INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Uma Análise Crítica das Provas da Segunda Fase da OBMEP 2014

Leandro da Silva Machado

Orientador: Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro, Brasil
Abril de 2015

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Uma Análise Crítica das Provas da Segunda Fase da OBMEP 2014

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho, PhD.

Leandro da Silva Machado

Orientador: Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro, Brasil
Abril de 2015

Leandro da Silva Machado

Uma Análise Crítica das Provas da Segunda Fase da OBMEP 2014

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho (Orientador-IMPA)

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira (IMPA)

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti (UFSCar)

Rio de Janeiro, Brasil
Abril de 2015

Dedicatória

Aos meus queridos alunos

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, aos meus pais Paulo Cezar e Efigênia pela criação que me permitiu chegar até aqui, à minha esposa e companheira de profissão Aline Guedes, pelo apoio, por revisar o material e contribuir com sugestões significativas, ao meu filho Pedro por me inspirar e aos meus irmãos Paulo José e Ana Paula, por me apoiarem.

Agradeço ao Prof. Paulo Cezar pela dedicação na orientação, à SBM, à CAPES, aos professores e funcionários do IMPA e aos demais professores do PROFMAT, por viabilizarem o curso com enorme qualidade.

Agradeço aos colegas de curso, por estarem sempre prontos a ajudar, ao Prof. Pedro Malagutti, pela gentileza em conceder a entrevista que consta na seção 5.1 deste trabalho e à Prefeitura Municipal de Duque de Caxias.

Resumo

O projeto OBMEP consolidou-se no Brasil após 10 anos de sucesso. A estrutura das questões presentes nas provas, privilegiando o raciocínio e a criatividade, possibilitam que os professores de Matemática da Rede Pública de Ensino atualizem suas metodologias de ensino. Neste trabalho, analisamos as provas da 2ª fase da OBMEP 2014, em relação aos conteúdos abordados e resultados obtidos por uma determinada amostra. Além disto, apresentamos algumas possibilidades de exploração das questões da OBMEP em turmas regulares do Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Abstract

The OBMEP project consolidated in Brazil after 10 years of success. The questions´ structure present in the tests, focusing on logic and creativity, enable the mathematics teachers of the Public Education update their teaching methods. In this work, we analyze the tests of the 2nd phase of OBMEP 2014 in relation to the included contents and results obtained for a determinated sample. Furthermore, we present some exploring possibilities of OBMEP questions in regular classes of Secondary and High School.

Lista de Figuras

1 Solução da Questão 5a, Nível 1 22
2 Peças dos Tipos 1 e 2, Questão 5c, Nível 1 23
3 Cobertura de um quadrado 8x8 sem decomposição em quadrados 4x4, Questão 5c, Nível 1 24
4 Solução da Questão 3a, Nível 2 34
5 Solução da Questão 3b, Nível 2 35
6 Peças dos Tipos 1 e 2, Questão 4c, Nível 2 37
7 2ª Solução, Questão 5d, Nível 2 39
8 Solução da Questão 6c, Nível 2 42
9 Solução da Questão 2b, Nível 3 49
10 Solução da Questão 2d, Nível 3 50
11 Solução da Questão 3b, Nível 3 52
12 Solução da Questão 3c, Nível 3 52
13 2ª Solução, Questão 5c, Nível 3 56
14 Outras figuras para abordagem da Questão 5, Nível 1 78
15 Frações como Relação Parte-Todo 81
16 Frações como Divisão entre dois Inteiros 82
17 Frações como Números Absolutos 83
18 Frações como Operador Matemático 83
19 Frações como Probabilidade 84
20 Triângulos Equivalentes, Atividade 1 100
21 Triângulos Equivalentes, Atividade 2 101
22 Triângulos Equivalentes, Atividade 3a 102
23 Triângulos Equivalentes, Atividade 3e 103
24 Área do triângulo ADF em três momentos no Geogebra 107
25 Área do triângulo ADF com F em pontos-chave sobre AB 108
26 Gráfico da Função Área do Triângulo ADF 109

Lista de Tabelas

1 Notas por Questão - Amostra Nível 1 27
2 Classificação Prévia de Dificuldade - Prova Nível 1 28
3 Classificação de Dificuldade após Resultados Oficiais - Amostra Nível 1 . 28
4 Notas por Questão - Amostra Nível 2 44
5 Classificação Prévia de Dificuldade - Prova Nível 2 45
6 Classificação de Dificuldade após Resultados Oficiais - Amostra Nível 2 . 45
7 Notas por Questão - Amostra Nível 3 61
8 Classificação Prévia de Dificuldade - Prova Nível 3 62
9 Classificação de Dificuldade após Resultados Oficiais - Amostra Nível 3 . 62
10 T.1 - Relação Nota/Número de Alunos - Amostras Níveis 1 e 2 67
11 T1 - Nota Média Obtida - Amostras Níveis 1 e 2 67
12 T2 - Relação Nota/Número de Alunos - Amostras Níveis 2 e 3 70
13 T2 - Nota Média Obtida - Amostras Níveis 2 e 3 70
14 T3 - Relação Nota/Número de Alunos - Amostras Níveis 1, 2 e 3 72
15 T3 - Nota Média Obtida - Amostras Níveis 1, 2 e 3 72
16 Nota Médias obtidas pelos alunos das amostras na 2ª fase da OBMEP 2014 96

Sumário

1 Introdução **9**
1.1 A Estrutura das Questões da 2ª Fase da OBMEP 10

2 OBMEP 2014 - 2ª Fase - Nível 1 **12**
2.1 Análise das Questões 12
2.2 Análise dos Resultados 27

3 OBMEP 2014 - 2ª Fase - Nível 2 **30**
3.1 Análise das Questões 30
3.2 Análise dos Resultados 44

4 OBMEP 2014 - 2ª Fase - Nível 3 **47**
4.1 Análise das Questões 47
4.2 Análise dos Resultados 61

5 Questões Transversais **64**
5.1 Entrevista: As Questões Transversais nas provas da OBMEP 64
5.2 Questões Transversais na 2ª Fase da OBMEP 2014 66

6 Possibidades de exploração da OBMEP em Sala de Aula **74**
6.1 Ensino Fundamental - 6º e 7º Anos 74
6.2 Ensino Fundamental - 8º e 9º Anos 86
6.3 Ensino Médio 91

7 Conclusões **96**

Referências **99**

A Roteiro de Estudo: Triângulos Equivalentes **100**

B Possibilidades de uso do Geogebra no Ensino Médio **106**

1 Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP - é realizada desde 2005 pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática e com apoio de órgãos federais de fomento à educação e pesquisa como a CAPES[1] e o CNPQ[2].

De forma geral, os objetivos da OBMEP são[3]:

– *Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas*;

– *Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica*;

– *Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas*;

– *Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional*;

– *Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas* e

– *Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.*

Ao longo destes 10 anos de existência seu sucesso pode ser comprovado por números extremamente relevantes, como a presença em 99,41% dos municípios brasileiros e mais de 18 milhões de estudantes inscritos para a competição de 2014[4]. Vale ressaltar também que outras ações surgiram em decorrência deste sucesso como o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), as apostilas do PIC e Banco de Questões da OBMEP, o Programa de Iniciação Científica - Mestrado (PICME), a Preparação Especial para Competições Internacionais (PECI), os Polos Olimpícos de Treinamento Intensivo (POTI), o PROF (programa destinado ao aperfeiçoamento dos professores de Matemática), o programa Clubes de Matemática, o Portal da Matemática e o mais recente projeto OBMEP nas Escolas, cujo início dar-se-á neste 2015[5].

Com tais relevância e profundidade dentro do Ensino Público é natural que a OBMEP venha se tornar objeto de estudos. Neste sentido, entendemos ser importante para todo professor de Matemática conhecer mais de perto a OBMEP e os objetivos propostos por ela. Desta forma, uma questão que se apresenta e que buscaremos responder neste trabalho é "*de que formas nos apropriar de alguns conceitos-chave presentes na OBMEP pode melhorar o ensino-aprendizagem de*

[1]Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

[2]Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, antigo Conselho Nacional de Pesquisa de onde se originou a sigla.

[3]objetivos descritos pelo Prof. Pedro Malagutti, coordenador nacional da OBMEP, em entrevista por email.

[4]Estes números foram obtidos na página oficial da OBMEP, http://www.obmep.org.br.

[5]Para maiores informações sobre estes programas consulte a página oficial da OBMEP.

Matemática na Educação Básica?"

Em 2013, um grupo de concluintes do PROFMAT no IMPA começou a responder esta questão, quando analisou as provas de 2011 e 2012 da OBMEP, sob um ponto de vista pedagógico, a partir de suas experiências enquanto professores da Rede Pública de Ensino. Este TCC dá sequência àqueles trabalhos, analisando as provas da 2ª fase da OBMEP do ano de 2014.

Assim sendo, este trabalho estará dividido da seguinte forma: na Seção 2 faremos uma análise pedagógica das questões da 2ª fase da OBMEP 2014, Nível 1, apontando um grau de dificuldade (sob nosso ponto de vista enquanto professor da Rede Pública de Ensino), analisando a adequação das questões ao nível proposto e estimando percentuais de acerto para cada item e, consequentemente, uma nota média para cada questão. Em seguida, compararemos esta estimativa com os resultados oficiais (da amostra obtida) e analisaremos, à posteriori, possiveis discrepâncias entre os dois objetos. As Seções 3 e 4 foram organizadas no mesmo padrão da Seção 1, atuando, porém, sobre as provas dos Níveis 2 e 3, respectivamente.

Na Seção 5 faremos uma breve análise sobre as questões transversais (que aparecem em provas de níveis diferentes). Neste capítulo, apresentaremos também uma pequena entrevista com um dos professores responsáveis pela coordenação nacional da OBMEP, de forma a entendermos um pouco mais os objetivos traçados quando repete-se tais questões em níveis diferentes.

Na Seção 6 tentaremos relacionar de maneira mais objetiva as questões da OBMEP com a atuação do Professor de Matemática. Apresentaremos, portanto, algumas possibilidades de exploração das questões em sala de aula, tanto para turmas regulares quanto para turmas exclusivas de treinamento para novas edições da OBMEP ou mesmo da OBM[6].

1.1 A Estrutura das Questões da 2ª Fase da OBMEP

Na 2ª fase da OBMEP as questões são dissertativas. No ano de 2014 tivemos seis questões, sendo três ou quatro itens por questão. Todas as questões têm enunciados motivadores: problemas contextualizados no mundo real ou contextualizados dentro da própria Matemática. Cada questão vale 20 pontos, de forma que o total da prova é 120 pontos.

É importante destacar que, embora os itens que formam determinada questão estejam em ordem crescente de dificuldade, eles tendem a ser independentes (na medida do possível). Assim, em grande parte das questões, ainda que o aluno não consiga resolver o item (b), por exemplo, ele poderá resolver os itens (c) e (d). Esta estratégia também é utilizada nas provas das disciplinas básicas e exame de

[6]Olimpíada Brasileira de Matemática, organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática.

qualificação do PROFMAT.

Para cada questão há uma grade de correção. A comissão elaboradora das provas prevê uma série de soluções e elabora instruções específicas para cada uma delas. Isto é feito em conjunto com todos os coordenadores regionais. O processo de correção é demorado: inicia-se nos pólos espalhados por todo o país, revisadas e apenas depois desta revisão as provas com as maiores notas são enviadas à correção nacional, onde são também corrigidas duas vezes antes da classificação final.

Em 2014, houve 18.903 provas analisadas pela correção nacional, considerando-se os três níveis da prova. Nós tivemos acesso aos dados desta correção e é esta amostra que será analisada nas seções que abordam os resultados obtidos nas provas.

Os conteúdos abordados nas provas da OBMEP estão relacionados às diversas áreas da Matemática (Geometria, Álgebra, Aritmética, Funções, Contagem, Probabilidade, Lógica, Estratégia e Tratamento da Informação) e baseiam-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais, segundo a divisão abaixo:

- **Nível 1**: as questões referem-se aos conteúdos tradicionais do Ensino Fundamental I (1º ao 5º anos). Esta prova é feita por alunos de 6º e 7º anos.

- **Nível 2**: as questões referem-se aos conteúdos tradicionais do Ensino Fundamental I e também do 6º ano. Esta prova é feita por alunos de 8º e 9º anos.

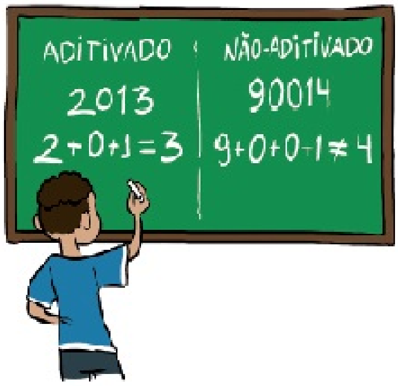
- **Nível 3**: as questões referem-se aos conteúdos tradicionais do Ensino Fundamental I e II (1º ao 9º anos). Esta prova é feita por alunos do Ensino Médio.

2 OBMEP 2014 - 2ª Fase - Nível 1

Nesta seção, procederemos às análises das questões do Nível 1. Na subseção 2.1 faremos uma análise pedagógica de cada questão, indicando uma solução, observando a adequação da questão ao nível proposto e destacando os conteúdos envolvidos. Faremos também uma expectativa de acertos, baseada na nossa observação do grau de dificuldade da questão. Já na subseção 2.2 vamos comparar esta expectativa com os indíces oficiais de acerto em cada questão.

2.1 Análise das Questões

1. Joãozinho chama um número natural maior do que 100 de aditivado quando seu algarismo das unidades é igual à soma dos demais algarismos. Por exemplo, 224 é aditivado, pois $2 + 2 = 4$.



a) Escreva o número aditivado de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é 1.

b) Escreva todos os números aditivados de três algarismos cujo algarismo das unidades é 6.

c) Qual é o maior número aditivado sem algarismos repetidos?

Uma Solução:[7]

a) Se o algarismo das unidades é 1 e é a soma dos demais algarismos, então há apenas um algarismo 1 e todos os outros são iguais a 0. Como o número procurado tem quatro algarismos então a resposta é N=1001.

b) Precisamos analisar todas as somas possíveis de dois algarismos cujo resultado é 6. Temos: $0 + 6$, $1 + 5$, $2 + 4$ e $3 + 3$. Como 066 é um número de apenas dois algarismos significativos, esta combinação não serve. Desta forma, a resposta

[7]As soluções descritas neste texto foram elaboradas pelo autor deste TCC. O nível de rigor escolhido para as justificativas é equivalente ao desejado a um aluno do Nível 1.

final é 606, 156, 516, 246, 426 e 336.

c) Ao falar em maior número, há duas situações relevantes a serem exploradas: a quantidade de ordens do número e a grandeza de seus dígitos. Sabemos que $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, o que já extrapola a margem de um dígito para a casa das unidades. Logo, precisamos encontrar a maior soma possível com 3 algarismos. Já temos $2 + 3 + 4 = 9$, mas se conseguirmos totalizar os mesmos 9 com digitos maiores, aumentaremos nosso número. Segue $1+2+6 = 9$. Lembrando que podemos acrescentar um dígito 0 para aumentar a ordem de grandeza do nosso número então temos a resposta $N = 62109$.

Comentários sobre a questão:

A questão foi muito bem escolhida para abrir a prova. O enunciado é claro, os conteudos são apropriados a alunos do Nível 1 e o exemplo contido na figura ajuda a entender que pode haver repetições de elementos, auxiliando no desenvolvimento do item (a).

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Sistema de Numeração Decimal, Operações com Números Naturais.

Expectivativa de Acertos[8]: 80%(Item a), 60%(Item b), 40%(Item c).

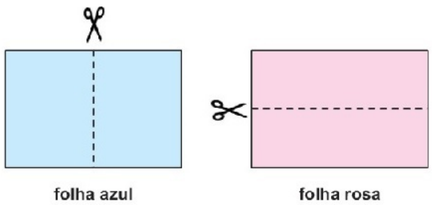
Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 6 + 10$, respectivamente aos itens (a), (b) e (c).

Nota Média Esperada: $3,2 + 3,6 + 4 = 10,8 = 54\%$

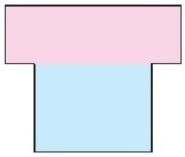
Grau de Dificuldade da Questão: Baixa

[8]As expectativas de acertos foram elaboradas considerando-se alunos que estudaram, normalmente, todos os conceitos matemáticos compatíveis com seu grau de escolaridade.

2. Lucinha tem duas folhas retangulares, uma azul e outra rosa, ambas com 8 cm de largura e 12 cm de comprimento. Ela cortou as duas folhas ao meio, conforme indicado na figura.

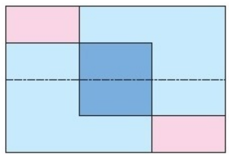


a) Lucinha pegou uma metade de cada folha e fez coincidir os lados maiores desses pedaços, formando a figura abaixo, parecida com a letra T. Qual é o perímetro dessa figura?



b) Em seguida, ela deslizou um pedaço sobre o outro, sem girar, formando a figura abaixo. Qual é a área do retângulo formado pela sobreposição das duas folhas?

c) Depois, Lucinha juntou as duas metades da folha rosa, formando um retângulo idêntico ao original antes de ser cortado, e colocou os dois pedaços da folha azul sobre eles, conforme indicado na figura. Qual é a área da folha rosa que não foi coberta pelos pedaços da folha azul?



Uma Solução:

a) Inicalmente, é importante analisar as medidas de cada retângulo azul e rosa depois dos cortes. Observando a figura do enunciado, percebe-se que o o retângulo azul foi cortado no comprimento, enquanto o rosa na largura. Desta forma, cada retângulo azul mede 6cm x 8cm e cada retângulo rosa mede 4cm x 12cm.

Para calcular o perímetro, é interessante perceber que a soma dos três segmentos horizontais que estão na parte de baixo da figura (um azul no centro mais outros dois rosas nas laterais) medem o mesmo que o maior segmento horizontal em cima. Na vertical, há também igualdade entre os dois segmentos da direita e os dois da esquerda. Logo, o perímetro da figura é dado por $2 \cdot 12 + 2 \cdot (4 + 6) = 44cm$.

b) Ao sobrepor os retângulos como na figura, podemos perceber que a interseção é formada pela altura do retângulo rosa com a largura do retângulo azul. Estas medidas são, respectivamente, 4cm e 8cm. Desta forma, a área da interseção é dada por: $4 \cdot 8 = 32\text{cm}^2$.

c) Semelhantemente ao item anterior, podemos observar na figura que cada sobra de papel rosa é um retângulo, cujas medidas são: $12 - 8 = 4$cm e $8 - 6 = 2$cm. Desta forma, a área não coberta é dada por: $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16\text{cm}^2$.

Comentários sobre a questão:

A questão também foi muito bem escolhida para iniciar a parte geométrica da prova. O enunciado é claro e os conteúdos são abordados logo no início do estudo de Geometria. Bastante apropriado a alunos do Nível 1.

Há apenas um detalhe a ser considerado: embora este seja um conteúdo estudado no Ensino Fundamental I ele é aprofundado no 6º ano. Entretanto, muitos professores acabam tratando este assunto apenas no 4º bimestre. Como a prova foi realizada em 13 de setembro (final do 3º bimestre), é possível que um número significativo de alunos não tenham tido aulas sobre perímetro e área de retângulos no ano em que fizeram a prova, de forma que os alunos do 7º ano podem ter alguma vantagem na questão.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Operações com Números Naturais, Polígonos, Perímetro de Figuras Poligonais, Área de Retângulos.

Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 60%(Item b), 40%(Item c).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 6 + 10$.

Nota Média Esperada: $3,2 + 3,6 + 4 = 10,8 = 54\%$.

Grau de Dificuldade da Questão: Baixa.

3. Mônica usou 25 palitos sobre uma mesa e três cartões, um com o número 0, outro com o número 1 e o último com o número 2, para uma brincadeira com seus amigos Ana, Beatriz e Carlos. Sem olhar, ela pede para cada um pegar um cartão e também pede para:

- Ana retirar da mesa tantos palitos quanto o número de seu cartão;
- Beatriz retirar da mesa tantos palitos quanto o triplo do número do seu cartão;
- Carlos retirar da mesa tantos palitos quanto nove vezes o número do seu cartão.

Contando os palitos que restaram sobre a mesa, Mônica tenta acertar quem escolheu cada cartão.

a) Quantos palitos restarão sobre a mesa se Ana pegar o cartão com o número 1, Beatriz pegar o cartão com o número 0 e Carlos pegar o cartão com o número 2?

b) Qual é a menor quantidade de palitos que pode restar sobre a mesa nessa brincadeira?

c) Qual é o número do cartão que Ana pegou, se restaram 14 palitos sobre a mesa?

d) Explique por que Mônica sempre pode acertar quem escolheu cada cartão, se ela souber quantos palitos restaram sobre a mesa.

Uma Solução:

a) Cartões retirados de acordo com o enunciado: $1+3\cdot 0+9\cdot 2 = 19$. Restarão sobre a mesa: $25-19=6$.

b) Deve-se concluir que o menor número de palitos sobre a mesa ocorre quando Ana tira o número 0, Beatriz o número 1 e Carlos o número 2. Desta forma, são retirados $0+3\cdot 1+9\cdot 2 = 21$, sobrando portanto, $25-21=4$ palitos.

c) Se restaram 14 sobre a mesa, então foram retirados $25 - 14 = 11$ palitos. Nessas condições, certamente Carlos retirou o cartão 0 ou o cartão 1. Supondo que ele retirou o cartão 1, sobrariam 2 palitos, que é exatamente o número do cartão de Ana. Assim, esta é uma possibilidade (Ana:2, Beatriz:0 e Carlos:1).

Podemos verificar se há outra possibilidade supondo que Carlos pegou o cartão 0. Então temos, no máximo, $3 \cdot 2 + 1 = 7$, o que não satisfaz o fato de 11 palitos terem sido retirados. Logo, há apenas uma possibilidade: Ana retirou o cartão 2.

d) Assim como no item anterior, provavelmente há apenas uma combinação dos três cartões que leva a um determinado número dado entre 0 e 25. Para nos certificarmos, entendemos que o modo mais simples seria elaborar uma tabela similar à que se segue:

Ana	**Beatriz**	**Carlos**	**Retirados**	**Sobram**
0	1	2	21	4
0	2	1	15	10
1	0	2	19	6
1	2	0	7	18
2	0	1	11	14
2	1	0	5	20

Agora, podemos verificar que a quantidade de palitos que sobra na mesa é única, para cada situação. Isto garante que Mônica sempre pode acertar quem escolheu cada cartão se souber quantos palitos restaram.

OBS: Uma solução oficial (apresentada na página da OBMEP na Internet) mostra que os alunos também poderiam justificar a unicidade da solução observando que os números seguem a representação do sistema de numeração em base 3.

Comentários sobre a questão:

A questão apresenta enunciado claro e conteúdos adequados ao Nível 1. No entanto, apresenta grau de dificuldade um pouco maior que as questões anteriores, em parte devido à necessidade de refletir não apenas sobre os palitos que sobraram, mas principalmente sobre os que foram retirados.

A questão pede uma justificativa matemática para a situação, o que nos parece um pouco fora da realidade dos alunos, principalmente no Nível 1. É possível que, além dos alunos não estarem diretamente envolvidos com o conceito de demonstrações formais, a organização de uma tabela similar à que disponibilizamos estivesse distante do processo de investigação matemática para alunos de 6º e 7º ano.

Esta seria também uma boa escolha para replicar no Nível 2, pois os alunos deste nível têm maior contato com expressões algébricas e valores numéricos a partir do 8º ano. Desta forma, seria interessante comparar os percentuais de acerto neste item para estes níveis.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Sistema de Numeração Posicional, Operações com Números Naturais, Expressões Algébricas.

Expectativa de Acertos: 80%(Item a), 60%(Item b), 40%(Item c), 25%(Item d).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 4 + 4 + 8$.

Nota Média Esperada: $3,2 + 2,4 + 1,6 + 2 = 9,2 = 46\%$.

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

4. O quadrado da figura possui o número mágico 44, pois, se você escolher quatro números de modo que quaisquer dois deles não estejam nem na mesma linha nem na mesma coluna, a soma desses quatro números é sempre 44. Por exemplo, os números nas casas vermelhas somam 44; isso também ocorre com os números nas casas azuis.

6	7	11	9
10	11	15	13
11	12	16	14
8	9	13	11

a) O quadrado abaixo tem um número mágico. Qual é este número?

19	26	28	21
21	28	30	23
5	12	14	7
7	14	16	9

b) Complete o quadrado abaixo, colocando em cada casa a soma dos números que estão fora do quadrado, indicados na linha e coluna correspondentes. Esse quadrado possui um número mágico. Qual é este número?

	1 ⇩	1 ⇩	1 ⇩	1 ⇩
1 ⇨				2
2 ⇨				
3 ⇨		4		
4 ⇨				

c) Complete o quadrado abaixo de modo que ele possua um número mágico.

	8	13	
8	12	17	12
5	9	14	9
	11	16	

d) Explique por que o procedimento usado no item (b) sempre irá produzir um quadrado que possui um número mágico, quaisquer que sejam os números fora do quadrado, indicados nas linhas e nas colunas.

Uma Solução:

a) Como o enunciado já afirma que há um número mágico, basta que façamos a soma de uma diagonal (por exemplo) para verificar qual é. Desta forma, temos: $N = 19 + 28 + 14 + 9 = 70$.

b) Para a primeira parte, basta que somemos os números que correspondem a linha e coluna onde o elemento será inserido. Segue:

2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5

Para determinar o número mágico deste quadrado também podemos somar os elementos de uma diagonal. Segue, $N = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

c) Uma estratégia para resolver a questão é, primeiramente, encontrar o número mágico observando os elementos já inseridos no quadado. Posteriormente, bastaria então analisar outras combinações de somas e calcular os elementos que faltam. Vamos fazer isto.

