações foram efetuadas, pode-se determinar se esses números são racionais ou irracionais? Justifique.

0,058823529

0,666666667

O objetivo desta atividade é mostrar que com apenas uma quantidade finita da representação decimal de um número real que tenha representação decimal infinita não é possível classificá-lo em racional ou irracional. Por exemplo a expressão que aparece no primeiro retângulo parece de um número irracional, porém pode representar por exemplo a fração $\frac{1}{17}$ que é uma dízima periódica de período com 18 dígitos.

Atividade 3

1. Marque a alternativa correta. O número $0,9999999\dots$ é um número:

- I) natural.
- II) inteiro, não natural.
- III) racional, não inteiro.
- IV) irracional.

2. Resolva as seguintes operações:

$$(0,3).3 =$$

$$(0,33).3 =$$

$$(0,333).3 =$$

$$(0,333\dots).3 =$$

3. Escreva a dízima $0,333\dots$ como fração e multiplique essa fração por 3. Qual resultado é obtido? Compare este resultado com o encontrado no item 2.

Esta atividade tem como objetivo reconhecer melhor dízimas periódicas e compreender as diferentes representações que um número pode ter.

Atividade 4

Localizar utilizando régua sem escala e compasso os números racionais na reta numérica.

1. Partindo de uma reta ordenada com uma marcação por zero estabelece uma unidade de medida arbitrária, (1u) e com ajuda do compasso marque os números naturais 1, 2, 3, 4, 5.

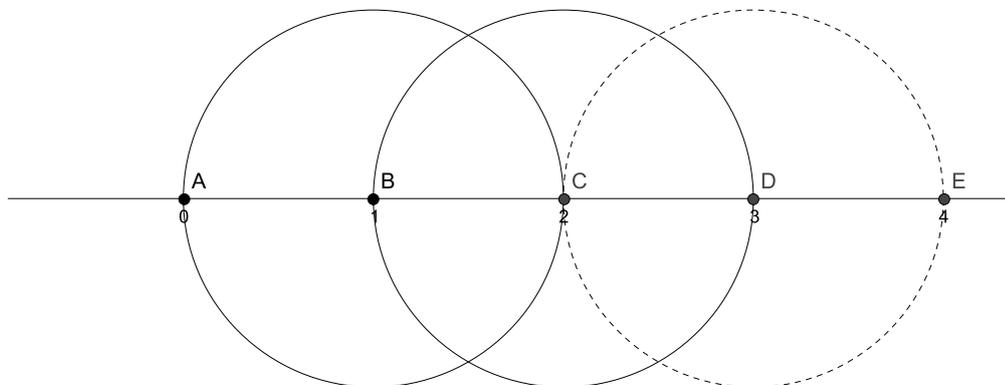


Figura 5.1: Representação de números naturais na reta.

Sugestão: Siga as instruções a seguir:

1º. Trace uma reta.

2º. Considere o segmento AB de comprimento 1, em uma unidade, na reta traçada.

3º. Marque na reta real, os pontos A e B correspondentes respectivamente em 0 e 1.

- 4º. Trace uma circunferência de raio AB e centro B , que interceptará a semirreta AB num ponto C que corresponderá ao número 2.
- 5º. Trace uma circunferência de raio AB e centro C , que interceptará a semirreta AB num ponto C que corresponderá ao número 3.

Para representar os outros números naturais os procedimentos são análogos, ver Figura 5.1.

2. Represente na reta os inteiros $-1, -2, -3, -4, -5$.

Procedimentos análogos a representação dos números naturais acima.

3. Represente o número $\frac{1}{2}$ na reta real utilizando régua sem escala e compasso. (Sugestão: Considere um segmento AB de comprimento 1 na reta real e sejam A e B respectivamente correspondentes a 0 e 1, em seguida trace a mediatriz do segmento que liga 0 a 1.) Ver figura 5.2.

