INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Marcos Monte de Oliveira Alves

UM ESTUDO SOBRE JOGOS DE AZAR

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2015

Marcos Monte de Oliveira Alves

UM ESTUDO SOBRE JOGOS DE AZAR

Trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho, PhD

IMPA

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2015

Marcos Monte de Oliveira Alves

UM ESTUDO SOBRE JOGOS DE AZAR

Trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

Aprovado por:

Paulo Cezar Pinto Carvalho (Orientador - IMPA)

Roberto Imbuzeiro (IMPA)

Antônio Branco (FGV)

Moacyr Alvim (Suplente - IMPA)

Rio de Janeiro

2015

Dedico este trabalho de conclusão de mestrado aos meus pais, esposa, filho, e professores, pelo incentivo que me foi dado nas horas difíceis, pela sabedoria que me foi transmitida e, sobretudo, pelo carinho e paciência.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientador, professor Paulo Cezar, por ter aceitado assumir em momento já avançado do ano a orientação deste trabalho e pela flexibilidade ao aceitar o tema do mesmo, o qual não estava na lista de temas pré-definidos pelos professores do IMPA. Agradeço também pela compreensão que permitiu viabilizar a realização do sonho de cursar este mestrado. Acrescento aqui a grande admiração que tenho pelo fato de o professor Paulo Cezar se manter simples, sem nenhuma arrogância, apesar de todos os títulos e trabalhos realizados em sua carreira. É um modelo de ser humano a ser seguido e um matemático extraordinário, peça fundamental na melhoria dos docentes de nosso país, portanto presto meus mais sinceros agradecimentos.

Agradeço a minha esposa, Agada Raffaela Meliande Monte Alves, pelo companheirismo, incentivo nas horas difíceis, apoio e grande compreensão. Não há palavras para descrever o quão fundamental foi seu apoio. Muito obrigado.

Aos meus pais, José Carlos Alves e Haydée Monte de Oliveira, sem os quais não teria sido possível a concretização desta etapa de minha vida, por todo amor, carinho, dedicação, conselhos, incentivo e esforços para me permitir ter acesso a melhor educação possível ao longo de minha infância e juventude.

Ao Juiz Fernando Luís Gonçalves de Moraes pela boa vontade ao se dispor em contribuir com a visão legal sobre o jogo de azar e ainda ir além daquilo que se esperava, trazendo pontos que agregaram valor a este trabalho.

Ao professor Marcelo Viana, a quem admiro muito por toda sua simplicidade e pelo professor excepcional que é. Obrigado por contribuir efetivamente com a melhora da minha capacidade de raciocinar ao expor de forma tão cristalina suas ideias em sala de aula.

Ao amigo e professor Sergio Luis Silva, pelos conselhos, incentivo e modelo de simplicidade e sabedoria, que tanto me inspiraram.

Aos professores que compartilharam seu conhecimento ao longo do curso.

Aos funcionários da secretaria que sempre me atenderam prontamente e com total eficiência.

Por fim, a todos que contribuíram para que este trabalho fosse realizado, meus mais sinceros agradecimentos.

"Se puderes guardar o sangue frio diante de quem, fora de si, acusa-te;
e, no instante em que duvidem de teu ânimo e firmeza,
tu puderes ter fé na própria fortaleza,
timbrando em confundir a desconfiança alheia…
Se tu puderes não odiar a quem te odeia,
nem pagar com a calúnia a quem te calunia,
sem que tires daí motivos de ufania;
sonhar, sem permitir que o sonho te domine;
pensar, sem que em pensar tua ambição se confine;
e esperar sempre e sempre, infatigavelmente…
Se, com o mesmo sereno olhar indiferente,
puderes encarar a derrota e a vitória,
como embustes que são da fortuna ilusória;
e estoico suportar que intrigas e mentiras
deturpem a palavra honesta que profiras…
Se puderes, ao ver em pedaços,
destruída pela sorte maldosa, a obra de tua vida,
tomar de novo a ferramenta desgastada e,
sem queixumes vãos, recomeçar do nada…
Se, tendo loucamente arriscado
e perdido tudo quanto era teu,
num só lance atrevido,
puderes voltar à faina ingrata e dura,
sem aludir jamais à sinistra aventura…
Se tu puderes coração, músculos, nervos,
reduzir da vontade à condição de servos
que, embora exaustos, obedeçam-lhe ao comando…
Se, andando a par dos reis
e com os grandes lidando,
puderes conservar a naturalidade,
e, no meio da turba, a personalidade;
impávido, afrontar adulações, engodos, opressões;
merecer a confiança de todos,
sem que possa contar, todavia, contigo,
incondicionalmente, o teu maior amigo…
Se de cada minuto os sessenta segundos
tu puderes tornar com o teu suor fecundos…
a terra será tua, e os bens que se não somem
e, o que é melhor, meu filho,
então serás um homem!"

R. Kipling

Resumo

UM ESTUDO SOBRE JOGOS DE AZAR

Marcos Monte de Oliveira Alves

Orientador: Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho, PhD

O presente trabalho tem como objetivo analisar estratégias usadas ao longo da história por jogadores que obtiveram êxito notório ao aplicá-las, no jogo de roleta, buscando explicar a fundamentação matemática destes sistemas e concluindo se os jogadores que entraram para história enriqueceram por sorte, ou se suas estratégias eram efetivamente boas. Em virtude da existência de uma quantidade enorme de sistemas propostos para obtenção de sucesso na roleta, selecionamos os cinco sistemas mais famosos, a saber: Sistema Martingale, Sistema das Dúzias, Sistema de Fibonacci, Sistema Makarov e Sistema Garcia. Cada sistema proposto foi analisado separadamente e, ao término do desenvolvimento matemático relativo aos respectivos sistemas, foi apresentada conclusão sobre a confiabilidade de cada sistema.

Palavras-chave:

Jogos de Azar; Probabilidade; Roleta.

Sumário

LISTA DE FIGURAS

TABELAS

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da história dos jogos de cassino, podemos identificar alguns casos bem sucedidos de pessoas que ganharam enormes quantias de dinheiro utilizando estratégias matemáticas para obter êxito nas apostas. A proposta deste trabalho é identificar as principais estratégias vencedoras que foram usadas ao longo da história, buscando explicar matematicamente o motivo pelo qual tais procedimentos funcionaram no passado e porque hoje não mais funcionam.

É fato que em alguns tipos de apostas na roleta, a probabilidade de ganho é bem próxima de 50%, como por exemplo, as apostas feitas na cor ou na paridade do número. Nossa primeira indagação se dá a partir desta questão, isto é, se a probabilidade de ganho em alguns jogos é bastante próxima de 50%, não seria razoável esperar que fosse fácil encontrar uma estratégia vencedora para o jogo de roleta? A verdade é que os cassinos ao longo dos tempos têm buscado se "blindar" contra os métodos que um dia funcionaram, a partir da criação de novas regras. Existem métodos que induzem ao engano, pois funcionam bem por 10 ou 15 rodadas, mas as perdas produzidas por algumas poucas rodadas podem superar amplamente os ganhos obtidos anteriormente. Ao término da leitura será possível entender a fundamentação matemática dos sistemas analisados, permitindo assim que qualquer pessoa saiba dos riscos assumidos ao lançar mão das estratégias analisadas, muitas delas ainda citadas em sites como método infalível para enriquecer. No contexto motivacional, é interessante perceber que todas as estratégias adotadas nos sistemas famosos se baseiam em conteúdos elementares, como P.A, P.G, Fibonacci, probabilidade, inequações de funções polinomiais do primeiro grau, ou seja, todas podem ser abordadas a nível de ensino médio, possibilitando o enriquecimento do assunto, além do enriquecimento histórico, uma vez que podemos trazer questões propostas no livro Liber de Ludo Aleae, ou nas cartas de Pascal e Fermat.

Este trabalho é organizado da seguinte forma. No capítulo 2, apresentamos um pouco da história da probabilidade. No capítulo 3, apresentamos uma perspectiva histórica dos jogos de roleta, histórias famosas, bem como uma descrição do ambiente do jogo e das regras. No capítulo 4, analisamos a matemática dos sistemas de jogos de roleta. No capítulo 5 tratamos da abordagem do tema central deste trabalho em sala de aula, levantando as questões legais e religiosas envolvidas. No capítulo 6 apresentamos nossas conclusões sobre os sistemas analisados. Finalmente no Apêndice apresentamos uma entrevista realizada, uma com um Juiz de Direito.

1.1.Glossário

Serão apresentados a seguir, alguns termos que serão amplamente usados ao longo deste trabalho. São eles:

a) Jogos de azar – São jogos em que a vitória não depende da habilidade do jogador, já que apenas o fator sorte influencia no resultado.

b) Rodada – Termo usado para o período do sorteio de um número na roleta.

c) Aposta – Valor investido por um jogador em uma rodada.

d) Croupier – Empregado do cassino, responsável por girar a roleta e fazer o pagamento aos jogadores vencedores, assim como recolher as fichas dos perdedores.

2. HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Nesta parte do trabalho iremos expor a história parcial da origem da probabilidade, em primeiro momento apresentando o estudo feito por Cardano e, posteriormente, a abordagem feita por Pascal e Fermat. Em especial poderemos constatar que a motivação inicial para o estudo das "leis do acaso", em ambos os casos, foram os jogos de azar. Serão abordados superficialmente alguns problemas tratados por estes célebres matemáticos.

2.1.Cardano

Cardano teve uma vida bastante polêmica, se destacou como médico e ficou conhecido na época pelas inúmeras desavenças que teve com alguns "colegas" de profissão. Um de seus filhos foi executado por assassinar a esposa e outro fora "deportado", após tê-lo roubado. No final de sua vida foi preso, acusado de heresia, denunciado por seu próprio filho. Era amante dos jogos de azar, e em seu livro Liber De Ludo Aleae, escreveu sobre probabilidades. É o primeiro documento que se tem registro sobre o tema. Nesta obra, ele falou sobre os jogos de dado principalmente, mas também tratou de outros jogos de azar, merecendo destaque o jogo chamado primeiro, que era uma versão do jogo de poker, como conhecemos hoje.

O trabalho de Cardano, na área da probabilidade, é pouco conhecido, mas sem dúvida devemos a ele os primeiros trabalhos científicos feitos neste campo. Muitos autores atribuem a Pascal e a Fermat o início do estudo das probabilidades. No entanto, o livro de Cardano é anterior à existência dos mesmos. Talvez este fato ocorra devido ao livro de Cardano,"Liber de Ludo Aleae", ser por vezes um pouco confuso, principalmente devido a composição execrável do livro, conforme (Ore, 1953).

"Cardano confessou que escreveu certas partes simplesmente tomando notas que lhe ocorriam, ao longo do tempo. Neste processo é evidenciado que algumas vezes, quando ele percebia que alguma ideia estava errada, ele

procedia sem avisar ao leitor sobre os seus novos pensamentos, e sem se preocupar em corrigir as declarações anteriores."

Além deste fato, Cardano utiliza dois métodos completamente diferentes, observados em (Gerolamo, 1633). O primeiro é o método que utilizamos hoje em dia no cálculo de probabilidades, e sempre que este método era utilizado, os resultados obtidos estavam totalmente corretos . O segundo método parece representar uma abordagem original de Cardano para os problemas de probabilidade; podemos apropriadamente chamá-lo de "um raciocínio no resultado da média". Este segundo processo é simples de aplicar, e sob certas condições fornece uma boa aproximação da resposta correta.

Nos capítulos iniciais do livro "Líber de Ludo Aleae", Cardano procura abordar os tipos de jogos, a ética do jogo, quem deve jogar, a utilidade do jogo e das derrotas e também justificar seu interesse pelos jogos, já que naquela época os amantes dos jogos não eram vistos com bons olhos. Curiosamente, no terceiro capítulo de sua obra, ele adverte sobre o perigo que jogar pode trazer a pessoas cuja profissão possui algum prestígio, afirmando que se eles saírem vitoriosos serão taxados como viciados em jogos, e se perderem, talvez possam ser rotulados como tão inábeis em suas profissões como nos jogos.

Apesar de alguns tropeços no decorrer do livro, nos capítulos subsequentes podemos verificar os reparos necessários. Contudo, como já dito anteriormente, ele não avisa ao leitor que se trata de uma correção em relação a certo tópico. Abaixo reproduzimos as duas abordagens apresentadas por Cardano.

Abordagem 1: Chamando o total de casos equiprováveis de um dado experimento de circuito, Cardano definiu a probabilidade como a razão entre o número de casos favoráveis e o circuito, ou seja,

$p = \frac{f}{c}$, onde se tratando de um jogo com um único dado, o valor assumido pelo circuito é 6.

