



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**JOSÉ ADRIANO DOS SANTOS OLIVEIRA**

**SOBRE SEÇÕES CÔNICAS**

**JUAZEIRO DO NORTE**

**2015**

**JOSÉ ADRIANO DOS SANTOS OLIVEIRA**

**SOBRE SEÇÕES CÔNICAS**

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maria Silvana Alcântara Costa

JUAZEIRO DO NORTE

2015

JOSÉ ADRIANO DOS SANTOS OLIVEIRA

SOBRE SEÇÕES CÔNICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 18 / 06 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Maria Silvana A. Costa

Prof. Dr. Maria Silvana Alcântara Costa (Orientador)

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Plácido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade

Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

O47s Oliveira, José Adriano dos Santos  
Sobre seções cônicas / José Adriano dos Santos Oliveira . – 2015.  
146 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2015.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.

1. Seções cônicas. 2. Cone circular. 3. Superfícies quadráticas. 4. Geometria. I. Título.

Dedico este trabalho à minha esposa, Joelma de Sousa, e a meus dois filhos amados, Adriano Filho e Brenda Aryela.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder oportunidade de batalhar por aquilo que almejo.

A meus pais, Francisca Maria e José Francisco, que são os principais responsáveis pela minha formação como pessoa.

À minha esposa, pelo grande apoio, que me fez tão forte, compreensão, em tantos momentos, e, principalmente, paciência que tivera comigo durante todo o período de curso.

A meus dois irmãos e a alguns dos meus amigos da escola CERE que agiram com intenção de me ajudar de alguma forma durante todo o período em que estive no curso.

A meus colegas da turma de mestrado, pelas reflexões críticas e sugestões recebidas, em particular meu amigo, de longa data, Luiz Efigênio, pelas muitas vezes que compartilhamos conhecimentos durante todo o período em que estivemos cursando o mestrado.

À professora Silvana, primeiramente, pela sugestão do tema, e depois, por todo apoio, incentivo e orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Plácido Andrade e Francisco Braga.

A todos os professores que contribuíram direta e/ou indiretamente para a conclusão deste curso e deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro dado durante todo o período de curso.

"Quem entende Arquimedes e Apolônio, admirará menos as realizações dos homens mais célebres de épocas posteriores." (Leibniz)

## RESUMO

O estudo realizado nesta dissertação, busca apresentar as secções cônicas, dando ênfase a uma abordagem por meio de uma geometria sintética e elementar, onde o trabalho é desenvolvido da seguinte forma: inicia-se com uma abordagem histórica, assim como a sua relação com o cone circular; em seguida, é feito um estudo sintético sobre as cônicas, exclusivamente, no plano; apresenta-se algumas superfícies quádricas; a equação geral do segundo grau é apresentada como uma representação algébrica de uma cônica e são mostradas diversas situações, onde as cônicas surgem de forma, curiosamente, natural, além das inúmeras aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento.

**Palavras-chave:** Secções cônicas. Cone circular. Plano. Superfícies quádricas. Equação geral do segundo grau. Aplicações.

## ABSTRACT

The study in this dissertation, seeks to present the conic sections, emphasizing an approach by means of a synthetic and elementary geometry, where the work is carried out as follows: begins with a historical approach, as well as their relationship with the circular cone; then it's done a synthetic study on the conical exclusively on the plan; It presents some quadric surfaces; the general equation of the second degree is presented as an algebraic representation of a conic and are shown several situations where the conical arise so, curiously, natural, in addition to numerous practical applications in various fields of knowledge.

**Keywords:** Conic sections. Circular cone. Plan. Quadric surfaces. General equation of the second degree. Applications.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação dos meios proporcionais de $a$ e $b$ . . . . .	18
Figura 2 – Intersecções Propostas por Menaecmus . . . . .	18
Figura 3 – Cone circular reto retângulo . . . . .	19
Figura 4 – Cones de Menaecmus . . . . .	21
Figura 5 – Segmento de parábola . . . . .	22
Figura 6 – Cone de Apolônio . . . . .	23
Figura 7 – Representação da parábola no cone de Apolônio. . . . .	24
Figura 8 – Secção de um cone por um plano paralelo ao plano de sua base . . .	25
Figura 9 – Cone seccionado por um plano não paralelo ao plano de sua base . .	25
Figura 10 – Circunferência que passa por $P, Q, R$ e $L$ . . . . .	26
Figura 11 – Parábola segundo Apolônio . . . . .	27
Figura 12 – Elipse segundo Apolônio . . . . .	29
Figura 13 – Hipérbole segundo Apolônio . . . . .	31
Figura 14 – Secção cônica segundo Pappus . . . . .	33
Figura 15 – Parábola segundo Dandelin . . . . .	38
Figura 16 – Hipérbole segundo Dandelin . . . . .	39
Figura 17 – Elipse segundo Dandelin . . . . .	39
Figura 18 – Casos degenerados . . . . .	40
Figura 19 – Parábola no cone de Dandelin . . . . .	41
Figura 20 – Hipérbole no cone de Dandelin . . . . .	42
Figura 21 – Elipse no cone de Dandelin . . . . .	44
Figura 22 – Parábola de foco $F$ e diretriz $d$ . . . . .	47
Figura 23 – Simetria em relação ao eixo da parábola $\mathbf{P}$ . . . . .	47
Figura 24 – Pontos $P_1$ e $P_2$ , respectivos pontos interior e exterior à parábola $\mathbf{P}$ . .	48
Figura 25 – Retas contidas num plano que contém uma parábola . . . . .	49
Figura 26 – Tangente $t$ a uma parábola no ponto $P$ . . . . .	49
Figura 27 – Mediatriz $t$ a $FP'$ . . . . .	50
Figura 28 – Hipérbole de foco $F_1$ , diretriz $d_1$ , excentricidade $e = 2$ . . . . .	51
Figura 29 – Reta $e_1$ que passa pelo foco $F_1$ da hipérbole $\mathbf{H}$ . . . . .	52
Figura 30 – Hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$ , diretrizes $d_1$ e $d_2$ e excentricidade $e = 2$ . .	52
Figura 31 – Hipérbole $\mathbf{H}$ como união dos ramos $\mathbf{R}_1$ com $\mathbf{R}_2$ . . . . .	53
Figura 32 – Retas secantes a uma hipérbole . . . . .	53
Figura 33 – Triângulos formados com o centro e vértices de uma hipérbole. . . .	54
Figura 34 – $a_1$ e $a_2$ são as assíntotas da hipérbole. . . . .	54
Figura 35 – Distâncias vértice, diretriz e foco da hipérbole . . . . .	55
Figura 36 – Distâncias entre diretrizes e vértices da hipérbole . . . . .	56

Figura 37 – Tangente à hipérbole . . . . .	57
Figura 38 – Um ponto $P$ pertencente a uma hipérbole . . . . .	58
Figura 39 – Hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$ e vértices $V_1$ e $V_2$ . . . . .	60
Figura 40 – Posição de um ponto $P$ em relação a uma hipérbole . . . . .	61
Figura 41 – Simetrias da hipérbole em relação a reta focal . . . . .	64
Figura 42 – Simetrias da hipérbole em relação a reta não focal . . . . .	65
Figura 43 – Simetrias da hipérbole em relação ao seu centro . . . . .	66
Figura 44 – Elipse $E$ de foco $F_1$ , diretriz $d_1$ e excentricidade $e$ . . . . .	66
Figura 45 – Elipse $E$ de focos $F_1$ e $F_2$ e diretrizes $d_1$ e $d_2$ . . . . .	67
Figura 46 – Elipse de focos $F_i$ e vértices $V_i$ e $W_j$ . . . . .	67
Figura 47 – Reta tangente à uma elipse. . . . .	68
Figura 48 – Tangentes sobre os vértices de uma elipse. . . . .	69
Figura 49 – $x, a$ e $c$ são as respectivas distâncias entre o centro e as diretrizes, os focos e os vértices $V_1$ e $V_2$ . . . . .	69
Figura 50 – Variação da forma da elipse em função do valor da excentricidade. . . . .	71
Figura 51 – Relação entre a distância dos focos a um ponto $P$ e a distância de $P$ às diretrizes. . . . .	72
Figura 52 – Distância de focos a um ponto da elipse. . . . .	73
Figura 53 – Teorema de Pitágoras na elipse. . . . .	73
Figura 54 – Posição de um ponto em relação a uma elipse . . . . .	74
Figura 55 – Simetria na Elipse . . . . .	75
Figura 56 – Cone gerado pela rotação de uma reta em torno de seu eixo. . . . .	76
Figura 57 – Cilindro parabólico . . . . .	77
Figura 58 – Cilindro elíptico . . . . .	77
Figura 59 – Cilindro hiperbólico . . . . .	78
Figura 60 – Parabolóide elíptico . . . . .	78
Figura 61 – Parabolóide de revolução . . . . .	79
Figura 62 – Parabolóides Hiperbólicos . . . . .	80
Figura 63 – Paraolóide gerado pelo deslocamento de uma reta . . . . .	80
Figura 64 – Hiperbolóide de uma folha . . . . .	81
Figura 65 – Hiperlóide gerado pelo descolamento de uma reta . . . . .	81
Figura 66 – Hiperbolóide de duas folhas: secção por um plano paralelo ao eixo e secção por um plano perpendicular ao eixo. . . . .	82
Figura 67 – Hiperbolóide de revolução . . . . .	82
Figura 68 – Elipsóide seccionada por um plano paralelo ao seu eixo. . . . .	83
Figura 69 – Elipsóide seccionada por um plano perpendicular ao seu eixo. . . . .	83
Figura 70 – Elipsóide de revolução. . . . .	84
Figura 71 – Ângulo entre a curva $C$ e a reta $r$ . . . . .	84
Figura 72 – Princípio de reflexão . . . . .	85

Figura 73 – Reta $t$ tangenciando a parábola no vértice da mesma. . . . .	86
Figura 74 – Reta tangente não paralela à diretriz. . . . .	86
Figura 75 – Incidência e reflexão na parábola . . . . .	87
Figura 76 – Propriedade refletora da parábola. . . . .	87
Figura 77 – Reta $t$ bissetriz de $F_1V_1F_2$ . . . . .	88
Figura 78 – Reta Bissetriz ao ângulo $F_1PF_2$ . . . . .	89
Figura 79 – Intersecção das retas $F_1P$ e $F_2P$ com a tangente em $P$ . . . . .	90
Figura 80 – Propriedade refletora da hipérbole . . . . .	90
Figura 81 – A reta bissetriz em $P$ tangencia a elipse . . . . .	91
Figura 82 – Retas $F_1P$ e $F_2P$ cruzando-se em $P$ e formando com a tangente em $P$ ângulos iguais. . . . .	92
Figura 83 – Ondas passando por $F_2$ e sendo refletidas para $F_1$ após a incidência com a elipse. . . . .	93
Figura 84 – Representação do ponto $P = (2, 3)$ , no plano cartesiano . . . . .	94
Figura 85 – Distância entre $P_1$ e $P_2$ . . . . .	95
Figura 86 – Representação de duas retas no plano cartesiano. . . . .	95
Figura 87 – Representação dos eixos $OXY$ e $O'X'Y'$ . . . . .	96
Figura 88 – Parábola no plano cartesiano com o eixo sobre $OX$ . . . . .	97
Figura 89 – Parábola no plano cartesiano sobre o eixo $OY$ . . . . .	98
Figura 90 – Quadrilátero $AP_1P_2B$ desenhado sobre a parábola . . . . .	99
Figura 91 – Triângulo $AP_1C$ desenhado sobre a parábola. . . . .	99
Figura 92 – Parábola transladada com eixo sobre $O'X'$ . . . . .	100
Figura 93 – Parábola transladada com eixo sobre $O'Y'$ . . . . .	101
Figura 94 – Hipérbole com eixo focal sobre $OX$ . . . . .	102
Figura 95 – hipérbole com retângulo de base . . . . .	104
Figura 96 – Hipérbole com eixo focal em $OY$ . . . . .	105
Figura 97 – Hipérbole translada com eixo focal em $O'X'$ . . . . .	106
Figura 98 – Hipérbole translada com eixo focal sobre $O'Y'$ . . . . .	107
Figura 99 – Elipse com reta focal sobre $OX$ . . . . .	108
Figura 100–Elipse com reta focal sobre $OY$ . . . . .	109
Figura 101–Elipse com o eixo focal sobre o eixo $O'X'$ . . . . .	110
Figura 102–Elipse com reta focal sobre o eixo $O'Y'$ . . . . .	111
Figura 103–Antena parabólica . . . . .	114
Figura 104–Rádiatelescópios . . . . .	114
Figura 105–Fornos solar . . . . .	115
Figura 106–Coletor solar de Odeillo . . . . .	116
Figura 107–Conjunto de coletores solar em forma de cilindro parabólicos . . . . .	116
Figura 108–Projetores . . . . .	117
Figura 109–Balde de Newton . . . . .	118

Figura 110–Arcos parabólicos . . . . .	119
Figura 111–Arcos parabólicos em construções civis . . . . .	119
Figura 112–Catenária formada pela suspensão de uma corrente por dois hastes .	120
Figura 113–Parábola e Catenária (Curva mais aberta) . . . . .	120
Figura 114–Definição de funções hiperbólicas em analogia às funções trigonômicas. . . . .	121
Figura 115–Pontes pênséis. . . . .	122
Figura 116–Estrutura em forma de parabolóide hiperbólico . . . . .	122
Figura 117–Lançamento de um projétil $P$ . . . . .	123
Figura 118–Região de segurança. . . . .	124
Figura 119–Elipse inesperada. . . . .	124
Figura 120–Bilhar Parabólico . . . . .	125
Figura 121–Mirascope . . . . .	126
Figura 122–Ondas emitidas de $F_1$ , foco de $P_1$ para $P_2$ . . . . .	127
Figura 123–Esquema do funcionamento dos telescópios . . . . .	128
Figura 124–As órbitas dos cometas . . . . .	129
Figura 125–Hipérbolas . . . . .	130
Figura 126–Sistema de navegação . . . . .	131
Figura 127–Estruturas com forma de hiperbolóide de uma folha. . . . .	132
Figura 128–Cone de Mach . . . . .	133
Figura 129–Bilhar hiperbólico . . . . .	134
Figura 130–A posição do Sol concide com o foco $F_1$ da elipse $E$ que define a órbita do planeta $P$ . . . . .	135
Figura 131–Tratamento odontológico . . . . .	136
Figura 132–Tratamento do cálculo renal. . . . .	137
Figura 133–Equipamento usado para fazer radioterapia . . . . .	137
Figura 134–Galeria de sussurros . . . . .	138
Figura 135–Engrenagens elípticas . . . . .	139
Figura 136–Bilhar elíptico . . . . .	140

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
2	DA DESCOBERTA A DANDELIN . . . . .	17
2.1	Os Três Problemas Clássicos . . . . .	17
2.2	Menaecmus (380-320 a.C.) . . . . .	17
2.2.1	Os cones de Menaecmus . . . . .	19
2.3	Aristeu (370-300 a.C.) e Euclides (330-270 a.C, aproximadamente) . .	21
2.4	Diocles (240-190 a.C.) . . . . .	21
2.5	Arquimedes (287-212 a.C.) . . . . .	21
2.6	Apolônio (262-190 a.C) . . . . .	22
2.6.1	A obra de Apolônio . . . . .	22
2.6.2	A relação característica das secções cônicas segundo Apolônio . . .	24
2.6.2.1	Na parábola . . . . .	27
2.6.2.2	Na elipse . . . . .	29
2.6.2.3	Na hipérbole . . . . .	31
2.7	Papus (290-350) . . . . .	32
2.8	Sereneus . . . . .	34
2.9	Os Árabes . . . . .	34
2.10	Johannes Werner e Maurolico . . . . .	35
2.11	Copérnico (1473 - 1543) . . . . .	35
2.12	Kepler (1571-1630) . . . . .	35
2.13	Galileu . . . . .	36
2.14	Claude Mydorge (1585-1647) . . . . .	36
2.15	Descartes (1596-1650) . . . . .	36
2.16	Fermat (1601-1660) . . . . .	37
2.17	Desargues (1593-1662) . . . . .	37
2.18	Pascal (1623-1662) . . . . .	37
2.19	Cavalieri (1598-1647), Witt (1629-1672) e Newton (1643-1727) . . . . .	37
2.20	Dandelin (1794-1847) . . . . .	38
2.20.1	As secções cônicas segundo Dandelin . . . . .	38
2.20.2	As esferas de Dandelin . . . . .	40
2.20.2.1	Definição focal das cônicas segundo Dandelin . . . . .	40
3	AS CÔNICAS NO PLANO . . . . .	46
3.1	Parábola . . . . .	46
3.2	Hipérbole . . . . .	51

3.3	Elipse . . . . .	66
4	<b>AS QUÁDRICAS . . . . .</b>	<b>76</b>
4.1	Cone elíptico . . . . .	77
4.2	O cilindro Parabólico . . . . .	77
4.3	Cilindro Elíptico . . . . .	77
4.4	Cilindro hiperbólico . . . . .	78
4.5	Parabolóide elíptico . . . . .	78
4.6	Parabolóide hiperbólico . . . . .	79
4.7	Hiperbolóide de uma folha . . . . .	80
4.8	Hiperbolóide de duas folhas . . . . .	82
4.9	Elipsóide . . . . .	83
4.10	Propriedades de reflexão das secções cônicas . . . . .	84
4.10.1	O princípio de Reflexão . . . . .	84
4.10.1.1	Reflexão na parábola . . . . .	85
4.10.1.2	Reflexão na hipérbole . . . . .	88
4.10.1.3	Reflexão na elipse . . . . .	91
5	<b>A CARACTERIZAÇÃO POR EQUAÇÕES ALGÉBRICAS . . . . .</b>	<b>94</b>
5.1	O plano cartesiano . . . . .	94
5.1.1	Distância entre dois pontos no plano cartesiano . . . . .	94
5.1.2	A equação da reta . . . . .	95
5.1.3	Translação de eixos . . . . .	96
5.2	Parábola . . . . .	96
5.3	Hipérbole . . . . .	102
5.4	Elipse . . . . .	107
5.5	Equação geral do segundo grau . . . . .	111
6	<b>APLICAÇÕES E CURIOSIDADES . . . . .</b>	<b>113</b>
6.1	Parábola . . . . .	113
6.1.1	Antenas parabólicas . . . . .	113
6.1.2	Coletores solar . . . . .	115
6.1.3	Projetores parabólicos . . . . .	116
6.1.4	A parábola do balde de Newton . . . . .	117
6.1.5	Construções civis com formas parabólicas. . . . .	118
6.1.5.1	Arcos parabólico: . . . . .	118
6.1.5.2	O problema do fio suspenso: . . . . .	120
6.1.5.3	Pontes Pênseis: . . . . .	121
6.1.5.4	Outras coberturas parabólicas: . . . . .	122
6.1.6	Lançamentos de projéteis . . . . .	123

6.1.7	Resolução de problemas em física . . . . .	124
6.1.8	Resolução de problemas de matemática . . . . .	125
6.1.9	A parábola em atividades lúdicas . . . . .	125
6.1.9.1	O bilhar parabólico . . . . .	125
6.1.9.2	Mirascope . . . . .	126
6.1.9.3	Tabuada parabólica de multiplicação . . . . .	126
6.1.9.4	Telefone parabólico . . . . .	127
6.2	Hipérbole . . . . .	127
6.2.1	Telescópios . . . . .	127
6.2.2	As órbitas dos cometas . . . . .	128
6.2.3	Os sistemas de navegação hiperbólico . . . . .	129
6.2.4	Estruturas hiperbólicas . . . . .	132
6.2.5	O cone de Mach . . . . .	133
6.2.6	A hipérbole em atividades lúdicas . . . . .	134
6.2.6.1	Bilhar hiperbólico: . . . . .	134
6.3	Elipse . . . . .	135
6.3.1	As órbitas planetárias . . . . .	135
6.3.2	Elipses, odontologia e medicina . . . . .	136
6.3.2.1	Tratamentos odontológicos . . . . .	136
6.3.2.2	Tratamento de cálculo renal (litotripsia) . . . . .	136
6.3.2.3	Tratamento de câncer (radioterapia) . . . . .	137
6.3.3	Estruturas elípticas . . . . .	138
6.3.3.1	Salas de susurros . . . . .	138
6.3.4	Na engenharia mecânica . . . . .	138
6.3.5	Aplicação lúdica . . . . .	139
6.3.5.1	O bilhar elíptico . . . . .	139
7	CONCLUSÃO . . . . .	141
	REFERÊNCIAS . . . . .	143

## 1 INTRODUÇÃO

Geralmente, o primeiro contato de um aluno com uma cônica ocorre no seu último ano do Ensino Fundamental, quando a parábola lhe é apresentada como o gráfico de uma função quadrática. Posteriormente, a ideia de uma parábola como forma de representação gráfica de uma função quadrática é reforçada, logo nas primeiras aulas, no primeiro ano do Ensino Médio. A partir daí, em geral, o aluno só reencontra uma secção cônica, no terceiro ano do Ensino Médio, quando estuda Geometria Analítica. Neste caso, além da parábola, a hipérbole e a elipse também chegam ao conhecimento do aluno.

Como o estudo das três curvas é feito dentro do conteúdo de Geometria Analítica, em alguns casos, o livro didático comenta, brevemente, sobre a geração das cônicas por meio de uma intersecção de um plano com um cone circular e apresenta pouquíssimas ou nenhuma aplicação, e isto, quando há comentários deste tipo.

Por causa desta forma de se tratar o estudo das secções cônicas durante o Ensino Médio, é provável que muitos alunos acreditem que estas curvas são um pouco mais do que meras representações geométricas de algumas equações do segundo grau.

Mostraremos, por meio deste trabalho, que estas curvas são muito mais do que simples subprodutos de equações algébricas onde: o segundo capítulo apresentará o motivo que levou à descoberta das cônicas, além de se fazer um estudo, destas curvas, referente ao cone e citar alguns matemáticos que se dedicaram ao estudo das mesmas, com destaque para Menaecmus, Apolônio e Dandelin; já no terceiro capítulo, parábola, hipérbole e elipse serão analisadas no plano, sem referência a Geometria Analítica, onde serão apresentados interessantes resultados; enquanto que, no quarto capítulo, serão apresentadas algumas superfícies geradas pelas cônicas, além das propriedades refletoras das próprias mesmas; no quinto capítulo, será feita uma breve apresentação das secções cônicas por uma abordagem analítica e o sexto capítulo mostrará diversas situações em que as cônicas são aplicadas ou surgem naturalmente.

## 2 DA DESCOBERTA A DANDELIN

### 2.1 Os Três Problemas Clássicos

Entre 477 a.C. e 375 a.C., surgem, na Grécia, três problemas sobre construção geométrica que fascinaram e levaram os gregos a insistentes tentativas de resolução dos mesmos. Esses problemas ficaram conhecidos como, os três problemas famosos (ou clássicos) da antiguidade, e são eles:

- a) Quadratura do círculo ou problema de construir, apenas com régua e compasso, um quadrado cuja área é igual à área de um círculo dado;
- b) Duplicação do cubo ou problema de construir, apenas com régua e compasso, a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado;
- c) Trissecção de um ângulo ou problema de construir, apenas com régua e compasso, um ângulo igual a um terço de um ângulo dado.

O fato de resolver esses três problemas, usando somente régua e compasso, ser impossível, como foi provado cerca de 2200 anos após seu surgimento, não tira dos mesmos a grande importância que tiveram para a Geometria, já que as incansáveis investidas, dos geômetras gregos, para resolvê-los, renderam importantíssimos resultados, como a descoberta das secções cônicas.

### 2.2 Menaecmus (380-320 a.C.)

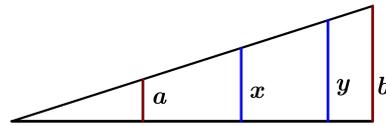
De acordo com uma carta de Eratósteles ao rei Ptolomeu Euergeta, a descoberta das secções cônicas se fez por Menaecmus (discípulo de Eudoxo, este, por sua vez, teve influência platônica). No século IV a.C., quando tentava resolver o problema de duplicação do cubo, Menaecmus percebeu a existência de duas curvas, que, posteriormente, viriam a se chamar: parábola e hipérbole.

Partindo da proporção continuada (Figura 1)

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}, \quad a, b, x, y \in \mathbb{R},$$

apresentada por Hipócrates, ele propõe a resolução da duplicação do cubo, usando as duas curvas recém descobertas. Em sua solução, Menaecmus mostra que a resolução do problema de Delos (Lugar onde teria surgido o problema de duplicação do cubo) é a intersecção de duas parábolas ou de uma parábola com uma hipérbole.

Figura 1 – Representação dos meios proporcionais de  $a$  e  $b$



Fonte: Elaborada pelo autor

Por uma abordagem moderna, de

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b'}$$

fazendo  $b = 2a$  e resolvendo um sistema com qualquer par das três equações:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y'}, \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad \text{e} \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{2a}.$$

Por exemplo, a solução do sistema definido por

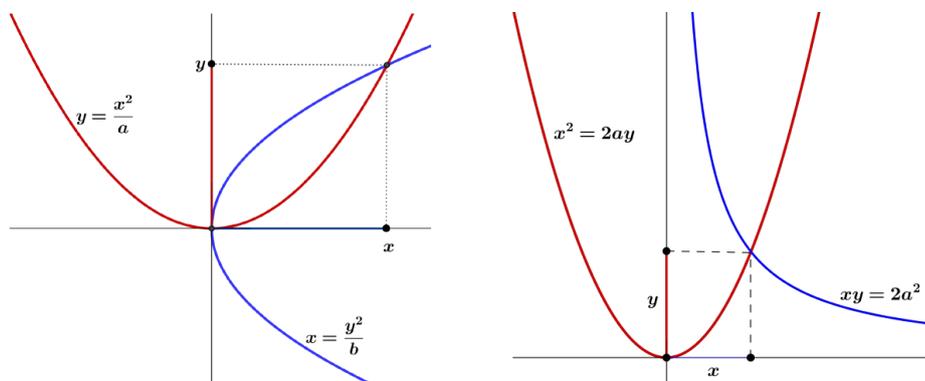
$$x^2 = ay \quad \text{e} \quad y^2 = 2ax$$

é a intersecção de duas parábolas e a solução do sistema definido por

$$x^2 = ay \quad \text{e} \quad xy = 2a^2$$

é a intersecção de uma parábola com uma hipérbole (Figura 2), onde a medida  $x$  será a solução do problema de duplicação do volume de um cubo cuja aresta mede  $a$ .

Figura 2 – Intersecções Propostas por Menaecmus



(a) Intersecção de duas parábola

(b) Intersecção entre uma parábola e uma hipérbole

Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.2.1 Os cones de Menaecmus

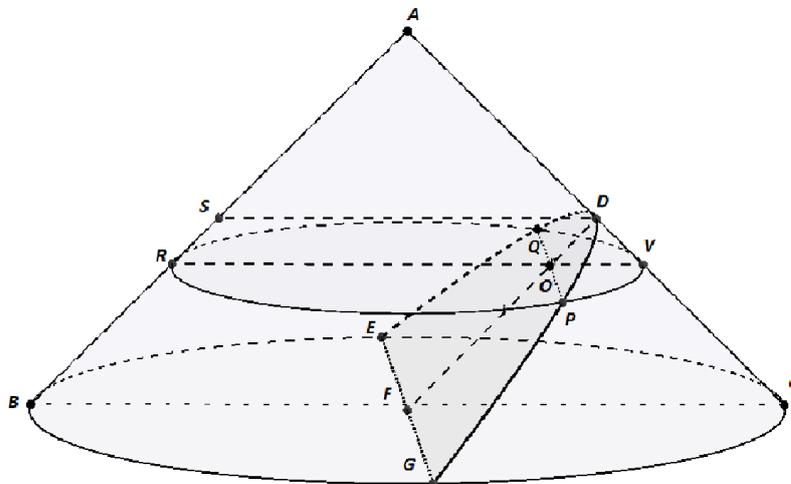
Das três curvas, a elipse deveria ser a mais visível, pois está presente sempre que um círculo é olhado obliquamente ou quando um cilindro é serrado diagonalmente. No entanto, a descoberta da elipse teria sido uma consequência da pesquisa em que parábola e hipérbole ofereciam as propriedades para a resolução do problema deliano.

Começando com um cone circular reto, cujo ângulo no vértice é  $90^\circ$ , Menaecmus descobriu a curva formada pela intersecção de um plano perpendicular a uma geratriz desse cone onde, em linguagem de Geometria Analítica atual, sua equação pode ser escrita na forma  $y^2 = lx$ , onde  $l$  (mais tarde chamada de *lactus eretum* da curva) é uma constante que depende da distância do plano ao vértice do cone.

Não se sabe como Menaecmus deduziu essa propriedade, mas ela depende somente de teoremas de geometria elementar.

Sendo  $ABC$  um cone circular reto, com o ângulo no vértice  $A$  medindo  $90^\circ$ , seccionado por um plano perpendicular a geratriz  $ADC$ , temos, então a curva  $EDG$  (Figura 3).

Figura 3 – Cone circular reto retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Passando um plano horizontal por um ponto  $P$  qualquer da curva (parábola), temos o círculo  $PVQR$ , que também intersecta  $EDG$  no ponto  $Q$ . Das simetrias envolvidas, resulta que o segmento  $PQ$  é perpendicular ao segmento  $RV$ , logo os triângulos  $ROQ$  e  $POV$  são semelhantes e  $d(O, P)$  é igual a  $d(O, Q)$ , logo

$$\frac{d(O, P)}{d(O, R)} = \frac{d(O, V)}{d(O, Q)} \quad (2.1)$$

Além disto, também temos que os triângulos  $OVD$ ,  $SDA$  e  $BCA$  são semelhantes, o que resulta em

$$\frac{d(O, V)}{d(O, D)} = \frac{d(B, C)}{d(A, B)} \quad (2.2)$$

e

$$\frac{d(S, D)}{d(A, S)} = \frac{d(B, C)}{d(A, B)}. \quad (2.3)$$

Percebe-se também que  $RSDO$  é um paralelogramo,  $ASD$  é triângulo isósceles de base  $SD$  e  $d(A, D)$  é a distância do vértice  $A$  ao plano que passa pela curva  $EQDPG$ . Tomando os segmentos  $OD$  e  $OP$  como as respectivas coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto  $P$ , temos de 2.1, 2.2 e 2.3:

$$\begin{aligned} y^2 &= d(O, R).d(O, V) \\ &= d(S, D).d(O, V) \\ &= d(A, S). \frac{d(B, C)}{d(A, B)}. d(O, D). \frac{d(B, C)}{d(A, B)} \\ &= \frac{d(A, S).d(B, C)^2}{d(A, B)^2}.x \\ &= \frac{d(A, D).d(B, C)^2}{d(A, B)^2}.x. \end{aligned}$$

E fazendo

$$\frac{d(A, D).d(B, C)^2}{d(A, B)^2} = l,$$

temos

$$y^2 = lx.$$

Como a distância do vértice  $A$  ao plano de secção é a distância  $d(A, D)$ , que varia de acordo com a posição do ponto  $D$ , que pode ser qualquer ponto do segmento  $AC$ , e as distâncias  $d(A, B)$  e  $d(B, C)$  são constantes, temos, de fato, que a constante  $l$  depende da distância do vértice  $A$  ao plano que secciona o cone.

Neste caso, podemos escrever a equação da curva: uma "secção do cone circular reto cujo ângulo no vértice é  $90^\circ$ " (Parábola) como

$$y^2 = lx$$

De modo análogo, pode-se encontrar uma equação da forma,

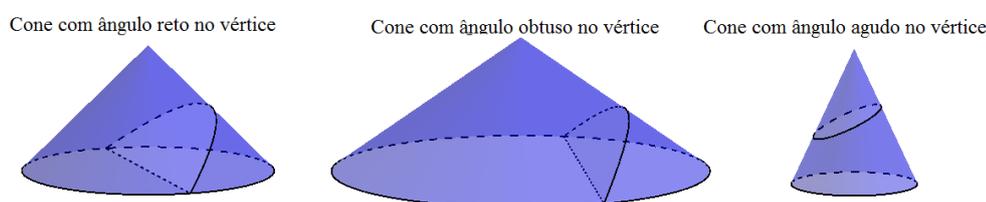
$$y^2 = lx - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

para uma “secção, perpendicular, de um plano com um cone circular reto cujo ângulo no vértice é agudo”(elipse) e uma equação da forma,

$$y^2 = lx + \frac{b^2x^2}{a^2}$$

para uma “secção, também perpendicular, de um plano com um cone circular reto cujo ângulo no vértice é obtuso”(hipérbole), onde  $a$  e  $b$  são constantes reais.

Figura 4 – Cones de Menaecmus



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 2.3 Aristeu (370-300 a.C.) e Euclides (330-270 a.C, aproximadamente)

Segundo Pappus, Aristeu foi o primeiro a publicar um tratado sobre as secções cônicas. No livro VII de seu tratado, Pappus atribui a Euclides, quatro lemas que caracterizam as três cônicas através de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz).

As obras de Aristeu e Euclides foram perdidas.

### 2.4 Diocles (240-190 a.C.)

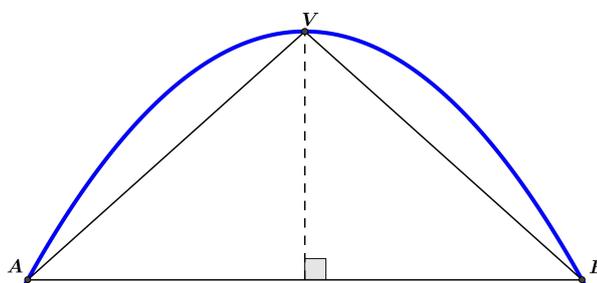
Foi o primeiro a mostrar a propriedade refletora da parábola. Foi, inclusive, por causa da propriedade refletora da parábola que Diocles deu o nome “Sobre Espelhos que Queimam” ao seu tratado. Diocles mostrou que se um parabolóide de revolução espelhado for orientado para o sol, os raios refletidos por ele se encontram em um ponto, causando, assim, combustão nas proximidades do ponto.

### 2.5 Arquimedes (287-212 a.C.)

Arquimedes mostrou, pelo método da exaustão, que a área de um segmento parabólico é igual a quatro terços da área de um triângulo que possua a mesma base e altura do referido segmento (Figura 5). Ele não conseguiu determinar a área de um

segmento de hipérbole e nem de um segmento de elipse, mas ele encontrou a forma para determinar a área de uma elipse inteira, em notação moderna  $\pi ab$ , onde  $a$  e  $b$  são as respectivas maior e menor distância de um ponto da elipse ao seu centro.

Figura 5 – Segmento de parábola



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 2.6 Apolônio (262-190 a.C)

*As Cônicas*, de Apolônio, superou todas as obras sobre secções cônicas que existiam. Trata-se de um tratado extraordinário composto com 8 livros, onde somente o último se perdeu. Graças a esta obra os seus contemporâneos lhe deram o cognome de “O grande geômetra”.

Em sua obra, além de dar as suas contribuições para o estudo das secções cônicas, Apolônio fez compilações (nos quatro primeiros livros) de vários tratados sobre as secções cônicas, feitos, anteriormente, por outros geômetras, como ele mesmo menciona, na referida obra.

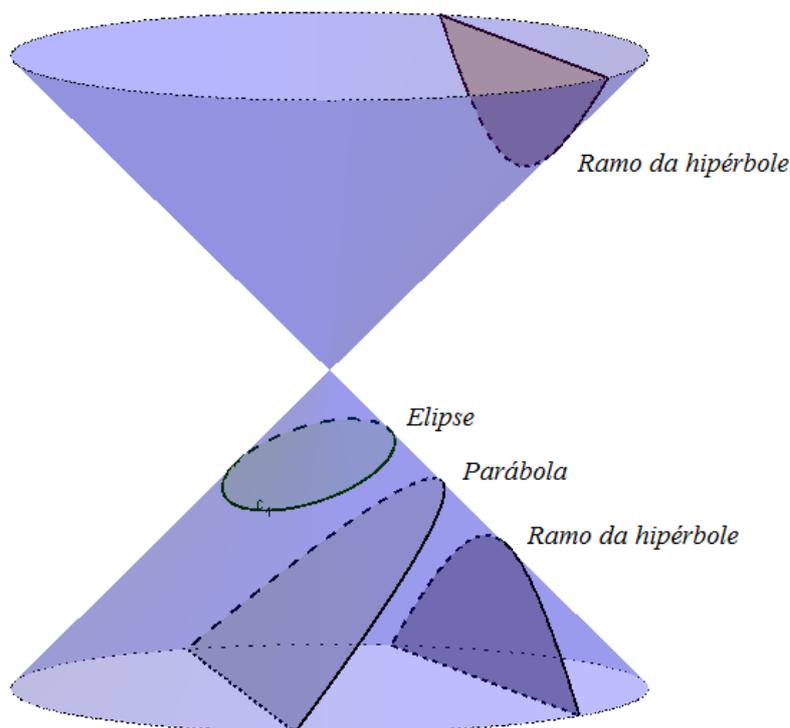
### 2.6.1 A obra de Apolônio

Em sua obra, Apolônio apresentou uma caracterização unificada das secções cônicas. Ele mostrou que estas curvas podem ser obtidas a partir de um mesmo cone circular, não necessariamente reto, mudando apenas o ângulo de inclinação do plano que secciona o cone. A definição de cone proposta por Apolônio foi:

**Definição 2.1.** Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo de uma circunferência que não está contida no mesmo plano ao qual pertence o ponto de modo que a reta passe sucessivamente por cada ponto dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.

