



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Geometria Espacial e Fractal

Paulo Henrique da Silva

Goiânia

2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Paulo Henrique da Silva		
E-mail:	paulohfin@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Estudante		
Agência de fomento:	Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título:	Geometria Espacial e Fractal		
Palavras-chave:	Ensino de Geometria, Geometria Espacial, Geometria Fractal, Geogebra.		
Título em outra língua:	Spatial and Fractal Geometry		
Palavras-chave em outra língua:	Geometry teaching, Spatial Geometry, Fractal Geometry, Geogebra.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	27/03/2015		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática		
Orientador (a):	Prof. Dr. Durval José Tonon		
E-mail:	djtonon@gmail.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Paulo Henrique da Silva
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 09 / 04 / 2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Paulo Henrique da Silva

Geometria Espacial e Fractal

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon

Goiânia

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

da Silva, Paulo Henrique
Geometria Espacial e Fractal [manuscrito] / Paulo Henrique da
Silva. - 2015.
XCVIII, 98 f.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Ensino na Educação Básica (Profissional), Goiânia, 2015.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras.

1. Ensino de Geometria. 2. Geometria Espacial. 3. Geometria
Fractal. 4. Geogebra. I. José Tonon, Durval, orient. II. Título.

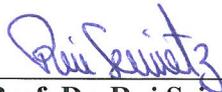
Paulo Henrique da Silva

Geometria Espacial e Fractal

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Rui Seimetz
UnB



Prof. Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Paulo Henrique da Silva graduou-se em Matemática pela PUC-GO - Pontifícia Universidade Católica de Goiás em 2010, Especializou-se em Matemática em 2013 e em Metodologia do Ensino Fundamental em 2013 pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Lecionou no Colégio Gonçalves Ledo, Escola Estadual Professora Marinete Silva, Escola Estadual Nossa Senhora de Lourdes, Colégio Estadual Nazir Safatle, Escola Municipal de Tempo Integrado Professora Silene de Andrade e Colégio Estadual Criméia Oeste por contrato temporário de Matemática e Física e ministrou oficinas de Matemática Básica, Matemática Financeira e Raciocínio Lógico.

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica e profissional, que possibilitou a realização e conclusão deste trabalho.

Aos meus pais: Sebastião e Terezinha e minhas irmãs: Elizama e Sara.

A UFG - Universidade Federal de Goiás e a PUC-GO - Pontifícia Universidade Católica de Goiás.

Aos meus professores do PROFMAT, Especialização e graduação: Alarcon, Cristian, Duelci, Durval, Geci, João Batista, Julio, Ole, Marcos, Mário, Rogério e Valdivino.

Aos todos os meus colegas do Profmat, Especialização.

Ao meu orientador Durval e aos integrantes da banca avaliadora.

E a CAPES pelo suporte financeiro que me auxiliou neste período de dois anos.

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem para a didática do ensino de Geometria Espacial e Fractal no ensino de Matemática, com o objetivo de facilitar a interação dos alunos com o ensino. A abordagem adotada para Geometria Espacial, foi de construir algumas das figuras geométricas assim que forem apresentados os conceitos necessários. A inserção de um novo conteúdo, que é a Geometria Fractal, contribui com o desenvolvimento dos alunos, pois ajuda a perceberem a aplicação dos conceitos da matemática em nosso cotidiano. Uma das ferramentas utilizadas para facilitar o ensino foi o uso de software dinâmico, que é uma das maneiras que permite ao aluno ter uma melhor interação com os conceitos, permitindo um melhor entendimento do conteúdo. Por meio deste trabalho, espera-se que o ensino de Geometria possa ser realizado de forma diferenciada e motivadora propiciando um melhor entendimento e desenvolvimento intelectual aos alunos.

Palavras-chave

Ensino de Geometria, Geometria Espacial, Geometria Fractal, Geogebra.

Abstract

This work present an approach in the didactics of teach of Spatial and Fractal Geometry, to facilitate the interaction of students with education. The adopted approach to Spatial Geometry, was of the to construct the geometric figures as soon as present the concepts needed. The insertion of a new content, that is Fractal Geometry, contributes to the development of students, it helps to realize the application of math concepts in our daily life. One of the tools used to facilitate the teaching was the use of dynamic software, that is one way that allows having a better interaction with the concepts, allowing a better understanding of the content. Through this work it is expected that Geometry teaching can be performed differently and motivating to provide better intellectual development students.

Keywords

Geometry teaching, Spatial Geometry, Fractal Geometry, Geogebra.

Lista de Figuras

1	Representação gráfica do $z = 2 + 3i$	25
2	O ponto D é um ponto interior.	27
3	Iteração sobre a função $f(x) = x^2$	30
4	Novo Ponto.	32
5	Ponto Médio ou Centro.	32
6	Intersecção de Dois Objetos.	32
7	Segmento definido por Dois Pontos.	32
8	Reta definida por Dois Pontos.	32
9	Reta Paralela.	32
10	Reta Perpendicular.	33
11	Polígono Regular.	33
12	Círculo dados Centro e Raio.	33
13	Ângulo com Amplitude Fixa.	33
14	Exibir/Esconder Objeto.	33
15	Janela de Visualização.	33
16	Determinação do plano.	35
17	Uma pirâmide hexagonal.	36
18	Construção de um paralelepípedo.	37
19	Pares de retas paralelas determinam ângulos iguais.	38
20	Construção de um prisma.	39
21	Teorema 3.6 para planos paralelos.	40
22	Figuras Homotéticas.	42
23	Distância de ponto a plano.	43
24	Plano tangente e secante à esfera.	44
25	Volume da Pirâmide triangular.	46
26	Volume da Esfera.	48
27	Quadrilátero de Saccheri.	49
28	Soma dos ângulos internos de um triângulo.	49
29	Infinidade de retas com um ponto em comum e paralela a uma outra.	51
30	Conjunto de Cantor.	54
31	Conjunto de Peano.	55
32	Curva de Hilbert.	56
33	Curva de Koch.	57

34	Curva de Sierpinsk.	57
35	Triângulo de Sierpinsk.	58
36	Tapete de Sierpinsk.	58
37	Órbita de $f(x)$	59
38	$c = 1 - \phi$	61
39	$c = (\phi - 2) + (1 - \phi)i$	61
40	$c = 0,285$	62
41	$c = 0,285 + 0,01i$	62
42	$c = 0,45 + 0,1428i$	63
43	$c = -0,70176 - 0,3842i$	63
44	$c = -0,835 - 0,2321i$	64
45	$c = -0,8 + 0,156i$	64
46	Conjunto de Mandelbrot para $f(z) = z^2 + c$	68
47	Conjunto de Mandelbrot para $g(z) = z^3 + c$	68
48	Conjunto de Mandelbrot para $h(z) = z^4 + c$	69
49	Conjunto de Mandelbrot para $i(z) = z^5 + c$	69
50	Dimensão da reta.	70
51	Dimensão do plano.	70
52	Dimensão do cubo.	71
53	Pirâmide.	79
54	Paralelepípedo.	80
55	Prisma.	81
56	Pirâmide Regular.	81
57	Prisma Regular.	81
58	Triminó.	83
59	Ilha de Koch no Geogebra.	85
60	Finalizando a primeira iteração da ilha de Koch.	85
61	Segunda iteração da ilha de Koch.	86
62	Curva de Sierpinsk com 8 iterações.	87
63	Curva de Hilbert com 7 iterações.	88
64	Curva de Koch com 8 iterações.	88
65	Curva de Peano com 8 iterações.	89
66	Triângulo de Sierpinsk com 8 iterações.	89

Sumário

1	Introdução	15
2	Recortes de História das Geometrias	17
2.1	A Geometria pré-helênica	17
2.2	A Geometria Helênica	18
2.3	Espaços Curvos	21
2.4	Fractais	23
3	Conceitos Preliminares	24
3.1	Números Reais	24
3.2	Números Complexos	25
3.3	Conceitos básicos de Geometria Plana	26
3.3.1	Área	27
3.4	Função	29
3.4.1	Função Iterativa	29
3.4.2	Representação gráfica da órbita de f	30
3.5	Dimensão	30
3.5.1	Dimensão Topológica	31
3.5.2	Dimensão de Capacidade	31
3.5.3	Dimensão de Fractais	31
3.6	Geogebra	31
4	Geometria Euclidiana	33
4.1	Noções Primitivas e Postulados	34
4.2	Paralelismo de Retas	36
4.3	Paralelismo de Reta e Plano	38
4.4	Planos paralelos e Proporcionalidade	40
4.5	Perpendicularismo de Reta e Plano	41
4.6	Aplicação: Distâncias	42
4.7	Esfera	43
4.8	Noção de Volume	44
4.8.1	Cálculo de Volume dos Sólidos	45

5	Geometria Não Euclidiana	49
5.1	Geometria Hiperbólica	51
6	Geometria Fractal	53
6.1	Definições	53
6.2	Fractais Tradicionais	54
6.2.1	Conjunto de Cantor	54
6.2.2	Curva de Peano	55
6.2.3	Curva de Hilbert	56
6.2.4	Curva de Koch	56
6.2.5	Curva, triângulo e tapete de Sierpinski	57
6.3	Funções Iterativas	58
6.4	Gaston Julia	60
6.5	Conjunto de Mandelbrot	66
6.6	Dimensão	70
6.6.1	Dimensão de fractais	71
6.6.2	Qual é o significado de uma dimensão fracionaria?	73
7	Ensino de Geometria	74
7.1	O Ensino da Geometria no Brasil	75
7.2	Normas Regulamentares do Ensino Básico	76
8	Geometria Espacial em sala de aula	78
8.1	Uso do Software Geogebra	78
9	Geometria Fractal em sala de aula	82
9.1	Uso da Linguagem Java	86
10	Considerações Finais	91
11	Apêndice	95
11.1	Linguagem Java	95
11.1.1	Curva de Koch	96
11.1.2	Curva de Peano	96
11.1.3	Conjunto de Julia	97

1 Introdução

A geometria é o ramo da matemática que se preocupa com as questões de forma, tamanho e posição relativa entre as figuras. Ela surgiu em diversas culturas como um conjunto de conhecimentos práticos como na cobrança os impostos, e posteriormente foi formalizada por Euclides. O desenvolvimento do plano cartesiano, possibilitou aos problemas de matemática como por exemplo os de Álgebra, serem representados geometricamente e vice e versa, surgindo assim simplificações das soluções, pois ajudava a visualizar as soluções. A sua influência sobre as ciências foi enorme em vários campos do conhecimento como na Física, Química, Geologia, Astronomia, Engenharia, Biologia, Navegação, Cartografia, Fotografia, entre outros.

O conhecimento geométrico foi, e é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio do ser humano. Com ele, podemos perceber sobre as forma geométricas dos objetos ao nosso redor como em casas, edifícios, carros, plantas, entre outros. Tudo a nossa volta tem uma forma, que pode ser percebida de alguma maneira pela geometria. Uma bola de futebol, por exemplo, ao projetar em um plano, sua projeção gera um círculo, se observar sua sombra sobre uma superfície plana, poderá se tornar uma elipse, e no espaço, ela é uma esfera.

O principal problema segundo [8] para a defasagem do aprendizado de Geometria nas escolas, é a dificuldade encontradas na transição da Geometria Plana para Geometria Espacial. Além de parecer algo distante da realidade vivida pelos alunos, o que faz com que eles não se interessarem pelos métodos tradicionais de ensino-aprendizagem que se tornaram desmotivastes em relação aos recursos tecnológicos que passaram a fazer parte da vida dos adolescentes inseridos no processo de globalização. Tendo em vista esse dilema, devem-se buscar novas abordagens para conseguir ensinar os conhecimentos necessários para os alunos.

O desenvolvimento do ensino de Geometria no decorrer dos anos, necessita do entendimento de vários teoremas e definições que são ensinadas. Por isso, deve-se buscar outras formas de ensinar para dinamizar o ensino e tornar a aprendizagem mais agradável e significativa, como por exemplo o uso de jogos, de materiais concretos, de software, ou mesmo apropriar de novos saberes com metodologias inovadoras que possibilitem relacionar o cotidiano dos alunos com o novo saber.

Neste trabalho vamos apresentar alguns dos conteúdos da Geometria Espacial de forma concreta, isto é, construir as figuras geométricas assim que tiver a base teórica para tal construção. Em uma breve apresentação, vamos apresentar alguns dos

fractais tradicionais e os conceitos de Geometria Fractal, além disso, iremos apresentar algumas sugestões didática para a aplicação em sala de aula.

No segundo capítulo apresentamos uma pesquisa sobre a história da Matemática, com foco na Geometria. Dividiu-se em quatro seções, sendo que a primeira é a história da Geometria no período pré-helênico, a segunda no período helênico, o terceiro na descoberta dos espaços curvos e o quarto a Geometria Fractal.

No terceiro capítulo tem-se resumo de alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Os conceitos como a desigualdade triangular dos números reais, a representação gráfica dos números complexos, alguns teoremas e conceitos da Geometria Plana, conceitos de função e alguns comandos para a execução do programa Geogebra serão apresentados de forma sucinta.

No quarto capítulo discorre-se sobre a Geometria Espacial buscando apresentar as figuras assim que apresentem os conceitos prévios para a sua construção. Desde a construção de pirâmides até a construção de sólidos regulares.

No quinto capítulo discorre-se sobre a ideia inicial da Geometria Não Euclidiana, e como exemplo, utiliza a Geometria Hiperbólica, e apresenta alguns dos conceitos preliminares até a soma dos ângulos internos de um triângulo nesta Geometria.

No sexto capítulo discorre-se sobre a Geometria Fractal, e apresenta os fractais tradicionais, que originaram o estudo da Geometria Fractal, também apresenta-se os conjuntos de Julia e Mandelbrot.

No sétimo capítulo traz-se uma análise do Ensino de Geometria no Brasil, baseado nos PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais).

No oitavo capítulo apresenta-se algumas ideias para a didática do ensino de Geometria Espacial, sugerindo-se o uso de Software no seu o ensino.

No nono capítulo apresentam-se algumas ideias para a didática do ensino de Geometria Fractal e utiliza-se uma das formas que é o uso de Software para introduzir a Geometria Fractal como forma de relacionar os conteúdos aprendidos para a construção de fractais.

2 Recortes de História das Geometrias

Neste capítulo, apresentamos alguns recortes da história da Matemática envolvendo a Geometria, pois segundo [29], é importante conhecer os elementos fundamentais que levou a importância do ensino de Geometria na matemática, principalmente para alguma proposta de inovação no ensino de matemática.

2.1 A Geometria pré-helênica

A raiz dos avanços do conhecimento sobre Geometria nos remete a tempos da pré-história, onde concepções de números e formas são documentadas da era paleolítica. Assumiu-se que começaram nessa era, pois alguns macacos tem a habilidade de saber um pouco sobre números. Antes do surgimento da escrita, o homem neolítico já mostrava preocupações com relações espaciais através de seus desenhos, mostrando exemplos de congruências e simetrias, mais detalhes em [29]. O homem neolítico também revelou um agudo sentido para os padrões geométricos, seus desenhos nas cerâmicas mostraram uma tentativa de formar números triangulares, mais detalhes em [30].

Os primeiros passos na direção da construção da matemática foram tomados aproximadamente no sexto milênio a.C., quando as pessoas começaram a abandonar a vida nômade formando cidades próximas de rios, e a observar os períodos de enchente e seca do rio Nilo e o Tigre-Eufrates, isto aconteceu em meados dos tempos neolíticos, e aos poucos formou a base do calendário e da vida egípcias, para mais detalhes veja [24].

Em 3.500 a.C., os egípcios já tinham dominado uma indústria de pequena escala de trabalhos manuais e metalúrgicos. Assim, começaram a cobrar os impostos, e isso foi, talvez, o primeiro impulso para o desenvolvimento da Geometria, pois os impostos eram determinados de acordo com a altura da enchente e na área da superfície das propriedades. Os métodos de calcular a área de quadrado, retângulo e trapezoide eram bastante confiáveis. No entanto, para o cálculo da área do círculo, este era considerado semelhante a um quadrado de lados iguais a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo, isto permitia calcular a área do círculo com erro de apenas 0,6%. Além disso, usando apenas cordas e pedras pesando mais de duas toneladas, os egípcios conseguiram construir pirâmides de base quadrada de cerca de 145 metros de altura. Usando apenas alguns nós na corda, conseguiram verificar o ângulo reto através das medidas conhecidas como termos pitagóricos, mais detalhes em [24].

Por volta de 2.000 e 1.700 a.C., entre os rios Tigre e Eufrates, os babilônios desenvolveram um sistema de matemática consideravelmente mais sofisticado do que o dos egípcios. Seus métodos eram expressos como enigmas. Registraram trinca baixas para os termos pitagóricos como 3, 4, 5 ou 5, 12, 13 assim como outras maiores, como 3456, 3367, 4825. Por isso, conclui-se que conheciam pelo menos o suficiente de teoria dos números para gerar esses trios, para mais detalhes veja [24].

2.2 A Geometria Helênica

Segundo [6], as contribuições dos egípcios e babilônios aos gregos limitou-se a fornecer apenas uma coleção de fatos matemáticos e suas regras práticas. A matemática grega era mais do que algoritmos para calcular volume, área ou valor dos impostos, era raciocínio lógico dedutivo.

Segundo [24], é creditado ao filósofo grego chamado Tales de Miletus a preparação do cenário para as grandes descobertas dos pitagóricos e para “Os Elementos” de Euclides. Ele buscou explicações teóricas para os fatos descobertos empiricamente pelos egípcios. Com tal compreensão, foi capaz de deduzir técnicas geométricas, por exemplo, empregando conhecimento das propriedades dos triângulos semelhantes conseguiu medir a altura das pirâmides egípcias. Tales deu os primeiros passos para a sistematização da Geometria e foi o primeiro a demonstrar os teoremas geométricos e, séculos mais tarde, Euclides juntaria estes no livro Os Elementos. Tales também inventou o primeiro sistema de raciocínio lógico. Foi o primeiro a considerar o conceito de congruência de figuras espaciais. Quando Tales era um (frágil) homem velho, ele encontrou o ainda jovem Pitágoras de Samos. Sabemos pouco do que Tales realmente disse a Pitágoras, mas certamente ele foi uma grande influência sobre este jovem gênio.

Pitágoras aceitou a recomendação de Tales de ir ao Egito. Estudou a matemática egípcia e babilônica. Quando voltou a Samos, precisou apenas de seguidores para fundar a escola pitagórica e continuar a se auto-promovendo, até que sua cidade foi atacada, e a sociedade pitagórica foi desfeita, veja mais detalhes em [24]. Segundo [6], a fundação da escola pitagórica foi um dos grandes passos para a evolução da Geometria, pois ela foi responsável por estabelecer o que se conhece por método postulacional, isto é, as afirmações são provadas por raciocínio dedutivos a partir de postulados ou axiomas.

Por volta de 300 a.C., no litoral do mar Mediterrâneo na Alexandria, viveu um homem chamado Euclides cuja abordagem de sua obra deu nova forma à filosofia

e definiu a natureza da matemática até o século XIX. Nada se sabe sobre sua história, mas o mais importante foi o seu método lógico inovador. Baseia-se em três passos: tornar explícitos os termos; tornar explícitos os conceitos apresentando e finalmente deduzir as consequências lógicas do sistema. Toda sua Geometria se baseia nos cinco postulados seguintes

- (I.) Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos;
- (II.) Qualquer segmento de reta finito pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
- (III.) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio;
- (IV.) Todos os ângulos retos são iguais entre si;
- (V.) Ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos.

Euclides publicou Os Elementos que foi preservado pela biblioteca de Alexandria, mais detalhes em [24].

Segundo [30], como o Egito ocupava uma posição central em relação ao mundo mediterrâneo, a nova capital Alexandria se tornou o centro da matemática, ciência e filosofia grega e o centro econômico do mundo helenístico.

Em 212 a.C. Erastóstenes de Cirena, um funcionário da biblioteca, tornou-se a primeira pessoa a calcular a circunferência da Terra. Usando duas varas no chão, e um teorema do livro de Euclides foi o suficiente para calcular a circunferência da Terra com erro em torno de 4%. Aristarco de Samos utilizou cálculos geométricos para calcular com aproximação razoável o tamanho e a distância da Lua a Terra, veja mais detalhes em [24].

Arquimedes, descobriu o princípio da alavanca, da flutuação e fez muitas outras contribuições à Física e Engenharia. Em todos os seus trabalhos, ele combinou uma originalidade de raciocínio surpreendente com uma mestria de técnica de cálculo e rigor nas demonstrações, para mais detalhes consulte [30].

Segundo [12], Apolônio, embora fosse um astrônomo notável, sua fama se deve principalmente a sua obra “Secções Cônicas”, graças à qual seus contemporâneos lhe deram o codinome de “O Grande Geômetra”. Dos oito livros escritos, apenas sete

sobreviveram até hoje. Segundo [6], o auge do desenvolvimento da Geometria se deu com Euclides, Arquimedes e Apolônio.

Por volta do século II d.C., os campos da matemática, física, cartografia e engenharia tinham feito grandes avanços. Já tinha-se inventado a lógica e a demonstração, trigonometria e a Geometria, e um tipo de cálculo, entre outros conhecimentos. Porém, aconteceram eventos em Alexandria que atrasaram o progresso iniciado pelos gregos durante um milênio como por exemplo, os novos governantes que não valorizavam a ciência, o que levou a destruição da biblioteca, e com ela quase tudo o que fora produzido. Com a queda de Roma, em 476 d.C., a Europa herdou grandes templos de pedra, teatros e mansões, porém pouco em termos de realização intelectual. Por volta de 800 d.C., existiam somente fragmentos de uma tradução de Os Elementos em latim colocados em uma coleção de textos sobreviventes. A tradição grega de abstração e demonstração parecia perdida, para mais detalhes veja em [24].