Para Cardano havia ainda outro conceito tão fundamental quanto o circuito, chamado de igualdade, o qual representava metade do circuito. Oysten Ore em seu livro “The Gambling Scholar” justifica esta ideia a partir do conceito de esperança matemática, levando em conta que em um jogo com dois jogadores, é normal um jogador relacionar o valor ganho com o valor de sua aposta, e não com o valor total em jogo. Cardano afirmou (Gerolamo, 1633)

“Uma metade do total de faces sempre representa a igualdade”.

Assim, no lançamento de dois dados, por exemplo, a igualdade é $\left(\frac{6 \times 6}{2}\right)$ = 18 e no lançamento de 3 dados a igualdade é $\left(\frac{6 \times 6 \times 6}{2}\right)$ = 108 Podemos então dizer que sua maneira de tratar os problemas comumente apresentava essas duas frações, a saber:

$p = \frac{f}{c}$ $\qquad$ $p_c = \frac{f}{e} = 2 \times \frac{f}{c} = 2p$, onde este último representa a probabilidade da igualdade ocorrer.

Abordagem 2 : Apesar de Cardano entender que seu princípio “um raciocínio no resultado da média” apresentava resultados corretos apenas em algumas circunstâncias, é comum nas páginas de seu livro encontrarmos também esta abordagem na resolução de problemas. Basicamente sua definição dizia que após certo número n de experimentos, a probabilidade de ocorrer o evento desejado seria dada pela fórmula

$$p = n \times \frac{f}{c}$$

Analisando alguns problemas de dado propostos no livro “Liber de Ludo Aleae”, podemos perceber a diferença gerada em algumas situações. Listamos abaixo algumas das análises feitas por Cardano.

Problema 1: Encontrar a probabilidade de se obter o número 6 no lançamento de um dado.

Em um dado há 6 faces numeradas de 1 a 6. Deste modo, o total de casos possíveis é igual a 6, e o número de casos favoráveis é 1.

Pelo método de abordagem 1 temos $p = \frac{1}{6}$

Pelo método de abordagem 2 a resposta é a mesma, pois $p = 1 \times \frac{1}{6}$

Problema 2: Encontrar a probabilidade de se obter pelo menos um 6 no lançamento de dois dados.

Pelo método de abordagem 1 temos $p = \frac{11}{36}$

Esta probabilidade pode ser calculada levando em conta que o total de casos é 6x6 = 36, e os casos favoráveis podem ser calculados à partir do raciocínio a seguir:

O resultado do lançamento de dois dados pode ser representado pelo par (a,b). Como pelo menos um dos valores deve ser 6, há duas possibilidades para escolha da posição do 6 e seis possibilidades para escolha do número que irá compor o par com o 6. Deste modo, temos 2×6 = 12 casos, mas um dos pares é contado duas vezes neste raciocínio, a saber (6,6). Assim, o número de casos favoráveis é 12 – 1 = 11.

Pelo método de abordagem 2 a resposta é $p = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Problema 3: Encontrar a probabilidade de se obter o número 6 no lançamento de três dados.

Pelo método de abordagem 1 temos que determinar o número de casos favoráveis, bem como o total de caos. O total de casos, pelo princípio multiplicativo é $6\times6\times6$ = 216. Para calcular o número de casos favoráveis para o trio(a, b, c) podemos dividir nossa análise em 3 possibilidades:

1ª: Casos em que só há um resultado seis

Há 3 possibilidades para escolher a posição do resultado seis e 5×5 = 25 maneiras para escolher os outros dois resultados, que devem ser distintos de 6. Logo há 3×25= 75 maneiras distintas de haver exatamente um resultado seis no lançamento de 3 dados.

2ª: Casos em que há exatamente dois resultados iguais a 6.

Há $P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$ maneiras para escolha da posição ocupada pelos dois resultados seis, e 5 maneiras para decidir o resultado que irá acompanhar os dois "seis". Portanto há 3×5=15 maneiras para obtermos dois resultados iguais a seis.

3ª: Casos em que os três resultados são iguais a seis.

Só há 1 caso deste tipo, a saber: (6,6,6).

Pelo princípio aditivo, há 75 + 15 + 1 = 91 casos favoráveis e, portanto, a probabilidade de se obter o número 6 no lançamento de 3 dados é dada por:

$$p = \frac{91}{216}$$

É fato que seria muito mais simples uma abordagem a partir do cálculo da probabilidade complementar dos casos, isto é, P = 1 – P`, onde P` é a probabilidade de não sair nenhum resultado 6, mas não devemos nos esquecer que o estudo das probabilidades estava nascendo naquele momento e este conceito ainda não havia surgido, portanto Cardano ao calcular a probabilidade de se obter um resultado 6, optou pelo caminho mais trabalhoso.

Pelo método de abordagem 2 a resposta é $p = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{108}{216}$

É notório que conforme realizamos repetições do experimento, cada vez mais a segunda análise distancia-se do valor correto, obtido na primeira abordagem. Se realizarmos 6 lançamentos, a segunda análise forneceria a certeza de se obter um resultado 6, já que seu cálculo produziria como resposta $p = 6 \times \frac{1}{6} = 1$. Percebendo esta discrepância, Cardano descarta esta forma de análise a partir do capítulo 14 de seu livro.

Apesar de Cardano ter contribuído de forma notória para alguns aspectos da matemática, como o estudo sobre a probabilidade, seu trabalho é menosprezado por muitos autores, pois além de ter sido um cidadão polêmico em sua época e o seu livro “Líber de Ludo Aleae” ter uma composição execrável, houve ainda o mal entendido com o trabalho sobre as raízes de equações de terceiro grau, elaborado por Tartaglia. Cardano publicou em seu livro “The Ars Magna” as descobertas de Tartaglia, contudo atribuiu corretamente o mérito a este. O fato é que ao longo dos anos, o ocorrido foi distorcido e muitos acreditam hoje que Cardano se apropriou indevidamente das ideias de Tartaglia.

2.2.Blaise Pascal e Pierre Fermat

À época de Pascal e Fermat havia um famoso jogador profissional, conhecido como Cavaleiro De Méré, o qual possuía habilidade notável para problemas matemáticos, segundo (Smith, 1959). Por volta do ano de 1654, De Méré apresentou a Pascal um problema que havia fascinado jogadores e matemáticos desde a idade média. O problema consistia em como distribuir a aposta em um jogo de azar, realizado entre jogadores com igual chance de ganhar cada rodada, levando em conta a pontuação do jogo na rodada em que o mesmo seria interrompido. Pascal iniciou um estudo sobre a questão e, posteriormente, apresentou o problema a Fermat, dando origem a uma troca de correspondências, num total de sete cartas, as quais se tornaram históricas. Há um registro destas cartas no livro de Smith D. (Smith, 1959). Segundo relato do mesmo autor, a primeira carta, enviada de Pascal para Fermat, infelizmente se perdeu, mas as outras seis encontram-se na íntegra na obra do referido autor. Transcrevemos aqui, partes das cartas trocadas pelos dois célebres matemáticos.

O problema que deu origem as discussões é o seguinte:

Dois jogadores, A e B, lançam um dado com o objetivo de conseguir um ponto em 8 lançamentos. O enunciado original parece pouco claro, muito possivelmente por conta de a primeira carta ter sido perdida. A partir da discussão que se segue nas demais cartas, podemos supor que a proposta seria a seguinte:

- Dois jogadores A e B lançam um dado, cada um deles o faz até 4 vezes (totalizando 4 rodadas ou 8 lançamentos) e o objetivo do jogo é obter número 1. O raciocínio apresentado a seguir baseia-se na hipótese de o jogador A abrir mão do seu direito de jogar em cada rodada, sendo calculado por Fermat qual deveria ser a fração do prêmio a ser recebida pelo mesmo se o jogo encerrasse no momento em que o jogador A abre mão de seu direito de efetuar seu lançamento.

Na segunda carta, segundo (Smith, 1959),Fermat se manifesta apontando uma discordância contra o que fora apresentado por Pascal, citando um exemplo da primeira carta, a saber:

"... caso eu queira saber qual o valor da 6ª jogada em 8 lançamentos, e caso tenha tentado três vezes sem o conseguir, e caso o meu opositor proponha que eu não devo jogar uma quarta vez, e se ele desejar que eu seja tratado com justiça, é aceitável que eu fique com $\frac{125}{1296}$ *da soma total das apostas."*

O raciocínio para chegar neste valor é o seguinte: Se o jogador A concorda em não fazer o 1º lançamento, o dinheiro a receber deve ser proporcional a sua chance de vencer, ou seja, $\frac{1}{6}$. No entanto, se após isto o jogador A concorda em não realizar o 2º lançamento, este deve ficar com $\frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})=\frac{5}{36}$. Procedendo de modo análogo até o 4º lançamento, chegaremos ao valor apontado por Fermat, a saber: $\frac{125}{1296}$. Veja a ilustração abaixo:

Lançamento			
1	2	3	4
$P_1=\frac{1}{6}$	$P_2=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{36}$	$P_3=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{36}\right)=\frac{25}{216}$	$P_4=\frac{1}{6}\times(\frac{5}{6}-\frac{5}{36}-\frac{25}{216})=\frac{125}{1216}$

Segundo a opinião de Fermat, se o outro jogador não ganhou nas três primeiras rodadas, o valor em jogo é o mesmo , portanto caso o jogador concorde em não realizar a sua 4ª jogada, o mesmo deve ficar com $\frac{1}{6}$ do dinheiro em jogo, ou seja, $\frac{1}{6}$ da soma total das apostas.

Nas terceira e quarta cartas, Pascal procura mostrar seu ponto de vista a Fermat, apesar de manifestar receio que sua amizade seja abalada. Apresenta ainda outros teoremas que vem trabalhando, e pede a opinião de Fermat.

Na quinta carta Fermat reconhece que Pascal estava certo em sua primeira exposição quanto ao problema da divisão da aposta para o caso de 3 jogadores que fazem três apostas. Este ainda apresenta alguns de seus teoremas a Pascal, e pede em especial, segundo (Smith, 1959), que Pascal medite sobre um especialmente:

As potencias quadradas de 2 adicionadas à unidade são sempre números primos.

Apesar de Fermat ter se referido ao mesmo como um teorema, a palavra adequada seria conjectura. Vale mencionar aqui, que aproximadamente após 100 anos Euler demonstrou a falsidade desta afirmação.

Na sexta carta, Fermat começa mencionando que os argumentos de ambos estão a chegar ao fim. É ainda exposto a Pascal que a lei de combinações obtida por Fermat é válida para qualquer número de jogadores.

Na última carta, segundo Smith (Smith, 1959), Pascal escreve tranquilizando a Fermat quanto a autoria do método desenvolvido por este, dizendo que:

"É inteiramente seu (o método), não tem nada em comum com o meu, e chega facilmente às mesmas conclusões. Agora a nossa harmonia recomeçou".

Pascal ainda admite que quanto às últimas descobertas de Fermat, é necessário encontrar alguém que possa acompanhar os seus estudos, como confessa:

"Pela minha parte, confesso que isso me ultrapassa a uma grande distância. Somente sou competente para o admirar e para humildemente lhe pedir que use os seus tempos livres para chegar a uma conclusão o mais cedo possível"

3. JOGOS DE ROLETA

Neste capítulo iremos descrever o ambiente do jogo de roleta e os tipos de apostas possíveis. A seguir falaremos do surgimento histórico do jogo de roleta e apresentaremos algumas histórias famosas de jogadores que enriqueceram usando alguma estratégia e entraram para história. Iremos finalizar falando sobre as histórias não contadas.

3.1.Descrição

A roleta consiste em uma roda, onde são gravados números de 0 a 36, no modelo Europeu. Na Americana há ainda o duplo zero "00". Cada número da roda possui uma canaleta, e quando a grande roda é posta a girar, uma pequena esfera é inserida na roda. O número em que a bola parar quando a roleta parar de girar é o número vencedor. Abaixo segue uma ilustração do modelo de roleta americana.

Figura3. 1– Ambiente do Jogo (retirado de http://www.adorablecasino.com/portuguese/roulette.shtml)

As apostas são feitas em uma mesa, geralmente de veludo, na qual os jogadores depositam fichas nas casas correspondentes as da grande roda. A roleta é posta a girar e os jogadores fazem suas apostas até o momento em que o *croupier* anuncia “apostas encerradas”

3.2.Regras

Cada jogador adquire a quantidade de fichas que desejar, em troca de dinheiro. A partir deste momento, quando a roleta é posta a girar, é possível apostar com as fichas nos jogos desejados. As apostas se dividem em internas ou externas.