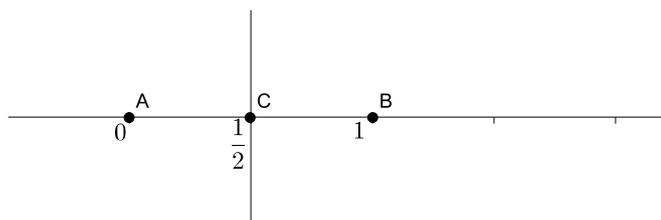


Figura 5.2: Representação de $\frac{1}{2}$.

4. Com o intuito de representar o número $\frac{1}{3}$ na reta real utilizando construção por régua sem escala e compasso, siga as seguintes instruções:
- 1º. Marque os pontos A e B correspondentes respectivamente em 0 e 1.
- 2º. Trace por A uma reta qualquer, distinta da reta real, ao qual denominaremos reta r .
- 3º. A partir do ponto A marque três segmentos de mesmo comprimento na reta r , digamos AC, CD e DE .
- 4º. Ligue o ponto B ao ponto E .
- 5º. Trace paralela s a BE passando por C . Esta interceptará a reta real em um ponto F .
- 6º. Trace paralela t a BE passando por D . Esta interceptará a reta real em um ponto G .

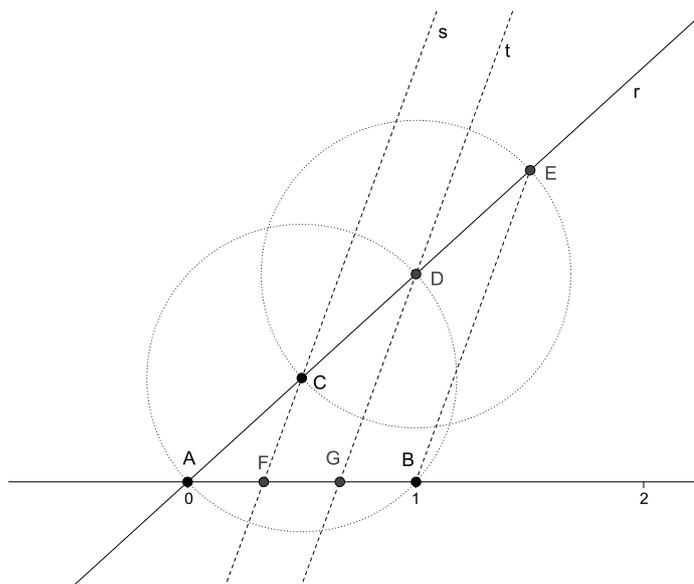


Figura 5.3: Representação de $\frac{1}{3}$.

Seguindo estas instruções espera-se que os alunos façam a construção semelhante com a Figura 5.3.

a) Qual medida deve ter o segmento AF ? E o segmento AG ? Justifique.

b) Após representado o número $\frac{1}{3}$ na reta real como poderemos representar o número $-\frac{1}{3}$ na reta real utilizando apenas o compasso?

c) Como devemos proceder para representar o número $\frac{1}{5}$ na reta real utilizando construção por régua sem escala e compasso, semelhante a descrita acima?

d) É possível fazer uma construção análoga a feita nesta atividade para representar na reta real, por exemplo o número $\frac{8}{5}$?

Atividade 5

Representar números irracionais na reta real utilizando régua sem escala e compasso.

1. Represente o número $\sqrt{2}$ na reta real utilizando régua sem escala e compasso. Para isso, sugere-se que os seguintes passos sejam seguidos:

1º. Considere o segmento AB de comprimento 1, em uma unidade.

2º. Marque na reta real, os pontos A e B correspondentes respectivamente em 0 e 1.

3º. Trace por B uma reta r perpendicular a AB .

4º. Marque uma unidade, na reta r a partir de B , determinando o ponto C e obtenha o triângulo ABC . Espera-se obter figura semelhante a Figura 5.4.