Podemos calcular o número mágico utilizando os elementos que estão fora do quadrado central. Por exemplo, uma combinação possivel seria $N = 8+8+9+16 = 41$. Outra seria $N = 13 + 12 + 5 + 11 = 41$. Tendo o número mágico, podemos calcular o elemento da última linha e última coluna a partir da soma $13+12+5 = 30$ (uma pequena diagonal). Assim, este elemento vale 11. Utilizando uma estratégia similar para encontrar os outros, podemos encontrar a solução, que segue abaixo:

4	8	13	8
8	12	17	12
5	9	14	9
7	11	16	11

d) Vamos colocar os símbolos A, B, C e D para representar os números colocados acima das colunas do quadrado e os símbolos E, F, G e H para representar os números colocados à direita das linhas. Teríamos, portanto, o seguinte esquema:

	A	B	C	D
E				
F				
G				
H				

Agora, tomemos qualquer caminho válido para determinar o número mágico. Um exemplo:

	A	B	C	D
E	*			
F			*	
G				*
H		*		

O número mágico seria $N = (A + E) + (B + H) + (C + F) + (D + G) = A + B + C + D + E + F + G + H$. Note que qualquer outro caminho vai nos conduzir ao mesmo resultado, uma vez que precisamos tomar elementos de colunas e linhas diferentes em cada passagem (o que relaciona-se com as propriedades associativa e comutativa da adição).

Comentários sobre a questão:

Nesta questão, uma grande dificuldade pode estar no conceito pré-existente sobre os quadrados mágicos: trabalha-se habitualmente no 6º ano com os quadrados onde as somas são constantes para qualquer linha, coluna ou diagonal, diferente do que ocorre com o quadrado desta questão. No entanto, a imagem que ilustra o exemplo ajuda bastante a confrontar esta ideia.

Esta questão também solicita uma explicação formal para a situação apresentada, o que é sempre complicado para alunos deste nível.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Operações com Números Naturais, Análise de Tabelas, Expressões Algébricas.

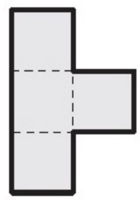
Expectivativa de acertos: 70%(Item a), 70%(Item b), 30%(Item c), 20%(d).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $2 + 4 + 8 + 6$

Nota Média Esperada: $1,4 + 2,8 + 2,4 + 1,2 = 7,8 = 39\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

5. Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



a) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4x4 com essas peças.

b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10x10 com suas peças.

Uma Solução:

a) Fixando a casa superior esquerda (marcada com *) há apenas duas soluções diferentes, ilustradas abaixo.

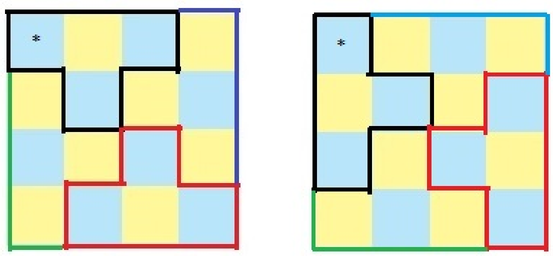


Figura 1: Solução da Questão 5a, Nível 1

b) Cada peça contém 4 quadrados. Assim, com 20 peças temos 80 quadrados. Mas 80 não é um quadrado perfeito, de forma que não pode ser resultado da área de um quadrado de lado natural.

c) Inicialmente, deve-se observar que o argumento utilizado no item (b) não pode ser aplicado neste item: um quadrado 10x10 é composto de 100 quadradinhos. Como cada peça possui 4 quadradinhos, se tomássemos 25 iguais a ela conseguiríamos os 100 quadradinhos.

Desta forma, é necessário procurar outro argumento para a impossibilidade. Vamos a ele.

Ao posicionarmos as peças no tabuleiros, há apenas duas situações possíveis: ela cobrirá três quadradinhos azuis e um amarelo (tipo 1) ou ela cobrirá três quadradinhos amarelos e um azul (tipo 2), conforme ilustrado pela imagem abaixo.

Figura 2: Peças dos Tipos 1 e 2, Questão 5c, Nível 1

Um tabuleiro 10x10 é composto por 100 quadradinhos, sendo 50 azuis e 50 amarelos. Como cada uma das peças disponíveis é composta de 4 quadradinhos, precisaríamos, portanto, de 25 iguais para cobrir todo o tabuleiro.

Em princípio não sabemos qual é o número necessário de peças do tipo 1 e do tipo 2 capaz de nos dar a solução. No entanto, vamos supor que precisássemos de um número par de peças do tipo 1 e analisar as consequências deste fato:

− Sendo a solução um número par de peças do tipo 1 então, obrigatoriamente, precisaríamos de um número ímpar de peças do tipo 2, uma vez que a quantidade total de peças a serem utilizadas é 25, um número ímpar. No entanto, nessas condições teríamos um número ímpar de peças azuis (nº par $\cdot$ 3 + nº ímpar), o que é absurdo pois o número de peças azuis no tabuleiro é 50, um número par.

Desta forma, não podemos ter como solução um número par de peças do tipo 1. Vamos, portanto, analisar o que acontece quando supomos que a solução contém um número ímpar de peças do tipo 1:

− Sendo a solução um número ímpar de peças do tipo 1 então, obrigatoriamente, precisaríamos de um número par de peças do tipo 2, uma vez que a quantidade total de peças a serem utilizadas é 25, um número ímpar. No entanto, nessas condições teríamos, de acordo com o mesmo raciocínio usado anteriormente, um número ímpar de peças amarelas (nº par $\cdot$ 3 + nº ímpar), o que é absurdo pois o número de peças amarelas no tabuleiro é 50, um número par.

Concluímos, portanto, que o número de peças do tipo 1 não pode ser nem par nem ímpar caso exista uma solução para a cobertura do quadrado 10x10. Desta forma, tal solução não existe e, portanto, é ímpossivel fazer tal cobertura com as peças disponíveis.

OBS: É possível que muitos alunos apresentem uma solução que se utiliza da decomposição do quadrado 10x10 em quadrados 4x4. O argumento consideraria que o menor retângulo formado pelas peças disponibilizadas é o próprio quadrado 4x4, de forma que se poderia utilizar 4 iguais a este para cobrir um retângulo 8x8, sobrando dois retângulos (um 2x10, outro 2x8) impossíveis de serem construídos com as peças disponibilizadas.

Esta solução é incorreta, uma vez que parte do princípio de que para pavimentar qualquer quadrado é necessário montar, inicialmente, quadrados do tipo 4x4. No entanto, a imagem abaixo ilustra a cobertura de um quadrado 8x8 sem a decomposição em quadrados 4x4, inviabilizando este argumento e, consequentemente, esta solução.

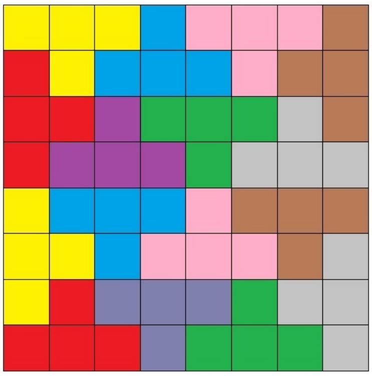


Figura 3: Cobertura de um quadrado 8x8 sem decomposição em quadrados 4x4, Questão 5c, Nível 1

Comentários sobre a questão:

A questão é bastante interessante por relacionar de forma inteligente o raciocínio geométrico com a argumentação aritmética. Há apenas um ponto a analisar com mais cuidado: a solução do item (c) nos parece muito distante dos alunos do Nível 1, uma vez que dificilmente trabalha-se a solução de problemas por paridade.

Esta questão foi bem escolhida para ser replicada no Nível 2, pois há uma solução algébrica que pode ser explorada por alunos daquele nível (discutiremos esta solução ao falarmos da prova do Nível 2).

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Operações com Números Naturais, Polígonos, Área de Retângulos, Pavimentação do Plano.

Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 60%(Item b), 10%(Item c).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 6 + 10$.

Nota Média Esperada: $3,2 + 3,6 + 1 = 7,8 = 39\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

---

6. Seis atletas, identificados pelas letras A, B, C, D, E e F, participaram de uma corrida de Quixajuba até Pirajuba. O atleta A saiu na frente, B saiu em seguida, e assim sucessivamente, até o atleta F, que saiu por último. O atleta D venceu a corrida e o atleta E terminou em último lugar.

A tabela mostra quantas vezes o atleta indicado na linha ultrapassou o atleta indicado na coluna. Por exemplo, o número 5 na casa rosa indica que o atleta D ultrapassou cinco vezes o atleta C durante a corrida.

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0		3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1		1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

a) Quantas vezes o atleta F ultrapassou o atleta B?

b) Qual número deverá ser escrito na casa amarela?

c) Qual número deverá ser escrito na casa verde?

d) Em que ordem os atletas terminaram a corrida?

Uma Solução:

a) Observando na tabela a linha correspondente ao corredor F e a coluna correspondente ao corredor B encontramos o valor 2. Logo, o atleta F ultrapassou o atleta B duas vezes.

b) A casa amarela representa o número de vezes que o atleta B ultrapassou o atleta D. Para encontrarmos este valor, vamos utilizar três informações: o atleta D largou atrás do atleta B, venceu a corrida e ultrapassou o atleta B duas vezes (número localizado na linha D, coluna B). Como ele precisou passar o atleta B duas vezes para ganhar a corrida, tendo saido atrás, então ele foi ultrapassado pelo atleta B uma vez durante a corrida.

Portanto, o número a ser inserido na casa amarela é o número 1.

c) Queremos descobrir o número de vezes que o atleta E ultrapassou o atleta B. O raciocínio é análogo ao item anterior: o atleta E largou depois de B, chegou em último e foi ultrapassado por B 3 vezes (linha B, coluna E). Logo, ele ultrapassou B também 3 vezes.

Portanto, o número a ser inserido na casa verde é o número 3.

d) Já sabemos que D foi o vencedor e E foi o último. Basta encontrar as demais colocações.

O atleta A largou em primeiro. Observando a tabela, vemos que foi ultrapassado por B duas vezes, mas também o ultrapassou duas vezes, de forma que chegou na frente de B. Da mesma forma, ele foi ultrapassado por C quatro vezes e ultrapassou C também quatro vezes, chegando na frente de C.

Ainda, foi ultrapassado por F 3 vezes (linha F, coluna A) e ultrapassou F duas vezes (linha A, coluna F). Desta forma, chegou atrás de F, donde se conclui que F foi o segundo colocado e A o terceiro.

B largou na frente de C, foi ultrapassado por ele 0 vezes. Logo B chegou em terceiro. Finalmente, a ordem de chegada foi D - F - A - B - C - E.

Comentários sobre a questão:

A questão é muito pertinente, uma vez que a leitura de gráficos e tabelas está inserida nos PCNs para os alunos de todos os anos dos Ensinos Fundamental e Médio. No entanto, este é um tema relativamente novo em turmas de 6º e 7º anos, o que aumenta o nível de dificuldade da questão. Há também um grau de lógica que necessita maior maturidade por parte dos estudantes. Esta questão foi acertadamente escolhida para ilustrar as provas dos Níveis 1, 2 e 3.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Análise de Tabelas, Raciocício Lógico, Matrizes.

Expectivativa de acertos: 70%(Item a), 25%(Item b), 25%(Item c), 20%(d).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $2 + 4 + 4 + 10$.

Nota Média Esperada: $1,4 + 1 + 1 + 2 = 5,4 = 27\%$.

Grau de Dificuldade da Questão: Alta.

2.2 Análise dos Resultados

Iniciaremos esta seção apresentando os resultados obtidos pelos alunos da nossa amostra em cada questão. Para o Nível 1, esta amostra corresponde a 7.547 alunos, cujas provas foram analisadas pela correção nacional. Estas notas foram distribuídas de acordo com a Tabela 1 abaixo:

Tabela 1: Notas por Questão - Amostra Nível 1

Nota	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**
0	114	599	78	281	498	245
1	37	2	31	5	0	0
2	30	226	8	687	15	1.102
3	73	19	7	24	0	0
4	74	334	221	720	4.865	1.279
5	143	21	158	120	19	0
6	126	552	57	2.935	330	1.363
7	183	8	65	45	1	0
8	261	266	1.089	1.210	911	1.381
9	485	33	535	23	34	0
10	1.138	744	151	638	620	673
11	459	45	167	9	3	0
12	1.177	798	3.753	185	93	384
13	1.651	35	689	21	2	1
14	450	539	104	601	136	127
15	119	94	113	0	0	0
16	21	1.290	49	7	18	507
17	22	17	29	0	0	0
18	24	301	111	19	0	9
19	179	160	16	0	0	0
20	781	1.464	116	7	2	476

Seguindo o mesmo padrão visto em Silva e Araújo (2013), em Matta e Albuquerque (2013) e em Souza e Silva (2013), entendemos neste trabalho que a fronteira entre as faixas de dificuldades alta/média e média/baixa estariam em 30% e 50% do valor de cada item, respectivamente.

A tabela abaixo mostra o grau de dificuldade de cada questão de acordo com as análises feitas na subseção anterior.

Tabela 2: Classificação Prévia de Dificuldade - Prova Nível 1

Questão	**Nota Média Esperada**	**Dificuldade**
1	$10,8 = 54\%$	Baixa
2	$10,8 = 54\%$	Baixa
3	$9,2 = 46\%$	Média
4	$7,8 = 39\%$	Média
5	$7,8 = 39\%$	Média
6	$5,4 = 27\%$	Alta

Já na Tabela 3 podemos observar o resultado oficial obtido pelos alunos do Nível 1 em cada questão[9] para podermos fazer análises mais profundas:

Tabela 3: Classificação de Dificuldade após Resultados Oficiais - Amostra Nível 1

Questão	**Nota Média Obtida**	**Dificuldade**
1	$11,9 = 59,5\%$	Baixa
2	$12,4 = 62\%$	Baixa
3	$10,9 = 54,5\%$	Baixa
4	$6,7 = 33,5\%$	Média
5	$5,1 = 25,5\%$	Alta
6	$7,6 = 38\%$	Média

Comparando as Tabelas 2 e 3, percebe-se que as duas primeiras questões da Prova do Nível 1 tiveram índices de acertos levemente superiores ao esperado. É interessante perceber que a Questão 2 teve média de acertos maior que a Questão 1, embora seja de comum acordo que os alunos têm mais dificuldades com questões geométricas. Uma justificativa para este resultado pode ser o fato do item (c) da Questão 1 ser um pouco mais difícil que o item (c) da Questão 2. A Questão 2 foi a mais acertada na íntegra: dos 7.547 alunos da nossa amostra, 1.464 alunos fizeram os 20 pontos nesta questão, contra 781 da Questão 1.

[9] A OBMEP não cataloga o acerto por itens, apenas por questão.

A Questão 3 apresentou a primeira discrepância entre os graus de dificuldades à priori e à posteriori: classificada como de Dificuldade Média (46% de média esperada) ela teve índice de acertos de 54%. A diferença não é muita, mas suficiente para que a questão seja classificada como de Dificuldade Baixa, após a análise dos resultados. Observando com atenção a Tabela 1 percebemos que 3.753 alunos fizeram 12 pontos nesta questão, o que poderia indicar que estes alunos conseguiram resolver os três primeiros itens, tendo dificuldade apenas na formalização do item (d), o que era esperado.

A Questão 4 também ficou dentro da faixa de dificuldade esperada, embora os resultados tenham sido levemente inferiores. Podemos perceber que 2.935 alunos fizeram 6 pontos nesta questão, o que corresponde ao acerto apenas do itens (a) e (b). Acreditávamos que os alunos conseguiriam pontuar também no item (c), o que pode explicar a diferença entre a nota média esperada e a obtida. Eram esperadas dificuldades no item (d), justamente pela exigência de uma formalização, difícil para alunos do Nível 1.

Na Questão 5 a maioria dos alunos conseguiu apenas 4 pontos, que corresponde apenas ao acerto do item (a). Esperávamos que os alunos também conseguissem resolver o item (b) e daí a diferença entre a classificação prévia - Média Dificuldade - e a classificação à posteriori, que resultou em Alta Dificuldade. Isto pode ser explicado pela falta de maturidade dos alunos do Nível 1 para formalização. Apenas dois alunos conseguiram os 20 pontos, o menor índice da prova. O resultado também justifica a presença da questão na prova do Nível 2.

Na Questão 6 ocorreu o inverso: consideramos que a questão seria de Alta Dificuldade por demandar análise de tabelas e um pouco mais de maturidade para o Raciocínio Lógico-Matemático mas na realizade o índice de acertos apontou Média Dificuldade. 1.381 alunos conseguiram fazer 8 pontos, o que corresponde ao acerto dos itens (a) e (b). Nos parece estranho apenas o fato destes alunos não terem conseguido fazer também o item (c), que é muito similar ao item (b).

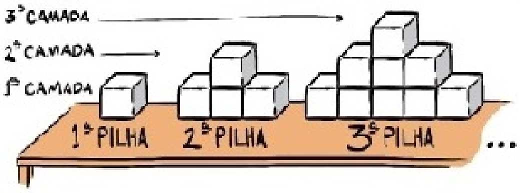
Esperávamos que os alunos tivessem nota média em torno de 51,8, o que corresponde a 43% da prova (Nível Médio de Dificuldade). Os resultados confirmaram esta expectativa, com nota média 54,6 ou 45,5% de acertos.

3 OBMEP 2014 - 2ª Fase - Nível 2

Nesta seção, procederemos às análises das questões do Nível 2. Na subseção 3.1 faremos uma análise pedagógica de cada questão, indicando uma solução, observando a adequação da questão ao nível proposto e destacando os conteúdos envolvidos. Faremos também uma expectativa de acertos, baseada na nossa observação do grau de dificuldade da questão. Já na subseção 3.2 vamos comparar esta expectativa com os indíces oficiais de acerto em cada questão.

3.1 Análise das Questões

1. Pedro constrói uma sequência de pilhas com cubinhos de tamanhos iguais. Ele começa com um único cubinho. As pilhas são construídas sempre de forma triangular, a partir da anterior, aumentando-se dois cubinhos em cada camada e colocando-se um cubinho no topo.



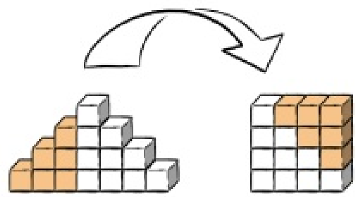
Na figura, estão representadas as três primeiras pilhas da sequência. Observe que na primeira camada da terceira pilha há cinco cubinhos.

a) Quantos cubinhos deverá ter a primeira camada da quinta pilha?

b) Quantos cubinhos deverá ter a primeira camada da 2014ª pilha?

c) Pedro observou que podia transformar qualquer pilha triangular em uma pilha quadrada, reorganizando os cubinhos dessa pilha. Observe na figura como ele fez isso com a quarta pilha.

Ele usou essa ideia para calcular quantos cubinhos são necessários para construir uma pilha triangular com 99 cubinhos em sua primeira camada. Que resultado ele obteve?



Uma Solução:

a) Sabemos que a primeira camada da próxima pilha da sequência tem exatamente dois cubinhos a mais que a primeira camada da pilha anterior. Como a primeira pilha tem 1 cubinho, então há uma correspondência entre a quantidade de cubinhos na base de cada pilha e a sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, ...). Logo, a primeira camada da quinta pilha tem 9 cubinhos.

b) É impraticável escrevermos a sequência dos números ímpares até o seu 2014º elemento. No entanto, podemos calculá-lo, se percebermos que cada elemento da sequência é o antecessor do dobro do número de sua posição. Por exemplo, na quinta camada temos $2 \cdot 5 - 1 = 9$. Portanto, o número de cubinhos da 2014ª pilha será $N = 2 \cdot 2014 - 1 = 4027$.

c) Na 1ª pilha há um único cubinho, o que corresponde a própria pilha quadrada de lado 1. Na 2ª pilha há quatro cubinhos, o que nos permite formar uma pilha quadrada de lado 2. Na 3ª pilha há 9 $(5 + 3 + 1)$, o que nos permite formar uma pilha quadrada de lado 3. Observando este processo, podemos inferir que a pilha quadrada terá como lado tantos cubinhos quantos forem a sua posição na fila.

Como a pilha informada tem 99 cubinhos na sua primeira camada, então ela é a 50ª pilha, pois $99 = 2 \cdot 50 - 1$. Desta forma, precisaremos de $50 \cdot 50 = 2500$ cubinhos para formar esta pilha.

<u>OBS:</u> A justificativa formal para este item baseia-se na identidade da soma dos n primeiros números ímpares $[1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2]$.

<u>Comentários sobre a questão:</u>

Esta é uma questão comumente vista no início do 2º ano do Ensino Médio, quando trabalha-se Progressões Aritméticas. No entanto, estando na prova do Nível 2, entendemos que a abordagem esperada do problema se dê com conteúdos mais elementares. Há vasta possibilidade de exploração de questões como esta no Ensino Fundamental e vamos abordar algumas delas na Seção 6 deste trabalho.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Operações com Números Naturais, Múltiplos e Divisores, Progressão Aritmética, Área de Retângulos.

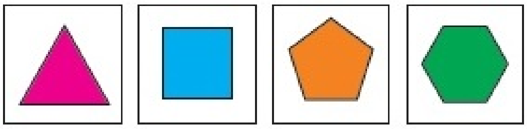
Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 60%(Item b), 40%(Item c).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 8 + 8$.

Nota Média Esperada: $3,2 + 4,8 + 3,2 = 11,2 = 56\%$.

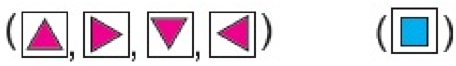
Grau de Dificuldade da Questão: Baixa.

2. Rosa tem quatro cartões quadrados e cada um deles apresenta um polígono regular diferente, de 3 a 6 lados, como mostrado na ilustração.



Ela quer colar esses cartões nos quatro espaços disponíveis da primeira página de um álbum.

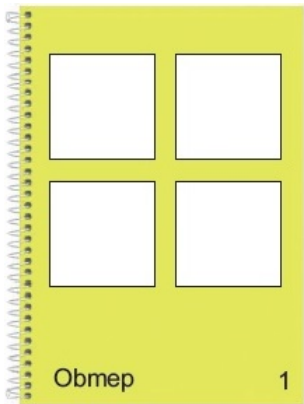
Dependendo de como ela cola o cartão, as figuras podem ser vistas de maneiras diferentes. Por exemplo, girando o cartão com o triângulo, ele pode ser visto de quatro maneiras diferentes; já o quadrado só pode ser visto de uma única maneira.



a) De quantas maneiras diferentes o pentágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?

b) De quantas maneiras diferentes o hexágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?

c) De quantas maneiras diferentes Rosa pode colar os quatro cartões nos quatro espaços da primeira página do álbum?



Uma Solução:

a) Observe o vértice superior do pentágono. A cada giro do quadrado ele estará posicionado de forma diferente em relação à posição original. Portanto, há 4 maneiras diferentes do pentágono ser colado em um dos espaços do álbum.

b) Observe o vértice da direita do hexágono. Ao fazermos um giro ele estará posicionado de forma diferente em relação à posição original. No entanto, no segundo giro ele estará exatamente igual ao vértice originalmente na esquerda. Portanto, há apenas 2 maneiras diferentes do hexágono ser colado em um dos espaços do álbum.

c) Em primeiro lugar vamos escolher os espaços onde cada figura será colocada. Isto pode ser feito de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras diferentes.

Escolhidos os espaços, vamos analisar de quantas formas diferentes cada figura pode ser inserida no espaço selecionado. Como o triângulo pode ser colado de 4 formas diferentes, o quadrado 1, o pentágono 4 e o hexágono 2, segue $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 32$.

Finalmente, o número de maneiras diferentes de colagem é dado por $N = 24 \cdot 32 = 768$.

Comentários sobre a questão:

Esta também é uma questão mais habitualmente trabalhada no 2º ano do Ensino Médio, quando se aprofunda o Princípio Multiplicativo. No entanto, é importante o aparecimento de uma questão como esta no Nível 2, pois os PCNs apontam a importância de se trabalhar este conteúdo no Ensino Fundamental.

De qualquer forma, o enunciado é bastante explicativo, o que certamente ajuda nos dois primeiros itens. No item (c) é possivel que muitos alunos façam somas ao invés de multiplicações, justamente por entendermos que o estudo do Princípio Multiplicativo talvez não seja tão eficaz nas turmas do Ensino Fundamental.

Na Seção 6 deste trabalho aproveitaremos esta questão para refletir um pouco mais sobre a abordagem do Princípio Multiplicativo desde os primeiros anos do Ensino Fundamental II.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Operações com Números Naturais, Princípio Multiplicativo, Polígonos Regulares.

Expectivativa de acertos: 60%(Item a), 60%(Item b), 20%(Item c).

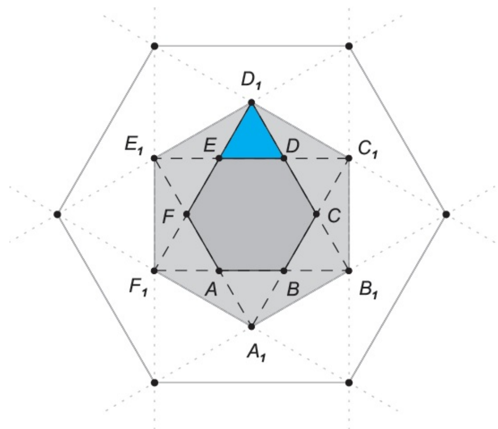
Valor da Questão: 20 pontos, sendo $6 + 6 + 8$.

Nota Média Esperada: $3,6 + 3,6 + 1,6 = 8,8 = 44\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

3. Os prolongamentos dos lados de um hexágono regular $ABCDEF$, de 1 cm^2 de área, determinam seis pontos de interseção, que são vértices de um novo hexágono regular $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, conforme mostra a figura.

Repetindo esse processo de prolongamento de lados em cada novo hexágono obtido, determinamos novos hexágonos, $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$, $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$, e assim por diante.



a) Qual é a área do triângulo EDD_1 destacado em azul?

b) Qual é a área do hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$?

c) Qual é a área do hexágono $A_5B_5C_5D_5E_5F_5$?

Uma Solução:

a) Vamos mostrar que o triângulo EDD_1 é equilátero e mede $1/6$ da área do hexágono $ABCDEF$.

Inicialmente, notemos que o ângulo interno de um hexágono regular mede 120°. Ainda, os ângulos D_1DE e D_1ED são ângulos externos a dois dos ângulos do hexágono. Portanto, estes têm medida igual a 60°. Segue que o ângulo ED_1D também mede 60° e, portanto, o triângulo EDD_1 é equilátero.