Segundo [6], após os gregos, a Geometria sai de foco, e até o século XI eram os hindus e os árabes quem desenvolviam a matemática, dando pouca ênfase a Geometria.

Segundo [30], durante os primeiros séculos do feudalismo ocidental, a matemática não era muito importante. Apenas com a extensão do comércio que o interesse pela matemática se espalhou lentamente. O desenvolvimento da matemática se deu baseado pelo crescimento das cidades mercantis sob influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura, que era Métodos de Contagem e Aritmética. Apenas com a queda de Constantinopla que conduziu muitos sábios gregos às cidades ocidentais, aumentando o interesse pelos textos gregos originais, buscando assim suas traduções.

Estudiosos começaram a caça ao conhecimento perdido, como Adelard de Bath que viajou disfarçado de estudante mulçumano e traduziu Os Elementos de Euclides com demonstrações. Um século mais tarde Leonardo de Pisa trouxe a ideia do zero. Assim o influxo de conhecimento grego antigo alimentou as novas universidades. Porém a ciência era uma mistura de conhecimento antigo entrelaçado com a religião, a superstição e o sobrenatural, para mais detalhes [24].

Por volta da metade do século XIV, Nicole d'Oresme inventou o uso de gráfico para representar uma magnitude variável que dependesse de outra. Concentrou-se em como as suas novas figuras poderiam ser usadas para analisar relações quantitativas. E também tocou em uma questão central: a curva ou qualquer outra forma feita pelo gráfico de uma coleção de dados, ou de uma função, tem alguma significância gráfica

ou geométrica. O estudo das linhas e das superfícies torna-se o estudo de funções particulares, e vice-versa, assim atingiu-se uma unificação entre Geometria e Aritmética. Ele empregou a sua nova técnica geométrica para demonstrar uma das mais famosas leis de física conhecida naquele tempo, a lei de Merton: “A distância percorrida por um objeto acelerando uniformemente do seu repouso é igual à distância percorrida por um objeto movendo-se no mesmo tempo com a metade de sua velocidade máxima”, para mais detalhes consulte [24].

Em 1596 nasceu um dos maiores filósofos e arquiteto da revolução que seguia em matemática, René Descartes. Formou-se em direito, se alistou no exército, e em 1618 na pequena cidade de Breda, na Holanda, se deparou com um anúncio na rua, tratava-se de um desafio matemático. Ao resolvê-lo, Descartes fez amizade com Isaac Beeckman, que era um dos maiores matemáticos holandeses na época. Descartes criticou as obras gregas, pois segundo ele, cada nova demonstração parecia fornecer um desafio singular, que só podia ser superado cansando imensamente a imaginação. Estudando as curvas gregas clássicas, Descartes descobriu padrões surpreendentes, que Oresme não conseguiu pela falta de uma notação melhor. O método de Descartes de associar a Álgebra e a Geometria equivale a uma generalização das ideias de Oresme. Descartes utilizou sua percepção geométrica para formular a lei da refração da luz na sua forma trigonometria atual. Seus métodos geométricos foram tão importantes na sua percepção que ele escreveu “Minha física toda nada mais é do que Geometria”. Descartes publicou um livro com o título : *Projeto para uma ciência universal que possa elevar nossa natureza ao seu mais alto grau de perfeição. A seguir, a dióptrica, os meteoros e a Geometria, onde os assuntos mais curiosos que o autor pode encontrar para demonstrar a ciência universal que ele propõe são explicados de tal maneira que até aqueles que nunca estudaram podem entendê-los*, e hoje é referida como *Discurso sobre o Método*, para maiores detalhes, o leitor pode verificar em [24].

2.3 Espaços Curvos

Segundo [2], Euclides foi cauteloso ao utilizar o quinto postulado. Isto levantou questionamentos, e surgiu a curiosidade de saber se o último postulado era realmente necessário, se ele não poderia ser deduzido dos outros postulados. As conclusões obtidas foram surpreendentes e vão de encontro com a intuição de vários matemáticos fazendo-os desistirem da tentativa de demonstrar o quinto postulado.

Em 1792, um menino de 15 anos chamado Carl Friedrich Gauss suspeitou

que o quinto postulado fosse independente e assim descobriu uma nova Geometria. Assim a matemática e a física entraram em uma nova era. Os cinquenta anos seguintes foram anos de uma revolução secreta. Gradualmente, em diversos países foram descobertos novos tipos de espaços, mas ou não eram revelados ou não eram notados pela comunidade de matemáticos, veja em mais detalhes em [24].

Gauss ingressou na sua primeira escola com idade de sete anos. No seu terceiro ano na escola, permitiram que estudasse a aritmética, para o qual já estivera capacitado com idade de dois anos. Seu professor comprou o mais avançado livro-texto em aritmética disponível. Infelizmente, o livro não ofereceu desafio a Gauss. Seu professor designou seu talentoso assistente de 17 anos para estudar com Gauss, aperfeiçoando as demonstrações dos livros-textos existentes na época, para mais detalhes consulte [24].

Entre 1813 e 1816, Gauss fez o rompimento de barreiras definitiva para o desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas, desenvolvendo equações que relacionavam as partes de um triângulo num espaço Não-Euclidiano, cuja estrutura denominamos de Geometria Hiperbólica. Nem Gauss, nem Lobachevsky e nem Bolya conseguiram descobrir qualquer modo simples de visualizar este novo espaço. Isso foi realizado por Eugênio Beltrami, e de forma mais simples por Henri Poincaré que então interpretou os postulados da Geometria Hiperbólica através de entidades concretas. Algumas décadas depois foi descoberto o espaço elíptico. Os dez anos a partir de 1816, Gauss dirigiu um grande esforço para fazer o levantamento geodésico na Alemanha. Uma das dificuldades enfrentadas foi produzir um mapa bidimensional a partir de dados tridimensionais influenciados pelas variações nas elevações bem como pela curvatura da Terra. Em 1827 Gauss publicou em um trabalho os detalhes técnicos desse trabalho que hoje chamamos de Geometria Diferencial, mais detalhes em [24].

Segundo [30], em 1850, Riemann apresentou dois artigos fundamentais, um sobre séries trigonométricas e os fundamentos da análise e o outro sobre os fundamentos da geometria que se tornou-se a pedra angular da teoria geral da relatividade de Einstein.

Albert Einstein, apesar de ser rejeitado pela escola, ter uma péssima formação, conseguiu concluir seu doutorado na Universidade de Zurique. Em 1905, enquanto trabalhava integralmente, suas ideias afloraram, publicando cinco dos seis artigos naquele ano, dentre eles, um aplicou o novo conceito quântico de Plank como se fosse uma lei universal, dando assim início à história da teoria quântica. O ex-professor de Einstein, fez uma importante contribuição ao dar um seminário no qual introduziu a

Geometria e a ideia de tempo como a quarta dimensão na teoria da relatividade, veja em [24].

Outra teoria chamada de teoria das cordas afirma que existem dimensões adicionais do espaço, tão pequenas que qualquer espaço livre que tivermos nelas, não é observável em experiências atuais. Com isso, a Física retornou para sua parceira, a matemática. Ainda que a teoria das cordas seja mal compreendida, ela já evoluiu para teoria M, que parece estar nos levando à conclusão de que o espaço e o tempo não existem realmente, mas são apenas aproximações de algo muito complexo. A teoria M parece ter a propriedade de que aquilo que percebemos como posição e tempo, são realmente estruturas matemáticas conhecidas como matrizes. Esta é a mudança mais profunda no conceito de espaço desde Euclides, para mais detalhes, o leitor pode verificar em [24].

2.4 Fractais

Alguns matemáticos encontraram algumas formas geométricas que a Geometria Euclidiana não conseguia descrever. Estes objetos foram denominados de “monstros matemáticos”. Em 1872, Karl Weierstrass encontrou um exemplo de uma função contínua em todo seu domínio, mas diferenciável em nenhuma parte. Em 1904, Helge von Koch, deu uma definição mais geométrica de uma função similar, mas foi na década de 60 que Beinoit Mandelbrot, com o auxílio da computação foi quem iniciou o estudo dessas entidades geométricas, veja em [32].

Segundo [23], Mandelbrot não suportou o predomínio da abstração imposta pelos seguidores de Bourbaki, deixando a França em 1948 e ingressou na IBM. Eeparando com o problema dos ruídos nas linhas telefônicas, o resolveu usando um trabalho antigo de Georg Cantor e procurou modelos para aplicar suas ideias. Esta ciência só se desenvolveu com o auxílio da computação. Com a sua ajuda podemos descrever muitos objetos extremamente irregulares do mundo real. Suas técnicas estão sendo empregadas para compactação de imagens, animação digital e encontram aplicações artísticas variadas.

3 Conceitos Preliminares

Neste capítulo iremos introduzir alguns conceitos importantes que serão utilizados para o desenvolvimento do trabalho. Começaremos pelos números Reais, números Complexos, alguns teoremas e definições importantes da Geometria Plana, e a função iterativa, que será fundamental para o desenvolvimento dos fractais Julia e Mandelbrot.

3.1 Números Reais

A definição apresentada aqui pode ser encontrada em [17]

O conjunto dos números Reais (representado por \mathbb{R}) é um corpo, isto é, são definidas em \mathbb{R} duas operações, chamadas adição (+) e multiplicação (\cdot), que satisfazem:

1. Associatividade: para cada $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2. Comutatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.
3. Elemento neutro: existem em \mathbb{R} dois elementos distintos 0 e 1 tais que $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$.
4. Inverso: todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ e, se $x \neq 0$, existe um inverso multiplicativo $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
5. Distributividade: para $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

O conjunto \mathbb{R} é um corpo ordenado, isto é, existe um conjunto \mathbb{R}^+ chamado reais positivo, tais que se $x, y \in \mathbb{R}^+$ então $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$ e dado $x \in \mathbb{R}$ uma das três alternativas ocorre ou $x = 0$ ou $x < 0$ ou $x > 0$.

A relação de ordem em \mathbb{R} permite definir o valor absoluto de um número real $|x| = \max\{-x, x\}$. Assim $-|x| \leq x \leq |x|$. O teorema seguinte é conhecido como desigualdade triangular.

Teorema 3.1. *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.*

Demonstração. Sabemos que $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$, somando membro a membro as desigualdades, temos $|x| + |y| \geq x + y$. Analogamente de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$ temos $|x| + |y| \geq -(x + y)$, assim $|x| + |y| \geq |x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\}$.

Por outro lado, de $|x| = |-y + (x + y)| \leq |-y| + |x + y|$ demonstrado anteriormente, temos $|x| \leq |y| + |x + y|$ logo $|x| - |y| \leq |x + y|$. \square

3.2 Números Complexos

A definição apresentada aqui pode ser encontrada em [7].

O conjunto dos números complexos (representado por \mathbb{C}) é um corpo, com as operações de adição (+) e de multiplicação (\cdot), que satisfazem:

1. Associatividade: para cada $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, tem-se $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
2. Comutatividade: para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tem-se $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
3. Elemento neutro: existem em \mathbb{C} dois elementos distintos 0 e 1 tais que $z + 0 = z$ e $z \cdot 1 = z$.
4. Inverso: todo $z \in \mathbb{C}$ possui um inverso aditivo $-z \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$ e, se $z \neq 0 + 0i$, existe um inverso multiplicativo $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1$.
5. Distributividade: para $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, tem-se $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.
6. Existe um número complexo i tal que $i^2 = -1$.
7. Todo número complexo z pode ser escrito de uma maneira única na forma $a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Notação: Usaremos uma letra $z = a + bi$ para indicar um número complexo.

Da definição adotada, podemos pensar no número complexo $z = a + bi$ como o ponto (a, b) do plano, cujas coordenadas são a e b . Como exemplo veja o número $z = 2 + 3i$ na Figura 1.

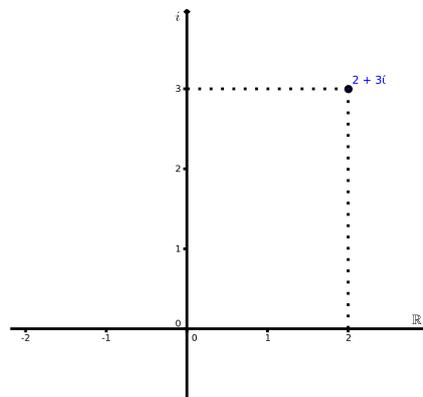


Figura 1: Representação gráfica do $z = 2 + 3i$.

O módulo de um número $z \in \mathbb{C}$ é representado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que é distância do ponto z ao ponto $(0, 0)$.

3.3 Conceitos básicos de Geometria Plana

No que segue, usaremos as notações e definições dessas referências [3] e [11].

A geometria se baseia construção de definições e axiomas ou postulados. Cada postulado é uma sentença que não é provada ou demonstrada e é considerado como um consenso inicial para a construção da teoria. Assim os postulados servem como ponto inicial para a dedução dos teoremas, corolários e proposições.

Partiremos do princípio que o leitor já tem alguns conhecimentos prévios como a noção de ponto, definição de reta, ideia de plano, distância entre pontos, ângulos entre retas, congruência de segmentos e ângulos e proporcionalidade entre números. Para mais detalhes, consulte bibliografias como [3] e [11].

Definição 3.2. *Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. A circunferência de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $\overline{AB} = r$.*

O comprimento C da circunferência é dado pela expressão:

$$C = 2\pi r.$$

Proposição 3.3. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.*

Teorema 3.4. *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .*

Sua demonstração pode ser encontrada em [3].

Definição 3.5. *Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$. Diremos que dois ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes se eles têm a mesma medida.*

Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais. Se ABC e DEF são triângulos semelhantes e se $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$ e $C \rightarrow F$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então vale as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$$

A seguir temos um resultado importante para a Geometria que é o Teorema de Tales, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 3.6. *Se duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados nas transversais são proporcionais.*

Os triângulos são classificados de acordo com os seus lados e ângulos: equilátero (com todos os ângulos e lados iguais); isósceles (com dois ângulos e lados iguais); escaleno (todos os ângulos e lados diferentes); acutângulo (possui todos os ângulos menores que 90°); obtusângulo (possui um ângulo maior que 90°) e retângulo (possui um ângulo de 90°).

Um resultado importante é o Teorema de Pitágoras.

Teorema 3.7. *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

3.3.1 Área

Uma região triangular é um conjunto de pontos do plano formados por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de fronteira da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertencem a sua fronteira é chamado de interior da região triangular.

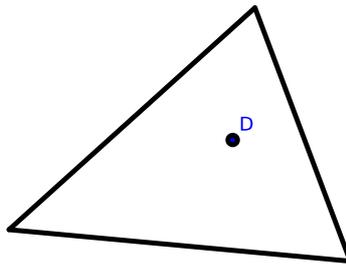


Figura 2: O ponto D é um ponto interior.

Uma região poligonal é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não tem pontos interiores em comum.

Postulado 3.8. *A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.*

O número a que se refere é chamado de área da região. As demonstrações dos teoremas 3.9 e 3.10 podem ser encontradas em [11].

Teorema 3.9. *Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes, isto é, a razão entre os dois é igual à razão entre suas alturas (ou bases)*

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Teorema 3.10. *A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas*

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}.$$

Com os dois teoremas anteriores, podemos definir o cálculo da área de um retângulo.

Proposição 3.11. *Se $ABCD$ é um retângulo então sua área é dada pelo produto $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.*

Demonstração. De fato seja o retângulo de medidas $R(b, h)$ e fixado o quadrado $Q(1, 1)$ como unitário, temos:

$$A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} = b \cdot h.$$

□

Dado o paralelogramo $P(b, h)$, ele é equivalente a um retângulo de base b e altura h , logo

$$A_P = A_R \Rightarrow A_P = b \cdot h.$$

Um paralelogramo de base b e altura h , ao dividi-lo em sua diagonal, podemos observar que gera dois triângulos de base b e altura h , assim:

Proposição 3.12. *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura igual à metade da altura do triângulo. Portanto a área do triângulo em função dos lados é:*

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

onde h_a, h_b, h_c é a altura do triângulo em relação aos lados a, b e c respectivamente.

Definição 3.13. *Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $\overline{AB} \leq r$.*

Teorema 3.14. *A área do círculo é igual à metade do produto do raio pelo comprimento da circunferência.*

A demonstração pode ser encontrada em [3].

3.4 Função

As definições apresentadas aqui podem ser encontradas em [18] e [9].

Entendemos por uma função f uma terna $(A, B, a \rightarrow b)$ onde A e B são dois conjuntos e $a \rightarrow b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único elemento b de B . O conjunto A é o domínio de f , o conjunto b é o contradomínio de f .

Dada a função f , o gráfico da função f no plano cartesiano, é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$.

3.4.1 Função Iterativa

Seja A um conjunto tais que $(A, a \rightarrow b)$, onde $a, b \in A$. Dizemos que uma função iterativa é a aplicação $f(f(x))$ gerando assim um novo valor. Escreveremos $f^j(x)$, $j \in \mathbb{N}$ para denotar a composição da aplicação de f em j vezes, isto é,

$$\begin{aligned} f^1(x) &= f(x) \\ f^2(x) &= f(f(x)) \\ f^3(x) &= f(f(f(x))) \\ &\vdots \end{aligned}$$

A sequência $p, f(p), f^2(p), \dots$ é chamada de órbita de p .

Definição 3.15. *Dizemos que c é um ponto fixo se $f^n(c) = c$ para todo n .*

Definição 3.16. *Dizemos que c é um ponto periódico se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(c) = c$.*

Definição 3.17. *Dizemos que c é um ponto fixo atrator se existe um intervalo contendo c tal que se $x \in [a, b]$, então $f^n(x) \rightarrow c$, com $n \rightarrow \infty$.*

Definição 3.18. *Dizemos que c é ponto repulsor se para $n \rightarrow \infty$ temos $|f^n(c) - c| \rightarrow \infty$.*

3.4.2 Representação gráfica da órbita de f

Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e $x \in \mathbb{R}$. Para descrever a órbita do ponto x , primeiramente, desenhamos a diagonal definida pela linha $y = x$, o próximo ponto na órbita de x , é o número $f(x)$, o gráfico de f nos leva ao ponto $(x, f(x))$ que está diretamente sobre x , logo basta desenhar uma linha vertical do ponto (x, x) da diagonal até o gráfico de f , o ponto de intersecção tem y -coordenada $f(x)$. Agora desenhando uma linha horizontal, encontramos o ponto $(f(x), f(x))$. Fazendo esse procedimento, encontramos a órbita de x . Assim a órbita de x aparecerá ao longo da diagonal. Veja a Figura 3 para $x_0 = 0,3$ e $x_1 = 1,2$.

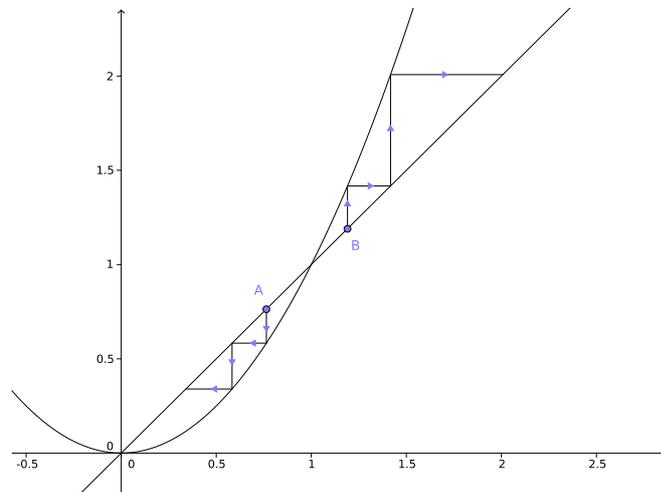


Figura 3: Iteração sobre a função $f(x) = x^2$.

Assim vemos que para a função $f(x) = x^2$, os pontos x tais que $|x| > 1$ são pontos repulsores, enquanto que os pontos $|x| < 1$ possuem órbitas que tende a 0, isto é, $f^n(x) = 0$ com $n \rightarrow \infty$. Portanto, 0 é um ponto fixo atrator.

3.5 Dimensão

A noção de dimensão, é uma questão fundamental. Discutiremos sobre a dimensão topológica e dimensão de capacidade. Para mais detalhes consulte ??.

3.5.1 Dimensão Topológica

Um objeto tem n dimensões quando podemos dividi-lo por meio de cortes efetuados por objetos de $(n - 1)$ dimensões.

Definição 3.19. *Um ponto possui dimensão zero.*

Assim a reta tem dimensão 1, pois ela é separada por um ponto em duas semirretas. Analogamente o plano tem dimensão 2, pois pode ser separado em dois semiplanos por uma reta.

3.5.2 Dimensão de Capacidade

A dimensão denominada capacidade foi definida por Kolmogorov e mede o quanto o conjunto ou objeto preenche o espaço em que está imerso.

Definição 3.20. *A capacidade de um conjunto é definido como*

$$d_{cap} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\log n(f)}{\log f}.$$

onde $n(f)$ é o número mínimo de cubos elementares necessários para cobrir o conjunto considerado e f é a dimensão linear do cubo elementar.

3.5.3 Dimensão de Fractais

Diferentemente da dimensão convencional inteira, a dimensão de fractais pode assumir valores fracionários. Assim a dimensão fractal de um conjunto é um valor que diz o quão densamente ocupa o espaço métrico em que ele existe.

Algumas definições de dimensão fractal, como: Dimensão de informação; Dimensão de correlação e Dimensão de Lyapounov podem ser encontradas em [13].

3.6 Geogebra

O Geogebra é um software de Geometria Dinâmica de fácil manuseio, sendo assim o escolhemos como uma ferramenta para apoiar o ensino de Geometria em sala de aula.

O software Geogebra possibilita um vasto conjuntos de comandos ao qual permite trabalhar com diversas proposições e atividades com o aluno, mas nesta seção, iremos apenas ilustrar alguns comandos que será necessários para a construção das

figuras geométricas nas seções seguintes. Para um tutorial mais completo, consulte [14].