Aposta interna

a) Número simples (single bet): Aposta feita em números individuais (como o 1, 0 ou 15, por exemplo). As premiações pagam na proporção de 35 para 1. Isto quer dizer que se você apostar 1 unidade e ganhar, receberá a aposta de 1 mais 35 vezes 1, totalizando 36 unidades.

b) Aposta dividida (split): Consiste em colocar as fichas na linha entre dois números. O valor de pagamento é de 17 para 1.

c) Aposta de Fila Vertical ou Tripla: Colocar as fichas na linha divisória entre as Dúzias e a coluna de três números que o jogador deseja apostar (como 1,2 e 3 por exemplo). O valor de pagamento é de 11 para 1.

d) Triplo: A aposta é feita colocando-se as fichas na interseção do 0,1 e2 ou do 0, 2 e 3. O pagamento é de 11 para 1.

e) Canto (corner): Colocar as fichas na interseção de 4 números. Se paga 8 para 1.

f) Linha do topo: Colocar as fichas na primeira linha do topo, apostando diretamente nos números 0, 1, 2 e 3. Se paga 8 para 1.

g) Rua (street): É um grupo de seis números em duas fileiras adjacentes, com a linha horizontal separando as duas fileiras, como se fosse uma rua. Se paga 5 para 1.

Aposta Externa

a) Colunas: A aposta é feita do lado de fora da tabela, em toda uma coluna. A aposta é feita depositando as fichas nos espaços marcados em 2:1, que representam a proporção de pagamento.

b) Dúzias: As fichas devem ser colocadas na dúzia desejada, indicadas na parte lateral da tabela. O pagamento segue a proporção de 2:1.

c) Ímpares/Pares: Apostar em números pares ou ímpares, no espaço fora da tabela. O pagamento é de 1:1.

d) Vermelho/Preto: Apostar em números vermelhos ou pretos, no espaço fora da tabela. O pagamento é de 1:1.

e) Alto/Baixo: A aposta é feita na área indicada, fora da tabela. Ao apostar Baixo, estão sendo cobertos todos os números de 1 a 18, e no Alto, todos os números de 19 a 36. O pagamento também é de 1 para 1.

3.3.História

Blaise Pascal apresentou um modelo de roleta, ainda primitivo, no século 17, em sua busca por uma máquina de movimento contínuo. O jogo adquiriu sua forma atual no final do século 18, em Paris. Até 1834 todos os cassinos apresentavam o duplo zero no jogo de roleta e apenas neste ano que os colegas François e Louis Blanc, na cidade de Homburg, introduziram a roleta com um único zero, para competir com os cassinos já existentes. Houve ainda uma tentativa de criar uma roleta com apenas 28 números, além do zero (0), do duplo zero (00) e de uma águia nos Estados Unidos. Assim como nos dias de hoje, estes 3 espaços não eram bloqueados quanto a apostas, isto é, qualquer pessoa poderia apostar nestas casas. Durante a primeira metade do século 20 as duas cidades de maior projeção eram Monte Carlo, com sua roleta modelo francês, com um único zero e Las Vegas, com a roleta americana com duplo zero também.

3.4.Histórias Famosas

As histórias narradas abaixo são provenientes de sites da internet. Nosso objetivo ao compartilhar as mesmas, se baseia em ilustrar situações que irão servir como base para o estudo teórico apresentado no capítulo 4. Independente de as mesmas não corresponderem a verdade absoluta, a análise matemática não será comprometida, já que a mesma se embasa nas estratégias adotadas pelos jogadores e não no feito individual de cada um.

a) **Thomas Garcia** (GSB Brasil)

"Garcia foi um caixeiro-viajante espanhol e em seu tempo livre jogava para aumentar o seu rendimento. Em agosto de 1860, conseguiu acumular uma considerável quantia e foi jogar no mais importante cassino da época - cassino de Homburg. Utilizava vários sistemas, mas acima de tudo o sistema Garcia, criado por ele mesmo, o qual será explicado mais adiante. Na sua primeira visita ganhou 240.000 francos e na segunda visita quebrou a banca* 5 vezes saindo com o lucro de mais de 500.000 francos. Após as suas duas visitas totalizou 800.000 francos jogando na roleta e no jogo *trente-et-quarente*, o qual era um jogo de cartas bastante popular naquela época.

Figura3.4- 1

* A expressão quebrar a banca significa que o jogador ganhou todo o dinheiro disponível para a mesa naquele dia. No início do século XX, em Mônaco, o ritual fora incrementado por algum tempo, através da colocação de um pano preto sobre a mesa, representando um suposto luto do Cassino, para a glória do jogador, até que a banca fosse recarregada.

Provavelmente o seu nome era Tomás Garcia, mas os seus resultados foram amplamente divulgados na altura pelo The Times como Thomas Garcia. Jogador lendário, que tinha várias particularidades como de nunca jogar sozinho, sempre acompanhado por uma entourage, pela sua amante alemã e gostar de apostar sempre no vermelho. Mas o que mais tornou-o lendário era a sua completa impavidez e frieza - seja qual fosse a quantia que estivesse em jogo e seu resultado. Mais tarde, esta sua faceta foi copiada por vários outros grandes jogadores.” Retirado de (GSB Brasil)

[*] A expressão quebrar a banca significa que o jogador ganhou todo o dinheiro disponível para a mesa naquele dia. No início do século XX, em Mônaco, o ritual fora incrementado por algum tempo, através da colocação de um pano preto sobre a mesa, representando um suposto luto do Cassino, para a glória do jogador, até que a banca fosse recarregada.

b) **Joseph Jaggers** (Wikipedia) **e** (14de)

Na década seguinte ao feito de Garcia, o grande casino na Europa era Monte Carlo. O senhor Jaggers em 1873 com a ajuda de seis ajudantes, fez história! Eles mantiveram debaixo de olho todas as roletas do Monte Carlo Casino. Estabeleceram uma Roleta como sendo consideravelmente viciada. Exploraram esta falha e ganharam 325,000 que era uma enorme quantia naquela altura.

c) **Charles Wells** (14de)

Charles Wells escreveu o seu nome na história em 1891. Num dia, ele ganhou em todas as mesas que jogou em Monte Carlo e quebrou a banca 12 vezes. Ele foi então apelidado de "O Homem que Quebrou a Banca em Monte Carlo”. Fred Gilber em 1892 escreveu em sua homenagem a canção popular com o título "The Man Who Broke the Bank at Monte Carlo".

d) **Norman Leigh** (Casino Portugal)

No verão de 1966, Leigh foi ao Cassino Municipal em Nice com a intenção expressa de ganhar sistematicamente grandes quantidades de dinheiro na roleta, concretizando tal fato. Duas semanas depois, ele e a sua equipe (12 assistentes) foram banidos de entrar em qualquer Cassino na França. Norman usou o sistema Reverse Labouchere.

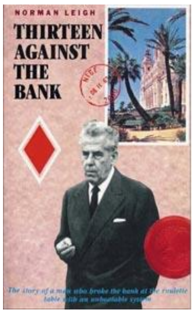


Figura3.4- 2

e) **Sean Connery** (Poker.TJ)

Em janeiro de 1963, o ator escocês Sean Connery, que se notabilizou no papel de James Bond, o agente secreto, ganhou o equivalente a cerca de 30.000 (na década de 60...) apostando no número 17 três vezes consecutivas no casino de St. Vincent em Itália. A probabilidade deste número aparecer três vezes consecutivas é de 46.656 para 1, o que só mostra que a sorte é uma peça fundamental neste jogo - ou então o cassino arranjou uma forma original de publicitar o cassino.

Figura3.4- 3

f) **Teoria de Thomas A Bass**

Um grupo de estudantes da Universidade da California Santa Cruz criou um mecanismo que aumentava as suas hipóteses de ganhar a roleta. O objetivo era o de provar que havia uma forma de prever onde a bola iria cair na roleta - assumindo que não existe um sistema completamente aleatório. Eles aumentaram as suas probabilidades em 44 por cento de vantagem sobre os cassinos. Um episódio do seriado CSI, chamado “No more bets”, é baseado nesta história.

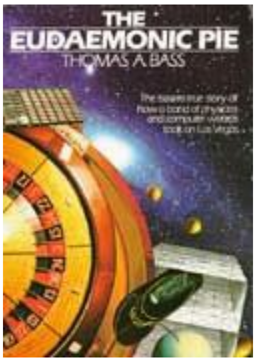


Figura3.4- 4

g) **Garcia Pelayo** (Roulette Theory and Life)

No início da década de 1990, Garcia Pelayo usou um modelo de computador para determinar quais os números que frequentemente saíam assim como os ângulos de saída dos números. Depois se dirigiu a um Cassino e apostou continuamente nestes números. Garcia Pelayo afirmou posteriormente que ele transformou uma desvantagem de 5% para uma vantagem de 15% para o jogador. Ele ganhou mais de 1.5 milhões no Cassino de Gran Madrid. O Cassino acabou por banir a entrada a Garcia-Pelayo.

Figura3.4- 5

h) **Cassino Ritz** (14de)

Em Março de 2004, o Cassino Ritz, após uma investigação interna, alegou que os ganhos de três jogadores tinha sido obtida através de um dispositivo escondido num celular ligado a um microcomputador que calculava ou influenciava onde a bola ia cair.

Na primeira visita, estes jovens ganharam 100.000, e na noite seguinte conseguiram £1.200.000. Quando o grupo deixou o Ritz, eles receberam £ 300.000 em dinheiro e um cheque no valor de £ 900.000. Entretanto, a Scotland Yard foi chamada e prenderam o trio.

A Scotland Yard investigou o assunto, mas não conseguiu encontrar provas que este respectivo aparelho provocasse qualquer impacto no resultado da roleta. Deste modo foi devolvido o dinheiro ao trio.

O grupo foi mais tarde descrito como uma elegante e bela mulher húngara, de 32 anos, e dois homens sérvios, com idades entre 33 e 38. Aparentemente, em Budapeste a mulher era bem conhecida nos cassinos de luxo - com efeito, tinha já sido banida destes respectivos cassinos. A verdade é que a relação dos cassinos e celulares desde então nunca mais foi a mesma.

i) **Ashley Revell** (14de) **e** (Casino Portugal)

Revell, de Londres, em 2004, vendeu todos os seus bens reunindo US$135,300. Fez check in no Plaza Hotel em Las Vegas, apostou tudo no vermelho (numa aposta de dobro ou nada) e venceu.

3.5.As Histórias não contadas

Apesar de existirem alguns casos de sucesso, há muito mais casos de pessoas que perderam todo o capital investido no jogo. É comum ouvirmos a expressão "maré de sorte", muitas vezes empregada por jogadores compulsivos que acreditam estar em um dia predestinado ao sucesso. Algumas pessoas já perderam muito dinheiro por acreditar simplesmente que estavam em uma maré de sorte ou que sua sorte iria mudar. Na verdade, estes casos são muito mais comuns do que os poucos casos de sucesso contados no item 3.4 deste capítulo. Como veremos mais a frente, nos capítulos 4 e 6, a probabilidade de se fazer fortuna com as estratégias apresentadas é bastante baixa, uma vez que todos os sistemas apresentados têm a característica de ganhar pouco com alta probabilidade e ter perdas grandes com baixa probabilidade.

4. ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS

As estratégias analisadas a seguir foram desenvolvidas por jogadores cujo objetivo era enriquecer através do jogo de roleta, explorando modelos de apostas que supostamente os favorecia. Nosso objetivo nesta parte do trabalho é fazer uma análise matemática destas estratégias, apresentando em seguida nossa conclusão quanto à eficiência de cada uma delas.

Todos os sistemas que analisamos aqui possuem uma particularidade quanto à probabilidade de sucesso, deste modo, faremos uma análise geral, a qual servirá como referência aos casos particulares.

Em primeiro lugar, observamos que o total de resultados possíveis em uma rodada da roleta é sempre igual a 37, posto que há 37 números dispostos na mesma. Chamando o número de casos favoráveis de x, e considerando uma roleta não viciada, temos que a probabilidade de ganho em uma rodada é dada pela razão $p = \frac{x}{37}$, e consequentemente a probabilidade de perda será $p` = 1 - p = 1 - \frac{x}{37}$. Chamado de p_i a probabilidade de o jogador vencer apenas na rodada i, com $1 \leq i \leq n$, vale que:

$$
\begin{aligned}
&p_1 = \frac{x}{37} \\
&p_2 = \left(1 - \frac{x}{37}\right) \times \left(\frac{x}{37}\right) \\
&p_3 = \left(1 - \frac{x}{37}\right)^2 \times \left(\frac{x}{37}\right) \\
&\vdots \\
&p_n = \left(1 - \frac{x}{37}\right)^{n-1} \times \left(\frac{x}{37}\right)
\end{aligned}
$$

Logo a probabilidade de um jogador vencer em até n rodadas, será a soma das probabilidades

$p_1 + p_2 + ... + p_n = \dfrac{\dfrac{x}{37}\left(\left(1-\dfrac{x}{37}\right)^n - 1\right)}{\dfrac{x}{37} - 1}$, soma dos termos da P.G. de razão $\left(1-\dfrac{x}{37}\right)$.