Agora, observemos que o lado ED é comum tanto ao triângulo EDD_1 quanto ao triângulo EDO, formado pelas diagonais do hexágono. Logo, estes triângulos são congruentes (ambos equiláteros com um lado comum).

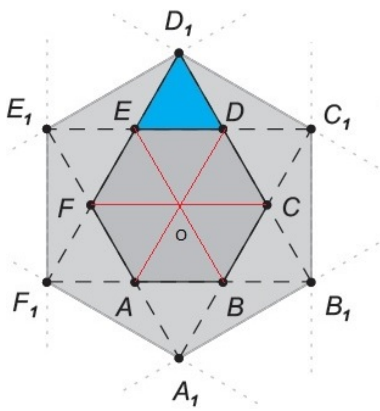


Figura 4: Solução da Questão 3a, Nível 2

Como o triângulo EDO ocupa $1/6$ da área do hexágono original, então a área do triângulo EDD_1 também mede $1/6$ da área do hexágono $ABCDEF$, ou seja, $(1/6)\text{cm}^2$.

b) Inicialmente, vamos mostrar que os triângulos EDD_1 e E_1D_1E são equivalentes.

Tracemos a altura D_1H do triângulo EDD_1. Como o segmento E_1E está no prolongamento do segmento ED, então podemos afirmar que D_1H é também altura do triângulo E_1D_1E.

Mas a base do triângulo E_1D_1E é o segmento E_1E, que é congruente ao segmento ED (demonstração análoga ao que vimos no item anterior). Como a área do triângulo é a metade do produto da base pela altura (e estas são equivalentes nos dois triângulos) então os triângulos são equivalentes, ou seja, têm a mesma área.

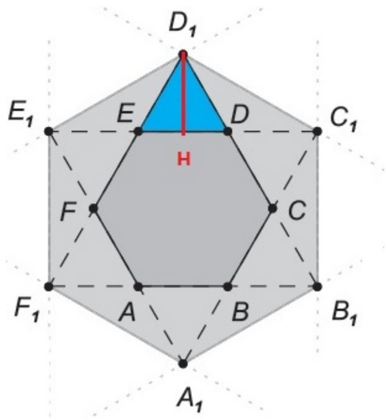


Figura 5: Solução da Questão 3b, Nível 2

Isto posto, para encontrarmos a área do hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ basta verificarmos que ele é composto por 12 triângulos equivalentes, além do hexágono $ABCDEF$ original, que contibui com mais 6 destes triângulos. Temos, portanto, 18 triângulos equivalentes e, como 6 deles medem 1cm^2 (do hexágono original) então a área desejada é igual a 3cm^2.

c) A área do 2º hexágono é o triplo da área do hexágono original. Como o processo se repete, então a área do 3º será o triplo da área do 2º e assim sucessivamente.

Desta forma, há uma correspondência entre as áreas e a sequência (1, 3, 9, 27, 81, 243, ...) de forma que a área do hexágono $A_5B_5C_5D_5E_5F_5$ será igual a 243cm^2.

Comentários sobre a questão:

Questões geométricas como esta têm um alto grau de dificuldade por si só, principalmente por não serem tão bem desenvolvidas nas escolas. De qualquer forma, o grande objetivo da questão é fazer os alunos perceberem que o cálculo de área está ligado à ideia de comparação e não à busca incessante por medidas para aplicação de fórmulas.

Neste sentido, não é difícil para um aluno do Nível 2 perceber que o triângulo azul mede exatamente 1/6 do hexágono. Talvez seja difícil para ele justificar matematicamente esta equivalência. O item (b) pode ser mais complicado pois os triângulos a serem comparados não são congruentes.

Um aspecto interessante da questão é o fato do item (c) não ser dependente do item (b). O aluno pode errar a área do hexágono $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, mas se ele perceber que as próximas áreas formam uma P.G., poderá acertar o item.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Área de Triângulos, Polígonos Regulares, Progressão Geométrica.

Expectivativa de acertos: 60%(Item a), 30%(Item b), 30%(Item c).

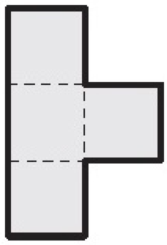
Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 8 + 8$.

Nota Média Esperada: $2,4 + 2,4 + 2,4 = 7,2 = 36\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

---

4. Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



a) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4x4 com essas peças.

b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10x10 com suas peças.

Uma Solução:[10]

c) Ao posicionarmos as peças no tabuleiros, há apenas duas situações possíveis: ela cobrirá três quadradinhos azuis e um amarelo (tipo 1) ou ela cobrirá três

[10]Esta questão também foi inserida na prova do Nível 1. Desta forma, não repetiremos as soluções dos itens (a) e (b), apresentadas na seção 2.1.

quadradinhos amarelos e um azul (tipo 2), conforme ilustrado pela imagem abaixo.

Figura 6: Peças dos Tipos 1 e 2, Questão 4c, Nível 2

Um tabuleiro 10x10 é composto por 100 quadradinhos, sendo 50 azuis e 50 amarelos. Como cada uma das peças disponíveis é composta de 4 quadradinhos, precisaríamos, portanto, de 25 iguais para cobrir todo o tabuleiro. Assim sendo, se chamarmos de x o número de peças do Tipo 1 e de y o número de peças do Tipo 2 temos a equação $x + y = 25$.

Ainda, cada peça do Tipo 1 contribui com 3 quadradinhos azuis, enquanto cada peça do Tipo 2 contribui com 1 quadradinho azul. Isto nos leva à equação $3x + y = 50$.

Assim sendo, o número de peças de cada tipo, necessárias para cobrir o tabuleiro é exatamente a solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 25 \\ 3x + y & = & 50 \end{array} \right. . \qquad (1)$$

No entanto, a solução do sistema (1) é $x = y = 12,5$, que não faz parte do domínio, uma vez que as quantidades de peças de cada tipo devem ser números inteiros não-negativos.

Portanto, não há como cobrir um tabuleiro 10x10 apenas com peças iguais à informada.

OBS: Poderíamos observar também o número de quadradinhos amarelos cobertos pelas peças dos tipos 1 e 2 e teríamos a equação $x + 3y = 50$. De qualquer forma, esta equação, se combinada com qualquer das duas apresentadas no sistema (1), também apresentaria a mesma solução $x = y = 12,5$.

Comentários sobre a questão:

A solução apresentada acima ilustra que há diferença significativa entre os alunos dos Níveis 1 e 2 na solução da questão, uma vez que os últimos já estudaram os métodos de resolução de Sistemas Lineares 2x2 (4^{o} bimestre do 7^{o} ano).

Baseado neste conhecimento, entendemos que a expectativa de acertos do item (c) no Nível 2 é maior que a informada para os alunos do Nível 1.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Operações com Números Naturais, Polígonos, Área de Retângulos, Pavimentação do Plano.

Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 60%(Item b), 20%(Item c).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 6 + 10$.

Nota Média Esperada: $3,2 + 3,6 + 2 = 8,8 = 44\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

---

5. Seis atletas, identificados pelas letras A, B, C, D, E e F, participaram de uma corrida de Quixajuba até Pirajuba. O atleta A saiu na frente, B saiu em seguida, e assim sucessivamente, até o atleta F, que saiu por último. O atleta D venceu a corrida e o atleta E terminou em último lugar.

A tabela mostra quantas vezes o atleta indicado na linha ultrapassou o atleta indicado na coluna. Por exemplo, o número 5 na casa rosa indica que o atleta D ultrapassou cinco vezes o atleta C durante a corrida.

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0		3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1		1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

a) Quantas vezes o atleta F ultrapassou o atleta B?

b) Qual número deverá ser escrito na casa amarela?

c) Qual número deverá ser escrito na casa verde?

d) Em que ordem os atletas terminaram a corrida?

Uma Solução:[11]

d) Tomando como premissa que os itens (b) e (c) foram resolvidos adequadamente, podemos apresentar outra solução para este item, observando as somas nas linhas e colunas. A imagem abaixo ilustra a tabela completa com estas somas:

	A	B	C	D	E	F	
A	-	2	4	2	1	2	= 11
B	2	-	0	1	3	1	= 7
C	4	0	-	4	1	3	= 12
D	3	2	5	-	1	3	= 14
E	1	3	1	1	-	0	= 6
F	3	2	4	3	1	-	= 13
	= 13	= 9	= 14	= 11	= 7	= 9	

Figura 7: 2ª Solução, Questão 5d, Nível 2

Observamos em vermelho a quantidade total de ultrapassagens realizada durante a prova pelo atleta da respectiva linha. Em azul está a quantidade total de ultrapassagens sofrida pelo atleta da respectiva coluna. Desta forma, podemos proceder com o seguinte raciocínio:

- O atleta A foi ultrapassado 13 vezes e fez 11 ultrapassagens, de forma que perdeu duas posições. Como largou em 1º então terminou em 3º.
- O atleta B foi ultrapassado 9 vezes e fez 7 ultrapassagens, de forma que perdeu duas posições. Como largou em 2º então terminou em 4º.
- O atleta C foi ultrapassado 14 vezes e fez 12 ultrapassagens, de forma que também perdeu duas posições. Como largou em 3º então terminou em 5º.
- O atleta D foi ultrapassado 11 vezes e fez 14 ultrapassagens, de forma que ganhou três posições. Como largou em 4º então terminou em 1º.
- O atleta E foi ultrapassado 7 vezes e fez 6 ultrapassagens, de forma que perdeu uma posição. Como largou em 5º então terminou em 6º.

[11] Esta questão também foi inserida na prova do Nível 1. Desta forma, não repetiremos as soluções dos itens (a), (b) e (c), apresentadas na seção 2.1.

- O atleta F foi ultrapassado 9 vezes e fez 13 ultrapassagens, de forma que ganhou quatro posições. Como largou em 6º então terminou em 2º.

Portanto, a ordem de chegada foi D - F - A - B - C - E.

<u>Comentários sobre a questão:</u>

Esta questão também nos parece uma escolha bastante adequada para ser inserida tanto no Nível 1 quanto aqui no Nível 2 (e no Nível 3). O fato dos alunos do Nível 2 pussuírem um pouco mais de maturidade em relação à lógica pode fazer bastante diferença no índice de acertos neste nível quando comparados ao Nível 1 (por isto aumentamos um pouco a expectativa de acertos), embora os conteúdos em si sejam perfeitamente entendíveis por alunos de todos os níveis.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Analise de Tabelas, Raciocício Lógico, Matrizes.

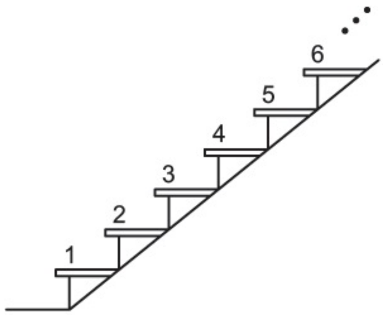
Expectivativa de acertos: 75%(Item a), 30%(Item b), 30%(Item c), 25%(d).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $2 + 4 + 4 + 10$.

Nota Média Esperada: $1,5 + 1,2 + 1,2 + 2,5 = 6,4 = 32\%$.

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

6. Fábio gosta de brincar em escadas, subindo ou descendo seus degraus da seguinte maneira:



- começa no degrau de número 1;
- a cada movimento ele sobe ou desce um ou dois degraus e, ao subir ou descer dois degraus, não pisa no degrau intermediário;
- pisa em todos os degraus exatamente uma vez.

Por exemplo, em uma escada com três degraus ele pode brincar de duas maneiras diferentes: 1-2-3, 1-3-2; com quatro degraus ele pode brincar de quatro maneiras diferentes: 1-2-3-4, 1-2-4-3, 1-3-2-4 e 1-3-4-2.

a) Fábio pode brincar de seis maneiras diferentes em uma escada com cinco degraus. Escreva essas seis maneiras.

b) Explique por que sempre é possível terminar a brincadeira no degrau de número 2 em qualquer escada com dois ou mais degraus.

c) Há 31 e 68 maneiras diferentes de se brincar em escadas com nove e onze degraus, respectivamente. De quantas maneiras diferentes Fábio pode brincar em uma escada com doze degraus?

Uma Solução:

a) Vamos tentar ordenar as possibilidades da seguinte forma: começamos com o degrau 1 e vamos para o seguinte, pulando um degrau apenas quando o fato de seguir para o próximo significar repetir uma sequência já determinada. Ao pular um degrau voltaremos para o anterior para manter a ordenação.

Nessas condições temos as seguintes possibilidades: $1-2-3-4-5$; $1-2-3-5-4$; $1-2-4-3-5$; $1-2-4-5-3$; $1-3-2-4-5$ e $1-3-5-4-2$.

b) Se a escada tem dois degraus basta seguir a sequência $1-2$.

Se a escada tem um número ímpar (maior que 2) de degraus pode-se seguir pulando um de forma a pisar apenas nos degraus de ordem ímpar. Ao chegar no final da escada, descemos para o degrau imediatamente inferior e retornamos pulando os degraus ímpares de forma a pisar apenas nos pares. Ao final deste processo terminaremos no degrau de número 2. Por exemplo, para uma escala de 11 degraus a sequência seria $1-3-5-7-9-11-10-8-6-4-2$.

Se a escada tem um número par de degraus (maior que 2) o processo é análogo ao anterior: subimos a escada apenas pelos ímpares. No entanto, ao chegar no penúltimo degrau da escada, subimos mais um e voltamos, pulando os ímpares. Por exemplo, para uma escala de 12 degraus a sequência seria $1-3-5-7-9-11-12-10-8-6-4-2$.

c) Para resolver este item, precisamos encontrar um raciocínio recorrente, uma vez que foram dados os números de maneiras de se brincar em escadas com nove e onze degraus. Desta forma, vamos analisar os seguintes cenários:

Fábio começa no degrau de número 1 e segue para o degrau 2: Nessas condições, podemos entender o degrau 2 como se fosse o degrau 1 de uma nova escada com 11 degraus (numeração em vermelho). O número de maneiras de subir a escada é equivalente ao número de maneiras de subir uma escada de 11 degraus começando no número 1, ou seja, 68.

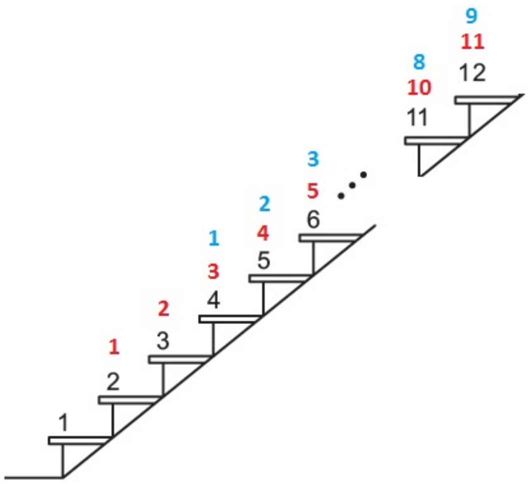


Figura 8: Solução da Questão 6c, Nível 2

Fábio começa no degrau de número 1 e segue para o degrau 3: ele não pode subir ao degrau 4 pois, do contrário, não poderia retornar ao degrau 2. Assim, o percurso a ser feito inicialmente é $1-3-2-4$. Nessas condições, o degrau 4 funciona como um novo degrau 1 (numeração em azul) e o problema passa a ser equivalente a subir uma escada com 9 degraus, que nos dá mais 31 maneiras.

Ainda há outra a ser considerada: aquela que Fábio sobre pelos números ímpares e desce pelos pares, até terminar no degrau 2.

Desta forma, o número total de maneiras para uma escada com 12 degraus é igual a $N = 68 + 31 + 1 = 100$.

<u>Comentários sobre a questão:</u>

A questão é um belo exemplo de como se pode abordar sequências e problemas de contagem no Ensino Fundamental. Os dois primeiros itens são totalmente acessíveis a alunos do Nível 2 e talvez até mesmo a alunos do Nível 1. Em contrapartida, o item (c) é o mais difícil da prova: é necessário um grau alto de maturidade para se analisar recorrências, o que não faz parte do perfil dos alunos do Nível 2.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Raciocínio Lógico, Sequências, Recorrência.

Expectivativa de acertos: 70%(Item a), 50%(Item b), 10%(Item c).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $6 + 6 + 8$.

Nota Média Esperada: $4,2 + 3 + 0,8 = 8 = 40\%$.

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

3.2 Análise dos Resultados

Iniciaremos esta seção apresentando os resultados obtidos pelos alunos da nossa amostra em cada questão. Para o Nível 2, esta amostra corresponde a 6.119 alunos, cujas provas foram analisadas pela correção nacional. Estas notas foram distribuídas de acordo com a Tabela 4 abaixo:

Tabela 4: Notas por Questão - Amostra Nível 2

Nota	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**
0	30	203	3.092	83	54	71
1	0	13	1	1	0	29
2	1	1	116	3	782	71
3	0	262	70	0	0	329
4	434	19	759	2.816	387	294
5	0	1	13	8	1	631
6	27	882	199	267	819	1.348
7	1	116	32	3	0	165
8	112	25	385	42	488	296
9	0	646	12	110	0	383
10	11	46	72	2.142	597	906
11	104	10	44	32	0	667
12	1.686	1.725	380	443	329	913
13	5	320	8	0	0	0
14	35	127	103	8	187	1
15	18	1.196	35	7	2	1
16	339	38	349	137	831	0
17	0	40	0	0	0	1
18	18	25	16	1	35	1
19	456	43	45	2	4	1
20	2.842	381	388	14	1.603	11

Assim como fizemos na seção 2.2, vamos comparar a avaliação prévia de dificuldade, com a classificação de dificuldade obtida após os resultados oficiais da prova.

As Tabelas 5 e 6 ilustram esta situação:

Tabela 5: Classificação Prévia de Dificuldade - Prova Nível 2

Questão	Nota Média Esperada	Dificuldade
1	$11,2 = 56\%$	Baixa
2	$8,8 = 44\%$	Média
3	$7,2 = 36\%$	Média
4	$8,8 = 44\%$	Média
5	$6,4 = 32\%$	Média
6	$8,0 = 40\%$	Média

Tabela 6: Classificação de Dificuldade após Resultados Oficiais - Amostra Nível 2

Questão	Nota Média Obtida	Dificuldade
1	$15,7 = 78,5\%$	Baixa
2	$11,2 = 56\%$	Baixa
3	$5,0 = 25\%$	Alta
4	$7,2 = 36\%$	Média
5	$11,5 = 57,5\%$	Baixa
6	$7,9 = 39,5\%$	Média

Comparando as Tabelas 5 e 6, percebe-se que a primeira questão teve índice de acerto bem superior ao esperado. Esperávamos que a maioria dos alunos ficasse com 12 pontos, que correspondem ao acerto dos itens (a) e (b). No entanto, 2.842 conseguiram fazer os 20 pontos. Contando os outros 456 alunos que fizeram 19 pontos, temos mais da metade dos alunos com índice de acerto excelente nesta questão. Resultado que surpreende positivamente.

A Questão 2 também teve resultado levemente superior ao esperado, mas suficiente para ser alocada na faixa de Baixa Dificuldade. Conforme comentamos na primeira análise desta questão, o número de acertos no item (c) foi realmente pequeno, uma vez que apenas 381 alunos conseguiram nota máxima na questão. No entanto, o número expressivo de alunos com 15 pontos indica que eles esboçaram um raciocínio interessante na tentativa de analisar a contagem solicitada. Provavelmente faltou um pouco mais de intimidade com o princípio multiplicativo.

O resultado da Questão 3 ficou abaixo do esperado, principalmente ao elevado número de notas zero obtidas: 3.092 alunos (50,5%) não conseguiram sequer mostrar que a área do triângulo azul valia 1/6 da área do hexágono original. Esperávamos que os alunos pudessem fazer esta associação ao traçar as diagonais do hexágono, embora também esperássemos dificuldades em justificar esta equivalência. Os outros itens eram realmente mais difíceis, mas vale ressaltar que o item (c) poderia ter sido feito mesmo sem que o item (b) o fosse. A impressão que tivemos foi que os alunos abandonaram a questão quando tiveram dúvidas no item (b) e a deixaram para o final da prova.

A Questão 4 também esteve presente na prova do Nível 1. Lá, o aproveitamento na questão foi de 25,5%, enquanto que aqui aumentou para 36%. Ainda está um pouco distante do previsto, mas podemos perceber que boa parte dos alunos já conseguiu justificar o item (b), o que não foi feito no Nível 1. Falaremos mais sobre esta questão no capítulo específico sobre as questões transversais.

A Questão 5 é outra questão que esteve presente no Nível 1. O aumento no índice de acertos foi bastante superior à questão anterior (de 38% para 57,5%, ficando na faixa de Baixa Dificuldade), nos indicando que o trabalho com análises de tabelas pode estar sendo mais bem desenvolvido a partir do 8º ano. Mais uma surpresa positiva.

Na Questão 6 o resultado obtido foi rigorosamente o esperado. O item (c), como comentado na análise inicial mostrou-se realmente muito difícil para alunos do Nível 2: apenas 11 (0,18%) alunos conseguiram resolvê-lo, o pior índice entre todas as questões. Entendemos que mesmo alunos do Nível 3 não conseguiriam resultados melhores nesta questão.

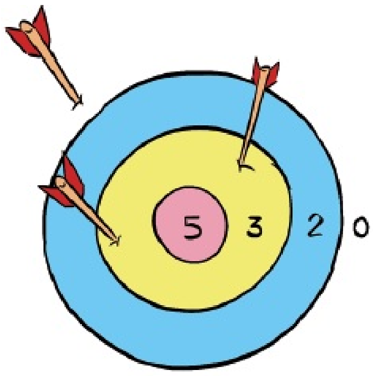
A nota média esperada para a prova do Nível 2 era 50,4, correspondendo a 42% da prova (Nível Médio de Dificuldade). Os resultados foram superiores, mas ainda na faixa de Média Dificuldade: a nota média obtida foi de 58,5 ou 48,75% do total.

4 OBMEP 2014 - 2ª Fase - Nível 3

Nesta seção, procederemos às análises das questões do Nível 3. Na subseção 4.1 faremos uma análise pedagógica de cada questão, indicando uma solução, observando a adequação da questão ao nível proposto e destacando os conteúdos envolvidos. Faremos também uma expectativa de acertos, baseada na nossa observação do grau de dificuldade da questão. Já na subseção 4.2 vamos comparar esta expectativa com os indíces oficiais de acerto em cada questão.

4.1 Análise das Questões

1. Michel pratica arco e flecha em um alvo como o da figura ao lado. Em cada rodada ele atira três flechas e sua pontuação, na rodada, é a soma dos pontos obtidos com cada flecha. Acertar as regiões interna, intermediária e externa vale, respectivamente, 5 pontos, 3 pontos e 2 pontos; errar o alvo vale zero ponto. Caso a flecha acerte uma linha que divide duas regiões, vale a maior pontuação dentre elas.



a) Michel somou 11 pontos em uma rodada. Quais foram os pontos obtidos com cada uma das três flechas?

b) Michel notou que poderia obter quase todas as pontuações de 0 a 15 em uma rodada. Quais são as pontuações impossíveis de se obter em uma rodada?

c) Michel somou 134 pontos em um treino. Explique por que houve pelo menos dez rodadas nesse treino.

Uma Solução:

a) Para obtençao de 11 pontos com três flechas, so há uma possibilidade: $11 = 5 + 3 + 3$. Esta possibilidade equivale a uma flecha na região interna e duas flechas na região intermediária, resposta do item.

b) As pontuações impossíveis com 3 flechas são representadas apenas pelos números 1 e 14. Para representar as pontuações possíveis temos as seguintes possibilidades: $0+0+0=0$, $0+0+2=2$, $0+0+3=3$, $0+2+2=4$, $0+2+3=5$, $0+3+3=6$, $0+2+5=7$, $0+3+5=8$, $3+3+3=9$, $0+5+5=10$, $3+3+5=11$, $5+5+2=12$, $5+5+3=13$ e $5+5+5=15$.

c) O número máximo de pontos por rodada é 15. Em 8 rodadas, o máximo atingível é, portanto, 120 pontos. Se ele tivesse participado de 9 rodadas teríamos $15 \cdot 9 = 135$ pontos. No entanto, não existe a possibilidade de fazer 14 pontos em uma rodada, o que nos levaria aos 134 pontos obtidos $(8 \cdot 15 + 14)$. Desta forma, o número mímino de rodadas é 10.

Comentários sobre a questão:

Questão extremamente simples para o Nível 3. Poderia ter sido trocada com a Questão 3 do Nível 1 e ambas as provas ganhariam: os alunos do Nível 1 teriam maiores possibilidades de justificar com exatidão o item (c) desta questão, enquanto os alunos do Nível 3 poderiam se sentir mais desafiados com a questão do cartão.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Operações com Números Naturais.

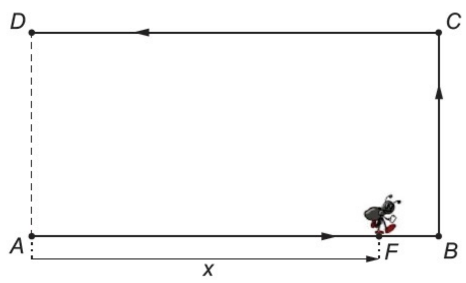
Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 70%(Item b), 60%(Item c).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4+6+10$.

Nota Média Esperada: $3,2+4,2+6=13,5=67,5\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Baixa.

2. Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo $ABCD$. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar x centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.

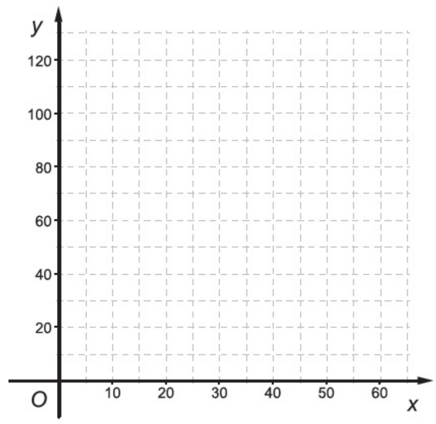


a) Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?

b) Calcule a área do triângulo ADF quando $x = 22$ centímetros.

c) Qual é a maior área possível para um triângulo ADF?

d) Esboce, no plano cartesiano Oxy, o gráfico da função que associa ao comprimento x o valor da área do triângulo ADF.