Alguns comandos que serão utilizados para a construção das figuras no decorrer do trabalho serão ilustrados nas Figuras 4 a 15:

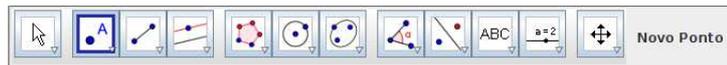


Figura 4: Novo Ponto.

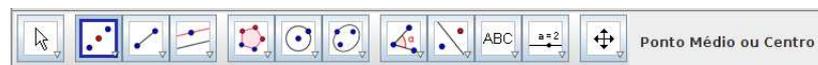


Figura 5: Ponto Médio ou Centro.

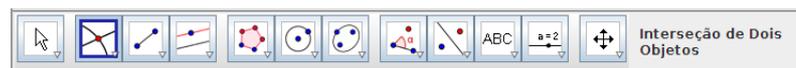


Figura 6: Intersecção de Dois Objetos.

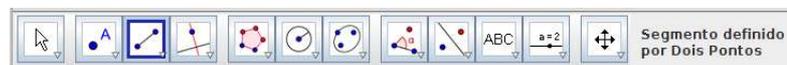


Figura 7: Segmento definido por Dois Pontos.



Figura 8: Reta definida por Dois Pontos.



Figura 9: Reta Paralela.

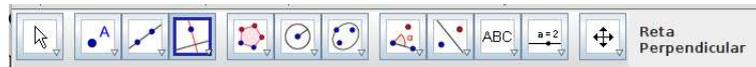


Figura 10: Reta Perpendicular.



Figura 11: Polígono Regular.

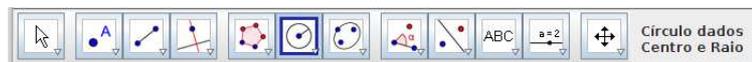


Figura 12: Círculo dados Centro e Raio.



Figura 13: Ângulo com Amplitude Fixa.

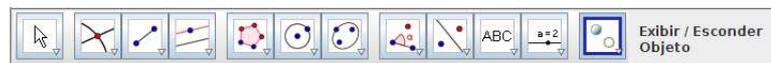


Figura 14: Exibir/Esconder Objeto.

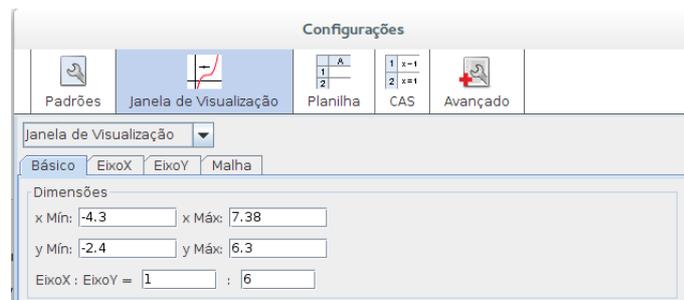


Figura 15: Janela de Visualização.

4 Geometria Euclidiana

Por volta de 600 a.C. os gregos introduziram a dedução na Geometria, dando origem a uma Geometria demonstrativa. A principal obra que se destacou foi os Elementos de Euclides, que descreve a Geometria intuitiva do espaço em 13 volumes. Euclides utilizou cinco postulados para demonstrar os teoremas da Geometria que escreveu.

O quinto postulado foi usado com muito cuidado, abriu espaço para perguntas e questionamentos. Ele era necessário ou poderia ser deduzido através dos outros quatro? Através de várias tentativas de prová-lo, tentaram por absurdo para chegar a uma contradição, porém não foi possível. Essa tentativa deu origem as Geometrias Não Euclidianas.

Sem o quinto postulado, não teríamos o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, toda a teoria dos triângulos semelhantes, e conseqüentemente toda a trigonometria deixariam de existir, e o tratamento dado por Euclides para o conceito de área teria de ser amplamente revisto. Isto marca a diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Não Euclidiana. O leitor interessado consulte ??.

A seguir abordaremos a Geometria Espacial, nas referências ?? e ?? o leitor encontra mais detalhes das seções seguintes.

4.1 Noções Primitivas e Postulados

A Geometria Espacial examina as propriedades de figuras que são construídas a partir de certos elementos básicos do espaço: pontos, retas e planos. Iniciamos com propriedades básicas a respeito de retas e pontos.

Postulado 4.1. *Por dois pontos distintos do espaço passa uma e somente uma reta.*

Postulado 4.2. *Dada uma reta do espaço, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.*

A seguir as propriedades básicas a respeito de pontos e planos.

Postulado 4.3. *Por três pontos do espaço não situados na mesma reta passa um e somente um plano.*

Postulado 4.4. *Dado um plano no espaço, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não pertencem ao plano.*

Postulado 4.5. *Se uma reta tem dois de seus pontos em um plano, então ela está contida nesse plano.*

Devido ao Postulado 4.5, podemos observar que uma reta e um plano no espaço só podem ter uma das seguintes posições relativas: a reta pode estar *contida* no plano; a reta pode ser *secante* ao plano (se ela possui um único ponto em comum com o plano); ou pode ser *paralela* ao plano (se não possui ponto em comum com o plano).

Partindo do Postulado 4.3, e com o Postulado 4.5, podemos determinar um plano da seguinte forma.

Teorema 4.6. *Por uma reta r e um ponto A exterior a esta reta, passa um único plano. Por duas retas concorrentes s e t passa um único plano.*

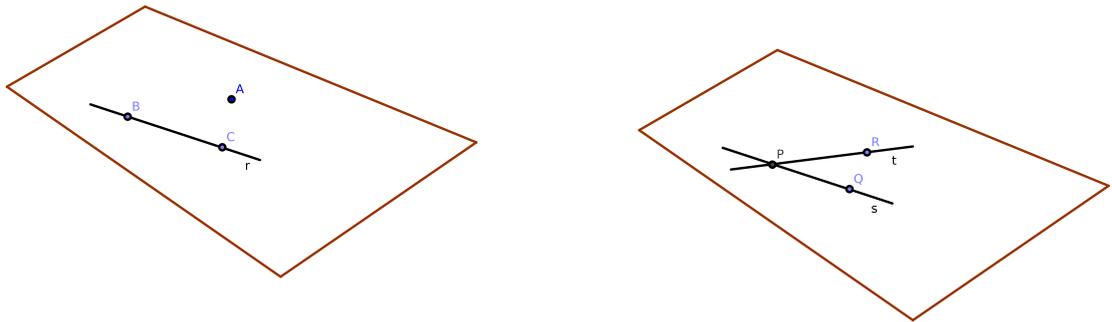


Figura 16: Determinação do plano.

Demonstração. De fato, sejam B e C dois pontos distintos da reta r , conforme a figura 16. Pelo Postulado 4.3, existe um único plano passando por A, B e C . Mas pelo Teorema 4.5, este plano contém a reta r . A segunda parte é semelhante. \square

Assim podemos verificar que se dois planos α e β têm dois pontos em comum, então eles tem em comum pelo menos a reta r definida por estes dois pontos. Se existir algum ponto C comum aos planos α e β , e não situado em r , então os planos α e β são *coincidentes*.

Postulado 4.7. *Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos mais um ponto em comum.*

Concluimos que existem apenas três posições relativas para dois planos do espaço: eles podem ser coincidentes; ser *paralelos* (quando não tem ponto em comum); ou podem ser *secantes* (quando tem uma reta em comum).

O Teorema 4.8, expressa a propriedade que um plano tem de separar um espaço. Ele é muitas vezes adotado no lugar do Postulado 4.7, como um postulado capaz de caracterizar a tridimensionalidade do espaço. O leitor pode encontrar a demonstração em [8].

Teorema 4.8. *Todo plano divide o espaço em dois semi-espacos que têm a seguinte propriedade: se dois pontos A e B estão em um mesmo semi-espaco, então o segmento \overline{AB} está contido nesse semi-espaco e não corta o plano; se os pontos A e B estão em semi-espacos distintos, o segmento \overline{AB} corta o plano.*

Com essas definições podemos começar a definir as figuras geométricas mais conhecidas. Começaremos pelo cone.

Definição 4.9. *Considere uma figura plana F e um ponto P situado fora do plano F . A reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F é chamado de cone. Um cone cuja base é um polígono chama-se pirâmide.*

Com essas definições e teoremas, podemos construir a pirâmide.

Construção de pirâmides: Considere um polígono plano com vértices A_1, A_2, \dots, A_n e um ponto V exterior ao plano do polígono. Traçamos os segmentos $\overline{VA_1}, \overline{VA_2}, \dots, \overline{VA_n}$. Cada dois vértices consecutivos de A_1, A_2, \dots, A_n determina com V um triângulo. Esses triângulos juntamente com o polígono $A_1A_2 \dots A_n$, delimitam uma região do espaço, que é a pirâmide de base $A_1A_2 \dots A_n$ e vértice V , ver a Figura 17 para o caso onde $n = 6$.

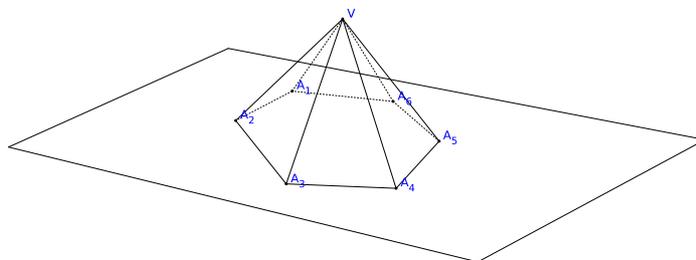


Figura 17: Uma pirâmide hexagonal.

4.2 Paralelismo de Retas

No espaço, duas retas distintas podem ter um ponto em comum ou nenhum. Quando no espaço duas retas tem um ponto em comum elas são chamadas de concorrentes, caso contrário, temos dois casos, que veremos a seguir.

Definição 4.10. *Duas retas do espaço chamam-se paralelas quando não possuem ponto comum mas estão contidas em um mesmo plano. Quando duas retas do espaço não estão contidas no mesmo plano elas são chamadas de retas reversas.*

Esta definição decorre imediatamente o caso de determinação do plano através de duas retas paralelas. Outra consequência é a validação do fato a seguir.

Teorema 4.11. *Por um ponto fora de uma reta se pode traçar uma única reta paralela a ela.*

Demonstração. Seja r uma reta dada e seja A um ponto situado fora de r . Seja α o plano determinado por A e r . Seja s a reta paralela a r em α . Suponha que a reta s' passe por A e é paralela a r . Como r é paralela a s' logo existe um plano α' contendo r e s' . Mas tal plano contém r e A , e portanto coincide com α logo s e s' coincidem, o que mostra a unicidade da reta paralela. \square

Com essas definições e teoremas, podemos construir um paralelepípedo.

Construção de um paralelepípedo: O paralelepípedo $ABCDEFG$ da Figura 18 é um poliedro que pode ser construído a partir de três segmentos de reta não coplanares \overline{FE} , \overline{FG} e \overline{FI} .

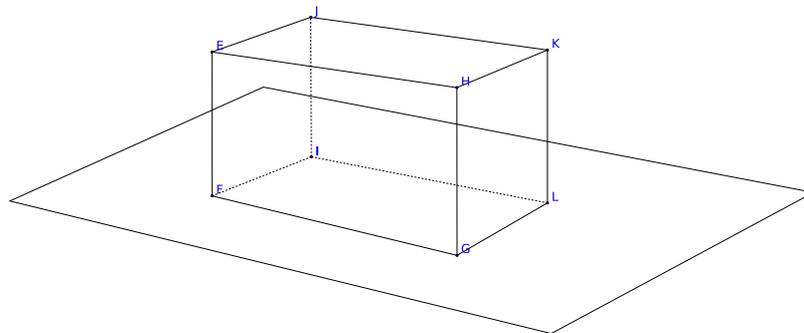


Figura 18: Construção de um paralelepípedo.

Teorema 4.12. *Sejam (r, s) e (r', s') dois pares de retas concorrentes tais que r, r' são paralelas entre si e s, s' também são paralelas entre si. A medida do ângulo formado por r e s é igual à medida do ângulo formado por r' e s' .*

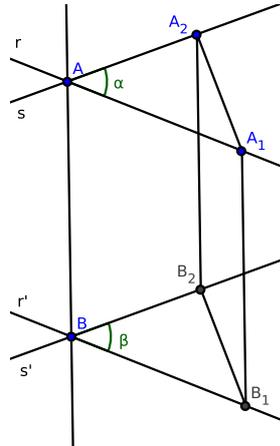


Figura 19: Pares de retas paralelas determinam ângulos iguais.

Demonstração. Considere A o ponto de interseção de r e s e B o ponto de interseção de r' e s' como na Figura 19. Sobre r e s tomemos A_1 e A_2 e tracemos as paralelas A_1B_1 e A_2B_2 à reta AB . Os quadriláteros AA_1B_1B , AA_2B_2B e $A_2A_1B_1B_2$ são paralelogramos. Logo, $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$, $\overline{AA_2} = \overline{BB_2}$, $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$. Logo, os triângulos AA_1A_2 e BB_1B_2 são congruentes, o que mostra que as medidas dos ângulos α e β são iguais. \square

4.3 Paralelismo de Reta e Plano

As posições relativas entre reta e plano, como já vimos, são: a reta está contida no plano; a reta e o plano são secantes, ou são paralelos. Como os planos são definidos através de pontos e retas, veremos alguns teoremas que irão estabelecer estes critérios para oferecer conclusões a respeito dos planos baseados em propriedades de suas retas.

Os teoremas seguintes são importantes para a construção do cilindro e prismas e suas demonstrações podem ser encontradas em [8].

Teorema 4.13. *Um plano α e uma reta r não contida em α , são paralelos se e somente se existe uma reta s paralela a r e contida em α .*

Teorema 4.14. *Se α e β são paralelos, então α é paralelo a cada reta de β . Reciprocamente, se o plano α é paralelo a duas retas concorrentes contidas no plano β , então α e β são paralelos.*

Isto é, dois planos são paralelos se cada reta de um é paralela ao outro. Por outro lado, para demonstrar que dois planos são paralelos, basta exibir um par de retas concorrentes de um deles tais que ambas sejam paralelas ao outro plano.

Teorema 4.15. *Por todo ponto A exterior a um plano dado α , passa exatamente um plano β paralelo a α .*

Para a demonstração deste teorema, basta tomar duas retas concorrentes r e s contidas em α e duas retas r' e s' paralelas a r e s traçadas por A assim encontramos o plano β formado pelas retas r' e s' que é paralelo a α pelo Teorema 4.14. Este plano é único.

Teorema 4.16. *Se uma reta corta um plano, corta também qualquer plano paralelo a este. Se um plano corta uma reta, corta também qualquer reta paralela a ela.*

Definição 4.17. *Considere uma figura plana F , que chamamos de base. Considere também um segmento de reta r , não paralelo ao plano. Para cada ponto de F levante um segmento de reta paralelo à r . Assim a reunião desses segmentos é chamado de cilindro C , de base F e geratriz r . Um cilindro cuja base é um polígono é chamado de prisma.*

Com essas definições e teoremas, podemos construir um prisma.

Construção de prismas: Seja $A_1A_2\cdots A_n$ um polígono contido em um plano α . Escolhemos um ponto B_1 qualquer, não pertencente a α . Por B_1 traçamos o plano β paralelo a α . Pelos demais vértices A_2, \cdots, A_n traçamos retas paralelas a A_1B_1 que cortam β nos pontos B_2, \cdots, B_n . O poliedro assim determinado é chamado de *prisma* de bases $A_1A_2\cdots A_n$ e $B_1B_2\cdots B_n$, veja a Figura 20.

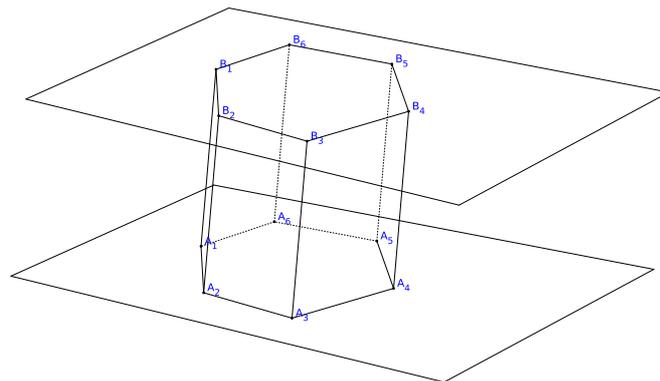


Figura 20: Construção de um prisma.

4.4 Planos paralelos e Proporcionalidade

Uma noção fundamental para a Geometria Espacial, é a noção de planos paralelos e proporcionalidade.

Proposição 4.18. *Dois segmentos de retas paralelas compreendidos entre planos paralelos são iguais.*

Demonstração. Se \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos paralelos compreendidos entre os planos α e β , então o quadrilátero $ABCD$ é plano. Logo as retas AC e BD são paralelas, já que não tem ponto comum por estarem situadas em planos paralelos. Portanto $ABDC$ é um paralelogramo e $\overline{AB} = \overline{CD}$. \square

Teorema 4.19. *Um feixe de planos paralelos determina segmentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.*

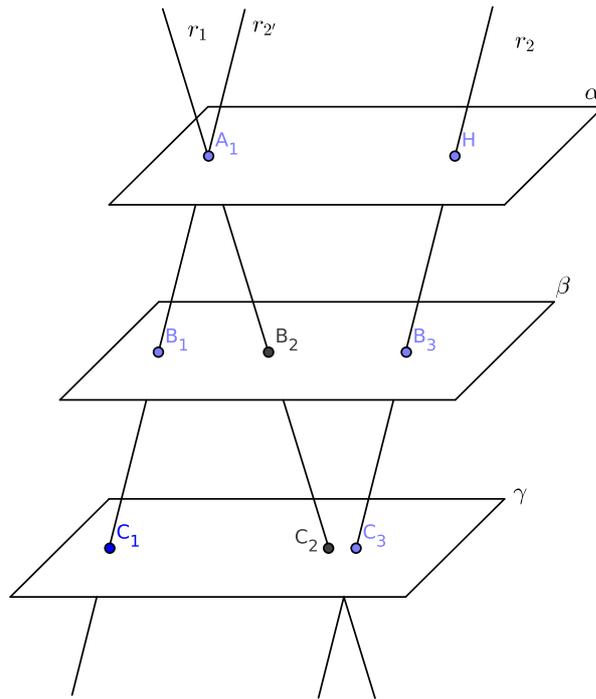


Figura 21: Teorema 3.6 para planos paralelos.

Demonstração. Consiste em reduzir o teorema para o seu correspondente no plano. Sejam α, β e γ três planos paralelos e sejam r_1 e r_2 duas retas secantes quaisquer como a Figura 21. A reta r_1 corta os planos nos pontos A_1, B_2, C_2 e a reta r_2 corta os mesmos planos

nos pontos H, B_3, C_3 . Pelo ponto A_1 de r_1 traçamos uma reta r_2' paralela a r_2 , que corta os três planos nos pontos A_1, B_1, C_1 . As retas r_1 e r_2' determinam um plano, que corta β e γ segundo as retas paralelas B_1B_2 e C_1C_2 . Logo, pelo Teorema 3.6 temos

$$\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1C_2}}.$$

Mas $\overline{A_1B_1} = \overline{HB_3}$, $\overline{B_1C_1} = \overline{B_3C_3}$ e $\overline{A_1C_1} = \overline{HC_3}$, por serem segmentos de retas paralelas compreendidos entre retas paralelas. Logo temos

$$\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{HB_3}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{HC_3}}.$$

□

Com essas definições e teoremas podemos construir pirâmides semelhantes.

Construção de pirâmides semelhantes: Considere uma pirâmide de base $A_1A_2 \cdots A_n$ e vértice V . Traemos um plano paralelo à base, que corta as arestas laterais segundo o polígono $B_1B_2 \cdots B_n$ e que divide a pirâmide em dois poliedros: um deles é a pirâmide de base $B_1B_2 \cdots B_n$ e o outro chamado de tronco de pirâmide de bases $A_1A_2 \cdots A_n$ e $B_1B_2 \cdots B_n$. Assim temos

$$\frac{\overline{VB_1}}{\overline{VA_1}} = \frac{\overline{VB_2}}{\overline{VA_2}} = \cdots = \frac{\overline{VB_n}}{\overline{VA_n}} = k.$$

Assim as duas pirâmides são semelhantes de razão k , ou seja, é possível estabelecer uma correspondência entre seus pontos de modo que a razão entre os comprimentos de segmentos correspondentes nas duas figuras sejam constantes.

De maneira geral, dado um ponto V no espaço e um número real $k \neq 0$, a homotetia de centro V e razão k é a função σ que associa a cada ponto P do espaço o ponto P' sobre VP tal que $\overline{VP'} = k\overline{VP}$, como na Figura 22.

Duas figuras F e F' são homotéticas quando existe uma homotetia σ tal que $\sigma(F) = F'$.

4.5 Perpendicularismo de Reta e Plano

Uma noção fundamental para a Geometria do Espaço é a noção de reta perpendicular.

Definição 4.20. *Diz-se que uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal a toda reta contida no plano.*

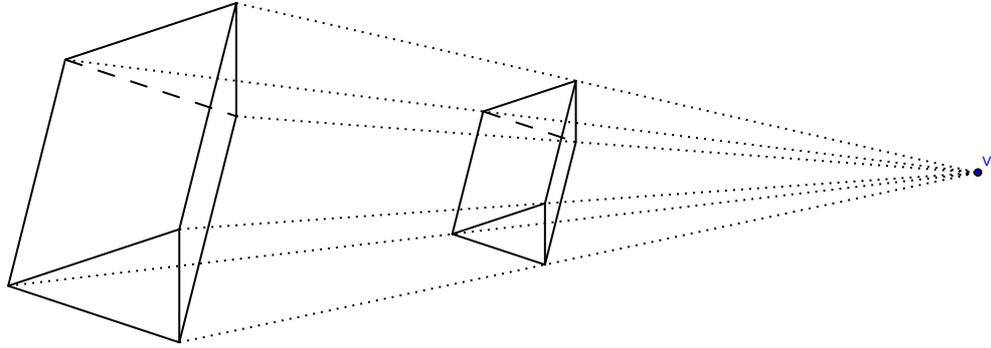


Figura 22: Figuras Homotéticas.