Considerando que um jogador estivesse disposto a jogar até vencer, e que o mesmo dispusesse de uma quantia infinita de dinheiro, então a probabilidade de obter sucesso em qualquer sistema poderia ser calculada a partir da fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, cujo primeiro termo vale p_1 e a razão vale $q = 1 - \dfrac{x}{37}$. Daí, concluímos que:

$$S_\infty = \frac{\frac{x}{37}}{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{x}{37}\right)} = \frac{\frac{x}{37}}{\frac{x}{37}} = 1$$

Em outras palavras, se um jogador estiver disposto a investir seu dinheiro até vencer, e dispuser de uma quantia ilimitada de dinheiro, a chance de ser bem sucedido é 100%. É importante que tenhamos em mente que este valor não garante a um jogador a obtenção de lucro, mas sim que ele consiga vencer em alguma rodada. Por conta deste fato é que existem tantos sistemas distintos, com sequências completamente diferentes, assim como modelos de apostas com probabilidades diferentes. Há aqueles em que o capital investido tornasse rapidamente grande, no caso de a vitória demorar a ocorrer, em outros o valor investido cresce lentamente. Nos dias atuais, os modelos que crescem mais lentamente são mais adequados, pois para se proteger destas técnicas, os cassinos passaram a impor limite mínimo e máximo para cada tipo de aposta.

4.1) Sistema Martingale ou Double Up System

O sistema Martingale era extremamente popular desde o século XIX. É um sistema mais usado em apostas que paguem 1:1. O método consiste em dobrar o valor da aposta até que se ganhe, neste momento inicia-se uma nova série de apostas. A seguir iremos ver a fundamentação matemática deste sistema.

Vamos primeiro ver um exemplo do método. Iremos ainda definir a aposta inicial como uma unidade, tendo em mente que a unidade é um valor arbitrário, dependendo do sistema de medida que o jogador decidir adotar, isto é, a unidade pode ser 5 dólares, 10 euros ou qualquer outra quantia que se decida adotar como unidade. O importante é ter em mente que a unidade corresponde ao valor de aposta feita na primeira rodada.

Tabela 4. 1

Rodada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor da Aposta	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Total Investido	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
Valor recebido	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Lucro(Se vencer)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

No sistema Martingale é comum os jogadores considerarem que chance de vencer, em cada rodada, é de 50%, mas na realidade a chance não é esta, e sim $\frac{18}{37}$, pois os modelos que pagam 1:1, são aqueles em que o número de casos favoráveis é 18. Caso sejam levadas em conta rodadas consecutivas, a chance de vencer será, como já vimos, a soma das probabilidades, ou seja, $p_1 + p_2 + ... + p_n = \dfrac{\frac{x}{37}\left(\left(1-\frac{x}{37}\right)^n - 1\right)}{\frac{x}{37}-1}$. Qualquer que seja a probabilidade x de vitória, o jogador tem lucro certo de uma unidade, desde que possa jogar um número ilimitado de vezes. Será coincidência o fato de o Lucro ser sempre igual ao valor da aposta inicial?

A matemática por trás do sistema Martingale.

Há dois aspectos que devemos abordar neste sistema, o modelo de aposta, que forma uma Progressão Geométrica (PG) e a probabilidade de vencer.

a) O modelo da PG. → A proposta de sempre dobrar o valor da aposta torna a sequência uma PG de razão 2. Podemos, sem perda de generalidade, considerar o primeiro termo da PG como sendo 1, nossa unidade. Deste modo, o total investido até a rodada n, será igual a soma dos termos de uma PG, de n termos, cujo primeiro termo vale 1 e a razão 2. Assim temos que:

T: Total investido

$$T = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Valor da Aposta na rodada n: A → Será o termo geral da PG. $A = 2^{n-1}$

Valor arrecadado na Rodada n: X → Será o dobro do valor da aposta A , ou seja,

$2.2^{n-1} = 2^n$.

Seja L o valor do lucro obtido na série. Deste modo L = X – T = 1.

Concluímos que neste sistema o lucro será sempre igual ao valor da aposta realizada na primeira rodada. Uma das histórias mais famosas da aposta Martingale é a de Wells, conhecido como o "Homem que quebrou o Cassino em Monte Carlo”. Numa sessão de onze horas de jogo Wells quebrou a banca do Cassino doze vezes, arrecadando um milhão de francos. Isto aconteceu em 1891… Uma autêntica fortuna. O Cassino de Monte Carlo ficou genuinamente preocupado e contratou vários detetives privados para descobrir o sistema que Wells havia utilizado. Muitos anos depois, Wells admitiu ter-se baseado em apostas de Martingale, combinando com a mais pura sorte. Vejamos agora um problema interessante. Se Wells dispusesse de uma quantia de dinheiro suficientemente grande para jogar até ganhar, ou seja, se seu dinheiro fosse infinito, qual seria a probabilidade de conseguir realizar esta façanha usando o Sistema Martingale?

b) Probabilidade de Vencer

Como vimos no início do capítulo, na situação hipotética Wells teria 100% de chance de vencer. De fato a matemática está correta, e é certamente este aspecto que faz com que Wells tenha seguidores até os dias de hoje. Contudo, se analisarmos as regras atuais dos cassinos, veremos que este sistema não é bom devido às restrições de aposta que ocorrem atualmente nas mesas de roleta. É fato que a maior parte dos cassinos estipula como aposta externa mínima o valor correspondente a 5 unidades monetárias do país, ou como em alguns cassinos, principalmente na Argentina, 5 dólares, e também limita a aposta máxima em 500 unidades monetárias. A partir destas restrições, não é mais possível uma quantidade “infinita” de apostas, na realidade se o apostador não vencer até a 9ª rodada, terá que amargar um enorme prejuízo se comparado com a unidade.

Conclusão do Sistema Martingale:

De fato era um sistema que funcionaria efetivamente no plano hipotético de haver um capital ilimitado, apesar de ser necessário, em alguns casos, um investimento enorme para ganhar pequenas quantias. Atualmente, devido as restrições impostas pelos cassinos, este sistema empregado isoladamente não é eficiente, já que o jogador não pode passar por uma grande sequência de rodadas azaradas. Podemos notar a semelhança entre este sistema e o Paradoxo de São Petersburgo, o qual é abaixo explicitado.

"O problema é o seguinte: suponhamos que Pedro e Paulo concordam em jogar um jogo de cara ou coroa. Se o primeiro lance der cara, Paulo dará duas moeda a Pedro; se o primeiro lance der coroa e o segundo der cara, Paulo dará a Pedro quatro moedas. Se cara só aparece no terceiro lance, Pedro receberá oito moedas. Em resumo, se só aparecer cara no n-ésimo lance, Pedro receberá 2 elevado a n moedas. Então, quanto deve Pedro pagar a Paulo pelo privilégio de jogar tal jogo?" (retirado de "http://pt.wikipedia.org/wiki/Paradoxo_de_S%C3%A3o_Petersburgo".)

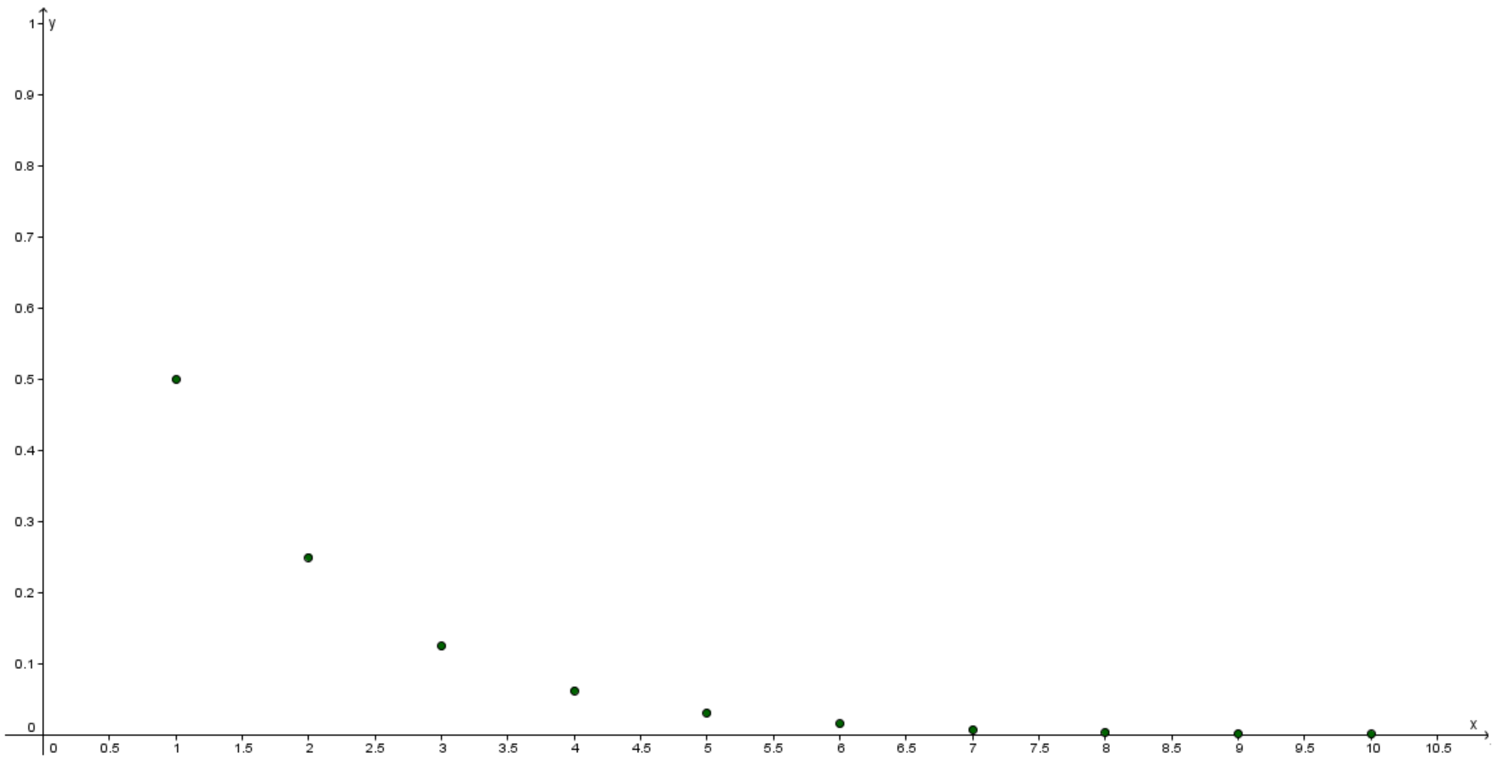
Fazemos a seguir uma análise do Paradoxo de São Petersburgo e em especial calculamos o valor esperado deste tipo de jogo e também do sistema Martingale.

a) Paradoxo de São Petersburgo – A probabilidade de ganhar 2 unidades é $\frac{1}{2}$, já a de ganhar 4 unidades é $(\frac{1}{2})^2$ e, portanto, a de ganhar 2^n unidades será $(\frac{1}{2})^n$. Deste modo, o valor Esperado a ser recebido por uma pessoa que dispusesse de um capital infinito será dado por:

$$E = \lim_{n\to\infty} 2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times (\frac{1}{2})^2 + \cdots + 2^n \times (\frac{1}{2})^n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{1 + 1 + \ldots . + 1}_{n\ parcelas} =$$

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Isto significa que se uma pessoa aposta uma quantia finita x, seu lucro esperado após um número ilimitado de jogadas será também infinito. É claro que ao supor situações infinitas, as mesmas são válidas apenas no plano teórico. Note que para um valor pequeno de x, já seria necessário um número grande de rodadas para que obtivéssemos lucro, uma vez que apesar de o Lucro crescer exponencialmente, a probabilidade de ganho é também exponencial, porém de base $(\frac{1}{2})$, ou seja, em poucas rodadas a probabilidade se aproxima de zero. Abaixo reproduzimos o gráfico para 10 rodadas.



b) Sistema Martingale – É intuitivo que o valor esperado da aposta que finalmente ganha, mesmo se tratando de probabilidade de 50% - 50% aproximadamente, é infinito. É também fácil comprovar este valor tomando a sequência do total apostado até a rodada n, a saber: (1, 3, 7, 15, …. , $2^{n-1}, \ldots$).

$E = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{8} \times 7 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(2^n - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Como o último somatório converge para 1, temos que $E = \infty$.

Outro aspecto que merece ser destacado é o valor esperado de ganho por sequência de rodadas. É também intuitivo que a resposta deve ser 1, uma vez que jogamos para obtenção de lucro unitário. É fácil comprovar este resultado.

Seja $E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \times (2^i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} (2^i - 1)$ o valor esperado de ganho por uma sequência de rodadas. Vale que:

$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \times (2^i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} (2^i - 1).$ Quando $n \to \infty$ temos

$E = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$

4.2) Sistema das Dúzias (adaptado)

Nesse sistema de aposta externa, onde a banca paga 2:1, pode ser feito um sistema progressivo de aposta mais longo do que o sistema Martingale. Ao apostar em certa dúzia, estamos cobrindo os 12 números correspondentes a mesma, isto é, a primeira dúzia cobre os números de 1 a 12, a segunda dúzia cobre os números de 13 a 24 e a terceira dúzia cobre os números de 25 a 36. A proposta deste sistema, cuja ideia é de obter lucro próximo de uma unidade, consiste em apostar quantias cujo incremento de uma rodada para outra seja pequeno quando comparado ao Martingale, até conseguir vencer. Ao vencer devemos iniciar uma nova série. Vamos primeiro apresentar o cálculo para determinação deste incremento.