Uma Solução:

a) De A até D a formiga passeia pelos segmentos AB, BC e CD (de mesma medida que AB, pois $ABCD$ é um retângulo). Logo, ela anda $20+10+20 = 50$cm.

b) Sendo $x = 22cm$ então a formiga andou por todo o segmento AB mais 2cm pelo segmento BC, como mostra a figura ao lado. A área do triângulo ADF é dada pela área do retângulo $ABCD$ subtraída das áreas dos triângulos retângulos ABF e FCD.

Segue, Área $S = AB \cdot AD - 1/2 \cdot AB \cdot BF - 1/2 \cdot FC \cdot CD = 20 \cdot 10 - 1/2 \cdot 20 \cdot 2 - 1/2 \cdot 8 \cdot 20 = 200 - 20 - 80 = 100cm^2$.

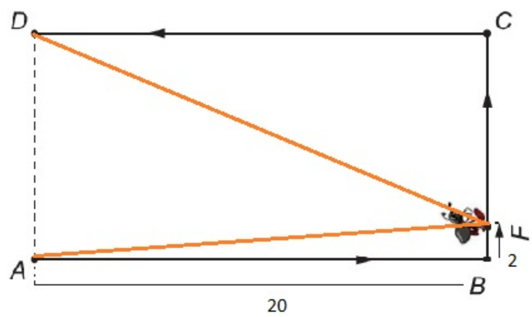


Figura 9: Solução da Questão 2b, Nível 3

c) A maior área possível ocorre quando a formiga está sobre o segmento BC, que é exatamente o caso anterior. Nessas condições, a área do triângulo ADF será sempre igual a $100cm^2$.

Isto ocorre porque na expressão $S = AB \cdot AD - 1/2 \cdot AB \cdot BF - 1/2 \cdot FC \cdot CD$ podemos colocar em evidência a medida do segmento AB (igual à medida do segmento CD), de forma a obter $S = AB \cdot (AD - 1/2(BF + FC))$. Substituindo pelas medidas segue Área $S = 20 \cdot (10 - 1/2 \cdot 10) = 20 \cdot (10 - 5) = 100cm^2$.

Para finalizar, basta verificar que se a formiga está sobre os segmentos AB ou CD o triângulo ADF terá medida inferior a $100cm^2$, uma vez que a altura mede 10cm (fixa) e a base seria menor que 20.

d) No item anterior já mostramos que se a formiga está sobre o segmento BC, a área do triângulo ADF será igual a $100cm^2$. Agora, vamos mostrar que a área aumenta e diminui linearmente quando a formiga passeia, respectivamente, pelos segmentos AB e CD: com F sobre AB ou CD, o triângulo ADF é retângulo de altura fixa (igual a 20cm). Desta forma, a área do triângulo será diretamente proporcional à sua base, que aumenta quando a formiga caminha pelo segmento AB e diminui quando a formiga caminha pelo segmento CD. O gráfico da função que modela a área do triângulo será dado, portanto, pela figura ao lado.

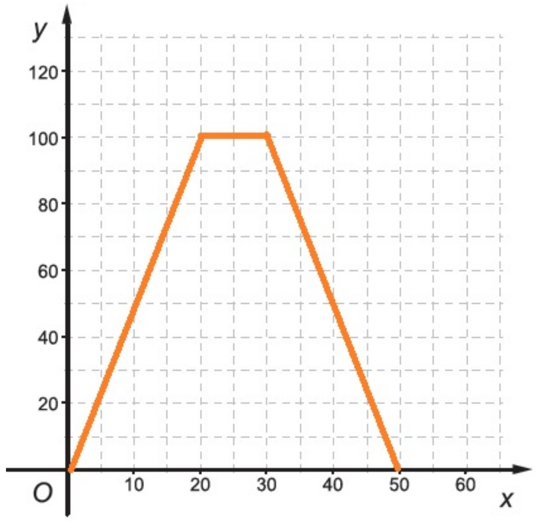


Figura 10: Solução da Questão 2d, Nível 3

Comentários sobre a questão:

Questão bem elaborada para o Nível 3. A solução oficial é mais elegante que a descrita neste texto, por tomar como base do triângulo ADF o segmento AD, fixo. Fica mais simples mostrar que a altura máxima será atingida quando F estiver sobre o segmento BC.

Também é importante perceber que a questão relaciona conceitos de funções e gráficos com uma situação geométrica.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Área de Triângulos e Retângulos, Funções, Gráficos de Funções.

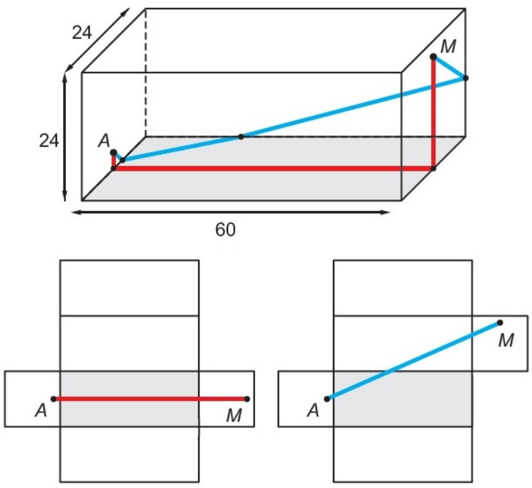
Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 50%(Item b), 50%(Item c), 50%(Item d).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $2+6+6+6$.

Nota Média Esperada: $1,6+3+3+3=10,6=53\%$

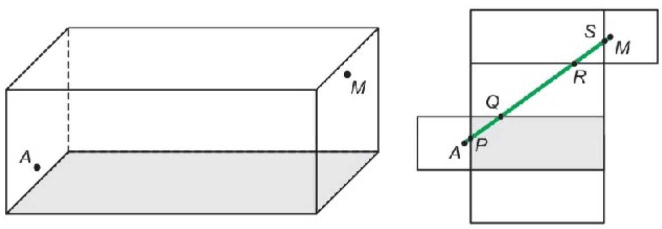
Grau de Dificuldade da Questão: Baixa.

3. Uma caixa retangular tem dimensões 60x24x24, em centímetros. Uma aranha A e uma mosca M estão nas faces laterais quadradas dessa caixa. Tanto a mosca quanto a aranha estão à mesma distância das outras duas faces laterais. A aranha está a uma distância de 2 cm da base enquanto a mosca está a uma distância de 2 cm do topo. Andando sobre a superfície da caixa, a aranha pode percorrer vários caminhos para chegar até a mosca, mas sempre escolhe algum que esteja sobre uma reta em alguma planificação da caixa. Na figura, vemos dois desses caminhos, um vermelho e outro azul, e suas respectivas planificações.



a) Qual é a distância que a aranha irá percorrer seguindo o caminho vermelho?

b) Desenhe na caixa a trajetória correspondente ao caminho indicado em verde na planificação, marcando os pontos P, Q, R e S onde essa trajetória intersecta as arestas da caixa.



c) Em qual dos três caminhos, vermelho, azul ou verde, a aranha andará menos? Justifique sua resposta.

Uma Solução:

a) Como na planificação AM é um segmento de reta, então podemos concluir que a aranha desce por um segmento perpendicular à base por 2cm. Depois percorre os 60cm no fundo da caixa e sobe perpendicularmente mais 22cm, até encontrar a mosca.

Desta forma, a distância percorrida é dada por: $d = 2 + 60 + 22 = 84cm$.

b) Tomando a face de trás como a percorrida temos a seguinte imagem:

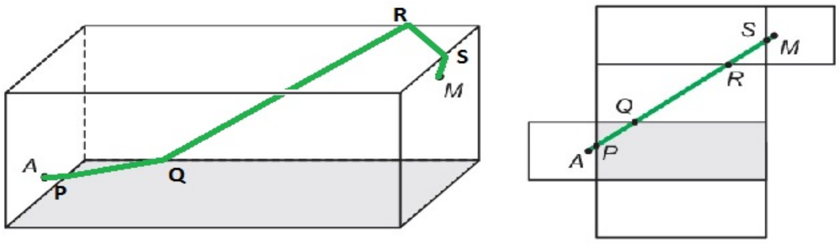


Figura 11: Solução da Questão 3b, Nível 3

c) Podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular os caminhos azul e verde. Observemos a figura abaixo:

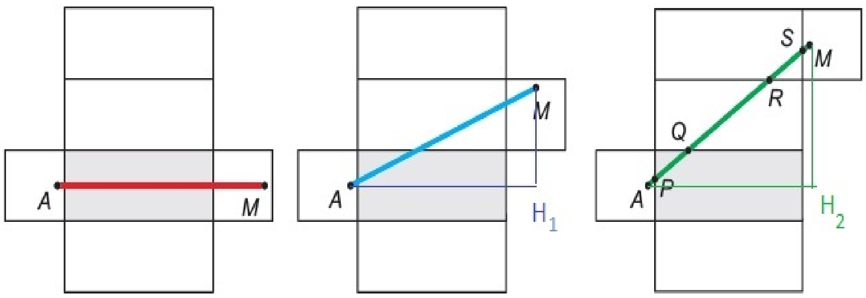


Figura 12: Solução da Questão 3c, Nível 3

No entanto, é preciso tomar cuidado para determinar as medidas AH_1, MH_1, AH_2 e MH_2, que são diferentes. Na figura azul, o ponto M está na metade da distância horizontal do quadrado, ou seja, $AH_1 = 2 + 60 + 12 = 74cm$. Ainda, o ponto M está a 2 cm do topo do quadrado, analisando verticalmente. Logo, $MH_1 = 12 + 22 = 36cm$.

Pelo Teorema de Pitágoras temos: $(d_1)^2 = 74^2 + 36^2 = 6632$.

Já na figura verde, temos $AH_2 = 2 + 60 + 2 = 64cm$ e $MH_2 = 12 + 24 + 12 = 48cm$. Pelo Teorema de Pitágoras temos: $(d_2)^2 = 64^2 + 48^2 = 6400$.

Como o segmento em vermelho mede 84cm e $84^2 = 7056$, concluímos que a aranha andará menos no caminho verde.

Comentários sobre a questão:

Questão totalmente identificada com o Nível 3, pois exige um pouco mais de maturidade em relação à visão espacial e identificação das planificações de um paralelepípedo retângulo. É interessante destacar que as três planificações são diferentes, de forma que os alunos precisariam ter bastante atenção no cálculo dos comprimentos em cada caso.

Outro aspecto interessante da questão é o fato da solução não ser intuitiva. Quem imaginaria que o caminho mais curto, entre os dados, seria aquele que passa por 5 faces do paralelepípedo?

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Paralelepípedo Retângulo e suas Planificações, Teorema de Pitágoras.

Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 35%(Item b), 25%(Item c).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 6 + 10$.

Nota Média Esperada: $3,2 + 2,1 + 2,5 = 7,8 = 39\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

4. Seis atletas, identificados pelas letras A, B, C, D, E e F, participaram de uma corrida de Quixajuba até Pirajuba. O atleta A saiu na frente, B saiu em seguida, e assim sucessivamente, até o atleta F, que saiu por último. O atleta D venceu a corrida e o atleta E terminou em último lugar.

A tabela mostra quantas vezes o atleta indicado na linha ultrapassou o atleta indicado na coluna. Por exemplo, o número 5 na casa rosa indica que o atleta D ultrapassou cinco vezes o atleta C durante a corrida.

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0		3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1		1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

a) Quantas vezes o atleta F ultrapassou o atleta B?

b) Qual número deverá ser escrito na casa amarela?

c) Qual número deverá ser escrito na casa verde?

d) Em que ordem os atletas terminaram a corrida?

Comentários sobre a questão:[12]

Como comentado quando da análise desta questão no Nível 2, esta me parece uma escolha bastante adequada para ser repetida no Nível 3, principalmente pelo estudo das Matrizes ser mais aprofundado no Ensino Médio. Esperam-se índices de acertos significativamente maiores que nos Níveis 1 e 2.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Analise de Tabelas, Raciocício Lógico, Matrizes.

Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 40%(Item b), 40%(Item c), 35%(d).

[12]Esta questão também foi inserida nas provas dos Níveis 1 e 2. Desta forma, não repetiremos as soluções apresentadas nas Seções 2.1 e 3.1.

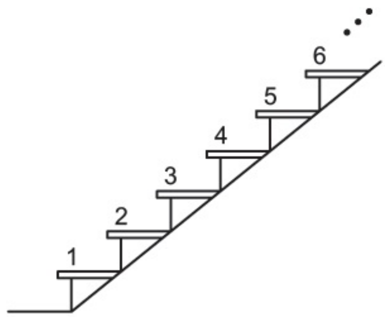
Valor da Questão: 20 pontos, sendo $2 + 4 + 4 + 10$.

Nota Média Esperada: $1,6 + 1,6 + 1,6 + 3,5 = 8,3 = 41,5\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

---

5. Fábio gosta de brincar em escadas, subindo ou descendo seus degraus da seguinte maneira:



- começa no degrau de número 1;
- a cada movimento ele sobe ou desce um ou dois degraus e, ao subir ou descer dois degraus, não pisa no degrau intermediário;
- pisa em todos os degraus exatamente uma vez.

Por exemplo, em uma escada com três degraus ele pode brincar de duas maneiras diferentes: 1-2-3, 1-3-2; com quatro degraus ele pode brincar de quatro maneiras diferentes: 1-2-3-4, 1-2-4-3, 1-3-2-4 e 1-3-4-2.

a) Fábio pode brincar de seis maneiras diferentes em uma escada com cinco degraus. Escreva essas seis maneiras.

b) Explique por que sempre é possível terminar a brincadeira no degrau de número 2 em qualquer escada com dois ou mais degraus.

c) Há 31 e 68 maneiras diferentes de se brincar em escadas com nove e onze degraus, respectivamente. De quantas maneiras diferentes Fábio pode brincar em uma escada com doze degraus?

Uma Solução:[13]

c) Nesta solução, apresentaremos a expressão de recorrência que modela o problema. Para isto, utilizaremos raciocínio semelhante ao utilizado na solução apresentada na seção 3.1:

[13]Esta questão também foi inserida na prova do Nível 2. Desta forma, não repetiremos as soluções dos itens (a) e (b), apresentadas na seção 3.1.

Seja X_n o número de maneiras de brincar em uma escada com n degraus ($n > 4$).

Fábio começa no degrau de número 1 e segue para o degrau 2: nessas condições, podemos entender o degrau 2 como se fosse o degrau 1 de uma nova escada com $n-1$ degraus (numeração em vermelho). O número de maneiras de subir a escada é equivalente ao número de maneiras de subir uma escada de $n-1$ degraus começando no número 1, ou seja, X_{n-1}.

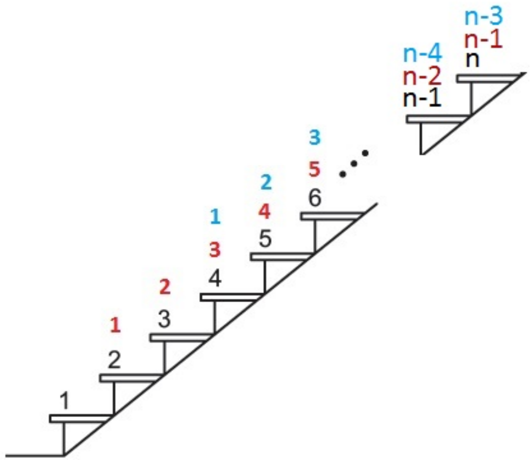


Figura 13: 2ª Solução, Questão 5c, Nível 3

Fábio começa no degrau de número 1 e segue para o degrau 3: ele não pode subir ao degrau 4 pois, do contrário, não poderia retornar ao degrau 2. Assim, o percurso a ser feito inicialmente é $1-3-2-4$. Nessas condições, o degrau 4 funciona como um novo degrau 1 (numeração em azul) e o problema passa a ser equivalente a subir uma escada com $n-3$ degraus, que nos dá mais X_{n-3} maneiras.

Ainda há outra a ser considerada: aquela que Fábio sobre pelos números ímpares e desce pelos pares, até terminar no degrau 2.

Desta forma, o número total de maneiras para uma escada com n degraus é dada pela expressão $X_n = X_{n-1} + X_{n-3} + 1$.

A partir desta expressão de recorrência podemos calcular o número de maneiras para as escadas com mais de 4 degraus, até chegarmos à escada de 12 degraus, solicitada na questão:

- $X_5 = X_4 + X_2 + 1 = 4 + 1 + 1 = 6$;
- $X_6 = X_5 + X_3 + 1 = 6 + 2 + 1 = 9$;
- $X_7 = X_6 + X_4 + 1 = 9 + 4 + 1 = 14$;
- $X_8 = X_7 + X_5 + 1 = 14 + 6 + 1 = 21$;
- $X_9 = X_8 + X_6 + 1 = 21 + 9 + 1 = 31$;
- $X_{10} = X_9 + X_7 + 1 = 31 + 14 + 1 = 46$;
- $X_{11} = X_{10} + X_8 + 1 = 46 + 21 + 1 = 68$;

- $X_{12} = X_{11} + X_9 + 1 = 68 + 31 + 1 = 100.$

Logo, o número total de maneiras para uma escada com 12 degraus é igual a 100.

OBS: Através desta solução, percebe-se como os formuladores da questão chegaram aos resultados $X_9 = 31$ e $X_{11} = 68$, dados no enunciado da questão.

Comentários sobre a questão:

Questão bem escolhida para ser aplicada também aos alunos do Nível 3, que deveriam aprofundar seus estudos sobre sequências, incluisive sendo apresentados a sequências recorrentes como é o caso do item (c). De qualquer forma, não esperamos que o grau de acerto deste item seja muito maior que no Nível 2 neste último item.

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Raciocínio Lógico, Sequências, Recorrência.

Expectivativa de acertos: 80%(Item a), 60%(Item b), 10%(Item c).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $6 + 6 + 8$.

Nota Média Esperada: $4,8 + 3,6 + 0,8 = 9,2 = 46\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Média.

6. Cada uma das cem pessoas de uma fila escolhe, ao acaso, um número de 1 a 20 e o escreve em um papel, mantendo esse número em segredo. Depois que todos escreveram, o primeiro da fila anuncia o seu número. Em seguida, o segundo da fila faz o mesmo, e assim sucessivamente. A primeira pessoa que anunciar um número igual a um número já anunciado ganha um prêmio.

a) O primeiro da fila não tem chance de ganhar o prêmio. Qual é a posição da próxima pessoa da fila que também não tem chance alguma de ganhar o prêmio?

b) Qual é a probabilidade de que o terceiro da fila ganhe o prêmio?

c) Quem tem maior probabilidade de ganhar o prêmio: o sétimo da fila ou o oitavo? Justifique.

d) Em que posição ou posições da fila é maior a probabilidade de ganhar o prêmio? Justifique.

<u>Uma Solução:</u>

a) Como os números a serem escritos são de 1 a 20, pode acontecer de as 20 primeiras pessoas pegarem números diferentes. Desta forma, a 21ª pessoa da fila ganharia o prêmio pois certamente teria um número de 1 a 20.

Logo, a 22ª pessoa da fila não tem qualquer chance de ganhar o prêmio, assim como qualquer pessoa que esteja atrás dela.

b) O terceiro da fila ganha o prêmio se o segundo não tiver um número igual ao do primeiro e ele, 3º, tiver um número igual ao do primeiro ou ao do segundo.

A probabilidade do segundo não ter um número igual ao do primeiro é de 19/20, enquanto a probabilidade do terceiro ter um número igual ao do primeiro ou ao do segundo é de 2/20.

Logo, a probabilidade do 3º da fila ganhar o prêmio é dada por $19/20 \cdot 2/20 = 19/200 = 9,5\%$.

c) Vamos calcular as probabilidades do 7º e do 8º ganharem o prêmio.

Para o 7º ganhar o prêmio ele precisa que as pessoas anteriores a ele não tenham ganho e, além disso, ele precisa ter um número igual a um dos 6 anteriores. Esta probabilidade pode ser calculada de forma análoga ao item anterior. Segue:

$P_7 = 19/20 \cdot 18/20 \cdot 17/20 \cdot 16/20 \cdot 15/20 \cdot 6/20$

Da mesma forma, podemos calcular a probabilidade do 8º ganhar o prêmio:

$P_8 = 19/20 \cdot 18/20 \cdot 17/20 \cdot 16/20 \cdot 15/20 \cdot 14/20 \cdot 7/20$

Note que não é necessário calcular o valor de cada probabilidade (as contas seriam desgastantes), basta comparar P_7 e P_8. Como as frações são iguais até 15/20, vamos comparar apenas o fator 6/20 com o produto $14/20 \cdot 7/20$.

Mas $14/20 \cdot 7/20 = 49/200 < 60/200 = 6/20$. Portanto, a probabilidade do 7º da fila ganhar o prêmio é maior que a probabilidade do 8º da fila.

d) Vamos resolver de forma análoga ao anterior. Inicialmente, vamos encontrar a probabilidade da n^a pessoa da fila ganhar o prêmio:

$$P_n = \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{20} \cdot ... \cdot \frac{20-(n-2)}{20} \cdot \frac{n-1}{20}$$

Agora, vamos encontrar a probabilidade da $(n+1)^a$ pessoa ganhar o prêmio:

$$P_{n+1} = \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{20} \cdot ... \cdot \frac{20-(n-2)}{20} \cdot \frac{20-(n-1)}{20} \cdot \frac{n}{20}$$

Da mesma forma que no item anterior, vamos verificar para que valores de n temos $P_n \leq P_{n+1}$. Para isto, vamos comparar o último fator de P_n com os dois últimos de P_{n+1}:

$$P_n \leq P_{n+1} \to \frac{n-1}{20} \leq \frac{20-(n-1)}{20} \cdot \frac{n}{20} \to 20(n-1) \leq n(21-n)$$

$$20n - 20 - 21n + n^2 \leq 0 \to n^2 - n - 20 \leq 0 \to -4 \leq n \leq 5.$$

A solução obtida nos indica que $P_2 < P_3 < P_4 < P_5 = P_6 > P_7 > P_8$... Logo, as posições com maiores probabilidades de ganharem o prêmio são as posições 5 e 6, em que as chances são iguais.

Comentários sobre a questão:

Questões que envolvem Análise Combinatoria e Probabilidade causam grandes dificuldades aos alunos, em grande parte por eles gastarem energia tentando descobrir qual é a fórmula a ser usada. Nesta questão, o emprego adequado do princípio multiplicativo e da probabilidade relacionada a interseção de eventos poderia direcionar os alunos ao caminho certo.

Entendemos que os itens (b), (c) e (d) exploram o mesmo tema, aumentando apenas o grau de dificuldade devido ao número de fatores a serem considerados (no item c) e à necessidade de algebrização do problema (no item d). Em nossa opinião, a questão poderia ser encerrada no item (c).

Conteúdos Envolvidos: Resolução de Problemas, Princípio Multiplicativo, Probabilidade.

Expectivativa de acertos: 60%(Item a), 40%(Item b), 20%(Item c), 5%(Item d).

Valor da Questão: 20 pontos, sendo $4 + 4 + 6 + 6$.

Nota Média Esperada: $2,4 + 1,6 + 1,2 + 0,3 = 5,5 = 27,5\%$

Grau de Dificuldade da Questão: Alta.

4.2 Análise dos Resultados

Iniciaremos esta seção apresentando os resultados obtidos pelos alunos da nossa amostra em cada questão. Para o Nível 3, esta amostra corresponde a 5.237 alunos, cujas provas foram analisadas pela correção nacional. Estas notas foram distribuídas de acordo com a Tabela 7 abaixo:

Tabela 7: Notas por Questão - Amostra Nível 3

Nota	**Q1**	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**
0	1	85	8	4	10	680
1	0	36	0	0	2	604
2	0	1.183	1	112	7	99
3	1	636	0	0	41	6
4	18	554	14	39	44	1.203
5	10	515	23	0	126	1.644
6	16	193	198	109	647	15
7	87	11	21	0	51	25
8	129	47	4	54	151	386
9	32	27	109	3	211	7
10	304	35	3.241	213	730	42
11	44	29	43	3	846	24
12	139	18	47	137	2.281	56
13	32	165	79	2	1	53
14	246	81	79	83	5	177
15	54	4	54	1	5	12
16	233	51	77	622	2	84
17	374	10	87	1	0	6
18	976	84	184	24	9	14
19	187	23	390	40	3	18
20	2.354	1.450	578	3.790	65	82

Assim como fizemos na seções 2.2 e 3.2, vamos comparar a avaliação prévia de dificuldade, com a classificação de dificuldade obtida após os resultados oficiais da prova.

As Tabelas 8 e 9 ilustram esta situação:

Tabela 8: Classificação Prévia de Dificuldade - Prova Nível 3

Questão	Nota Média Esperada	Dificuldade
1	$13,5 = 67,5\%$	Baixa
2	$10,6 = 53\%$	Baixa
3	$7,8 = 39\%$	Média
4	$8,3 = 41,5\%$	Média
5	$9,2 = 46\%$	Média
6	$5,5 = 27,5\%$	Alta

Tabela 9: Classificação de Dificuldade após Resultados Oficiais - Amostra Nível 3

Questão	Nota Média Obtida	Dificuldade
1	$17,2 = 86\%$	Baixa
2	$9,0 = 45\%$	Média
3	$12,2 = 61\%$	Baixa
4	$17,8 = 89\%$	Baixa
5	$10,3 = 51,5\%$	Baixa
6	$4,9 = 24,5\%$	Alta

Comparando as Tabelas 8 e 9, ratifica-se nossa afirmação de que a Questão 1 seria mais apropriada aos Níveis 1 e 2 do que propriamente ao Nível 3: a nota média obtida foi de 17,2 pontos, o que corresponde a 86% dos pontos possíveis.

A Questão 2 apresentou uma peculiaridade interessante: embora 1.450 alunos tenham conseguido os 20 pontos outros 1.183 conseguiram apenas dois, valor do item (a). Isto pode ser explicado devido ao fato dos itens (b) e (c) necessitarem de raciocínios análogos para sua solução. Um aspecto interessante a ser notado é que o item (d) parece ter sido bem desenvolvido por quem fez os demais, ou seja, o conceito de gráfico de função teria sido bem adquirido.