Os teoremas seguintes, serão necessários para a construção de retas e planos perpendiculares, para a construção de pirâmide regular e prisma reto. As demonstrações podem ser encontradas em [8].

Teorema 4.21. *Se r é ortogonal a um par de retas concorrentes de α , então r é perpendicular a α .*

Teorema 4.22. *Por um ponto dado, se pode traçar um único plano perpendicular a uma reta dada. Por um ponto dado, se pode traçar uma única reta perpendicular a um plano dado.*

Com essas definições e teoremas, podemos construir figuras retas, como as seguintes:

- **Construção de um prisma reto:** são prismas obtidos tomando, para as arestas laterais, retas perpendiculares ao plano da base.
- **Construção de pirâmides regulares:** são construídas tomando um polígono regular $A_1A_2 \cdots A_n$ como base e escolhendo como vértice um ponto V situado sobre a perpendicular ao plano do polígono conduzida pelo seu centro O .

4.6 Aplicação: Distâncias

Para estudar problemas métricos no espaço envolvendo distância vamos utilizar as ferramentas da Geometria Plana.

Distância entre dois pontos: A distância entre dois pontos A e B é simplesmente a medida do segmento AB . Para calcular esta distância, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras 3.7.

Distância de ponto a plano: Dado um plano α e um ponto P do espaço, o ponto Q em que a reta perpendicular a α traçada por P corta o plano α é chamada de *projeção ortogonal* de P sobre α , veja Figura 23. O comprimento do segmento \overline{PQ} é a distância de P a α .

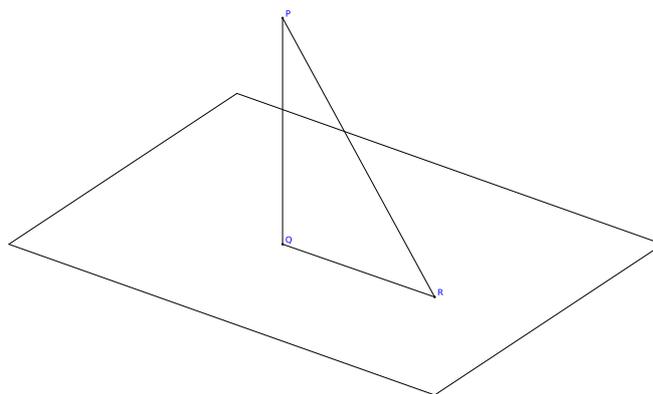


Figura 23: Distância de ponto a plano.

4.7 Esfera

Usando distância podemos estudar algumas propriedades da esfera, que é análogo ao círculo.

Definição 4.23. *A esfera de centro num ponto O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R .*

Os pontos cuja distância a O é menor que R são interiores à esfera e aqueles cuja distância a O é maior que R são exteriores a ela.

Tomemos uma esfera ε e um plano α , e veremos as possíveis posições relativas de ε e α , pois tudo depende da distância $d(O, \alpha)$ do centro O da esfera ao plano α .

- Se $d(O, \alpha)$ é maior que o raio R , o plano é exterior à esfera.

- Se $d(O, \alpha)$ é igual a R , o único ponto de α que está a uma distância R de O é o ponto P , que é o pé da perpendicular a α traçada por O . Dizemos que α é tangente à esfera no ponto P .
- Se $d(O, \alpha) < R$, seja O' o pé da perpendicular traçada de O ao plano α . Qualquer que seja o ponto P em α , o triângulo $PO'O$ é retângulo em O' . Logo

$$\overline{PO}^2 = \overline{PO'}^2 + \overline{OO'}^2$$

portanto, os pontos de α que estão na esfera se encontram em um círculo de centro O' e raio $r = \sqrt{R^2 - (d(O, \alpha))^2}$. Dizemos neste caso que o plano α é secante à esfera.

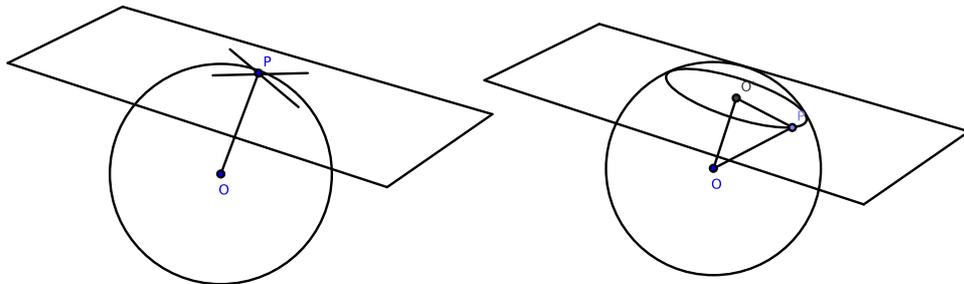


Figura 24: Plano tangente e secante à esfera.

4.8 Noção de Volume

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada, tomando como unidade o cubo de arestas iguais a 1.

Assim, dado um sólido S , desejamos definir precisamente o número $vol(S)$, ou seja, queremos dar significado à ideia inicial, segundo a qual $vol(S)$ é o número que exprime quantas vezes S contém o cubo unitário.

Podemos considerar um poliedro $P(Q)$ formado por poliedros retangulares contido em S (contém S). Fornecem-nos aproximações inferiores (superiores) para o volume de S . Acrescentando (retirando) mais blocos retangulares sempre tendo o cuidado de permanecer dentro (fora) de S , obteremos um poliedro retangular que será uma aproximação melhor para o $vol(S)$.

Queremos que seja possível aproximar $vol(S)$ com tanta precisão quanto se deseje por volumes de poliedros retangulares contidos em S . Isto é, o $vol(S)$ seja o número real cujas aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S .

Assim quaisquer que seja os poliedros retangulares P contido em S e Q contendo S , tem-se

$$vol(P) \leqslant vol(S) \leqslant vol(Q).$$

4.8.1 Cálculo de Volume dos Sólidos

Vamos adotar que um cubo de lados 1 seja 1 unidade de medida.

Considere agora um paralelepípedo retângulo de lados $a, b, c \geqslant 0$, logo temos:

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(a.1, b, c) \\ &= a.V(1, b.1, c) \\ &= ab.V(1, 1, c.1) \\ &= abc.V(1, 1, 1) \\ &= abc.1 = abc \end{aligned}$$

portanto o volume de um paralelepípedo é o produto de suas dimensões.

Postulado 4.24. *Sejam A e B dois sólidos. Se todo plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então $vol(A) = vol(B)$.*

Teorema 4.25. *O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base (S_b) pela altura (h).*

Demonstração. Considere um cilindro de área de base A e altura h . Construa um paralelepípedo retângulo de altura h e área da base A . Considere agora um plano horizontal seccionando as duas figuras, produzindo áreas A_1 e A_2 no cilindro e no paralelepípedo, respectivamente. Ora, o paralelepípedo é um cilindro, logo uma seção paralela à base é congruente a essa base, assim temos que $A_1 = A = A_2$, pelo Postulado 4.24 temos que os dois sólidos tem o mesmo volume. \square

Teorema 4.26. *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura*

Demonstração. Primeiramente tomamos como conhecido que duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume. Assim considere um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$ como a Figura 25. Podemos dividir esse prisma

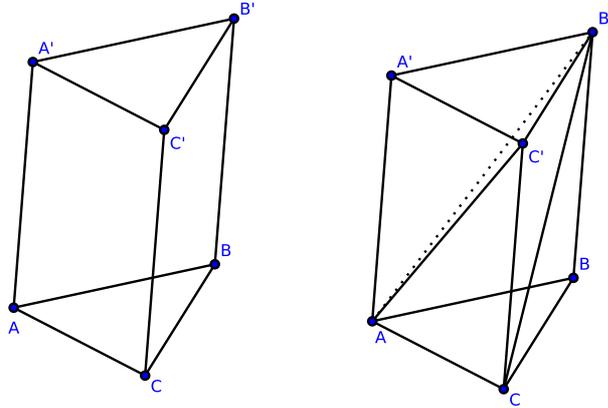


Figura 25: Volume da Pirâmide triangular.

em três tetraedros: $AA'B'C'$, $B'ACC'$ e $B'ABC$, seja V_1, V_2 e V_3 os volumes dos três tetraedros, assim temos

$$V_1 = V(AA'B'C') = V(CA'B'C') = V(CAB'C') = V_2$$

$$V_2 = V(B'ACC') = V(B'ABC') = V(B'ABC) = V_3.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} V_{prisma} &= V_{tetraedro1} + V_{tetraedro2} + V_{tetraedro3} \\ &= 3V_{tetraedro1} \\ V_{tetraedro1} &= \frac{1}{3}V_{prisma}. \end{aligned}$$

□

Como em uma pirâmide qualquer podemos dividir ela em pirâmides triangulares, o volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Teorema 4.27. *O volume de um cone é igual a um terço do produto da área da base (S_b) pela altura (h).*

Demonstração. Considere um cone de área de base A e altura h . Construa uma pirâmide de altura h e área da base A . Considere agora um plano horizontal seccionando as duas figuras, produzindo áreas A_1 e A_2 no cone e na pirâmide, respectivamente. Ora, a pirâmide é um cone, logo as seções A_1 e A_2 são congruentes, assim temos que $A_1 = A_2$, pelo Postulado 4.24 temos que os dois sólidos tem o mesmo volume. \square

Corolário 4.28. *O volume do tronco de área maior (A), altura (h) e área menor (a) é dado pela expressão*

$$V = \frac{h}{3} (A + \sqrt{A.a} + a).$$

Demonstração. De fato, seja uma pirâmide de área da base A e altura H , logo pelo Teorema 4.27, $V_t = \frac{A.H}{3}$. Queremos encontrar o volume do tronco de altura h , isto é, $V_t - V_p$. Tem-se:

$$\begin{aligned} V &= V_t - V_p \\ &= \frac{A}{3}H - \frac{a}{3}(H - h) \\ V &= \frac{1}{3}[H(A - a) + a.h]. \end{aligned} \tag{1}$$

Colocando H em função de h temos,

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{(H - h)^2} &= \frac{A}{a} \\ H &= \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{a}}(H - h) \\ H\sqrt{a} &= \sqrt{A}H - \sqrt{A}h \\ H(\sqrt{A} - \sqrt{a}) &= \sqrt{A}h \\ H &= \frac{\sqrt{A}h}{\sqrt{A} - \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação 1 temos

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\sqrt{A}h}{\sqrt{A} - \sqrt{a}} \right) (A - a) + a.h \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\sqrt{A}h(\sqrt{A} + \sqrt{a}) + a.h \right] \\ &= \frac{h}{3} \left[A + \sqrt{A.a} + a \right]. \end{aligned}$$

\square

Teorema 4.29. *O volume de uma esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$.*

Demonstração. Considere uma esfera de raio R e um cilindro de base circular de raio R e altura $2R$ e dois cones de base circular de raio R e altura R , como na Figura 26. Considere agora um plano seccionando horizontalmente ambas as figuras, mas a seção

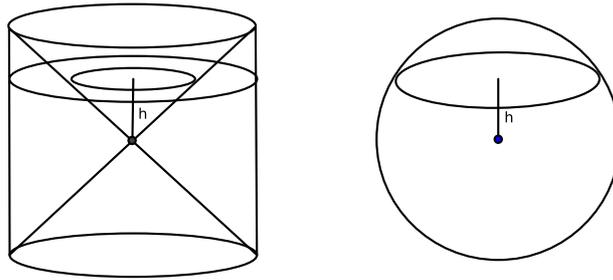


Figura 26: Volume da Esfera.

que dista h do centro da esfera, é um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$ que é também a área da coroa circular limitada por circunferências de raio R e h , logo pelo Postulado 4.24 temos:

$$\begin{aligned}
 V_{esfera} &= V_{cilindro} - V_{cone1} - V_{cone2} \\
 &= \pi R^2 \cdot 2R - 2 \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R \\
 &= \pi R^3 \left(2 - \frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3.
 \end{aligned}$$

□

5 Geometria Não Euclidiana

A Geometria Euclidiana era absoluta e devia ser possível baseá-la em fatos simples e intuitivos. Foi o quinto postulado juntamente com o fracasso de todas as tentativas de demonstrá-lo que abriu caminho para a Geometria Não Euclidiana.

Um dos esforços mais bem orientados nessa direção é devido a G. Saccheri (1667 – 1733). Seja $ABCD$ um quadrilátero, onde os ângulos \hat{A} e \hat{B} são retos e o lado AC é igual ao lado BD , veja Figura 27. Saccheri provou que os ângulos \hat{C} e \hat{D} são iguais. Se ambos são retos, é possível concluir daí o Postulado Cinco. Restando apenas mostrar que se forem agudos ou obtusos levariam a uma contradição.

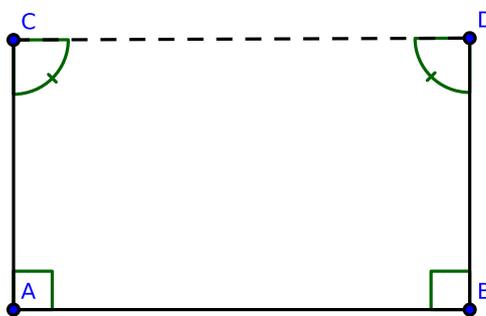


Figura 27: Quadrilátero de Saccheri.

Porém não conseguiu chegar à contradição. Mas ele mostrou o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *O lado CD é menor que a base AB , no caso obtuso, igual no caso euclidiano e maior no caso agudo. Além disso, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° no caso obtuso, igual no caso euclidiano e menor no caso agudo.*

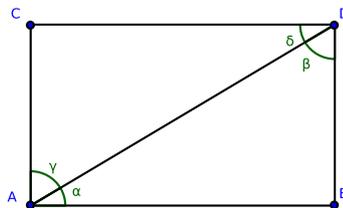


Figura 28: Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Demonstração. Considere a Figura 28.

1. Caso agudo.

Tem-se $AB > CD$, logo $\gamma < \beta$, assim

$$\begin{aligned}\gamma &< \beta \\ \gamma + \delta + \hat{C} &< \alpha + \beta + \hat{B} \\ \gamma + \delta + \hat{C} &< 180\end{aligned}$$

2. Caso euclidiano.

De $AB = CD$, logo $\gamma = \beta$, assim

$$\begin{aligned}\gamma &= \beta \\ \gamma + \delta + \hat{C} &= \alpha + \beta + \hat{B} \\ \gamma + \delta + \hat{C} &= 180\end{aligned}$$

3. Caso obtuso.

De $AB < CD$, logo $\gamma > \beta$, assim

$$\begin{aligned}\gamma &> \beta \\ \gamma + \delta + \hat{C} &> \alpha + \beta + \hat{B} \\ \gamma + \delta + \hat{C} &> 180\end{aligned}$$

□

Aparentemente, Gauss foi o primeiro a perceber a natureza real do problema. Suas concepções estavam relacionadas com suas descobertas em Geometria Diferencial.

A construção explícita de uma Geometria, rejeitando o quinto postulado e obtendo os resultados de Saccheri, Lambert e Gauss, foi publicada de maneira independente por Lobachewski em 1829 e Bolyai em 1832. Tal Geometria é hoje chamada de Geometria Hiperbólica.

5.1 Geometria Hiperbólica

Nesta seção vamos enunciar apenas alguns resultados até o resultado da soma dos ângulos interno de um triângulo. Para mais detalhes e uma melhor discussão veja em [4].

Substituindo o quinto postulado de Euclides pelo postulado abaixo:

Postulado 5.2. *Por um ponto P fora de uma reta r , passa mais de uma reta paralela à reta r .*

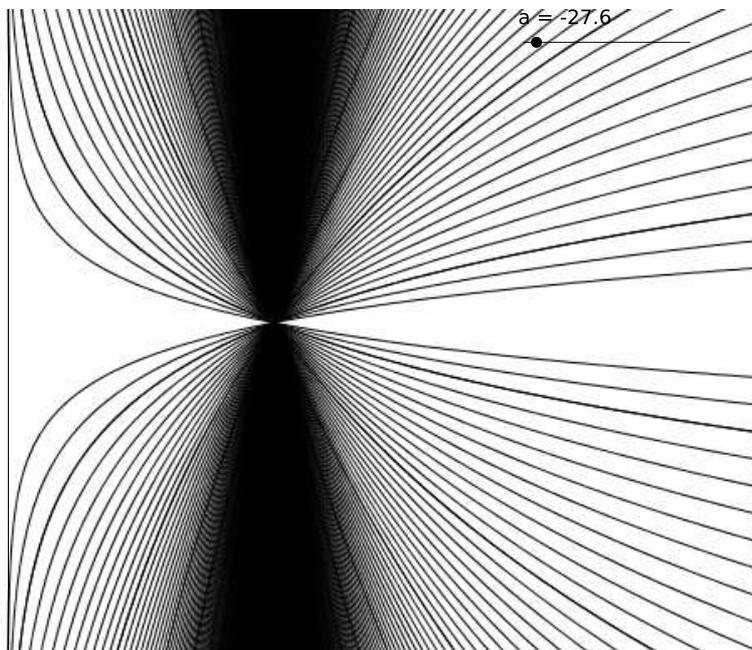


Figura 29: Infinitude de retas com um ponto em comum e paralela a uma outra.

Obtemos junto com os outros quatro postulados, a Geometria Hiperbólica.

Proposição 5.3. *As retas paralelas a r passando por P formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de P a reta r . Além disso, o ângulo mencionado é agudo.*

Algumas propriedades das retas paralelas euclidianas valem também para a Geometria Hiperbólica, como:

“Se uma reta é paralela a uma segunda, então, a segunda é paralela à primeira.”

“Se duas retas são paralelas a uma terceira, na mesma direção, então são paralelas entre si.

Vamos acrescentar dois pontos a cada reta do plano, os quais na ordenação da reta, localizam-se, um antes de todos os seus pontos, e outro depois de todos os seus pontos. Estes serão denominados pontos ideais. Admita que retas paralelas tenham um ponto ideal em comum na direção do paralelismo. Assim retas paralelas tem um ponto ideal em comum.

Chamamos de triângulo generalizado o triângulo formado por três pontos, sendo um ponto ideal Ω .

Teorema 5.4. *Um ângulo externo de um triângulo generalizado $AB\Omega$ é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente.*

Corolário 5.5. *A base e o topo de um quadrilátero de Saccheri fazem parte de retas que não se interceptam.*

Teorema 5.6. *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.*

Teorema 5.7. *A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Corolário 5.8. *A soma dos ângulos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.*

Com essas propriedades iniciais, se inicia a construção da Geometria Hiperbólica.

Um modelo da Geometria Hiperbólica mais satisfatório foi obtido por F. Klein que está relacionado com seus trabalhos sobre a Geometria Projetiva. Outro modelo foi introduzido por Poincaré, e para sua compreensão detalhada do modelo requer elementos de Geometria Diferencial.

As consequências das novas Geometrias desenvolvidas, foram além do campo da matemática, como na teoria da Relatividade de Einstein. Em cosmologia, especulase que se o universo estiver se expandindo, então estaremos falando de Geometria Hiperbólica, se estiver contraindo, Geometria Elíptica, se estiver estático, Geometria Euclidiana.

6 Geometria Fractal

O texto deste capítulo, teve como fonte de consulta as referências [5], [9], [10] e [15].

Nas últimas décadas aconteceram investigações cujo tema central foi a construção e o estudo de figuras Geometrias chamadas *fractais*. Essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial, que é uma imagem de si própria em cada uma de suas partes. Esta propriedade é conhecida por *auto-similaridade*.

Benoit Mandelbrot nomeou essas figuras como *fractal*, que é baseado no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa *quebrar*: criar fragmentos irregulares, fragmentar. Esta Geometria está intimamente ligada à teoria do Caos. As estruturas dessa Geometria fornecem certa ordem no Caos, razão de ser considerada como a linguagem que busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório.

Essa ciência trouxe consigo o reconhecimento de padrões, que antes eram considerados caóticos, permitindo assim reformular antigos problemas fornecendo aproximações para as diversas formas encontradas na natureza em geral.

Entretanto, objetos ou figuras satisfazendo as condições necessárias para serem denominadas de fractal, precederam há muitos anos sua inclusão nessa classe, que antes era chamados de “monstros matemáticos”.

Os fractais foram considerados como monstros matemáticos devido a sua Geometria, pois não é possível descrever equações simples para os fractais. O que os descreve é a sua função iterativa. A seguir veremos algumas definições gerais e alguns dos fractais criados pelos matemáticos antes de Mandelbrot, que desafiavam o enquadramento nas definições convencionais da Geometria euclidiana.

6.1 Definições

Dizemos que dois objetos são *auto-semelhantes* se possuem a mesma forma, independente de seu tamanho, isto é, seus padrões característicos são repetidamente encontrados em escala descendente, de modo que suas partes em escalas menores são na forma semelhante com o todo.

Dizemos que um conjunto pode ser expresso através de um processo recursivo se uma determinada operação repete-se infinitamente. Assim em sua construção dispõe-se de um número infinito de procedimentos, que resultam em uma estrutura complexa.

Um conjunto F é fractal se:

- F possui alguma forma de “auto-similaridade” ainda que aproximada ou estatística;
- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.

6.2 Fractais Tradicionais

Os fractais tradicionais ilustrados aqui foram extraídos das referências [15] e [25].