O cone passou a ser composto por duas folhas, surgindo, assim, o segundo ramo da hipérbole.

Figura 6 – Cone de Apolônio



Fonte: Elaborada pelo autor.

Apolônio chamou de parábola, ao corte, feito num cone circular, por um plano paralelo a uma das geratrizes; nomeou como elipse, a secção de um plano que passe por todas as geratrizes do cone e denominou como sendo uma hipérbole a curva formada quando o plano intersecta as duas folhas de um cone (Figura 6).

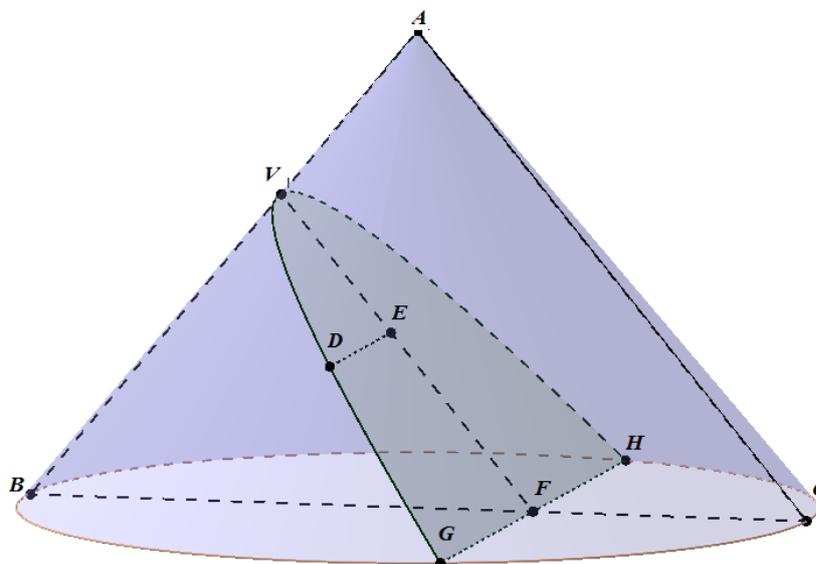
Teria sido de Apolônio a autoria do seguinte:

**Teorema 2.1** (Apolônio). A seção feita em um cone por um plano qualquer é uma parábola, hipérbole ou uma elipse, segundo o plano secante faz com o eixo do cone um ângulo igual, inferior ou superior ao semiângulo no vértice do cone.

Apolônio apresentou uma interessante propriedade válida para as três cônicas que relaciona a área do quadrado cujo lado é o segmento  $DE$  com a área do retângulo onde dois dos lados têm as mesmas medidas do segmento  $VE$  e os outros lados têm as mesmas medidas do segmento que se relaciona com o que ele chamou de *lactus eretum* (na parábola, *lactus eretum* é equivalente a duas vezes a distância entre o ponto e a reta conhecidos hoje como foco e diretriz, respectivamente), onde o ponto  $D$  pertence a cônica, o ponto  $V$  é o vértice da cônica e  $DE$  é perpendicular a  $VE$  (Figura 7).

Na parábola, tal relação é uma igualdade, na elipse, temos que a área do quadrado é menor do que a área do retângulo e, na hipérbole, o quadrado tem área maior do que o retângulo.

Figura 7 – Representação da parábola no cone de Apolônio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No *livro II* de sua obra, Apolônio estuda as propriedades das assíntotas, hipérbolos conjugadas e retas tangentes às cônicas.

O *livro III* contém teoremas variados, incluindo alguns sobre área. As bem conhecidas propriedades focais das cônicas surgem no final do *livro III*. Não há nenhuma menção a propriedade foco-diretriz das cônicas. Algo curioso pois, segundo Pappus, Euclides tinha consciência de tais propriedades. Apolônio também apresenta a propriedade bifocal da hipérbole.

O *livro IV* prova as recíprocas de algumas propriedades do *livro III*. Há também alguns teoremas sobre pares de cônicas que se intersectam. O *livro V* é mais notável e original. O assunto se estende até o ponto onde se poderiam escrever as equações cartesianas dos três tipos de cônicas. O *livro V* contém teoremas e problemas de construções e relativos a cônicas iguais e semelhantes; mostra-se até como, para um cone reto dado, podem-se encontrar secções iguais a uma cônica dada. O *livro VII* contém muitos teoremas. Apolônio também mostrou que toda parábola é semelhante. O *livro VIII* foi perdido, mas foi reconstituído por Halley e pelo árabe Ibn Al-Haytham.

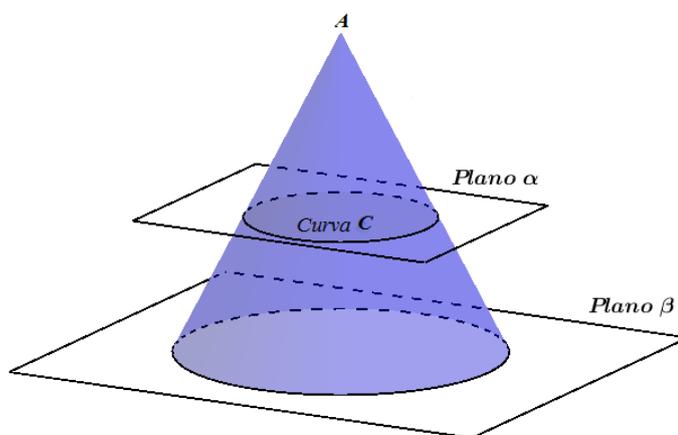
### 2.6.2 A relação característica das secções cônicas segundo Apolônio

Considerando um cone circular reto de vértice  $A$  e base contida num plano  $\beta$  e seccionando-o por um plano  $\alpha$  (que não passe por  $A$ ), Apolônio obteve uma curva  $C$ .

Se o plano  $\alpha$  for paralelo ao plano  $\beta$  (Figura 8), então a curva  $C$  é uma

circunferência.

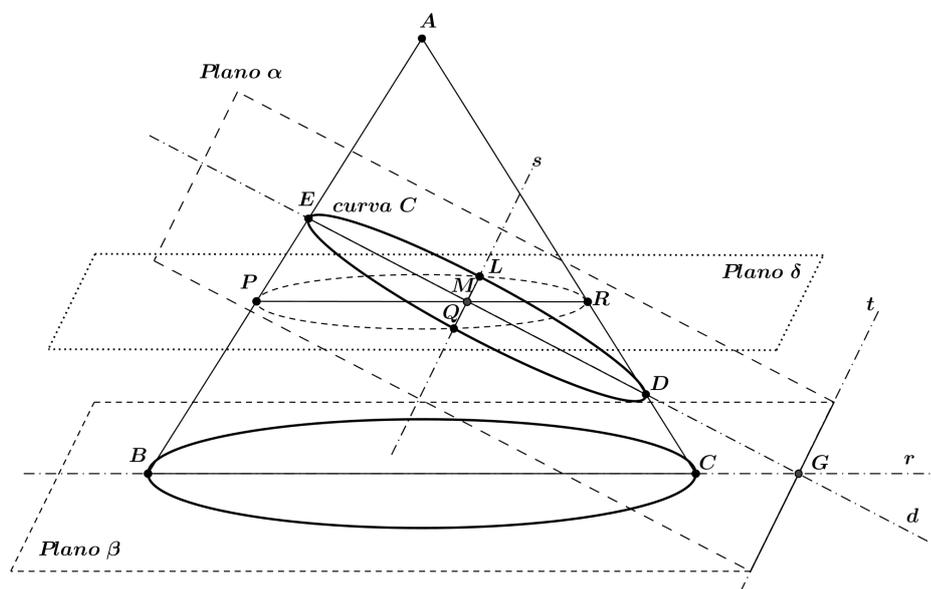
Figura 8 – Secção de um cone por um plano paralelo ao plano de sua base



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se  $\alpha$  não for paralelo a  $\beta$ , então  $\alpha$  e  $\beta$  intersectam-se em uma reta  $t$  (Figura 9).

Figura 9 – Cone seccionado por um plano não paralelo ao plano de sua base



Fonte: Elaborada pelo autor.

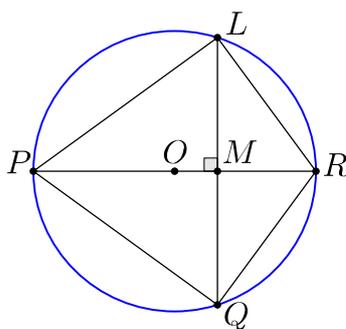
Analisando a Figura 9, temos as seguintes situações:

- a) Um plano  $\pi$  corta o cone ao longo de seu eixo determinando o triângulo isósceles  $ABC$ , chamado *triângulo axial*, o plano  $\pi$  é denominado como *plano axial*;

- b) A intersecção do plano  $\pi$  com o plano  $\beta$  é a reta  $r$ , perpendicular a reta  $t$ ;
- c) Os planos  $\alpha$  e  $\pi$  se intersectam na reta  $d$ , esta que intersecta a reta  $r$  no ponto  $G$ . A reta  $d$  pode assumir diversas posições, mas consideremos, sem perda de generalidade, que intersecte a geratriz  $AC$  no ponto  $D$ ;
- d) Por um ponto genérico  $L$  da curva  $\mathbf{C}$ , intersecção do plano  $\alpha$  com o cone, traça-se um plano  $\delta$  paralelo ao plano  $\beta$ . Esse plano intersecta as geratrizes  $AB$  e  $AC$  nos pontos  $P$  e  $R$  respectivamente.  $PR$  é um diâmetro da circunferência resultante na intersecção do cone com  $\delta$ ;
- e) Traça-se pelo ponto  $L$  a reta  $s$  paralela a reta  $t$ , que intersecta o plano axial no ponto  $M$ . A reta  $s$  é a intersecção dos planos  $\alpha$  e  $\delta$ . O ponto  $M$ , então, pertence aos planos  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\pi$ . Os pontos  $D, E$  e  $M$  são colineares, pois pertencem a reta  $d$ ;
- f) Como as retas  $s$  e  $t$  são paralelas, então  $s$  e  $d$  são perpendiculares. Temos também  $t$  perpendicular a reta  $r$ .

Considerando a circunferência de centro  $O$  que passa pelos pontos  $P, Q, R$  e  $L$  (Figura 10), temos que o segmento  $PR$  é um diâmetro e o segmento  $LQ$ , contido em  $s$ , é perpendicular a  $PR$ , no ponto  $M$ .

Figura 10 – Circunferência que passa por  $P, Q, R$  e  $L$



Fonte: Elaborada pelo autor

Então o ângulo  $PLR$  é um ângulo inscrito, na circunferência, correspondente ao ângulo  $POR$  que é raso, logo o ângulo  $PLR$  é reto.

Dessa forma, temos que o triângulo  $PML$  é semelhante ao triângulo  $PLR$ , este por sua vez é semelhante ao triângulo  $LMR$ , o que resulta na semelhança entre os triângulos  $PML$  e  $LMR$ , logo,

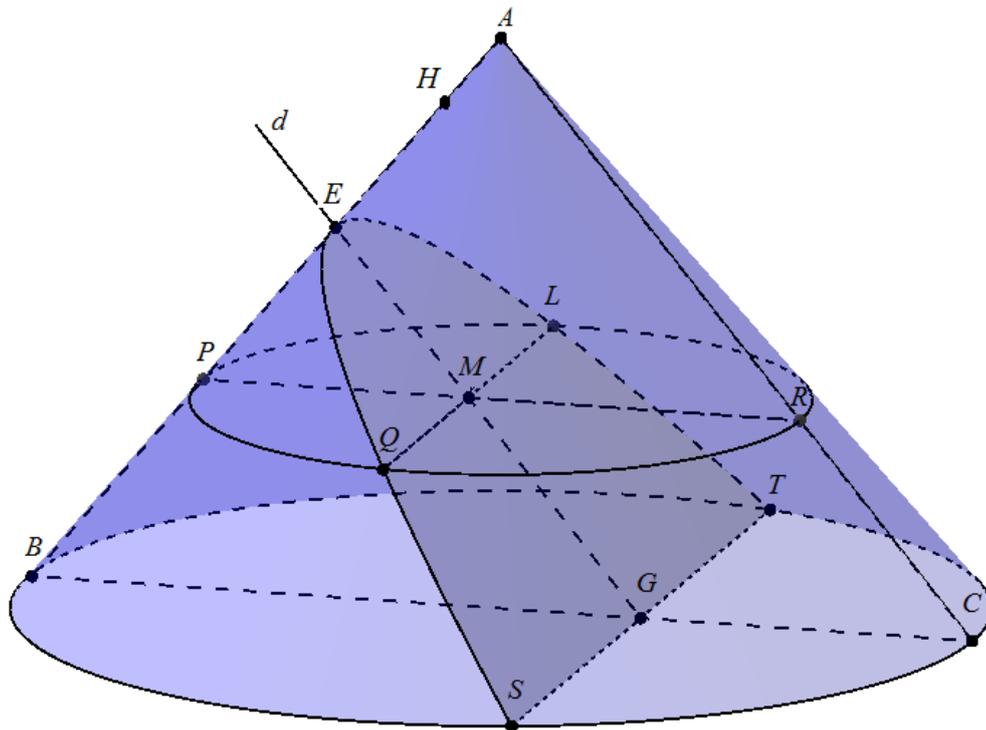
$$\frac{d(P, M)}{d(L, M)} = \frac{d(L, M)}{d(M, R)}$$

Portanto,

$$d(L, M)^2 = d(P, M).d(M, R). \quad (2.4)$$

### 2.6.2.1 Na parábola

Figura 11 – Parábola segundo Apolônio



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 11, a reta  $d$  é paralela ao lado  $AC$  do *triângulo axial*. Determinar a relação característica da parábola é encontrar uma relação entre  $d(E, M)$  e  $d(L, M)$ . Mostremos que essa relação é definida por:

$$d(L, M)^2 = d(E, H).d(E, M), \quad (2.5)$$

onde  $H$  pertence a semirreta  $EA$  e  $d(E, H)$  depende das distâncias  $d(A, B)$ ,  $d(A, C)$ ,  $d(B, C)$  e  $d(A, E)$ .

Para isso, considere a Figura 11, como o segmento  $PR$  está contido na intersecção entre os planos  $\pi$  e  $\delta$ , o segmento  $BC$  está contido na intersecção entre os planos  $\pi$  e  $\beta$  e o segmento  $EM$  está contido na reta  $d$ , então os ângulos  $EMP$ ,  $MPE$  e  $PEM$  são congruentes, respectivamente, aos ângulos  $ARP$ ,  $RPA$  e  $PAR$ , que

são congruentes aos respectivos ângulos  $ACB$ ,  $CBA$  e  $BAC$ , logo o triângulo  $EMP$  é semelhante ao triângulo  $ARP$  que é semelhante ao triângulo  $ACB$ . Portanto,

$$\frac{d(P, M)}{d(E, M)} = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} \quad (2.6)$$

e

$$\frac{d(P, R)}{d(A, P)} = \frac{d(P, M)}{d(P, E)} = \frac{d(B, C)}{d(A, B)}, \quad (2.7)$$

segue de 2.7 e das propriedades de proporção, que

$$\frac{d(M, R)}{d(A, E)} = \frac{d(P, R) - d(P, M)}{d(A, P) - d(P, E)},$$

logo,

$$\frac{d(M, R)}{d(A, E)} = \frac{d(B, C)}{d(A, B)}. \quad (2.8)$$

Multiplicando 2.6 por 2.8, temos:

$$\frac{d(P, M)}{d(E, M)} \cdot \frac{d(M, R)}{d(A, E)} = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} \cdot \frac{d(B, C)}{d(A, B)},$$

mas, de 2.4, segue que

$$\frac{d(L, M)^2}{d(E, M) \cdot d(A, E)} = \frac{d(B, C)^2}{d(A, C) \cdot d(A, B)},$$

logo

$$d(L, M)^2 = \frac{d(A, E) \cdot d(B, C)^2}{d(A, C) \cdot d(A, B)} \cdot d(E, M).$$

Tomando o ponto  $H$  de forma que

$$\frac{d(A, E) \cdot d(B, C)^2}{d(A, C) \cdot d(A, B)} = d(E, H),$$

temos, então,

$$d(L, M)^2 = d(E, H) \cdot d(E, M).$$

Fazendo,  $d(L, M) = y$ ,  $d(E, M) = x$  e  $d(E, H) = l$ , temos a equação padrão da parábola:

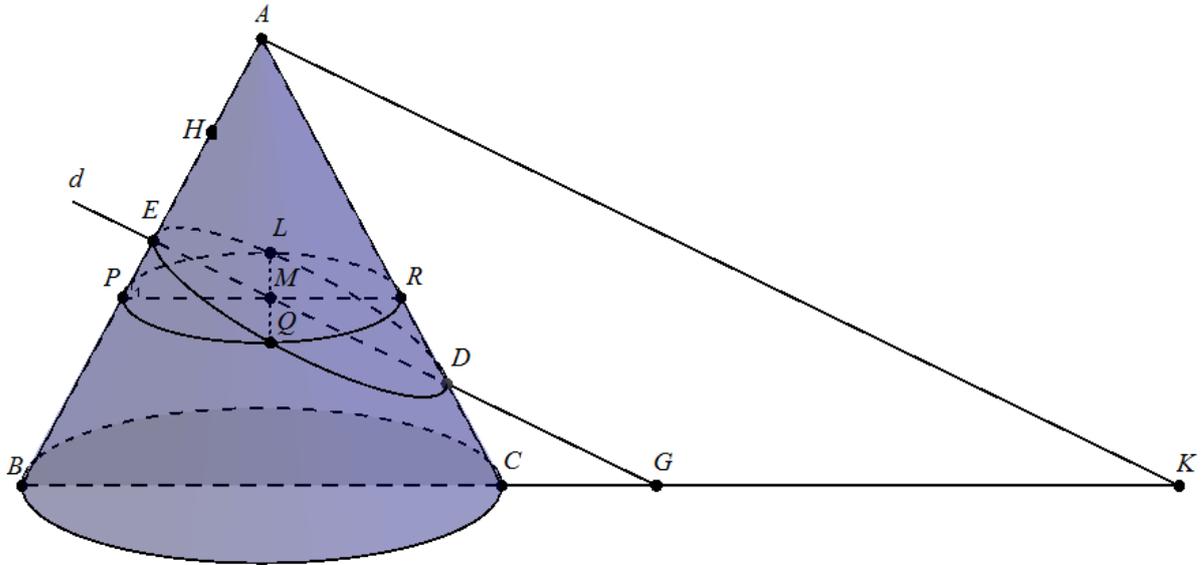
$$y^2 = lx$$

C.Q.D.

### 2.6.2.2 Na elipse

Na Figura 12, considere que a reta  $d$  intersecta os lados  $AB$  e  $AC$  do triângulo axial, nos pontos  $D$  e  $E$ , sendo  $D, E, M$  e  $G$ , colineares em  $d$ . Considerando uma reta paralela a  $d$ , passando por  $A$  e intersectando o plano  $\beta$  em  $K$ .

Figura 12 – Elipse segundo Apolônio



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mostraremos a seguinte relação:

$$d(L, M)^2 = d(E, H) \cdot d(E, M) - \frac{d(E, H)}{d(E, D)} \cdot d(E, M)^2,$$

onde  $H$  pertence a semirreta  $EA$  e  $d(E, H)$  depende das distâncias  $d(E, D)$ ,  $d(B, K)$ ,  $d(C, K)$  e  $d(A, K)$ .

Como, de modo análogo ao caso da parábola, os segmentos  $BK$  e  $PR$  são paralelos, segue que os triângulos  $EPM$  e  $ABK$  são semelhantes, logo

$$\frac{d(P, M)}{d(E, M)} = \frac{d(B, K)}{d(A, K)} \quad (2.9)$$

e os triângulos  $MRD$ ,  $GCD$  e  $KCA$  são semelhantes, então

$$\frac{d(R, M)}{d(M, D)} = \frac{d(C, K)}{d(A, K)} \quad (2.10)$$

Dividindo 2.4, por  $d(E, M) \cdot d(M, D)$ , temos

$$\frac{d(L, M)^2}{d(E, M).d(M, D)} = \frac{d(P, M).d(R, M)}{d(E, M).d(M, D)},'$$

segue, de 2.9 e 2.10 que

$$\frac{d(L, M)^2}{d(E, M).d(M, D)} = \frac{d(B, K).d(C, K)}{d(A, K).d(A, K)}.$$

Tomando o ponto  $H$ , de forma que

$$\frac{d(B, K).d(C, K)}{d(A, K)^2} = \frac{d(E, H)}{d(E, D)},'$$

obtemos

$$\frac{d(L, M)^2}{d(E, M).d(M, D)} = \frac{d(E, H)}{d(E, D)}. \quad (2.11)$$

Como

$$d(M, D) = d(E, D) - d(E, M), \quad (2.12)$$

segue então, de 2.11 e 2.12

$$\begin{aligned} d(L, M)^2 &= \frac{d(E, H)}{d(E, D)}.d(E, M).d(M, D) \\ &= \frac{d(E, H)}{d(E, D)}.d(E, M).[d(E, D) - d(E, M)], \end{aligned}$$

logo

$$d(L, M)^2 = d(E, H).d(E, M) - \frac{d(E, H)}{d(E, D)}.d(E, M)^2.$$

Fazendo

$$\begin{aligned} d(L, M) &= y, \\ d(E, M) &= x, \\ d(E, H) &= l \end{aligned}$$

e

$$d(E, D) = 2a,$$

obtemos a equação padrão da elipse:

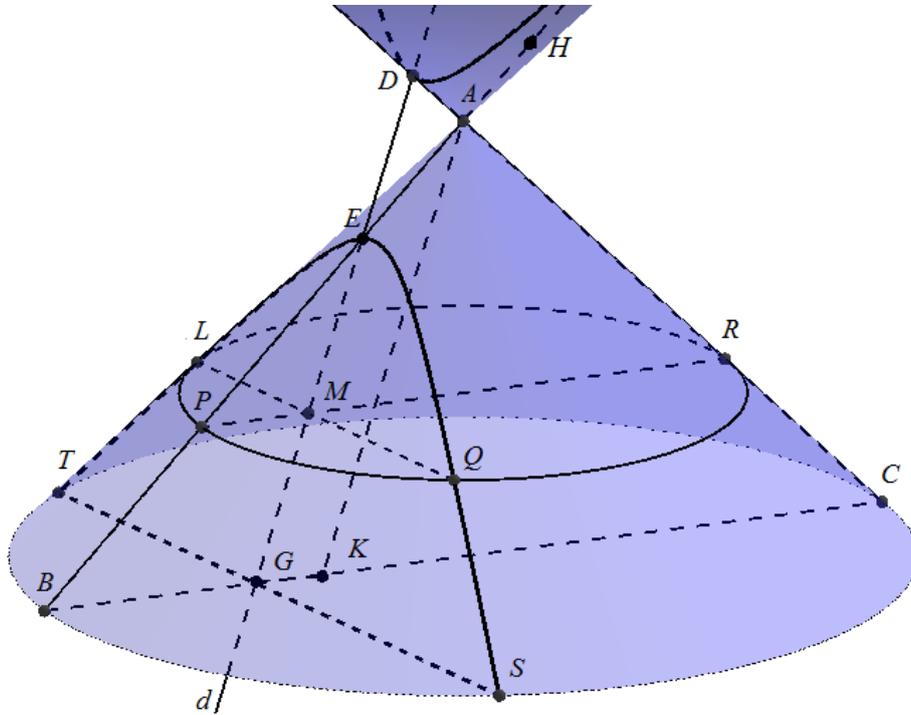
$$y^2 = lx - \frac{l}{2a}.x^2$$

C.Q.D.

### 2.6.2.3 Na hipérbole

Observemos a Figura 13.

Figura 13 – Hipérbole segundo Apolônio



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como a reta  $d$  não intersecta o lado  $AC$  e sim seu prolongamento na outra folha do cone. Podemos então obter, para a hipérbole, a relação entre  $d(L, M)$  e  $d(E, M)$ , de modo análogo ao usado para a obtenção da elipse diferindo somente pelo fato de que o ponto  $E$  pertence ao segmento  $MD$  (Na elipse,  $M$  pertence a ao segmento  $DE$ ). Neste caso, temos

$$d(M, D) = d(E, D) + d(E, M),$$

logo

$$d(L, M)^2 = d(E, H) \cdot d(E, M) + \frac{d(E, H)}{d(E, D)} \cdot d(E, M)^2.$$

Fazendo,  $d(L, M) = y$ ,  $d(E, M) = x$ ,  $d(E, H) = l$  e  $d(D, E) = 2a$ , chegamos na seguinte equação

$$y^2 = lx + \frac{l}{2a} \cdot x^2.$$

C.Q.D.

## 2.7 Pappus (290-350)

Depois de Apolônio, passaram-se cerca de 500 anos para que surgisse outro geômetra notável, este foi Pappus. Sua principal obra, foi um tratado sobre a geometria da época, acompanhado de comentários, com numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. Pappus também fez estudos com cônicas, atribuindo resultados e muitas vezes aperfeiçoando obras anteriores.

Em sua *Coleção* Pappus faz uma distinção entre os problemas geométricos, classificando-os em problemas: planos; sólidos e lineares. Onde era sugerido que a resolução de problemas sólidos deveria ser feita por meio de secções cônicas.

Afirmando que o problema de trissecção do ângulo é um problema sólido, ele usa a hipérbole para fazer a sua resolução.

Pappus propõe um problema generalizado que dava origem a uma infinidade de curvas, mesmo em sua forma mais simples esse problema ficou conhecido como Problema de Pappus, apesar do enunciado original, envolvendo três ou quatro retas, supostamente, ter surgido na época de Euclides. Em sua primeira forma o problema é chamado de “o lugar a três ou quatro retas”. Euclides tinha determinado o lugar para alguns casos. Supostamente, em uma obra perdida, Apolônio tinha dado uma solução geral. Mas Pappus deixa a entender que eles fracassaram em suas tentativas e que foi o primeiro a provar que o lugar de modo geral é uma secção cônica.

Deve-se a Pappus o primeiro enunciado que abre caminho para a definição via foco-diretriz de uma cônica.

Considerando, “em abordagem moderna”, num mesmo plano, uma reta  $DE$  (diretriz) e um ponto  $F$  (foco) não pertencente à  $DE$ , com  $DF$  perpendicular a  $DE$  (Figura 14). Conduzamos por um ponto  $P$  os segmentos  $PF$  e  $PE$ , tal que  $PE$  é perpendicular a  $DE$  e consideremos a razão  $\frac{d(P,F)}{d(P,E)}$  (excentricidade).

Nestas condições, Pappus afirma que o ponto  $P$  está ligado a uma secção cônica e que esta é:

uma parábola se

$$\frac{d(P,F)}{d(P,E)} = 1;$$

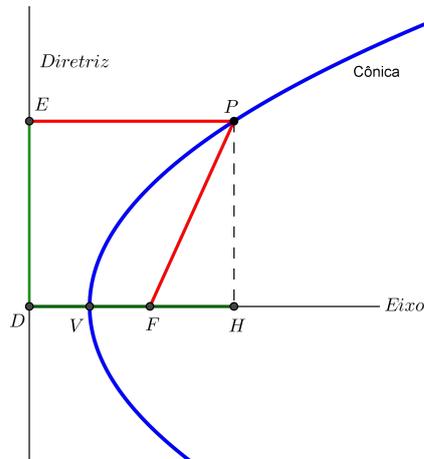
uma elipse se

$$\frac{d(P,F)}{d(P,E)} < 1$$

e uma hipérbole se

$$\frac{d(P,F)}{d(P,E)} > 1$$

Figura 14 – Secção cônica segundo Pappus



Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideremos a Figura 14 e vejamos uma demonstração para o caso em que, de

$$\frac{d(P, F)}{d(P, E)} = 1, \quad (2.13)$$

obtemos a equação da parábola.

Tomando o ponto  $H$  tal que o segmento  $PH$  é perpendicular à reta  $DF$ , temos o retângulo  $EPHD$ , logo

$$d(P, E) = d(H, V) + d(V, D), \quad (2.14)$$

e o triângulo  $PHF$  é retângulo em  $H$ , então pelo Teorema de Pitágoras

$$d(P, F)^2 = d(P, H)^2 + d(H, F)^2. \quad (2.15)$$

Segue de 2.13 que

$$d(P, F)^2 = d(P, E)^2,$$

e de 2.14 e 2.15,

$$d(P, H)^2 + d(H, F)^2 = (d(H, V) + d(V, D))^2.$$

Como

$$d(H, F) = d(V, H) - d(V, F)$$

e

$$d(D, V) = d(V, F),$$

temos

$$\begin{aligned} d(P, H)^2 &= (d(D, V) + d(V, H))^2 - d(H, F)^2 \\ &= d(D, V)^2 + 2.d(D, V).d(V, H) + d(V, H)^2 - (d(V, H) - d(V, F))^2 \\ &= d(D, V)^2 + 2.d(D, V).d(V, H) + d(V, H)^2 - d(V, H)^2 + 2.d(V, H).d(V, F) - d(V, F)^2 \\ &= 2.d(D, V).d(V, H) + 2.d(V, H).d(V, F) \\ &= 4.d(D, V).d(V, H). \end{aligned}$$

Fazendo  $d(P, H) = x$ ,  $d(D, V) = p$  e  $d(V, H) = y$  obtemos

$$x^2 = 4py.$$

C.Q.D.

Esta última relação é a forma característica da equação de uma parábola.

## 2.8 Sereneus

Apresenta a elipse como uma secção obtida, também, pela secção de um plano com um cilindro.

## 2.9 Os Árabes

Por volta do século IX d.C., surgem importantes traduções de obras gregas, além de novas definições e aplicações das secções cônicas em ótica, estática e astronomia, feitas pelos árabes:

- a) Banu Musa, assim eram conhecidos os irmãos, Muhammad, Ahmad e Hasan, que traduziram a obra de Apolônio e, em seguida, escreveram obras próprias onde aparece a definição bifocal da elipse sem referência ao cone. Em seu texto, a elipse se caracteriza pela soma das distâncias de um ponto da mesma a dois pontos fixos (focos) igual ao comprimento do maior eixo da elipse. Banu Musa, mostrou que esta propriedade é a mesma obtida por Sereneus quando seccionou o cilindro por um plano não paralelo a base circular, em seguida, determinaram os eixos da elipse e estudaram as propriedades das cordas. Vale lembrar que após caracterizarem as cônicas, no plano, eles passaram para o espaço.
- b) Ibrahim Sinam, apresentou, na primeira metade do século seguinte, uma nova construção, no plano, para uma parábola, que usava a equidistância de seus pontos até uma reta e um ponto.

- c) Al-Quhi, mostrou, no final do século X, que os lugares geométricos de centros de círculos poderiam ser usados para a obtenção das cônicas.
- d) Ibu Sahl, apresentou propriedades óticas também através da refração em lentes e não por meio de reflexão de espelhos. Criou equipamentos para a construção das cônicas. Para a parábola, usou a propriedade do foco e da diretriz, e para a elipse e hipérbole explorou as propriedades óticas.
- e) Ibn Al-Haytham, reformou a ótica geométrica usando construções oriundas das cônicas. Propôs novos problemas que puderam ser resolvidos usando as secções cônicas, na primeira metade do século XI.
- f) Al-Khayyam, usou as cônicas para encontrar a solução de equações de terceiro grau, na segunda metade do século XI

## 2.10 Johannes Werner e Maurolico

Deram os primeiros passos na direção do entendimento das cônicas sob um ponto de vista projetivo.

## 2.11 Copérnico (1473 - 1543)

Deve-se a Copérnico o Teorema seguinte: “Se um círculo menor rola, sem deslizar, ao longo do interior de um círculo maior com diâmetro duas vezes maior, então o lugar geométrico de um ponto que não está sobre a circunferência do círculo menor, mas que é fixo, com relação a esse círculo menor, é uma elipse.”

## 2.12 Kepler (1571-1630)

Kepler se envolveu com as secções cônicas em seus trabalhos sobre ótica e as propriedades da parábola. Enquanto Apolônio via as cônicas como três tipos diferentes de curvas (elipse, parábola e hipérbole), Kepler fez uma apresentação unificadora das cônicas, onde de uma cônica ele obtinha todas as outras, por deformação, sem se servir do cone. Por uma construção mecânica e intuitiva, ele apresentou uma parábola como limite de um elipse ou hipérbole. A sua construção de parábola usa a equidistância entre um ponto e o foco e entre o mesmo ponto a diretriz.

Ele preferia pensar em cinco espécies de cônicas, todas pertencentes a uma mesma família. Kepler desenvolveu em sua “Introdução à ótica de Vitello”, o que ficou conhecido por princípio de continuidade. Da secção cônica que consiste de duas retas que se cortam, em que os dois focos coincidem no ponto de intersecção, passamos gradualmente por uma infinidade de hipérbolas à medida que um foco se afasta cada vez mais um do outro. Quando o foco está infinitamente longe, já não temos a hipérbole

de dois ramos e sim uma parábola. Se o foco passa além do infinito e regressa pelo outro lado, passamos por uma infinidade de elipses até que, quando os focos coincidem novamente, chegamos ao círculo.

Deve-se a Kepler, tanto a palavra foco, como a ideia de que a parábola tem dois focos, sendo um deles no infinito (introduzindo o conceito de “infinito” na geometria).

Em sua *Astronomia nova*, Kepler anunciou suas duas primeiras leis, onde há uma aplicação, no mínimo curiosa, da elipse. Ele também conhecia o valor da área da elipse de semieixos  $a$  e  $b$  por  $\pi ab$ , mas só conseguiu determinar a aproximação  $\pi(a + b)$  para o perímetro da mesma.

### 2.13 Galileu

Galileu mostrou que a trajetória de um projétil, desprezando a resistência, do ar é uma parábola.

### 2.14 Claude Mydorge (1585-1647)

Foi o primeiro francês a escrever tratados sobre as cônicas, alguns autores acham suas demonstrações mais simples do que as de Apolônio. Ele foi o primeiro a usar o termo “parâmetro”.

### 2.15 Descartes (1596-1650)

Tendo acesso aos texto de Pappus, Descartes debruçou-se sobre o então chamado “Problema de Pappus”, apresentado no sétimo livro de sua obra “*Coleção Matemática*”. E sendo incapaz de resolvê-lo, de forma puramente geométrica, Descartes cria a sua Geometria Analítica e resolve facilmente o problema.

Isso mostrou a Descartes o poder e a generalidade de seu ponto de vista, e em consequência ele escreveu a obra *La Géométrie*, que levou a Geometria Analítica ao conhecimento de seus contemporâneos.

Descartes afirmou que para determinar as várias propriedades geométricas de uma curva é preciso conhecer pelo menos uma das propriedades, que deve ser usada como definição e exprimir as coordenadas de um ponto qualquer desta curva por meio de uma equação. Passa a existir uma nova forma de classificar as curvas por meio de equações. Ele também apresentou construções mecânicas simples, conhecidas como “construções de jardineiro”, para a elipse e para a hipérbole.

### 2.16 Fermat (1601-1660)

Fermat também criou uma geometria de coordenadas que era bem mais semelhante com a Geometria Analítica atual do que a de Descartes.

Também classificou as cônicas pelas suas equações. Seu método consiste em manipular as coordenadas de um ponto da curva até surgirem as propriedades das cônicas.

Segundo [21], Fermat mostrou que as equações obtidas a partir da equação geral do segundo grau caracteriza curvas cônicas.

### 2.17 Desargues (1593-1662)

A sua obra sobre secções cônicas “Esboço Tosco de uma Tentativa de Tratar o Resultado Entre um Cone e um Plano ” foi repudiada pelos matemáticos da época, com exceção de Descartes e Pascal. Apesar do título não ser agradável, a ideia em que se baseia a obra é a essência da simplicidade, derivada da perspectiva renascentista e do princípio de continuidade de Kepler.

Desargues lançou as bases da Geometria Projetiva e usou no seu tratado sobre cônicas. Viu as cônicas como perspectivas de um círculo como base, visto a partir do vértice do cone, dentro de um plano secante à projeção, que pode ser uma mesa. Isto permitiu transportar para as cônicas propriedades válidas para o círculo. Este tratado possibilitou uma unificação de diversas cônicas, incluindo retas e círculos. Sua abordagem permitiu uma generalização maior do que qualquer outra.