Consideremos que até certa rodada tenhamos gasto uma quantia x. Desejamos saber qual o valor da quantia y a ser apostada nesta rodada, para que o lucro seja próximo da unidade*. Como iremos receber 3y, na hipótese de vencer, nosso lucro será expresso por 3y – (x + y) = 2y – x. Este último valor, deverá ser maior ou igual a 1 unidade, ou seja, 2y – x ≥ 1, finalmente teremos que o valor y de nossa aposta será expresso por $y \geq \frac{x+1}{2}$.

** Neste caso, consideramos o lucro próximo da unidade, pois em algumas rodadas não será possível obter o lucro igual a unidade, tendo em vista que a fórmula que representa o valor da aposta, denotada por* $y \geq \frac{x+1}{2}$, *depende da paridade de x. Isto quer dizer que em algumas rodadas iremos obter lucro igual a 2 unidades.*

Conclusão do sistema das Dúzias

Aqui vale o mesmo tipo de crítica feita ao sistema Martingale, com relação a quantidade infinita de apostas, contudo ao comparar os dois sistemas podemos perceber que no sistema das dúzias as apostas não crescem tão rapidamente quanto no sistema Martingale.

A tabela 4.2 mostra a evolução da aposta com o passar das rodadas. Se compararmos a Tabela 2 com a Tabela 1, percebemos que na décima rodada pelo Sistema Martingale já teriam sido investidos 1023 unidades, enquanto que no sistema das dúzias o total investido é de 88 unidades, isto é, menos de 10% do valor investido no sistema Martingale. Sem dúvida este sistema possibilita que o jogador continue no jogo por mais tempo que no sistema Martingale, e o capital investido é relativamente menor, como veremos a seguir. Por outro lado, a probabilidade de obtermos êxito neste sistema é inferior ao do sistema Martingale, deste modo, para que se faça uma comparação justa entre os sistemas, devemos considerar o peso das diferentes probabilidades. Os cassinos costumam limitar a aposta no sistema das dúzias em 300 unidades monetárias.

A probabilidade do Sistema Martingale não funcionar devido ao fator limitante de 500 unidades, começando as apostas com 1 unidade na primeira rodada, é de aproximadamente $\left(\frac{19}{37}\right)^{10} \cong 0,001275$, pois conforme podemos verificar na tabela 1, o jogador que iniciar com uma unidade terá que dispor de 512 unidades na 10ª rodada, e a chance de o mesmo não vencer nestas 10 rodadas é igual a $\underbrace{\left(\frac{19}{37}\right)\times\left(\frac{19}{37}\right)\times....\times\left(\frac{19}{37}\right)}_{10\ fatores} = \left(\frac{19}{37}\right)^{10}$. Já no sistema das dúzias a probabilidade do sistema falhar é de aproximadamente $\left(\frac{25}{37}\right)^{13} \cong 0,00612$, já que o investimento na 13ª rodada é de 301 unidades, calculado a partir da tabela 2, com o uso da fórmula $y \geq \frac{x+1}{2}$.

Concluímos, portanto, que apesar de podermos sobreviver mais rodadas no sistema das dúzias, este número é ilusório, já que é mais provável não ganharmos nestas 13 rodadas a não ganharmos nas 10 rodadas utilizando o sistema Martingale.

Tabela 4. 2

Rodada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor da Aposta	1	1	2	3	4	6	9	13	20	30
Total Investido	1	2	4	7	11	17	25	38	58	88
Valor recebido	3	3	6	9	12	18	27	39	60	90
Lucro(Se vencer)	2	1	2	2	1	1	2	1	2	2

Vale ainda notar que o sistema de apostas Martingale é, na verdade, um caso particular da generalização do sistema de apostas das dúzias, isto é, se considerarmos um sistema de apostas que paga na razão r:1, é fácil ver que o sistema de apostas Martingale é um caso particular da proposta de obter lucro unitário. Vejamos o motivo

Sejam $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ o total gasto em apostas até a enésima rodada e y o valor a ser apostado na $n+1$-ésima rodada. Como em caso de vitória o valor recebido será $(r+1)y$, devemos ter:

$(r+1)y \geq S_n + y + 1 \therefore y \geq \frac{S_n+1}{r}$. Como y é o valor apostado na n+1-ésima rodada, usaremos a notação $y = a_{n+1}$ e denotaremos S_n em uma forma mais explicita, a saber: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$. Deste modo temos que $a_{n+1} = \frac{1+\sum_{i=1}^{n} a_n}{r}$. Tomando em particular $r = 1$ recaímos no modelo de aposta que paga 1:1, ou seja, o modelo no qual se aplica Martingale. Devemos, portanto, resolver a recorrência a seguir e constatar que a solução recai no sistema Martingale.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_n \end{cases}$$

Como o valor da aposta inicial é, por definição, a nossa unidade, tomamos $a_1 = 1$. Provaremos, por indução, que a solução da recorrência acima é da forma $a_{n+1} = 2^n$, para $n \in \mathbb{N}$. Como definimos $a_1 = 1$, basta tomar $n = 1$ para verificar a validade do nosso caso base.

Caso base: $a_{1+1} = 1 + a_1 \therefore a_2 = 1 + 1 = 2$. Substituindo $n = 1$ em $a_{n+1} = 2^n$ temos também que $a_2 = 2$.

Implicação: Suponhamos que $a_n = 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$. Iremos mostrar que $a_{n+1} = 2^n$.

Como $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_n$ e $a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_{n-1}$, temos que:

$$a_{n+1} = 1 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n \therefore$$

$$a_{n+1} = a_n + a_n = 2a_n = 2 \times 2^{n-1} \rightarrow a_{n+1} = 2^n \blacksquare$$

4.3) Sistema Fibonacci

Este sistema é utilizado com o objetivo de obter duas apostas consecutivas com sucesso, em modelos que paguem 1:1. No sistema Fibonnaci para roleta, a sequência de apostas é baseada na recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \; \forall \; n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, com $F_0 = F_1 = 1$, cujos primeiros elementos são: 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ... e se aposta até vencer, momento no qual tomamos a aposta imediatamente anterior aquela em que vencemos. Caso obtenhamos êxito nesta aposta, conseguiremos lucro, como será demonstrado a seguir, no entanto o sistema não informa como devemos proceder no caso de derrota na aposta que sucede a aposta vencedora. Ao final de nossas análises sobre o sistema de Fibonacci, sugerimos, por conta própria, um modelo para continuarmos o jogo neste caso.

É um sistema fácil de usar:

- Começamos apostando uma única unidade;
- Se o jogador perder, aposta mais uma vez uma única unidade.
- Se o jogador perder mais uma vez, deve colocar duas unidades e assim por diante, de acordo com a sequência dos números de Fibonacci.

É importante observar que a dinâmica deste sistema é cobrir as duas últimas apostas. Por exemplo, se temos que apostar 5 vezes até ganhar, o total é:

- (1) - (1) - (2) - (3) - (5) + (10) = (- 2). De modo que quando ganhamos uma aposta, não reiniciamos a sequência do princípio, mas tomamos o valor da aposta imediatamente anterior a rodada vencedora, neste caso, três unidades.

Uma suposta vantagem deste sistema deve-se ao fato de que permite uma progressão de apostas mais lenta do que no Martingale.

Já sabemos, a partir da análise feita no início do capítulo, que a probabilidade de vencer neste modelo, para situação hipotética de jogarmos até vencer, é 100%. Iremos ilustrar o processo para a hipótese de vencer em certa rodada, variando da primeira a décima, na tabela 4.3.

Tabela 4. 3

Rodada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor da Aposta	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Total Investido	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143
Valor recebido	2	2	4	6	10	16	26	42	68	110
Lucro(Se vencer)	1	0	0	-1	-2	-4	-7	-12	-20	-33

Observamos ainda que ao vencer em uma rodada, que não seja a primeira, devemos dar continuidade a sequência, apostando o valor da rodada anterior. Abaixo iremos ilustrar o que ocorre ao darmos prosseguimento aos passos descritos, após vencer na rodada n.

- ✓ Rodada 2

Apostamos na próxima rodada o valor da rodada anterior, a saber, 1. Neste momento teremos investido 3 unidades (1 unidade em cada rodada) e recebemos 2 unidades na segunda e duas na terceira, em caso de ganharmos, assim nosso lucro será 4 – 3 = 1 unidade.

- ✓ Rodada 3

Apostamos 1 unidade (valor apostado na rodada 2) na próxima rodada. Teremos investido 1 + 1 + 2 + 1= 5 e receberemos 2 + 4 = 6. Nosso lucro será de 1 unidade.

- ✓ Rodada 4

Apostamos 2 unidades (valor apostado na rodada 3) na rodada 5. Investimento = 1 + 1 + 2 + 3 + 2 = 9. Valor recebido = 6 + 4 = 10. Nosso lucro será de 1 unidade.

- ✓ Rodada 10

Apostamos 34 unidades (valor apostado na rodada 9) na rodada 11. Investimento = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 34 = 177. Valor recebido = 110 + 68 = 178. Lucro = 1.

- ✓ Rodada n

Chamaremos de F_n o valor da aposta na rodada n, deste modo temos que:

S_n = Soma das apostas até a rodada n;

Se ganharmos na rodada n, as apostas serão:

$F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1} + F_n + F_{n-1}$, ou seja, o valor investido será $S_n + F_{n-1}$.

Se ganharmos na rodada n + 1 também, teremos ganhado $2F_n + 2F_{n-1}$, e nosso lucro será dado por:

$L = 2F_n + 2\,F_{n-1} - (\,S_n + F_{n-1})$.

Calculando S_n.

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2\\
F_2 &= F_4 - F_3\\
F_3 &= F_5 - F_4\\
&\;\;\vdots\\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n\\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}
\end{aligned}$$

Somando membro a membro ficamos com:

$$\underbrace{F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1} + F_n}_{S_n} = (\cancel{F_3} - F_2) + (\cancel{F_4} - \cancel{F_3}) + (\cancel{F_5} - \cancel{F_4}) + ... + (\cancel{F_{n+1}} - \cancel{F_n}) + (F_{n+2} - \cancel{F_{n+1}})$$

$$S_n = F_{n+2} - F_2$$

Mas sabemos que $F_2 = 1$, daí inferimos que:

$$S_n = F_{n+2} - 1$$

Substituindo o valor de S_n em $L = 2F_n + 2\,F_{n-1} - (\,S_n + F_{n-1})$ temos que:

$L = 2F_n + 2\,F_{n-1} – (\,F_{n+2} -1+ F_{n-1})$.

Como $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, pela própria lei de formação da sequência de Fibonacci, vale que:

$L = 2F_n + 2F_{n-1} – (F_n + F_{n+1} -1 + F_{n-1})$, e substituindo F_{n+1} por $F_{n-1} + F_n$, chegamos a

$L = 2F_n + 2F_{n-1} - (F_n + F_{n-1} +F_n – 1 + F_{n-1}) = 1$.

Demonstramos que no sistema Fibonacci, o valor do lucro será 1 unidade, contanto que o jogador consiga vencer duas vezes consecutivas. É claro que este evento também ocorre com probabilidade 1, ou seja, em algum momento da sequência de apostas o jogador irá obter duas vitórias consecutivas.

Conclusão do sistema de Fibonacci

Este modelo de aposta é mais interessante que o sistema Martingale, pois permite que não tenhamos sucesso até a 14ª rodada, já que o 14º termo da sequência de Fibonacci vale 377, e a probabilidade de este fato ocorrer é de $\left(\frac{19}{37}\right)^{14} \cong 0,00008867$, calculada de modo análogo ao sistema das dúzias. Este fato ocorre em função das apostas sofrerem um incremento menor que no sistema Martingale. Novamente, a eficiência deste sistema recai em uma situação válida em teoria, mas não na prática, uma vez que seria preciso um capital infinito para garantir o lucro.

Sugestão para continuação do sistema.

Suponhamos por exemplo que um jogador tenha obtido êxito na rodada n, porém na rodada seguinte não tenha vencido. Nosso objetivo é sugerir um método que permita ao jogador continuar com suas apostas de modo a obter o lucro almejado na sequência de Fibonacci, a saber

1 unidade. Para tal, começaremos analisando o saldo do jogador na rodada n+1. Usaremos aqui a mesma terminologia aplicada na análise do referido sistema.

Valor gasto até a enésima rodada: $S_n = F_{n+2} - 1$

Valor recebido na enésima rodada: $2F_n$

Valor gasto na rodada n+1: F_{n-1}

Chamaremos o lucro de L. Interpretaremos que quando L<0, equivale a dizer que houve prejuízo.