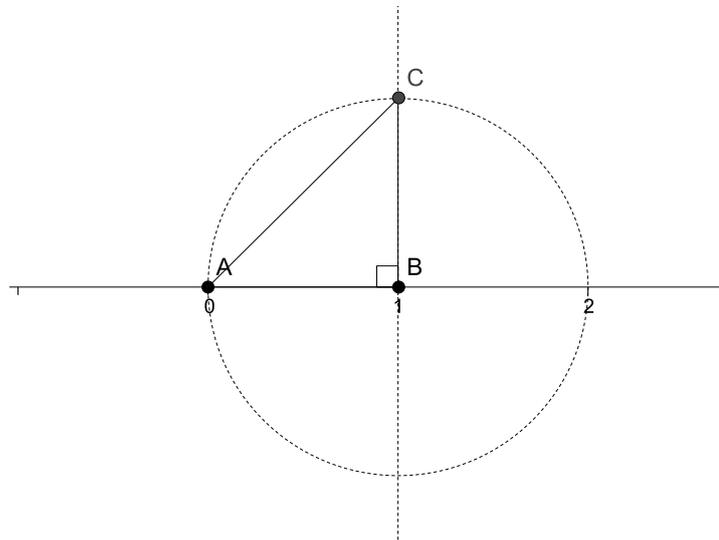


Figura 5.4: Triângulo auxiliar à representação de $\sqrt{2}$ na reta real.

a) Observando o triângulo ABC o que podemos concluir sobre a medida de AC ?

Continuando a construção.

6º. Construa uma circunferência com de centro A e raio AC , que interceptará a semirreta AB num ponto D . A figura encontrada deve ser parecida com a Figura 5.5.

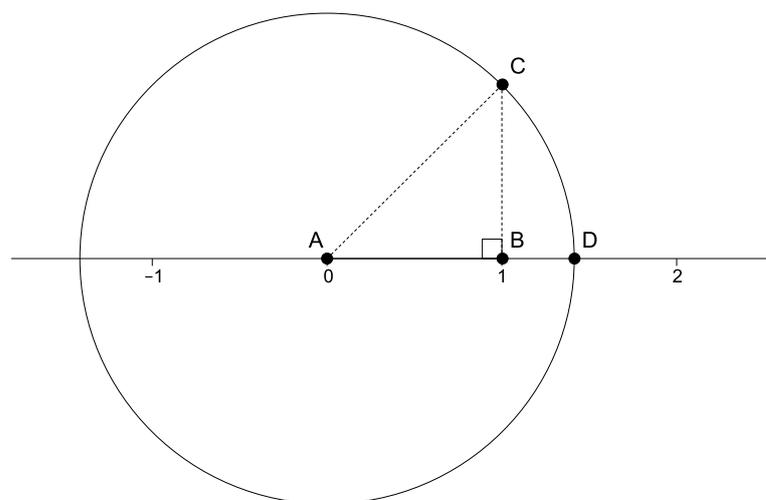


Figura 5.5: Representação de $\sqrt{2}$.

b) O que podemos concluir em relação a medida de AD ?

c) Como podemos determinar na reta numérica o número $-\sqrt{2}$?

d) Faça uma construção de modo análogo para representar o número $\sqrt{3}$ na reta real, utilizando régua sem escala e compasso.

O professor pode explorar nesta atividade a Espiral Pitagórica que é um processo prático para localizar irracionais na forma \sqrt{n} com $n \in \mathbb{N}$.

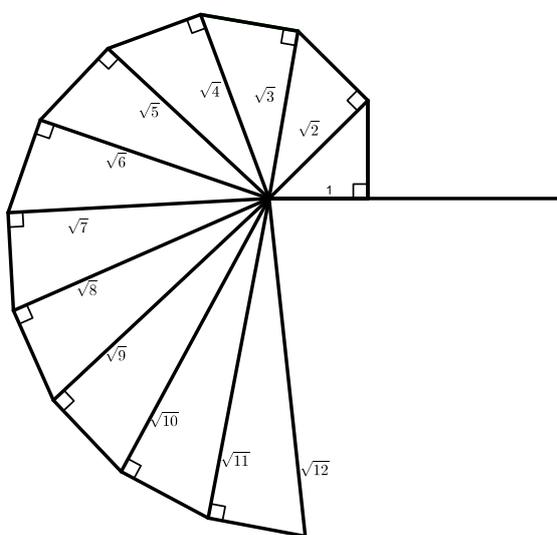


Figura 5.6: Espiral Pitagórica.

Atividade 6

Representar números irracionais na reta numérica utilizando triângulo inscrito na circunferência.