A Questão 3 foi mais uma surpresa positiva da prova: esperávamos maiores dificuldades, principalmente devido ao fato do item (b) associar uma planificação ao paralelepípedo em perspectiva. O raciocínio aplicado ao encontrar as medidas para aplicação do Teorema de Pitágoras no item (c) também foi bem desenvolvido. É um resultado bem interessante, ainda mais porque os alunos do 1º Ano do Ensino Médio não são tão estimulados ao trabalho com Sólidos Geométricos.

A Questão 4 também apresentou resultado bem mais alto do que esperado. Das três provas, esta foi a questão com maior nota média obtida (89%), o que pode indicar que o estudo das Matrizes ajuda bastante na resolução de problemas que envolve tabelas.

A Questão 5 também teve leve distorção entre a média esperada e a média obtida. Do total, 2.281 alunos conseguiram os 12 pontos dos itens (a) e (b). Apenas 65 conseguiram fazer o item (c), ilustrando que Recorrência não é mesmo um assunto visto no Ensino Médio.

A Questão 6 foi a única classificada com alto grau de dificuldade após a análise dos resultados obtidos. Acreditávamos que os dois primeiros itens seriam resolvidos pela maioria (que resultariam em 8 pontos), mas as duas maiores faixas de acertos foram as de notas 4 e 5, o que mostra que apenas o item (a) foi feito de maneira satisfatória. Neste sentido, este resultado corrobora com o que já conhecíamos: precisamos melhorar o Ensino de Combinatória e Probabilidade.

Na prova do Nível 3, esperávamos que os alunos tivessem nota média em torno de 54,9, o que corresponde a, aproximadamente, 46% da prova (Nível Médio de Dificuldade). No entanto, os resultados mostraram que os alunos conseguiram se sair bem melhores, com nota média 71,4 ou 59,5% de acertos. Isto coloca a prova do Nível 3 na faixa de Dificuldade Baixa, diferente das demais.

5 Questões Transversais

Nesta seção, dedicaremos maior atenção às questões transversais, presentes em provas de diferentes níveis. Na 2ª Fase da OBMEP 2014 foram três: uma presente nos níveis 1 e 2, uma nos níveis 2 e 3 e outra presente nos três níveis.

5.1 Entrevista: As Questões Transversais nas provas da OBMEP

Inicialmente, pretendemos informar ao leitor acerca da inserção das questões tranversais. Para isto, apresentaremos uma breve entrevista com o Prof. Pedro Malagutti, atuante na coordenação nacional da OBMEP.

1) Quais são os objetivos da coordenação da OBMEP quando apresentam questões transversais para as provas?

Prof. Malagutti: *O Comitê de Provas da OBMEP considera que o raciocínio dedutivo e a capacidade de resolver problemas, quando bem colocado, pode ser resolvido por alunos de diferentes faixas etárias e, muitas vezes, o formalismo com que a Matemática é apresentada nas escolas, por vezes, pode tolher a capacidade criativa e a liberdade em resolver uma determinada situação-problema. É muito comum que alunos do Nível 1 apresentem respostas mais criativas do que alunos de outros níveis, apesar dos poucos pré-requisitos que possuem. Sendo assim, um dos objetivos das questões transversais é detectar talentos precoces e incentivá-los a desenvolver suas capacidades, fornecendo amplo apoio para que isto ocorra.*

2) Como é feita a seleção das questões que serão inseridas em mais de um nível?

Prof. Malagutti: *Esta pergunta é difícil de responder pois envolve a beleza estética da questão. Questões que comparecem em mais de um nível são discutidas com bastante afinco pelos componentes do Comitê de Provas e são aprovadas por unanimidade para poderem estar presentes em dois ou mais níveis.*

É mais fácil responder quando uma questão não deve ser transversal. Na primeira e segunda fases da OBMEP, a seleção de questões transversais, obviamente, leva em conta os pré-requisitos que um aluno deve ter para resolver a questão. Por exemplo, não faz sentido colocar questões para o Nível 1 que envolvam o Teorema de Pitágoras ou Semelhança de Triângulos, mas faz sentido propor questões de Combinatória que possam ser resolvidas utilizando, mesmo em situações complexas, o Princípio Fundamental da Contagem.

Assim, para responder sua pergunta, considero que a seleção de questões presentes em mais de um nível está relacionada com a beleza e a criatividade presentes na resolução da questão, respeitados os conhecimentos prévios dos alunos.

3) Quais os conteúdos mais atraentes para este tipo de ação?

Prof. Malagutti: *Não há um foco definido para escolher questões transversais, mas há áreas da Matemática escolar que são bem propícias a isto:*

– Questões puramente de Aritmética que não precisam de ferramentas algébricas para sua resolução;

– Questões de Geometria que envolvam perímetros e áreas que possam ser resolvidos por decomposição ou comparação;

– Questões de Combinatória que aliam a divisão em casos com o Princípio Multiplicativo;

– Questões de Raciocínio Lógico ou de Estratégia com situações novas para o aluno.

4) A coordenação da OBMEP analisa os resultados obtidos pelos alunos de diferentes níveis nestas questões?

Prof. Malagutti: *Sim. Há relatórios precisos feitos pela Central da OBMEP e pela Fundação Carlos Chagas que indicam os percentuais de erros e acertos dessas questões e uma análise rigorosa feita por profissionais externos à OBMEP que apresentam, criticam e comentam as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de tais questões. Estas análises servem como feedback para a proposição de novas questões para os anos seguintes.*

5) A coordenação da OBMEP acredita que uma análise destes resultados pode auxiliar os professores no aprimoramento do processo ensino-aprendizagem na Educação Básica? De que formas?

Prof. Malagutti: *Sim. Há ainda uma análise que deve ser feita, diretamente ligada ao ambiente escolar. Um trabalho sistematizado feito por professores acerca do trabalho, nas escolas, com questões da OBMEP certamente trará melhorias significativas nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.*

Não podemos continuar obtendo os últimos lugares nas avaliações internacionais e descuidar para que assuntos básicos de Matemática não sejam incorporados ao universo intelectual dos alunos, na idade certa. A apresentação de problemas desafiadores e, ao mesmo tempo, divertidos, sagazes e pertencentes ao cotidiano dos alunos, com certeza provoca melhorias.

Para se conseguir isto em larga escala é necessário que muitos professores passem a adotar metodologias que levem os alunos a enfrentar e resolver problemas. Há também uma enorme carência em trabalhos que mostrem aos professores como fazer isto, principalmente os que descrevem ações concretas que levem os alunos à resolução de problemas.

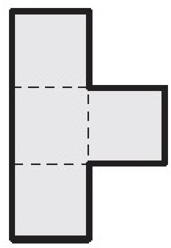
A OBMEP oferece muitas oportunidades de engajamento nesta tarefa, basta uma consulta ao site para confirmar isto. Destaca-se o programa recém criado

"OBMEP na Escola", em que professores bolsistas têm a tarefa de implementar e divulgar as metodologias de aprendizagem apresentadas pela OBMEP em sua escola e região, além de outras.

5.2 Questões Transversais na 2ª Fase da OBMEP 2014

Conteúdos transversais (presente em várias etapas da Educação Básica), representados por problemas motivadores e que, geralmente, permitem algumas possibilidades diferentes de soluções. É basicamente esta a receita para questões transversais. Vamos analisar mais profundamente as questões selecionadas para a 2ª fase da OBMEP 2014:

T1 - Níveis 1 e 2. Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir os quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



a) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4x4 com essas peças.

b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10x10 com suas peças.

Esta questão é um belo exemplo de como integrar diversas áreas da Matemática como Geometria, Aritmética e Álgebra. Nas seções anteriores, apresentamos duas soluções para o item (c): uma utilizando paridade, conforme o gabarito oficial e outra utilizando sistema de equações lineares 2x2.

Vamos analisar os resultados obtidos pelos alunos nas amostras dos Níveis 1 e

2. A tabela a seguir apresenta o número de alunos (das amostras) que obtiveram determinada nota na questão. Lembramos que os valores dos itens (a), (b) e (c) eram, respectivamente, 4, 6 e 10 pontos.

Tabela 10: T.1 - Relação Nota/Número de Alunos - Amostras Níveis 1 e 2

Nota	**Nível 1**	**Nível 2**
0	498	83
1	0	1
2	15	3
3	0	0
4	4.865	2.816
5	19	8
6	330	267
7	1	3
8	911	42
9	34	110
10	620	2.142
11	3	32
12	93	443
13	2	0
14	136	8
15	0	7
16	18	137
17	0	0
18	0	1
19	0	2
20	2	14

Tabela 11: T1 - Nota Média Obtida - Amostras Níveis 1 e 2

Nível 1	**Nível 2**
$5,1 = 25,5\%$	$7,2 = 36\%$

Observando a Tabela 10, percebemos alguns fatos interessantes:

- Enquanto a maior parte dos alunos da amostra do Nível 1 concentrou-se na faixa dos 4 pontos - acerto apenas do item (a), os alunos da amostra do Nível

2 estiveram mais distribuídos entre as faixas de 4 e 10 pontos (acerto dos dois primeiros itens), o que indica que no Nível 2 houve maior associação entre o número de quadradinhos contido em 20 peças e a área de um quadrado de lados inteiros. É possível que os alunos do Nível 1 tenham tentado resolver imaginando possibilidades de pavimentação com tais peças (solução geométrica), o que os levou ao erro ou à desistência do item (b).

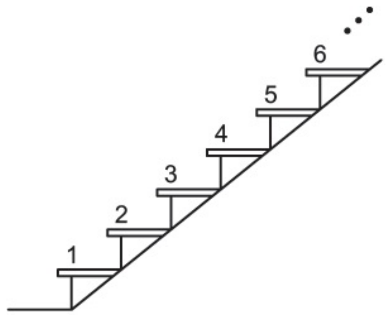
- Embora tenham sido melhores que os colegas do Nível 1, houve um número relativamente excessivo (em nossa opinião) de alunos do Nível 2 que ficaram apenas nos 4 pontos. Podemos imaginar que o menor espaço para questões geométricas nas salas de aula seja uma das causas para este resultado.

- O número de acertos na íntegra foi muito baixo nos dois níveis. No Nível 1, este fato não pode ser considerado nenhuma surpresa, pois o raciocínio por paridade realmente não é muito explorado nas escolas. No entanto, a solução algébrica apresentada na seção 3.1 é acessível aos alunos do Nível 2, de forma que estes poderiam ter sido um pouco melhores. Em todo caso, mesmo para a montagem do sistema de equações que o levariam à justificativa da impossibilidade da montagem do quadrado 10x10, era necessário que os alunos percebessem que havia dois modos de inserir a peça no tabuleiro, tomando como base os quadradinhos azuis e amarelos por ela cobertos. Isto não era um fato trivial e pode ter contribuído para o baixo número de alunos com 20 pontos na questão.

- A nota média obtida pelos alunos da amostra do Nível 2 foi 41% maior que a nota média obtida pelos alunos da amostra do Nível 1. É um número alto, mas que pode ser mais bem explicado pelo baixíssimo desempenho dos alunos do Nível 1 no item (b) do que pelo desempenho dos alunos do Nível 2 propriamente dito.

T2 - Níveis 2 e 3. Fábio gosta de brincar em escadas, subindo ou descendo seus degraus da seguinte maneira:

- começa no degrau de número 1;
- a cada movimento ele sobe ou desce um ou dois degraus e, ao subir ou descer dois degraus, não pisa no degrau intermediário;
- pisa em todos os degraus exatamente uma vez.



Por exemplo, em uma escada com três degraus ele pode brincar de duas maneiras diferentes: 1-2-3, 1-3-2; com quatro degraus ele pode brincar de quatro maneiras diferentes: 1-2-3-4, 1-2-4-3, 1-3-2-4 e 1-3-4-2.

a) Fábio pode brincar de seis maneiras diferentes em uma escada com cinco degraus. Escreva essas seis maneiras.

b) Explique por que sempre é possível terminar a brincadeira no degrau de número 2 em qualquer escada com dois ou mais degraus.

c) Há 31 e 68 maneiras diferentes de se brincar em escadas com nove e onze degraus, respectivamente. De quantas maneiras diferentes Fábio pode brincar em uma escada com doze degraus?

Esta é uma questão de Estratégia, associada às Sequências Numéricas e proposta aos alunos dos Níveis 2 e 3. Os dois primeiros itens são acessíveis inclusive aos alunos do Nível 1. Entretanto, o item (c) é bastante difícil para qualquer dos níveis.

Vamos analisar os resultados obtidos pelos alunos nas amostras dos Níveis 2 e 3. A tabela a seguir apresenta o número de alunos que obtiveram determinada nota na questão. Lembramos que os valores dos itens (a), (b) e (c) eram, respectivamente, 6, 6 e 8 pontos.

Tabela 12: T2 - Relação Nota/Número de Alunos - Amostras Níveis 2 e 3

Nota	**Nível 2**	**Nível 3**
0	71	10
1	29	2
2	71	7
3	329	41
4	294	44
5	631	126
6	1.348	647
7	165	51
8	296	151
9	383	211
10	906	730
11	667	846
12	913	2.281
13	0	1
14	1	5
15	1	5
16	0	2
17	1	0
18	1	9
19	1	3
20	11	65

Tabela 13: T2 - Nota Média Obtida - Amostras Níveis 2 e 3

Nível 2	**Nível 3**
$7,9 = 39,5\%$	$10,3 = 51,5\%$

Observando a Tabela 12, percebemos os seguintes fatos:

- No Nível 2, a faixa com mais alunos (na amostra) foi a de 6 pontos, que indica o acerto apenas do item (a). Já no Nível 3, a faixa com maior índice de acertos foi a de 12 pontos, equivalente aos itens (a) e (b). Este fato surpreende, uma vez que o item (b) é, teoricamente, bastante acessível aos alunos do Nível 2. Talvez a diferença esteja na prática em solucionar problemas que estimulem o raciocínio lógico.

- O número de acertos na íntegra foi muito baixo nos dois níveis. Este resultado não surpreende pois os alunos da Educação Básica não são estimulados à resolução de problemas por raciocínio recorrente.

- A nota média obtida pelos alunos da amostra do Nível 3 foi 30% maior que a nota média obtida pelos alunos da amostra do Nível 2. É um número aceitável, considerando a experiência dos alunos destes diferentes níveis, embora acreditemos que os alunos no Nível 2 poderiam ter conseguido rendimentos melhores no item (b).

T3 - Níveis 1, 2 e 3. Seis atletas, identificados pelas letras A, B, C, D, E e F, participaram de uma corrida de Quixajuba até Pirajuba. O atleta A saiu na frente, B saiu em seguida, e assim sucessivamente, até o atleta F, que saiu por último. O atleta D venceu a corrida e o atleta E terminou em último lugar.

A tabela mostra quantas vezes o atleta indicado na linha ultrapassou o atleta indicado na coluna. Por exemplo, o número 5 na casa rosa indica que o atleta D ultrapassou cinco vezes o atleta C durante a corrida.

	A	B	C	D	E	F
A	-	2	4	2	1	2
B	2	-	0		3	1
C	4	0	-	4	1	3
D	3	2	5	-	1	3
E	1		1	1	-	0
F	3	2	4	3	1	-

a) Quantas vezes o atleta F ultrapassou o atleta B?

b) Qual número deverá ser escrito na casa amarela?

c) Qual número deverá ser escrito na casa verde?

d) Em que ordem os atletas terminaram a corrida?

Esta é uma questão das áreas de Estratégia e Tratamento da Informação, associada à Análise de Tabelas, acessível aos alunos dos diferentes níveis.

Vamos analisar os resultados obtidos pelos alunos nas amostras dos Níveis 1, 2 e 3. A tabela a seguir apresenta o número de alunos que obtiveram determinada nota na questão. Lembramos que os valores dos itens (a), (b), (c) e (d) eram, respectivamente, 2, 4, 4 e 10 pontos.

Tabela 14: T3 - Relação Nota/Número de Alunos - Amostras Níveis 1, 2 e 3

Nota	**Nível 1**	**Nível 2**	**Nível 3**
0	245	54	4
1	0	0	0
2	1.102	782	112
3	0	0	0
4	1.279	387	39
5	0	1	0
6	1.363	819	109
7	0	0	0
8	1.381	488	54
9	0	0	3
10	673	597	213
11	0	0	3
12	384	329	137
13	1	0	2
14	127	187	83
15	0	2	1
16	507	831	622
17	0	0	1
18	9	35	24
19	0	4	40
20	476	1.603	3.790

Tabela 15: T3 - Nota Média Obtida - Amostras Níveis 1, 2 e 3

Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**
$5,1 = 7,6 = 38\%$	$11,5 = 57,5\%$	$17,8 = 89\%$

Observando a Tabela 14, apresentamos os seguintes fatos:

- Na amostra do Nível 1, as notas se concentraram nas faixas inferiores (8, 6, 4 e 2 pontos, nesta ordem). Na amostra do Nível 2, houve uma quantidade significativa de alunos com 20 pontos, mas ainda números razoáveis nas faixas mais baixas. Já na amostra do Nível 3 a questão foi acertada na íntegra pela maior parte dos alunos e não houve quantidades significativas nas faixas de menor pontuação.

- O número de acertos na íntegra foi baixo no Nível 1, razoável no Nível 2 e muito alto no Nível 3. Este resultado mostra que é preciso trabalhar um pouco mais com problemas relacionados à Análise de Tabelas no Ensino Fundamental. No Ensino Médio, há uma vantagem dada pelo estudo das Matrizes, mas, principalmente, devido ao maior tempo dispensado ao Tratamento da Informação, talvez até mesmo pela reincidência destas questões no ENEM.

- A nota média obtida pelos alunos do Nível 2 foi 51% maior que a nota média obtida pelos alunos do Nível 1 e a nota média obtida pelos alunos do Nível 3 foi 54% maior que a obtida pelos alunos do Nível 2. Os números são altos, confirmando o que citamos no item anterior sobre o tempo destinado ao Tratamento da Informação em cada nível.

As questões transversais da OBMEP são importantes à medida que ilustram, de formas simples e eficazes, possibilidades de discussão de determinados conceitos ao longo de toda a Educação Básica. Ao trabalhar questões similares em sala de aula, os professores possibilitam que alunos do Nível 1 explorem sua criatividade em busca de soluções. Enquanto isto, alunos dos demais níveis podem também se valer de seu maior conhecimento matemático para buscar soluções alternativas e mesmo revisitar os conceitos mais básicos.

Os números apresentados nesta seção indicam que há diferença significativa entre estudantes dos três níveis presentes na prova, o que nos permite inferir que talvez os conteúdos matemáticos estejam demasiadamente fragmentados na Educação Básica.

Na proxima seção, apresentaremos sugestões para utilização das questões da OBMEP nas salas de aula do Ensino Fundamental II e Ensino Médio de forma a tentar melhorar este quadro, refletindo também sobre os possíveis ganhos que esta ação possa gerar no processo ensino-aprendizagem de Matemática.

6 Possibidades de exploração da OBMEP em Sala de Aula

Nesta seção, tentaremos relacionar de maneira mais concreta as questões da OBMEP com a atuação do Professor de Matemática. Para isto, vamos nos aprofundar um pouco mais nas análises dos resultados de forma a propor sugestões para otimizar o aprendizado dos conteúdos trabalhados na prova, principalmente aqueles relacionados aos itens onde o índice de erro foi alto.

6.1 Ensino Fundamental - 6º e 7º Anos

Nos primeiros dois anos do Ensino Fundamental II, o foco do Ensino de Matemática é a Aritmética. O currículo escolar, nesta etapa, situa-se basicamente sobre o Sistema de Numeração Decimal e o estudo dos Números Naturais, Inteiros e Racionais, aprofundando este estudo geralmente até Razões, Proporções e Porcentagem. Em Geometria, os alunos são estimulados a conhecer as formas básicas mais elementares, os polígonos. Nestas formas, são exploradas as ideias de Perímetro e Área, sendo esta última de forma bem elementar. Pode-se trabalhar também o reconhecimento de figuras espaciais como o Cubo e suas planificações. A Álgebra aparece apenas no 2º bimestre do 7º ano, quando os alunos iniciam os estudos das equações do 1º grau.

A prova do Nível 1 da OBMEP utiliza os conteúdos vistos no Ensino Fundamental I (1º ao 5º Anos), que são aprofundados no 6º Ano. Desta forma, esta prova é perfeitamente utilizável no processo ensino-aprendizagem nas turmas de 6º ano. Ainda, questões do Nível 2 (e mesmo algumas do Nível 3) podem ser utilizadas tanto no 6º quanto no 7º ano, dependendo do conteúdo a ser trabalhado pelos professores.

Ao longo desta subseção, vamos analisar com mais cuidado os resultados obtidos pelos alunos na 2ª fase da OBMEP 2014 e verificar de que forma as ideias presentes naquelas questões podem ser aproveitadas em turmas regulares.

A <u>Questão 1 - Nível 1</u> explora o sistema de númeração decimal através de um problema que envolve um comando. É uma questão que pode ser trabalhada em turmas regulares de 6º ano exatamente da forma como está apresentada, auxiliando o aprendizado deste conteúdo. Além disso, questões que envolvem algum tipo de comando são úteis para apresentar aos alunos os algoritmos necessários ao "fazer matemática", na Educação Básica.

Com relação aos índices de acerto da amostra, percebe-se uma concentração de notas entre 10 e 12 pontos, o que indica acerto dos dois primeiros itens e dificuldades no terceiro. Tirando a dificuldade inerente ao terceiro item - o fato do algarismo 9 ser mais vantajoso na casa das unidades e não na maior ordem - nos parece que falta desenvolver problemas como este em sala de aula no 6º ano. Em geral, nós nos preocupamos mais com problemas em que há um certo número de algarismos e os alunos devem ordená-los de forma a obter o maior (ou menor) número. Falta exatamente trabalhar mais problemas onde a quantidade de algarismos é variável, dependendo do comando do enunciado.

Para otimizar o desenvolvimento dos alunos neste conteúdo, há uma série de exercícios interessantes na página oficial da OBMEP. Fazendo uma pesquisa rápida por "**aritmética**"no banco de questões, o professor pode montar listas de atividades compatíveis com o desenvolvimento de seus alunos.

A <u>Questão 2 - Nível 1</u> trabalha perímetro e área de figuras retangulares (ou formada pela composição e/ou sobreposição de retângulos). Esta foi a questão mais acertada na íntegra pelos alunos da amostra do Nível 1. Houve também quantidades significativas de acertos na faixa de 16, 12 e 10 pontos (nesta ordem), mostrando que o assunto é de domínio dos estudantes desta amostra.

Desta forma, nossa sugestão para o desenvolvimento deste conteúdo em turmas do Nível 1 concentra-se mais no fato de desenvolver este trabalho em paralelo ao conteúdo "Operações com Números Naturais", logo no início do 6º ano. Em geral, o estudo da Geometria fica mais restrito ao 4º bimestre, o que pode causar fragmentação dos conteúdos e dar a impressão que a Geometria está dissociada do restante da Matemática.

Assim sendo, é importante avançar na parte Geométrica do conteúdo a cada nova visita aos temas Aritméticos. Por exemplo, ao se estudar múltiplos e divisores, o professor pode trabalhar a área de retângulos a partir das diferentes medidas de seus lados. Investigações como *"de todos os retângulos de área 12 e lados com medidas naturais qual é o que possui menor perímetro?"* podem ajudar a ilustrar a integração entre os temas.

A <u>Questão 3 - Nível 1</u> nos oferece uma excelente oportunidade de começar a trabalhar com os alunos deste nível as justificativas matemáticas. A análise dos resultados desta questão mostrou que quase a metade dos alunos da amostra conseguiu 12 pontos, o que corresponde aos três primeiros itens. No entanto, apenas 116 alunos (1,5%) conseguiram os 20 pontos, de forma que podemos inferir que houve enorme dificuldade na justificativa matemática pedida no enunciado.

Entendemos que o motivo desta dificuldade está na falta de trabalho com tabelas nas aulas de Matemática nas turmas de 6º e 7º anos. Assim, nossa proposta para os professores que trabalham com turmas nesta faixa de escolaridade, é a de aproveitar os conteúdos vistos e iniciar com os alunos a montagem e análise de tabelas. Focando nesta questão, podemos perceber que a construção de uma tabela que ilustre o problema permitiria aos alunos responder todos os itens sem maiores dificuldades. Vejamos:

Ana	**Beatriz**	**Carlos**	**Retirados**	**Sobram**
0	1	2	21	4
0	2	1	15	10
1	0	2	19	6
1	2	0	7	18
2	0	1	11	14
2	1	0	5	20

Esta não é uma tabela difícil de ser feita pelos alunos. Naturalmente, o professor deve conduzí-los adequadamente para otimizar o processo: entendemos que, em um primeiro momento, o professor pode indicar que a tabela terá as cinco colunas (Ana, Beatriz, Carlos, Retirados, Sobram) e inserir a primeira combinação para os cartões, questionando seus alunos sobre, nesta situação, qual seria o número de cartões retirados e qual seria a sobra. Posteriormente, o professor solicitaria outras combinações para os cartões até que os alunos não conseguissem encontrar novas. Neste momento, os alunos então completariam as colunas "retirados" e "sobram" com as novas possibilidades e, finalmente, partiriam para as respostas do problema.

Vimos uma estratégia simples e funcional, que aborda tanto os conteudos principais quanto os conteúdos secundários como Introdução à Análise Combinatória (o professor pode estimular os alunos a descobrirem quantas são as possibilidades para a retirada dos cartões enquanto eles montam a tabela) e às Expressões Algébricas. Uma aula de 50 min seria mais do que suficiente para desenvolvê-la e, em caso de uma aula dupla (dois tempos de 50 min), exercícios semelhantes poderiam ser inseridos para que os alunos resolvessem em grupos. A Questão 1 - Nível 3 poderia ser um destes exercícios. O ganho para estes alunos seria enorme, em nossa opinião. Cabe ressaltar que este tipo de estudo também pode ser desenvolvido e aprofundado com alunos dos demais períodos do Ensino Fundamental, durante o trabalho com Frações, Decimais, Números Negativos e Irracionais.

A Questão 4 - Nível 1 explora um Quadrado 4x4 que possui um Número Mágico e também dispõe de um comando a ser executado para se determinar a constante mágica. Observando os resultados vimos que 2.935 alunos da amostra ficaram na faixa de 6 pontos, o que corresponde ao acerto apenas dos itens (a) e (b). Outros 1.210 conseguiram 8 pontos (basicamente também o acerto dos dois primeiros itens).