Temos então que L = $2F_n$ -(S_n + F_{n-1}). Note que este valor difere de 2 F_{n-1} em relação ao lucro já calculado na sequência de Fibonacci. Assim sendo, temos que L = 1 - 2 F_{n-1}. Provaremos agora a inviabilidade da existência de um sistema que se utilize apenas dos números da sequência de Fibonacci.

Suponhamos por absurdo, que seja possível continuar a sequência a partir de certo termo F_k. Deste modo, a sequência proposta tem que servir para a hipótese de as próximas duas rodadas serem vitoriosas. Consideremos então esta situação, ou seja, vencemos nas rodadas n +2 e n+3, apostando F_k e F_{k-1} respectivamente. O lucro obtido com estas duas rodadas será:

$2F_k + 2F_{k-1} - (F_k + F_{k-1}) = F_k + F_{k-1}$.

Como nosso lucro deve ser igual a 1 unidade, devemos ter

$F_k + F_{k-1} + \mathrm{L} = 1 \Rightarrow$

$F_k + F_{k-1} + 1 - 2F_{n-1} = 1 \Rightarrow$

$F_k + F_{k-1} = 2F_{n-1} \Rightarrow$

Como $F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$, a última equação equivale a

$F_{k+1} = 2F_{n-1}$.(absurdo)

Um contraexemplo que confirma a inexistência desta relação para dois termos da sequência de Fibonacci pode ser obtido facilmente tomando $F_{n-1} = 8$, pois seria preciso que F_{k+1} =16 e 16 não pertence a sequência de Fibonacci. Precisamos, portanto, encontrar um sistema que se adéque as condições iniciais de nosso problema. O sistema Martingale permite a elaboração de uma sequência adequada a esta situação. Vejamos a razão.

Como nosso lucro vale 1 - $2F_{n-1}$, basta tomar para próxima aposta o valor $2F_{n-1}$, pois:

Caso venhamos a vencer, nosso lucro nesta rodada será $2F_{n-1}$ e o lucro final irá valer um. Na hipótese de não vencermos, dobramos o valor da aposta, formando uma PG de razão 2, onde:

Termo Geral = $2^n F_{n-1}$

Valor obtido na rodada vencedora: x = $2^{n+1} F_{n-1}$

Valor investido até a rodada n: y = $2F_{n-1}$-1 + $\dfrac{2F_{n-1}(2^n - 1)}{2-1}$

Nosso lucro será expresso por:

$$x - y \;=\; 2^{n+1}F_{n-1} - (\,2\,F_{n-1}\; -1 + \;\frac{2^{n+1}F_{n-1} - 2F_{n-1}}{1}) = 1$$

4.4) Sistema Biarritz ou Makarov (Aperfeiçoado)

A aposta é feita em um número e paga 35:1. Neste sistema apostamos inicialmente 1 unidade em certo número. Se o mesmo não aparecer nas próximas 35 rodadas, então mudamos o valor da aposta para 2 unidades, de modo que se o mesmo não aparecer nas próximas 18 rodadas mudamos o valor da aposta para 3 unidades por um período de 12 rodadas e assim sucessivamente.

Vejamos a matemática por trás do sistema Makarov.

a) Como fazer o cálculo do número de rodadas em que apostaremos repetidamente certa quantia?

✓ 1 unidade

Sabemos que quando vencermos, receberemos 36 unidades. Se desejamos obter um lucro de no mínimo 1 unidade, o cálculo será o seguinte:

Chamando de x o número máximo de rodadas que devemos apostar 1 unidade, podemos calcular o valor de x pela desigualdade abaixo.

$36 - 1x \geq 1$, ou seja, x deve ser no máximo igual a 35. Isto quer dizer que se não ganharmos em 35 rodadas, devemos aumentar nossa aposta para 2 unidades.

✓ 2 unidades

Caso venhamos a vencer nesta série, iremos receber 72 unidades. Adotando a mesma terminologia para 1 unidade vem que:

72 – 2x – 35(gastos na primeira série de apostas) ≥ 1, daí concluímos que x deve ser no máximo igual a 18 rodadas. Se não consigamos vencer, devemos acrescentar 1 unidade e, portanto, apostar 3 unidades na próxima série.

- ✓ 3 unidades

Neste momento já teremos gasto 35 + 18x2 = 71 unidades, e continuaremos apostando 3 unidades por x rodadas, portanto podemos escrever que:

108 – 3x – 71 ≥ 1, donde se conclui que o valor máximo de rodadas será x = 12. E assim sucessivamente. Ilustramos na tabela 4, a evolução das apostas para as 10 primeiras séries.

Tabela 4. 4

Rodadas	1 a 35	36 a 53	54 a 65	66 a 74	75 a 81	82 a 87	88 a 92	92 a 95	96 a 99	100 a103
Valor da Aposta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Total Investido	x	35 + 2x	71 + 3x	107+4x	143+5x	178+6x	214+7x	249+8x	281+9x	317+10x
Valor recebido	36	72	108	144	180	216	252	288	324	360
Lucro(Se vencer)	36 - x	37-2x	37-3x	37-4x	37-5x	38-6x	38-7x	39-8x	43-9x	43-10x
Variação do x	1 a 35	1 a 18	1 a 12	1 a 9	1 a 7	1 a 6	1 a 5	1 a 4	1 a 4	1 a 4

Na tabela acima, x representa a rodada, contada a partir do início da sequência definida em cada coluna, na qual vencemos. Deste modo na coluna que varia de 36 a 53, por exemplo, se vencermos na rodada 36, x assumirá o valor 1, por outro lado se vencermos na rodada 53, x assumirá o valor 18.

Conclusão do Sistema Makarov:

O fator limitante para este modelo de aposta é de 50 unidades monetárias na maior parte dos cassinos. De fato, dentre os sistemas analisados neste trabalho, este é o que permite ao jogador ficar mais rodadas sem vencer, como podemos verificar na tabela 4, onde é analisado até a rodada de número 103. A contrapartida é que realmente é esperado que haja uma demora razoável para ganhar, já que a cada rodada a chance de vencermos é de $\frac{1}{37} \cong 2,7\%$, uma vez que ao apostarmos em um número, há apenas um caso favorável dentre os 37 possíveis. Portanto, novamente, seria preciso um capital ilimitado para garantir a obtenção de lucro.

4.5) Sistema Garcia

Este sistema de roleta foi concebido pelo lendário jogador espanhol Garcia, que o usou no Casino Homburg. Foi também ocasionalmente adotado por Charles Wells em Monte Carlo. Garcia era conhecido por sempre apostar no vermelho.

Como é que Garcia jogava? Garcia utilizava vários sistemas, mas o sistema que mais utilizava e recebeu o seu nome, partia do pressuposto que o cassino não ia ganhar 2 vezes seguidas.

Iniciava com um capital de 9 unidades, e apostava um terço deste (3 unidades), geralmente na cor vermelha, como a sua primeira aposta.

Em caso de perda, os restantes dois terços (6 unidades) seriam jogados na segunda aposta. Se um jogador ganha a sua primeira aposta de 3 unidades, seu capital aumenta para 9 + 3 = 12 unidades. Neste caso, a próxima aposta é de um terço do novo capital, ou seja, 4 unidades. Se essa aposta for perdida, os dois terços de 12 ou 8 unidades são a próxima aposta.

No caso de uma vitória, o novo capital é 8 + 8 = 16 unidades. A próxima aposta é de um terço do novo capital, neste caso devendo-se tomar o maior inteiro menor que $\frac{1}{3}\times 16$, ou seja, 5 unidades.

Se ganhar, o novo capital é de 16 + 5 = 21 unidades. A próxima aposta, obviamente, é de 7 unidades e assim por adiante.

Se um jogador faz uma dúzia de vitórias com esse sistema sem a ocorrência de duas derrotas consecutivas, ele pode aumentar o seu capital inicial de 9 unidades para 226 unidades ou mais.

Se acontecer de 2 derrotas consecutivas, o máximo que perdemos é o valor de 9 unidades - nem mais, nem menos. Se isso acontecer, o jogador deixa a sessão.

Como visto, esse sistema de roleta consiste em dividir o orçamento por três, e apostar um terço na primeira aposta, e no caso de uma perda, os restantes dois terços na aposta seguinte.

Para melhor analisar a ideia, devemos medir a probabilidade de vencermos neste sistema. Para terminarmos o jogo na rodada n com vitória, não podemos perder 2 vezes consecutivas. Façamos a análise a partir do diagrama de árvore. No diagrama, G representa rodadas em que ganhamos, enquanto P representa rodadas perdedoras. Assim sendo, não podemos ter 2 P`s consecutivos.

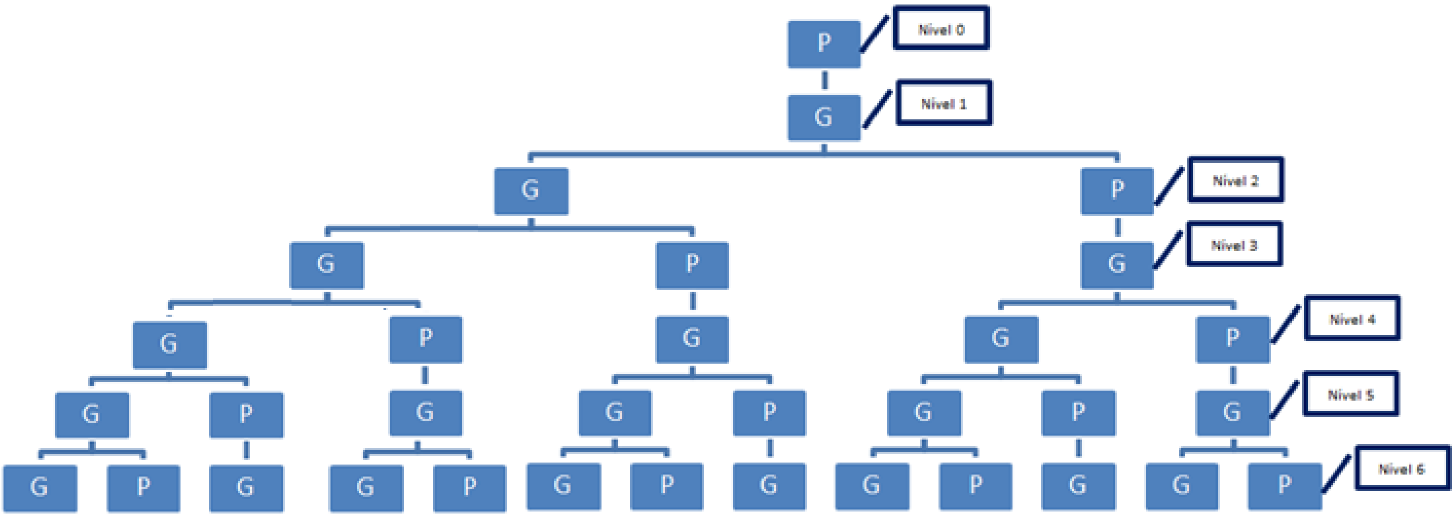


Figura4. 1

Primeiro vamos relacionar cada nível com a quantidade de casos favoráveis.

Nível 0 ➔ 1 caso

Nível 1 ➔ 1 caso

Nível 2 ➔ 2 casos

Nível 3 ➔ 3 casos

Nível 4 ➔ 5 casos

Nível 5 ➔ 8 casos

Nível 6 ➔ 13 casos

Podemos perceber que para o nível 7 serão gerados 5 casos do tipo G, pelos 5 casos do tipo P do nível 6, mais 8 casos do tipo G e 8 casos do tipo P, gerados pelos 8 casos do tipo G do nível 5, totalizando 21 casos. Percebemos pois, que a sequência formada é a de Fibonacci, onde a quantidade G de casos vencedores no nível n é igual ao termo F_{n-1} e a quantidade P de casos perdedores no nível n é igual a F_{n-2}.

É fácil perceber que a lei de formação acima vale para n = 3 e admitindo que a hipótese seja válida para um certo n natural, verificaremos que a quantidade de termos da rodada n+1 será igual a F_{n+1}.

Seja a quantidade G de vitórias igual a F_{n-1} no nível n, e a quantidade P de derrotas igual a F_{n-2}. Como cada vitória da rodada n origina 2 possibilidades para a rodada n+1, a saber P e G, e cada derrota da rodada n origina 1 possibilidade para a rodada n+1, a saber G, temos que:

$T = 2F_{n-1} + F_{n-2}$, onde T é o total de casos do nível n+1.

$T = F_{n-1} + (F_{n-1} + F_{n-2}) = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$.