1. Represente na reta numérica $\sqrt{3}$ utilizando de régua sem escala e compasso, utilizando as seguintes instruções:

1º. Trace um segmento AB de 4 unidades.

2º. Considere um ponto P pertencente ao segmento AB de forma que $AP = 3$ e $PB = 1$.

3º. Determine M , o ponto médio de AB .

4º. Trace uma semicircunferência de centro M e raio AM .

5º. Trace por P uma perpendicular a reta AB que interceptará a semicircunferência em um ponto, que designaremos C .

Espera-se que os alunos obtenham uma construção como a da Figura 5.7.

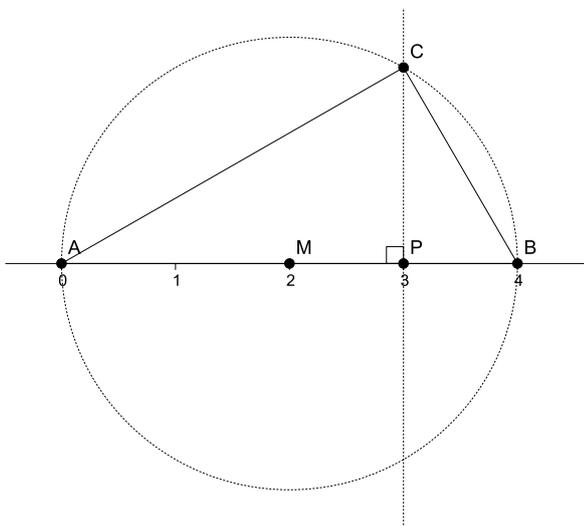


Figura 5.7: Triângulo auxiliar à representação de $\sqrt{3}$ na reta real.

a) Considerando o triângulo ABC o que podemos concluir sobre a medida de CP .

Observação 5.1 Espera-se que os alunos percebam, que o triângulo ABC é retângulo em C e CP é a altura relativa a hipotenusa. Assim, teremos

$$(\text{med}(CP))^2 = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow \text{med}(CP) = \sqrt{3}.$$

Após ter claro que a medida do segmento CP é $\sqrt{3}$, continua-se a construção, com os seguintes passos.

6º. Considere a reta que contém o segmento AB como a reta real e os pontos A e B correspondentes respectivamente em 0 e 4.

7º. Represente o número $\sqrt{3}$ na reta real. (Basta traçar a circunferência de centro A e raio CP e marcar na semirreta AB o ponto de interseção entre a semirreta AB e a circunferência.)

Espera-se que a construção tenha o formato da Figura 5.8.

2. Represente na reta numérica $\sqrt{7}$ e $-\sqrt{5}$ utilizando o mesmo procedimento feito, no exercício 1.

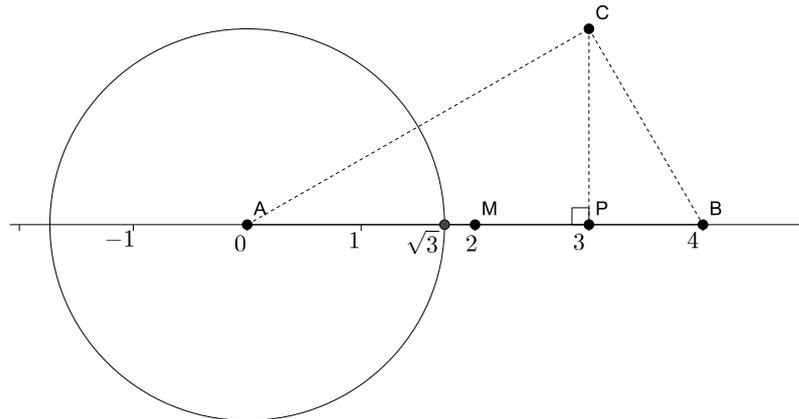


Figura 5.8: Representação de $\sqrt{3}$ na reta real.