### 2.18 Pascal (1623-1662)

Discípulo de Desargues, Pascal enunciou, em sua obra de 1640 (com apenas 17 anos), o Teorema do Hexagrama Místico ou Hexagrama de Pascal que ocupa lugar central em sua teoria da cônicas. Este teorema produz uma aplicação importante: “qualquer cônica é completamente definida por cinco pontos”.

### 2.19 Cavalieri (1598-1647), Witt (1629-1672) e Newton (1643-1727)

Apresentaram construções de cônicas a partir de retas sem usar o cone. Sendo que Newton resolveu o problema de Pappus, sem usar Geometria Analítica, teve um especial interesse pelo movimento dos planetas e geração das cônicas a partir das retas tangentes.

## 2.20 Dandelin (1794-1847)

Dandelin forneceu uma abordagem sintética moderna de se obter rapidamente os focos de uma secção cônica dados o cone e um plano secante. Ele usou a propriedade bifocal para justificar que a curva que surge da secção de um cone com um plano é uma cônica.

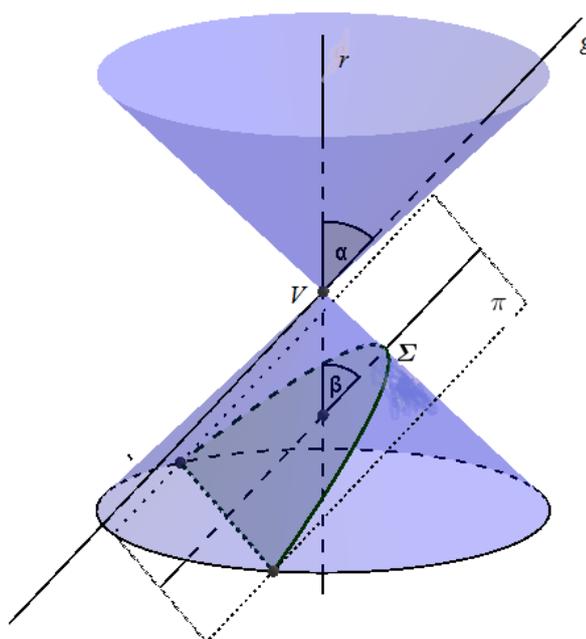
### 2.20.1 As secções cônicas segundo Dandelin

Consideremos as retas  $r$  e  $g$ , se intersectando em um ponto  $V$ , formando assim, um ângulo  $\alpha$ , tal que  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Rotacionando  $g$  em torno de  $r$ , obtemos um cone circular de duas folhas, onde  $r$  é o eixo do cone,  $g$  é uma *geratriz*,  $V$  é o vértice e  $\alpha$  é o semiângulo ou ângulo gerador do cone. Seccionando esse cone com um plano  $\pi$ , que não passe por  $V$  e que faz com  $r$  um ângulo  $\beta$ , teremos uma curva  $\Sigma$ , onde  $\Sigma$  é:

- Uma parábola, se  $\alpha = \beta$  (Figura 15) ;
- Uma hipérbole, se  $0^\circ \leq \beta < \alpha$  (Figura 16);
- Uma elipse, se  $\alpha < \beta < 180^\circ$  (Figura 17).

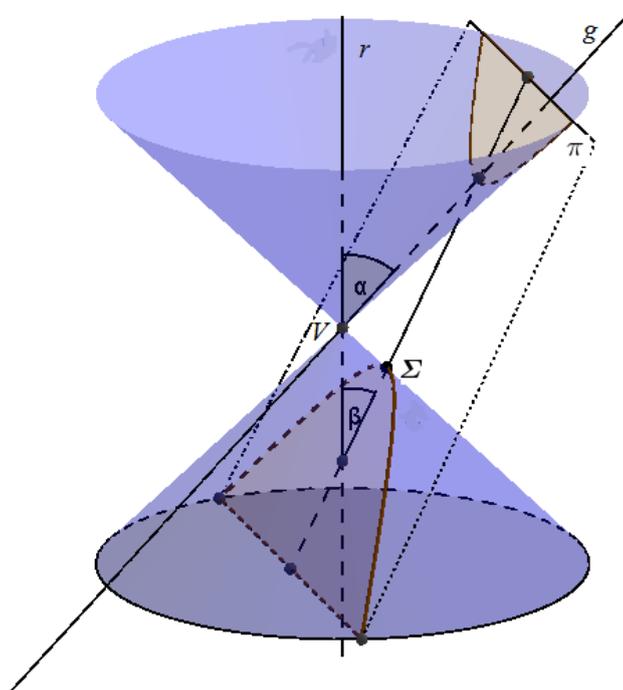
Notemos que a elipse é uma circunferência quando  $\beta = 90^\circ$ .

Figura 15 – Parábola segundo Dandelin



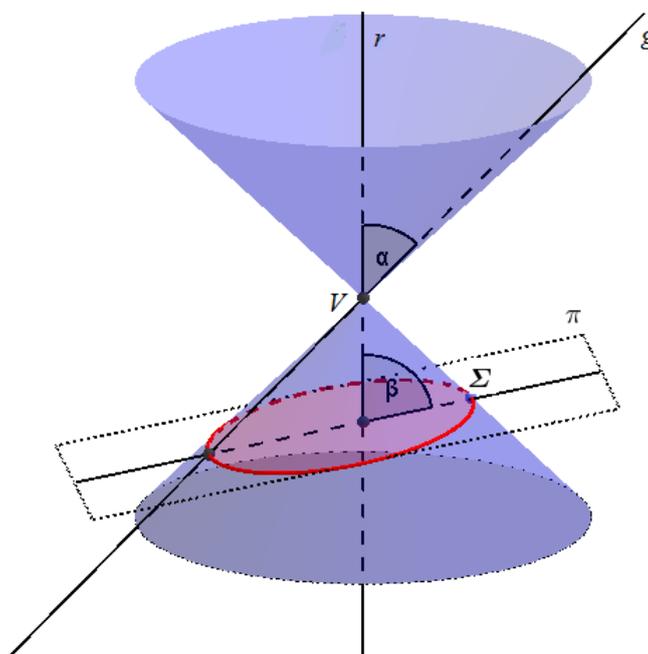
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Hipérbole segundo Dandelin



Fonte: Elaborada pelo autor.

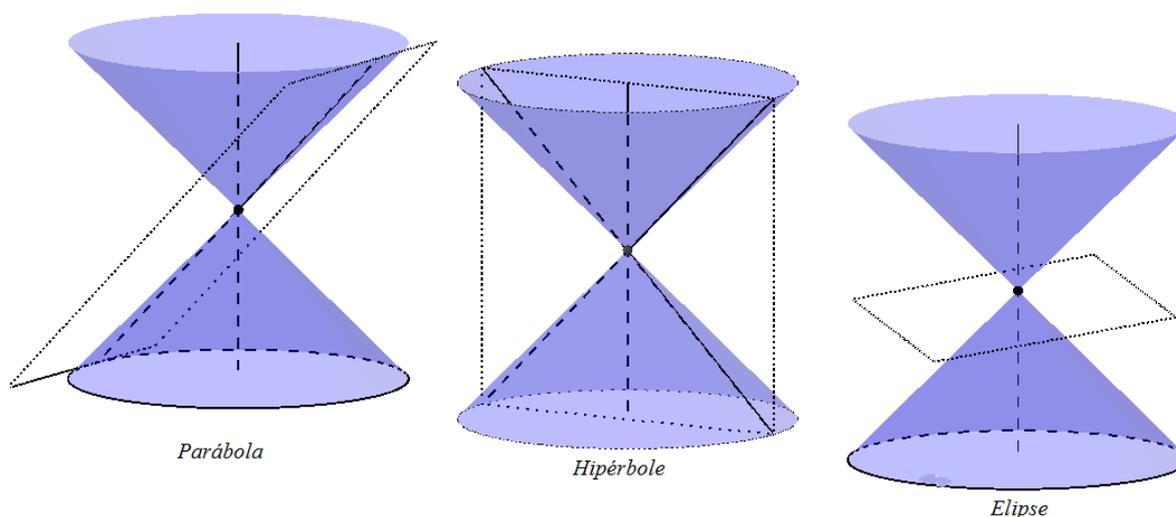
Figura 17 – Elipse segundo Dandelin



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se  $\pi$  passar pelo ponto  $V$ , teremos: se  $\alpha = \beta$ ;  $0^\circ \leq \beta < \alpha$  e  $\alpha < \beta < 180^\circ$ , respectivamente, os casos degenerados da parábola (uma reta), hipérbole (duas retas concorrentes) e elipse (Um ponto) (Figura 18).

Figura 18 – Casos degenerados



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 2.20.2 As esferas de Dandelin

Em sua construção, Dandelin considera a existência de esferas inscritas no cone de modo que sejam tangenciadas por todas as geratrizes do cone e pelo plano secante ao mesmo.

As intersecções das esferas com o cone formam circunferências, por onde podemos passar planos perpendiculares ao eixo do cone (planos:  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  nas figuras 19, 20 e 21)

Se a secção cônica for hipérbole ou elipse, existem duas esferas  $S_1$  e  $S_2$  e, conseqüentemente, as respectivas circunferências  $c_1$  e  $c_2$  e os pontos  $F_1$  e  $F_2$  de intersecção do plano secante  $\pi$  com as esferas. Como no caso da parábola existe apenas uma esfera  $S$ , conseqüentemente, uma única circunferência  $c$  e um único ponto  $F$  de intersecção do plano secante a referida esfera.

### 2.20.2.1 Definição focal das cônicas segundo Dandelin

Definições com referência aos focos já eram conhecidas antes de Dandelin, o diferencial de sua obra foi localizar, os focos e diretrizes em referência a um cone.

Em sua abordagem sintética, Dandelin resgatou e adaptou o Teorema 2.1 (Apolônio), chegando, assim, ao seguinte resultado:

**Proposição 2.1.** A secção de um cone circular, por um plano tangente a uma esfera, inscrita neste cone, é uma cônica que tem foco no ponto de tangência da esfera com o plano secante.

Antes de demonstrarmos esta proposição, lembremos que o foco e a diretriz de uma parábola são o ponto e a reta que equidistam de um ponto  $P$  pertencente à parábola, os focos de uma hipérbole são os dois pontos cujo módulo da diferença de suas distâncias à um ponto  $P$  pertencente a hipérbole é constante e os focos de uma elipse são os dois pontos cuja soma das distância a um ponto  $P$  pertencente à elipse é constante.

**Demonstração:**

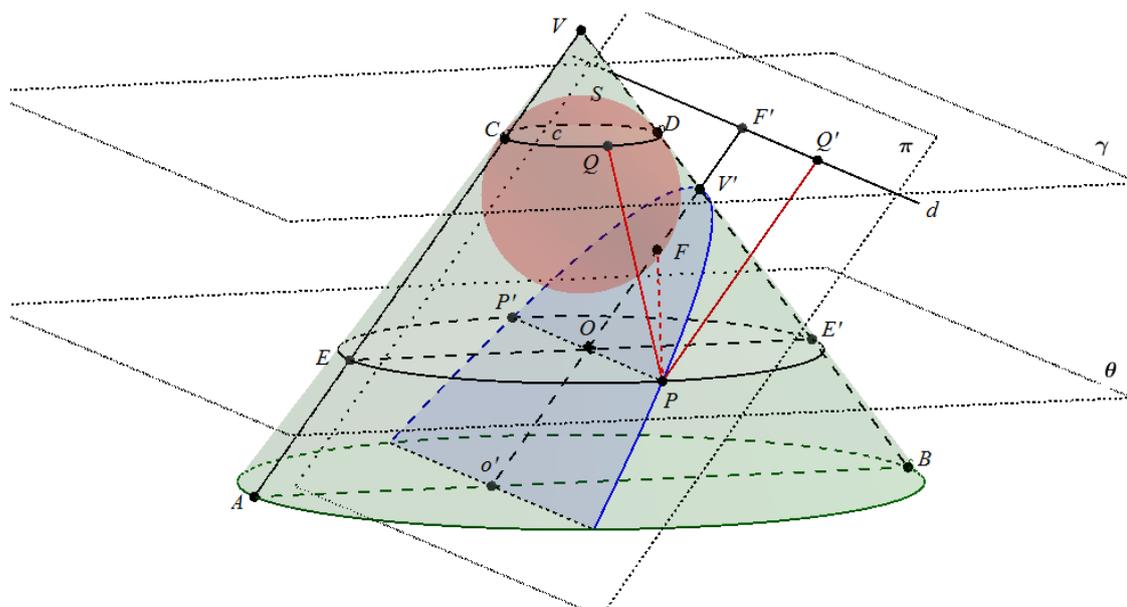
**1º caso: parábola**

Tomemos um cone seccionado por um plano secante, cujo ângulo com o eixo  $e$  seja igual ao semiângulo do vértice  $V$ , isto é, a secção formada é uma parábola, cujo eixo  $F'O'$  é paralelo a geratriz  $VA$  do cone. Considerando a esfera  $S$ , inscrita no cone, segundo a circunferência  $c$ , e tangente ao plano secante, no ponto  $F$ , tracemos um plano  $\gamma$  pela circunferência  $c$  que intersecta o plano secante na reta  $d$ .

Mostremos que o ponto  $F$  é o foco da parábola.

Tomemos, então, um ponto  $P$  pertencente à parábola e pensemos em uma geratriz do cone passando por  $P$ , temos que esta geratriz tangencia  $S$  no ponto  $Q$ . (Figura 19).

Figura 19 – Parábola no cone de Dandelin



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tracemos por  $P$ , um plano  $\theta$ , paralelo a  $\gamma$ , obtemos assim, um tronco de

cone de geratrizes  $E'D$ ,  $PQ$  e  $CE$  (contida na geratriz  $VA$ ), como o segmento  $F'O$  está contido no segmento  $F'O'$ , temos que  $F'O$  é paralelo  $CE$ , onde  $F'$  e  $C$  pertencem a  $\gamma$  e  $O$  pertencem a  $\theta$ , logo, podemos observar a formação do paralelogramo  $CEOF'$ . De modo análogo, chegamos ao paralelogramo  $F'OPQ'$ , onde  $Q'$  é a projeção de  $P$  sobre a reta  $d$ , então os segmentos  $PQ'$ ,  $OF'$  e  $CE$  são paralelos, logo

$$d(P, Q') = d(O, F') = d(C, E). \quad (2.16)$$

Por outro lado, temos que  $PQ$  e  $PF$  tangenciam a esfera  $S$ , logo

$$d(F, P) = d(P, Q), \quad (2.17)$$

e os segmentos  $CE$  e  $PQ$  são geratrizes do tronco de cone limitado pelos planos  $\gamma$  e  $\theta$ , então

$$d(C, E) = d(P, Q), \quad (2.18)$$

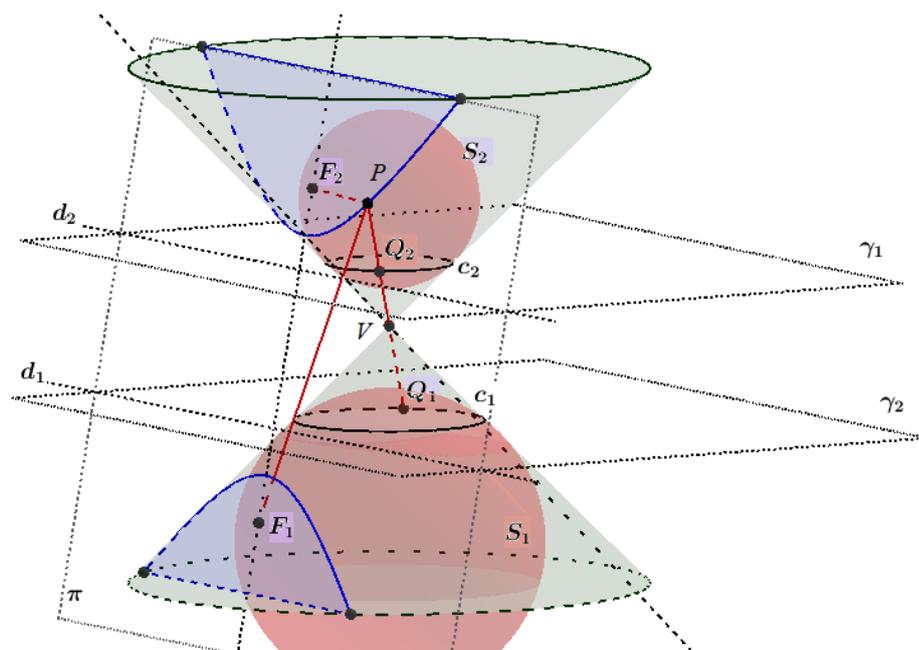
portando, de 2.16, 2.17 e de 2.18, temos

$$d(F, P) = d(P, Q').$$

C.Q.D.

## 2º caso: hipérbole

Figura 20 – Hipérbole no cone de Dandelin



Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideremos um cone seccionado por um plano secante  $\pi$  que faz um ângulo com o eixo do cone menor do que o semiângulo do vértice  $V$ , então a secção do cone com o plano secante é uma hipérbole (Figura 20), façamos agora duas esfera  $S_1$  e  $S_2$ , sendo cada uma, em uma folha do cone, seccionando-o segundo as circunferências  $c_1$  e  $c_2$  e tangenciando o plano nos pontos  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, e partindo do ponto  $F_1$ .

Mostremos que os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole.

Tomemos o segmento  $Q_1P$ , contido em uma geratriz, onde  $Q_1$  e  $P$  pertencem, respectivamente, a  $c_1$  e a hipérbole. Como  $Q_1P$  está contido em uma geratriz, então existe um ponto  $Q_2$  pertencente a intersecção de  $Q_1P$  com  $c_2$ , logo

$$d(P, Q_1) = d(P, Q_2) + d(Q_2, Q_1). \quad (2.19)$$

Mas como os pontos  $Q_1$  e  $F_1$  pertencem, respectivamente, a  $c_1$  e a intersecção do plano secante com a esfera, temos que  $Q_1$  e  $F_1$  pertencem à esfera  $S_1$  e, de modo análogo, concluímos que  $Q_2$  e  $F_2$  pertencem a esfera  $S_2$ . Dessa forma, temos

$$d(P, F_1) = d(P, Q_1) \quad (2.20)$$

e

$$d(P, F_2) = d(P, Q_2). \quad (2.21)$$

Então, de 2.19, 2.20 e 2.21, temos

$$d(P, F_1) = d(P, Q_1)$$

$$d(P, F_1) = d(P, Q_2) + d(Q_2, Q_1)$$

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = d(Q_2, Q_1),$$

Onde  $Q_2Q_1$  é o segmento contido na geratriz  $g$  que passa por  $V$ . Logo, podemos pensar em  $Q_2Q_1$ , como sendo o segmento que gera um cone circular reto limitado pelos planos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  cujas respectivas base são  $c_2$  e  $c_1$ . Portanto  $Q_2Q_1$  é uma constante real  $k$ .

Se partirmos de  $F_2$ , obtemos, de modo análogo

$$d(P, F_2) - d(P, F_1) = d(Q_1, Q_2) = d(Q_2, Q_1) = k.$$

Portanto

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = k = d(P, F_2) - d(P, F_1) \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k.$$

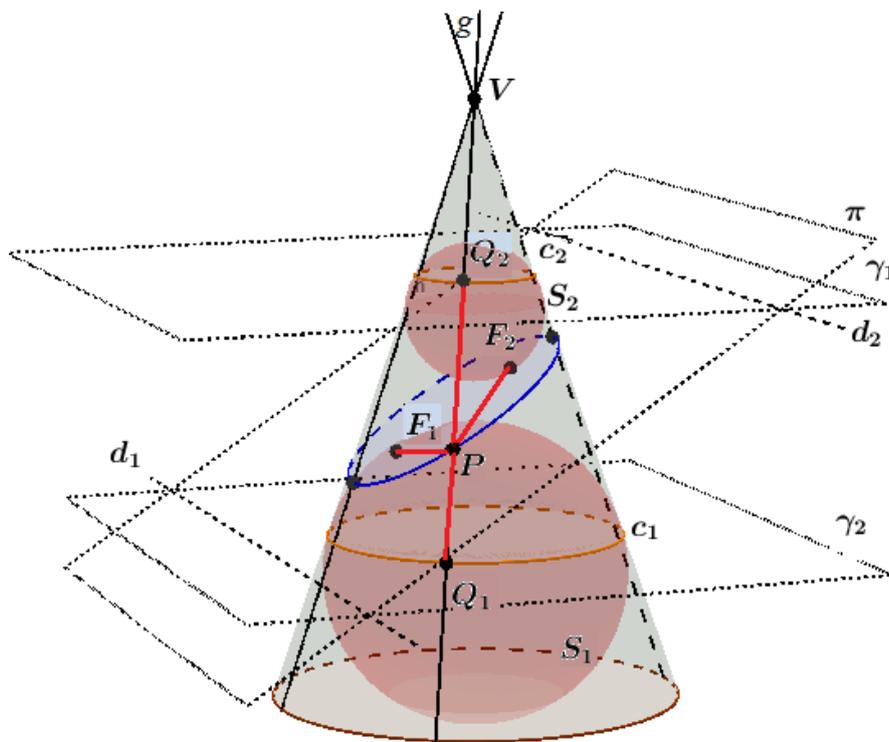
C.Q.D.

O plano secante é o plano  $\pi$ , os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole e as retas  $d_1$  e  $d_2$  (Figura 20) são as diretrizes da hipérbole.

### 3º caso: elipse

Suponhamos agora que um cone seja seccionado por um plano cujo ângulo com o eixo do cone seja maior do que o semiângulo do vértice  $V$ , então a secção é uma elipse. De mesma maneira que na hipérbole podemos ter também duas esferas  $S_1$  e  $S_2$ , inscritas no cone, segundo as circunferências  $c_1$  e  $c_2$ , e tangentes ao plano secante em  $F_1$  e  $F_2$  (Figura 21).

Figura 21 – Elipse no cone de Dandelin



Fonte: Elaborada pelo autor.

Mostremos que  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da elipse.

Tomemos então uma diretriz  $g$ , intersectando os pontos  $Q_1, P$  e  $Q_2$ , onde  $Q_1, Q_2$  e  $P$  pertencem, respectivamente, a  $c_1, c_2$  e a elipse, logo, a esfera  $S_1$  é tangenciada por  $PQ_1$  e  $PF_1$  e  $S_2$  é tangenciada por  $PQ_2$  e por  $PF_2$ , então

$$d(P, F_1) = d(P, Q_1) \quad (2.22)$$

e

$$d(P, F_2) = d(P, Q_2). \quad (2.23)$$

Como  $Q_1, P$  e  $Q_2$  são colineares, com  $P$  entre  $Q_1$  e  $Q_2$ , segue de 2.22 e 2.23,

$$d(Q_1, Q_2) = d(P, Q_1) + d(P, Q_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2)$$

Como no caso da hipérbole, o segmento  $Q_1Q_2$  é uma constante real  $k$ , portanto

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k.$$

C.Q.D.

Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da elipse, o plano secante é o plano  $\pi$  e as retas  $d_1$  e  $d_2$  são as diretrizes da elipse.

Dandelin também mostrou que, com exceção da circunferência (caso particular da elipse), toda secção cônica não degenerada tem suas *diretrizes* coincidindo com as retas formadas na intersecção do plano  $\pi$ , que define a cônica, com os planos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  que contêm as circunferências  $c_1$  e  $c_2$ , formadas pelas intersecções do cone com as esferas  $S_1$  e  $S_2$ , casos da hipérbole e elipse.

Como só existe uma esfera no caso da parábola, segue que haverá um só plano  $\gamma$  e, conseqüentemente, uma única diretriz (Figura 19, 20 e 21).

Apresentemos então o seguinte resultado.

**Proposição 2.2.** A secção de um cone circular, por um plano tangente a uma esfera inscrita nesse cone, é uma cônica cujas diretrizes coincidem com a intersecção do plano secante ao cone com os planos que passam pelas circunferências formadas na intersecção do cone com as esferas inscritas.

O leitor interessado pode encontrar a demonstração deste resultado em [15].

### 3 AS CÔNICAS NO PLANO

No capítulo anterior, foi feita uma abordagem histórica e sintética, mostrando alguns resultados importantes bem como algumas definições, com enfoque mais acentuado ao tratamento das secções cônicas no cone.

Neste capítulo, será feito um estudo sintética das cônicas não degeneradas no plano e, para aplicação em capítulo posterior, serão apresentados alguns resultados. Começemos por uma definição geral de uma cônica por meio de seu foco, sua diretriz e de sua excentricidade.

**Definição 3.1** (Definição geral de uma cônica). Dado um ponto  $F$ , uma reta  $d$  e um número real positivo  $e$ , o lugar geométrico do ponto  $P$ , tal que  $\frac{d(F,P)}{d(P,d)} = e$  é uma secção cônica  $C$ , de foco  $F$ , diretriz  $d$  e excentricidade  $e$ .

#### 3.1 Parábola

**Definição 3.2** (via foco-diretriz). Dada uma reta  $d$  e um ponto  $F \notin d$ , chamamos de parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$  ao conjunto de todos os pontos  $P$  cuja razão entre as distância de  $P$  a  $F$  e a distância de  $P$  a  $d$  é igual a 1, isto é,  $\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = 1$ .

Definindo a distância entre um ponto  $P$  qualquer a uma reta  $d$ , como sendo a distância de  $P$  a  $P'$ , tal que  $P'$  pertence a  $d$  e o segmento  $PP'$  é perpendicular a  $d$ , onde esse ponto  $P'$  é chamado de projeção do ponto  $P$  sobre a reta  $d$ , logo

$$d(P,d) = d(P,P')$$

Assim, se  $P$  é um ponto da parábola, temos que

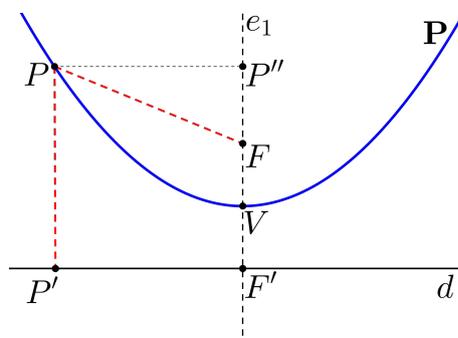
$$d(F,P) = d(P,P') = d(P,d).$$

Considere uma parábola  $\mathbf{P}$  (Figura 22), de foco  $F$  e diretriz  $d$  e considerando a reta  $r$  perpendicular a  $d$  no ponto  $F'$  e que passa pelo foco  $F$ , temos os seguintes elementos de  $\mathbf{P}$ :

- A reta  $r$  é a reta focal ou eixo focal da parábola.
- O ponto  $V$ , intersecção da reta focal com a parábola, é o vértice da parábola. Além disso,  $V$  é o ponto médio do segmento  $FF'$  pois  $d(F,V) = d(V,F')$ .
- A distância entre o foco  $F$  e diretriz  $d$  é o parâmetro da parábola e vamos denotá-lo por  $2p$ , isto é,  $d(F,d) = 2p$ .

- d) Um segmento  $FP$  qualquer da parábola  $\mathbf{P}$ , onde  $P \in \mathbf{P}$  e  $F$  é foco de  $\mathbf{P}$  é chamado de raio focal de  $\mathbf{P}$ .

Figura 22 – Parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$

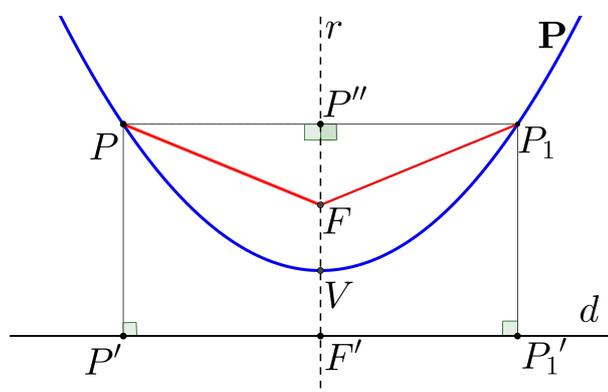


Fonte: Elaborada pelo autor

**Proposição 3.1.** Toda parábola é simétrica em relação ao seu eixo focal.

**Demonstração:** consideremos uma parábola  $\mathbf{P}$ , um ponto  $P \in \mathbf{P}$  e o ponto  $P_1$ , simétrico de  $P$  em relação a reta focal  $r$  de  $\mathbf{P}$  (Figura 23).

Figura 23 – Simetria em relação ao eixo da parábola  $\mathbf{P}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Mostremos que  $P_1$  é ponto da parábola. Para isso, observe que a reta focal passa, perpendicularmente, pelo ponto médio  $M$  do segmento  $PP_1$ . Logo, os triângulos  $PMF$  e  $P_1MF$  são congruentes ( $LAL$ ). Em particular

$$d(P, F) = d(P_1, F).$$

Além disso,

$$d(P, d) = d(P'', d) = d(P_1, d),$$

pois  $F'P'PP''$  e  $F'P'_1P_1P''$  são retângulos.  
 Como  $P \in \mathbf{P}$ , temos que

$$d(P, F) = d(P, d),$$

portanto,

$$d(P_1, F) = d(P_1, d),$$

ou seja,  $P_1 \in \mathbf{P}$ .

C.Q.D.

Uma parábola divide o plano em duas regiões (Figura 24): a *região interior* e a *região exterior* à parábola.

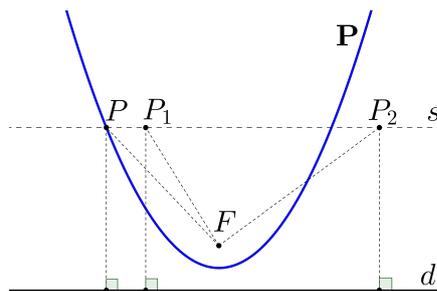
A região interior à parábola é aquela que contém o foco e todo ponto  $P$ , tal que

$$d(F, P) < d(P, d).$$

A região exterior à parábola é aquela que contém a diretriz e todo ponto  $P$ , tal que

$$d(F, P) > d(P, d).$$

Figura 24 – Pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivos pontos interior e exterior à parábola  $\mathbf{P}$

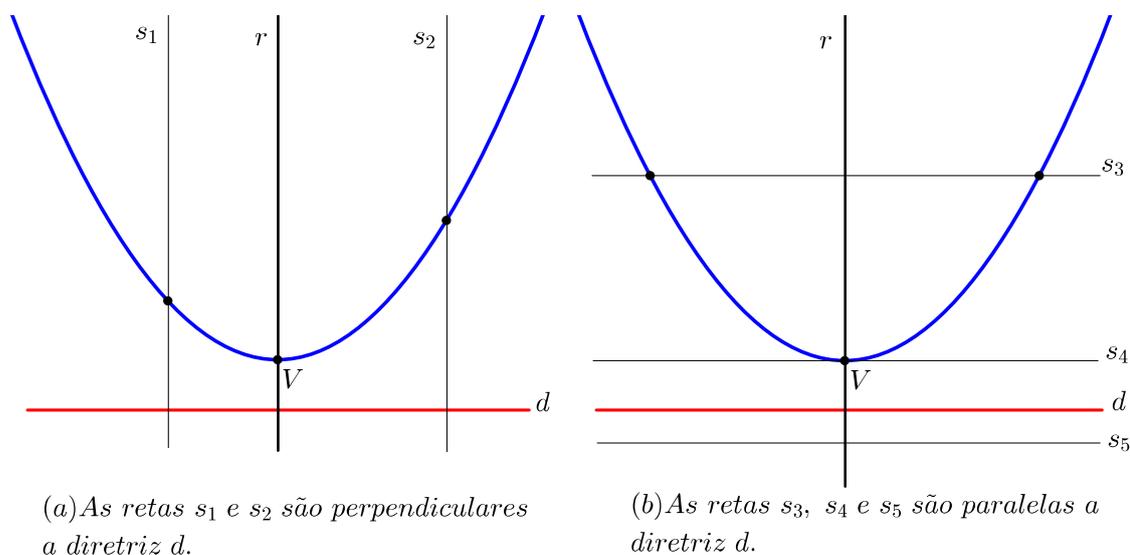


Fonte: Elaborada pelo autor

Uma reta  $s$ , contida no mesmo plano que contém uma parábola  $\mathbf{P}$  e perpendicular a diretriz  $d$  de  $\mathbf{P}$ , intersecta  $\mathbf{P}$  em um único ponto, além disso,  $s$  terá pontos na região interior e na região exterior à parábola  $\mathbf{P}$ . Veja Figura 25 (a).

Se  $s$  é uma reta paralela a  $d$ , temos: a intersecção é vazia, quando  $s$  está contida na região exterior à  $\mathbf{P}$ ; ou um único ponto, quando  $s$  passa pelo vértice de  $\mathbf{P}$  ou em dois pontos quando  $s$  passa pelo interior de  $\mathbf{P}$ . Veja Figura 25 (b).

Figura 25 – Retas contidas num plano que contém uma parábola

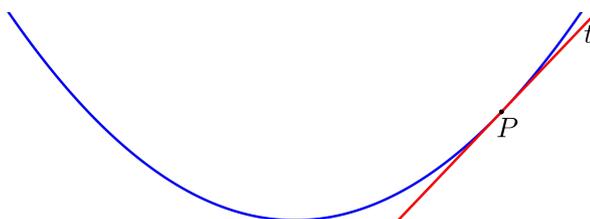


Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base no que definimos anteriormente, daremos a seguinte definição de reta tangente a uma parábola.

**Definição 3.3** (Reta tangente a uma parábola). Dizemos que uma reta  $t$  é tangente a uma parábola quando  $t$  intersecta um único ponto  $P$  pertencente à parábola e todos os outros pontos de  $t$  são pontos exteriores à parábola.

Figura 26 – Tangente  $t$  a uma parábola no ponto  $P$ .



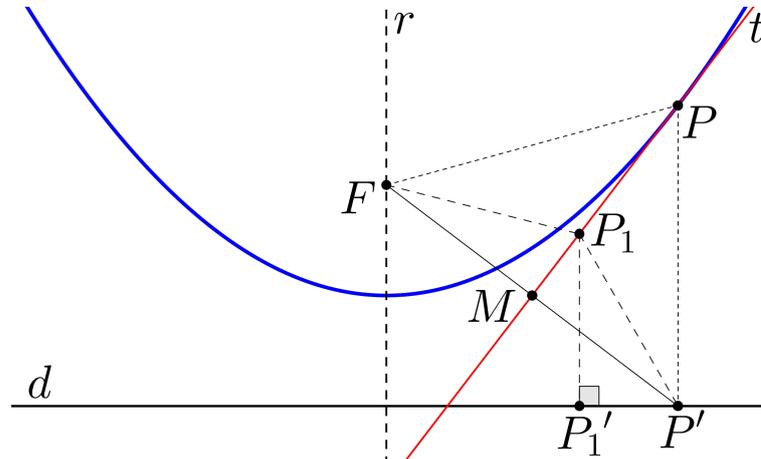
Fonte: Elaborada pelo autor

Neste caso dizemos que a reta  $t$  tangencia a parábola no ponto  $P$ . Observando-se a Figura 26, é bastante visível que a reta tangente divide o plano em dois semiplanos, deixando todos os pontos da parábola em apenas um desses semiplanos.

**Proposição 3.2.** Sendo um ponto  $P$  pertencente a uma parábola  $\mathbf{P}$  de foco  $F$  e diretriz  $d$ ,  $P'$  a projeção de  $P$  sobre  $d$  e  $t$  a reta mediatriz do segmento  $FP'$ , no ponto  $M$  (Figura 27), então:

1.  $t$  é bissetriz do ângulo  $FPP'$ ;
2.  $t$  é a única reta tangente a  $\mathbf{P}$  em  $P$ .

Figura 27 – Mediatriz  $t$  a  $FP'$



Fonte: Elaborada pelo autor

**Demonstração:** de fato,  $t$  é bissetriz do ângulo  $FPP'$ , pois os triângulos  $PMF$  e  $PMP'$  são congruentes (*caso LAL*), e  $t$  é única, pois é definida pelos pontos  $M$  e  $P$ .

Para mostrarmos que  $t$  é tangente a  $\mathbf{P}$  em  $P$ , basta tomarmos um ponto genérico  $P_1$  pertencente a reta  $t$  e diferente de  $P$  e mostrarmos que  $P_1$  pertence a região exterior à parábola  $\mathbf{P}$ .

Tomemos a projeção  $P'_1$  de  $P_1$  sobre  $d$ , temos então o triângulo  $P_1P'_1P'$ , retângulo em  $P'_1$ , logo

$$d(P_1, P') > d(P_1, P'_1).$$

Como  $P_1$  pertence à reta mediatriz de  $FP'$ , então os triângulos  $P_1MF$  e  $P_1MP'$  são congruentes (*caso LAL*), logo

$$d(F, P_1) = d(P_1, P'),$$

então

$$d(F, P_1) > d(P_1, d),$$

logo  $P_1$  pertence à região exterior à parábola  $\mathbf{P}$ , portanto  $t$  é tangente a  $\mathbf{P}$  em  $P$ .