6.2.1 Conjunto de Cantor

Georg Cantor(1845-1918), dedicou muito de seus estudos à parte da fundamentação matemática hoje conhecida como Teoria dos Conjuntos. Cantor publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado de “Conjunto de Cantor”, com as seguintes características:

1. Considerar um segmento de reta;
2. Dividir o segmento em três partes iguais e eliminar o segmento a central;
3. Substituir para cada segmento conforme o item 2, e assim sucessivamente.

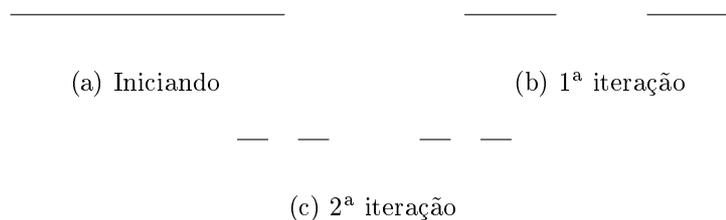


Figura 30: Conjunto de Cantor.

6.2.2 Curva de Peano

Giuseppe Peano (1858-1932), que teve uma enorme contribuição à matemática, publicou em 1890 sua famosa curva, proposta para cobrir totalmente uma superfície quadrangular, com as seguintes características:

1. Iniciar com um segmento de reta
2. Substituir por uma curva de nove segmentos, conforme a Figura 31;
3. Substituir para cada segmento conforme o item 2, e assim sucessivamente.

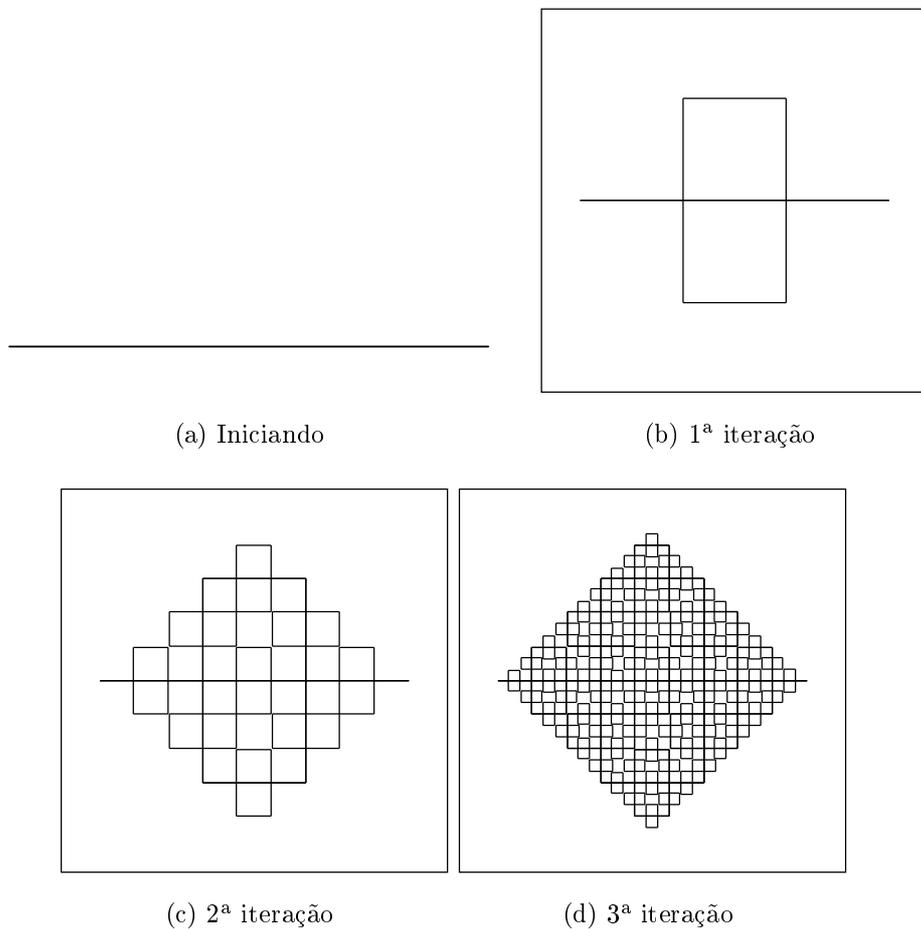


Figura 31: Conjunto de Peano.

6.2.3 Curva de Hilbert

David Hilbert(1862-1943). Sua maior contribuição à matemática foi relativa à abordagem axiomática da Geometria euclidiana. Em 1891 coloca à público sua superfície de um quadrado, com a seguintes características:

1. Considerar um quadrado, divida-o por quatro quadrados, dando início a curva com três segmentos;
2. Substituir cada quadrado por novos quatro quadrados com a mesma construção da curva iniciadora, conectando cada curva parcial com um segmento na mesma ordem dos anteriores, conforme a Figura 32;
3. Substituir para cada quadrado conforme o item 2, e assim sucessivamente.

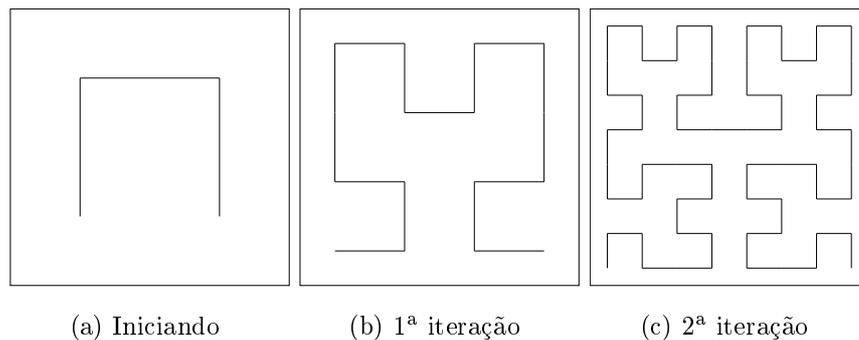


Figura 32: Curva de Hilbert.

6.2.4 Curva de Koch

Pouco se sabe sobre a vida de Helge Von Koch, mas entre 1904 e 1906 introduziu uma curva que recebeu seu nome.

1. Considerar um segmento de reta;
2. Dividir o segmento em três segmentos iguais, substituindo-os por quatro segmentos congruentes; intermediado por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário, conforme a Figura 33;
3. Substituir cada um dos segmentos conforme item 2, e assim sucessivamente.

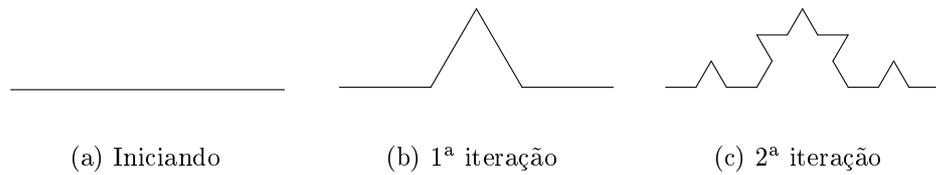


Figura 33: Curva de Koch.

6.2.5 Curva, triângulo e tapete de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (1882-1969), teve grande reputação na década de 1920-1930. Em 1916, apresentou um dos famosos monstros em seu trabalho, que completava uma publicação sua anterior a 1915.

Curva

1. Considerar um segmento de reta e o triângulo equilátero tendo esse segmento por lado;
2. Substituir o segmento por uma poligonal de três segmentos formando os três lados de um trapézio isósceles com vértices no extremos do segmento inicial e nos pontos médios dos outros dois do triângulo;
3. Substituir para cada segmento conforme o item 2, e assim sucessivamente.

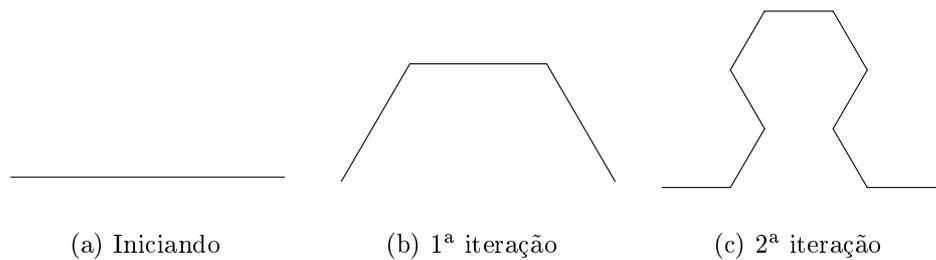


Figura 34: Curva de Sierpinski.

Triângulo

1. Considerar um triângulo equilátero;
2. Marcar os segmentos dos pontos médios, formando quatro triângulos equiláteros, eliminar(remover) o central;

3. Substituir para cada triângulo conforme o item 2, e assim sucessivamente.

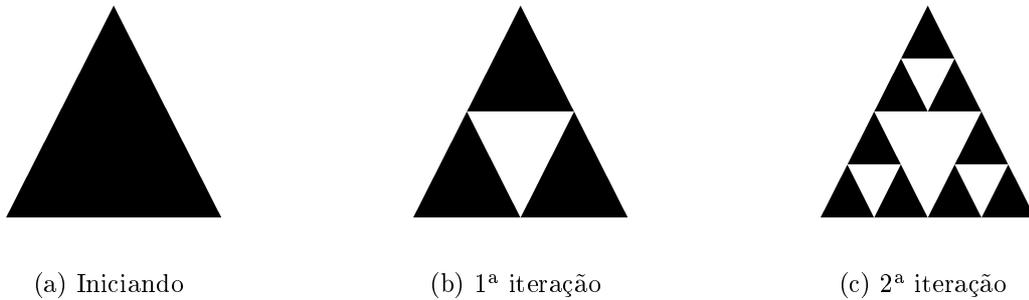


Figura 35: Triângulo de Sierpinsk.

Tapete

1. Considerar um quadrado;
2. Marcar os segmentos dos pontos médios, formando nove quadrados, eliminar o quadrado central;
3. Substituir para cada quadrado conforme o item 2, e assim sucessivamente.

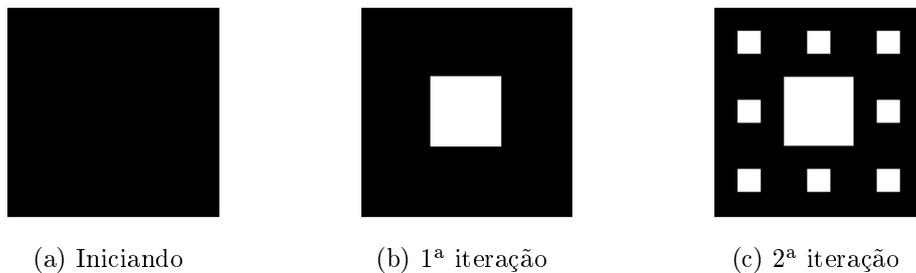


Figura 36: Tapete de Sierpinsk.

Antes de ver os conjuntos de Fatou, Julia e Mandelbrot, vamos entender como encontrar um ponto fixo de uma função iterativa

6.3 Funções Iterativas

Seja $g(x) = x^2 + c$. Qual o intervalo de c tal que sua órbita não escapa?

Basta verificar onde $g(x) = x$ e determinar esse intervalo, isto é $x^2 - x + c = 0$.

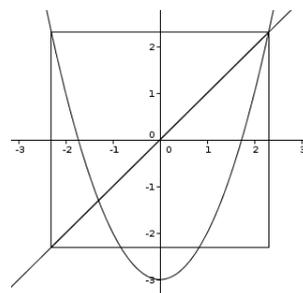
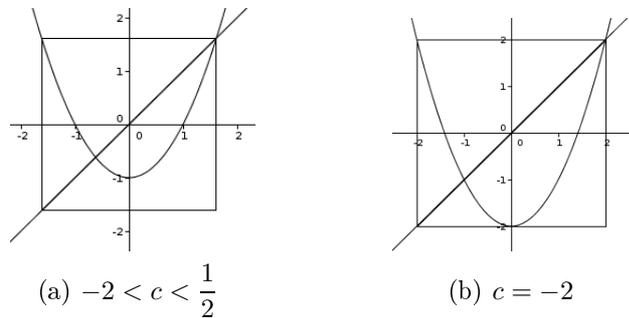
Se $c > \frac{1}{4}$ ou $c < -2$, o gráfico de g fica acima da reta $y = x$, sendo assim não possui ponto fixo. Quando $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$, há um intervalo de valores x_0 que não escapa.

Pela resolução de equação do segundo grau, temos $p = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$ e $q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$ são as raízes deste polinômio.

De fato, note que para $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} -\sqrt{1 - 4c} &< \sqrt{1 - 4c} \\ 1 - \sqrt{1 - 4c} &< 1 + \sqrt{1 - 4c} \\ -1 - \sqrt{1 - 4c} &< 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1 + \sqrt{1 - 4c} \\ \frac{-1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} &< \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}. \end{aligned}$$

Assim $g(-p) = p$ que é um ponto fixo. Assim temos que quando $c < \frac{1}{4}$ a órbita de $g(x)$ está no intervalo $-p \leq x \leq p$, como mostra a Figura 37:



(c) $c < -2$

Figura 37: Órbita de $f(x)$.

Em cada caso da Figura 37 desenhamos uma caixa centrada na origem com vértice

(p, p) e $(-p, -p)$, que contém o gráfico da órbita de c .

6.4 Gaston Julia

Gaston Julia descobriu muitas propriedades básicas do conjunto que recebeu seu nome. Uma definição precisa do conjunto de Julia é que ele faz fronteira com o conjunto de pontos que escapam para o infinito, isto é, se um ponto faz parte do conjunto de Julia, então ele não escapa para o infinito, mas existem pontos arbitrariamente próximos que sua órbita escapa.

Vamos nos concentrar na função da forma

$$f(z) = z^2 + c$$

para z o número complexo inicial e c uma constante complexa. Para determinar a órbita, vamos considerar $|c| \leq 2$. Se $|z| > 2$ temos

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| \\ &> |z|^2 - |z| \\ &= (1 + l)|z| \end{aligned}$$

para algum $l > 0$. Assim

$$\begin{aligned} |f_c^2(z)| &= |f_c(f_c(z))| > (1 + l)^2 |z| \\ |f_c^3(z)| &> (1 + l)^3 |z| \\ &\vdots \\ |f_c^n(z)| &> (1 + l)^n |z|, \end{aligned}$$

como $l > 0$ assim $(1 + l) > 1$, portanto $(1 + l)^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, assim

$$|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$$

com $n \rightarrow \infty$. Assim, na órbita

$$z, z^2 + c, (z^2 + c)^2 + c, \dots$$

se em algum momento $|z| > 2$, então a órbita escapa para o infinito. Veja nas figuras seguintes alguns exemplos de c , considere ϕ como a constante (conhecido como o número de ouro) $\phi = 1,61 \dots$.

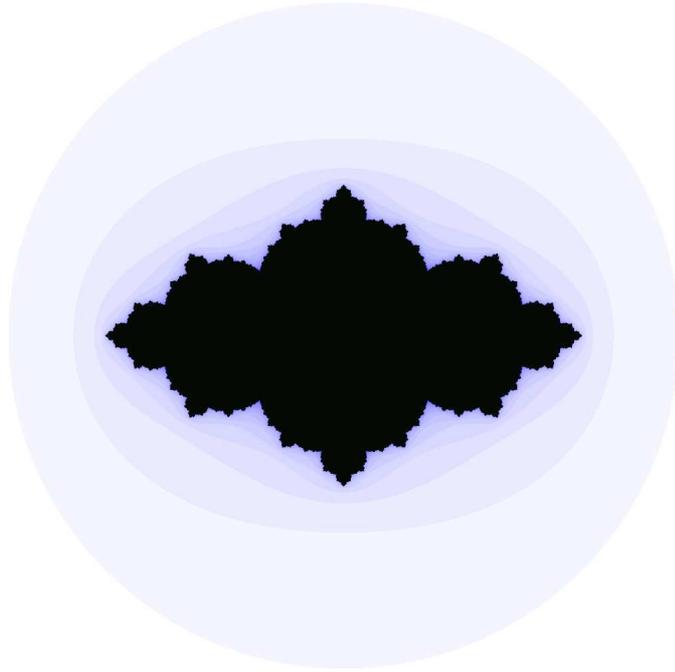


Figura 38: $c = 1 - \phi$.

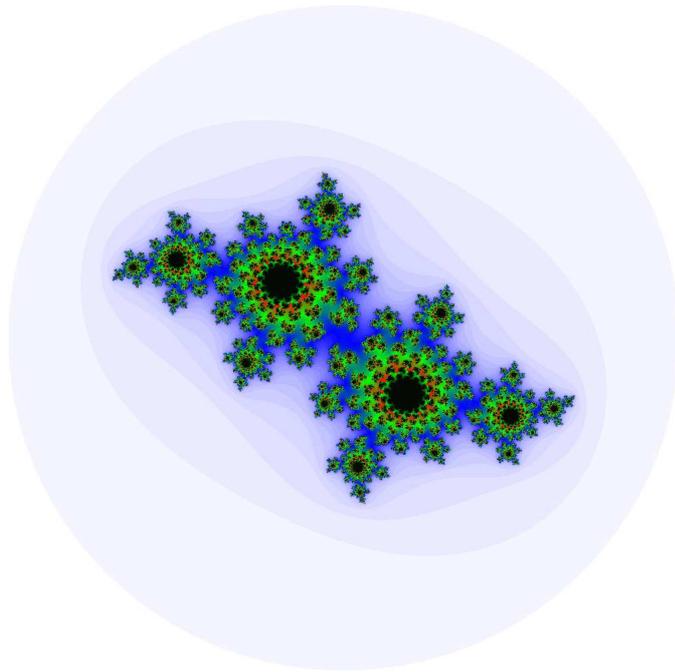


Figura 39: $c = (\phi - 2) + (1 - \phi)i$.

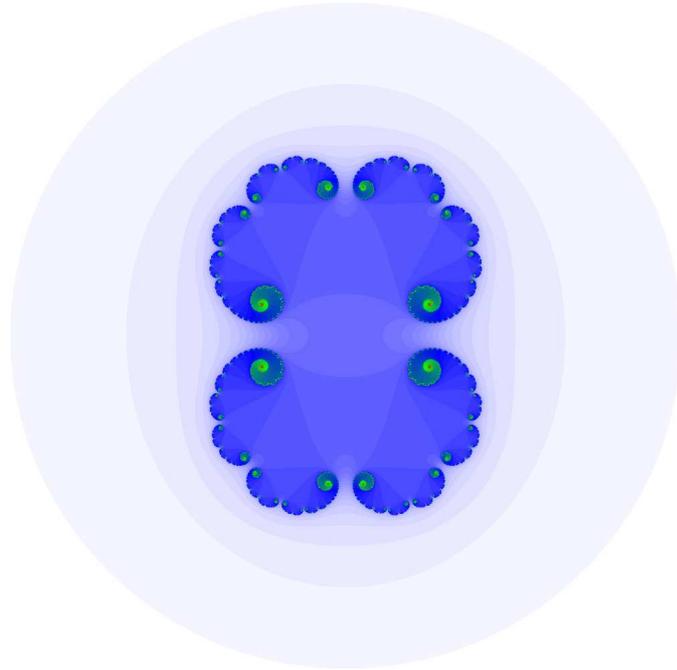


Figura 40: $c = 0,285$.

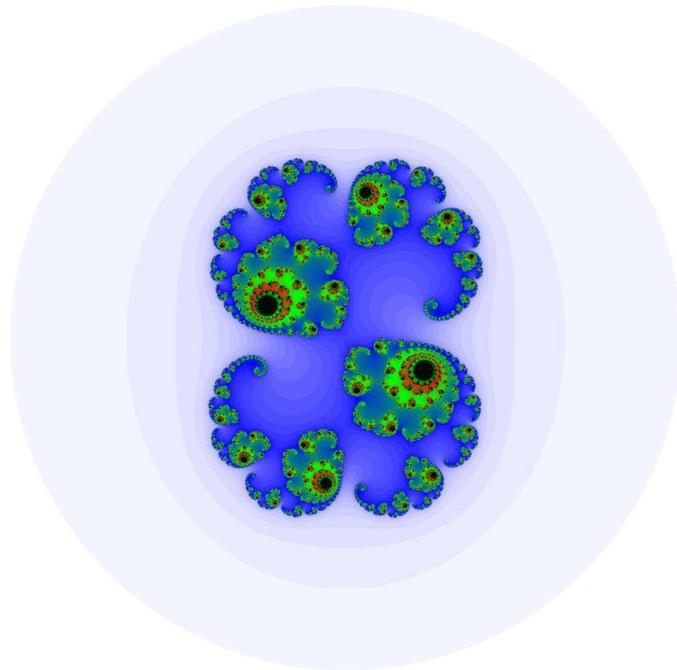


Figura 41: $c = 0,285 + 0,01i$.

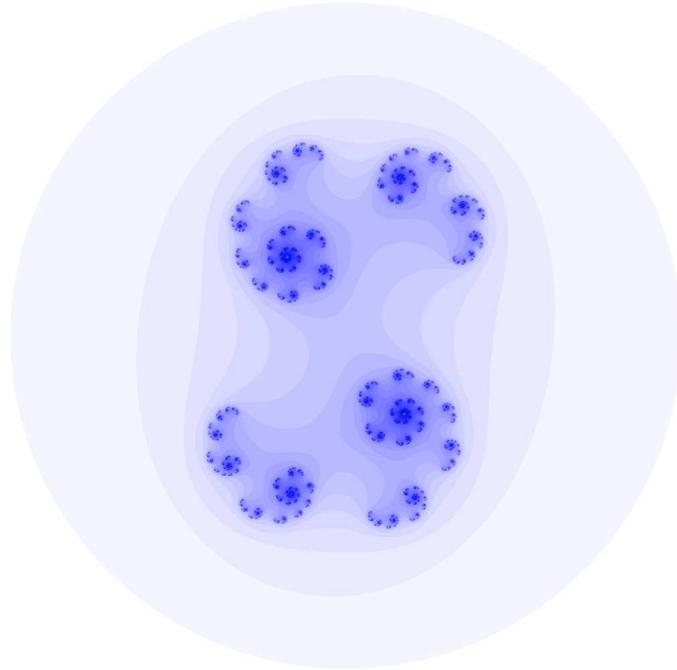


Figura 42: $c = 0,45 + 0,1428i$.