Observação 5.2 *Caso o aluno não tenha familiaridade com construções geométricas com régua e compasso, o professor deve especificar de forma mais detalhada os passos para a construção. Vale salientar que, se houver possibilidades, esta atividade pode ser adaptada para ser trabalhada utilizando e explorando recursos tecnológicos em ambientes dinâmicos, como por exemplo o software Geogebra.*

Geralmente, os livros didáticos ao abordarem os números irracionais, apresentam a reta numérica com alguns números irracionais já marcados. Na maioria das vezes usando aproximações por falta desses números. Ao aluno realizar a construção geométrica por régua e compasso para marcar pontos como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ entre outros, se torna mais fácil a fixação às ideias de números irracionais, principalmente as relacionadas a ordem e localização na reta real. Obtendo então, maturidade para a utilização dos números irracionais em outras situações.

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi apresentar de duas formas de construção do conjunto dos números reais, via cortes de Dedekind e por seqüências de Cauchy, de modo a proporcionar um entendimento mais amplo e significativo deste conjunto, além de despertar interesse pelo tema.

Visando uma boa compreensão da teoria desenvolvida neste trabalho, procuramos explorar conceitos e propriedades da teoria de álgebra, tópicos de conjuntos e análise, para assim mostrar a criação do conjunto dos números reais, como extensão do conjunto dos números racionais, através de sua definição como corpo ordenado completo. Neste sentido, se fez necessário um enfoque propriedades e proposições que garantissem esta definição.

Acreditamos que este trabalho possa servir de motivação para leitores que buscam o aprimoramento a cerca do conjunto dos números reais, bem como incentivar reflexões sobre a melhoria do processo de ensino e aprendizagem dos números reais principalmente na educação básica.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, R. D. D. M. **Construção e ordenação dos números-dos naturais aos reais**. PhD thesis, Universidade do Minho, 2013.
- [2] BOYER, C. B. **História da Matemática: tradução de Elza F. Gomide**. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.
- [3] BRASIL, M. D. E. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte I - Bases Legais**. MEC/SEF, 2000, Disponível em: <http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>; Acesso: 09/01/2015.
- [4] BRASIL, M. D. E. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio-Parte III-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. MEC/SEF, 2000, Disponível em: <http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencia.pdf>; Acesso: 09/01/2015.
- [5] BRASIL, M. D. E. **PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. MEC/SEMTEC, 2002, Disponível em: <http://www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciaNatureza.pdf>; Acesso: 09/01/2015.
- [6] BRASIL, S. D. E. F. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática-terceiros e quartos ciclos**. MEC/SEF, Brasília, 1998.
- [7] CARVALHO, M. S; SOUZA, J. C. M; LOPES, M. L. M. **Fundamentação da matemática elementar**. Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro, 1984.
- [8] DOMINGUES, H. H; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. Atual Editora, São Paulo, 4ª edition, 2003.
- [9] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. Editora Atual, São Paulo, 1991.
- [10] EVES, H. **Introdução à história da matemática: tradução de Hygino H. Domingues**. Editora da UNICAMP, 3ª edição, Campinas, SP, 2004.

- [11] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo-Volume I**. LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 1985.
- [12] IFRAH, G. **Os números: história de uma grande invenção: tradução de Stella Maria de Freitas Senra**:. Globo, São Paulo, 2005.
- [13] LANDAU, E. **Foundations of Analysis**. Chelsea Publishing Company, New York, 2^a edition, 1960.
- [14] LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. SBM, Rio de Janeiro, 9^a edition, 2006.
- [15] LOPES, P. C. R. L. **Construção dos Números Reais**. PhD thesis, Universidade de Madeira, 2006.
- [16] MONTEIRO, L. J. **Elementos de álgebra**. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2^a edition, 1978.
- [17] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. Mc Graw Hill Books Company, New York, 1953.
- [18] SILVA, V. V. **Números: construção e propriedades**. Editora UFG, Goiânia, 2003.
- [19] SPIVAK, M. **Calculus**. W.A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1967.
- [20] ÁVILA, G. S. D. S. **Análise matemática para licenciatura**. Edgard Blücher, São Paulo, 3^a edition, 2006.

Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis

Falaremos a seguir sobre segmentos comensuráveis e incomensuráveis e como referências básicas citamos [10, 14, 20].