C.Q.D.

**Corolário 3.1.** Toda reta tangente a uma parábola intersecta o eixo de simetria.

**Corolário 3.2.** A reta paralela a diretriz que passa pelo vértice  $V$  da parábola  $\mathbf{P}$  é tangente a  $\mathbf{P}$  em  $V$  e é a única reta tangente à parábola que não intersecta a reta diretriz.

Por vias de curiosidade, apresentemos o seguinte resultado:

**Proposição 3.3.** Dadas duas parábolas  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  quaisquer, temos que  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  são semelhantes.

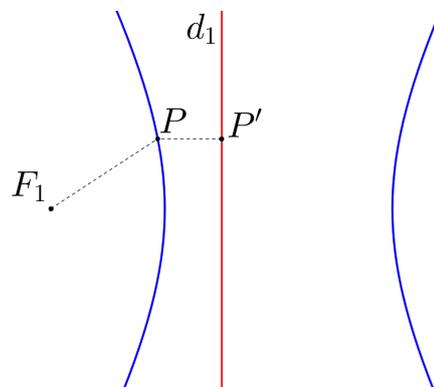
A demonstração desta proposição vai além do estudo proposto neste trabalho. Mas um leitor mais curioso pode encontrá-la em [10].

### 3.2 Hipérbole

**Definição 3.4** (Via foco-diretriz). Dado um número  $e > 1$ , um ponto  $F_1$  e uma reta  $d_1$ , com  $F_1 \notin d_1$ . Chamamos de hipérbole  $\mathbf{H}$  de excentricidade  $e$ , foco  $F_1$  e diretriz  $d_1$ , ao conjunto de todos os pontos  $P$  do plano cuja razão entre a distância de  $P$  a  $F_1$  e a distância de  $P$  a  $d_1$  é  $e$ , isto é,

$$\frac{d(F_1, P)}{d(P, d_1)} = e.$$

Figura 28 – Hipérbole de foco  $F_1$ , diretriz  $d_1$ , excentricidade  $e = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor

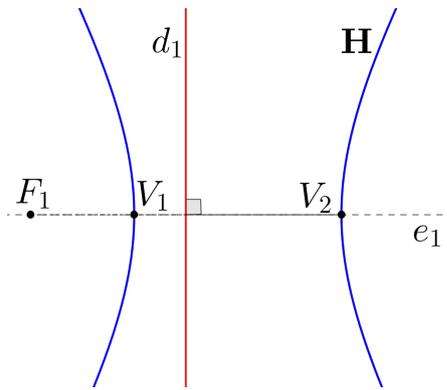
Passando pelo foco  $F_1$  de uma hipérbole  $\mathbf{H}$  uma reta  $e_1$ , perpendicular a  $d_1$ , teremos os pontos  $V_1$  e  $V_2$  pertencentes a  $e_1$  e que satisfazem a condição

$$\frac{d(F_1, V_1)}{d(V_1, d_1)} = \frac{d(F_1, V_2)}{d(V_2, d_1)} = e,$$

ou seja,  $V_1$  e  $V_2$  são pontos de  $\mathbf{H}$  (Figura 29).

A reta  $e_1$  é denominada reta focal da hipérbole.

Figura 29 – Reta  $e_1$  que passa pelo foco  $F_1$  da hipérbole  $\mathbf{H}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Em toda hipérbole  $\mathbf{H}$ , de foco  $F_1$ , diretriz  $d_1$  e excentricidade  $e$ , é possível encontrar um ponto  $F_2 \in e_1$  e uma reta  $d_2$ , perpendicular a  $e_1$ , distintos de  $F_1$  e de  $d_1$ , respectivamente, onde

$$d(F_1, V_1) = d(F_2, V_2)$$

e

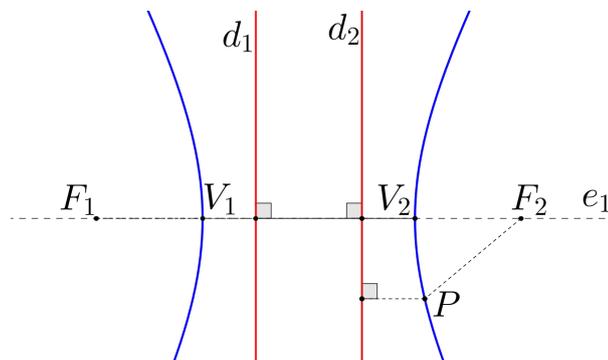
$$d(V_1, d_1) = d(V_2, d_2)$$

e que quando dado um ponto  $P \in \mathbf{H}$ , ter-se-á

$$\frac{d(F_2, P)}{d(P, d_2)} = e,$$

isto é, podemos encontrar um segundo foco  $F_2$  e uma segunda diretriz  $d_2$  para a hipérbole  $\mathbf{H}$  (Figura 30).

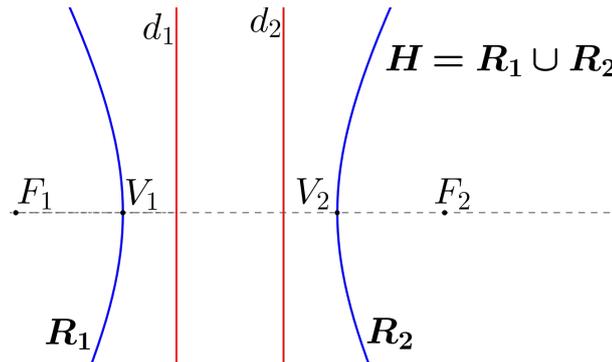
Figura 30 – Hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ , diretrizes  $d_1$  e  $d_2$  e excentricidade  $e = 2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos, então, observar que existem dois ramos na hipérbole que denotaremos por  $\mathbf{R}_1$ , o ramo que se localiza entre o foco  $F_1$  e a diretriz  $d_1$  e que passa pelo ponto  $V_1$  e  $\mathbf{R}_2$ , o ramo que, passando por  $V_2$ , está entre o foco  $F_2$  e  $d_2$ . É possível, também notar que a hipérbole divide o plano em três regiões, onde a região delimitada pelos ramos  $\mathbf{R}_1$  ou  $\mathbf{R}_2$  que contém um foco é chamada de *região interior* à hipérbole e a região que contém as diretrizes é denominada de *região exterior* à hipérbole (Figura 31).

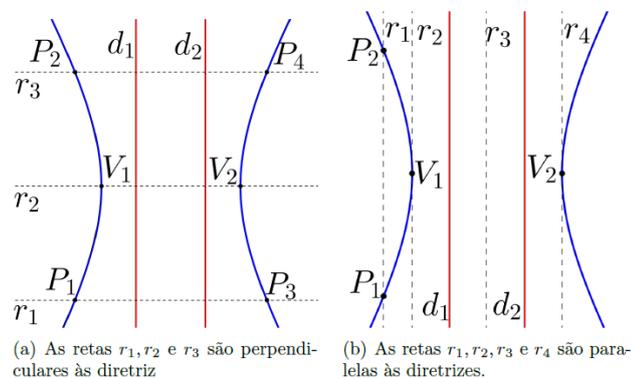
Figura 31 – Hipérbole  $\mathbf{H}$  como união dos ramos  $\mathbf{R}_1$  com  $\mathbf{R}_2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vale salientar que quando uma reta  $r$  é perpendicular às diretrizes, ela passa pelas três regiões delimitadas pela hipérbole e, conseqüentemente, intersecta a mesma em dois pontos. Já no caso em que  $r$  é paralela às diretrizes, podemos ter:  $r$  contida na região exterior, neste caso,  $r$  não intersecta a hipérbole; ou  $r$  intersecta a hipérbole em  $V_1$ , ou em  $V_2$ . Se  $r$  passa pela região interior à hipérbole, então  $r$  tem pontos na região interior e na região exterior à hipérbole e a intersecta em dois pontos (Figura 32).

Figura 32 – Retas secantes a uma hipérbole



(a) As retas  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são perpendiculares às diretriz

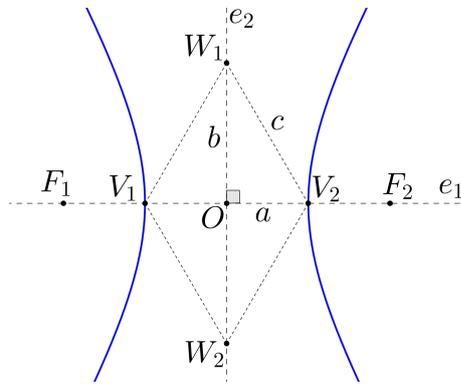
(b) As retas  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$  são paralelas às diretrizes.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Traçando-se pelo ponto médio  $O$ , do segmento  $V_1V_2$ , uma reta  $e_2$  perpendicular a  $e_1$ , pode-se construir os triângulos  $V_1OW_1$ ,  $V_1OW_2$ ,  $V_2OW_1$  e  $V_2OW_2$ , retângulos

em  $O$ , onde as distâncias  $d(V_1, W_1), d(V_1, W_2), d(V_2, W_1)$  e  $d(V_2, W_2)$  são todas iguais a metade da distância entre os focos da hipérbole, denotaremos por  $2a$ , a distância  $d(V_1, V_2)$ , por  $2b$  a distância  $d(W_1, W_2)$  e  $2c$  a distância  $d(F_1, F_2)$  (Figura 33).

Figura 33 – Triângulos formados com o centro e vértices de uma hipérbole.

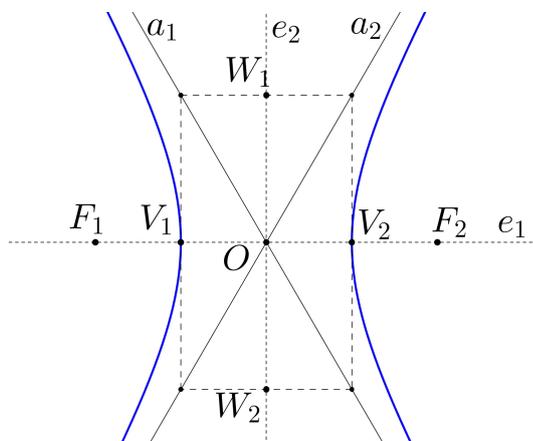


Fonte: Elaborada pelo autor.

Chamamos o ponto  $O$  de centro da hipérbole, a reta  $e_2$  de reta não focal da hipérbole, os pontos  $V_1$  e  $V_2$  são os vértices sobre a reta focal e  $W_1$  e  $W_2$  são os vértices sobre a reta não focal, o segmento  $V_1V_2$  é o eixo focal da hipérbole e  $W_1W_2$  é o eixo não focal da hipérbole.

Traçando-se por  $W_1$  e  $W_2$  dois segmentos paralelos e com o mesmo comprimento do segmento  $V_1V_2$ , de modo que  $W_1$  seja ponto médio de um destes segmentos e  $W_2$  seja ponto médio do outro e fazendo  $V_1$  e  $V_2$  serem os respectivos pontos médios de dois segmentos paralelos a  $W_1W_2$  e de mesmo comprimento de  $W_1W_2$ , teremos o retângulo de base (Figura 34).

Figura 34 –  $a_1$  e  $a_2$  são as assíntotas da hipérbole.



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Definição 3.5** (Assíntotas). São as retas  $a_1$  e  $a_2$  (Figura 3.5) que passam pelo centro  $O$  da hipérbole, contêm as duas diagonais do retângulo de base e se aproximam da hipérbole, a medida que se prolongam, as assíntotas e a hipérbole.

Denotemos,  $d(O, V_i) = a$ ,  $d(O, W_i) = b$  e  $d(O, F_i) = d(V_i, W_j) = c$ , com  $i = 1, 2$  e  $j = 1, 2$ . Veja Figura 33.

Se um ponto  $Q$  é equidistante de  $F_1$  e  $F_2$ , assim como de  $V_1$  e  $V_2$ , o ponto  $P$  pertence à reta não focal. Além disso, a reta não focal está contida na região exterior à hipérbole.

Como  $d(O, V_1) = a$ ,  $d(O, W_1) = b$  e  $d(V_1, W_1) = c$ , temos, pela Figura 33 e pelo Teorema de Pitágoras, a seguinte relação:

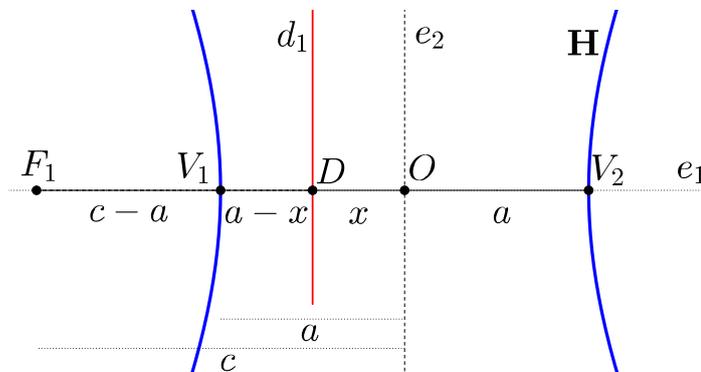
$$c^2 = a^2 + b^2$$

com  $a, b$  e  $c$  números reais positivos.

**Proposição 3.4.** A excentricidade  $e$  pode ser dada pela razão entre  $c$  e  $a$ , isto é,

$$e = \frac{c}{a}.$$

Figura 35 – Distâncias vértice, diretriz e foco da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

**Demonstração:** Temos pela Definição 3.4. que dado um ponto  $P \in \mathbf{H}$ , então

$$d(F_i, P) = e \cdot d(P, d_i),$$

com  $i = 1, 2$ . Considerando então os vértices  $V_1$  e  $V_2$  de  $\mathbf{H}$ , o foco  $F_1$ , a diretriz  $d_1$  e fazendo de  $x$  a distância entre a diretriz  $d_1$  e a reta  $e_2$  (Figura 35), temos:

$$d(F_1, V_1) = e \cdot d(V_1, d_1) \implies c - a = e \cdot (a - x), a > x, \quad (3.1)$$

e

$$d(F_1, V_2) = e.d(V_2, d_1) \implies c + a = e.(a + x) \quad (3.2)$$

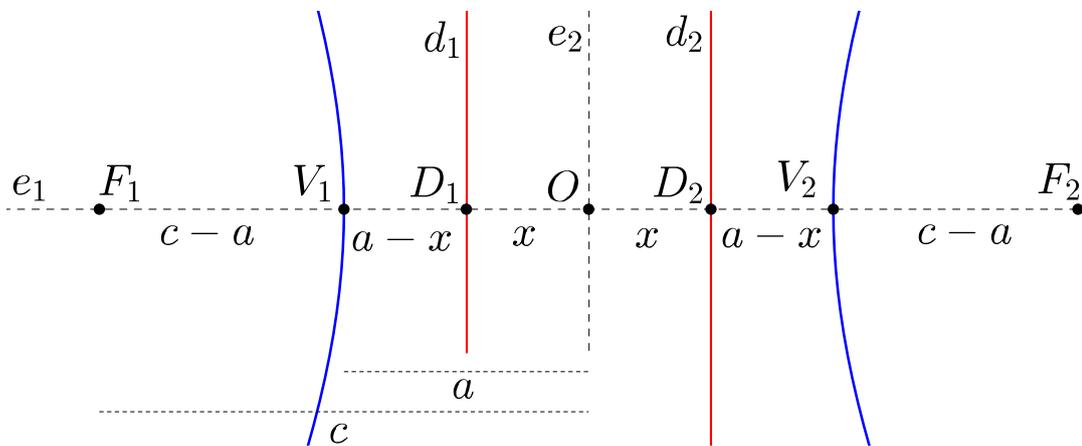
Somando 3.1 com 3.2, tem-se,

$$c - a + c + a = e(a - x) + e(a + x) \implies 2c = 2ae \implies e = \frac{c}{a}.$$

C.Q.D.

**Proposição 3.5.** A razão entre as distâncias  $d(V_1, V_2)$  e  $d(d_1, d_2)$  é igual a excentricidade.

Figura 36 – Distâncias entre diretrizes e vértices da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

**Demonstração:** Considere a hipérbole da Figura 36.

Pela Definição 3.4

$$d(F_1, V_1) = e.d(V_1, d_1).$$

Como

$$d(F_1, V_1) = c - a$$

e

$$d(V_1, d_1) = a - x,$$

temos

$$\begin{aligned} d(F_1, V_1) = e.d(V_1, d_1) &\implies c - a = e(a - x) \implies c - a = ea - ex \implies c - a = \frac{c}{a}.a - ex \implies \\ c - a &= c - ex \implies ex = a \implies e.2x = 2a \implies e.d(d_1, d_2) = d(V_1, V_2). \end{aligned}$$

Portanto,

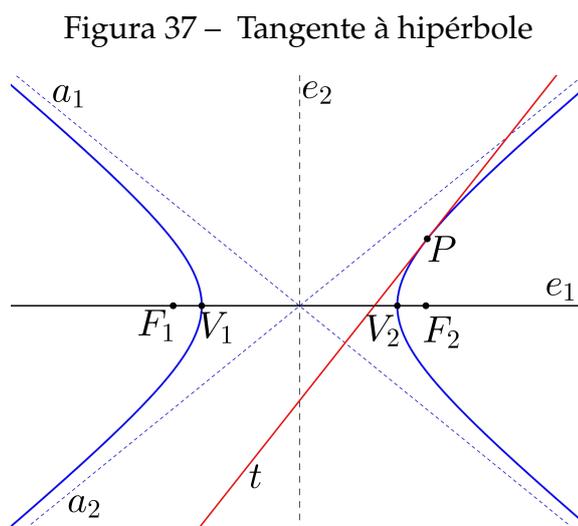
$$\frac{d(V_1, V_2)}{d(d_1, d_2)} = e.$$

C.Q.D.

**Definição 3.6** (Reta tangente a uma hipérbole). Define-se como reta tangente a uma hipérbole, a toda reta que intersecta a hipérbole em apenas um ponto  $P$  e todos os seus demais pontos pertencem à região exterior à hipérbole (Figura 37).

Pela Definição 3.6, podemos observar que a reta  $t$ , paralela a uma diretriz e que passe por um vértice sobre a reta focal de uma hipérbole, é tangente à hipérbole no referido vértice.

Com exceção das tangentes que passam pelos vértices sobre a reta focal, que são paralelas à reta não focal, todas as tangentes a uma hipérbole intersectam a reta focal e a reta não focal, além disso, todas as tangentes a uma hipérbole intersectam as assíntotas da mesma.

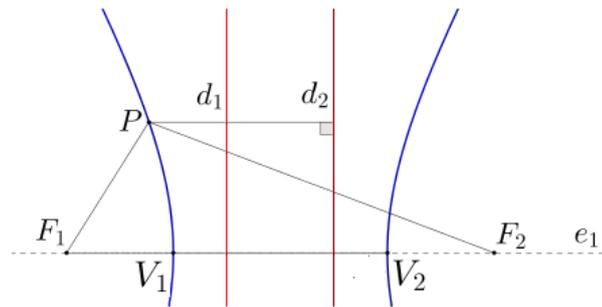


Fonte: Elaborada pelo autor.

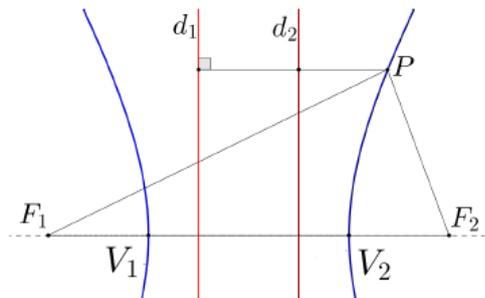
**Proposição 3.6.** Se um ponto  $P \in \mathbf{H}$ , então o valor absoluto da diferença entre as distâncias de  $P$  a  $F_1$  e a distância de  $P$  a  $F_2$  é igual a distância de  $V_1$  a  $V_2$ .

**Demonstração:** Seja o ponto  $P$  pertencente a uma hipérbole  $\mathbf{H}$ , com focos  $F_1$  e  $F_2$ , diretrizes  $d_1$  e  $d_2$  e reta focal  $e_1$  (Figura 38).

Figura 38 – Um ponto  $P$  pertencente a uma hipérbole



(a)  $P$  pertence ao ramo  $R_1$  da hipérbole



(b)  $P$  pertence ao ramo  $R_2$  da hipérbole

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Caso I:**  $P$  pertence ao ramo  $R_2$  de  $H$ .

Pela Definição 3.4, temos:

$$d(F_1, P) = e \cdot d(P, d_1)$$

e

$$d(F_2, P) = e \cdot d(P, d_2),$$

logo

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = e \cdot [d(P, d_1) - d(P, d_2)].$$

Como

$$d(P, d_1) = d(P, d_2) + d(d_2, d_1)$$

temos

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = e \cdot [(d(P, d_2) + d(d_2, d_1)) - d(P, d_2)].$$

Assim, temos

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = e \cdot d(d_2, d_1)$$

Como

$$d(d_2, d_1) = d(d_1, d_2),$$

e pela Proposição 3.5, temos:

$$e \cdot d(d_1, d_2) = d(V_1, V_2),$$

então

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = d(V_1, V_2)$$

**Caso II:**  $P$  pertence ao ramo  $\mathbf{R}_1$  de  $\mathbf{H}$ .

Neste caso, temos

$$d(P, d_2) = d(P, d_1) + d(d_1, d_2),$$

assim

$$d(F_2, P) - d(F_1, P) = d(V_1, V_2).$$

Portanto, podemos escrever

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = d(V_1, V_2) = 2a$$

C.Q.D.

A recíproca desta proposição é verdadeira e é consequência imediata da Proposição 3.7.

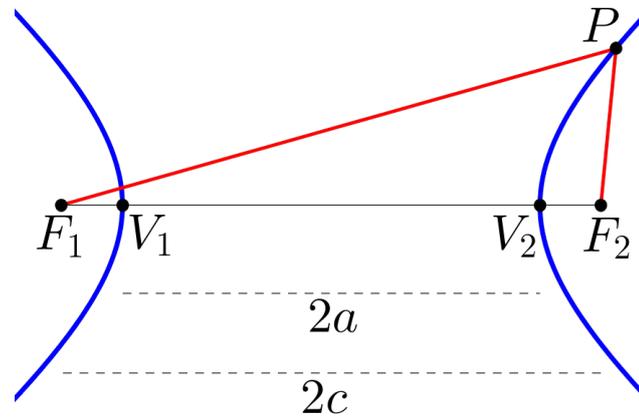
Pela Proposição 3.6, podemos dizer que a hipérbole pode ser vista como o conjunto de todos os pontos  $P$  do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a constante  $2a > 0$  onde  $2a$  é menor do que a distância entre os focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Temos

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a, \quad 0 < a < c,$$

Como já vimos,  $2a$  é a distância entre os vértices sobre a reta focal da hipérbole e  $2c$  é a distância entre os focos da mesma (Figura 39).

Figura 39 – Hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$  e vértices  $V_1$  e  $V_2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela definição 3.4, para um ponto pertencer ao mesmo plano de uma hipérbole, existem três únicas posições, mutuamente exclusivas, para este ponto em relação à hipérbole, ou o ponto pertence à região interior à hipérbole, ou o ponto pertence à hipérbole, ou o ponto pertence à região exterior à hipérbole.

**Proposição 3.7.** Dado um ponto  $P$  pertencente ao mesmo plano no qual esteja contida uma hipérbole  $\mathbf{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

(a)  $P$  pertence à região exterior à  $\mathbf{H}$  se, e somente se,

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| < 2a;$$

(b)  $P$  pertence à região interior à  $\mathbf{H}$  se, e somente se,

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| > 2a.$$

**Demonstração:** Para demonstrar esta proposição, tomemos a Figura 40. (a) Suponha que  $P$  pertence à região exterior da hipérbole  $\mathbf{H}$ .

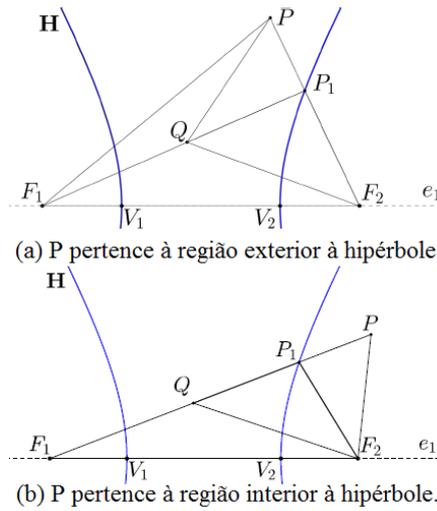
Se  $P$  é um ponto equidistante a  $F_1$  e  $F_2$ , então

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| < 2a,$$

pois

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = 0.$$

Figura 40 – Posição de um ponto  $P$  em relação a uma hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor.

Supondo que  $F_2$  seja o foco mais próximo de  $P$ , então fazemos o segmento  $F_2P$ . Como  $F_2$  e  $P$  pertencem, respectivamente, ao interior e exterior da hipérbole vai existir um ponto  $P_1$  pertence à intersecção de  $H$  com  $F_2P$ .

Considerando-se o ponto  $Q$  pertencente ao segmento  $F_1P_1$ , tal que

$$d(Q, P_1) = d(F_2, P_1),$$

Mas

$$d(F_1, P_1) = d(F_1, Q) + d(Q, P_1),$$

assim,

$$d(F_1, Q) = d(F_1, P_1) - d(Q, P_1) = d(V_1, V_2) = 2a.$$

Podemos observar a existência dos triângulos  $F_1QP$ ,  $QP_1P$  e  $F_2P_1Q$ , (Figura 40). Dessa forma, teremos pela Proposição 3.6,

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = d(V_1, V_2) = 2a.$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$d(F_1, P) < d(F_1, Q) + d(Q, P) \tag{3.3}$$

e

$$d(Q, P) < d(Q, P_1) + d(P_1, P). \tag{3.4}$$

Somando-se  $d(F_1, Q)$  nos dois membros da desigualdade 3.4, temos

$$d(F_1, Q) + d(Q, P) < d(F_1, Q) + d(Q, P_1) + d(P_1, P),$$

como

$$d(F_1, Q) = d(V_1, V_2),$$

então

$$d(F_1, Q) + d(Q, P) < d(V_1, V_2) + d(F_2, P_1) + d(P_1, P) \implies$$

$$d(F_1, Q) + d(Q, P) < d(V_1, V_2) + d(F_2, P). \quad (3.5)$$

E por 3.3 e 3.5, temos

$$d(F_1, P) < d(F_1, Q) + d(Q, P) < d(V_1, V_2) + d(F_2, P) \implies$$

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) < d(V_1, V_2)$$

Se considerarmos  $P$  mais próximo do foco  $F_1$  iremos ter, de modo análogo,

$$d(F_2, P) - d(F_1, P) < d(V_1, V_2).$$

Portanto,

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| < 2a.$$

(b) Considere agora  $P$  um ponto pertence ao interior de uma hipérbole, de forma que  $P$  está mais próximo de  $F_2$ . Tomemos o ponto  $P_1$  pertence a intersecção do segmento  $F_1P$  e o ponto  $Q$  pertencente ao segmento  $F_1P_1$ , de modo que

$$d(Q, P_1) = d(F_2, P_1). \quad (3.6)$$

Teremos então, os triângulos  $F_1QF_2$ ,  $F_2QP_1$  e  $P_1PF_2$  (Figura 40).

De modo análogo a (a), temos:

$$d(F_1, Q) = d(V_1, V_2) \quad (3.7)$$

e

$$d(F_2, P_1) + d(P_1, P) > d(F_2, P). \quad (3.8)$$

Por 3.6, temos

$$d(Q, P_1) + d(P_1, P) > d(F_2, P).$$

Somando-se  $d(F_1, Q)$  nos dois membros da desigualdade 3.2, temos

$$d(F_1, Q) + d(Q, P_1) + d(P_1, P) > d(F_1, Q) + d(F_2, P).$$

Como, de 3.7, temos

$$d(F_1, Q) + d(Q, P_1) + d(P_1, P) > d(V_1, V_2) + d(F_2, P),$$

e

$$d(F_1, Q) + d(Q, P_1) + d(P_1, P) = d(F_1, P),$$

logo

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) > d(V_1, V_2).$$

Se tomarmos  $P$  mais próximo do foco  $F_1$  vamos obter, de modo análogo,

$$d(F_2, P) - d(F_1, P) > d(V_1, V_2).$$

Portanto,

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| > 2a.$$

Para completar a demonstração, devemos mostrar que se  $P$  satisfaz as inequações

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| < 2a$$

e

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| > 2a,$$

então  $P$  será um ponto que pertence, respectivamente, à região exterior e região interior a uma hipérbole  $\mathbf{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

(a) De fato, pois sendo  $P$  um ponto pertencente ao mesmo plano no qual,  $\mathbf{H}$  está contida, com

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| < 2a,$$

temos que  $P$  pertence à região exterior à hipérbole, caso contrário, ou  $P$  pertence à hipérbole, logo

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a,$$

ou  $P$  pertence à região interior à hipérbole, logo

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| > 2a,$$

o que é um absurdo, pois

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| < 2a.$$

A demonstração da recíproca do item (b) é análoga a demonstração da recíproca de (a).

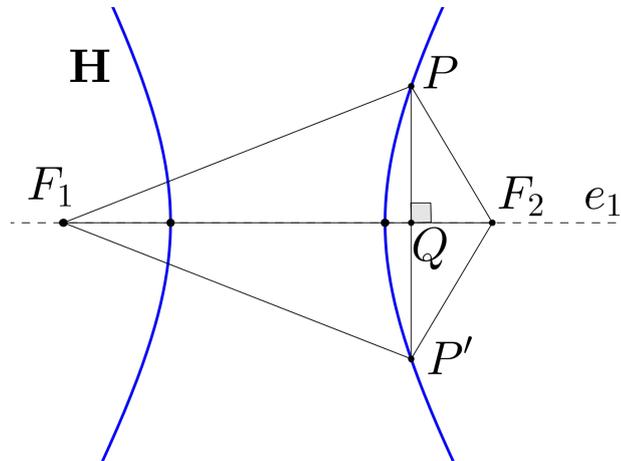
C.Q.D.

**Proposição 3.8.** Uma hipérbole  $\mathbf{H}$  é simétrica em relação à sua reta focal, à sua reta não focal e ao seu centro.

**Demonstração:**

**Caso I:** Simetria em relação à reta focal (Figura 41).

Figura 41 – Simetrias da hipérbole em relação a reta focal



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja  $P \in \mathbf{H}$ , onde  $P$  não é vértice de  $\mathbf{H}$ . Por  $P$ , passemos uma reta perpendicular a reta focal. Denotemos por  $P'$  o simétrico de  $P$  em relação a reta focal e mostremos que  $P' \in \mathbf{H}$ .

Como os triângulos  $F_1PQ$  e  $F_2PQ$  são congruentes, respectivamente, aos triângulos  $F_1P'Q$  e  $F_2P'Q$ , temos

$$d(F_2, P) = d(F_2, P')$$

e

$$d(F_1, P) = d(F_1, P').$$

Logo

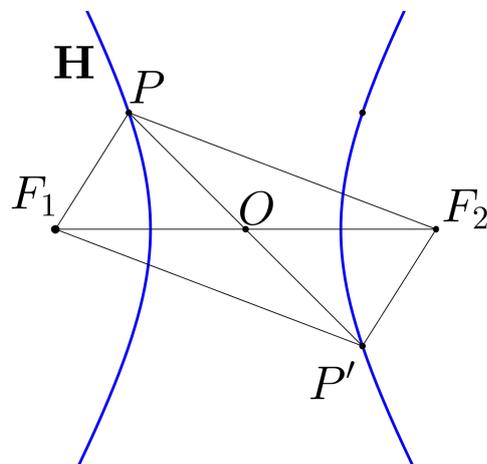
$$|d(F_1, P') - d(F_2, P')| = |d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a.$$

Portanto

$$P' \in \mathbf{H}.$$

A demonstração de simetria em relação à reta não focal (Figura 42) é similar ao caso anterior.

Figura 42 – Simetrias da hipérbole em relação a reta não focal



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Caso III:** Simetria em relação ao centro (Figura 43).

Se  $P \in \mathbf{H}$  e  $P'$  é o simétrico de  $P$  em relação ao centro, mostremos que  $P' \in \mathbf{H}$ .

Como os triângulos  $F_1OP$  e  $POF_2$  são congruentes aos triângulos  $F_2OP'$  e  $P'OF_1$ , respectivamente, temos

$$d(F_2, P) = d(F_1, P')$$

e

$$d(F_1, P) = d(F_2, P').$$

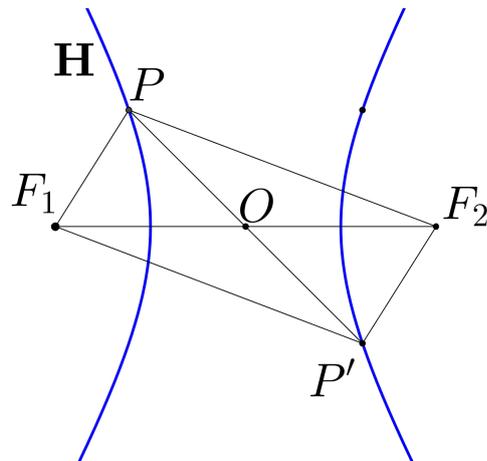
Logo,

$$|d(F_1, P') - d(F_2, P')| = |d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a,$$

assim,

$$P' \in \mathbf{H}.$$

Figura 43 – Simetrias da hipérbole em relação ao seu centro



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 3.3 Elipse

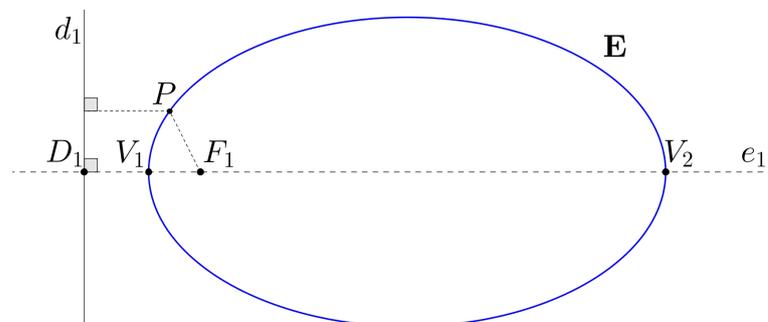
**Definição 3.7** (via foco-diretriz). Dados um número  $e$ , onde  $0 \leq e < 1$ , um ponto  $F_1$  e uma reta  $d_1$ , em um plano, com  $F_1 \notin d_1$ , o conjunto de todos os pontos  $P$  do plano cuja razão entre a distância de  $P$  a  $F_1$  e a distância de  $P$  a  $d_1$  é igual a  $e$  é chamado de elipse de excentricidade  $e$ , foco  $F_1$  e diretriz  $d_1$ .

Denotemos essa elipse por  $E$  e traçando-se uma reta  $e_1$ , perpendicular a  $d_1$  num ponto  $D_1$ , tal que  $F_1 \in e_1$ , pode-se encontrar os pontos  $V_1$  e  $V_2$ , de modo que  $V_1$  pertença ao segmento  $F_1D_1$ ,  $F_1$  pertença ao segmento  $V_1V_2$ ,

$$\frac{d(F_1, V_1)}{d(V_1, D_1)} = \frac{d(F_1, V_1)}{d(V_1, d_1)} = e \quad \text{e} \quad \frac{d(F_1, V_2)}{d(V_2, D_1)} = \frac{d(F_1, V_2)}{d(V_2, d_1)} = e,$$

isto é,  $V_1$  e  $V_2$  pertencem à elipse  $E$  (Figura 44).

Figura 44 – Elipse  $E$  de foco  $F_1$ , diretriz  $d_1$  e excentricidade  $e$



Fonte: Elaborada pelo autor.