Concluímos, portanto, que para hipótese de iniciarmos perdendo na primeira rodada, o número de casos favoráveis para atingirmos o nível n + 1 será F_{n+1}. Deste modo, chamando de P_1 a probabilidade de tal situação ocorrer, isto é, de jogarmos até a rodada n, inferimos que:

$$P_1 = \frac{F_n}{2^{n+1}}$$

De modo análogo, observando o diagrama a partir do nível 1, concluímos que a probabilidade P_2 de jogarmos até o nível n, na hipótese de começarmos por vitória será igual a

$$P_2 = \frac{F_n}{2^n}$$

Tomando $P = P_1 + P_2$, sendo P a probabilidade de chegarmos a rodada n, onde $n \geq 2$ temos que:

$$P = \frac{F_n}{2^{n+1}} + \frac{F_n}{2^n} = \frac{3F_n}{2^{n+1}}$$

Obs: Se analisarmos a lei de formação da sequência de Fibonacci, podemos verificar que a exponencial 2^{n+1} cresce mais rápido que o numerador, como será visto a seguir.

$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, e como $F_{n-2} < F_{n-1}$, para $n \neq 3$, segue que $F_n < F_{n-1} + F_{n-1}$, ou seja, $F_n < 2F_{n-1}$. Como o numerador, de um termo para o seguinte, não chega a dobrar nunca, e o denominador dobra sempre, cada vez mais a fração correspondente a P vai se aproximando de 0. Isto quer dizer que quanto mais avançamos de nível, mais difícil é chegarmos ao nível seguinte.

A tabela 5 nos fornece uma ideia melhor do comportamento desta probabilidade com o passar dos níveis.

Tabela4. 5

Nível	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilidade	3/4	9/16	15/32	3/8	39/128	63/256	51/256	165/1024	267/2048

Alternativamente, poderíamos usar o fato de que a razão $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ * se aproxima cada vez mais da razão áurea, a qual é menor que 2, conforme n aumenta, como justificativa para o fato de que $P = \frac{F_n}{2^{n+1}} + \frac{F_n}{2^n} = \frac{3F_n}{2^{n+1}}$ se aproxima de zero conforme avançamos nas rodadas.

* *Esta afirmativa pode ser verificada a partir da fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci, como apresentada em* (Pinto Carvalho & Morgado). $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

A “vantagem” deste sistema de roleta é que um jogador não irá perder mais de 9 unidades, mas se tiver sorte, pode ganhar uma quantia significativa de dinheiro.

Garcia jogou várias vezes sem sucesso, mas sem perder grandes quantias - bastou ganhar algumas vezes para ficar na história.

Conclusão do sistema Garcia:

A partir da tabela 5, percebemos que a probabilidade de obtermos sucesso cada vez torna-se menor. De fato Garcia teve sorte ao adotar esta estratégia e conseguir fazer fortuna, e não devemos nos esquecer de que nos dias de hoje ainda temos que contar com os limites de apostas impostos pelos cassinos, ou seja, é impossível ganhar uma quantia alta, tendo em vista que não podemos apostar mais que 500 unidades em uma única rodada.

5. O JOGO E A SALA DE AULA

Sem dúvida o conteúdo abordado ao longo deste trabalho pode causar inquietação entre os alunos de uma turma por mais de um motivo. Em especial neste capítulo nos propomos a trazer estas questões polêmicas à tona e analisar alguns pontos que vão além da matemática, de modo a fornecer subsídios para que os professores tenham argumentos sólidos caso precisem se posicionar.

5.1) O aspecto Legal

O jogo era permitido em nosso país até 1946, ocasião na qual foi proibida a prática de jogos de azar em todo território nacional pelo então Presidente Eurico Gaspar Dutra, sob a alegação de que o jogo é degradante para o ser humano (Wikipédia, 2006). Contudo, muitos destacam a influência de sua esposa, Carmela Dutra, motivada por sua forte devoção à Igreja Católica, como vemos em (Wikipédia, 2006).

Segundo a opinião do Juiz de direito Fernando Luís Gonçalves de Moraes, em (Gonçalves de Moraes, 2015), disponível em entrevista no apêndice deste trabalho, o professor não está transgredindo a lei ao falar no aspecto histórico ou até mesmo nas estratégias matemáticas. É preciso sim tomar cuidado para não fomentar a prática da atividade, hoje qualificada como ilícita, muito embora segundo o esclarecimento prestado pelo mesmo, não ocorra falta de ética ao abordar com fins didáticos o tema em questão. Cabe destacar a elucidação prestada pelo Sr. Juiz quanto ao fato da legalidade dos jogos de azar administrados pelo Estado ser oriunda do seu poder de decidir aquilo que pode ou não ser feito, não havendo razão lógica ou jurídica para se tolerar certas atividades e proibir outras. Outrossim ficou clara a necessidade de uma legislação que venha abranger o uso da Internet, uma vez que a Lei que proíbe os jogos de azar é de 1946 e, portanto, não previa que pessoas poderiam jogar na Internet. Deste modo, a lei não está sendo transgredida por aqueles que jogam valendo dinheiro na Internet e, caso o professor ache conveniente, pode ser criada uma situação hipotética de jogo Virtual.

5.2) A questão Religiosa

As religiões comumente se opõem aos jogos de azar sob as mais diversas alegações.

Silas Malafaia, em (Malafaia), diz que a orientação contra os jogos de azar se baseia na mensagem bíblica*: "As Sagradas Escrituras, porém, encorajam-nos a ficarmos longe das tentativas de enriquecimento fácil. Observe o alerta em Provérbios 13.11: 'A fazenda que procede da vaidade diminuirá, mas quem a ajunta pelo trabalho terá aumento'. O texto de Hebreus 13.5 complementa: 'Sejam vossos costumes sem avareza, contentando-vos com o que tendes; porque ele disse: Não te deixarei, nem te desampararei'".*

Podemos destacar:

- São contra ganhos fáceis;
- O benefício de um depende do prejuízo do outro. Sob o prisma econômico, não se produz riqueza, ela apenas passa de um para outro;
- Ao desmoralizar o homem este se transforma em explorador, ao pensar que seu bem estar depende da desgraça do outro;
- Ao viciar o homem em ganhos fáceis, sem qualquer esforço, estaria se fomentando a preguiça, a corrupção e a marginalidade;
- Inimizade e ódio daquele que perdeu seu dinheiro;
- Arruinar lares, pois riquezas se perdem da noite para o dia.

É evidente que um professor, não pode cair na armadilha de discutir se estes pontos, assim como outros que possam vir a surgir, são corretos ou não. Ao abordar qualquer dos problemas expostos nesta monografia, o professor deve se ater a explicar a parte matemática, seja na forma de problema ou por meio de uma abordagem direta e, se assim desejar, relatar as histórias.

5.3) A questão ética

Segundo o dicionário Aurélio, a ética é o conjunto de regras de conduta. É claro que povos diferentes muitas vezes terão percepções distintas com relação a este conjunto de regras. Neste ponto, cabe destacarmos que este conjunto de regras não tem relação obrigatória com a legalidade das ações de um indivíduo. Por exemplo: Ao transitar com um farol quebrado, o motorista está transgredindo a lei de trânsito, no entanto sua ética continua inabalada.

É preciso perceber que enquanto professor, não se deve estimular o aluno a jogar em um casino clandestino, pois desta forma estaríamos indo contrariamente a constituição federal e a LDB, como será exposto em 5.4.

5.4) A perspectiva da LDB e do PCN

Segundo a LDB em seu art. 3º, o ensino será ministrado com base nos seguintes princípios:

II – Liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber.

A liberdade de ensinar, o pensamento e o saber, são claramente pontos nos quais está embasada a nossa LDB, portanto, inicialmente, não há divergência com relação a abordagem do tema central deste trabalho em sala de aula.

Já em seu art. 35º, o ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

III – O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.

Este parágrafo também corrobora com a proposta de abordar o jogo de azar em um contexto histórico e matemático, uma vez que ao se propor desvendar a matemática por trás das histórias contadas neste trabalho, o aluno estará desenvolvendo a sua autonomia intelectual e pensamento crítico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) estão em perfeita consonância com a abordagem dos jogos de azar, desde que com a finalidade de desenvolver a capacidade de raciocínio, pensamento crítico e outras qualidades. Abaixo destacamos aquelas que nos chamaram mais a atenção:

- Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamentos e aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.
- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- Desenvolver a capacidade de usar a matemática na interpretação e intervenção no real;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento;

- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes

Deste modo salientamos que ao abordar qualquer uma das estratégias estudadas no capítulo 4 deste trabalho, é possível direcionar o aluno a partir de uma atividade dirigida, de modo a estimular sua curiosidade, criatividade, raciocínio e demais qualidades descritas nos tópicos acima.

5.5) Conclusões

É claro que a abordagem do tema jogos de azar, mesmo que seguindo o enfoque matemático, pode trazer inúmeras questões polêmicas em sala de aula. Recomendamos que o professor opte pela discrição sem levantar todas as polêmicas oriundas deste tema e, caso ainda assim certos temas venham à tona, saiba fundamentar suas colocações, sem, contudo levantar a percepção pessoal, mas sim descrevendo a lei se for o caso.

Com relação à perspectiva religiosa, é importante procurar não debater e, se mesmo evitando este tema vier à tona, procurar ser diplomático, sem manifestar seu credo nem tão pouco fazer colocações pejorativas, a fim de evitar possíveis problemas. Um argumento plausível é que o saber científico não leva em conta crenças nem etnia e ao analisar tais situações, estamos preocupados com o conteúdo matemático, deixando as questões religiosas e morais para a filosofia.

Por fim, o tema inserido com o propósito de desenvolver o raciocínio do aluno e a capacidade de resolver problemas, aplicar conhecimento matemático em situações reais, entre outros, está em perfeita harmonia com o PCN, o que corrobora com a percepção de que não há motivos para que algumas das estratégias aqui apresentadas não sejam abordadas em sala de aula, mesmo aquelas em que os alunos tenham uma crença religiosa que os impeça de praticar o jogo com fins lucrativos.

5.6) Atividade Sugerida

- Use uma moeda para simular a cor sorteada na roleta e solicite que os alunos utilizem, experimentalmente, o sistema Matingale;
- Para simular as fichas, podemos estimular a criação de um sistema de símbolos, como faziam os antigos: Feijão representando a centena, arroz a dezena e milho a unidade;
- Coloque o valor limitante da aposta em 500 unidades;
- Solicite que eles anotarem o valor total investido em cada sequência de lançamentos, assim como o número de lançamentos, o valor recebido e o lucro obtido ;
- Peça para eles justificarem matematicamente o fato de o lucro ser constante (caso se ganhe até a nona rodada);
- Após verificar junto aos grupos o que está ocorrendo, faça a análise matemática no quadro;

Esta atividade foi aplicada por mim em 8 turmas de 2º ano do ensino médio. Foi interessante notar o entusiasmo dos alunos ao reproduzir o sistema. Além da diversão proporcionada, eles perceberam de forma concreta a estratégia proposta no sistema Martingale, assim como identificaram o termo geral da PG, a soma dos termos da PG e a probabilidade de ganho. Em todas as turmas os alunos levantaram a questão de que basta uma “maré de azar” para botar todo lucro a perder e, o que é pior, é possível ainda ficar com um enorme prejuízo, apesar da baixa probabilidade de ocorrer esta situação. Perceberam ainda que ganhasse muito lentamente pouco dinheiro. Muitos chegaram a vivenciar a experiência de ter que apostar 128 ou 256 unidades para lucrar uma única unidade, apesar de não ter havido nenhum grupo que tenha tido prejuízo. É importante destacar para os alunos que, como visto em 3.5, as histórias de perdas não são compartilhadas nos sites que tentam atrair novos jogadores com a esperança de enriquecimento ao contar as histórias famosas, e até mesmo a ensinar os métodos. Certamente os casos de perda são em muito maior quantidade que os de ganho. A riqueza de tudo aquilo que pode ser explorado em sala de aula é enorme.

6.CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dos cinco sistemas analisados, podemos perceber que dadas as limitações atuais impostas pelos cassinos, o único que nos permite uma estratégia duradoura, é o sistema Makarov. Neste sistema, a probabilidade de vencer em até 100 rodadas é de $1-\left(\frac{36}{37}\right)^{100} \cong 93,5\%$. Como podemos verificar na tabela 4, se forem necessárias 100 rodadas para ganhar, devemos apostar apenas 10 unidades na aposta de número 100. Apesar desta quantia grande de rodadas, se compararmos com o sistema Martingale ou com o Fibonacci, verificamos que a probabilidade de sucesso nestes dois sistemas é ainda maior, sendo 99,902% no Martingale e 99,99% no Fibonacci, probabilidade complementar à probabilidade de não vencer, calculada em cada sistema.

Todos os sistemas apresentados têm a característica de ganhar pouco com alta probabilidade e ter perdas grandes com baixa probabilidade. Se o jogo é favorável à banca, o que sempre acontece, o valor esperado de ganho, sob regras que limitam a aposta máxima, é sempre negativo, como pode ser visto em (Lester & J. Savage, 1976). Por outro lado, quando não há limitação no número de apostas, embora as estratégias apresentadas permitam assegurar ganho positivo, o valor esperado da quantia a ser investida é infinito.