É possível que a ideia pré-concebida sobre os quadrados mágicos (soma constante nas linhas, colunas ou diagonais) tenha influenciado negativamente na resolução do item (c). Cabe esclarecer que, em nenhum momento, o enunciado informa que o quadrado é mágico mas apenas que o quadrado possui um número mágico. De qualquer forma, isto nos mostra que precisamos variar mais os exercícios que trabalham este tipo de comando.

O item (d) solicitava uma explicação dos alunos para a funcionalidade do processo descrito no item (b). Para alunos do Nível 1 isto é uma tarefa bastante difícil, uma vez que eles não têm acesso à Álgebra para apoiá-los. Desta forma, como ajudá-los à encontrar uma resposta satisfatória para este item? Nossa sugestão é que, ao trabalhar o problema em sala de aula, os professores peçam para que cada grupo de alunos construa seu próprio quadrado de acordo com o comando da questão e repasse este quadrado aos outros grupos de alunos para que eles tentassem conseguir os números-chave, que serviram de base para a montagem no quadrado. Para que exista um grau de dificuldade crescente, o professor pode sugerir que alguns destes números-chave sejam divulgados previamente. Em nossa opinião, este seria um processo de investigação muito interessante e que certamente os ajudaria a encontrar uma explicação adequada sobre a funcionalidade desta forma de montagem destes quadrados com números mágicos. Vale ressaltar que no 7º ano podemos utilizar um problema similar para trabalhar os números negativos.

O desempenho dos alunos na Questão 5 - Nível 1 nos surpreendeu negativamente. Esperávamos que os dois primeiros itens fossem resolvidos sem maiores dificuldades, mas na verdade houve incríveis 4.865 alunos da amostra do Nível 1 que só conseguiram resolver o item (a). Além disso, apenas dois alunos obtiveram nota máxima na questão.

Nossa explicação para este resultado é que os alunos tentaram resolver o item (b) também de uma forma geométrica. Não houve qualquer associação entre os 80 quadradinhos disponíveis nas 20 peças e a área de um quadrado formado por eles. Isto pode mostrar que, neste nível, falta exatamente aquela integração entre geometria e aritmética que comentamos quando falamos da Questão 2 - Nível 1. Se nossos alunos fossem estimulados a navegar por estes dois campos da Matemática de maneira conveniente, certamente a pontuação nesta questão estaria concentrada nos 10 pontos, equivalente ao acerto dos dois primeiros itens.

A explicação solicitada no item (c) também precisa ser trabalhada em sala de aula. Naturalmente, com alunos de 6º e 7º anos não devemos exigir uma capacidade de argumentação refinada, mas podemos auxiliá-los a refletir sobre caminhos que o permitam chegar aos raciocínios mais interessantes. Por exemplo, ao discutir a solução por paridade em sala de aula, os professores podem iniciar questionando sobre de que formas as peças disponíveis podem ser inseridas no tabuleiro.

No final do 7º ano são estudados os sistemas de equações lineares 2x2, o que permitiria aos professores apresentarem a 2ª solução vista na seção 3.1. No entanto, os alunos podem (e devem) ser estimulados a criar suas próprias conjecturas e a realizar experiências que os permitissem comprová-las ou refutá-las. Neste sentido, os professores poderiam trazer impresso um tabuleiro 10x10 e várias das peças da questão, distribuir aos alunos em grupos e pedir que, a partir da experiência concreta, tentassem justificar o por quê da impossibilidade de cobrir tal tabuleiro.

Para ajudá-los a perceber que a justificativa não se baseia na decomposição do quadrado 10x10 em quadrados 4x4, o professor poderia pedir que tentassem montar um quadrado 8x8 sem utilizar tal decomposição, analogamente ao que mostramos na figura 3.

Ainda, se lembrarmos que a peça disponibilizada no enunciado é uma daquelas presentes no antigo jogo "tetris", poderíamos solicitar que nossos alunos fizessem a mesma experiência com outras peças deste jogo, como por exemplo:

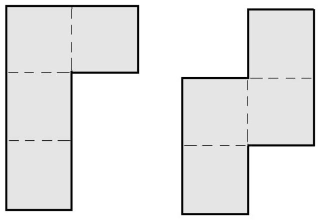


Figura 14: Outras figuras para abordagem da Questão 5, Nível 1

O leitor pode se questionar sobre o tempo necessário para se fazer todas estas atividades. No entanto, acreditamos que isto possa ser muito mais interessante (não apenas no aspecto motivacional, mas também com relação ao processo ensino-aprendizagem) do que o enorme tempo gasto copiando matéria no quadro para que os alunos copiem no caderno. Se o professor prepara suas notas de aula e tira cópias para os alunos, ganha tempo para realizar as atividades que realmente podem fazer diferença. Se desejamos um Ensino de Matemática atual, precisamos refletir sobre práticas antigas e pouco funcionais, de forma a aproveitarmos melhor nosso tempo e o de nossos alunos.

Sobre a Questão 6 - Nível 1, entendíamos que os alunos do Nível 1 teriam bastante dificuldades nela, pois o trabalho com tabelas não é tão estimulado neste período. Os resultados confirmam este pensamento: as faixas com as maiores pontuações foram 8, 6, 4 e 2 pontos (nesta ordem) de forma que mais de 5.300 alunos da amostra não conseguiram acertar nem os três primeiros itens na íntegra (o que os daria 10 pontos).

Para modificar este quadro, não há outra maneira senão elaborar sequências didáticas onde a análise de tabelas (e gráficos) esteja inserida no processo ensino-aprendizagem. Como comentamos anteriormente, pode-se trabalhar questões mais simples (como as Questões 3 e 4 da prova do Nível 1) e que também trafeguem por este conteúdo, antes de se propor problemas como este, mais complexos. Acreditamos, inclusive, que este problema poderia ser melhor desenvolvido em turmas de 7º ano, ficando os alunos do 6º ano com as questões mais simples. Novamente, informamos que uma pesquisa rápida no Banco de Questões da OBMEP traz resultados interessantes na busca por "Tabelas", o que nos permite elaborar algumas listas de atividades em tempo satisfatório.

A prova do Nível 2 também é focada nos conteúdos vistos no Ensino Fundamental I, além dos conteúdos trabalhados no 6º ano. Desta forma, os professores que trabalham em turmas de 6º e 7º anos também podem utilizar questões originalmente elaboradas para o Nível 2 em suas turmas. Por exemplo, o trabalho com Sequências Numéricas e Principio Multiplicativo pode perfeitamente ser iniciado, de forma empírica, em turmas de 6º ano e aprofundado nas demais séries do Ensino Fundamental para que, no Ensino Médio, a formalização seja mais acessível aos alunos. Vejamos como algumas das questões da prova do Nível 2 se inserem neste contexto:

A Questão 1 - Nível 2 abre a prova exatamente com um problema sobre sequências. O resultado nos surpreendeu positivamente: cerca de 87% dos alunos da amostra do Nível 2 conseguiram resolver corretamente os dois primeiros itens e mais da metade destes alunos também conseguiu resolver corretamente o item (c), garantindo os 20 pontos da questão.

A outra questão da prova do Nível 2 que abordou o estudo das Sequências Numéricas foi a Questão 6 - Nível 2. Se olharmos apenas para o número de alunos da amostra que fizeram 20 pontos nesta questão, poderemos nos espantar por terem sido apenas 11, o menor número na faixa dos 20 pontos na prova. No entanto, uma análise mais atenta dos resultados desta questão, mostra que a concentração de acertos ficou na faixa dos 6, 12, 10 e 11 pontos (nesta ordem), o que indica que os alunos conseguiram ir bem nos dois primeiros itens e que o item (c) estava em um grau de dificuldade muito alto para este nível.

Desta forma, podemos inferir que o trabalho com as Sequências Numéricas, no Ensino Fundamental, vem sendo mais desenvolvido pelos professores. Entendemos apenas que o trabalho com este conteúdo, neste nível, também deve ser feito de forma mais aritmética, observando os padrões de construções das sequências. Em turmas de 6º e 7º anos é importante aproveitar as discussões sobre Números Primos, Múltiplos e Divisores para trabalhar problemas como este.

É importante também não deixar este conteúdo restrito às Progressões Aritméticas e Geométricas, que serão serão aprofundadas no Ensino Médio. No Ensino Fundamental, os professores devem tentar ampliar a noção de sequência, estimulando a criatividade de seus alunos. Por exemplo, qual é o padrão da sequência *(2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, ...)* e qual é o seu próximo elemento?[14]

Pode-se até tentar trabalhar levemente algum tipo de recorrência (como por exemplo, a construção da sequência de Fibonacci), mas entendemos que este grau de aprofundamento do assunto está mais voltado para os alunos do Nível 3.

A Questão 2 - Nível 2 é bem interessante por trabalhar uma situação de Análise Combinatória a partir de figuras geométricas simples. A maior faixa de acertos, entre os alunos da amostra, foi a de 12 pontos, o que corresponde aos dois primeiros itens. Houve ainda um número expressivo de alunos na faixa de 15 pontos (acerto parcial do terceiro item), mas apenas 381 alunos conseguiram os 20 pontos na questão.

Deste resultado, inferimos que existe um reconhecimento de questões básicas ligadas aos problemas de contagem, mas talvez falte trabalhar com mais intensidade o Princípio Multiplicativo. Acreditamos que os alunos que fizeram 15 pontos podem conhecer o princípio e talvez tenham respondido $N = 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ possibilidades (multiplicando apenas as possibilidades de colar cada cartão e esquecendo de permutá-los no álbum). Mas, pelo número de alunos que conseguiu encontrar as soluções dos dois primeiros itens, entendemos que um número maior de alunos poderia ter feito mais de 12 pontos.

Uma pergunta que surge diante desta reflexão é: *"Existe espaço no currículo do Ensino Fundamental para se falar sobre o Princípio Multiplicativo?"*. Entendemos que sim e este trabalho poderia ser iniciado ainda no 6º ano, quando são estudadas as Operações com Números Naturais. Após trabalhar os problemas que envolvem a Multiplicação como soma de várias parcelas iguais, os professores podem explorar este outro significado da Multiplicação, a de ilustrar o número de maneiras diferentes de escolha para um elemento de determinado conjunto e, ao mesmo tempo, um elemento de outro conjunto. Um exemplo clássico de problema a ser abordado no Nível 1 é aquele onde determinada pessoa dispõe de M camisas e N bermudas e pede-se o número de diferentes combinações com com uma camisa e uma bermuda que ela pode conseguir.

Entendemos que não há motivo para não se falar no Princípio Multiplicativo quando se discute a Multiplicação de Naturais no 6º ano. Ao contrário, talvez um dos motivos para dificuldade no estudo da Análise Combinatória seja exatamente o fato de se deixar toda a matéria para o 2º ano do Ensino Médio. Felizmente isto vem mudando há algum tempo e acreditamos que as próximas gerações te-

[14] A sequência é formada pelos números cujas grafias se inicam pela letra "D", no nosso idioma. Assim, o próximo elemento é 200.

nham menos dificuldade ao virem com esta bagagem do Princípio Multiplicativo interiorizada desde o Ensino Fundamental.

Este é um conteudo transversal e que deve ser aprofundado nas demais séries do Ensino Fundamental, sempre de maneira empírica, antes de ser formalizada no Ensino Médio. Mais à frente, em turmas de 8º e 9º anos, pode-se trabalhar problemas mais elaborados em que, além da escolha dos elementos, deve-se também escolher posições onde eles serão alocados. O item (c) da Questão 2 - Nível 2 aborda exatamente este tipo de problema. Não se deve aprofundar o assunto ao ponto de falar em Permutações, Arranjos ou Combinações, ao contrário, nesta fase o mais importante é deixar os alunos raciocinarem sobre os problemas apenas com o uso do Princípio Multiplicativo. No Banco de Questões da OBMEP há uma série de atividades para os Níveis 1 e 2 que podem ser utilizadas nas aulas sobre o assunto.

Com relação aos conteúdos mais vistos nas turmas regulares de 6º e 7º anos, sentimos falta apenas daqueles relacionados às Frações, que não foram contemplados na prova do Nível 1. Este é um conteúdo onde os alunos têm enormes dificuldades, mesmo em séries mais avançadas do Ensino Fundamental.

Entendemos que o trabalho com as frações deve ser feito de forma bem devagar, com o professor transitando pelos vários significados das frações ao longo das atividades. Abaixo, listamos alguns destes significados e possíveis abordagens para cada um deles:

- Relação Parte-Todo: É o primeiro contato que os alunos têm com as frações. Quando se divide algo em um número de partes iguais (denominador) e selcionam-se algumas destas partes (numerador). É importante trabalhar com os alunos o fato das fatias serem do mesmo tamanho, o que parece simples mas pode gerar dúvidas. A questão abaixo ilustra bem este raciocínio:

  OBMEP 2010, 1ª Fase, Nível 1, Questão 10. *A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado?*

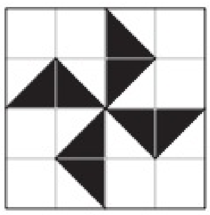


Figura 15: Frações como Relação Parte-Todo

- Divisão entre dois Inteiros: A passagem das frações próprias para as frações impróprias (e números mistos) pode ser mais bem entendida quando se analisa as frações como uma divisão entre dois inteiros. Por exemplo:

  OBMEP 2006, 2ª Fase, Nível 1, Questão 6. *A figura representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 km pode ser realizada com partida em D e chegada em A.*

  (a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

  (b) E para uma corrida de 100 quilometros, quais são esses postos?

  (c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

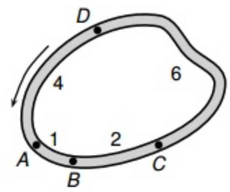


Figura 16: Frações como Divisão entre dois Inteiros

  Observando a figura e concluindo que a pista toda tem comprimento igual a 13km, podemos associar as frações $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{6}{13}$ e $\frac{4}{13}$ aos percursos AB, BC, CD e DA, respectivamente.

  Além disso, a solução do item (b) passa pela reflexão sobre quantas voltas são necessárias para se completar os 100km desejados. Neste caso, a divisão euclidiana de 100 por 13 está diretamente relacionada à fração $\frac{100}{13}$ e também ao número misto $7\frac{9}{13}$, fazendo a devida associação entre estas duas representações deste número racional.

- Número Absoluto: Discutir a ideia de que as frações são números que têm localização única na reta numérica, entre dois inteiros ou sobre eles, caso sejam frações aparentes. Aliás, aqui há também uma vantagem em usar o número misto ao invés da fração imprópria. Por exemplo, se quisermos localizar na reta a posição da fração $\frac{7}{6}$, podemos utilizar o número misto $1\frac{1}{6}$ para, imediatamente, saber que está entre o 1 e o 2. No 7º ano pode-se trabalhar da mesma forma com frações negativas.

OBMEP 2012, 1ª Fase, Nível 1, Questão 7. *A figura mostra uma reta numerada na qual estão marcados pontos igualmente espaçados. Os pontos A e B correspondem, respectivamente, aos números* $\frac{7}{6}$ *e* $\frac{19}{6}$*. Qual é o número que corresponde ao ponto C?.*

Figura 17: Frações como Números Absolutos

- Relação entre duas Grandezas: Aqui tratamos as frações como razões. Este é um significado importante e, dentre outros aspectos, possibilita introduzir o conceito de média. A questão abaixo ilustra este significado com propriedade.

  OBMEP 2013, 1ª Fase, Nível 2, Questão 18. *João vai de bicicleta ao encontro de sua namorada Maria. Para chegar na hora marcada, ele deve sair às 8 horas e pedalar a 10 km/h ou sair às 9 horas e pedalar a 15 km/h. A que horas é o encontro dos namorados?*

- Operador Matemático: Aqui temos as frações como operadores matemáticos, ou seja, quando precisamos calcular algo como 4/5 de certo número inteiro ou mesmo 4/5 de outra fração. Há uma série de contextos onde é necessário fazer cálculos como estes. O exemplo abaixo ilustra este pensamento, trazendo a fração na forma de porcentagem.

  OBMEP 2011, 1ª Fase, Nível 2, Questão 7. *A figura mostra o resultado de uma pesquisa sobre a aquisição de eletrodomésticos da qual participaram 1000 pessoas. Com base nesses dados, pode-se afirmar que o número de pessoas que possuem os dois eletrodomésticos é, no mínimo:*

  (A)500 (B)550 (C)650 (D)700 (E)800

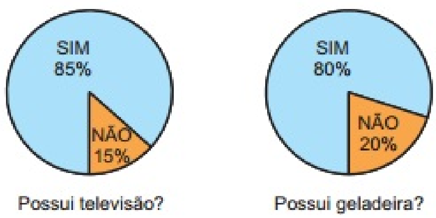


Figura 18: Frações como Operador Matemático

- Probabilidade de ocorrência de um Evento: Frações são indispensáveis no estudo das probabilidades. No Nível 1, os alunos podem ser introduzidos a este estudo e, ao mesmo tempo, refletirem sobre outro contexto onde as frações estão presentes. Não se deve aprofundar o estudo de probabilidade neste nível, mas sim aproveitá-lo para trabalhar problemas diferentes com as frações. Por exemplo:

  OBMEP 2010, 2ª Fase, Nível 3, Questão 5, Item (a). *André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre eles. Para isto, colocaram três bolas brancas e uma preta em uma caixa e combinaram que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tiraria uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirasse a bola preta ganharia o livro. Qual a probabilidade de André ganhar o livro?*

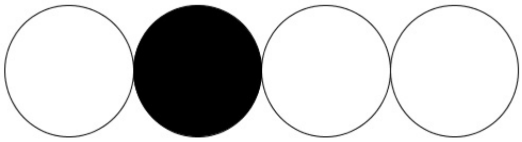


Figura 19: Frações como Probabilidade

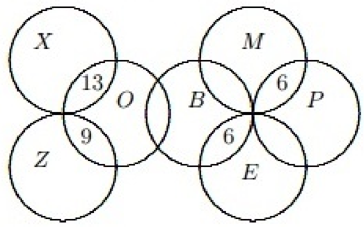
Entendemos que, perspassando por todos estes contextos em que as frações se fazem presentes, nossos alunos poderão melhorar significativamente o aprendizado deste conteúdo. No Banco de Quesões da OBMEP há uma série de questões que podem ser escolhidas para ilustrar as atividades docentes neste tema. Palavras-chave para a busca: **frações, porcentagem, razão, proporção e decimais**.

Para encerrar esta subseção, falaremos um pouco sobre as equações do 1º grau, tema visto inicialmente no 7º ano do Ensino Fundamental. Atualmente, o início do estudo deste tema já se apropria de técnicas como a representação de equações através de balanças e a discussão sobre operações iguais nos dois membros da igualdade de forma a simplificá-la. É um avanço significativo no processo ensino-aprendizagem de equações pois, em um passado não muito distante, os alunos eram apenas direcionados a seguir regras para soluções das equações: "*Se aqui está o número 2 então passa para lá -2... Se aqui o 2 está multiplicando o 'x' então passa para lá dividindo...*".

No entanto, entendemos que há um pequeno problema no Ensino de Matemática quando os alunos começam a trabalhar com Álgebra (justamente no 7º ano quando estudam as equações do 1º grau): em geral, nós temos o hábito de abandonar as soluções aritméticas dos problemas para estimular os alunos a modelá-los através de equações ou sistemas de equações. Naturalmente, o domínio do campo algébrico pelos alunos os possibilita modelar uma infinidade de situações-problema e este é um objetivo a ser alcançado durante a Educação Básica. O que discordamos é que esta modelagem seja feita em **todos** os problemas, mesmo aqueles onde simples reflexões aritméticas são suficientes para a solução. Nossa posição é que a Álgebra seja utilizada para resolver problemas mais sofisticados, quando as possibilidades aritméticas são mais trabalhosas e/ou se esgotam.

Vamos ilustrar nossa posição analisando uma questão encontrada no Banco de Questões da OBMEP, a partir da busca pela palavra-chave "**equações**":

Banco de Questões 2010 - Nível 1 - Questão 116. *Cada um dos sete discos X, Z, O, B, M, E e P da figura tem um peso diferente, que varia de 1 a 7g. Em algumas interseções de dois discos, indicamos a soma dos pesos desses dois discos. Qual é a soma dos pesos dos discos O, B, M, E e P?*



Notem que a algebrização dos problemas está tão condensada em nós que não seria nenhum absurso se um aluno do Ensino Médio, apresentado a esta questão, resolvesse montar um grande sistema de equações na tentativa de fazer o escalonamento. Isto é um sintoma de que, talvez, nós estejamos deixando de estimular os alunos a fazerem análises mais básicas antes de empregar qualquer ferramenta algébrica.

Voltando à nossa questão, um aluno que foi estimulado a empregar recursos aritméticos na solução de problemas, poderia facilmente perceber que o disco X tem 4g a mais que o disco Z (basta comparar as somas deles com o disco O). Daí, as possibilidades para estes discos só podem ser 1 e 5, 2 e 6 ou 3 e 7. Observando o outro lado da figura, temos que os discos B e E pesam o mesmo que os discos M e P e estas somas pesam exatamente 6. Isto nos leva às duas únicas possibilidades para estes discos: 1 e 5 ou 2 e 4 (uma vez que 3 e 3 é impossível, pois os discos têm pesos diferentes).

Ora, se os pesos 1, 5, 2 e 4 já estão disponibilizados para os discos B, M, E e P, só resta uma possibilidade para os discos Z e X, que é exatamente $Z = 3$ e $X = 7$. A partir daí, temos $O = 6$ e, como a soma $(B+E)+(M+P) = 6+6 = 12$ chegamos à solução do problema: $O + B + M + E + P = 18g$.

Este é um raciocínio bastante adequado a alunos do Nível 1 e que em nenhum momento se utiliza da montagem de equações. Naturalmente, elas estão implícitas quando desenvolvemos o raciocínio aritmético, mas o que queremos enfatizar é que não há necessidade de montar um sistema de equações para descobrir que o disco X tem 4g a mais que o disco Z. Entendemos que este tipo de raciocínio deve ser mais estimulado em sala de aula, até para que, mais à frente, os alunos possam ter maior facilidade ao lidarem com a Álgebra.

6.2 Ensino Fundamental - 8º e 9º Anos

Neste grau de escolaridade, muda-se o foco do Ensino de Matemática para Álgebra. É a partir de então que os alunos também terão os primeiros contatos com as demonstrações formais e que generalizam as situações-problemas estudadas. No currículo, começamos com as Expressões Algébricas, Monômios e Polinômios, Produtos Notáveis e Fatoração até chegarmos às Equações do 2º grau e o início do Estudo das Funções. Mais recentemente, tenta-se também abrir espaço para o estudo das Sequências e problemas que envolvam Contagem e Probabilidade, tudo isto dentro de um perfil de análise de gráficos e tabelas.

Em Geometria, os estudos também são aprofundados, com a Álgebra servindo de apoio ao rigor da Geometria Euclidiana. Os alunos começam com o estudo dos Ângulos e prosseguem com Feixe de Retas Paralelas cortadas por Transversais, Teorema de Tales, Soma dos Ângulos Internos e Externos de Polígonos, Número de Diagonais, Ângulos na Circunferência e Quadriláteros Notáveis e suas Propriedades até chegarem à Semelhança de Triângulos e o Teorema de Pitágoras, já no 9º ano. Neste período inicia-se também o estudo dos Números Irracionais e com ele o Comprimento e Área do Círculo.

Há uma nítida diferença nesta passagem dos conteúdos do Nível 1 (mais aritméticos e concretos) para o Nível 2 (mais algébricos e abstratos) e os professores precisam ter muita atenção para não imprimirem um ritmo muito difícil de ser acompanhado. As Expressões Algébricas devem ser trabalhadas com bastante cuidado e também de forma motivadora, de preferência a partir da ótica de Resolução de Problemas. As questões da OBMEP podem ser bastante úteis neste contexto. Vejamos a seguir como a prova da 2ª fase 2014 pode contribuir.

As questões da prova do Nível 1 que envolvem alguma demonstração podem ser trabalhadas com outro enfoque no 8º ano, quando se estudam as Expressões Algébricas. Encaixam-se neste contexto as questões 3d, 4d e 5c. É muito importante para os alunos perceber o quanto a álgebra é relevante para a elaboração de demonstrações. No entanto, não se deve simplesmente abandonar o raciocínio aritmético pois é ele que os conduzirá à formalidade possibilitada pela álgebra. Assim, é importante que, ao resolver um problema no 8º ou 9º ano, os professores discutam com seus alunos sobre soluções distintas, além de fazer analogias entre tais soluções. Há vasto material no Banco de Questões da OBMEP que permite aos professores atuar nesta linha de raciocínio.

A Questão 3 - Nível 2 é a primeira que aborda frações. Embora o assunto principal - Área de Triângulos - possa ser visto no 6º ou 7º ano, acreditamos que seja mais bem desenvolvido a partir do 8º ano, principalmente quando se deseja apresentar justificativas formais. Neste sentido, é necessária uma grande reflexão: em nossa amostra houve impressionantes 3.092 notas zero! Isto significa que os alunos do Nível 2 não conseguiram nem usar o fato do hexágono regular ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, o que, teoricamente, deveria ser bem conhecido.

Entendemos que grande parte dos alunos que zeraram a questão conseguiram conjecturar que o triângulo azul era congruente aos triângulos formados pelas diagonais do hexágono. No entanto, em nossa opinião, a dificuldade ficou exatamente na demonstração deste fato. Parece simples, mas os alunos precisariam primeiro mostrar que os 6 triângulos eram congruentes, depois observar que o segmento ED é comum a um deles e ainda calcular os dois ângulos externos do hexágono que são internos no triângulo EDD_1. É possível também que o número fracionário presente na solução tenha gerado problema para alguns alunos: se fosse atribuído o valor 6 à área do hexágono no enunciado da questão, talvez tivéssemos menos notas zero na questão. De qualquer forma, isto ilustra a dificuldade que os alunos do Ensino Fundamental têm com números racionais, aumentando a importância de trabalhos como o que propusemos na subseção anterior.

Observando por este ângulo, voltamos àquela reflexão sobre a (abrupta) passagem dos processos mais concretos (observação e conjectura) para os processos abstratos (argumentação lógica e demonstração). Se esta passagem não for feita com bastante cuidado, não conseguiremos realmente melhorar a capacidade de argumentação matemática dos nossos alunos. A pergunta que surge deste debate é, portanto: *"Como fazer esta passagem de forma adequada em nossas turmas?"*.