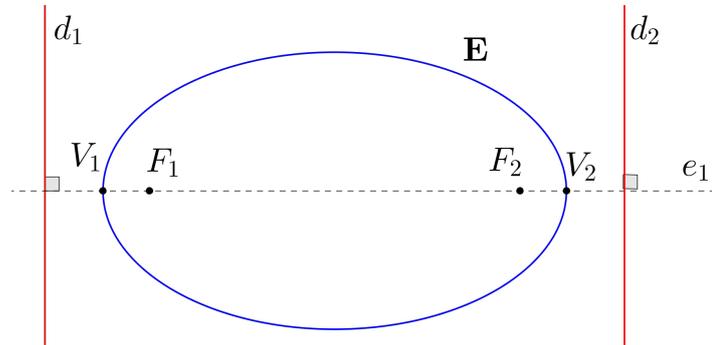
Como na hipérbole, uma elipse também tem um segundo foco  $F_2$  e uma segunda diretriz  $d_2$ , onde

$$d(F_1, V_1) = d(F_2, V_2)$$

e

$$d(V_1, d_1) = d(V_2, d_2) \text{ (Figura 45).}$$

Figura 45 – Elipse  $E$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  e diretrizes  $d_1$  e  $d_2$

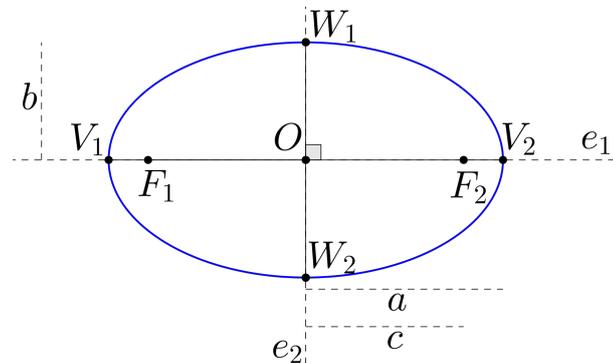


Fonte: Elaborada pelo autor.

Chamamos a reta  $e_1$  de reta focal da elipse, os pontos  $V_1$  e  $V_2$  são os vértices sobre a reta focal, o segmento  $V_1V_2$  é o eixo focal.

Traçando-se pelo ponto médio  $O$  do eixo focal da elipse uma reta  $e_2$ , perpendicular a  $e_1$ , temos que  $e_2$  intersecta a elipse nos pontos  $W_1$  e  $W_2$ . A reta  $e_2$  é chamada de reta não focal,  $W_1$  e  $W_2$  são os vértices da elipse sobre a reta não focal e o segmento  $W_1W_2$  é o eixo não focal da elipse. A exemplo da hipérbole vamos denotar por  $2a$  a distância  $d(V_1, V_2)$ ,  $2b$  a distância  $d(W_1, W_2)$  e  $2c$  a distância  $d(F_1, F_2)$  (Figura 46).

Figura 46 – Elipse de focos  $F_i$  e vértices  $V_i$  e  $W_j$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se um ponto  $P$  equidista de  $F_1$  e  $F_2$ , então  $P$  também equidista de  $V_1$  e  $V_2$  e pertence a  $e_2$ .

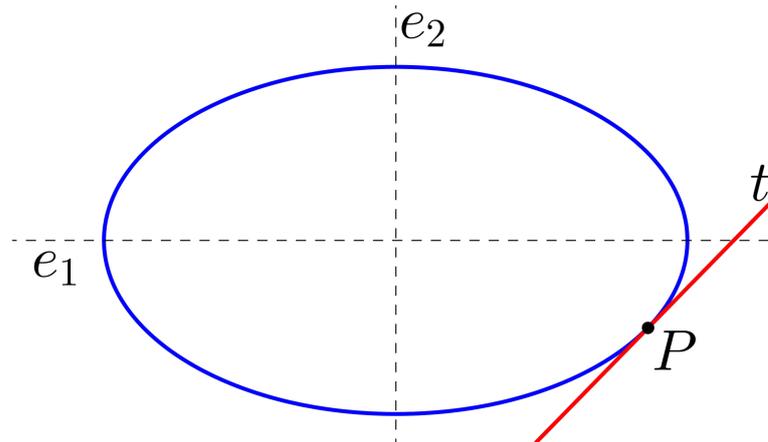
O ponto  $O$  é chamado de centro da elipse e, como na hipérbole, ele também é o ponto médio dos segmentos  $W_1W_2$  e  $F_1F_2$ . Logo, podemos dizer que  $d(O, V_i) = a$ ,  $d(O, W_i) = b$  e  $d(O, F_i) = c$ , com  $i = 1, 2$  (Figura 46).

Observando a Figura 46, podemos notar a existência dos triângulos  $F_iOW_j$  e  $V_iOW_j$ , retângulos em  $O$ , com  $i = 1, 2$  e  $j = 1, 2$ .

Uma elipse também divide o plano em duas regiões: a *região interior* à elipse é aquela que contém os focos e a *região exterior* à elipse é aquela que não contém os focos e contém as diretrizes.

**Definição 3.8** (Reta tangente a uma elipse). Uma reta  $t$  é dita tangente a uma elipse  $E$  em um ponto  $P$ , se  $t$  intersecta  $E$  em um único ponto  $P$  e todos os outros pontos pertencentes à  $t$  pertencem à região exterior à  $E$ .

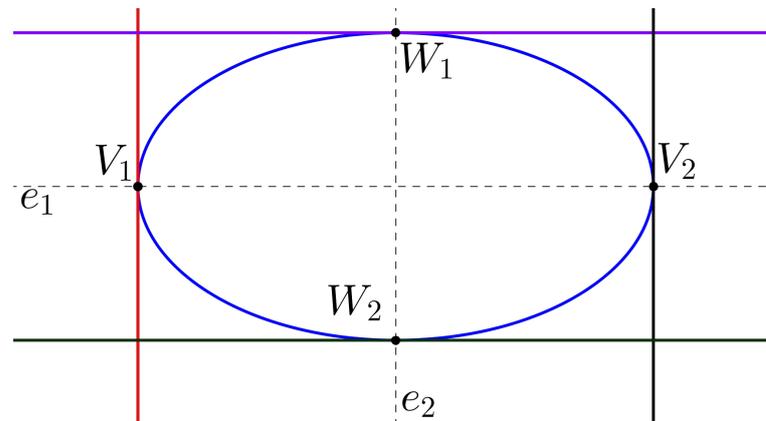
Figura 47 – Reta tangente à uma elipse.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que exceto as tangentes que passam pelos vértices sobre a reta focal, que são paralelas à reta não focal, e as tangentes que passam pelos vértices sobre a reta não focal, que são paralelas à reta focal, todas as retas tangentes à uma elipse se intersectam e intersectam a reta focal e a reta não focal. (Figura 48).

Figura 48 – Tangentes sobre os vértices de uma elipse.



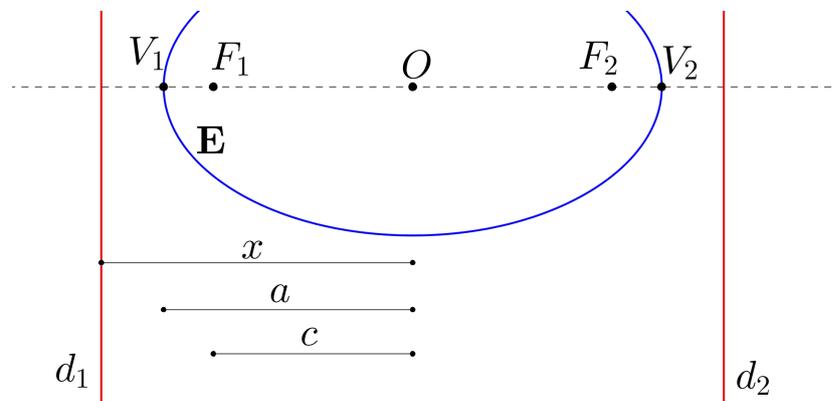
Fonte: Elaborada pelo autor.

**Proposição 3.9.** A excentricidade  $e$  de uma elipse pode ser dada por

$$e = \frac{c}{a}.$$

**Demonstração:** Considere a elipse da Figura 49.

Figura 49 –  $x, a$  e  $c$  são as respectivas distâncias entre o centro e as diretrizes, os focos e os vértices  $V_1$  e  $V_2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como

$$d(F_1, V_1) = d(F_2, V_2)$$

e

$$d(V_1, d_1) = d(V_2, d_2).$$

Pela Figura 49, temos

$$d(F_1, V_1) = a - c,$$

$$d(V_1, d_1) = x - a,$$

$$d(F_1, V_2) = a + c$$

e

$$d(V_2, d_1) = a + x.$$

Logo, pela Definição 3.7, temos:

$$a - c = e(x - a) \tag{3.9}$$

e

$$a + c = e(a + x) \tag{3.10}$$

Fazendo 3.10 – 3.9, teremos

$$a + c - (a - c) = e(a + x) - e(x - a) \implies 2c = e.2a \implies e = \frac{c}{a}$$

C.Q.D.

**Proposição 3.10.** A excentricidade  $e$  de uma elipse é igual a razão entre as distâncias  $d(V_1, V_2)$  e  $d(d_1, d_2)$ .

**Demonstração:** Considere ainda a Figura 49. Da Definição 3.7, temos

$$d(F_1, V_1) = e.d(V_1, d_1),$$

como

$$d(F_1, V_1) = a - c \quad e \quad d(V_1, d_1) = x - a,$$

então

$$a - c = e.(x - a) \implies a - c = e.x - e.a.$$

E da Proposição 3.9,

$$a - c = ex - \frac{c}{a}a \implies a - c = ex - c \implies a = ex \implies e = \frac{2a}{2x},$$

logo

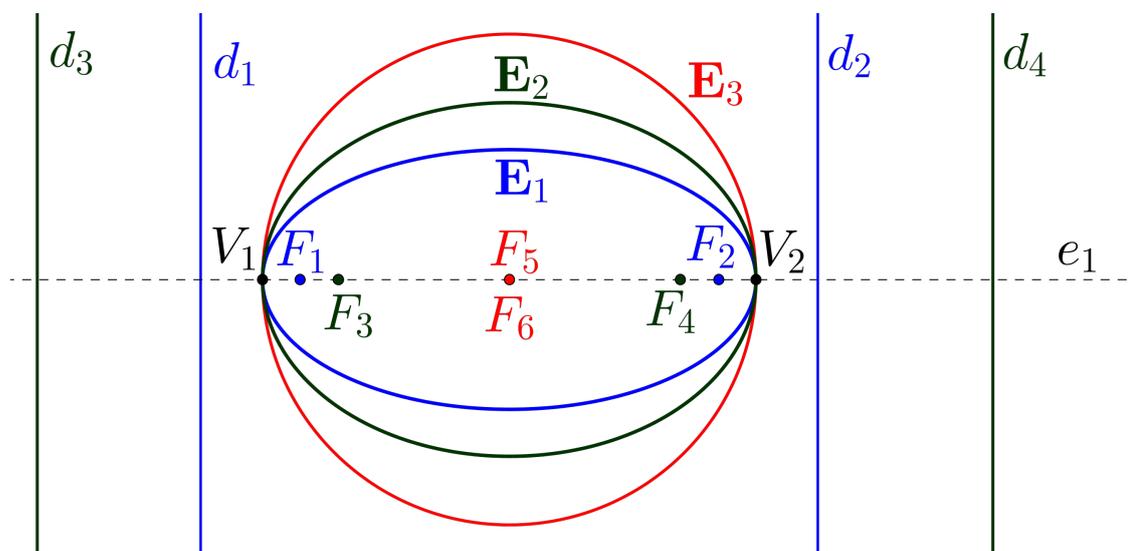
$$e = \frac{d(V_1, V_2)}{d(d_1, d_2)}.$$

C.Q.D.

Vale destacar que quando a excentricidade tende para zero a elipse tende para uma circunferência e quando a excentricidade tende para 1 a elipse tende para um segmento de reta, isto é, quanto mais próximo de zero for o valor da excentricidade mais arredondada é a elipse e quanto mais próximo de 1 for a excentricidade, mais achatada será a elipse.

Notemos que a Figura 50, apresenta as elipses:  $E_1$  de focos  $F_1$  e  $F_2$ , diretrizes  $d_1$  e  $d_2$  e excentricidade  $e = 0,85$ ;  $E_2$  com focos  $F_3$  e  $F_4$ , diretrizes  $d_3$  e  $d_4$  e excentricidade  $e = 0,69$  e  $E_3$  de focos  $F_5$  e  $F_6$ , cujas diretrizes não aparecem e excentricidade  $e = 0$ . O que nos faz pensar que os focos se aproximam e as diretrizes se distanciam a medida que a excentricidade diminui. Sendo que quando os focos coincidem ( $F_5$  e  $F_6$ ) as diretrizes tendem para o infinito, chegando-se a uma circunferência (caso da elipse  $E_3$ ).

Figura 50 – Variação da forma da elipse em função do valor da excentricidade.

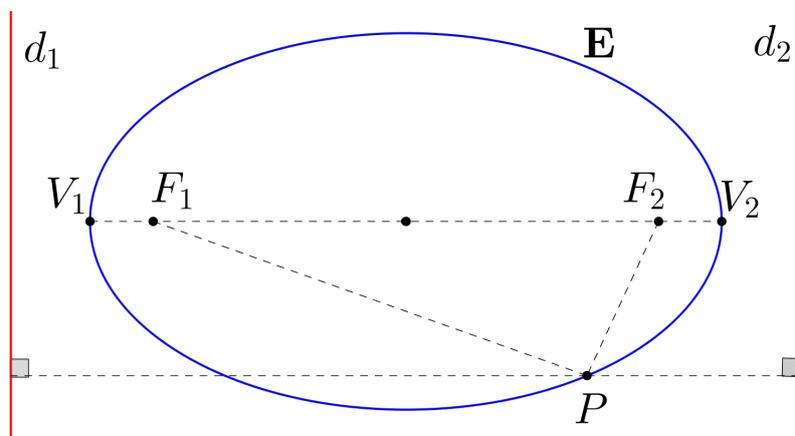


Fonte: Elaborada pelo autor.

**Proposição 3.11.** Sendo  $P$  um ponto pertencente a uma elipse  $E$ , temos que a soma das distâncias de  $P$  aos focos é igual a distância entre os vértices sobre a reta focal.

**Demonstração:** Seja uma elipse  $E$  com focos  $F_1$  e  $F_2$  e diretrizes  $d_1$  e  $d_2$ , (Figura 51), temos pela Definição 3.7,

Figura 51 – Relação entre a distância dos focos a um ponto  $P$  e a distância de  $P$  às diretrizes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$d(F_1, P) = e \cdot d(P, d_1)$$

e

$$d(F_2, P) = e \cdot d(P, d_2).$$

Assim

$$\begin{aligned} d(F_1, P) + d(F_2, P) &= e \cdot d(P, d_1) + e \cdot d(P, d_2) \\ &= e[d(P, d_1) + d(P, d_2)] \\ &= e \cdot d(d_1, d_2). \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.10, temos

$$e \cdot d(d_1, d_2) = d(V_1, V_2),$$

logo

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = d(V_1, V_2).$$

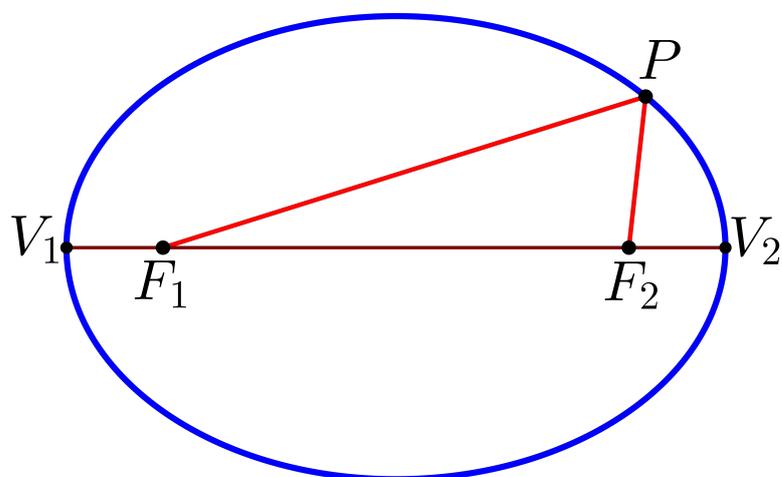
C.Q.D.

Assim, Uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto de pontos  $P$  cuja soma da distância de  $P$  a  $F_1$  com a distância de  $P$  a  $F_2$  é a constante  $2a > 0$ , maior do que  $2c$  (Figura 52).

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$$

Como já sabemos  $2a$  é a distância entre os vértices sobre a reta focal e  $2c$  é a distância entre os focos da elipse.

Figura 52 – Distância de focos a um ponto da elipse.

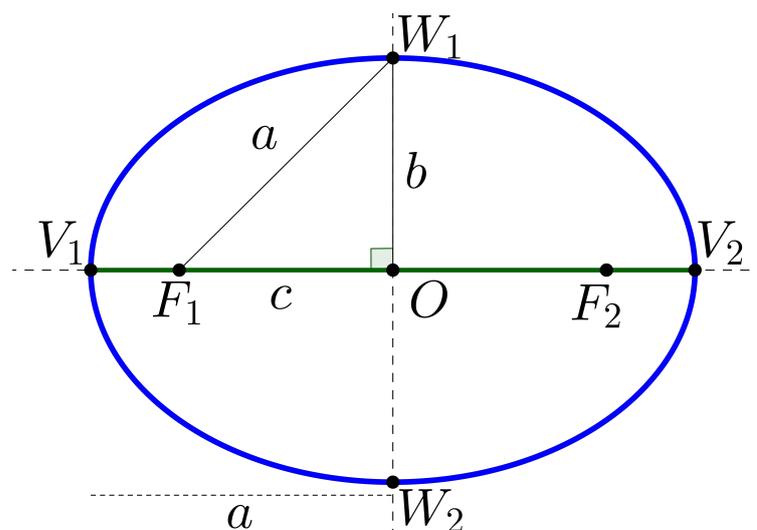


Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja uma elipse  $E$  de centro  $O$ , focos  $F_1$  e  $F_2$ , vértices sobre a reta focal  $V_1$  e  $V_2$  e vértices sobre a reta não focal  $W_1$  e  $W_2$ , segue então, o seguinte resultado:

**Proposição 3.12.** A distância de um foco a um vértice sobre a reta não focal é igual a distância de um vértice sobre a reta focal ao centro da elipse, isto é,  $d(F_i, W_j) = d(O, V_k)$ , com  $i = 1, 2, j = 1, 2$  e  $k = 1, 2$ .

Figura 53 – Teorema de Pitágoras na elipse.



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Demonstração:** Como  $W_j$  pertence a  $e_2$ , então  $W_j$  é equidistante a  $F_i$ . E, pelo fato de  $W_j$  pertencer a  $E$ , segue que

$$d(F_1, W_j) + d(F_2, W_j) = d(V_1, V_2) \implies 2.d(F_i, W_j) = 2.d(O, V_k) \implies d(F_i, W_j) = d(O, V_k)$$

C.Q.D.

Em consequência a esta proposição, temos a seguinte relação (Figura 53):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

**Proposição 3.13.** Sendo um ponto  $P$  pertencente a um plano  $\alpha$  que contem uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ , então:

(a)  $P$  pertence à região interior à elipse se, e somente se,

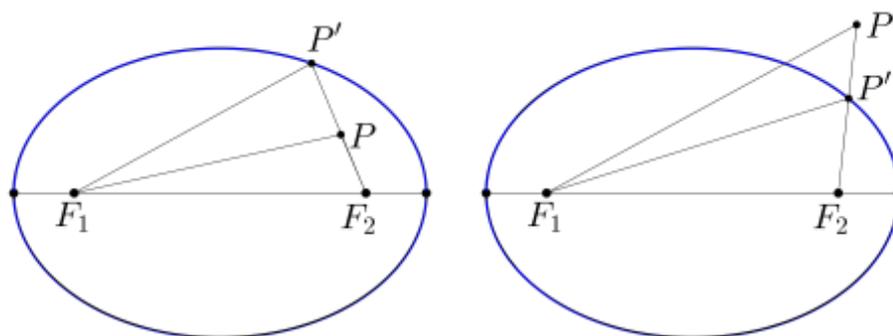
$$d(F_1, P) + d(F_2, P) < 2a;$$

(b)  $P$  pertence à região exterior à elipse se, e somente se,

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) > 2a.$$

A demonstração desta proposição é análoga à demonstração da Proposição 3.5. Veja Figura 54.

Figura 54 – Posição de um ponto em relação a uma elipse



(a) O ponto  $P$  pertence à região interior à elipse.

(b) O ponto  $P$  pertence à região exterior à elipse.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em consequência a esta proposição temos que se tomarmos os pontos  $P$ ,  $F_1$  e  $F_2$ , coplanares, de forma que

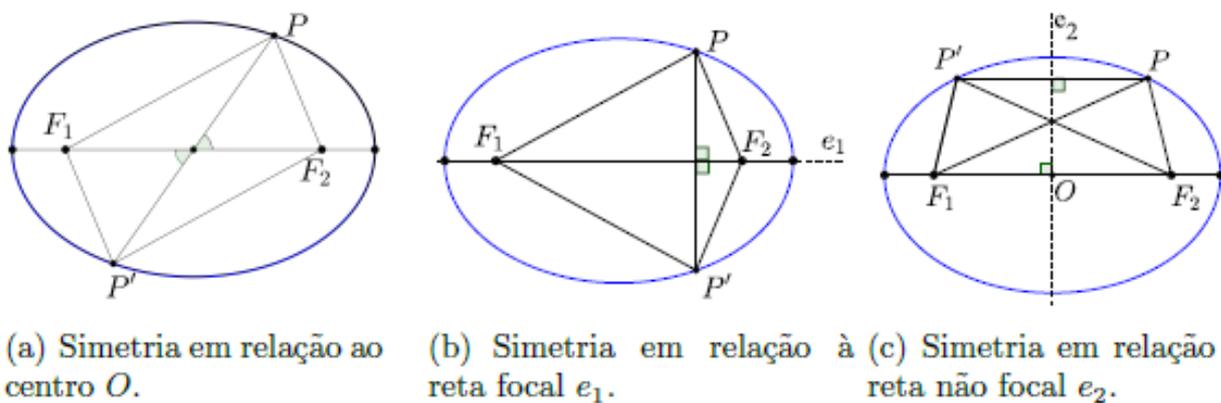
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

onde  $a$  é um número real positivo, então  $P$  pertence a elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$  e eixo focal medindo  $2a$ .

**Proposição 3.14.** Toda elipse é simétrica em relação ao seu centro, a sua reta focal e a sua reta não focal.

A demonstração desta proposição é análoga ao caso de simetria na hipérbole. Veja Figura 55.

Figura 55 – Simetria na Elipse



Fonte: Elaborada pelo autor.

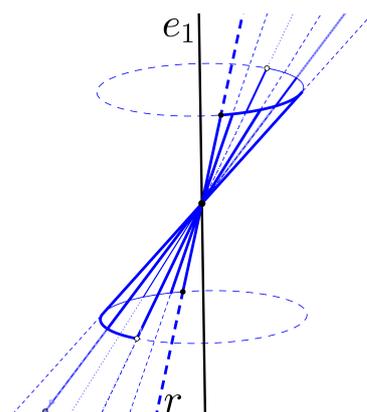
## 4 AS QUÁDRICAS

Como já vimos, foi por meio de cones circulares que se descobriu a existência das secções cônicas e fez-se vários estudos das mesmas com referência ao cone. O cone é uma superfície quádrica.

Além do cone, existem outras superfícies quádricas e também é possível obter curvas cônicas, seccionando estas outras quádricas por planos.

Neste caso podemos pensar em uma quádrica como sendo uma superfície que pode ser gerada pela união de secções cônicas ou por um movimento contínuo e bem definido de uma ou mais dessas curvas. O próprio cone, como já foi mencionado, pode ser gerado, rotacionando uma reta  $r$  em torno de uma reta  $e_1$ , concorrente com  $r$  (Figura 56).

Figura 56 – Cone gerado pela rotação de uma reta em torno de seu eixo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A reta  $e_1$  é o eixo de simetria do cone. Todas as quádricas que estudaremos nesta seção têm um eixo de simetria que chamaremos somente de eixo.

**Definição 4.1** (Superfície Regrada). Superfície que por qualquer um de seus pontos passa uma reta contida na própria superfície.

Podemos então dizer que uma superfície regrada é uma superfície gerada pelo deslocamento de uma reta. O cone, como podemos ver na Figura 56, é um exemplo de superfície regrada.

Se por qualquer ponto de uma superfície  $S$  passar duas retas contidas na própria superfície, então diz-se que  $S$  é uma superfície *duplamente regrada*.

#### 4.1 Cone elíptico

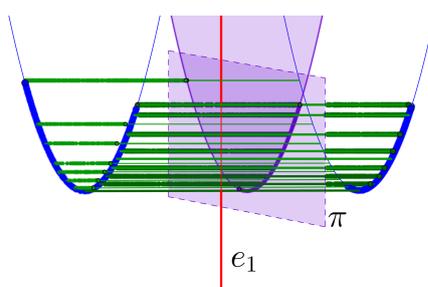
Cone cuja secção por um plano perpendicular ao seu eixo é uma elipse ou um ponto, a secção por um plano paralelo ao seu eixo é uma hipérbole e a secção por um plano que contém o eixo são duas retas concorrentes.

#### 4.2 O cilindro Parabólico

Quádrlica cuja secção por um plano paralelo ao seu eixo é uma parábola e a secção por um plano perpendicular ao seu eixo pode ser uma reta, um par de retas paralelas ou o conjunto vazio (casos degenerados da parábola).

Podemos pensar em um cilindro parabólico como sendo uma superfície gerada pelo deslocamento de uma parábola ao longo de uma reta.

Figura 57 – Cilindro parabólico

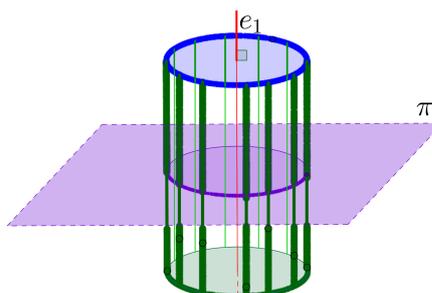


Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.3 Cilindro Elíptico

Quádrlica cuja secção por uma plano perpendicular ao seu eixo é uma elipse e a secção por um plano paralelo ao seu eixo pode ser duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

Figura 58 – Cilindro elíptico



Fonte: Elaborada pelo autor.

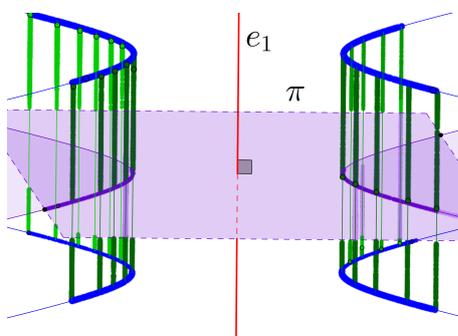
Podemos pensar neste cilindro como uma superfície gerada pelo deslocamento de uma elipse ao longo de uma reta.

#### 4.4 Cilindro hiperbólico

Quádrlica cuja secção por um plano perpendicular ao seu eixo é uma hipérbole e a secção por plano paralelo pode ser uma reta, um par de retas paralelas ou o conjunto vazio.

Da mesma forma que o cilindro parabólico e o cilindro elíptico, podemos pensar no cilindro hiperbólico como sendo uma superfície gerada pelo deslocamento de uma hipérbole ao longo de uma reta.

Figura 59 – Cilindro hiperbólico

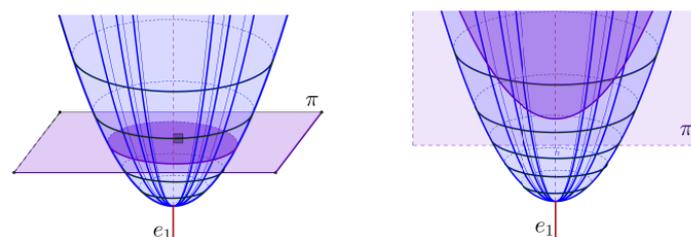


Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.5 Parabolóide elíptico

Quádrlica cuja secção por um plano paralelo ao eixo é uma parábola e a secção por um plano perpendicular ao eixo é uma elipse ou um de seus casos degenerados (um ponto ou o conjunto vazio).

Figura 60 – Parabolóide elíptico



(a) Secção por um plano perpendicular ao eixo.

(b) Secção por um plano paralelo ao eixo.

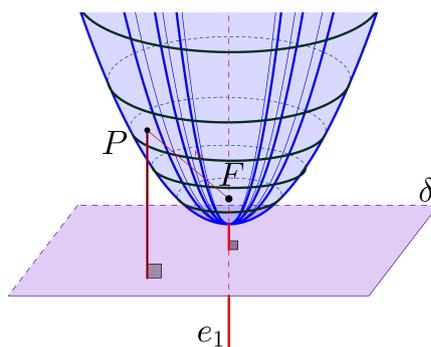
Fonte: Elaborada pelo autor.

Um parabolóide elíptico pode ser gerado pela rotação de uma parábola  $P$  em torno de seu eixo, neste caso a secção por um plano horizontal será uma circunferência cujo centro é um ponto do eixo do parabolóide, que passa a ser chamado de parabolóide circular ou de revolução.

Podemos pensar nessa superfície como sendo um conjunto com infinitas parábolas, no espaço, idênticas a  $P$ , cujos vértices, focos e eixos coincidem com o vértice, foco e eixo de  $P$  e as suas retas diretrizes intersectam a diretriz de  $P$ , na projeção do foco de  $P$  sobre a diretriz de  $P$ . Dessa forma, podemos então pensar em um único foco para todas as parábola que geram a superfície, logo chegamos a um foco  $F$  para o parabolóide de revolução. Consideremos, também a união de todas as retas diretrizes como sendo um plano  $\delta$ , que chamaremos de plano diretor.

Podemos então definir um parabolóide de revolução, em analogia a parábola, como sendo uma superfície  $S$  de foco  $F$  e plano diretor  $\delta$ , como sendo um conjunto de pontos do espaço que equidistam de  $F$  e  $\delta$ .

Figura 61 – Parabolóide de revolução



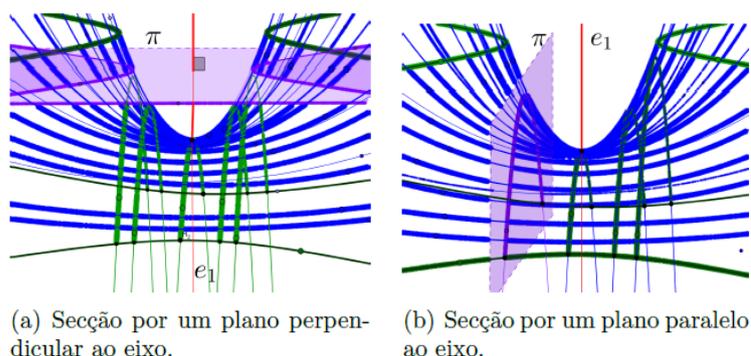
Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.6 Parabolóide hiperbólico

Quádrlica cuja a secção por um plano paralela ao eixo é uma parábola ou uma reta e a secção por um plano perpendicular ao eixo é uma hipérbole ou duas retas concorrentes (Figura 62).

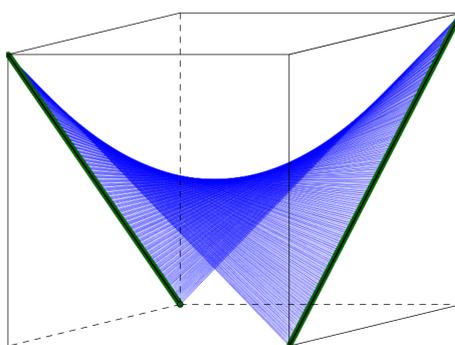
Podemos obter um parabolóide hiperbólico deslocando-se uma reta que intersecta duas retas reversas. Neste caso, por cada ponto de um parabolóide hiperbólico é possível passar uma reta contida na superfície, logo o parabolóide hiperbólico é uma superfície regradada (Figura 63).

Figura 62 – Parabolóides Hiperbólicos



Fonte Elaborada peli autor

Figura 63 – Paraolóide gerado pelo deslocamento de uma reta



Fonte: Elaborada pelo autor.

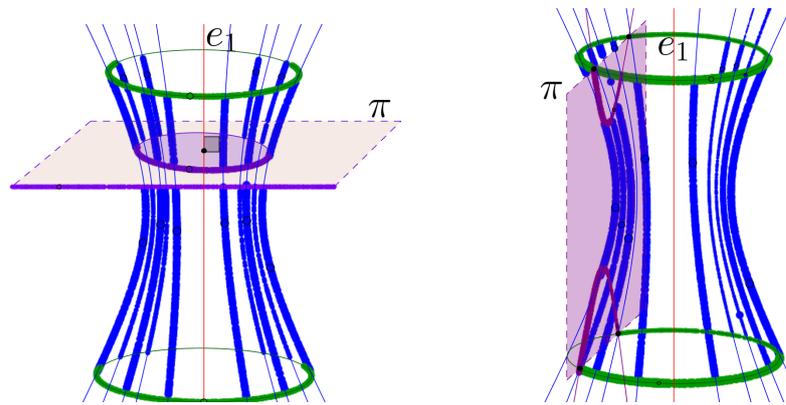
Observando a Figura 63, pode-se notar que por cada ponto de um parabolóide hiperbólico é possível passar duas retas contidas no mesmo, logo essa superfície é duplamente regrada.

#### 4.7 Hiperbolóide de uma folha

Quádrlica cuja secção por um plano paralelo ao eixo é uma hipérbole e a secção por um plano perpendicular ao eixo é uma elipse.

**Observação 1.** Pela caracterização do hiperbolóide de uma folha e do cone elíptico pode parecer se tratar de uma mesma superfície, mas não é. Note que a secção de um cone elíptico por um plano que passa pelo eixo do mesmo são duas retas concorrentes, já o hiperbolóide de uma folha, quando seccionado por um plano que passa pelo eixo do mesmo, a curva obtida continua sendo uma hipérbóle.

Figura 64 – Hiperbolóide de uma folha

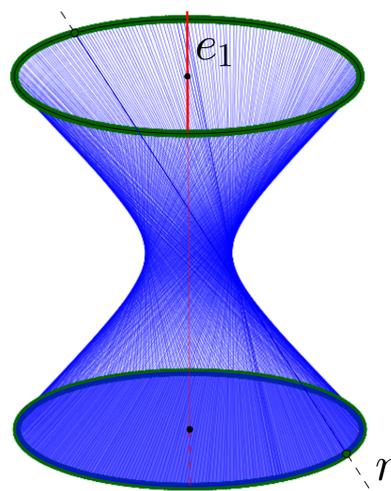


Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso particular em que a elipse é uma circunferência, dizemos que se trata de um hiperbolóide de revolução de uma folha. Uma forma para gerar esta superfície é rotacionarmos uma hipérbole em torno de sua reta não focal, que será o eixo do hiperbolóide de revolução de uma folha.

Uma outra maneira de se obter tal superfície é rotacionando uma reta  $g$  em torno de uma reta  $e_1$ , reversa a  $g$ . Neste caso, temos que o hiperbolóide de revolução é uma superfície regrada. Como por cada ponto pertencente à superfície de um hiperbolóide de uma folha é possível passar duas retas, dizemos que se trata de uma superfície duplamente regrada.

Figura 65 – Hiperlóide gerado pelo descolamento de uma reta

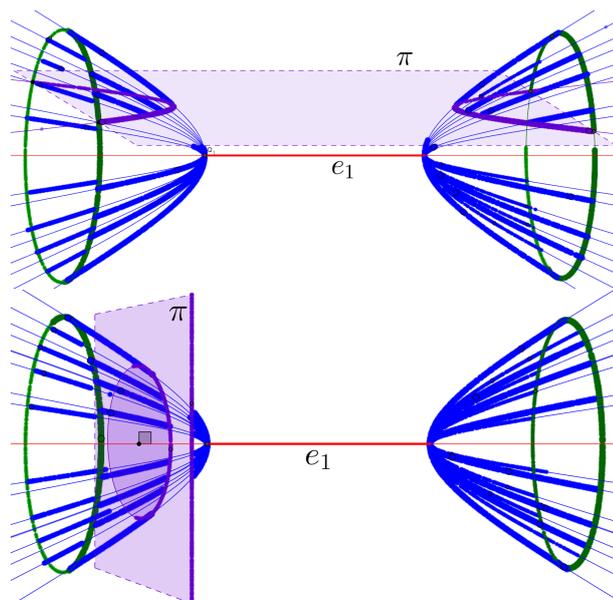


Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.8 Hiperbolóide de duas folhas

Quádrlica cuja secção por um plano paralelo ao eixo é uma hipérbole e a secção por um plano perpendicular ao eixo é uma elipse, ponto ou conjunto vazio (Figura 66).

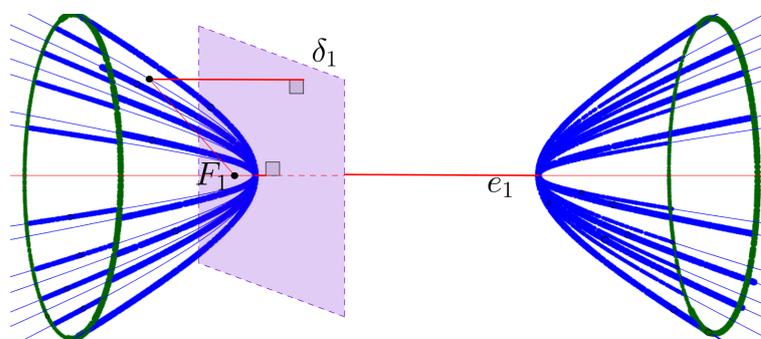
Figura 66 – Hiperbolóide de duas folhas: secção por um plano paralelo ao eixo e secção por um plano perpendicular ao eixo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que a exemplo do hiperbolóide de uma folha, também é possível se obter um hiperbolóide de revolução de duas folhas. Para tanto, basta rotacionar uma hipérbole em torno de sua reta focal (Figura 67).