Nossa conclusão é que todos os sistemas estão fadados ao fracasso e que os casos de sucesso aqui analisados, são simplesmente alguns dentre muitos de fracasso, os quais não costumam ser contados. É importante, portanto, que não nos deixemos impressionar pelos poucos casos de sucesso apontados em sites ou livros. A partir das análises feitas, constatamos que os modelos oferecem diferentes estratégias, em alguns a aposta evolui de forma mais lenta, em outros a chance de ganho é maior. Contudo, todas elas estão fadadas ao fracasso.

Podemos citar algumas das principais causas que impedem, nos dias de hoje, que certos métodos continuem a ser aplicados com perspectiva de ganhos significativos.

- Limite mínimo e máximo de aposta. Impede métodos que funcionem a partir da ideia de dobrar o valor da aposta.
- O zero e o duplo zero (00), que aumentam a vantagem do Cassino.
- Série com sequência de perdas. A maior parte dos métodos que vimos implica em apostas cada vez maiores na hipótese de ocorrer uma sequência de perdas, assim sendo, o dinheiro perdido em uma série dessas supera o valor recebido em várias sequências vitoriosas.

7. APÊNDICE

Entrevista realizada com Fernando Luís Gonçalves de Moraes, Juiz de Direito.

A LEI E OS JOGOS DE AZAR

1) Quando um professor ensina com enfoque matemático e histórico estratégias de jogos de azar ele está agindo de forma ilegal? E de forma antiética?

Embora os jogos de azar sejam proibidos em todo o território nacional não vislumbro ilegalidade na discussão, para fins didáticos, de aspectos históricos ou mesmo de estratégias relacionadas com o ensino da matemática. Com efeito, a ligação entre a matemática e os jogos de uma maneira geral sempre foi observada ao longo dos séculos, fazendo parte da própria natureza humana.

O homem joga para se divertir, para desenvolver sua musculatura, para competir ou mesmo por mera cobiça sendo que, diante do interesse que desperta e sempre despertou, se mostra um importante chamariz para o ensino da matemática.
Há de se notar que a criminalização dos jogos de azar se encontra na vetusta Lei de Contravenções Penais - Decreto Lei nº 3.688 de 03 de Outubro de 1941, em seu artigo 50 que dispõe:

Art. 50. Estabelecer ou explorar jogo de azar em lugar público ou acessível ao público, mediante o pagamento de entrada ou sem ele: (Vide Decreto-Lei nº 4.866, de 23.10.1942) (Vide Decreto-Lei 9.215, de 30.4.1946)
Pena - prisão simples, de três meses a um ano, e multa, de dois a quinze contos de réis, estendendo-se os efeitos da condenação à perda dos moveis e objetos de decoração do local.

§ 1º A pena é aumentada de um terço, se existe entre os empregados ou participa do jogo pessoa menor de dezoito anos.

§ 2º Incorre na pena de multa, de duzentos mil réis a dois contos de réis, quem é encontrado a participar do jogo, como ponteiro ou apostador.

§ 3º Consideram-se, jogos de azar:
a) o jogo em que o ganho e a perda dependem exclusiva ou principalmente da sorte;
b) as apostas sobre corrida de cavalos fora de hipódromo ou de local onde sejam autorizadas;

§ 4º Equiparam-se, para os efeitos penais, a lugar acessível ao público:
a) a casa particular em que se realizam jogos de azar, quando deles habitualmente participam pessoas que não sejam da família de quem a ocupa;
b) o hotel ou casa de habitação coletiva, a cujos hóspedes e moradores se proporciona jogo de azar;
c) as apostas sobre qualquer outra competição esportiva.
d) o estabelecimento destinado à exploração de jogo de azar, ainda que se dissimule esse destino.

Pela leitura do dispositivo acima se percebe que o mero fato de tecer considerações históricas ou mesmo de apresentar estratégias sobre jogos de azar, sem fomentar ou incentivar a atividade ilícita, mas apenas com objetivo de pano de fundo para o ensino, não configura crime.

Também não verifico qualquer óbice ético ao ensino na forma proposta.

Como sabido, a palavra ética é derivada do grego, e significa aquilo que pertence ao caráter. Deve ser frisado que embora a ética possa ser confundida com lei o certo é que diferente desta, nenhum indivíduo pode ser compelido, pelo Estado ou por outros indivíduos a cumprir as normas éticas, nem sofrer qualquer sanção pela desobediência a estas.
Existem códigos de ética profissional, que indicam como um indivíduo deve se comportar no âmbito da sua profissão.

Ora, da mesma forma que não vislumbro ilegalidade na abordagem matemática dos jogos também não verifico nenhuma infração ética desde que, como já mencionado, seja voltado para fins essencialmente didáticos, sem incentivar ou fomentar a ilicitude.

2) Qual a argumentação legal do motivo pelo qual os jogos de azar que estão sob a supervisão da União, como a Mega-Sena por exemplo, são legais, enquanto jogos de Roleta, com muito mais chance de êxito para o jogador, são ilegais?

Esta é uma questão muito controversa sendo que mesmo no Judiciário ou no Legislativo inexiste consenso sobre a matéria. Tanto é assim que o senador Ciro Nogueira (PP-PI) apresentou projeto que legaliza o jogo no Brasil (PLS 186/2014). A proposta permite a exploração de jogo do bicho, cassinos, bingos e apostas on-line em todo o território nacional. Em tal projeto o congressista chega a dizer que a “demagogia” deve ser deixada de lado diante dos efeitos econômicos positivos da liberação. Pode ser, portanto, que num futuro breve voltemos a ter os jogos liberados em todo o território nacional.

De toda sorte, o motivo pelo qual o Estado explora uma série de atividades que podem ser consideradas “jogos de azar”, eis que baseadas apenas na “sorte”, sem que isso seja considerado ilegal é uma só – ELE PODE. É o Estado em sentido amplo que faz as leis e decide o que pode e o que não pode ser feito. Assim, a opção pela liberação de alguns jogos e não de outros é apenas política e econômica, talvez histórica, não havendo uma razão lógica ou jurídica para se tolerar determinadas atividades e se proibir outras.

Os mais ardorosos defensores da proibição do jogos de azar se apegam a razões como a lavagem de dinheiro que essa atividade possibilita, a formação de grupos ou máfias, a vinculação do jogo com outras práticas ilícitas (drogas e armas), a vitimização de pessoas hipossuficientes, o vício, a ruína e a desestrutura familiar. Para estes, a proibição do jogo de azar serviria para evitar que acontecessem tais situações. Todavia, em pleno século 21 e com tantas possibilidades de jogos e apostas, inclusive por meio eletrônico, tenho que a legislação deve ser revista e atualizada.

3) A ilegalidade dos cassinos foi decretada em 03 de outubro de 1941. Por se tratar de uma lei antiga, não se previu nada quanto aos jogos de azar, valendo dinheiro, na Internet. Como a justiça encara hoje este aspecto?

Inicialmente deve ser dito que a proibição de jogos de azar foi instituída no Governo de Eurico Gaspar Dutra através de Decreto-Lei n°. 9.215/46 que, em seu art. 1º, determinava a restauração, em todo o território nacional, da vigência do art. 50 e seus parágrafos da Lei de Contravenções Penais (Decreto-Lei n°. 3.688/41 - do Governo de Getúlio Vargas).

Assim sendo é patente que a legislação vigente sobre jogos de azar não aborda a questão da internet, gerando várias indagações.

Note-se que a controvérsia ainda é pouco debatida, apesar do grande número de usuários brasileiros em estabelecimentos virtuais de jogos. Apesar de vedada a existência de cassinos no Brasil, o internauta brasileiro consegue participar de apostas virtuais utilizando o seu cartão de crédito internacional. São extremamente raras as normas que tratam de assuntos relacionados à internet, mais ainda, então, a jogos de azar. Nenhuma jurisprudência sobre o assunto foi encontrada.

Apesar de ainda não existir uma resposta concreta para as indagações feitas no início deste tema, há de se entender quais são os conflitos existentes que dificultam a aplicação de sanção estatal. A partir do momento em que uma conduta ilícita virtual é notada pelo Estado, tem-se a dúvida gerada sobre “onde” tal conduta ocorreu. A questão espacial é um dos principais problemas relacionados ao assunto, pois na maioria das vezes, usuário, comerciante virtual, computadores e servidores utilizados para a troca de informações estão localizados em diferentes jurisdições, muitas vezes em países diversos. Além disso, a Internet possibilita a ocultação da identidade e da localização do internauta, o que prejudica as investigações no caso concreto.

A falta de normatização dos jogos de azar na internet não só prejudica os jogadores e suas famílias, por conta do vício envolvido, mas também prejudica a economia – ao escoar finanças do país sem tributação –, servindo como meio de lavagem de dinheiro. É necessária e urgente a produção de uma legislação federal para manter em sintonia as novas tecnologias, o controle das atividades criminosas virtuais e a liberdade dos cidadãos brasileiros. Por outro lado, pode ser que este panorama seja alterado podendo os jogos de azar pela internet serem proibidos em todo país. Pelo texto (PLS 570/2011) estabelecer, explorar ou permitir, por meio da rede internacional de computadores, bingo, aposta ou qualquer tipo de jogo de azar não autorizado, independentemente de pagamento de prêmio, poderá resultar em pena de dois a cinco anos de prisão, além de multa. A proposta altera o Decreto 9.215/1946, que proíbe a prática ou exploração de jogos de azar em todo o território nacional, para incluir no rol dos ilícitos o mesmo crime praticado em rede de computador.

8. Bibliografia

(s.d.). Acesso em 26 de dezembro de 2014, disponível em http://www.jogarroleta.com.br/apostas-famosas-na-roleta.htm

Wikipédia. (03 de Março de 2006). Acesso em 20 de Fevereiro de 2015, disponível em Site da Wikipédia: http://pt.wikipedia.org/wiki/Proibi%C3%A7%C3%A3o_dos_jogos_de_azar_no_Brasil

Caminha Muniz Neto, A. (2012). *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 Combinatória.* Rio de Janeiro: SBM.

Casino Portugal. (s.d.). Acesso em 02 de Dezembro de 2014, disponível em Site de Casino Portugal: http://casinoportugal.org/livros-roleta/

De Oliveira Morgado, A. C., Bosco Pitombeira de Carvalho, J., Pinto Carvalho, P. C., & Fernadez, P. (2006). *Análise Combinatória e Probabilidade* (8ª ed.). Rio de Janeiro, RJ, Brasil: SBM.

Gerolamo, C. (1633). *Liber de Ludo Aleae.* (S. H. Gould, Trad.)

Gonçalves de Moraes, F. L. (14 de Fevereiro de 2015). A Lei e os Jogos de Azar. (M. Monte de Oliveira Alves, Entrevistador)

GSB Brasil. (s.d.). Acesso em 02 de 12 de 2014, disponível em Site da GSB Brasil: http://gsbbrasil.foro.bz/t488-thomas-garcia-famosas-historias-da-roleta

Leite Berger Filho, R., Romero Simões Pereira, A., & Maia, E. M. (s.d.). PCN. *Parâmetros Curriculares Nacionais*.

Lester, E. D., & J. Savage, L. (1976). *Inequalities for Stochastic Processes: How to Gamble If You Must.* Dover Publications .

Malafaia, S. (s.d.). *http://noticias.gospelmais.com.br/*. Acesso em 07 de 04 de 2015, disponível em noticias gospel mais: http://noticias.gospelmais.com.br/pastor-silas-malafaia-jogo-azar-nao-segue-jesus-60570.html

Moraes, F. L. (14 de Fevereiro de 2015). A Lei e os jogos de azar. (M. Monte de Oliveira Alves, Entrevistador)

Morgado, A. C., & Pinto Carvalho, P. C. (2013). *Matemática Discreta.* Rio de Janiro: SBM.

Ore, O. (1953). *The Gambling scholar.* New Jersey: Princeton.

Pinto Carvalho, P. C., & Morgado, A. C. (s.d.). *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro: SBM.

Poker.TJ. (s.d.). Acesso em 02 de Dezembro de 2014, disponível em Gambling Guide: http://www.gambling-guide.poker.tj/variation-of-cross-out.html

Roulette Theory and Life. (s.d.). Acesso em 02 de Dezembro de 2014, disponível em Site de Loannis Kavouras: www.roulette30.com/2010/07/gonzalo-garcia-pelayo-story.html

Smith, D. (1959). *Source of mathematics.* New York.

Souza, P. R. (20 de dezembro de 1996). LDB. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília, Brasil.

Souza, P. R. (20 de DEZEMBRO de 1996). LDB. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília, Brasil.

Thomas A Bass. (s.d.). Acesso em 02 de dezembro de 2014, disponível em Site de Thomas A. Bass: www.thomasbass.com/the_eudaemonic_pie_1360.htm

Wikipedia. (s.d.). Acesso em 2014 de 12 de 02, disponível em Site da wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Jagger