Consideremos dois segmentos AB e CD , eles são ditos comensuráveis se existir um terceiro segmento EF que caiba um número inteiro de vezes em AB e em CD . Em outras palavras é possível medir AB e CD ao mesmo tempo usando a mesma unidade EF . Se AB contém m vezes o segmento EF e CD contém n vezes o segmento EF , onde m e n são números inteiros positivos então a razão entre AB e CD é o número $\frac{m}{n}$. Ilustraremos esta situação no caso $m = 6$ e $n = 4$.



Figura A.1: Os segmentos AB e CD são comensuráveis.

Os segmentos AB e CD da Figura A.1 são comensuráveis pois,

$$AB = 6EF \text{ e } CD = 4EF.$$

Vale lembrar que os matemáticos gregos à época de Euclides não usavam frações, apenas razões. Para eles a fração $\frac{m}{n}$ não representava um número e sim a razão entre dois números, que seria igual a razão entre dois segmentos AB e CD .

Até o século VIa.C, no tempo de Pitágoras acreditava-se que dois segmentos quaisquer AB e CD eram sempre comensuráveis. Analisando intuitivamente parece que deve existir um certo segmento EF de comprimento tão pequeno quanto se deseje, que satisfaça o fato que EF caiba um número inteiro de vezes em AB e um número inteiro de vezes em CD . Este pensamento perdurou por muito tempo, até que por volta do século Va.C, os próprios pitagóricos descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado não são grandezas comensuráveis. O que deferiu uma crise na estrutura da Matemática da época e principalmente nos pilares pitagóricos.

Quando duas grandezas não são comensuráveis elas são ditas incomensuráveis.

Uma demonstração alternativa pode ser feita utilizando de argumentos geométricos para mostrar que o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis. Tal demonstração pode ser encontrada em [10, pág.106].

Grupos e Corpos - Algumas Definições

Definição B.1 *Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação definida sobre G . Dizemos que $*$ define uma estrutura de grupo sobre o conjunto G quando são válidas as seguintes propriedades:*

(G1) *Propriedade associativa: $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$;*

(G2) *Existência do elemento neutro: existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$;*

(G3) *$\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.*

Por simplificação de linguagem, quando $*$ define uma estrutura de grupo sobre o conjunto G diz-se que o par $(G, *)$ é um grupo.

Observação B.2 *O item (G3) garante que se $(G, *)$ é um grupo, todo elemento de G é simetrizável em relação a operação considerada.*

Definição B.3 *Dizemos que um grupo $(G, *)$ é abeliano ou comutativo se satisfaz a seguinte propriedade:*

$$a * b = b * a, \forall a, b \in G.$$

Definição B.4 *Dizemos que uma relação \mathcal{R} sobre um conjunto K é uma relação de ordem quando as seguintes condições são satisfeitas:*

(O1) *Propriedade reflexiva: $a \mathcal{R} a$, para todo $a \in K$.*

(O2) *Propriedade anti-simétrica: dados $a, b \in K$, se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} a$, então $a = b$.*

(O3) *Propriedade transitiva: dados $a, b \in K$, se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$, então $a \mathcal{R} c$.*

Definição B.5 *Dizemos que uma relação de ordem \mathcal{R} sobre um conjunto K é uma relação de ordem total se, vale a condição:*

(O4) *quaisquer $a, b \in K$, tem-se: $a \mathcal{R} b$ ou $b \mathcal{R} a$.*

Nas próximas definições usaremos a notação usual \leq para representar a relação de ordem.

Definição B.6 *Seja $(G, +)$ um grupo no qual estão definidas sobre o conjunto G uma operação de adição $(a, b) \mapsto a + b$ e uma relação de ordem total \leq . Dizemos que $(G, +)$ é um grupo ordenado se satisfaz a seguinte propriedade:*

(OA) *Compatibilidade da ordem com a adição: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall a, b, c \in G$.*

Para simplificar a linguagem quando nos referirmos que o conjunto G não vazio no qual estão definidas uma operação de adição $(a, b) \mapsto a + b$ e uma relação de ordem total \leq , que dá ao conjunto G a estrutura de um grupo ordenado, diremos simplesmente que G é um grupo ordenado, e indicaremos por $(G, +, \leq)$.