Figura 67 – Hiperbolóide de revolução

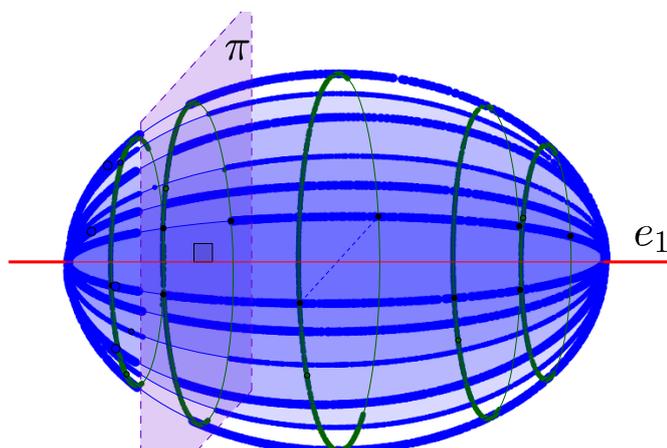


Fonte: Elaborada pelo autor.

## 4.9 Elipsóide

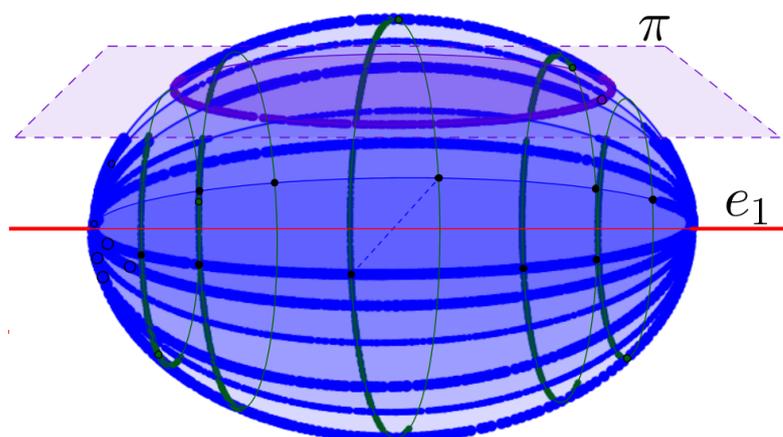
Quádrlica cuja secção por um plano paralelo ou perpendicular ao eixo é uma elipse, um ponto ou conjunto vazio (Figura 68 e Figura 69).

Figura 68 – Elipsóide seccionada por um plano paralelo ao seu eixo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

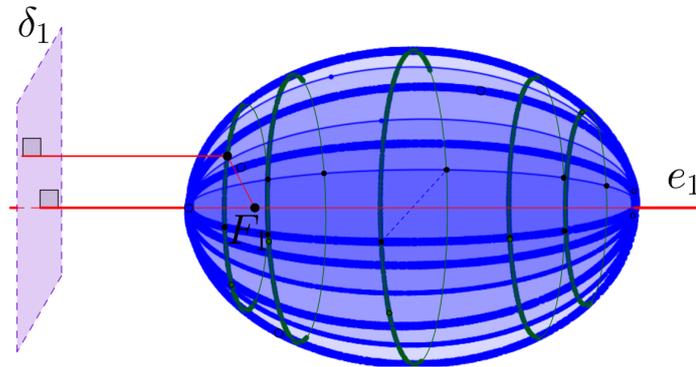
Figura 69 – Elipsóide seccionada por um plano perpendicular ao seu eixo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o elipsóide é obtido pela rotação de uma elipse em torno de sua reta focal, temos circunferências como secções por planos perpendiculares ao eixo do elipsóide, neste caso, também dizemos se tratar de uma superfície de revolução (Figura 70).

Figura 70 – Elipsóide de revolução.



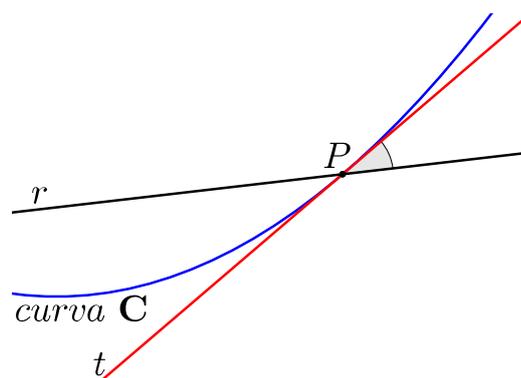
Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.10 Propriedades de reflexão das secções cônicas

As propriedades de reflexão das três cônicas não degeneradas (parábola, elipse e hipérbole), são vastamente exploradas em diversas aplicações, em várias áreas.

Antes de fazermos um estudo sobre a reflexão nas superfícies cônicas, devemos fazer algumas considerações.

**Definição 4.2** (Ângulo entre uma curva e uma reta). Define-se como ângulo entre uma curva  $C$  e uma reta  $r$ , que intersecta  $C$  em um ponto  $P$ , como sendo o ângulo entre a reta  $r$  e a reta  $t$ , tangente à curva  $C$  no ponto  $P$  (Figura 71).

Figura 71 – Ângulo entre a curva  $C$  e a reta  $r$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

##### 4.10.1 O princípio de Reflexão

O fenômeno de reflexão de ondas consiste na mudança de direção da propagação de energia, isto é, as ondas refletem quando incidem sobre uma superfície

refletora.

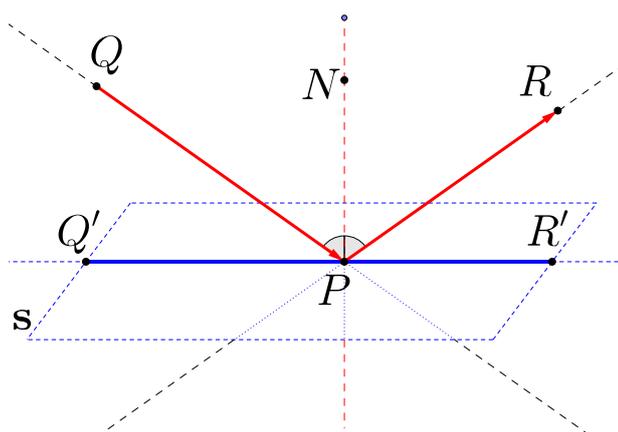
O *princípio de reflexão* se aplica a raios de luz, ondas eletromagnéticas, sonoras, de calor, etc. Em sua formulação atual deriva do *princípio da menor ação*. Mas Heron já o provara a partir do *princípio do menor esforço*, enunciado por Aristóteles, segundo o qual a natureza nada faz do modo mais difícil.

Notemos que toda superfície é uma reunião de curvas, retas ou segmentos de retas e que, por exemplo, um raio de luz vai incidir em um ponto  $P$  de uma superfície seguindo a trajetória de uma reta que intersecta a superfície em  $P$ .

Considere um ponto  $P$  pertencente a uma superfície refletora  $S$ , chamamos de *normal* a  $S$  no ponto  $P$ , a reta  $PN$  perpendicular a  $S$  em  $P$ .

Se um raio de luz incide sobre a superfície refletora  $S$  no ponto  $P$  (Figura 72), então, pelo *princípio de reflexão*, o *ângulo de incidência*  $QPN$  e o *ângulo de reflexão*  $NPR$  são iguais.

Figura 72 – Princípio de reflexão



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o ângulo  $QPQ'$  (Figura 72), formado entre a trajetória  $QP$  do raio incidente e a superfície  $S$  é complementar ao ângulo de incidência e o ângulo  $R'PR$  formado entre a trajetória  $PR$  do raio de reflexão com a superfície  $S$  é complementar ao *ângulo de reflexão*, onde  $Q'$  e  $R'$  são as respectivas projeções de  $Q$  e  $R$ , sobre a superfície  $S$ , então  $Q'PQ$  e  $R'PR$  são iguais.

#### 4.10.1.1 Reflexão na parábola

Seja  $P$  uma parábola com foco  $F$ , diretriz  $d$ , vértice  $V$  e reta focal  $r$ .

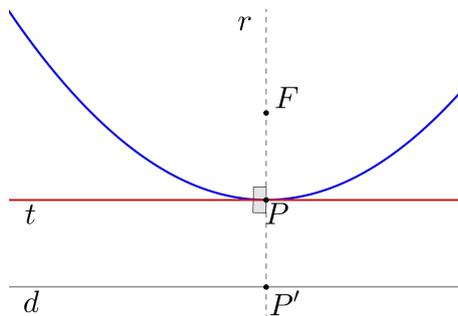
Sabemos que, se  $P \in P$ , com  $P \neq V$ , então uma reta que intersecta  $P$  somente em  $P$ , ou é tangente à parábola  $P$ , ou é paralela a reta focal da parábola, e que a reta que passa por  $V$  e é perpendicular ao eixo da parábola é tangente a parábola.

Denotando por  $P'$  a projeção de  $P$  sobre a reta diretriz  $d$ , temos o seguinte resultado:

**Proposição 4.1.** O ângulo entre a reta tangente a  $\mathbf{P}$  em  $P$  e a reta  $PP'$  tem medida igual ao ângulo entre a tangente e a reta  $PF$ .

**Demonstração:** Se o ponto  $P$  coincide com o vértice da parábola  $\mathbf{P}$ , então a tangente  $t$  é a mediatriz, em  $P$ , do segmento  $FP'$  (Figura 73). Logo o ângulo entre a tangente  $t$  e o segmento  $PF$  é igual a  $90^\circ$  e o ângulo entre a tangente  $t$  com a reta  $PP'$ , também, é igual a  $90^\circ$ .

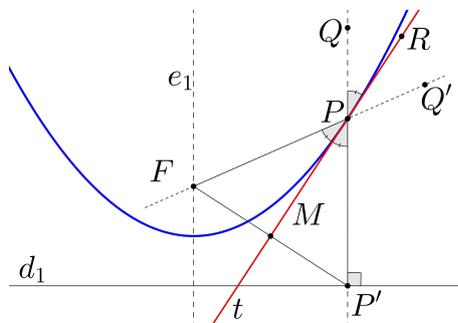
Figura 73 – Reta  $t$  tangenciando a parábola no vértice da mesma.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso em que  $P$  não coincide com  $V$ , temos, pela Proposição 3.2, que a reta  $t$  tangente a parábola  $\mathbf{P}$  no ponto  $P$  é também bissetriz do ângulo  $FPP'$  (Figura 74), então o ângulo  $FPM$  tem a mesma medida do ângulo  $P'PM$  que é oposto pelo vértice ao ângulo  $QPR$ . Logo o ângulo entre a tangente  $t$  e a reta  $PP'$  é igual ao ângulo formado entre  $t$  e o segmento  $PF$ .

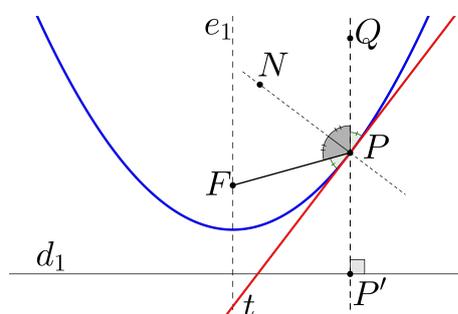
Figura 74 – Reta tangente não paralela à diretriz.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Passando por  $P$  uma reta  $PN$ , normal a reta tangente em  $P$ , temos, em consequência à Proposição 4.1, que os ângulos  $QPN$  e  $NPF$  são iguais (Figura 75).

Figura 75 – Incidência e reflexão na parábola



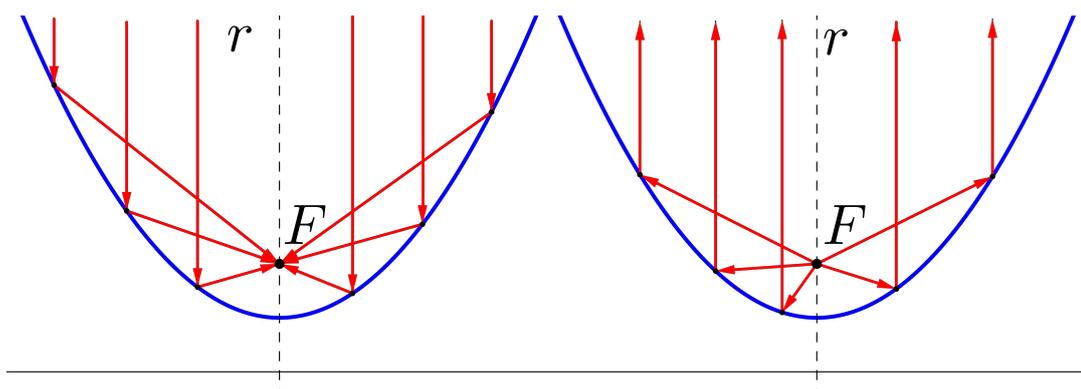
Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue então, pelo princípio de reflexão, o seguinte resultado:

**Corolário 4.1** (Propriedade refletora da parábola). Raios ou ondas, que se propagam paralelos ao eixo de uma superfície parabólica, ao incidirem sobre a superfície, são refletidos para o foco.

Vale salientar que quando os raios ou ondas são emitidos do foco, ao incidirem sobre a superfície parabólica, eles são refletidos paralelos ao eixo da superfície.

Figura 76 – Propriedade refletora da parábola.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Não são apenas raios ou ondas, de natureza apropriada para a reflexão, que podem ser refletidos por uma superfície parabólica. Podemos tomar um objeto qualquer com tanto que o mesmo possa deslizar por uma trajetória reta e a superfície seja revestida por um material que permita a reflexão de tal objeto.

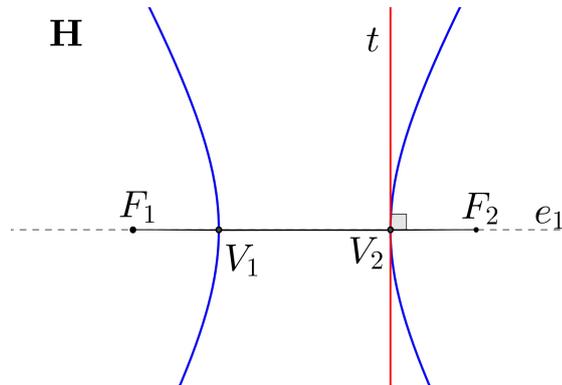
#### 4.10.1.2 Reflexão na hipérbole

Seja  $\mathbf{H}$  uma hipérbole com focos  $F_1$  e  $F_2$  e um ponto  $P \in \mathbf{H}$ , temos a seguinte:

**Proposição 4.2.** A reta bissetriz  $t$  do ângulo  $F_1PF_2$  é a reta tangente à hipérbole em  $P$ .

**Demonstração:** No caso em que  $P$  coincide com  $V_1$  ou  $V_2$ , teremos que o ângulo  $F_1PF_2$  é raso, logo a sua bissetriz  $t$  é perpendicular à reta focal  $e_1$ , portanto  $t$  é tangente a  $\mathbf{H}$  em  $P$  (Figura 77).

Figura 77 – Reta  $t$  bissetriz de  $F_1V_1F_2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se  $P$  não coincide com um vértice (Figura 78), como  $t$  passa por  $P$ , para provar que  $t$  é tangente, devemos mostrar que qualquer outro ponto de  $t$  diferente de  $P$  pertence à região exterior à hipérbole. Para tanto, consideremos a distância de  $P$  a  $F_1$  maior do que a distância de  $P$  a  $F_2$  e tomemos o ponto  $E$  pertencente ao segmento  $PF_1$ , onde

$$d(E, P) = d(F_2, P) \quad (4.1)$$

e

$$d(F_1, P) = d(F_1, E) + d(E, P). \quad (4.2)$$

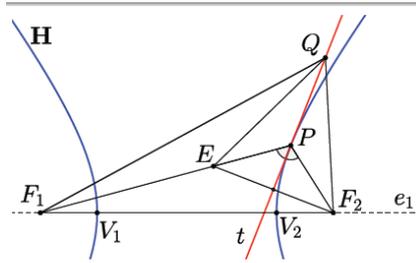
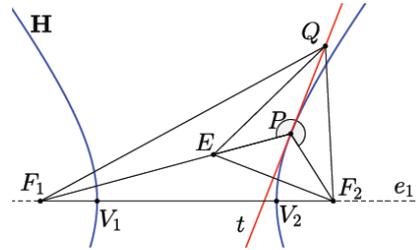
Como

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a,$$

então, de 4.1 e 4.2, temos:

$$d(F_1, E) + d(E, P) - d(P, F_2) = 2a \implies d(F_1, E) = 2a. \quad (4.3)$$

Como  $t$  é bissetriz do ângulo  $F_1PF_2$  e o ponto  $E \in F_1P$ , então  $t$  é bissetriz do ângulo  $EPF_2$ .

Figura 78 – Reta Bissetriz ao ângulo  $F_1PF_2$ .(a) Bissetriz do ângulo  $EPF_2 = F_1PF_2$ (b) Igualdade entre os ângulos  $QPE$  e  $QPF_2$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

Consideremos então, um ponto  $Q$  pertencente a  $t$  e não coincidente com  $P$ , notemos que os triângulo  $EPQ$  e  $F_2PQ$  são congruentes ( $LAL$ ), então

$$d(Q, E) = d(Q, F_2). \quad (4.4)$$

Logo, pela desigualdade triangular, temos:

$$d(Q, E) < d(Q, F_1) + d(E, F_1) \quad (4.5)$$

e

$$d(Q, F_1) < d(Q, E) + d(E, F_1). \quad (4.6)$$

E assim, de 4.5 e 4.6, temos

$$d(Q, E) - d(E, F_1) < d(Q, F_1) < d(Q, E) + d(E, F_1). \quad (4.7)$$

Subtraindo  $d(Q, E)$  de 4.7, obtemos:

$$-d(E, F_1) < d(Q, F_1) - d(Q, E) < d(E, F_1).$$

Então,

$$|d(Q, F_1) - d(Q, E)| < d(E, F_1).$$

Logo, de 4.3 e 4.4, segue que

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| < 2a.$$

Então, pela Proposição 3.7,  $Q$  pertence à região exterior à hipérbole e portanto a bissetriz  $t$  é tangente em  $P$  à hipérbole.

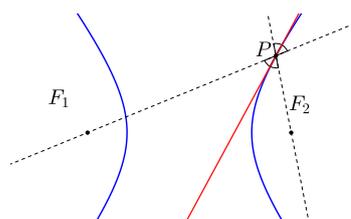
C.Q.D.

Se tomarmos a distância de  $P$  a  $F_2$  maior do que a distância de  $P$  a  $F_1$  vamos obter resultado análogo.

Segue então o seguinte:

**Corolário 4.2.** As retas  $PF_1$  e  $PF_2$ , com  $P$  um ponto de uma hipérbole, cruzam-se formando, com a reta tangente à hipérbole em  $P$ , ângulos de mesma medida.

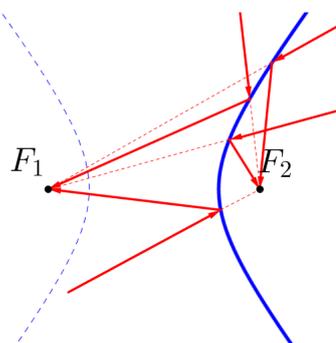
Figura 79 – Intersecção das retas  $F_1P$  e  $F_2P$  com a tangente em  $P$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Corolário 4.3** (Propriedade refletora da hipérbole). Um raio de luz ou uma onda cuja trajetória é uma reta que passa por um dos focos de uma superfície hiperbólica, quando incide sobre a superfície, reflete para o outro foco.

Figura 80 – Propriedade refletora da hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 4.10.1.3 Reflexão na elipse

Seja  $P$  um ponto pertencente a uma elipse  $E$ , de focos  $F_1$  e  $F_2$ , tomando-se os pontos  $E_1$  e  $E_2$ , exteriores à  $E$  e pertencentes, respectivamente, às retas  $F_1P$  e  $F_2P$ , onde

$$d(E_1, P) = d(P, F_2) \quad (4.8)$$

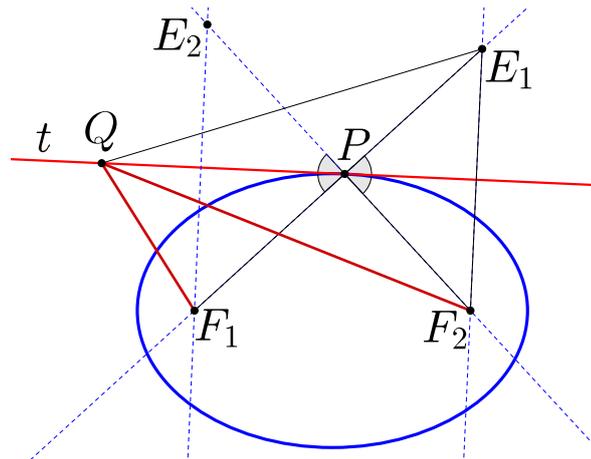
e

$$d(E_2, P) = d(P, F_1). \quad (4.9)$$

Segue então a seguinte:

**Proposição 4.3.** A reta  $t$ , bissetriz ao ângulo  $E_1PF_2$  e ao ângulo  $E_2PF_1$ , é a reta tangente à elipse  $E$  no ponto  $P$  (Figura 81).

Figura 81 – A reta bissetriz em  $P$  tangencia a elipse



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Demonstração:** De modo análogo ao caso da hipérbole, considerando-se um ponto  $Q \in t$ , tal que  $Q \neq P$ , podemos formar os dois triângulos  $QPF_2$  e  $QPE_1$  congruentes (LAL), logo

$$d(Q, E_1) = d(Q, F_2). \quad (4.10)$$

Como

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a,$$

então, de 4.8, temos

$$d(F_1, P) + d(P, E_1) = 2a \implies d(F_1, E_1) = 2a. \quad (4.11)$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$d(F_1, Q) + d(Q, E_1) > d(F_1, E_1),$$

logo, de 4.10 e 4.11

$$d(F_1, Q) + d(Q, F_2) > 2a.$$

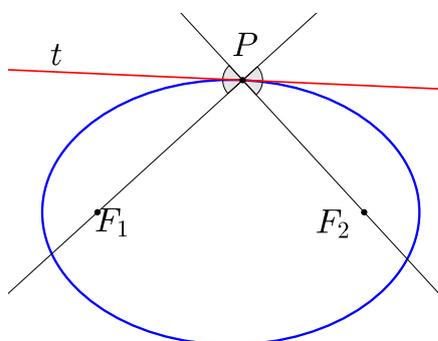
Logo, pela Proposição 3.13, temos que  $Q$  pertence à região exterior à elipse, portanto  $t$  é a reta tangente à  $E$  em  $P$ .

C.Q.D.

Segue então os seguintes resultados:

**Corolário 4.4.** As retas que passam por um ponto  $P$  de uma elipse no sentido dos focos da mesma, cruzam-se, formando, com a tangente à elipse em  $P$ , quatro ângulos de mesma medida (Figura 82).

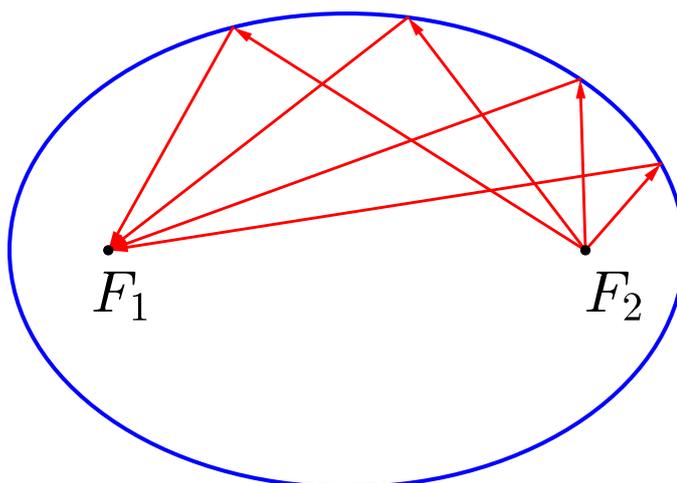
Figura 82 – Retas  $F_1P$  e  $F_2P$  cruzando-se em  $P$  e formando com a tangente em  $P$  ângulos iguais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Corolário 4.5** (Propriedade refletora da elipse). Um raio ou onda que passe por um dos focos de uma superfície elíptica, ao incidir sobre a superfície, é refletido para o outro foco da mesma (Figura 83).

Figura 83 – Ondas passando por  $F_2$  e sendo refletidas para  $F_1$  após a incidência com a elipse.



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5 A CARACTERIZAÇÃO POR EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Para que possamos estudar as cônicas por uma abordagem analítica e, assim encontrar equações algébricas que as caracterizem, consideremos os seguintes conceitos.

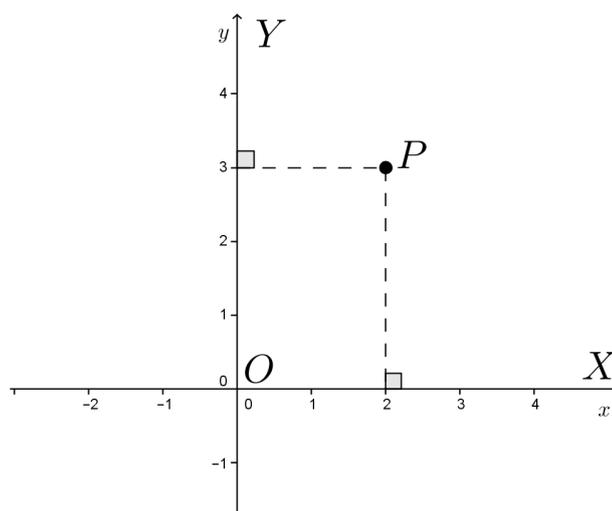
### 5.1 O plano cartesiano

Chamamos de plano cartesiano ao sistema de eixos  $OXY$  formado a partir de duas retas  $OX$  e  $OY$  perpendiculares no ponto  $O$ , associado ao par ordenado  $(0, 0)$  e chamado de origem do sistema.

O eixo  $OX$  é chamado de eixo das abscissas e os números reais associados a ele, geralmente são representadas por  $x$ , por isso é também muitas vezes chamado de eixo do  $x$ . Já o eixo  $OY$ , tem seus números frequentemente representados por  $y$  e é chamado de eixo das ordenadas ou eixo do  $y$ .

Um ponto  $P$  qualquer do plano cartesiano pode ser associado a um par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , onde as coordenadas  $x$  e  $y$  são os valores, nos eixos, que coincidem com as respectivas projeções do ponto  $P$  sobre  $OX$  e sobre  $OY$ . Nesse caso é comum o uso da notação  $P = (x, y)$ .

Figura 84 – Representação do ponto  $P = (2, 3)$ , no plano cartesiano



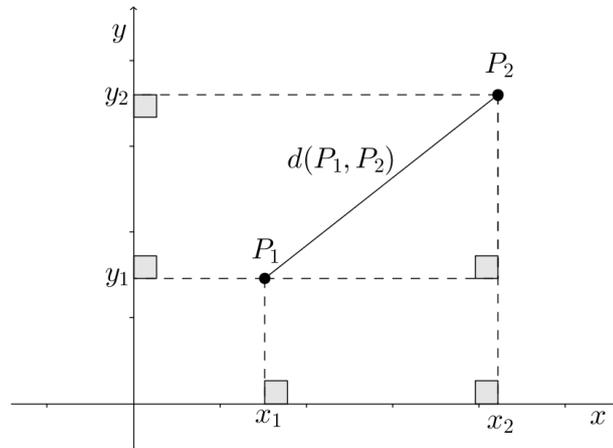
Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 5.1.1 Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Dados os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , em um plano cartesiano, podemos determinar a distância entre  $P_1$  e  $P_2$ , em função de suas coordenadas, por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Figura 85 – Distância entre  $P_1$  e  $P_2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

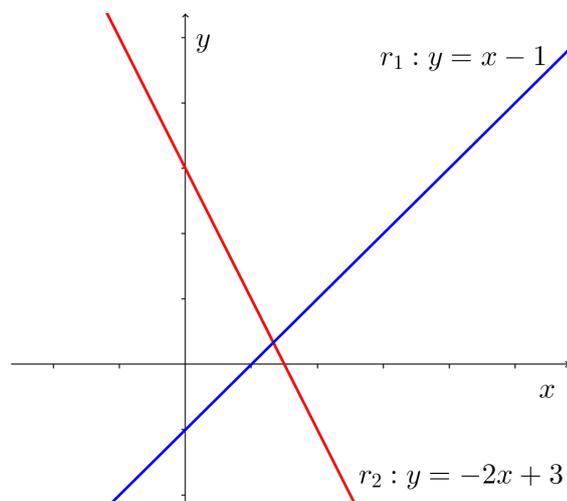
### 5.1.2 A equação da reta

Sendo uma reta  $r$ , no plano cartesiano, que passe por um ponto  $P = (x, y)$ , temos que a equação de  $r$  pode ser representada, na sua forma afim ou reduzida, por:

$$r : y = mx + n,$$

onde  $m$  e  $n$  são coeficientes reais.

Figura 86 – Representação de duas retas no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

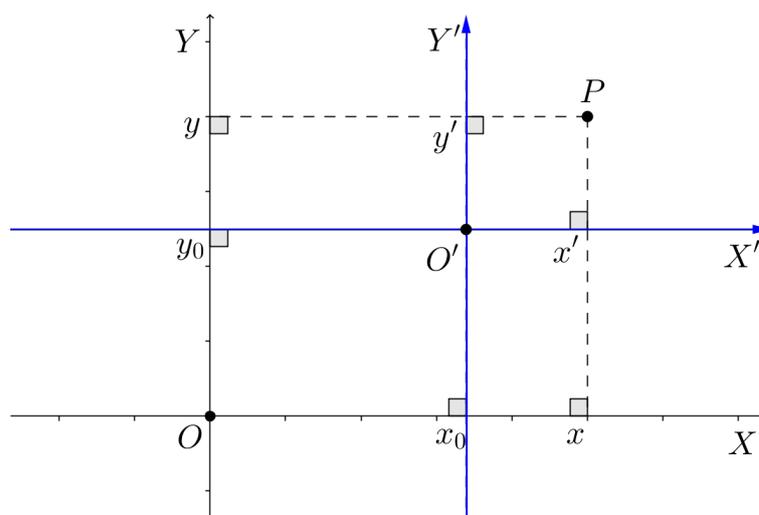
### 5.1.3 Translação de eixos

Seja o sistema de eixos coordenados  $OXY$  do plano cartesiano, com origem em  $O = (0,0)$ , e seja um outro sistema de eixos  $O'X'Y'$ , com origem em  $O' = (x_0, y_0)$ , diz-se que o sistema  $O'X'Y'$  é uma translação do sistema  $OXY$  quando os eixos  $OX$  e  $O'X'$ , bem como os eixos,  $OY$  e  $O'Y'$  são paralelos e têm a mesma orientação, com  $x_0$  e  $y_0$  diferentes de zero.

Sendo  $x'$  e  $y'$  as coordenadas de um ponto  $P$  no sistema  $O'X'Y'$  e  $x$  e  $y$  as coordenadas de  $P$  em  $OXY$ , então estas coordenadas estão relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Figura 87 – Representação dos eixos  $OXY$  e  $O'X'Y'$



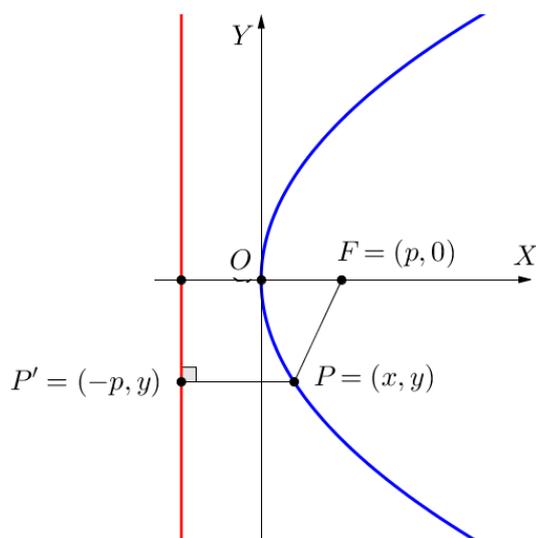
Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5.2 Parábola

Para determinar equações que caracterizem uma parábola, vamos considerar uma parábola  $\mathbf{P}$ , com foco  $F$  e diretriz  $d$  e um ponto  $P \in \mathbf{P}$ , cuja projeção de  $P$  sobre  $d$  é  $P'$ . Para isso, consideraremos a parábola  $\mathbf{P}$  em diferentes posições em relação à origem e aos eixos do plano cartesiano.

**Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ :**

**Caso I:** O foco  $F$  está à direita da diretriz  $d$  (Figura 88).

Figura 88 – Parábola no plano cartesiano com o eixo sobre  $OX$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o vértice da parábola  $\mathbf{P}$  é a origem  $V = (0,0)$ , temos que o foco é o ponto  $F = (p,0)$  e a diretriz é a reta  $d : x = -p$ , onde  $d(F,d) = 2p$ . Tomando  $P = (x,y) \in \mathbf{P}$ , temos  $P' = (-p,y)$ .

Como  $P \in \mathbf{P}$  se, e somente se,

$$d(P,F) = d(P,d) = d(P,P'),$$

substituindo as coordenadas dos pontos  $P,F$  e  $P'$ , obtemos a equação,

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x-(-p))^2},$$

elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2,$$

logo

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2,$$

então

$$-2px + y^2 = 2px,$$

e portanto,

$$y^2 = 4px.$$

**Caso II:** O foco está à esquerda da diretriz  $d$ .

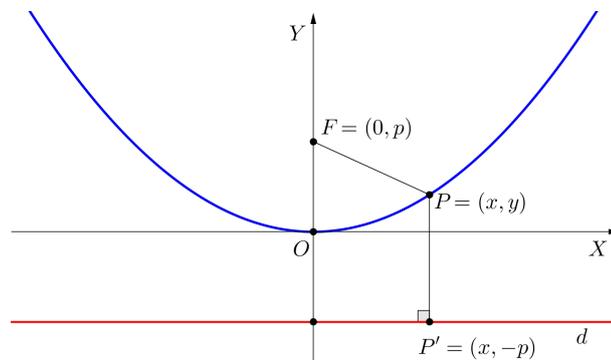
Neste caso,  $F = (-p, 0)$  e  $d : x = p$ , onde  $d(F, d) = 2p$ . Considerando  $P = (x, y) \in \mathbf{P}$ , temos  $P' = (p, y)$ , de modo análogo ao do caso I, obtemos:

$$P = (x, y) \in \mathbf{P} \implies y^2 = -4px$$

**Parábola com vértice na origem e reta focal coincidindo com o eixo OY:**

**Caso I:** O foco  $F$  está acima da diretriz  $d$ .

Figura 89 – Parábola no plano cartesiano sobre o eixo OY



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso,  $F = (0, p)$  e  $d : y = -p$ , onde  $d(F, d) = 2p$ . Tomando  $P = (x, y) \in \mathbf{P}$ , temos  $P' = (x, -p)$ . Logo,

$$P \in \mathbf{P} \iff \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(x + p)^2} \implies x^2 = 4py$$

**Caso II:** O foco  $F$  está abaixo da diretriz  $d$ .

Neste caso,  $F = (0, -p)$  e  $d : y = p$ , onde  $d(F, d) = 2p$ . Temos que se  $P = (x, y) \in \mathbf{P}$ , então,

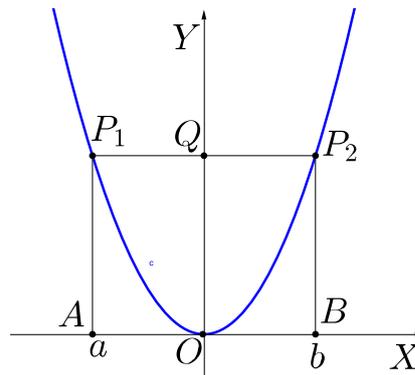
$$x^2 = -4py.$$

**Proposição 5.1.** Considere a parábola  $\mathbf{P}$  dada pela equação  $y = x^2$ . Sejam  $P_1$  e  $P_2$  pontos de  $\mathbf{P}$ , com coordenadas  $P_1 = (a, a^2)$  e  $P_2 = (b, b^2)$ , se  $Q = (0, p)$  é o ponto de intersecção do segmento  $P_1P_2$  com o eixo OY, então  $p = |a \cdot b|$ . (Figuras 90 e 91).