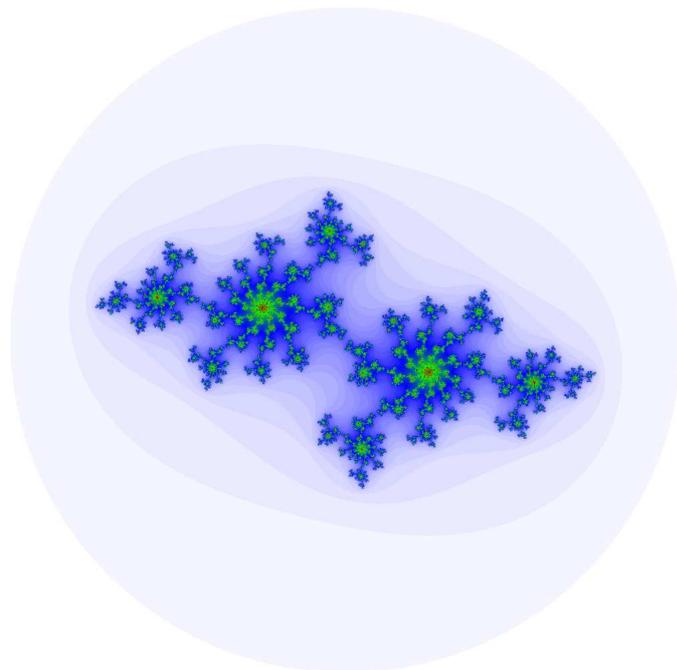


Figura 43: $c = -0,70176 - 0,3842i$.

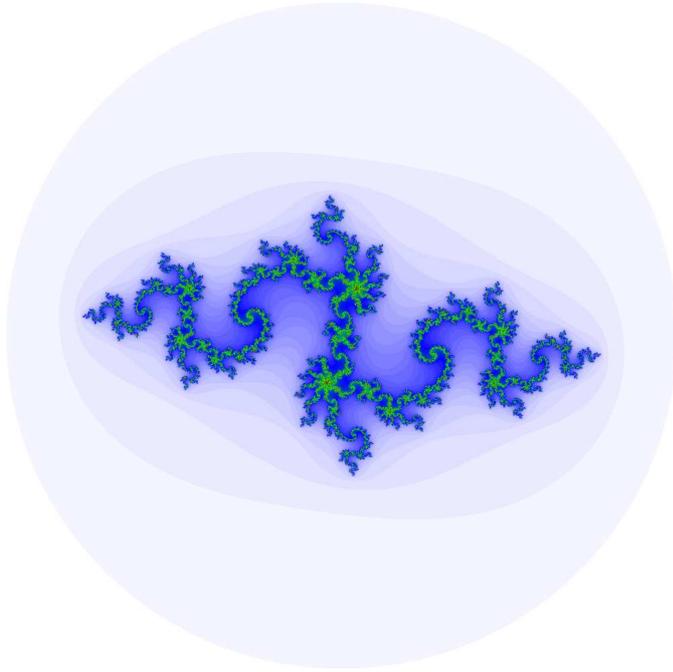


Figura 44: $c = -0,835 - 0,2321i$.

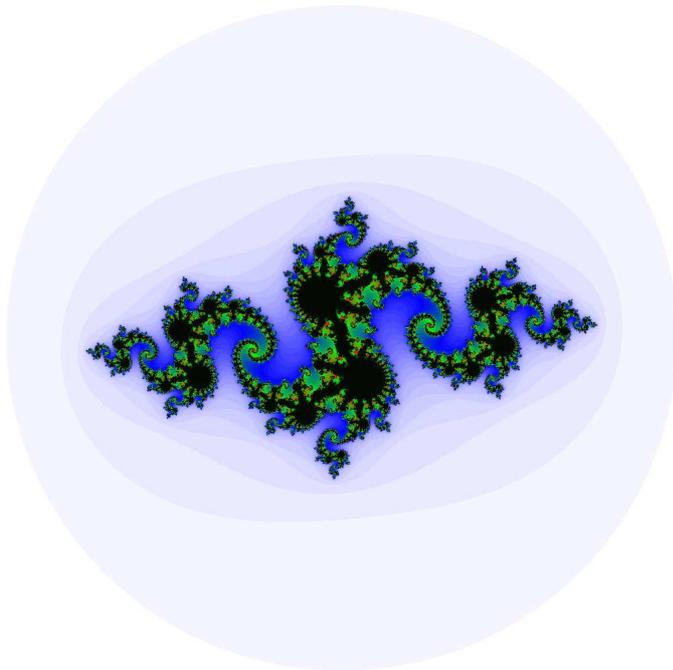


Figura 45: $c = -0,8 + 0,156i$.

Vejamos agora a função da forma $f(z) = z^3 + c$. Para determinar a órbita, vamos considerar que $c \leq \sqrt{2}$. Se $|z| > \sqrt{2}$ temos

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z + c|^3 \\ &\geq |z|^3 - |c| \\ &> |z|^3 - |z| \\ &= |z|(|z|^2 - 1) \\ &= |z|(1 + l) \end{aligned}$$

para algum $l > 0$. Assim

$$\begin{aligned} |f_c^2(z)| &= |f_c(f_c(z))| > (1 + l)^2 |z| \\ |f_c^3(z)| &= |f_c(f_c(f_c(z)))| > (1 + l)^3 |z| \\ &\vdots \\ |f_c^n(z)| &> (1 + l)^n |z| \end{aligned}$$

como $l > 0$, assim $(1 + l) > 1$, portanto $(1 + l)^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, assim

$$|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$$

com $n \rightarrow \infty$. Assim, na órbita

$$z, z^3 + c, (z^3 + c)^3 + c, \dots$$

se em algum momento $|f_c^k(z)| > \sqrt{2}$, $k \in \mathbb{N}$, então a órbita escapa para o infinito.

De maneira geral, para encontrar a órbita de $f(z) = z^n + c$, considere $|c| \leq \sqrt[n-1]{2}$. Se $|z| > \sqrt[n-1]{2}$ temos

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z + c|^n \\ &\geq |z|^n - |c| \\ &> |z|^n - |z| \\ &= |z|(|z|^{n-1} - 1) \\ &= |z|(1 + l) \end{aligned}$$

para algum $l > 0$, assim

$$\begin{aligned} |f_c^2(z)| &= |f_c(f_c(z))| > (1+l)^2|z| \\ &\vdots \\ |f_c^n(z)| &> (1+l)^n|z| \end{aligned}$$

como $l > 0$, assim $(1+l) > 1$, portanto $(1+l)^n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, assim

$$|f_c^n(z)| \rightarrow \infty$$

com $n \rightarrow \infty$. Assim, na órbita

$$z, z^n + c, (z^n + c)^n + c, \dots$$

se em algum momento $|f_c^k(z)| > \sqrt[n-1]{2}$, $k \in \mathbb{N}$, então a órbita escapa para o infinito.

6.5 Conjunto de Mandelbrot

O Conjunto de Mandelbrot é o conjunto de pontos c tais que tomando $z_0 = 0$, a sequência $f^n(z) = z^n + c$ não escapa para o infinito. Diferentemente do conjunto de Julia, onde o valor c era fixo, aqui, o valor c é quem varia.

Segundo [10], o conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos valores de c , tais que a órbita não tende ao infinito. O conjunto de Mandelbrot é uma figura no c -plano, e não no z -plano, onde o fica o conjunto de Julia.

Para saber os valores que satisfazem o conjunto de Mandelbrot vamos analisar os casos.

Se $|c| > 2$, então a órbita de 0 escapa imediatamente. De fato, seja $|c| = 2+l$, onde $l > 0$. Seja $|z| \geq |c|$ para algum ponto z , então

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z^2 + c| \\ &> |z|^2 - |c| \\ &= |z|(1+l). \end{aligned}$$

Isto significa que $|f(z)| > |z|(1+l)$ desde que $|z| \geq |c|$. Logo $|f(z)| > |z|$.

Assim temos:

$$\begin{aligned}
 |f^2(z)| &= |f(f(z))| \\
 &> |f(z)|(1+l) \\
 &> |z|(1+l)^2 \\
 |f^3(z)| &= |f(f(f(z)))| \\
 &> |f(f(z))|(1+l) \\
 &> |f(z)|(1+l)^2 \\
 &> |z|(1+l)^3 \\
 &\vdots \\
 |f^n(z)| &> |z|(1+l)^n
 \end{aligned}$$

como $l > 0$, assim $1+l > 1$, portanto $(1+l)^n \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$, assim

$$|f^n(z)| \rightarrow \infty$$

com $n \rightarrow \infty$.

Assim, concluímos que o conjunto de Mandelbrot está contido em um círculo de raio 2 no plano complexo. Sua órbita é:

$$0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$$

Se em algum ponto desta órbita tem $|c| > 2$, então c não pertence ao conjunto de Mandelbrot.

Analogamente, se:

$$|c_1| > \sqrt{2},$$

$$|c_2| > \sqrt[3]{2},$$

$$|c_3| > \sqrt[4]{2},$$

então a órbita escapa para as funções

$$g(z) = z^3 + c_1,$$

$$h(z) = z^4 + c_2,$$

$$i(z) = z^5 + c_3$$

respectivamente. Confira o c -plano para as funções $f, g, h, i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nas figuras que seguem.

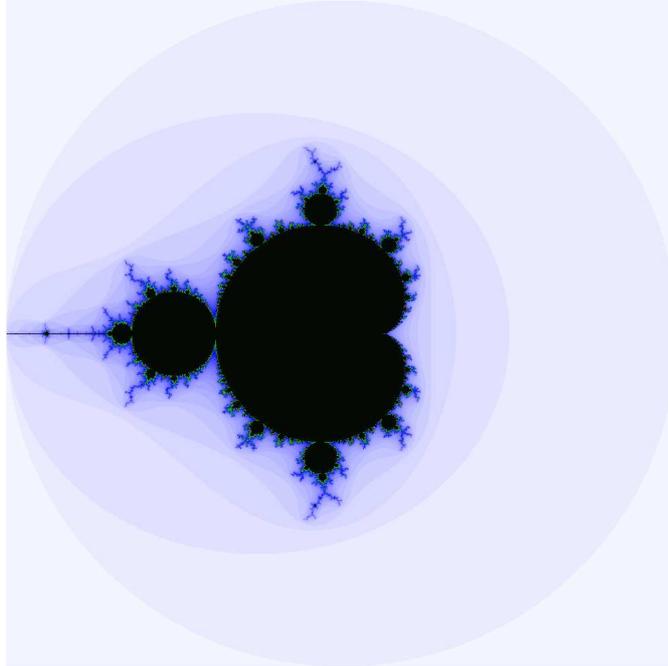


Figura 46: Conjunto de Mandelbrot para $f(z) = z^2 + c$.

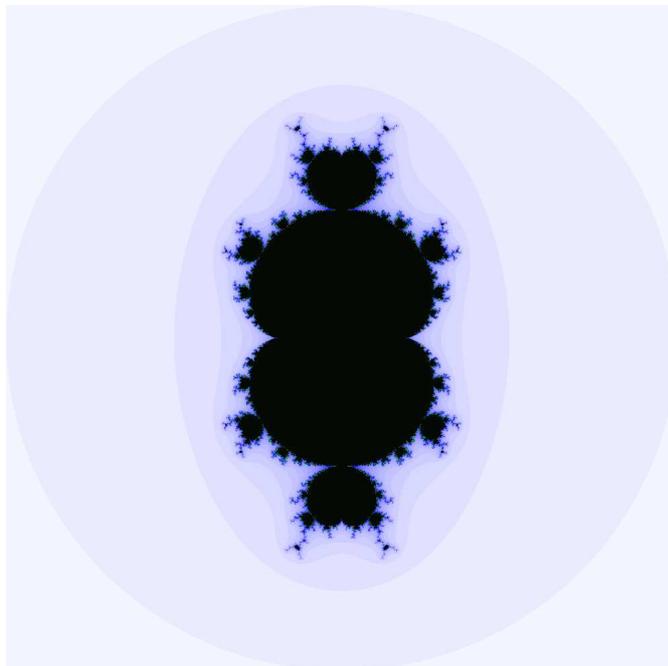


Figura 47: Conjunto de Mandelbrot para $g(z) = z^3 + c$.

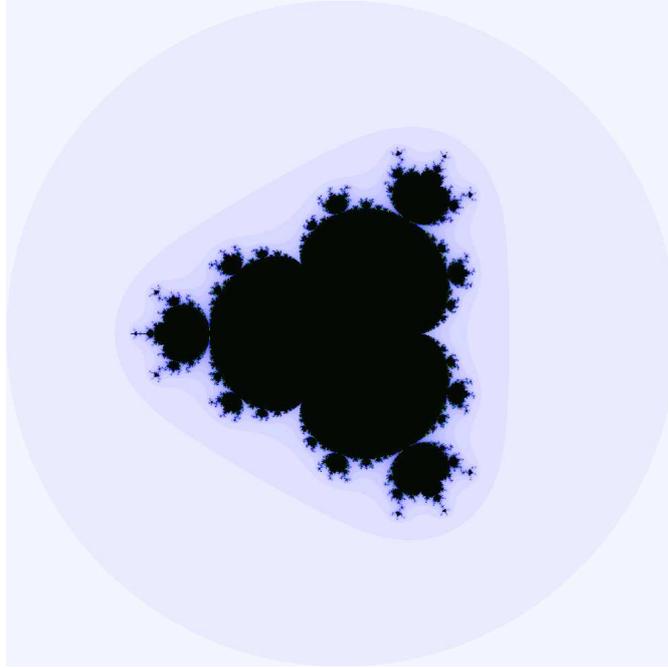


Figura 48: Conjunto de Mandelbrot para $h(z) = z^4 + c$.

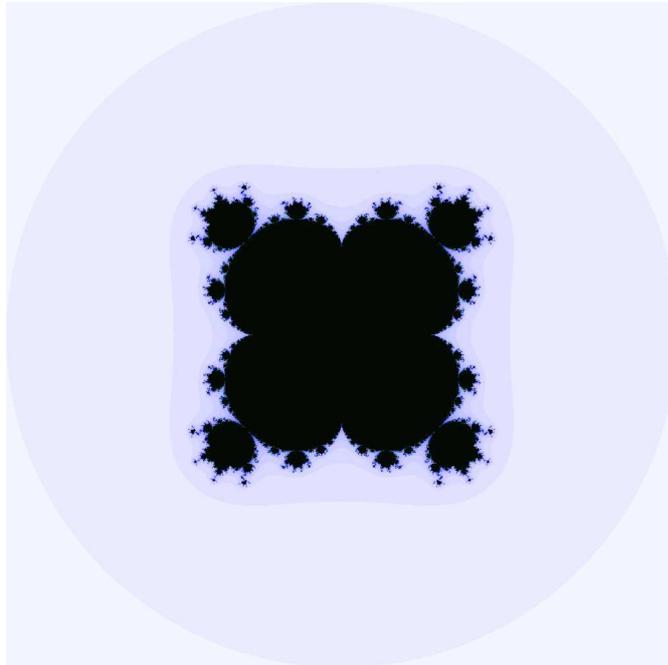


Figura 49: Conjunto de Mandelbrot para $i(z) = z^5 + c$.

6.6 Dimensão

A dimensão de capacidade, ou dimensão de auto-similaridade, descreve quantos novos pedaços geometricamente similares ao objeto inicial são observados quando a resolução é aumentada.

Exemplo 6.1. *Calculando a dimensão de uma reta.*

Considere um segmento de reta como na figura abaixo



Figura 50: Dimensão da reta.

Ao reduzir a escala pelo fator 3, encontramos 3 pedaços similares ao original,

$$\begin{aligned}d &= \frac{\log n}{\log f} \\ &= \frac{\log 3}{\log 3} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que a reta é unidimensional.

Exemplo 6.2. *Calculando a dimensão do plano.*

Considere um plano como a figura abaixo. Ao reduzir a escala pelo fator 3,

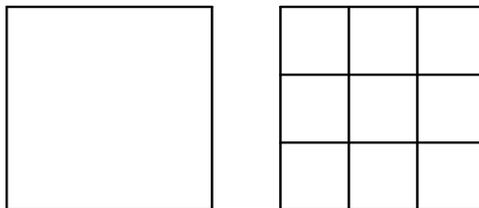


Figura 51: Dimensão do plano.

encontramos 9 pedaços similares ao original,

$$\begin{aligned}d &= \frac{\log n}{\log f} \\ &= \frac{\log 9}{\log 3} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que o plano é bidimensional.

Exemplo 6.3. *Calculando a dimensão do cubo.*

Considere um cubo como a figura abaixo. Ao reduzir a escala pelo fator 3,

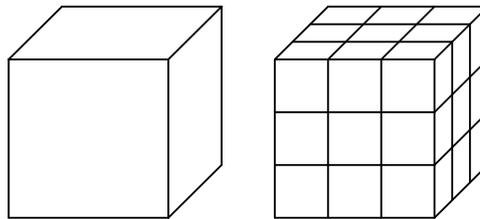


Figura 52: Dimensão do cubo.

encontramos 27 pedaços similares ao original,

$$\begin{aligned}d &= \frac{\log n}{\log f} \\ &= \frac{\log 27}{\log 3} \\ &= 3.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que o cubo é tridimensional, logo o espaço é tridimensional. Usaremos esta mesma ideia para definir a dimensão dos fractais. Vamos a Geometria Espacial.

6.6.1 Dimensão de fractais

Apesar de não conseguir uma equação simples que represente graficamente os fractais, podemos associar cada figura à alguma dimensão.

Conjunto de Cantor: Ao analisar este conjunto, podemos verificar que ao reduzir a escala em 3, encontramos 2 cópias idênticas. Assim o Conjunto de Cantor possui dimensão

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} < 1.$$

Curva de Peano: Reduzindo a escala em 3, encontramos 9 cópias idênticas, assim a curva de Peano possui dimensão.

$$d = \frac{\log 9}{\log 3} = 2.$$

Curva de Hilbert: Reduzindo a escala em 2, encontramos 4 cópias idênticas, assim a curva de Hilbert possui dimensão

$$d = \frac{\log 4}{\log 2} = 2.$$

Curva de Koch: Reduzindo a escala em 3, encontramos 4 cópias idênticas, assim a curva de Koch possui dimensão

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \Rightarrow 1 < d < 2.$$

Curva de Sierpinski: Reduzindo a escala em 4, encontramos 9 cópias idênticas, assim a curva de Koch possui dimensão

$$d = \frac{\log 9}{\log 4} \Rightarrow 1 < d < 2.$$

Triângulo de Sierpinski: Reduzindo a escala em 2, encontramos 3 cópias idênticas, assim a curva de Koch possui dimensão

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow 1 < d < 2.$$

Tapete de Sierpinski: Reduzindo a escala em 3, encontramos 8 cópias idênticas, assim a curva de Koch possui dimensão

$$d = \frac{\log 8}{\log 3} \Rightarrow 1 < d < 2.$$

6.6.2 Qual é o significado de uma dimensão fracionaria?

A dimensão está relacionada à forma com que medimos objetos. Assim uma linha só pode ser medida em uma dimensão, um quadrado em duas e um cubo em três.

Voltando ao triângulo de Sierpinski. Suponha que o triângulo tenha lado $l = 1$, logo seu perímetro é $p_0 = 3$. Assim

$$\begin{aligned} p_0 &= 3 \\ p_1 &= 3 + \frac{3}{2} = 3\frac{3}{2} \\ p_2 &= 3 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &\vdots \\ p_n &= 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty.$$

A sua área é $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ Assim

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \\ a_1 &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{3}{4} \\ a_2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Assim esta figura é um objeto com comprimento infinito e área zero!

7 Ensino de Geometria

O ensino de Geometria capacita o ser humano para a tarefa de interpretar e compreender as formas geométricas do mundo. Além de favorecer o processo de abstração e generalização das relações percebidas a nossa volta. A seguir citaremos um trecho de [25], o que reflete a importância do estudo de geometria em sala de aula:

“Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver situações de vida que forem geometrizadas”.

É inegável a importância da Geometria na vida das pessoas, porém muitos pesquisadores tem se mostrado perplexos diante do abandono do ensino da Geometria nas escolas. Como as orientações vêm na forma de parâmetros para a elaboração de estruturas curriculares, então são dadas como indicações que “podem” comparecer nas atividades escolares, desacompanhada de sua importância no desenvolvimento intelectual do aluno, para mais detalhes consulte [22].

Segundo [20], a razão para o declínio do ensino de geometria, deve-se a dificuldades conceituais causadas pelas argumentações lógicas que constituem a essência da Geometria Euclidiana, isto é, a dificuldade está na maneira de organizarem o raciocínio e construir argumentações lógicas.

O grande desafio é fazer a transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial. Embora os alunos já estejam habituados com as figuras tridimensionais, esse aprendizado nem sempre é fácil. O principal motivo, é que precisa ter alguma imaginação e desenvolver alguma habilidade de representar essas figuras em papéis além de adquirir um bom conhecimento das propriedades fundamentais entre as figuras espaciais [8].

Segundo [8],

“para que se tenha um ensino eficaz, deve-se apresentar os fundamentos de Geometria espacial com cuidado. Para que possa construir as propriedades a partir de um ponto inicial, que são os axiomas. O conjunto desses axiomas devem ser consistentes. Porém, as tentativas de formar um conjunto axiomático para Geometria se iniciaram com Euclides até que finalmente Hilbert, propôs um conjunto de axiomas consistente. Isto mostra que essa tarefa é mais delicada do que se parece.”