Não temos uma resposta precisa para esta pergunta, mesmo porque um método que funciona para determinado grupo de alunos pode não funcionar para outro, da mesma escola. No entanto, há algumas reflexões que devem ser feitas pelos professores para auxiliá-los a conseguir este objetivo:

- Não abandone o processo *observação + conjectura* : é exatamente este processo que vai permitir aos alunos encontrar um caminho para as demonstrações (ou para encontrar um contra-exemplo que mostre que sua conjectura é falsa);

- Procure utilizar um programa de geometria dinâmica: *softwares* como o Geogebra podem ajudar os alunos a testar a veracidade de suas conjecturas, pois permitem a verificação de um número significativo de casos, o que pode indicar que os resultados são verdadeiros. Após esta etapa, os próprios alunos tendem a querer aprender uma demonstração formal.

- Não deixe de discutir com eles as demonstrações: se o professor não demonstra os resultados em sala, seus alunos não terão qualquer motivação para aprenderem por si.

- Proponha questões dedutivas aos seus alunos: conforme os conteúdos forem sendo estudados, proponha que eles também tentem fazer exercícios utilizando processos dedutivos. Dê dicas, forme grupos, ilustre uma conjectura interessante no Geogebra e peça a eles que tentem justificar o porquê daquilo sempre funcionar. Mesmo nos exercícios onde o objetivo é calcular determinada medida, peça que eles justifiquem as passagens, ainda que em um nível mais baixo de rigor.

Se o item (a) já causou toda esta discussão, então o item (b) surge para aprofundá-la ainda mais. Neste item, pede-se a área do segundo hexágono e vamos refletir sobre ele supondo que conhecemos o resultado do item (a). Há duas situações que merecem destaque aqui. A primeira seria a ênfase demasiada em aplicar uma fórmula: ainda que os alunos conheçam a fórmula que dá a área do hexágono, precisariam calcular o seu lado. Dificilmente uma solução diferente dessa é pensada. No entanto, o conceito mais básico sobre áreas é o de superposição de figuras conhecidas ou equivalentes a estas.

Para resolver rapidamente este item, os alunos deveriam utilizar exatamente o conceito de superposição de figuras conhecidas e/ou equivalentes à figuras conhecidas e aqui entra o outro problema: no Ensino Básico trabalham-se bem os conceitos de congruência e semelhança de polígonos, mas pouco o conceito de equivalência. Novamente vamos lembrar da valorização excessiva das fórmulas, pois se perguntarmos a um aluno do Nível 2 como se calcula a área de um triângulo, ele provavelmente vai dizer que é a metade do produto da base pela altura do triângulo. No entanto, este mesmo aluno pode vir a ter dificuldades de entender que se dois triângulos não congruentes têm bases de mesma medida e mesma altura, então eles têm a mesma área. Neste ponto, também o conceito visual que os alunos fazem dos triângulos tendem a causar esta dificuldade (observe na questão que um triângulo é equilátero e o outro um obtusângulo. A imagem visual pode causar a ilusão de que eles não podem ter a mesma área).

Para equilibrar esta relação, não vemos outra saída senão propor mais exercícios que explorem a equivalência de polígonos não-congruentes. No Apêndice A deste trabalho, apresentamos uma proposta de aula que ilustra este tema a partir da exploração com o Geogebra. O Banco de Questões da OBMEP também contribui com exercícios interessantes para exploração em sala de aula.

No item (c), o foco está mais na sequência formada pelas áreas dos hexágonos formados como descrito no enunciado. Acreditamos que a maior parte dos alunos que não fizeram os dois primeiros itens tenham deixado este em branco. De certa forma, os alunos deste nível estão pouco preparados para utilizar os resultados anteriores (poderiam atribuir uma incógnita à área do segundo hexágono e, a partir daí, deixar todas as outras em função desta incógnita).

Sobre sequências, acreditamos que nas turmas de 8º e 9º anos deve-se dar continuidade aos estudos iniciados nas séries anteriores. Neste período - principalmente no 9º ano - podem-se trabalhar exercícios que exprimam o valor numérico de determinado termo da sequência em função de uma variável, aprofundando o estudo das sequências a partir do aprendizado desenvolvido após o estudo das Expressões Algébricas e antecipando o estudo das Funções. Tanto a Questão 1 - Nível 2, quanto o item (c) da Questão 3 - Nível 2 estão inseridas nexte contexto.

A Questão 6 - Nível 2 também explora um problema sobre Sequências Numéricas. Os dois primeiros itens são belos exemplos de como se pode utilizar sequências diferentes das Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Fundamental. Na verdade, o problema apresenta outro tipo importante de sequências, as sequências recorrentes. Entendemos que este problema, especificamente, era bastante difícil, mesmo para discussões em sala de aula. No entanto, há outras situações que exploram recursividade passíveis de serem apresentadas em turmas de 8º e 9º anos e aprofundadas no Ensino Médio. A sequência de Fibonacci é um exemplo.

Pesquisando no Banco de Questões utilizando as palavras-chave "**recorrência**"e "**sequências recorrentes**"não encontramos resultados. No entanto, pesquisando apenas por "**sequências**"e refinando a pesquisa manualmente, encontramos alguns problemas cujas modelagens se dão por sequências recorrentes. Eis alguns exemplos que podem ser discutidos em turmas de 8º ou 9º anos:

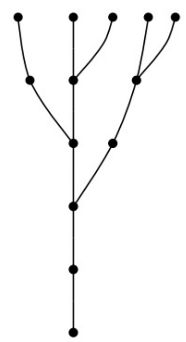
Banco de Questões 2013 - Nível 1 - Questão 14. *A árvore do professor Fernando cresce de acordo com a seguinte regra:*

– na primeira semana, a árvore começa a crescer com apenas um galho;

– após crescer por duas semanas, esse galho dá origem a um novo galho por semana;

– cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana;

A figura abaixo ilustra a árvore do professor Fernando após cinco semanas passadas do início do seu crescimento.



Note que após três semanas havia dois galhos, após *quatro semanas havia três galhos e após cinco semanas havia cinco galhos.*

a) Quantos galhos haverá após seis semanas?

b) Quantos galhos haverá após sete semanas?

c) Quantos galhos haverá após treze semanas?

Banco de Questões 2011 - Nível 1 - Questão 9. *Todo termo de uma sequência, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com a soma de seus algarismos. Os primeiros elementos da sequência são: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49,...*

É possivel que 793210041 pertença a esta sequência?

Banco de Questões 2011 - Nível 3 - Questão 81. *A sequência de números* $t_1, t_2, t_3, ...$ *está definida por*

$$\begin{cases} t_1 &= 2 \\ t_{n+1} &= \frac{t_n - 1}{t_n + 1} \end{cases} \tag{2}$$

para cada inteiro positivo n. Encontrar t_{2011}.

Vamos analisar agora as duas questões do Nível 2 também aplicadas no Nível 1: os resultados obtidos pelos alunos na Questão 4 - Nível 2 foram levemente superiores aos do Nível 1, mas nem tanto. A faixa de notas com maior número de alunos concentrou-se também nos 4 pontos, o que indica apenas o acerto do item (a). No entanto, houve também um número significativo de alunos com 10 pontos (acerto dos dois primeiros itens), diferente do ocorrido com os alunos do primeiro nível. Isto indica que no Nível 2 os alunos conseguiram associar com maior propriedade a geometria e aritmética necessárias para solução do item (b), o que é uma informação significativa.

Por outro lado, o número de alunos que ficou apenas nos 4 pontos também foi elevado (2.816) e houve um número baixo de acertos do item (c): apenas 14. Nossa sugestão para melhoria deste quadro é dar sequência às propostas que apresentamos para o Nível 1. Assim, no Nível 2 a ideia é trabalhar os exercícios Geométricos, combinando convenientemente raciocínios Aritméticos e Algébricos neste processo. As duas soluções do item (c) apresentadas neste trabalho ilustram este raciocínio. É preciso também usar situações concretas (ou motivadoras) e experimentações e não focar apenas nos exercícios de fixação. Neste sentido, as questões da OBMEP podem ajudar a manter o caráter investigativo nas salas de aula.

Sobre a Questão 5 - Nível 2, o mesmo temos a dizer: no Nível 2, deve-se dar sequência ao trabalho com tabelas (e gráficos) iniciados no Nível 1. Questões que envolvem um raciocínio lógico mais elaborado, como esta, devem ser introduzidas neste nível. Percebemos pelo quadro de notas que houve diferença bastante significativa na faixa dos 20 pontos (foram 1.603 alunos na amostra do Nível 2 contra apenas 476 na amostra do Nível 1), entretanto, se lembrarmos que há 6.119 alunos na amostra do Nível 2, podemos perceber que ainda há bastante trabalho a ser feito no processo ensino-aprendizagem deste conteúdo.

Outros conteúdos que podem ser desenvolvidos com os alunos de 8º e 9º anos são aqueles relacionados à Análise Combinatória e Probabilidade. Conforme comentamos anteriormente, no 6º e 7º anos os problemas discutidos nestes tópicos devem ser bem simples, de forma a introduzir os assuntos. Já a partir do 8º ano pode-se refinar um pouco mais os problemas propostos. O item c da Questão 2 - Nível 2 é bem interessante para ser aplicado neste período, uma vez que é dividido em etapas (as maneiras com que cada figura pode ser colada e a posição no caderno).

A Questão 6 - Nível 3 ilustra esta perspectiva: os itens (b) e (c) abordam a probabilidade da interseção de eventos. Para os alunos que estão no 8º ou 9º ano, talvez este problema específico seja um pouco mais difícil devido à necessidade de relacionar o fato de uma pessoa da fila ganhar o prêmio com as que estão na frente da fila terem que perdê-lo. Para os alunos neste período, talvez seja mais interessante explorar eventos independentes, como por exemplo, o lançamento de dois dados. O importante, neste nível de escolaridade, é estimular os alunos às soluções mais elementares, para que no Ensino Médio eles tenham maior familiaridade com os temas, o que certamente facilitaria o aprofundamento dos mesmos.

6.3 Ensino Médio

São as Funções os objetos de estudo em destaque no Ensino Médio. Ao longo de todo o 1º ano há ênfase nos diversos tipos de funções, iniciando com a conceituação geral no 1º bimestre e avançando com as funções polinomiais (de grau 1 e 2), exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. As Progressões Aritméticas e Geométricas são aprofundadas, assim como os temas ligados aos processos de contagem e probabilísticos. No Ensino Médio também estudam-se com mais profundidade as Matrizes e sua importância na discussão dos Sistemas Lineares e inicia-se o estudo dos Números Complexos. Toda esta bagagem algébrica é utilizada no estudo da Geometria Analítica.

É no Ensino Médio que a capacidade de argumentação matemática é refinada. Neste sentido, as questões desafiadoras da OBMEP podem ajudar neste processo. Embora as questões do Nível 3 sejam elaboradas com conteúdos vistos no Ensino Fundamental II, é possível utilizá-las em turmas regulares do Ensino Médio, de forma a aprofundar estes conteúdos.

Vamos analisar as questões da prova da 2ª fase e apresentar nossas ideias para a melhoria do Ensino de Matemática no Ensino Médio, de forma análoga ao que fizemos nas duas subseções anteriores.

A Questão 1 - Nível 3 trabalha conteúdos mais simples, como operações com números naturais. A elevada média obtida pelos alunos - 17,2 pontos - indica que, neste nível, os alunos dominam com propriedade as técnicas aritméticas mais elementares. Em relação à prática de sala de aula, é interessante explorar a argumentação necessária ao item (c).

A Questão 2- Nível 3 traz um interessante exemplo de como integrar áreas da Matemática, no caso Geometria e Funções. Os resultados obtidos pelos alunos da amostra trazem uma aparente contradição: esta foi a questão com a segunda menor média de acertos, no entanto teve um índice significativo de alunos com 20 pontos (1.450).

Para tentarmos esclarecer esta discrepância, observamos as faixas de concentração das notas. A faixa de 20 pontos foi a primeira, mas depois temos as faixas de 2, 3, 4, 5 e 6 pontos (nesta ordem), com pouco mais de 3.000 alunos (nestas quatro faixas). Considerando que o item (a) fora acertado pela maioria destes alunos, acreditamos que houve dificuldade de interpretação do enunciado, talvez causada por uma associação incorreta da figura.

Explica-se: o lado AB do retângulo mede 20cm e a figura que ilustra a questão traz o ponto F sobre AB e cota a distância AF como x. Acontece que, no item (b), este x vale 22cm, o que implica que o ponto F está sobre o segmento BC e não mais sobre AB. Se os alunos não conseguiram fazer esta reflexão, então devem ter calculado a área do triângulo ADF com o ponto F sobre AB e por iso não obtiveram mais do que 4 pontos nos demais itens. Por outro lado, os alunos que conseguiram visualizar o fato citado no parágrafo anterior, conseguiram resolver os outros itens satisfatoriamente, o que justifica o número significativo na faixa de 20 pontos.

Toda esta situação não ilustra uma dificuldade maior em relação ao conceito de função, traçado de gráfico ou mesmo sobre a geometria necessária à resolução, mas sim uma dificuldade significativa na interpretação de problemas. Para melhorar este quadro, entendemos que é necessário desenvolver em sala de aula o hábito de resolver problemas sempre que se trabalha determinado conteúdo. É este hábito que modelará o raciocinio lógico-matemático de forma a permitir aos alunos avaliarem novas situações-problemas.

Ainda no âmbito do processo ensino-aprendizagem de Funções, entendemos que esta questão é bastante oportuna para o trabalho com o Geogebra. No Ensino Médio, como os alunos têm maior domínio da Geometria e maior maturidade para o trabalho com *softwares*, entendemos que é interessante propor aulas para soluções de problemas utilizando o Geogebra. Este tipo de trabalho permite aos alunos duas coisas importantes: a verificação das soluções e possibilidade de verificar caminhos que os levem à solução formal. Para não fugir muito do propósito deste TCC, optamos por inserir nossas observações sobre o uso do Geogebra no Ensino Médio (e em particular nesta questão) no Apêndice B.

A Questão 3 - Nível 3 associa distâncias em planificações de um paralelelípedo retângulo às suas representações originais, no paralelepípedo tridimensional. Quase 62% dos alunos da amostra ficaram na faixa de 10 pontos, o que corresponde ao acerto dos itens (a) e (b). Outros 1.152 alunos (22% do total) estiveram nas faixas de 20, 19 e 18 pontos, o que mostra que a questão foi bem aproveitada pelos alunos da amostra.

Esta questão nos impressionou pela simplicidade do enunciado e a riqueza dos conteúdos envolvidos, principalmente no que diz respeito à visão espacial. Ao analisá-la, refletimos sobre a possibilidade de reprodução da questão em sala de aula, com material concreto (folhas de cartolina, por exemplo).

Outros sólidos (e suas planificações) poderiam ser explorados, como os Prismas, as Pirâmides e seus equivalentes circulares, Cilindros e Cones. Dividindo os alunos em grupos, eles poderiam traçar um segmento de reta na planificação destes sólidos e tentar refletir sobre como este segmento ficaria após a montagem do sólido. Depois, construiriam o sólido para verificação da solução.

No final de uma aula como esta, cada grupo poderia apresentar um relato sobre possíveis conclusões (por exemplo, dependendo de onde passa o segmento na planificação como ele ficará no espaço?) e semelhanças e diferenças entre as experiências nos diferentes sólidos. Acreditamos que uma atividade como esta ajudaria bastante a trabalhar a visão espacial dos alunos.

Os índices de acerto pela amostra do Nível 3 na Questão 4 - Nível 3 foram muito superiores aos verificados nas amostras dos Níveis 1 e 2. O aproveitamento nesta questão foi de incríveis 89%, sendo que 3.790 alunos conseguiram os 20 pontos. Isto ilustra que no Ensino Médio a análise de Tabelas é mais bem trabalhada. Isto já era esperado, também pelo fato do ENEM abordar muitas questões deste tipo. Fica a dica apenas para que se continue trabalhando problemas como este ao longo do Ensino Médio. O Banco de Questões da OBMEP pode auxiliar os professores quanto a isto.

A Questão 5 - Nível 3 também era uma das questões que esteve no Nível 2. Enquanto lá a faixa de acertos com maior número de alunos foi a de 6 pontos, no Nível 3 tivemos 2.281 alunos na faixa de 12 pontos. No entanto, assim como ocorrido no Nível 2, pouquíssimos alunos do Nível 3 conseguiram acertar o item (c): apenas 65, em torno de 1,25%.

Entendemos que isto se deu pelo pouco trabalho com sequências recorrentes em sala de aula. Ainda, entendemos que a recorrência contida no problema era difícil de ser construída, principalmente para alunos que nunca tiveram contato com tal conceito. Ainda assim, acreditamos que é possivel trabalhar tal conteúdo em turmas do Ensino Médio, continuando o trabalho sugerido para turmas de 8º e 9º anos na subseção anterior.

Os professores podem propor situações mais acessíveis. Por exemplo, no caso específico deste problema da escada, se determinado professor se dispusesse a trabalhar o problema em suas turmas regulares, talvez fosse interessante adaptar o enunciado, ilustrando o processo que os levaria ao cálculo do número de possibilidades de brincar em uma escada com 8 degraus antes de efetivamente solicitar o número de possibilidades de brincar em uma escada com mais degraus.

Por fim, chegamos à <u>Questão 6 - Nível 3</u>, que trata de probabilidade. Não é surpresa que o tema está entre os menos assimilados pelos alunos do Ensino Médio, e os resultados ilustram este fato, infelizmente. A média obtida na questão foi 4,9 pontos, o que indica que dos quatro itens da questão, apenas um dos dois primeiros foi respondido adequadamente. É um índice muito baixo. Para tentar alterar este quadro, apontaremos algumas sugestões:

- <u>Discussão sobre Probabilidade no Ensino Fundamental:</u> Já vimos que as frações são excelentes instrumentos para expressar probabilidade. Assim, nada mais natural do que a associação das frações com probabilidade, desde o 6º ano do Ensino Fundamental. Utilizar situações do cotidiano (como o lançamento de uma moeda, dado ou mesmo a disputa de par-ou-ímpar) é fundamental. Mais à frente, ao discutir a multiplicação de frações, pode-se fazer a associação com a interseção de eventos indenpendentes. Nos outros anos dos Níveis 1 e 2, deve-se apresentar problemas que associem probabilidade aos demais conteúdos estudados, aprofundando todos os conceitos.

- <u>Iniciar de forma empírica, ao invés de apresentar fórmulas:</u> O conceito fundamental sobre probabilidade (casos favoráveis / total de casos), aliado à noção de eventos sucessivos dá segurança para a solução de grande parte dos problemas de probabilidade vistos no Ensino Médio. O trabalho com a multiplicação de frações deve ser feito de modo empírico, antes de se discutir mais profundamente o rigor das teorias e a apresentação das fórmulas.

- <u>Associar os conectivos *"e"* e *"ou"* ao produto e soma de probabilidades:</u>

  Uma grande dificuldade dos alunos quando trabalham com probabilidade é saber se devem multiplicar ou somar as probabilidades verificadas em cada evento. Os professores devem explorar os casos gerais, os conectivos “e” e “ou” estão associados à multiplicação e à soma de probabilidades, respectivamente e, posteriormente, refinar este estudo, apresentando casos onde os dois serão utilizados em conjunto.

Há conteúdos específicos do Ensino Médio que não são desenvolvidos na OBMEP (Geometria Analítica, Funções Trigonométricas, Sistemas Lineares com mais de 2 incógnitas, Matemática Financeira, Volume e Área de Sólidos Geométricos, etc). No entanto, entendemos que o conceito da OBMEP de propor questões motivadoras deve ser explorado pelos professores em sala de aula quando estiverem discutindo tais assuntos com seus alunos: ao abordar tais assuntos, é importante fazer associações com conteúdos já trabalhados nos anos anteriores, de forma a aproveitar conceitos dominados pelos alunos. Neste sentido, o trabalho com resolução de problemas e vários itens em ordem crescente de dificuldade permite fazer tal associação.

Outro ponto relevante no Ensino Médio é o uso dos *softwares* para reprodução (e resolução) de tais problemas em ambientes computacionais (como o que apresentamos no Apêndice B deste trabalho): como os alunos desta faixa de escolaridade têm maior maturidade com o uso de computadores, a curva de aprendizado dos principais softwares tem um bom custo-benefício, o que faz com que a reprodução de problemas nestes *softwares* sirva como elemento facilitador no processo ensino-aprendizagem. Encontram-se disponíveis vários *softwares* que podem ser utilizados com alunos do Ensino Médio como o Geogebra (que permite, inclusive, reproduzir situações tridimensionais), Winplot, Máxima e mesmo o Excel.

7 Conclusões

A OBMEP tem seu lugar consolidado nas práticas relavantes ao Ensino de Matemática na Educação Básica e Pública. Entrando na sua 11ª edição, o número de alunos participantes ao longo deste período e a representatividade em quase todos os municípios do país ratificam esta informação. Muitos profissionais da Educação, no entanto, criticam as provas e as consideram demasiadamente removidas do cotidiano da escola.

Para refletirmos sobre esta suposição, exploramos duas linhas de raciocínio neste TCC: os resultados obtidos pelos alunos da correção unificada nas provas da 2ª fase da OBMEP 2014 e as possibilidades que as questões destas provas oferecem ao processo ensino-aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Com relação aos resultados, percebemos que ainda há muito a avançar: nas amostras em que trabalhamos, os índices de acerto estiveram em torno de 50%, como ilustra a Tabela 16. Este seria um ótimo resultado se a amostra fosse composta de todas as provas da segunda fase. No entanto, é relativizado pois a amostra com que trabalhamos reuniu apenas os alunos com as maiores notas, cujas provas foram corrigidas pela comissão nacional.

Tabela 16: Nota Médias obtidas pelos alunos das amostras na 2ª fase da OBMEP 2014

Alunos	**Amostra**	**Nota Média**	**Dificuldade**
Nível 1	7.547	54,6 = 45,5%	Média
Nível 2	6.119	58,5 = 48,7%	Média
Nível 3	5.237	71,4 = 59,5%	Baixa
Total	**18.903**	**60,5 = 50,4%**	**Baixa**

Quanto às possibilidades oferecidas pelo aproveitamento dos materiais elaborados pela OBMEP no processo ensino-aprendizagem de Matemática na Educação Básica, exploramos algumas delas na Seção 6. Entendemos que há uma série de vantagens neste aproveitamento, tais como:

- Estímulo motivacional causado pelo modelo de questões;
- Integração dos conhecimentos aritméticos, algébricos e geométricos na busca de soluções;
- Elaboração de conjecturas e descoberta de propriedades matemáticas, pelos alunos, durante o processo de discussão sobre as questões;

- Possibilidade de discussão em várias séries da Educação Básica, abordando uma mesma questão em perspectivas diferentes, conforme o grau de escolaridade dos alunos;
- Uso de processos investigativos como meio de desenvolver estratégias para a obtenção de demonstrações formais.

Finalmente, gostaríamos de apresentar algumas sugestões como contribuições aos processos que envolvem a OBMEP. Para a coordenação da OBMEP apresentamos as seguintes sugestões:

- Manter atualizada a ferramenta de busca do Banco de Questões, catalogando as questões de todos os cadernos;
- Elaborar material audiovisual para os diretores, ilustrando a importância da OBMEP para o Ensino de Matemática na Rede Pública de Ensino e as possibilidades de aproveitamento de alunos e professores nos programas desenvolvidos pela OBMEP;
- Elaborar questões interdisciplinares que podem ser apresentadas aos professores de outras disciplinas como meio de envolvê-los nos processos da OBMEP;
- Oferecer oficinas aos professores da Rede Pública de Ensino para inserí-los no processo de criação das questões da OBMEP. Isto poderia auxiliar estes profissionais a elaborarem suas próprias questões, de acordo com o nível de desenvolvimento de suas turmas regulares;
- Inserir os professores do Ensino Fundamental I nas ações da OBMEP, fazendo com que estes também se sintam estimulados a desenvolver os conceitos propostos em suas turmas regulares.

Para as escolas da Rede Pública de Ensino, representadas pelas direções e equipes pedagógicas, apresentamos as seguintes sugestões:

- Manterem-se atualizadas sobre o calendário e os programas desenvolvidos pela OBMEP, principalmente o "*OBMEP na Escola*";
- Informar alunos e professores sobre os programas desenvolvidos pela OBMEP;
- Tematizar as escolas na época da OBMEP, apresentando ao longo da semana atividades relacionadas à competição, como por exemplo, os vídeos e reportagens contidos na seção "*OBMEP na mídia*", presente na página oficial da OBMEP;

- Promover debates entre os profissionais de Ensino sobre a importância da Resolução de Problemas no Ensino de Matemática, de forma a estimular que esta medologia seja utilizada em suas turmas;
- Inserir os profissionais que trabalham no Ensino Fundamental I nas discussões sobre Resolução de Problemas e aproveitamento dos materiais da OBMEP em suas turmas regulares.

Para os professores atuantes na Rede Pública de Ensino, apresentamos as seguintes sugestões:

- Manterem-se atualizados sobre o calendário e os programas desenvolvidos pela OBMEP;
- Utilizar as questões das provas e do Banco de Questões como elementos dinamizadores nas aulas de Matemática, adaptando-as de acordo com o desenvolvimento cognitivo de cada turma;
- Utilizar as questões das provas e do Banco de Questões em aulas nos laboratórios de informática, apresentando alguns softwares educativos aos alunos.

Há ainda inúmeras possibilidades de exploração da OBMEP em trabalhos futuros: por exemplo, seria interessante acompanhar o desenvolvimento de um grupo de alunos participantes do projeto "*OBMEP na Escola*", ao longo de um ano de atividades ou mesmo comparando resultados deste mesmo grupo em edições diferentes da OBMEP, conforme os alunos desta amostra avançarem de nível.

Em vista dos argumentos apresentados ao longo deste TCC, entendemos que os conceitos presentes na OBMEP têm muito a oferecer para o desenvolvimento do Ensino de Matemática no Brasil, principalmente no que diz respeito à Rede Pública de Ensino. Acreditamos que os projetos ligados à OBMEP devem ser mais conhecidos dos professores (inclusive os que atuam no Ensino Fundamental I), diretores e coordenadores pedagógicos, de forma a gerar grandes debates sobre a utilização da metodologia de Resolução de Problemas no Ensino de Matemática em turmas regulares.