**Demonstração:** Notemos que o vértice dessa parábola coincide com a origem do plano cartesiano, logo no caso em que  $b = |a|$  (Figuras 90), teremos,

$$p = a^2 = b^2. \implies p = |a|^2 \implies p = |a \cdot b|.$$

Figura 90 – Quadrilátero  $AP_1P_2B$  desenhado sobre a parábola

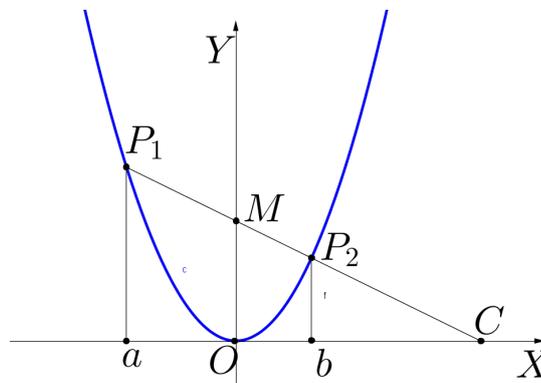


Fonte: Elaborada pelo autor.

Já no caso em que  $b \neq |a|$  (Figuras 91), tomemos uma reta que passa por  $P_1$  e  $P_2$ , esta reta vai intersectar o eixo  $OX$  em um ponto  $C$ . Temos os triângulos  $ACP_1$ ,  $OCQ$  e  $BCP_2$ , semelhantes entre si, logo

$$\frac{b^2}{p} = \frac{p}{a^2} \implies p^2 = a^2 \cdot b^2 \implies p = \sqrt{a^2 \cdot b^2} \implies p = |a \cdot b|$$

Figura 91 – Triângulo  $AP_1C$  desenhado sobre a parábola.



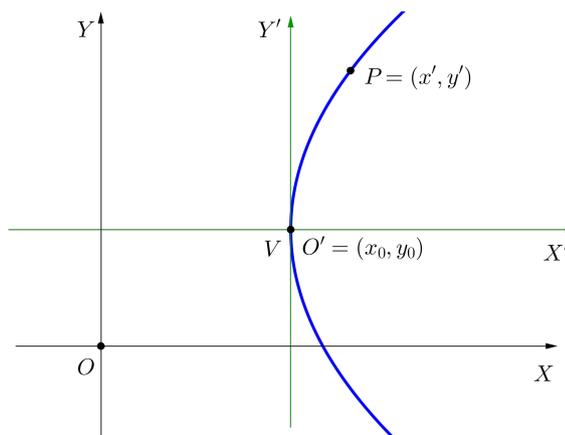
Fonte: Elaborada pelo autor.

C.Q.D.

**Parábola com vértice  $V = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$ :**

Sob estas condições, para se obter a forma canônica da parábola, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais  $O'X'Y'$ , com origem  $O' = V = (x_0, y_0)$  e eixos  $O'X'$  e  $O'Y'$  com mesma direção e sentido dos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente, e transladá-lo de forma que coincida com o eixo  $OXY$  do plano cartesiano.

Figura 92 – Parábola transladada com eixo sobre  $O'X'$



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Caso I:** O foco está à direita da diretriz  $d$ .

Sabemos que no sistema de coordenadas  $O'X'Y'$ , a equação da parábola  $\mathbf{P}$  é

$$y'^2 = 4px',$$

o foco é  $F' = (p, 0)$ , o vértice é  $V' = (0, 0)$ , a diretriz é  $d' : x = -p$  e a reta focal é  $e'_1 : y' = 0$ . Como

$$x = x' + x_0$$

e

$$y = y' + y_0,$$

então a equação da parábola em  $OXY$  é dada por

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0),$$

onde podemos definir os elementos: foco  $F = (x_0 + p, y_0)$ ; vértice  $V = (x_0, y_0)$ ; diretriz  $d : x - x_0 = -p$  e reta focal  $e_1 : y - y_0 = 0$ .

**Caso II:** O foco está à esquerda da diretriz  $d$ . Neste caso, a equação da parábola no sistema  $O'X'Y'$  é

$$y'^2 = -4px'$$

e seus elementos são: foco  $F' = (-p, 0)$ ; vértice  $V' = (0, 0)$ ; diretriz  $d' : x' = p$  e reta focal  $e'_1 = y' = 0$ .

Passando às coordenadas  $x$  e  $y$  do sistema  $OXY$ , a equação da parábola fica com a forma

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$$

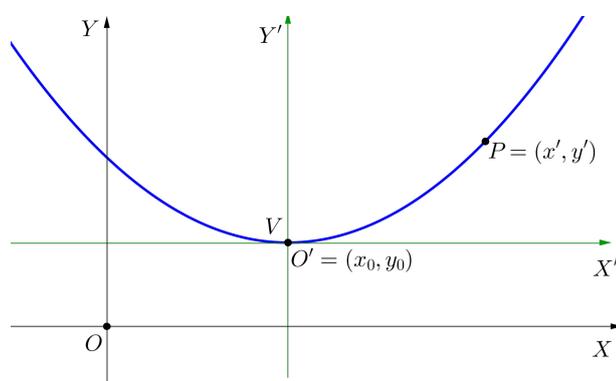
e seus elementos são: foco  $F = (x_0 - p, y_0)$ ; vértice  $V = (x_0, y_0)$ ; diretriz  $d : x - x_0 = 0$  e reta focal  $e_1 : y - y_0 = 0$ .

### Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo $OY$

Como no caso anterior, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais  $O'X'Y'$ , com origem  $O' = V = (x_0, y_0)$  e eixos  $O'X'$  e  $O'Y'$ , respectivamente, podemos obter as equações e elementos das parábola.

**Caso I:** O foco está à acima da diretriz  $d$ .

Figura 93 – Parábola transladada com eixo sobre  $O'Y'$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso, o foco é  $F = (x_0, y_0 + p)$ ; a diretriz  $d : y = y_0 - p$ ; a reta focal; a reta focal é  $e_1 = x = x_0$  e a equação da parábola é

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

**Caso II:** O foco  $F$  está abaixo da diretriz  $d$ . Então, o foco é  $F = (x_0, y_0 - p)$ ; a diretriz é  $d : y = y_0 + p$ ; a reta focal é  $e_1 : x = x_0$  e a equação da parábola é

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0).$$

### 5.3 Hipérbole

Já sabemos que se uma curva é uma hipérbole  $\mathbf{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$ , reta focal  $e_1$  e reta não focal  $e_2$ , eixo focal  $V_1V_2$  e eixo não focal  $W_1W_2$ , então vale a relação:

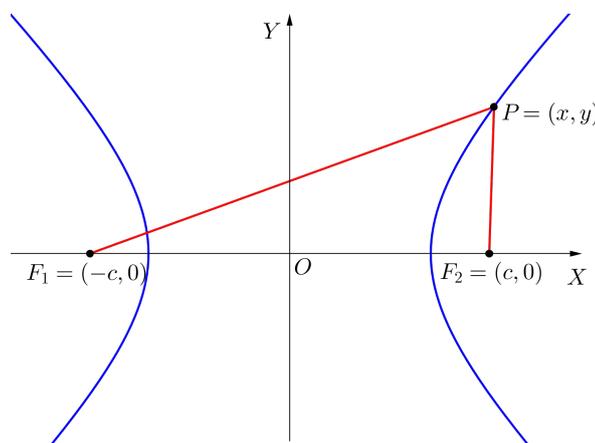
$$P = (x, y) \in \mathbf{H} \iff |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a, \quad 0 < a < c.$$

Antes de encontrarmos uma equação canônica para  $\mathbf{H}$ , observemos que  $d(F_1, F_2) = 2c$ ,  $d(V_1, V_2) = 2a$  e  $d(W_1, W_2) = 2b$ , e que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ :**

Figura 94 – Hipérbole com eixo focal sobre  $OX$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso,  $F_1 = (-c, 0)$ ;  $F_2 = (c, 0)$ ;  $V_1 = (-a, 0)$ ;  $V_2 = (a, 0)$ ;  $W_1 = (0, -b)$  e  $W_2 = (0, b)$ . Logo,

$$\begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a & (\text{ramo direito de } \mathbf{H}) \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a & (\text{ramo esquerdo de } \mathbf{H}) \end{cases}$$

Considerando uma das duas equações e elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \implies$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \implies$$

$$2x^2 + 2c^2 + 2y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2,$$

dividindo por 2 nos dois membros da equação e isolando os radicais, obtemos

$$-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a^2 - x^2 - c^2 - y^2,$$

elevando ao quadrado nos dois membros da equação,

$$[(x+c)^2+y^2] \cdot [(x-c)^2+y^2] = [(2a^2-c^2)-(x^2+y^2)]^2 \implies$$

$$(x+c)^2(x-c)^2 + y^2(x+c)^2 + y^2(x-c)^2 + y^4 = (2a^2-c^2)^2 - 2(2a^2-c^2)(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 \implies$$

$$(x^2-c^2)^2 + y^2[x^2+2cx+c^2+x^2-2cx+c^2] + y^4 = 4a^4 - 4a^2c^2 + c^4 - 2(2a^2x^2 + 2a^2y^2 - c^2x^2 - c^2y^2) + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \implies$$

$$x^4 - 2x^2c^2 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 + y^4 = 4a^4 - 4a^2c^2 + c^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \implies$$

$$-4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2c^2 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2,$$

dividindo por 4, obtemos

$$-c^2x^2 = a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2,$$

como  $c^2 = a^2 + b^2$ , temos

$$-(a^2 + b^2)x^2 = a^4 - a^2(a^2 + b^2) - a^2x^2 - a^2y^2 \implies$$

$$-a^2x^2 - b^2x^2 = a^4 - a^4 - a^2b^2 - a^2x^2 - a^2y^2 \implies$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

dividindo nos dois membros da equação por  $a^2b^2$ , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

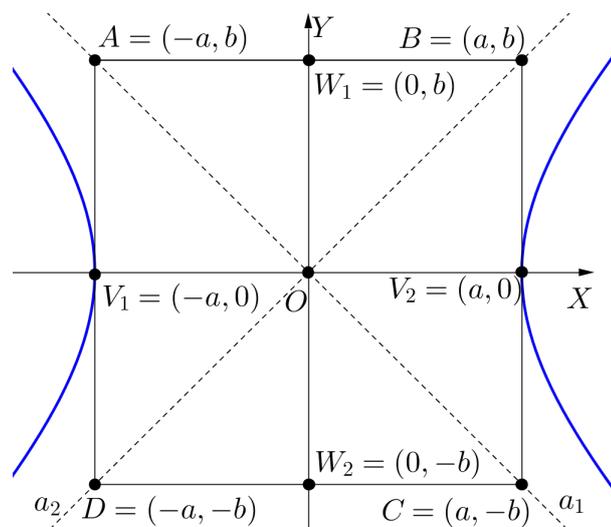
Esta última é a forma canônica da equação de **H**.

### Equações das assíntotas

Sejam as assíntotas  $a_1$  e  $a_2$  de uma hipérbole de centro  $O = (0, 0)$  e vértices  $W_1 = (0, b)$ ,  $W_2 = (0, -b)$ ,  $V_1 = (-a, 0)$  e  $V_2 = (a, 0)$ .

Como Pela Definição 3.5, temos que cada assíntota contém uma única diagonal do retângulo de base  $ABCD$  e, conseqüentemente, os dois vértices  $A = (-a, b)$  e  $C = (a, -b)$ , deste retângulo, pertencem à  $a_1$  e os vértices  $B = (a, b)$  e  $B = (-a, -b)$  pertencem a  $a_2$ . Além de ambas passarem pelo centro da hipérbole (Figura 95).

Figura 95 – hipérbole com retângulo de base



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já que a equação de uma reta  $r$  é dada, no plano cartesiano, por

$$r : y = mx + n.$$

Consideremos, então

$$a_1 : y = m_1x + n_1$$

e

$$a_2 : y = m_2x + n_2$$

e tomemos dois pontos distintos de  $a_1$ .

Aplicando os valores das coordenadas de cada ponto de  $a_1$  em sua equação, obtemos um sistema com duas equações e duas variáveis reais  $m_1$  e  $n_1$ , resolvido o sistema, obteremos

$$m_1 = -\frac{b}{a}$$

e

$$n_1 = 0.$$

Conseqüentemente, a equação da assíntota  $a_1$  é

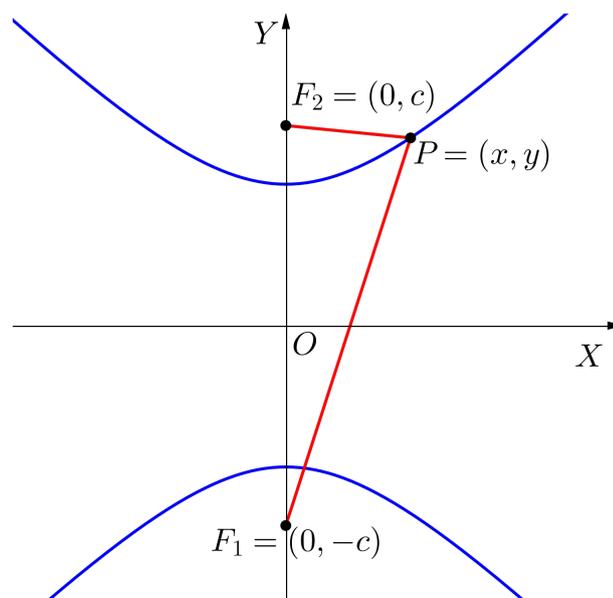
$$y = -\frac{b}{a}x.$$

De modo análogo, pode-se determinar que a equação da assíntota  $a_2$  é

$$y = \frac{b}{a}x.$$

**Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OY$**

Figura 96 – Hipérbole com eixo focal em  $OY$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso, temos que  $F_1 = (0, -c)$ ;  $F_2 = (0, c)$ ;  $V_1 = (0, -a)$ ;  $V_2 = (0, a)$ ;  $W_1 = (-b, 0)$ ;  $W_2 = (b, 0)$  (Figura 96).

Procedendo de modo análogo ao caso em que a reta focal da hipérbole coincide com o eixo  $OX$  do plano cartesiano, obtemos que a equação da hipérbole **H** é:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

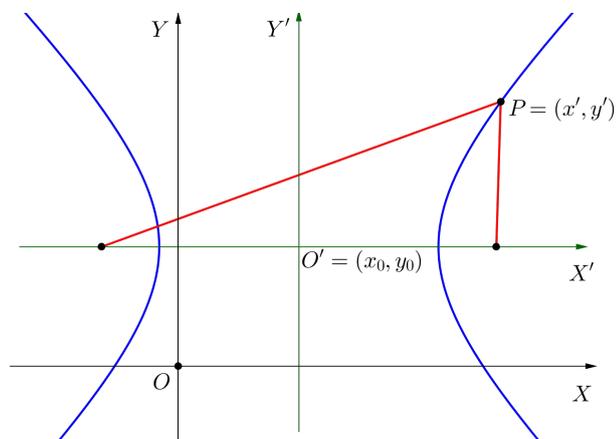
cujas assíntotas são

$$a_1 : y = -\frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad a_2 : y = \frac{a}{b}x.$$

### Hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$

**Caso I:** reta focal paralela ao eixo  $OX$ .

Figura 97 – Hipérbole translada com eixo focal em  $O'X'$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o centro  $O' = (x_0, y_0)$  pertence a reta focal, temos que  $e_1 : y = y_0$  é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como

$$d(F_1, O') = d(F_2, O') = c,$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole.

Seja  $P = (x' + x_0, y' + y_0)$  um ponto pertencente a  $\mathbf{H}$ , onde

$$x = x' + x_0 \quad \text{e} \quad y = y' + y_0$$

são suas coordenadas no sistema  $OXY$ , e  $x'$  e  $y'$  são suas coordenadas no sistema  $O'X'Y'$ , obtido transladando o sistema  $OXY$  para origem  $O' = (x_0, y_0)$ . Então,

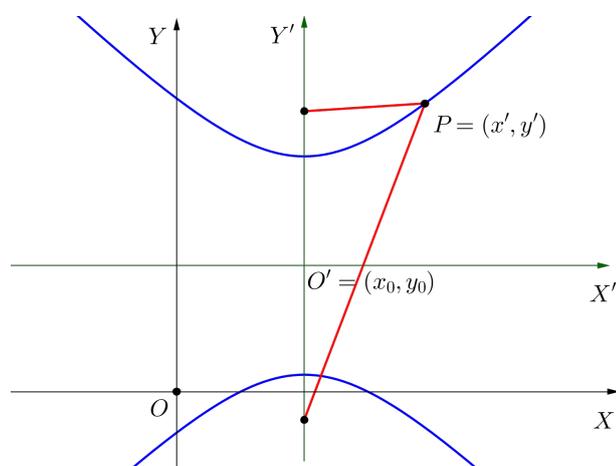
$$P \in \mathbf{H} \implies \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde os focos são  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ ; a reta focal é  $e_1 : y = y_0$ ; os vértices são  $V_1 = (x_0 - a, y_0)$  e  $V_2 = (x_0 + a, y_0)$ ; a reta não focal é  $e_2 : x = x_0$ ; os vértices imaginários são  $W_1 = (x_0, y_0 - b)$  e  $W_2 = (x_0, y_0 + b)$  e as assíntotas são

$$a_1 : y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0) \quad \text{e} \quad a_2 : y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0).$$

**Caso II:** reta focal paralela ao eixo  $OY$ .

Figura 98 – Hipérbole translada com eixo focal sobre  $O'Y'$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Procedendo da mesma forma que no caso anterior, verifica-se que a forma canônica da equação de **H** é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde os elementos são: focos  $F_1 = (x_0, y_0 - c)$  e  $F_2 = (x_0, y_0 + c)$ ; a reta focal é  $e_1 : x = x_0$ ; os vértices são  $V_1 = (x_0, y_0 - a)$  e  $V_2 = (x_0, y_0 + a)$ ; a reta não focal é  $e_2 : y = y_0$ ; os vértices imaginários são  $W_1 = (x_0 - b, y_0)$  e  $W_2 = (x_0 + b, y_0)$  e as assíntotas são

$$a_1 : x - x_0 = -\frac{b}{a}(y - y_0) \quad \text{e} \quad a_2 : x - x_0 = \frac{b}{a}(y - y_0).$$

## 5.4 Elipse

Já vimos que se uma curva é uma elipse **E** com focos  $F_1$  e  $F_2$ , retas focal e não focal  $e_1$  e  $e_2$ , respectivamente, eixo focal  $V_1V_2$  e eixo não focal  $W_1W_2$ , então vale a relação:

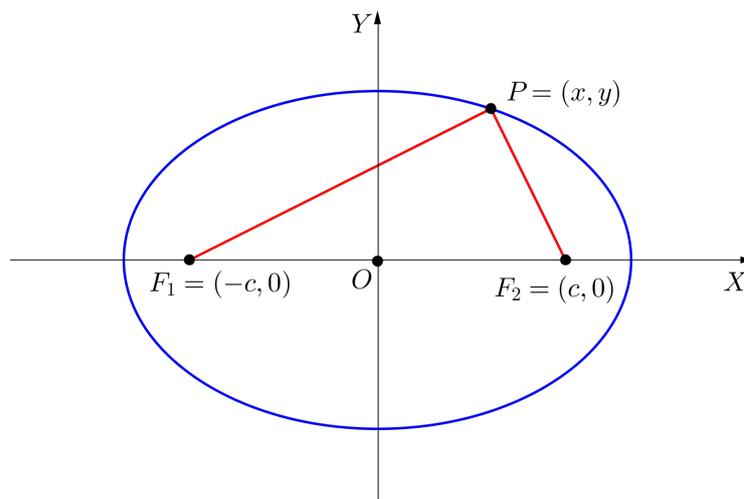
$$P = (x, y) \in \mathbf{E} \iff d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \quad 0 \leq c < a,$$

Antes de encontrarmos uma equação canônica para **E**, lembremos que  $d(F_1, F_2) = 2c$ ,  $d(V_1, V_2) = 2a$  e  $d(W_1, W_2) = 2b$ , e que  $a^2 = b^2 + c^2$ .

**Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ :**

Consideremos a elipse **E** (Figura 99), de focos e vértices:  $F_1 = (-c, 0)$ ;  $F_2 = (c, 0)$ ;  $V_1 = (-a, 0)$ ;  $V_2 = (a, 0)$ ;  $W_1 = (0, -b)$  e  $W_2 = (0, b)$ .

Figura 99 – Elipse com reta focal sobre OX



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \implies$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

elevando ao quadrado, ambos os membros da equação, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \implies$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2,$$

somando os termos semelhantes, obtemos

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

dividindo nos dois membro da equação por 4 e isolando o radical, obtemos

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando os membros da equação ao quadrado, temos

$$(a^2 - cx)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \implies$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \implies$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \implies$$

$$a^4 + c^2x^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

Como de  $a^2 = b^2 + c^2$ , temos  $c^2 = a^2 - b^2$  então

$$a^4 + (a^2 - b^2)x^2 = a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2 \implies$$

$$a^4 + a^2x^2 - b^2x^2 = a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2 \implies$$

$$-b^2x^2 = -a^2b^2 + a^2y^2 \implies$$

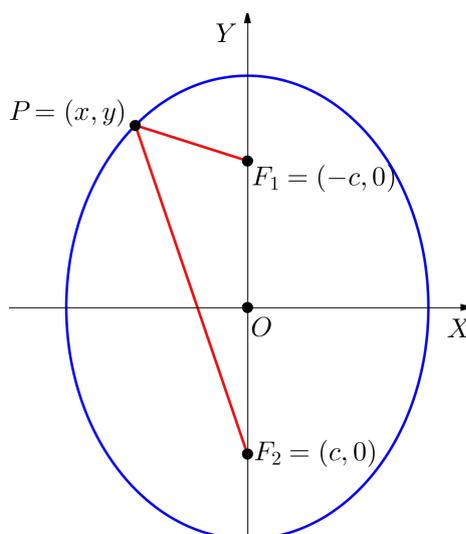
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

dividindo ambos os membros da equação por  $a^2b^2$ , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY:**

Figura 100 – Elipse com reta focal sobre OY.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste caso, temos que  $F_1 = (0, -c)$ ;  $F_2 = (0, c)$ ;  $V_1 = (0, -a)$ ;  $V_2 = (0, a)$ ;  $W_1 = (-b, 0)$  e  $W_2 = (b, 0)$  são os respectivos focos e vértices da elipse.

Fazendo um desenvolvimento como o feito no caso anterior, verificamos que a equação da elipse é:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

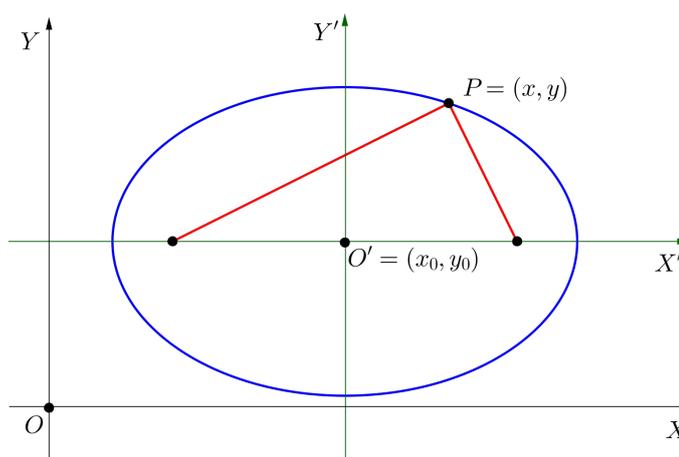
**Elipse com centro no ponto  $O' = (x_0, y_0)$ :**

Por uma translação dos eixos coordenados vamos obter a equação da elipse  $E$ , onde a reta focal é horizontal ou vertical.

Sendo  $O'X'Y'$ , o sistema de eixos ortogonais obtido transladando o sistema  $OXY$  para a nova origem  $O'$ .

**Caso I:** reta focal paralela ao eixo  $OX$ :

Figura 101 – Elipse com o eixo focal sobre o eixo  $O'X'$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como  $O' = (x_0, y_0)$  é o centro,  $e_1 : y = y_0$  é a reta focal e  $F_1 = (x_0 - c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 + c, y_0)$  são os focos de  $E$ , de modo análogo ao usado para o caso da hipérbole, teremos:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Portanto, sendo um ponto  $P = (x, y)$  temos que:

$$P \in E \implies \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

onde os elementos de  $E$  são: reta não focal  $e_2 : x = x_0$ ; vértices sobre a reta focal  $V_1 = (x_0 - a, y_0)$  e  $V_2 = (x_0 + a, y_0)$ ; vértices sobre a reta não focal  $W_1 = (x_0, y_0 - b)$  e  $W_2 = (x_0, y_0 + b)$ . Além dos focos e da reta focal, já mencionados.

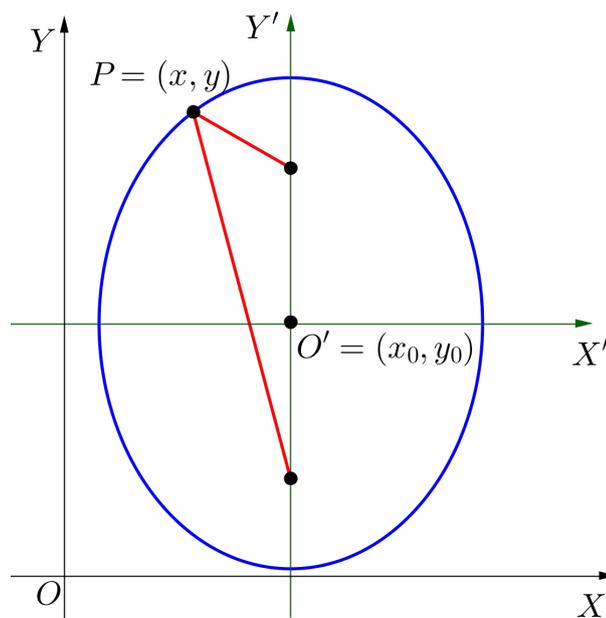
**Caso II:** reta focal paralela ao eixo  $OY$ : (Figura 102)

Procedendo de modo semelhante ao caso anterior pode-se verificar que a forma canônica da equação da elipse  $E$ , quando com centro em  $(x_0, y_0)$  e eixo focal paralelo ao eixo  $OY$ , é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

onde os elementos são: reta focal  $e_1 : x = x_0$ ; reta não focal  $e_2 : y = y_0$ ; focos  $F_1 = (x_0, y_0 - c)$  e  $F_2 = (x_0, y_0 + c)$ ; vértices sobre a reta focal  $V_1 = (x_0, y_0 - a)$  e  $V_2 = (x_0, y_0 + a)$  e os vértices sobre a reta não focal  $W_1 = (x_0 - b, y_0)$  e  $W_2 = (x_0 + b, y_0)$ .

Figura 102 – Elipse com reta focal sobre o eixo  $O'Y'$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5.5 Equação geral do segundo grau

Define-se como equação geral do segundo grau nas variáveis reais  $x$  e  $y$  a uma equação do tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

De acordo com [21], esta equação sempre representa uma cônica  $C$ , onde colocaremos sem demonstração:

- Se  $B^2 - 4AC = 0$ , então temos: uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio;
- Se  $B^2 - 4AC > 0$ , então temos: uma hipérbole ou par de retas concorrentes;
- Se  $B^2 - 4AC < 0$ , então temos: uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

Notemos que no item (a), temos a parábola e todos os seus casos degenerados; no item (b), temos a hipérbole e todos os seus casos degenerados e no item (c), temos a elipse e todos os seus casos degenerados.

Com relação ao item (a), merece destaque o caso particular em que  $B = C = 0$  e  $E = 1$ . Neste caso, a equação pode ser escrita com a seguinte forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Esta forma é chamada de forma reduzida da equação de segundo grau.

Em [19], mostra-se que toda função definida por este caso particular de equação de segundo grau gera um gráfico que coincide com uma parábola.

## 6 APLICAÇÕES E CURIOSIDADES

As cônicas não degeneradas, oferecem uma vasta quantidade de aplicações, além de surgirem, naturalmente, em surpreendentes ocasiões.

É possível encontrar aplicações das secções cônicas na rádio-astronomia, na telecomunicação, na acústica, na física, na matemática, na arquitetura, na engenharia, na navegação, na aviação e na medicina.

Inclusive, a descoberta da parábola e da hipérbole é uma consequência da aplicação dessas duas cônicas na resolução do problema de Delos como já foi mencionado.

Neste capítulo, serão mostradas algumas destas aplicações e curiosidades, com breves comentários. Já que na maioria dos casos, as demonstrações destas aplicações e curiosidades são feitas por meio do Cálculo.

### 6.1 Parábola

Em diversos textos comenta-se sobre uma lenda que afirma que, por volta de 250 a.C., Arquimedes teria destruído navios que sitiavam a cidade de Siracusa, incendiando-os com os raios de sol refletidos por superfícies parabólicas. Embora isso seja teoricamente possível, não existem provas, de fato, que isso tenha ocorrido. Mas a lenda prevalece e, com ela, a ideia de que ondas (de luz, de calor, de rádio ou de outra qualquer natureza), quando refletidas numa superfície parabólica concentram-se sobre o foco.

Pode-se citar para a parábola, inúmeras aplicações, sem falar das diversas ocasiões em que ela surge naturalmente.

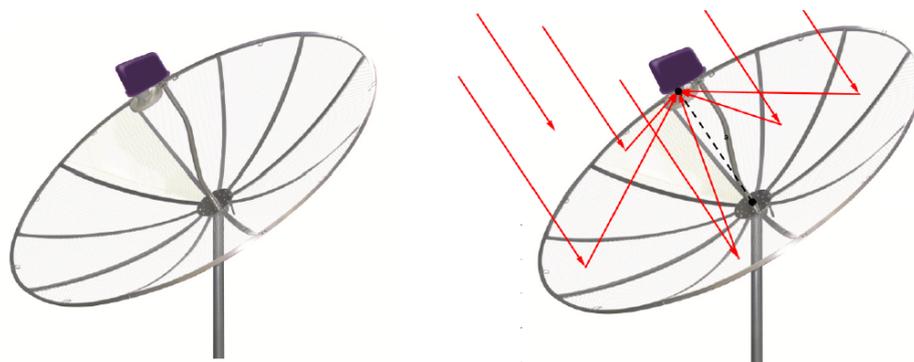
#### 6.1.1 Antenas parabólicas

São antenas com forma de parabolóide de revolução, cuja a função é emitir ou receber ondas.

No caso das antenas usadas em residências, um satélite envia suas ondas eletromagnéticas, na direção da terra. Devido a grande distância, estas ondas propagam-se mais ou menos paralelos ao eixo de uma antena parabólica que esteja direcionada para o mesmo. Quando uma onda incide na superfície da antena, ela é refletida para um captador cuja localização coincide com o foco das parábolas que geram a antena parabólica, intensificando amplamente o sinal emitido pelo satélite.

Esta tecnologia também é usada para a recepção de sinais de rádio, TV por assinatura, internet e celular, sejam estes sinais emitidos por satélites ou torres.

Figura 103 – Antena parabólica



(a) Uma antena parabólica

(b) Incidência de ondas em uma antena parabólica.

Fonte: (a) Retirada de <http://goo.gl/rDtPcG> (acessado em 15/04/2015)

Fonte: (b) Elaborada pelo autor.

Com a missão de captar ondas de rádio que sejam emitidas de corpos muito distante no espaço, os rádiotelescópios são construídos com um conjunto de antenas parabólicas, caso do rádiotelescópio Alma, no Chile, que possui 66 antenas parabólicas, ou com uma única antena parabólica, neste caso, a antena pode chegar a ter dimensões gigantescas como a do rádiotelescópio de Arecibo, em Porto Rico, que é um dos maiores rádiotelescópios do mundo.

Figura 104 – Rádiotelescópios



(a) Rádiotelescópio de Arecibo



(b) Rádiotelescópio Alma

Fonte: (a) <http://goo.gl/CQwq85> (acessado 15/04/2015)

Fonte: (b) <http://goo.gl/E40Qn2> (acessado em 15/04/2015)

### 6.1.2 Coletores solar

Apontando-se, na direção do sol, uma superfície parabólica espelhada, os raios solares chegam a tais superfícies praticamente paralelos aos seus eixos. Isso ocorre em virtude da grande distância entre Sol e Terra.

Espelhando-se, internamente, um parabolóide de revolução, por exemplo, temos um tipo de coletor ou forno solar, onde os raios solares incidentes em sua superfície serão refletidos para o foco do mesmo, ocorrendo, dessa forma, uma grande concentração de energia térmica, elevando rapidamente a temperatura nas imediações do foco, sendo capaz de gerar combustão rapidamente.

Colocando-se um suporte adequado, na região onde fica o foco desse coletor solar, é possível usá-lo, de forma muito eficiente, com a finalidade de cozer alimentos.

No caso do cilindro parabólico, os raios solares irão convergir para uma reta que contém os focos de todas as parábolas que o gera. Logo, pode-se aplicar o cilindro parabólico de forma semelhante ao parabolóide de revolução, embora, com uma eficiência bem menor.

Figura 105 – Fornos solar



(a) Com forma de parabolóide de revolução



(b) Forma de cilindro parabólico

Fonte: (a) <http://goo.gl/3oS64g> (acessado 15/04/2015)

Fonte: (b) <http://goo.gl/A42n3q> (acessado em 15/04/2015)

O foco de um coletor solar parabólico pode atingir uma temperatura suficientemente alta para derreter aço ou gerar energia elétrica. Um dos maiores coletores solares do mundo está em Odeillo, na França e foi inaugurado em 1970

Figura 106 – Coletor solar de Odeillo



Fonte: <http://goo.gl/gpAGsu> (acessado em 15/04/2015)

Figura 107 – Conjunto de coletores solar em forma de cilindro parabólicos



Fonte: <http://goo.gl/6zPFjY> (acessado em 15/04/2015)

### 6.1.3 Projetores parabólicos

Geralmente, os projetores de luz, têm a forma de parabolóide de revolução. Como exemplos de objetos deste tipo, podemos citar: faróis automotivos, lanternas, holofotes e refletores de curta distância, como os usados em palcos de teatros e shows.

Alguns tipos de projetores têm uma importância ímpar em aplicações diárias, como exemplo, temos os holofotes, que são usados para guiar as aeronaves em dias de nevoeiros na direção da base aérea, faróis automotivos, essenciais para o transporte terrestre durante a noite e em dias chuvosos.

Esta aplicação é bem simples, a lâmpada fica no foco do parabolóide de revolução e emite a luz que é projetada paralelamente ao eixo do mesmo.

Figura 108 – Projetores



Fonte: (a) <http://goo.gl/IFXZII> (acessado em 07/04/2015)

Fonte: (b) <http://goo.gl/3m88oT> (acessado em 07/04/2015)

Fonte: (c) <http://goo.gl/sO1a1P> (acessado em 07/04/2015)

Existem também, projetores com a forma de cilindro parabólico, como alguns faróis de carro e projetores usados em teatros. Neste caso, a lâmpada é colocada de forma que coincida com o segmento de reta formada pela união de todos os focos das parábolas que formam a superfície.

#### 6.1.4 A parábola do balde de Newton

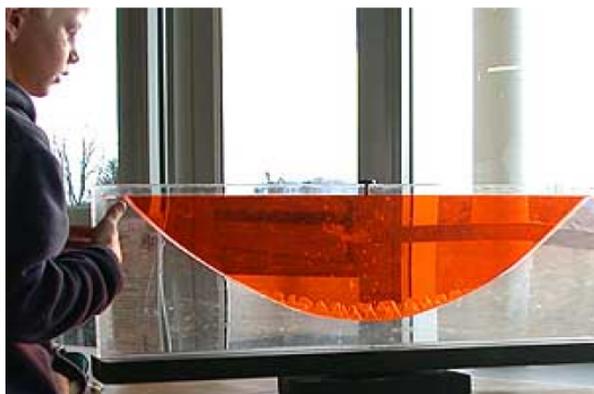
Em seus estudos, Newton chegou a um resultado bem curioso sobre as secções cônicas que pode ser conjecturado por meio do experimento:

*Suspendendo um balde por uma corda e girando-o várias vezes para que a corda seja enrolada. Em seguida, colocando-se água no balde e Girando-o em sentido contrário ao que a corda foi enrolada, iniciando assim, um movimento de rotação acelerado, sob a ação da corda enrolada. Inicialmente, a superfície da água será plana, como antes de o balde começar a se mover. Mas o movimento do balde será gradualmente transferido para a água, e fará com que ela comece a girar. A água irá então, pouco a pouco, afastar-se do eixo do balde, subindo pela região interna da superfície lateral do mesmo. A superfície da água, inicialmente plana, vai ficando côncava. Quanto mais rápido for o movimento, mais a água vai subir, até que a velocidade da água se iguale a velocidade do balde.*

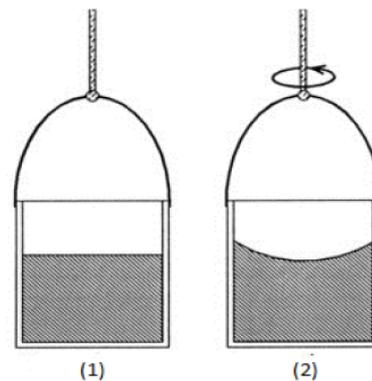
Ao analisar um experimento análogo, Newton percebeu que a superfície côncava adquirida pela água é parabólica.