Definição B.7 *Seja $(G, +, \leq)$ um grupo ordenado. Dizemos que $(G, +, \leq)$ é arquimediano se, para quaisquer $a, b \in G$ com $0 < a$ e $0 < b$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < na$.*

Definição B.8 *Seja A um conjunto não vazio e suponhamos que estejam definidas, sobre A , duas operações:*

$$\begin{array}{ll} + : A \times A \rightarrow A & e \quad \cdot : A \times A \rightarrow A \\ (a, b) \mapsto a + b & (a, b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

denominadas respectivamente adição e multiplicação. Dizemos que a adição e a multiplicação consideradas, definem uma estrutura de anel sobre A se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

(A1) *$(A, +)$ é um grupo abeliano;*

(A2) *Propriedade associativa do produto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in A$;*

(A3) *Propriedade distributiva à esquerda da multiplicação com relação à adição: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in A$;*

(A4) *Propriedade distributiva à direita da multiplicação com relação à adição: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in A$;*

Resumidamente escrevemos $(A, +, \cdot)$ é um anel para designar que as operações de adição e a multiplicação, definem uma estrutura de anel sobre o conjunto não vazio A .

Definição B.9 *Dizemos que um anel $(A, +, \cdot)$ é comutativo se satisfaz a seguinte propriedade:*

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in A.$$

Definição B.10 Dizemos que um anel $(A, +, \cdot)$ tem unidade se:

$$\exists 1 \in A, 0 \neq 1 \text{ tal que } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in A;$$

Definição B.11 Um anel $(K, +, \cdot)$ comutativo e com unidade, é denominado corpo se, todo elemento não nulo de K admite simétrico multiplicativo. Isto é,

$$\forall a \in K, a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in K | a \cdot b = 1.$$

Resumidamente escrevemos $(K, +, \cdot)$ é um corpo para designar que as operações de adição e a multiplicação, definem uma estrutura de corpo sobre o conjunto não vazio K .

Definição B.12 Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo. Consideremos sobre $(K, +, \cdot)$ uma relação de ordem total \leq . Dizemos que esta ordem é compatível com a estrutura de corpo definida sobre o conjunto K ou que K é um corpo ordenado pela ordem \leq se são satisfeitas:

(OA) Compatibilidade da ordem com a adição: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall a, b, c \in K$.

(OM) Compatibilidade da ordem com a multiplicação: $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc \quad \forall a, b, c \in K, e 0 \leq c$.

Quando um corpo $(K, +, \cdot)$ possui fixada sobre ele uma ordem total, satisfazendo os itens (OA) e (OM) da Definição B.12, referiremos em geral a K como um corpo ordenado, suprimindo as informações da ordem fixada sobre K e de que está satisfaz itens (OA) e (OM) da Definição B.12. E indicaremos $(K, +, \cdot, \leq)$ para designar que K é um corpo ordenado.

Definição B.13 Seja $(K, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado. Dizemos que $(K, +, \cdot, \leq)$ é arqui-mediano se, o grupo ordenado $(K, +, \leq)$ é arqui-mediano.

Definição B.14 Sejam X um conjunto munido de uma ordem $\leq, A \subset X$ e $a \in X$. Dizemos que a é uma cota superior de A se $x \leq a$ para qualquer $x \in A$.

Definição B.15 Sejam X um conjunto munido de uma ordem $\leq, A \subset X$ e $a \in X$. Dizemos que a é supremo de A se a for a menor das cotas superiores de A .

Definição B.16 Seja $(K, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado. Dizemos que $(K, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado completo se, todo subconjunto não vazio de K limitado superiormente admite supremo pertencente a K .

Definição B.17 Sejam $(K_1, +, \cdot)$ e (K_2, \oplus, \odot) corpos. Uma aplicação $f : K_1 \rightarrow K_2$ é denominada isomorfismo de K_1 em K_2 se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) f é bijetora
- (ii) $f(a + b) = f(a) \oplus f(b), \forall a, b \in K_1$
- (iii) $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b), \forall a, b \in K_1$.

Para um estudo mais aprofundado sobre grupos, anéis e corpos [8] e [16].