7.1 O Ensino da Geometria no Brasil

O ensino escolar brasileiro inicia quando o Brasil ainda era colônia de Portugal, com a companhia jesuíta. Poucas escolas jesuítas lecionavam matemática, pois além de não se interessar por matemática não a consideravam como algo importante para a formação do homem, mais detalhes em [22].

Muitos anos após a colonização portuguesa, houve o aumento populacional. Com a vinda de famílias poderosas e, no anseio de se estabelecerem no Brasil, houve a necessidade de formalizar o ensino. Houve então a expansão das escolas jesuítas por todo o território nacional. Apenas em 1573, quando os jesuítas inauguraram o colégio do Rio de Janeiro, é que o programa escolar incluiu além da alfabetização, as quatro operações elementares, veja em [22].

Segundo [29], foi somente no final do século XVII por uma ordem imperial que a Geometria e a Aritmética começaram a integrar à cultura escolar, com o objetivo de preparar os alunos que fariam as aulas de Artilharia e Fortificação.

Segundo [22], Jose Fernandes Pinto Alpoim se destacou como professor e autor dos dois primeiros livros didáticos escritos no Brasil, baseados em perguntas e respostas. O objetivo era ajudar o estudo dos novos soldados, mas também podiam atender a objetivos didáticos-pedagógicos.

Com a invasão de Portugal pelo exército de Napoleão, a Família Real foge para o Brasil e com ela vieram grandes alterações para o ensino de matemática. No início do século XIX, iniciaram-se os trabalhos na Academia Real dos guardas-marinha e a substituição da Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho pela Academia Real Militar, onde criou-se o curso de Matemática, dando um grande passo para o ensino da Geometria no Brasil. Ambas as academias seguindo o modelo francês de educação, mais detalhes em [22].

Com as mudanças feitas, iniciou uma nova etapa no ensino de matemática, que trouxe a produção de textos produzidos por brasileiros. Nesta etapa da construção do ensino no Brasil foi marcada pelo abandono de obra única para adotar livros de diversos autores em temas isolados, veja mais detalhes em [22].

Na década de 1930, chegou ao Brasil às ideias de Félix Klein, que propunha partir da intuição, isto é, partir de ideias e exemplos conhecidos pelos alunos, prezando o tratamento rigoroso da matemática de modo a trabalhar na matemática elementar conceitos avançados. Com esse novo modelo, a Álgebra, a Aritmética e a Geometria são integradas e denominadas Matemática, surgindo assim à necessidade de novos livros

didáticos para dar conta da disciplina, mais detalhes em [22].

Com a preocupação com a adequação do ensino, foi dada maior ênfase à Álgebra e Aritmética, e foi proposto um maior rigor a Geometria, enfatizando os postulados e axiomas, o que levou a muitos professores terem dificuldade de ensiná-la, destinando o seu ensino ao final do ano letivo, o que acarretou por muitas vezes ao não ensino da mesma, para mais detalhes consulte [29].

7.2 Normas Regulamentares do Ensino Básico

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional ([16]) e o Plano Nacional de Educação ([28]), expressa a política e o planejamento educacional do país.

Segundo a Art.22 da LDB ([16]), a educação básica deve fornecer um currículo que prepare o aluno para a cidadania, para o exercício de uma profissão assim como a continuidade dos estudos posteriores.

Segundo [27], é por este motivo que a Matemática deve articular, interagir e sistematizar para desenvolver técnicas de descrever e interpretar o mundo. Um exemplo é a forma lógica que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas a nossa volta, possibilitando assim que entendam, discutam e analisem as estruturas geométrica encontrada nas construções ou predileções dos artistas.

Com o relacionamento do ensino com o cotidiano dos alunos, a Geometria deixa de ser um conjunto de postulados e demonstrações, e se tornar uma oportunidade de entender como a Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, assim como desenvolve o pensamento lógico dedutivo, mais detalhes em [27].

Segundo [27],

“as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas, podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.”

Dessa forma é de fundamental importância o ensino de Geometria que proporcione o avanço no conhecimento dos alunos, e que este conhecimento possa ser relacionado com o ambiente ao qual ele esteja inserido. É importante introduzir as entidades fundamentais como noções primitivas e apresentar alguns axiomas como propriedades

a serem aceitas sem demonstração para ajudar os alunos a correlacionar entidades matemáticas com noções intuitivas.

8 Geometria Espacial em sala de aula

A arte de desenhar permite ao estudante desenvolver saberes culturais, sociais e científicos. Assim o relacionamento entre a arte e o ensino de matemática em particular da Geometria, torna as aulas mais atrativas e assim pode proporcionar um aprendizado diferenciado.

Ao ilustrar uma figura bidimensional, é possível reconhecer algumas propriedades com a ajuda da intuição dos alunos. Mas quando ela é tridimensional, enfrentamos limitações de diversas ordem como por exemplo, não dispor de formas práticas para representar com fidelidade objetos tridimensionais. Com um desenho o aluno pode pensar e analisar melhor os elementos da figura, e aprender de uma maneira mais crítica sobre assuntos sociais, científicos, entre outros.

Segundo [21], uma boa alternativa, é trabalhar com projeções bidimensionais, com o objetivo de que os alunos compreendam o sentido do desenho apresentado. Além de ser mais fácil a compreensão para os alunos ainda pode remeter a ideia de infinito. Se um aluno consegue desenhar usando perspectiva, é porque ele compreendeu como se faz a passagem do tridimensional para o bidimensional. Assim ele poderá visualizar todas as figuras que necessitar. Em [20], o autor cita que “um aluno aprende a resolver problemas resolvendo problemas de qualidade”. Esta é uma outra abordagem, que torna a matemática mais significativa para o aluno, tornando-o mais capacitado a se adaptar a novas situações e a abordar novos problemas com segurança.

Podemos encontrar outra abordagem para o ensino de Geometria em [6]. Brito propõe fazer uso de Software para facilitar a aprendizagem. Com o software, é possível facilitar a percepção e a abstração dos elementos geométricos, além de enriquecer o processo de ensino-aprendizagem através de uma nova abordagem.

8.1 Uso do Software Geogebra

O Geogebra é um software livre que pode ser instalado e utilizado em todas as plataformas. Isto é possível pois utiliza a máquina virtual Java, ou JMV, que possui versões para todos os tipos de sistemas operacionais. Além de ser gratuito, existem também versões do Geogebra para aplicativos com o sistema androide.

Neste capítulo, utilizaremos algumas ferramentas do Geogebra, para formar figuras bidimensionais com a sensação de figuras tridimensionais.

Construção de Pirâmide de base n lados:

1. Crie um novo ponto, para isso veja a Figura 4;
2. Crie um círculo de raio 5, e centro no ponto criado, para isso veja a Figura 12;
3. Crie um ponto sobre o círculo;
4. Defina um ângulo de amplitude fixa ($\frac{360^\circ}{n}$), onde n é a quantidade de lados que deseje, para isso veja a Figura 13;
5. Crie um polígono regular de n lados que tenha os dois últimos pontos criado como vértices, para isso veja a Figura 11;
6. Modifique a escala dos eixos, para isso veja a Figura 15;
7. Crie um ponto fora do polígono;
8. Crie segmentos de reta ligando o ponto fora do polígono aos seus vértices, para isso veja a Figura 7;
9. Para visualizar melhor, use o comando esconder, para isso veja a Figura 14;

Para $n = 5$ obtemos a pirâmide como mostra a Figura 53.

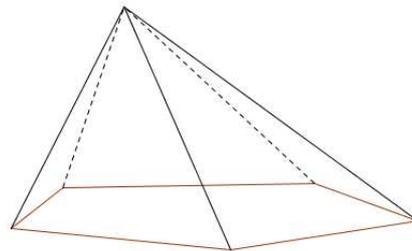


Figura 53: Pirâmide.

Construção de um paralelepípedo:

1. Crie dois novos pontos A e B , para isso veja a Figura 4;
2. Crie uma reta s que passe pelos pontos A e B , para isso veja a Figura 8;
3. Crie um círculo de raio 5, e centro em A , para isso veja a Figura 12;
4. Crie o ponto C sobre o círculo;

5. Defina um ângulo de amplitude fixa 90° , para isso veja a Figura 13;
6. Crie um polígono regular de 4 lados que tenha os vértices C e C' , para isso veja a Figura 11;
7. Modifique a escala dos eixos, para isso veja a Figura 15;
8. Para cada vértice do polígono, crie uma reta paralela à s , para isso veja a Figura 9;
9. Crie o ponto I sobre a reta que passe por C e paralela a s ;
10. Crie as retas que passe por G e são paralela às retas CD e CE ;
11. Encontre os pontos de intersecção entre as retas paralelas a CD e CE e as retas paralelas a s que passam por D e E , para isso veja a Figura 6;
12. Crie a reta que passe por K e é paralela a reta DG ;
13. Encontre o ponto de intersecção entre a reta que passa por K paralela à reta DG e a reta que passa por G paralela a s ;
14. Crie os segmento de reta ligando os pontos CE , EG , GD , DC , IH , HJ , JK , KI , CI , EH , GJ , DK , para isso veja a Figura 7;
15. Para visualizar melhor, use o comando esconder, para isso veja a Figura 14;

Assim obtemos um paralelepípedo como mostra a Figura 66.

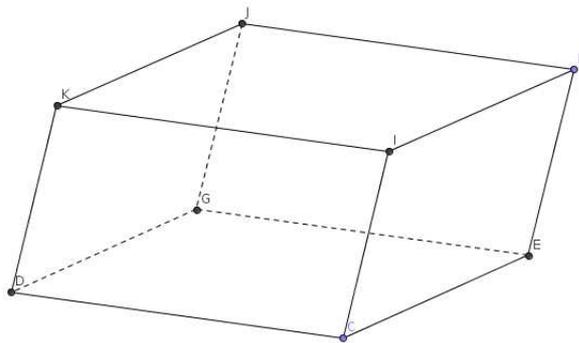


Figura 54: Paralelepípedo.

Seguindo passos semelhantes, podemos criar figuras como o prisma, pirâmide regular e prisma regular como as figuras seguintes.

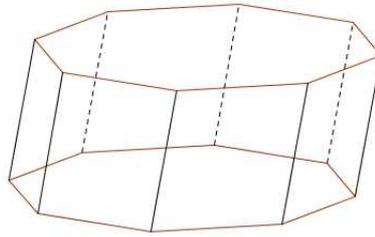


Figura 55: Prisma.

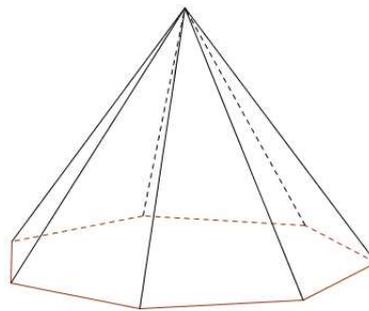


Figura 56: Pirâmide Regular.

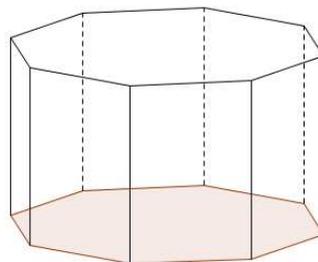


Figura 57: Prisma Regular.

A construção destes sólidos no Geogebra, permite que os alunos entenda melhor e participe da construção dos sólidos, permitindo assim ter mais interação com os conteúdos apresentados no capítulo 4.

Assim a possibilidade de trabalhar com figuras dinâmicas, é uma ferramenta útil para a percepção dos alunos no desenvolvimento das atividades, gerando assim um melhor entendimento do que pode ocorrer com as figuras no espaço.

9 Geometria Fractal em sala de aula

O homem e a natureza trabalham com a Geometria em suas construções, porém o homem usa a Geometria Euclidiana, e a natureza usa outra Geometria, que é denominada de Geometria Fractal.

As atividades envolvendo fractais auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, interação entre os conceitos matemáticos e os elementos que podem ser encontrados no cotidiano, a criatividade, entre outras habilidades.

A seguir citaremos um trecho de [31] que reflete a importância de inserir Geometria Fractal no ensino médio.

“A introdução de fractais no ensino médio, além de satisfazer a curiosidade dos alunos que já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométrica e estímulo ao uso de tabelas”.

Como introduzir os conceitos de Geometria Fractal no ensino básico?

A Geometria Fractal pode ser introduzida com o objetivo de investigar como os alunos percebem as formas geométricas dos objetos e processos da natureza, buscando assim dar significado para os conteúdos ministrados no ensino médio.

Uma opção é propor e analisar estratégias didáticas para ensinar a geometria fractal a partir da observação dos objetos e fenômenos da natureza.

Nesta atividade, segundo [1] estabelece três objetivos a serem seguidos:

1. Identificar e analisar como os alunos percebem as formas geométricas;
2. Identificar, após a discussão em sala de aula, se são capazes de estabelecer diferenças nas formas que a natureza e o homem constroem seus objetos;
3. Analisar os conhecimento adquirido pelos alunos e suas articulações, com relação à Geometria Euclidiana e Fractal.

No trabalho apresentado em [1], o autor concluiu que os estudantes ampliaram seus conhecimentos em função da intervenção didática proposta. Se usar a técnica adequada, é possível introduzir conceitos abstratos, como auto-similaridade.

Segundo [31], uma atividade que pode ser trabalhada é o triminó, que oportuniza o trabalho com sequências e progressões geométricas.

Construção do triminó:

1. Utilizando pecinhas quadradas (ou cubinhos), faça a conexão de três quadrados (cubos) em forma de L;
2. Substitua cada quadrado (cubo) por um triminó;
3. repita o item 2 sucessivamente.

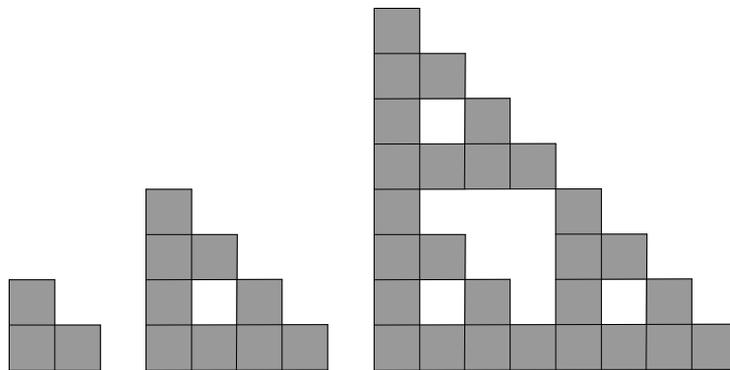


Figura 58: Triminó.

Após a construção, pode-se explorar a quantidade de peças que foram utilizadas em cada iteração, e construir a tabela abaixo:

Nível do fractal	Quantidade de quadrados
1	$3 = 3^1$
2	$9 = 3^2$
\vdots	\vdots
n	3^n

Com isso, podemos induzir os alunos a descobrir a lei de formação das sequências. Também pode ser trabalhado os conceitos de potências com os alunos, que são conceitos de Álgebra.

Podemos utilizar o mesmo procedimento em vários fractais tradicionais, como se segue:

Exemplo 9.1. *Quantos triângulos temos ao efetuar n iterações no triângulo de Sierpinski?*

Exemplo 9.2. *Quantos segmentos de retas possui o conjunto de Cantor com n iterações?*

Exemplo 9.3. *Considerando que o tamanho de um segmento de reta seja l , aplicando n iterações da curva de Koch, qual será o seu comprimento?*

Exemplo 9.4. *Considerando que a área inicial de um triângulo seja a , qual será sua área após n iterações do triângulo de Sierpinski?*

Uma alternativa, é fazer uso de softwares dinâmicos como o Geogebra para criar alguns fractais tradicionais, usando apenas conceitos de Geometria Plana. Um exemplo é a construção da curva de Koch usando apenas o Teorema 3.6, retas paralelas e triângulos equiláteros. Seguem os passos para sua construção.

1. Crie um polígono regular de 3 lados em Polígono Regular, para isso veja a Figura 11;
2. Crie um ponto D fora do triângulo equilátero em Novo Ponto, de forma que a reta AB não intercepta o ponto D , para isso veja a Figura 4;
3. Crie o ponto médio E entre os pontos A e D , e depois F entre os pontos A e E , e G entre E e D , para isso veja a Figura 5;
4. Crie um segmento de reta ligando o ponto G com o vértice B , para isso veja a Figura 7;
5. Crie retas paralela ao segmento BG que passe pelos pontos E e G , para isso veja a Figura 9;
6. Crie os pontos H e I de intersecção entre essas retas e o lado AB do triângulo, para isso veja a Figura 6;
7. Crie um polígono regular de 3 lados definidos pelos pontos H e I , para isso veja a Figura 11;

- Use a opção Exibir/Esconder para visualizar melhor o gráfico fractal, para isso veja a Figura 14;

Na Figura 59, temos o resultado até aqui da construção:

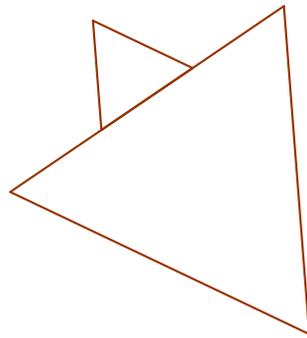


Figura 59: Ilha de Koch no Geogebra.

- Repita o processo 2 ao 9 para os lados BC e CA do triângulo, deixando conforme a Figura 60.

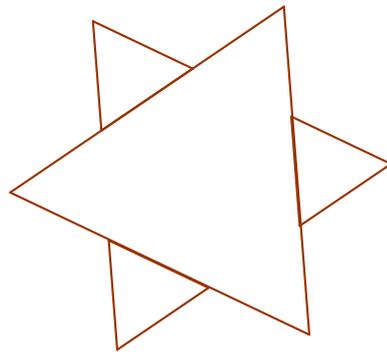


Figura 60: Finalizando a primeira iteração da ilha de Koch.

A próxima iteração, é conforme a figura 61.

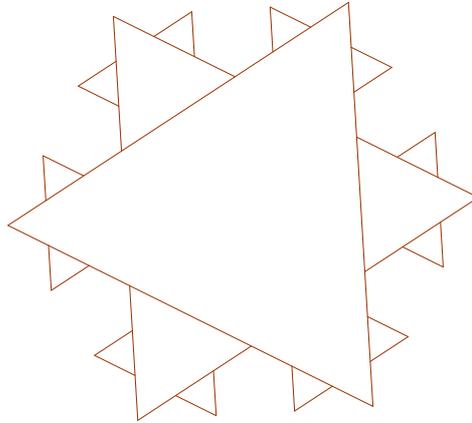


Figura 61: Segunda iteração da ilha de Koch.

Outro exemplo é a construção do triângulo de Sierpinski, que pode se fazer seguindo os seguintes passos:

1. Crie um polígono regular de 3 lados, para isso veja a Figura 11;
2. Encontre o ponto médio de cada lado, para isso veja a Figura 5;
3. Ligue esses pontos médios por um segmento de reta, para isso veja a Figura 7;
4. Repita o procedimento 2 e 3.

Com conceitos semelhantes, é possível construir outros fractais com a mesma facilidade. Pode-se usar também outros tipos de conceitos para construir os mesmos fractais, como usando operações entre pontos, ângulos entre outros.

Uma atividade interessante, é sugerir que cada aluno crie seu próprio fractal usando os desenhos geométricos conhecidos, com o desafio de determinar uma lei de formação do cálculo do perímetro e da área da figura (se possível).

9.1 Uso da Linguagem Java

Utilizar um programa pronto e executar os passos é muito importante, pois os alunos podem aprender a relacionar muitos conhecimentos. Entretanto para alguns alunos, isto não oferece desafios, por este motivo podemos indicar esses alunos a aprenderem alguma linguagem de programação.

A linguagem Java foi escolhida pois está presente em todas as plataformas de sistemas operacionais, possibilitando que um único programa em Java possa funcionar em todos os outros sistemas operacionais (graças a Máquina Virtual Java JVM), e ainda dispõe de várias ferramentas que facilitam a programação de diversos tipos de programas. Isto motivou a utilizá-la como exemplo para gerar as figuras dos fractais tradicionais, citados na seção 6.2 e gerá-los com mais iterações, e também os conjuntos de Fatou e Mandelbrot.

Para programar em Java, o primeiro passo, é inserir as bibliotecas responsáveis para gerar a imagem, cor, arquivo. Para gerar as imagens utilizamos a biblioteca Graphics2d.

Na criação do método main (principal do programa), é definido o tamanho da imagem, e os objetos que serão alocados. Outro método utilizado é o que permite fazer a iteração da função que gera algum fractal.

Veja a seguir os fractais tradicionais com mais iterações.