Em nossa opinião, o hábito de resolver problemas lógico-matemáticos desde os anos iniciais da Educação Básica pode contribuir significativamente para o aumento da qualidade do Ensino de Matemática e os resultados de nossos alunos em provas de diagonóstico e de competição. Neste sentido, as questões da OBMEP podem ser vistas como norteadoras deste processo.

Referências

IMPA (2005) 'Página Oficial da OBMEP na Internet'. Disponível em http://www.obmep.org.br

Lima, E. L., Carvalho, P.C., Wagner, E. and Morgado, A. (1996) 'A Matemática do Ensino Médio, Volume 1', Coleção do Professor de Matemática, SBM.

Lima, E. L., Carvalho, P.C., Wagner, E. and Morgado, A. (1996) 'A Matemática do Ensino Médio, Volume 2', Coleção do Professor de Matemática, SBM.

Lima, E. L., Carvalho, P.C., Wagner, E. and Morgado, A. (1996) 'A Matemática do Ensino Médio, Volume 3', Coleção do Professor de Matemática, SBM.

Malagutti, P. (Março de 2015) 'As Questões Transversais nas provas da OBMEP', Entrevista realizada por email.

Matta, A.A. e Albuquerque, C.F.M. (2013) 'Uma Análise Crítica das Provas da Primeira Fase da OBMEP - Nível 2', TCC Profmat.

Ministério da Educação, Brasil (1997) 'Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias'. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf.

Ministério da Educação, Brasil (2002) 'PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias'. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf.

Ministério da Educação, Brasil (1998) 'Parâmetros Curriculares Nacionais - Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática'. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf.

Silva, C.G. e Araújo, S.V.L. (2013) 'Uma Análise Crítica das Provas da Primeira Fase da OBMEP - Nível 1', TCC Profmat.

Souza, C.S. e Silva, J.J. (2013) 'Uma Análise Crítica das Provas da Primeira Fase da OBMEP - Nível 3', TCC Profmat.

A Roteiro de Estudo: Triângulos Equivalentes

Na Seção 6.2 deste TCC, abordamos o fato da equivalência de triângulos não ser adequadamente desenvolvida em nossas escolas. Desta forma, elaboramos um breve roteiro que propõe atividades para aprofundamento do assunto, baseado no software gratuito Geogebra.

A ideia é que este roteiro seja estudado com os alunos no laboratório de informática da escola, com os arquivos do Geogebra disponibilizados pelo professor. Contudo, criamos o endereço http://profmat-tcc-leandro.blogspot.com.br para que os leitores deste trabalho tenham acesso a estes arquivos.

<u>Roteiro de Estudo:</u> Triângulos Equivalentes.

<u>Público-alvo:</u> Alunos do 8º ou 9º anos do Ensino Fundamental.

<u>Duração estimada da atividade:</u> Dois tempos de 50 minutos.

<u>Recursos necessários:</u> Computadores com o software Geogebra instalados.

Atividade 1: Analisando a Área de um Triângulo.

Para realizar esta atividade, abra o arquivo triangulos_equivalentes_1.ggb, disponível na área de trabalho do seu computador.

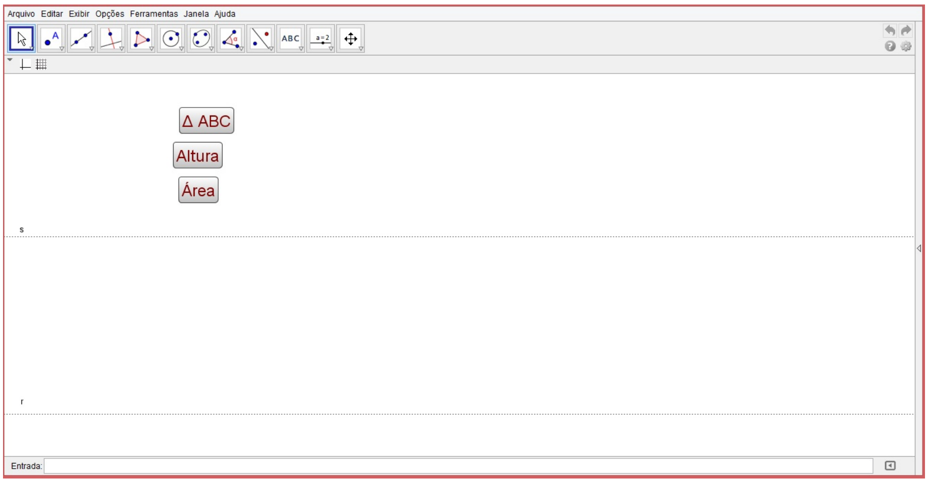


Figura 20: Triângulos Equivalentes, Atividade 1

a) Ao abrir o arquivo, você pode observar as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$, pontilhadas. Qual é a posição relativa entre elas?

b) Clique no botão que indica a construção do triângulo ABC. O que aconteceu? Onde estão os pontos que compõem este triângulo?

c) Clique no botão "Altura"e encontre o segmento CH, altura do triângulo ABC em relação à base AB. Movimente livremente os pontos A, B e C. O que acontece à altura do triângulo ABC?

d) Clique no botão "Área"para visualizar a área do triângulo ABC. Movimente livremente o ponto C. O que acontece com a área do triângulo?

e) Movimente os pontos A e B para outra posição e anote a área do triângulo ABC nesta configuração. Depois, movimente livremente o ponto C, novamente. O que acontece com a área do triângulo ABC?

f) Tente dar uma explicação para o que acontece com a área do triângulo ABC nos dois itens anteriores.

Atividade 2: Visualizando Triângulos Equivalentes.

Para realizar esta atividade, abra o arquivo triangulos_equivalentes_2.ggb, disponível na área de trabalho do seu computador.

Figura 21: Triângulos Equivalentes, Atividade 2

a) Ao abrir o arquivo, você pode observar o triângulo ABC, da atividade anterior, e alguns novos botões. Clique no botão “DE=AB”para criar, sobre a reta r, um segmento CD. Este segmento é congruente a um dos segmentos que formam o triângulo ABC. Qual? Como você descobriu isto?

b) Clique no botão que indica a construção do triângulo DEF. O que aconteceu? Onde está o outro vértice do triângulo DEF?

c) Clique no botão “Área”para visualizar a área do triângulo DEF. Movimente livremente o ponto F. O que acontece com a área do triângulo DEF? E se movimentarmos livremente o ponto D, o que acontece com a área do triângulo DEF?

d) Movimente livremente os pontos A e B. O que acontece com a área dos dois triângulos?

e) Tente dar uma explicação para o que você viu nos dois itens anteriores.

Atividade 3: Reconhecendo Triângulos Equivalentes.

a) Abra o arquivo o abrir o arquivo triangulos_equivalentes_3a.ggb. Originalmente, temos apenas os pontos A e B visíveis. Clique no botão M para encontrar o ponto médio deste segmento.

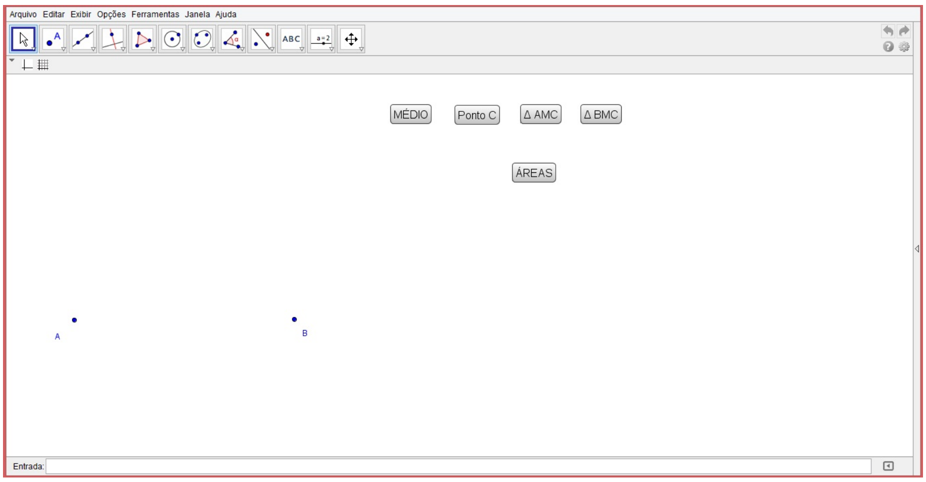


Figura 22: Triângulos Equivalentes, Atividade 3a

b) Clique no botão “Ponto C”para criar um ponto C, livre e fora do segmento AB.

c) Clique nos botões que indicam os triângulos AMC e BMC e movimente livremente o ponto C. Estes triângulos são congruentes? Por quê?

d) Clique no botão “Áreas”e verifique as áreas dos triângulos AMC e BMC. Eles são equivalentes? Por quê?

e) Agora, abra o arquivo triangulos_equivalentes_3b.ggb. Nele, você pode perceber os triângulos DEF e GHI. Há um par de segmentos congruentes assinalados nas figuras. Qual é este par?

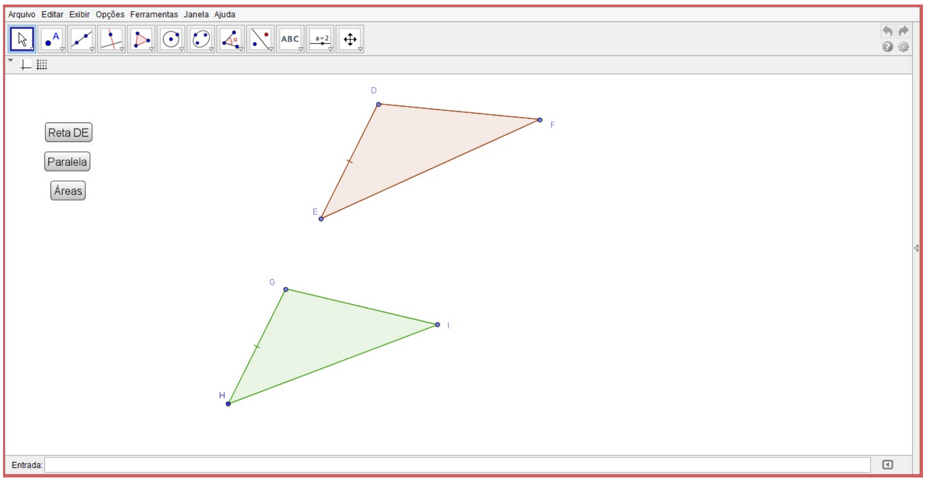


Figura 23: Triângulos Equivalentes, Atividade 3e

f) Movimente livremente os vértices e responda: estes triângulos são congruentes? Por quê?

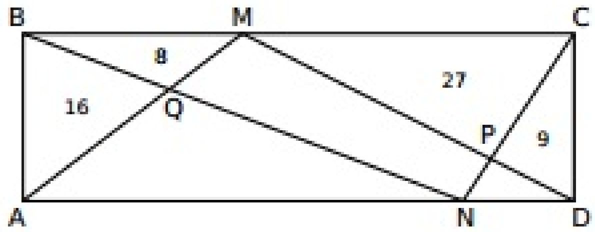
g) Clique no botão que indica a construção da *reta DE*. O que acontece?

h) Clique no botão “Paralela”para traçar uma paralela à reta DE passando pelo ponto F. O que acontece?

i) Clique no botão “Áreas”e verifique que os triângulos são equivalentes. Explique o porquê.

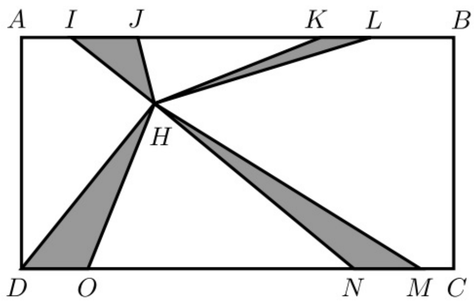
Exercícios selecionados para aprofundamento

Banco de Questões 2012 - Nível 2 - Questão 33: *Na figura abaixo, ABCD é um retângulo, M e N são pontos nos lados BC e AD, respectivamente, e os números representam as áreas dos triângulos ABQ, BQM, MPC e CPD em centímetros quadrados.*

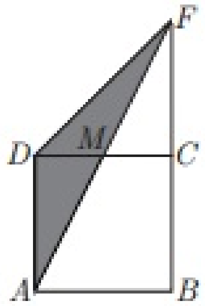


a) Qual é a área do triângulo AMD? Por quê?
b) Calcule a soma das áreas dos triângulos AQN e NPD.
c) Calcule a área do quadrilátero MPNQ.

Banco de Questões 2013 - Nível 2 - Questão 5: *Na figura a seguir, ABCD é um retângulo, e o comprimento do segmento BC é igual a 2. Além disso, os comprimentos dos segmentos IJ, KL, DO e MN são todos iguais a 1. Determine a área da região pintada de cinza.*



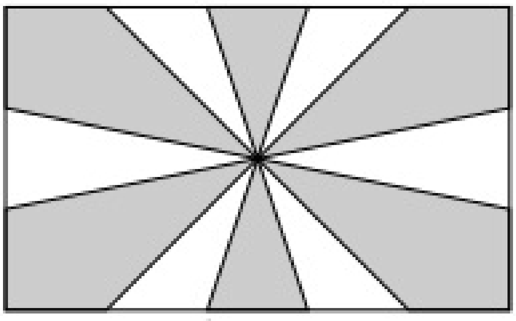
Banco de Questões 2010 - Nível 2 - Questão 194: *A área do quadrado ABCD mede 300cm^2. Na figura, M é o ponto médio de DC e o ponto F pertence à reta que passa por B e C.*



a) Qual é a área do triângulo ABF?

b) Qual é a área do triângulo AFD?

Banco de Questões 2011 - Nível 1 - Questão 11: *O Tio Mané é torcedor do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isso, comprou um tecido branco retangular com 100 cm de largura e 60 cm de altura. Dividiu dois de seus lados em 5 partes iguais e os outros dois em 3 partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura.*



Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou?

B Possibilidades de uso do Geogebra no Ensino Médio

Na seção 6.3 deste TCC comentamos que a utilização do Geogebra para resolução de questões pode ser extremamente útil no Ensino de Matemática. Ao emular uma questão utilizando o software há duas vantagens óbvias: a visualização da solução e a possibilidade de encontrar caminhos para a solução formal.

Há outras vantagens não tão óbvias, mas também especialmente relevantes como a necessidade de aplicação dos conhecimentos matemáticos por parte dos alunos para emular o problema corretamente, o que faz com que eles estejam treinando estas habilidades (ainda que não tenham ciência disto) e a necessidade de integração entre geometria e álgebra no processo.

No Ensino Fundamental II, acreditamos que o trabalho com o Geogebra é melhor aproveitado quando se utiliza de roteiros de ação, como o visto no Apêndice A deste TCC. Isto pode acontecer devido ao fato da curva de aprendizado ser mais longa para os alunos deste nível, uma vez que eles ainda estão em processo de descoberta das propriedades geométricas básicas. Já no Ensino Médio, embora o trabalho com roteiros também seja eficaz e aconselhável (principalmente quando se quer introduzir um assunto), entendemos que a reprodução dos problemas no software é um fator chave na utilização desta tecnologia.

Vamos ilustrar nosso ponto de vista emulando a Questão 2 - Nível 3 no Geogebra e explorando algumas possibilidades de utilização em sala de aula (laboratórios de informática) ou mesmo em casa, caso os alunos tenham acesso a um computador.

Nesta questão, temos um ponto F deslizando sobre um retângulo de lados 20cm e 10cm. Este ponto F, junto aos vértices A e D do retângulo, formam um triângulo e o objetivo da questão é exatamente analisar o que ocorre com este triângulo enquanto F se desloca sobre o retângulo.

Nossa sugestão é que os alunos sejam incentivados a reproduzir este acontecimento usando o Geogebra. O processo não é tão complicado, uma vez que, em um primeiro momento, vamos construir apenas figuras simples: um retângulo (respeitando as medidas do problema), um ponto F sobre este retângulo e o triângulo ADF. Naturalmente, é necessário que os alunos já tenham sido apresentados ao programa anteriormente e às suas ferramentas básicas (o professor, ao falar de Funções, pode trazer alguns roteiros de ação para apresentar o programa e as ferramentas básicas aos alunos). A figura abaixo ilustra o processo:

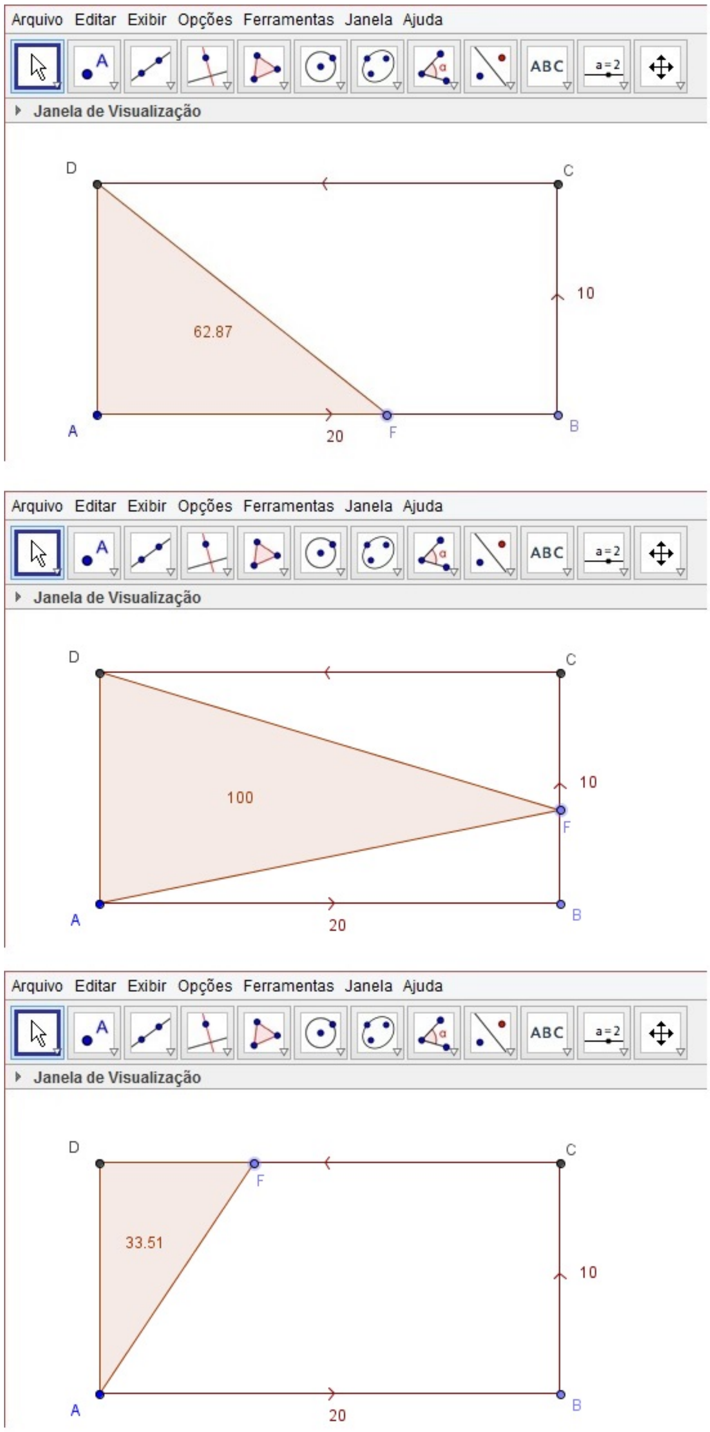


Figura 24: Área do triângulo ADF em três momentos no Geogebra

Notem que apenas a reprodução do problema neste retângulo é suficiente para verificação das soluções dos itens (b) e (c). Desta forma, resta apenas a reflexão sobre como se chegar, formalmente, a este resultado. Naturalmente, a manipulação do problema no software ajuda bastante nesta reflexão. Por exemplo, ao verificar que todos os triângulos com o ponto F sobre o segmento BC têm a mesma área, o aluno pode associar este fato à altura do triângulo, que é constante durante todo o tempo de passagem de F por BC.

Respondido então estes itens, restaria ao alunos a abordagem do item (d), que pede o gráfico da função área do triângulo ADF. Isto pode ser feito a partir das seguintes observações:

- Na passagem de F pelo segmento AB a área do triângulo ADF é crescente.
- Na passagem de F pelo segmento BC a área do triângulo ADF é constante e igual a 100.
- Na passagem de F pelo segmento CD a área do triângulo ADF é decrescente.

Os fatos acima já nos dão uma boa ideia de como ficará o gráfico. Precisamos então apenas ser mais específico quanto ao tipo de crescimento e decrescimento. Para isto, poderíamos habilitar a malha quadriculada e os eixos do programa para encontrar a área do triângulo em alguns pontos-chave, como mostra a figura a seguir:

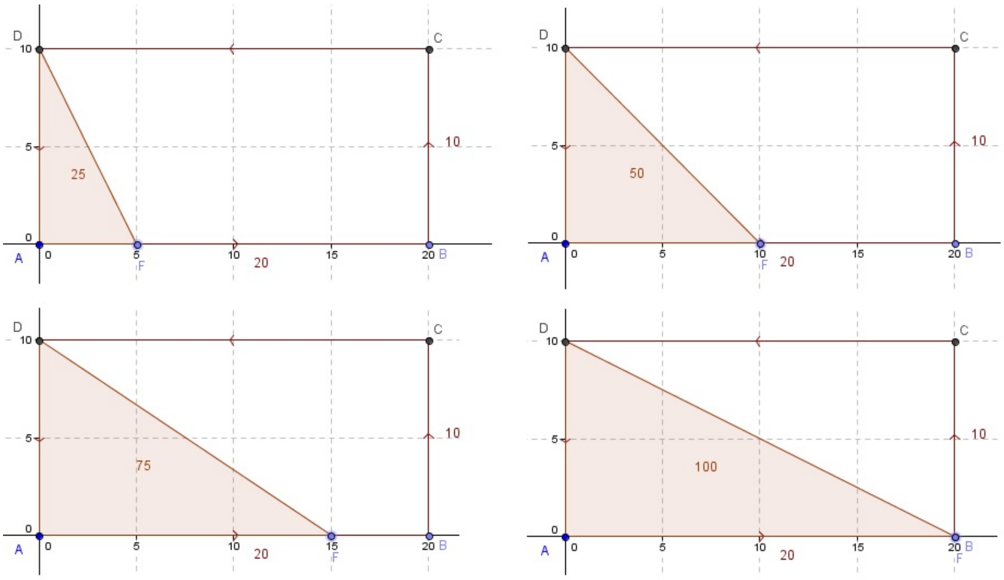


Figura 25: Área do triângulo ADF com F em pontos-chave sobre AB

Observando as posições mostradas na figura, os alunos poderiam reconhecer a linearidade no crescimento da área do triângulo, justificá-la e construir o gráfico, resolvendo adequadamente o item.

Caso o aluno tenha um pouco mais de experiência pode abrir uma segunda janela de visualização e criar um ponto P que ficará em função de F mostrando parte do gráfico (pelo menos o que acontece quando F se desloca sobre AB). Para a geração do gráfico todo, são necessárias algumas construções mais robustas. Neste caso, o professor pode fazê-las e apresentar o resultado final.

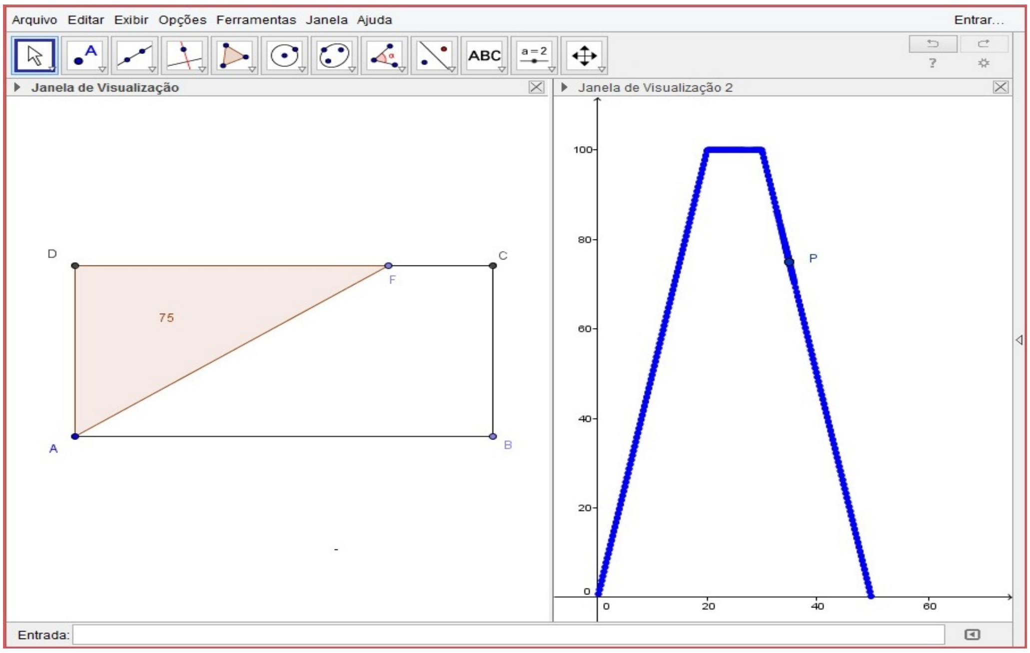


Figura 26: Gráfico da Função Área do Triângulo ADF

Há algumas explorações interessantes desta construção para o debate, como por exemplo, a observação de que no problema original a formiga não passa pelo segmento AD, o que implica que o segmento entre 50 e 60 no eixo x (que aparece quando a construção é feita sobre um retângulo) não faz parte do gráfico da função (pois ilustra a área do triângulo quando o ponto F está sobre AD, fora do domínio).

Poderíamos apresentar uma representação mais rigorosa (por exemplo, usando a ferramenta caminho poligonal ao invés de criar um retângulo no início da construção), mas o objetivo é que os alunos possam fazer as construções. Assim, quanto mais simples, melhor.

Da mesma forma como fizemos para esta questão, acreditamos que o processo ensino-aprendizagem pode ter um ganho considerável se os alunos forem estimulados a emular exercícios no Geogebra.