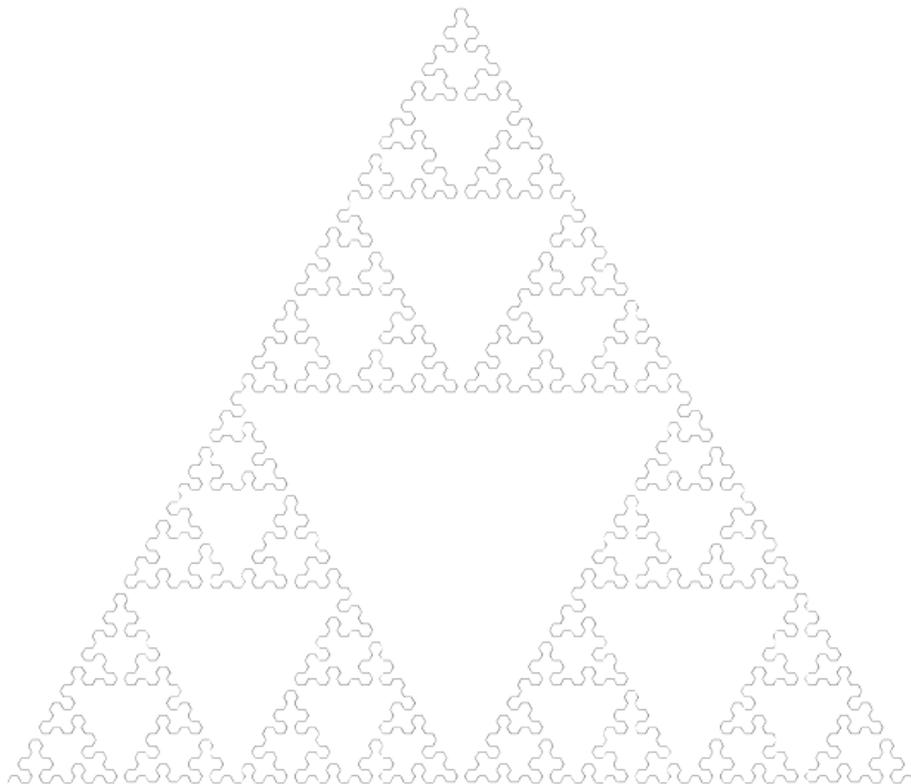


Figura 62: Curva de Sierpinski com 8 iterações.

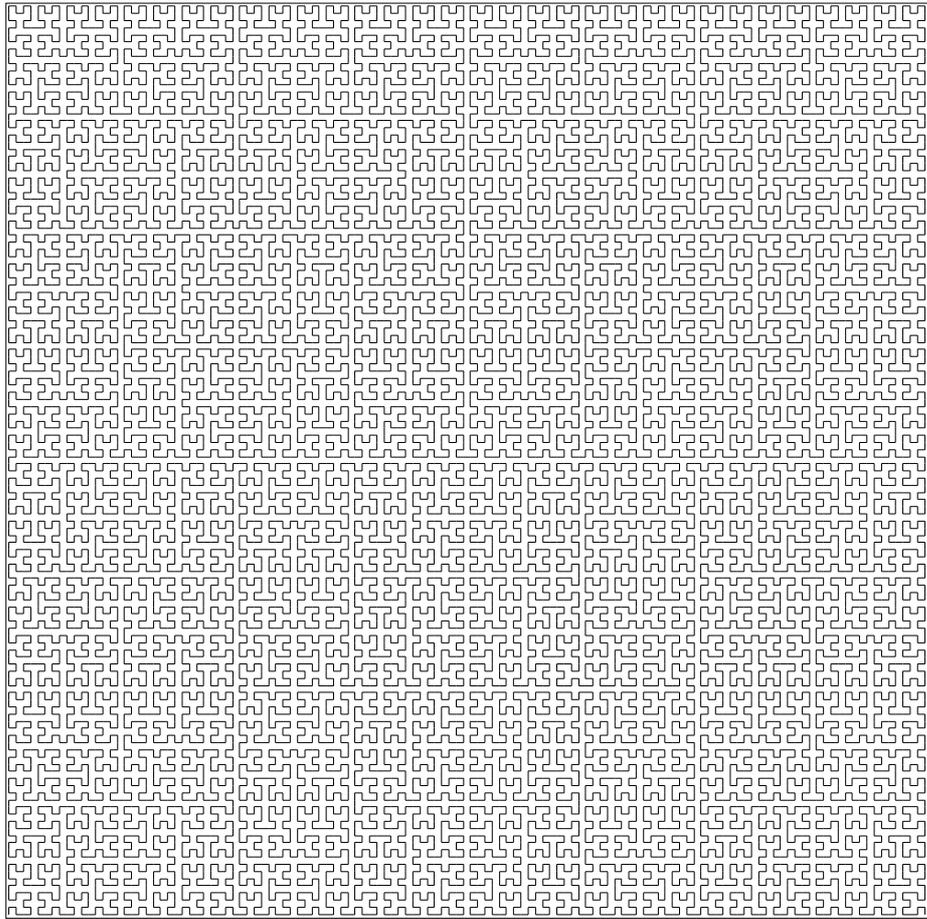


Figura 63: Curva de Hilbert com 7 iterações.

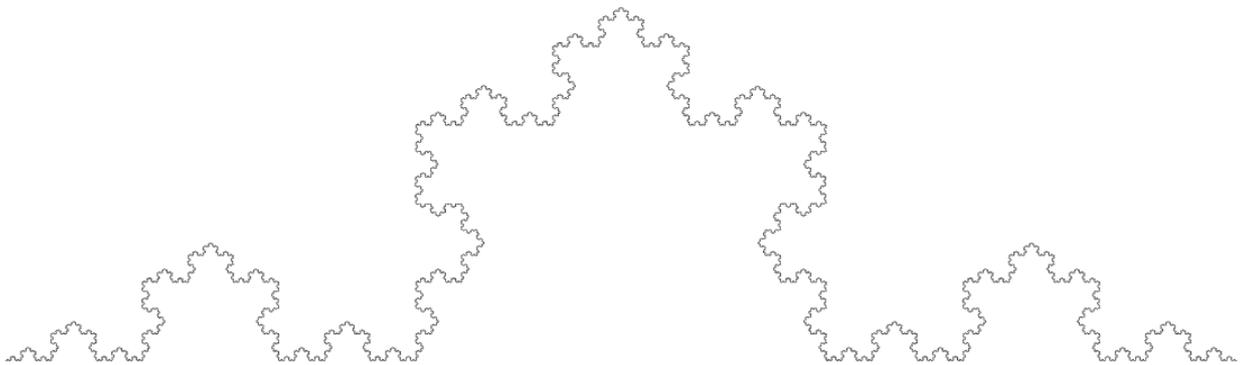


Figura 64: Curva de Koch com 8 iterações.

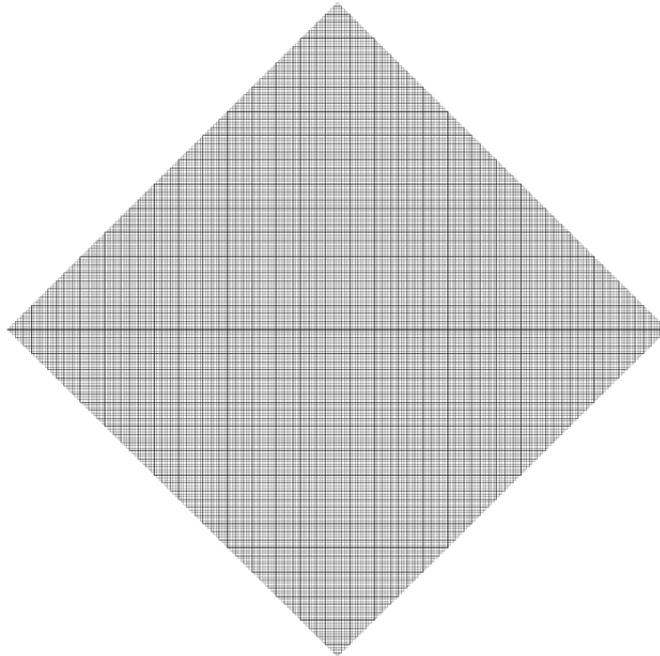


Figura 65: Curva de Peano com 8 iterações.

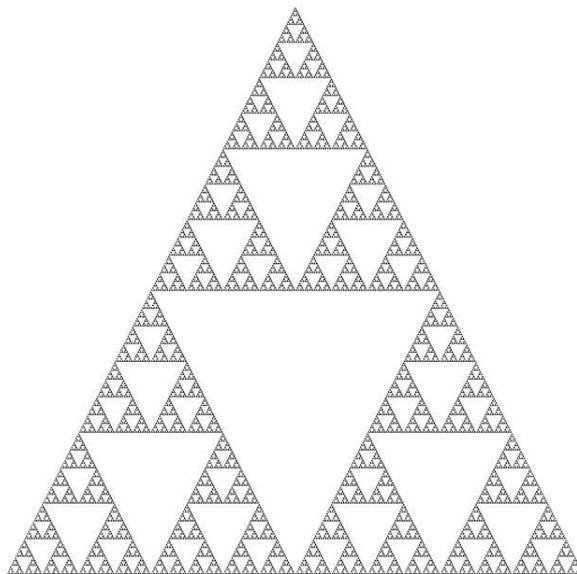


Figura 66: Triângulo de Sierpinski com 8 iterações.

Com a aprendizagem de uma linguagem de programação como a Java, por exemplo, os alunos aprendem alguns conceitos como: representação de programação de algumas funções matemáticas; processo de iteração de função ou função recursiva; representação de números Inteiros, e Reais; representação gráfica das figuras entre outros. Não indicamos ensinar a todos os alunos, pois exige paciência e interesse de quem ensina e aprende. Mas é um bom desafio para alguns alunos.

Para mais detalhes da implementação de alguns códigos, consulte 11.1 e para aprender mais detalhes sobre a linguagem Java consulte qualquer tutorial na internet ou em [26].

10 Considerações Finais

Este trabalho busca dar ao ensino de Geometria Espacial uma ênfase em sua teoria, isto é, apresentar a construção de um sólido, assim que tiver os conceitos necessários apresentados. Com isso, os alunos podem entender e interagir com a ajuda do software sobre os requisitos necessários para tal construção.

A outra opção é trazer a matemática ao cotidiano dos alunos, buscando apresentar novos conceitos que podem ajudar a estimular os alunos, e os fazer entender que os conhecimentos transmitidos em sala de aula, são uma descrição da natureza e das relações diárias.

A utilização do software tanto para o ensino de Geometria Espacial quanto para a Geometria Fractal, traz facilidade para o desenvolvimento do ensino, pois possibilita uma maior interação do aluno com o conteúdo, proporcionando a evolução em sua capacidade visual e abstração de conceitos geométricos, além de ser uma ferramenta que é de interesse dos alunos.

Desta forma, o ensino de Geometria pode trazer diversos benefícios para os alunos, como o estímulo a criatividade, ao raciocínio lógico, o aumento da motivação em aprender matemática, dentre outros benefícios.

Referências

- [1] ALVES, A.D. *Introduzindo a Geometria Fractal no Ensino Médio: Uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza*. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.
- [2] BALADÃO, P. DE O. *Geometrias não-Euclidianas: O Desenvolvimento da Geometria Hiperbólica*. Disponível em http://mandrake.mat.ufrgs.br/~mat01074/20072/paula/Geometrias_ao_euclidianas.pdf. Acessado em 03/02/2015.
- [3] BARBOSA, J.L.M. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 1993. 222 p.
- [4] BARBOSA, J.L.M. *Geometria Hiperbólica*. Goiânia: UFG, 2002. 189 p.
- [5] BARBOSA, R.M. *Descobrimos a Geometria fractal para sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 142 p.
- [6] BRITO, F.P. *O Uso de Software no Ensino de Geometria Espacial Posicional*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Lavras, MG. 2013.
- [7] CARMO, M.P.J; AUGUSTO, C.M.; WAGNER, E. *Trigonometria, Números Complexos*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, s.d. 121 p.
- [8] CARVALHO, P.C.P *Introdução à Geometria Espacial*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1993. 93 p.
- [9] DEVANEY, R.L.; KEEN, L. *Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics*. Rhode Island: American Mathematical Society Providence, 1990. 149 p. Proceedings of symposia in applied mathematics, vol. 39.
- [10] DEVANEY, R.L. *Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics*. Massachusetts: Boston University, 1990. 181 p.
- [11] DOLCE, O.; POMPEO J.N *Fundamentos de Matemática Elementar vol. 09*. São Paulo: Editora Atual, 1995. 451 p.
- [12] EVES, H. *Introdução a História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

- [13] *O que são e como medir as dimensões Fractais?*. Disponível em: <http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/fractais/fractais3.html>. Acesso em: 17 fev. 2015.
- [14] GEOGEBRA *Ajuda Geogebra: Manual Oficial da Versão 3.2*. Disponível em: <<http://static.geogebra.org/help/docuPT.pdf>>. Acesso em: 17 fev. 2015.
- [15] JANOS, M. *Geometria Fractal*. Rio de Janeiro: Editora Ciencia Moderna, 2008. 100 p.
- [16] LDB *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996*. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>>. Acesso em: 17 fev. 2015.
- [17] LIMA, E.L. *Análise Real; Funções de uma Variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009, 195 p. Coleção Matemática Universitária.
- [18] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, E.; MORGADO, A.C *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2009. vol. 01. Coleção do Professor de Matemática. p.266.
- [19] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P; WAGNER, E.; MORGADO, A.C *A Matemática do Ensino Médio*. , Rio de Janeiro: SBM, 2009. vol. 02. Coleção do Professor de Matemática. p.373.
- [20] LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A.P. *Aprendeno e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual editora ltda. 1998. 308 p.
- [21] MEDEIROS, L.S. *Visualização de Figuras Geométricas Tridimensionais: Um Olhar a Partir da técnica da perspectiva*. Disponível em: <<http://www.educasul.com.br/2011/anais/formacao/Liliane%20Silveira%20de%20Medeiros.pdf>>. Acesso em 17 fev. 2015.
- [22] MOCROSKY, L.F.; MONDINI, F.; ESTEPHAN, V.M. *O Ensino de Geometria no Brasil: Alguns Aspectos da sua Origem nos Livros Didáticos Brasileiros*. III Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia. Ponta Grossa. 2012.
- [23] MIRANDA, A.J. *Fractais: Conjunto de Julia e Conjuntos de Mandelbrot*. IN: I Semana da Matemática da Unfal-MG. MG, 2012.
- [24] MLDINOW L. *A Janela de Euclides*. Geração Editora, 2004. 294 p.

- [25] NASCIMENTO, M. DO; SILVA, S.C.R. DA; MACIEL, N.A. *Uma Proposta Didática para o Ensino de Geometria Fractal em sala de aula na Educação Básica*. Santa Maria: VIDYA, 2012. v.32.
- [26] PATRÍCIA, A.J. *Programação Básica em Java*. Disponível em: <http://professor.unisinos.br/pjaques/papers/Programacao%20Basica%20em%20Java_homepage.pdf>. Acesso em 17 fev. 2015.
- [27] PCN *Parâmetros Curriculares Nacionais de 2000*. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 17 fev. 2015.
- [28] PNE *Plano Nacional de Educação de 2014*. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm>. Acesso em: 17 fev. 2015.
- [29] SILVA, A.R. DA *Uma Proposta para o Ensino de Geometria Espacial Métrica no Ensino Médio*. Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Lavras, MG. 2013.
- [30] STRUIK, D.J. *História Concisa das matemáticas*, Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Título original: A concise History of Mathematics. Lisboa, 1992.
- [31] VALIM, J.C.; COLUCCI, V. *Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio*. In. XXII Semana Acadêmica de Matemática. PR. s.d.
- [32] WIKIPEDIA *Fractal*. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>>. Acesso em: 06 de fev. 2015

11 Apêndice

11.1 Linguagem Java

Para iniciar nosso programa em Java, primeiramente coloca-se as bibliotecas

1. Para indicar que receberá entradas do teclado, isto é, no teclado irá definir a quantidade de iterações, ou o valor das variáveis.

- `import java.util.Scanner;`

2. Para indicar que usará a biblioteca padrão de cores RGB;

- `import java.awt.Color;`

3. Para indicar que irá gerar a imagem pelo Graphics2D;

- `import java.awt.Graphics2D;`
- `import java.awt.image.BufferedImage;`
- `import java.awt.image.RenderedImage;`
- `import java.io.File;`
- `import javax.imageio.ImageIO;`

4. Para indicar que irá cobrir uma região qualquer;

- `import java.awt.geom.Area;`
- `import java.awt.geom.GeneralPath;`

Feito isso, iniciar a construção do programa principal (main), para isto, iniciamos definindo os objetos Graphics2D e BufferedImage.

1. `BufferedImage bufferedImage = new BufferedImage(altura, largura, BufferedImage.TYPE_INT_RGB);`
2. `Graphics2D g2d = bufferedImage.createGraphics();`

Após definir, basta colorir de branco e iniciar a construção da figura.

1. `g2d.setColor(Color.white);`
2. `g2d.fillRect(0, 0, altura, largura);`

11.1.1 Curva de Koch

Para a construção, optamos pela utilização de uma função recursiva, por exemplo para a curva de Koch, enviamos como parâmetro o gráfico g2d, altura, largura do quadro da figura, e a quantidade de iterações n .

```
paint(g2d, 10 * x/9, y, 9 * x/10, 9 * y/10, n);
```

A função recursiva irá receber os parâmetros já renomeados, como segue:

```
public static void paint(Graphics2D g2d, double a, double b, double c, double d, int n)
```

Em cada iteração verifica, se $n > 1$ chama novos quatro casos como segue:

1. `paint(g2d, a, b, (c - a)/3 + a, (d - b)/3 + b, n - 1);`
2. `paint(g2d, (c - a)/3 + a, (d - b)/3 + b, -(a - c)/6 - (b - d)* Math.sqrt(3)/6 + 2 * (a - c)/3 + c, (a - c)* Math.sqrt(3) /6 - (b - d)/6 + 2 * (b - d)/3 + d, n - 1);`
3. `paint(g2d, -(a - c)/6 - (b - d)* Math.sqrt(3)/6 + 2 * (a - c)/3 + c, (a - c)* Math.sqrt(3) /6 - (b - d)/6 + (2*(b - d)/3 + d), 2*(c - a)/3 + a, 2*(d - b)/3 + b, n - 1);`
4. `paint(g2d, 2 * (c - a)/3 + a, 2 * (d - b)/3 + b, c, d, n - 1).`

Se $n = 1$ desenha o segmento de reta no gráfico g2d. Assim obtemos a Curva de Koch para n iterações.

11.1.2 Curva de Peano

Para a Curva de Peano, construímos a função main com os mesmos padrões. A chamada da função recursiva é a seguinte:

```
paint(g2d, x/10, y/2, 9 * x/10, y/2, n);
```

A função recursiva irá receber os parâmetros já renomeados, como segue:

```
paint(Graphics2D g2d, int a1, int b1, int a2, int b2, int n)
```

Em cada iteração, desenha o segmento de reta definida pelos pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , e verifica se $n = 1$, caso contrário, chama novos nove casos como segue:

1. `paint(g2d, a1, b1, (a2 + 2 * a1)/3, (b2 + 2 * b1)/3, n - 1);`
2. `paint(g2d, (a2 + 2 * a1)/3, (b2 + 2 * b1)/3, (2 * a2 + a1)/3, (2 * b2 + b1)/3, n - 1);`
3. `paint(g2d, (a2 + 2 * a1)/3, (b2 + 2 * b1)/3, (a2 + 2 * a1)/3 + (b2 - b1)/3, (b2 + 2 * b1)/3 + (a2 - a1)/3, n - 1);`

4. $\text{paint}(\text{g2d}, (a_2 + 2 * a_1)/3, (b_2 + 2 * b_1)/3, (a_2 + 2 * a_1)/3 - (b_2 - b_1)/3, (b_2 + 2 * b_1)/3 - (a_2 - a_1)/3, n - 1);$
5. $\text{paint}(\text{g2d}, (2 * a_2 + a_1)/3, (2 * b_2 + b_1)/3, a_2, b_2, n - 1);$
6. $\text{paint}(\text{g2d}, (2 * a_2 + a_1)/3, (2 * b_2 + b_1)/3, (2 * a_2 + a_1)/3 + (b_2 - b_1)/3, (2 * b_2 + b_1)/3 + (a_2 - a_1)/3, n - 1);$
7. $\text{paint}(\text{g2d}, (2 * a_2 + a_1)/3, (2 * b_2 + b_1)/3, (2 * a_2 + a_1)/3 - (b_2 - b_1)/3, (2 * b_2 + b_1)/3 - (a_2 - a_1)/3, n - 1);$
8. $\text{paint}(\text{g2d}, (a_2 + 2 * a_1)/3 + (b_2 - b_1)/3, (b_2 + 2 * b_1)/3 + (a_2 - a_1)/3, (2 * a_2 + a_1)/3 + (b_2 - b_1)/3, (2 * b_2 + b_1)/3 + (a_2 - a_1)/3, n - 1);$
9. $\text{paint}(\text{g2d}, (a_2 + 2 * a_1)/3 - (b_2 - b_1)/3, (b_2 + 2 * b_1)/3 - (a_2 - a_1)/3, (2 * a_2 + a_1)/3 - (b_2 - b_1)/3, (2 * b_2 + b_1)/3 - (a_2 - a_1)/3, n - 1);$

Com esses passos, podemos construir a curva de Peano. Fazendo algumas modificações, podemos construir para qualquer fractal tradicional.

11.1.3 Conjunto de Julia

Para o conjunto de Julia, deve analisar cada ponto se pertence ou não a órbita de c . Dado o valor de $c = vr + vi$, onde vr, vi é o valor real e imaginário de c , n é o número de iterações, e pot é a potência da função $f(z) = z^{pot} + c$. Para cada $i, j \geq 0$ e $i < fazemos$

```
double x1 = (double)(i - largura/2), y1 = (double)(j - altura/2), x2, x3, y2;
while(n > 1 && (Math.sqrt(x1 * x1 + y1 * y1) <= 2)) {
    x2 = x1;
    y2 = y1;
    j = pot;
    while(j > 1) {
        x3 = x1;
        x1 = x1 * x2 - y1 * y2;
        y1 = x3 * y2 + y1 * x2;
        j --;
    }
    x1 += vr;
```

$$\left. \begin{array}{l} y_{1+} = vi; \\ n - -; \end{array} \right\}$$

se $i = 0$, então o ponto (i, j) pertence ao Conjunto de Julia, e basta selecionar uma cor segundo os padrões *RGB* e colorir no gráfico *g2d*. Assim teremos o conjunto de Julia para um determinado $c \in \mathbb{Z}$. A construção do conjunto de Mandelbrot é semelhante, e é deixado como exercício para o leitor.