Não é necessário que o recipiente seja exclusivamente um balde e o líquido seja obrigatoriamente água, para que se obtenha uma superfície parabólica, um exemplo disso pode ser visto na Figura 109.

Figura 109 – Balde de Newton



(a) Experiência sem usar o balde e com uma substância diferente de água



(b) Experiência do balde de Newton.

Fonte: (a) <http://goo.gl/Va6RjC> (acessado em 15/04/2015)

Fonte: (b) <http://goo.gl/I97aTH> (acessado em 15/04/2015)

No caso da ilustração (a) da Figura 109 é mostrado um experimento feito com um bloco retangular cheio de um líquido mais denso (líquido incolor) junto com um líquido menos denso (líquido vermelho). Onde, rotacionando o bloco, percebe-se a formação de uma parábola.

### 6.1.5 Construções civis com formas parabólicas.

As formas parabólicas são muito usadas em construções civis, pois, além da estética que tais formas oferecem, as propriedades matemáticas presentes nas curvas parabólicas servem para reforçar as estruturas e também para otimizar espaços, iluminação, ventilação e custos.

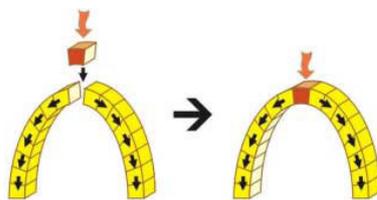
#### 6.1.5.1 Arcos parabólico:

As estruturas em forma de arcos parabólicos são, naturalmente, as mais estável, pois são apropriadas para que haja um nivelamento das forças exercidas sobre elas, isto é, as tensões são distribuídas igualmente por toda a estrutura até que cheguem ao solo. É o mesmo princípio usado pelos romanos para vencerem grandes vãos através de empilhamento de pedras, princípio este, que viabilizou a construção de alguns tipos de pontes, aquedutos, viadutos e túneis.

Num arco parabólico, feito, por exemplos, com pedras, como mostra a seguinte figura, tem-se que a pedra do topo, encaixa-se travando o arco e deixando-o

inflexível, onde toda tensão sobre o arco é igualmente distribuída e direcionada para o solo.

Figura 110 – Arcos parabólicos



Fonte: <http://goo.gl/CyayFp> (acessado em 07/04/2015)

As coberturas que usam arcos parabólicos são ideais em construções que exijam grandes espaços verticais, horizontais e transversais como ginásios, catedrais, galpões, túneis, viadutos, pontes, estádios de futebol, entre outras.

Figura 111 – Arcos parabólicos em construções civis



(a) Um túnel



(b) Ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília



(c) Cobertura metálica (galpão)

Fonte: (a) <http://goo.gl/Pjztg4> (acessado em 07/04/2015)

Fonte: (b) <http://goo.gl/nw4Dyw> (acessado em 07/04/2015)

Fonte: (c) <http://goo.gl/vMY0VS> (acessado em 07/04/2015)

### 6.1.5.2 O problema do fio suspenso:

A curva obtida quando objetos flexíveis como corrente, corda, cabo ou fio é suspenso livremente por dois pontos é chamada de catenária e chamou, por muito tempo, a atenção de muitos estudiosos.

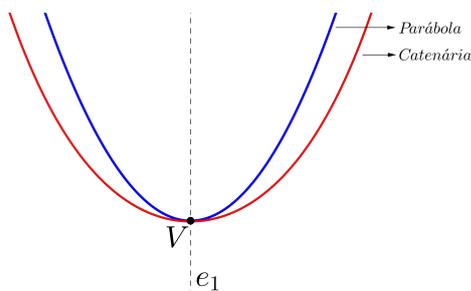
Figura 112 – Catenária formada pela suspensão de uma corrente por dois hastes



Fonte: <http://goo.gl/9vziEk> (acessado em 07/04/2015)

O problema de encontrar a equação que representa essa curva pode ser considerado um dos mais famosos e difíceis da história do *Cálculo*. Este problema foi abordado, entre outros, por Leonardo da Vinci e por Galileu, que acreditavam que tal curva fosse uma parábola.

Figura 113 – Parábola e Catenária (Curva mais aberta)



Fonte: Elaborada pelo autor

Foi Johann Bernoulli (1667-1748), quem solucionou esse problema e mostrou que a curva não é uma parábola. Além de Johann Bernoulli, Leibniz e Huygens (este último, apenas com 17 anos de idade e por um método geométrico) resolveram o problema.

Uma catenária pode ser expressa, em notação moderna, por:

$$s = \frac{e^t + e^{-at}}{2a}$$

Onde  $a$  é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos do fio (massa por unidade de comprimento e tensão com a qual ele é segurado). Vale ressaltar

que no caso particular em que  $a = 1$ ,  $s = \cosh t$ , isto é, a catenária é, neste caso, o gráfico de uma função cosseno hiperbólico, que é definida numa hipérbole  $\mathbf{H}$  de equação,

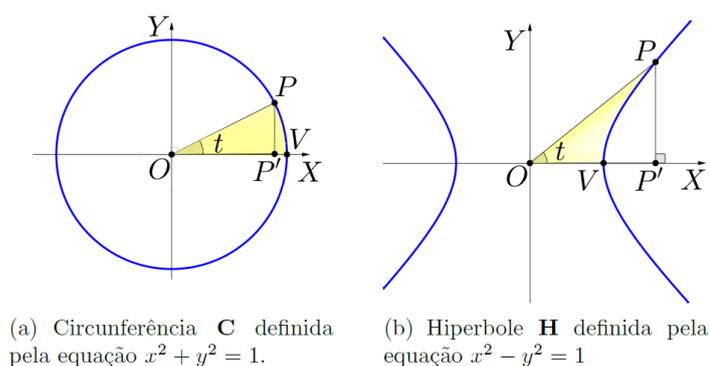
$$x^2 - y^2 = 1,$$

por uma analogia à definição dada as funções trigonométricas em uma circunferência  $\mathbf{C}$  de equação,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

onde  $t$  é, em radianos, o ângulo  $POP'$ , onde existe uma equivalência entre a área do setor  $POV$ , na hipérbole, e a área do setor  $POV$ , na circunferência, em (a),  $O$  é o centro de  $\mathbf{C}$  e  $P \in \mathbf{C}$ , em (b),  $O$  é o centro de  $\mathbf{H}$  e  $P \in \mathbf{H}$  e  $P'$  é a projeção de  $P$  sobre o eixo  $OX$  (Figura 114).

Figura 114 – Definição de funções hiperbólicas em analogia às funções trigonométricas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observemos que em (a), temos:  $\sin t = d(P, P')$  e  $\cos t = d(O, P')$  e, em (b), temos:  $\sinh t = d(P, P')$  e  $\cosh t = d(O, P')$ .

### 6.1.5.3 Pontes Pênsis:

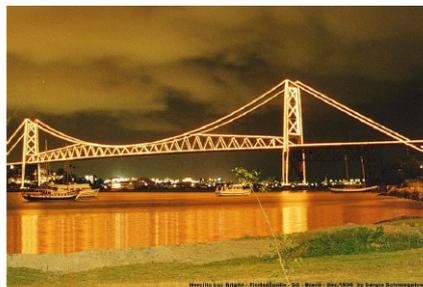
Uma ponte pênsil é uma ponte suspensa por cabos ancorados que liga duas margens, onde cabos são tracionados em forma de arcos, invertidos e ligados a torres verticais. As pontes pênsis existem em vários países inclusive aqui no Brasil. Foi na china, onde se construiu, por volta de 285 a.C., a primeira ponte pênsil, onde foram usados cabos feitos de fibras de bambu entrelaçados.

Podemos destacar dois tipos de pontes pênsis:

- Pontes com cabos parabólicos, ilustração (a) da Figura 115: aquelas em que as cargas de tensão são uniformemente distribuídas ao longo de uma superfície ou linha horizontal formando uma suspensão para os cabos em forma de parábola;

- b) Pontes com cabos catenários, ilustração (b) da Figura 115: aquelas em que as cargas de tensão, distribuídas ao longo do cabo, correspondem ao seu próprio peso, fazendo, dessa forma uma suspensão com a forma de uma catenária.

Figura 115 – Pontes pênséis.



(a) Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis.



(b) Ponte suspensa, no Canadá

Fonte: (a) <http://goo.gl/nVrbQS> (acessado em 07/04/2015).

Fonte: (b) <http://goo.gl/YlCqjz> (acessado em 07/04/2015).

#### 6.1.5.4 Outras coberturas parabólicas:

Além das coberturas com formas de arcos parabólicos, um outro tipo de cobertura que usa, principalmente, em grandes obras arquitetônicas, as formas cônicas é a cobertura em forma de parabolóide hiperbólico, estas, são de uma beleza exuberante, além de o fato dessas superfícies serem duplamente regradas, o que possibilita que as construções com este tipo de coberturas sejam feitas cruzando-se vigas de ferro retas, o que diminui o custo da construção e oferece uma estrutura mais forte.

Figura 116 – Estrutura em forma de parabolóide hiperbólico



Fonte: <http://goo.gl/4Iqhd2> (acessado em 07/04/2015)

### 6.1.6 Lançamentos de projéteis

Galileu mostrou que quando um corpo  $P$  é lançado, obliquamente, desprezando-se a resistência do ar, a trajetória desse corpo descreve uma parábola, onde a altura máxima atingida pelo corpo é o vértice da mesma.

Tomando-se uma representação para o lançamento de um projétil em um plano cartesiano, a coordenada  $y$  da trajetória, que representa a altura do projétil em relação ao solo, tem uma relação com a coordenada  $x$ , que representa o deslocamento horizontal do projétil, dada por

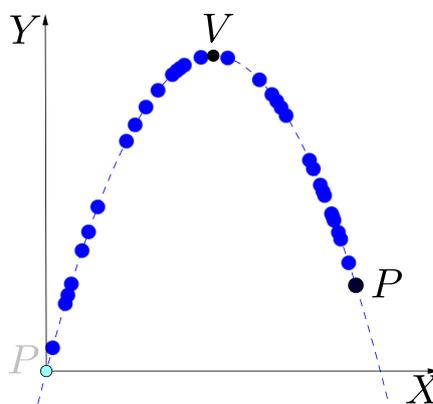
$$y(x) = x \cdot \tan \theta - x^2 \cdot \frac{g}{2v_0 \cdot \cos^2 \theta'}$$

com  $\theta \neq 90^\circ$ . Esta relação é uma equação do segundo grau do tipo

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Como já vimos, a curva definida por esta equação é uma parábola, logo a trajetória do projétil, lançado obliquamente, desprezando-se a resistência do ar, é uma parábola.

Figura 117 – Lançamento de um projétil  $P$ .



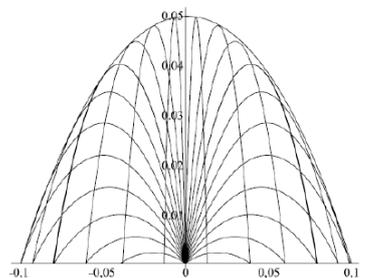
Fonte: Elaborada pelo autor

Considerando-se um objeto  $P$  sendo lançado,  $n$  vezes, por  $n$  ângulos diferentes de  $90^\circ$  e distintos entre si, com uma variação contínua entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , teremos então,  $n$  trajetórias que descrevem uma família de parábolas  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ . Neste caso, vai existir uma única parábola  $\mathbf{P}$ , onde, se um ponto  $P$  pertencer a  $\mathbf{P}$ , então  $P$  pertence a alguma parábola  $\mathbf{P}_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ . Esta parábola  $\mathbf{P}$  é uma curva envoltória a família formada com todas as parábolas  $\mathbf{P}_i$  e é chamada de parábola de segurança, pois ela delimita o alcance máximo de todos os lançamentos.

Figura 118 – Região de segurança.



(a) Erupção vulcânica



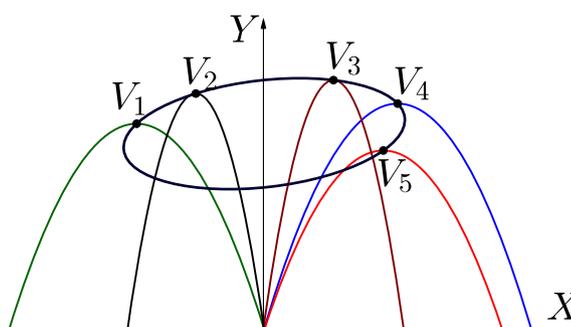
(b) Envoltória a uma família de parábolas

Fonte: Retiradas de [18].

Num plano, a região exterior à parábola de segurança é uma região fora do alcance de qualquer ponto  $P \in \mathbf{P}_i$ , chamada de região de segurança. Já no espaço tridimensional, para se obter a região de segurança, pensemos na parábola de segurança sendo rotacionada.

Um fato tão curioso quanto o fato de uma parábola ser a envoltória de uma família de parábolas é que sendo  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , os respectivos vértices das parábolas  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ , a curva que passa por todos esses vértices é uma elipse.

Figura 119 – Elipse inesperada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 6.1.7 Resolução de problemas em física

Quando estudamos o movimento uniformemente variado (M.U.V), temos que o espaço é dado em função do tempo pela equação de segundo grau

$$S(t) = S_0 + V_0t + \frac{1}{2}at^2,$$

a qual define uma função quadrática, pois  $a \neq 0$  (o  $a$  é aceleração que no M.U.V é sempre diferente de zero).

Como o gráfico dessa função é uma parábola, podemos usá-la para uma visualização geométrica de problemas, de física, relacionados ao M.U.V. Além disso, é possível obter informações como alcance, altura máxima, tempo de percurso em lançamentos oblíquos, de forma mais didática com o auxílio de uma parábola.

### 6.1.8 Resolução de problemas de matemática

Como já vimos, a parábola, em sua forma não degenerada, surge como gráfico de funções definidas pela equação  $y = ax^2 + bx + c$ , onde a adoção desta curva nos dá a visualização geométrica de alguns elementos importantes da função quadrática como os zeros ou raízes, os valores máximos ou mínimos e os intervalos de crescimento e decrescimento desta função. Desta forma, em determinados problemas matemáticos cuja natureza leve a tais funções, pode ser feita uma transição da visão algébrica para uma visão geométrica, recorrendo-se a parábola.

### 6.1.9 A parábola em atividades lúdicas

Alguns objetos com forma parabólica podem ser apresentados aos alunos com o intuito de lhes despertar um maior interesse pelo estudo das secções cônicas.

#### 6.1.9.1 O bilhar parabólico

É um tipo de sinuca, que um de seus lados tem a forma de parábola, e o seu único buraco está localizado no foco desta parábola.

Figura 120 – Bilhar Parabólico



Fonte: <http://goo.gl/ziBkVX> (acessado em 07/04/2015)

Lançando-se uma bola por uma trajetória paralela ao eixo da parábola, quando esta bola incidir sobre o lado parabólico do bilhar, ela irá convergir para o buraco do bilhar.

### 6.1.9.2 Mirascope

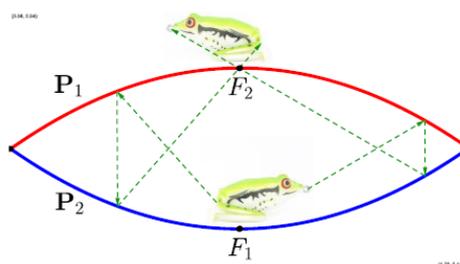
É um objeto que consiste de dois parabolóides de revolução idênticos e espelhados interiormente que quando colocamos algum objeto coincidindo com o vértice de um desses parabolóides e, em seguida, cobrimos o mesmo, com o outro parabolóide, de forma que as concavidades fiquem opostas, fazendo com que o vértice de uma das superfícies coincida com o foco da outra, e que, conseqüentemente, a imagem do objeto seja refletida para o vértice da superfície que está em cima.

Para explicar, vamos denotar o parabolóide de revolução que fica em cima por  $P_1$ , seu foco por  $F_1$  e seu vértice por  $V_1$ . Já a superfície que fica em baixo, chamaremos de  $P_2$ , seu foco de  $F_2$  e seu vértice de  $V_2$ . Como já sabemos,  $F_1$  coincide com  $V_2$  e  $F_2$  coincide com  $V_1$ . Logo, o objeto colocado em  $V_2$  terá a sua imagem emitida na direção de  $P_1$ , ao incidir sobre  $P_1$ , esta imagem é refletida, na direção de  $P_2$ , paralelamente ao eixo de  $P_2$ , o que faz que haja a reflexão para o foco  $F_2$  que, como já sabemos, coincide com  $V_1$ . Portanto a imagem do objeto vai aparecer no vértice  $V_1$ .

Figura 121 – Mirascope



(a) Imagem de um objeto no mirascope



(b) Ilustração de reflexão no interior de um mirascope.

Fonte: (a) <http://goo.gl/4ELzs8> (acessado em 17/04/2015)

Fonte: (b) Elaborada pelo autor.

### 6.1.9.3 Tabuada parabólica de multiplicação

É possível construir uma tabuada de multiplicar, considerando-se um plano cartesiano de origem  $O$  e eixos  $OX$  e  $OY$ , de forma que cada valor negativo de  $OX$  sejam substituído por seu respectivo oposto aditivo, e construindo a parábola definida pela equação  $y = x^2$ , neste plano cartesiano.

Para determinar o valor do produto entre dois valores  $a$  e  $b$  marcados sobre  $OX$ , onde  $a$  é distância da origem ao um ponto  $A \in OX$  que está à esquerda da origem e

$b$  é a distância da origem a um ponto  $B \in OX$  que está à direita da origem, basta, colocar uma régua passando pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$  cujas projeções sobre o eixo  $OX$  coincidam, respectivamente, com  $a$  e  $b$  e marcar o ponto  $P$  de intersecção da régua com o eixo  $OY$  e, pela Proposição 5.1, teremos que a  $d(P, O)$  é o valor da multiplicação entre  $a$  e  $b$ .

#### 6.1.9.4 Telefone parabólico

Tomando-se duas superfícies parabólicas de revolução e as posicionando de forma que seus eixos coincidam e suas concavidades fiquem opostas a propriedade de reflexão da parábola possibilita a comunicação entre duas pessoas, onde uma fala no foco e a outro escuta no outro foco.

Figura 122 – Ondas emitidas de  $F_1$ , foco de  $P_1$  para  $P_2$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 6.2 Hipérbole

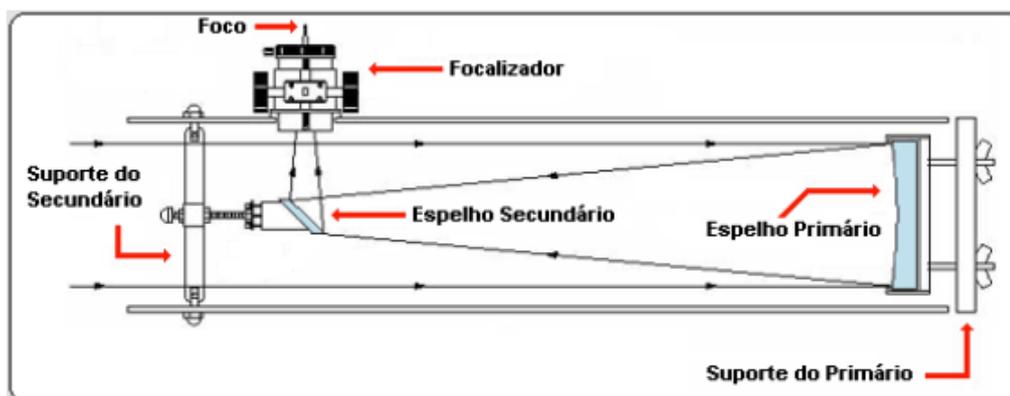
### 6.2.1 Telescópios

Os primeiros telescópios (refratores) apresentavam problemas como a deformação das imagens ou aberração cromática (decomposição da luz branca). Já nos telescópios refletores, construídos com um espelho parabólico no fundo de uma espécie de tubo onde cada feixe de luz é refletido para o foco da superfície parabólica, formando-se assim a imagem neste foco. Como o foco fica no interior do telescópio, na prática, é impossível de se observa por um telescópio deste tipo. Newton resolveu este problema colocando um espelho plano no interior deste tipo de telescópio, de forma que o foco da superfície coincida com um ponto do espelho plano. Este espelho, por suas vez, faz que a imagem possa ser vista fora do telescópio. Mas, no telescópio newtoniano, ocorre uma perda razoavelmente grande de feixes de luz, em motivo do espelho plano ser, razoavelmente grande, e ser posto na frente da superfície parabólica.

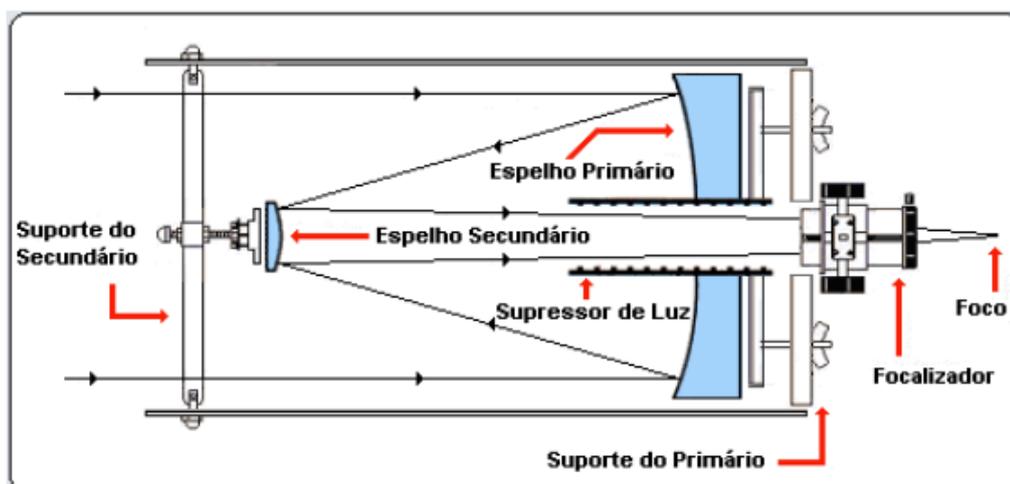
No caso dos telescópios hiperbólicos é colocado um espelho hiperbólico na frente do parabólico de forma que o foco da superfície hiperbólica coincida com o foco da superfície parabólica. Isso faz com os raios de luz que incidem sobre o parabóloide

sejam refletidos para um foco do hiperbolóide e, conseqüentemente, refletidos para o outro foco do mesmo, fora do telescópio. A maior vantagem é que o espelho hiperbólico pode ser muito pequeno, fazendo com a perda de feixes de luz seja mínima.

Figura 123 – Esquema do funcionamento dos telescópios



(a) Telescópio newtoniano



(b) Telescópio hiperbólico

Fonte: (a) <http://goo.gl/6dRdnp> (acessado 15/04/2015)

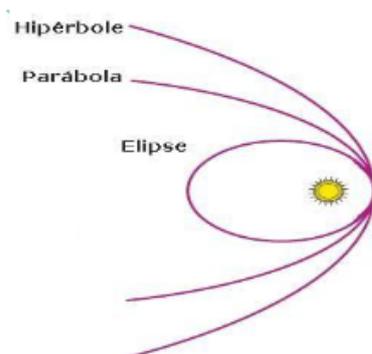
Fonte: (b) <http://goo.gl/r6VEqi> (acessado 15/04/2015)

Note que, no caso de (a), o espelho primária é a superfície parabólica e o espelho secundário é a superfície plana. Já no caso de (b), o espelho primário é a superfície parabólica e o espelho secundário é a superfície hiperbólica.

## 6.2.2 As órbitas dos cometas

Os cometas podem descrever órbitas parabólicas, hiperbólicas ou elípticas.

Figura 124 – As órbitas dos cometas



Fonte: Retirada de [3]

Os cometas cujas órbitas são elípticas se caracterizam por serem periódicos e mover-se ao redor do Sol que ocupa um dos focos da trajetória elíptica.

Os cometas são corpos pequenos, logo a sua influência gravitacional sobre os planetas praticamente não existe. Mas podem ter sua órbita alterada por fortes perturbações gravitacionais sofridas quando passam próximos de grandes corpos.

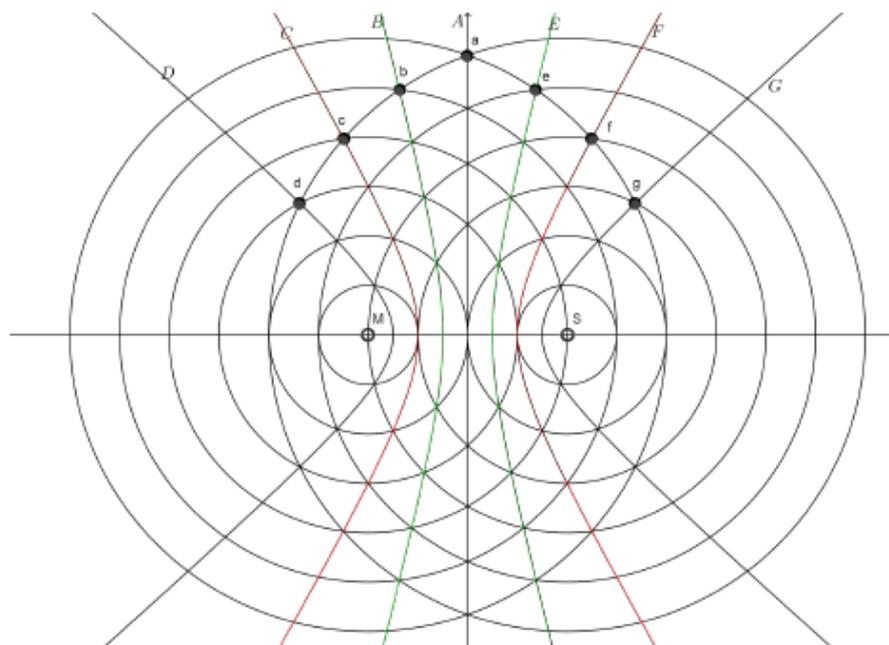
Com posse de estudos feitos por outros astrônomos, em 1704, Edmund Halley, estudou as órbitas de vários cometas, concluiu que os cometas que passaram próximos a terra, em 1682, em 1607, em 1531 e em 1456, eram, na verdade, o mesmo cometa que descrevia uma órbita elíptica em torno do sol com um período de 76 anos e previu, corretamente, seu retorno em 1758. Hoje, esse cometa é chamado de cometa Halley. Mas registros descobertos, posteriormente, indicam que os chineses já o tinham descoberto por volta de 250 a.C..

### 6.2.3 Os sistemas de navegação hiperbólico

Os sistemas eletrônicos de posicionamento baseados em terra, onde usa-se o método de medir a diferença de distâncias a determinados pontos (estações do sistema, estrategicamente posicionadas), para a obtenção da posição do navio, é um sistema que determina uma trajetória hiperbólica para o navio. A posição do navio é determinada por diferença de fase, caso do sistema Decca, ou por diferença de tempo, caso do sistema LORAN.

Um modo prático de construção de uma hipérbole consiste em, tendo-se os focos, traçar, em escala, circunferências com centros nos focos da hipérbole, cujos raios aumentem gradualmente, em uma proporção constante. As circunferências, então, indicam as distâncias aos focos. Para o traçado da hipérbole, escolhem-se os pontos de interseção de duas circunferências cuja diferença dos raios seja o valor da constante desejada.

Figura 125 – Hipérboles



Fonte: Retirada de [3]

Quando a diferença constante das distâncias é pequena, a hipérbole se localiza próxima às diretrizes e é bastante aberta; ao contrário, quando a diferença constante das distâncias cresce, os ramos da hipérbole se aproximam dos focos e a curvatura aumenta.

A compreensão da forma de obtenção da hipérbole pode ajudar no entendimento dos sistemas de navegação que vamos chamar de hiperbólico. Podemos então, pensar no navio como um ponto se movendo sobre a hipérbole, as estações do sistema são os focos, e os sinais enviados pelas torres são as circunferências de raios sobre os focos.

Um sistema hiperbólico de navegação pode usar a medida do intervalo de tempo de recepção de sinais ou a comparação da fase de sinais de onda contínua transmitidos pelas estações de terra.

Para entender esse sistema de navegação, é preciso pensar na hipérbole como um o lugar geométrico das posições do observador onde a diferença dos intervalos de tempo entre a recepção dos sinais enviados simultaneamente pelas duas estações fixas é constante. O princípio básico deste sistema é bastante simples como será descrito a seguir.

Considerando-se duas estações de rádio situadas nas posições  $F_1$  e  $F_2$ , que emitem sinais simultâneos, que são recebidos por um navio num ponto  $P$ , onde é

calculado o intervalo de tempo constante

$$t = |t_2 - t_1|,$$

sendo que  $t_1$  e  $t_2$  são os tempos gastos para que os sinais, enviados pelas estações que se localizam, respectivamente, nas posições  $F_1$  e  $F_2$ , cheguem a posição do navio no ponto  $P$ .

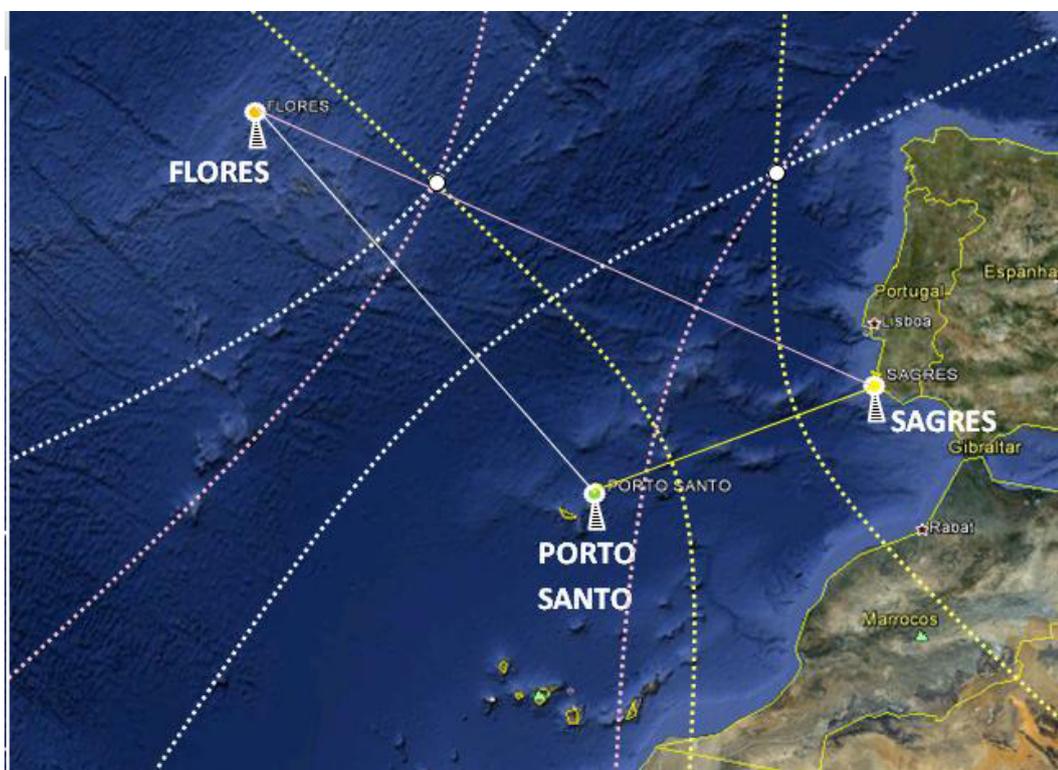
Isso é suficiente para saber que o navio se mantém a uma diferença de distâncias das duas estações constante, isto é,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

onde  $2a$  é uma constante.

Como é possível encontrar mais de uma hipérbole que satisfaça a condição acima mencionada, gerando, assim, uma ambiguidade nas transmissões, é comum a utilização de três ou quatro estações de emissão de sinal, onde uma estação faz a primeira transmissão e as demais só enviam seus sinais depois que recebem o sinal da primeira estação.

Figura 126 – Sistema de navegação



Fonte: Retirada de [3].

### 6.2.4 Estruturas hiperbólicas

Como já vimos, assim como o parabolóide hiperbólico, um hiperbóide de uma folha é uma superfície duplamente regrada. Neste caso, é possível, por exemplo, fazer construções civis com a forma de uma superfície hiperbólica cruzando vigas de aço, permitindo, assim, que haja grande redução na quantidade de materiais usados, além de gerar estruturas muito resistentes.

Diversas torres como as torres de refrigeração das usinas nucleares e as torres de edifícios, são construídas com a forma superfície parabólica em virtude do baixo custo, da estabilidade e resistência destes tipos de estruturas, se comparadas com torres com outros formatos. Em edifícios, as estruturas hiperbólicas de uma folha, geralmente, são mais usadas como um elemento de estética da arquitetura.

Figura 127 – Estruturas com forma de hiperbolóide de uma folha.



(a) Planetário de Saint Louis (Saint Louis Science Center)



(b) Igreja de Nossa Senhora de Aparecida, em Brasília.



(c) Torre de refrigeração de usina nuclear



(d) Torre de Kôbe, no Japão

Fonte: (a) retirada de [3]

Fonte: (b) <http://goo.gl/Wgh9Jv> (acessado em 15/04/2015)

Fonte: (c) <http://goo.gl/jeSOax> (acessado em 15/04/2015)

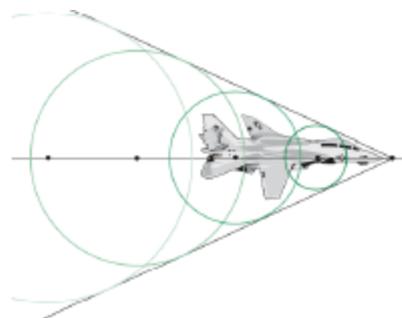
Fonte: (d) <http://goo.gl/TD1DSI> (acessados em 07/04/2015)

### 6.2.5 O cone de Mach

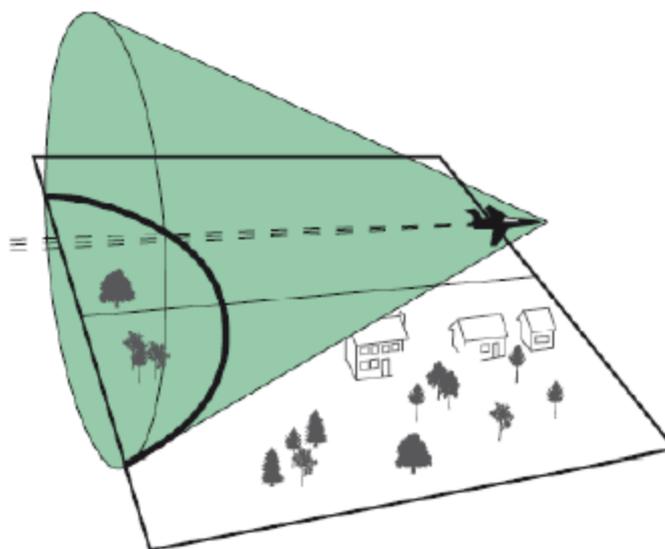
Figura 128 – Cone de Mach



(a) Avião supersônico



(b) Avião supersônico



(c) Limiar de audibilidade

Fonte: Retiradas de [3]

Curiosamente, a hipérbole aparece de maneira natural na propagação de ondas de choque de aviões supersônicos.

Considerando um avião supersônico em voo com uma velocidade  $v$ , em um determinado instante  $t_1$ , este avião pode chegar a uma velocidade maior do que a velocidade de propagação do som. Pensemos então neste avião se deslocando seguindo o trajeto de uma reta paralela ao solo. No instante  $t_0$ , o nariz do avião toca o ponto  $P_0$ , ainda sem que o avião tenha superado a velocidade do som; imediatamente, no instante  $t_1$ , o avião supera a velocidade do som e o seu nariz toca no ponto  $P_1$ , onde é gerado um pulso sonoro esférico que vai se propagando com uma velocidade supersônica; em seguida, no instante  $t_2$ , o nariz toca o ponto  $P_2$ , a partir de onde é emitido outro pulso

esférico, propagando-se com uma velocidade similar ao pulso emitido anteriormente. E isso vai ocorrendo até um determinado instante  $t_n$ , quando a velocidade do avião diminui.

Em outras palavras, a passagem do avião por qualquer ponto, durante o intervalo de tempo

$$t = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1},$$

vai gerando pulsos sonoros e esféricos, onde um pulso vai se propagando de forma instantânea em relação ao pulso imediatamente anterior. Considerando a superfície definida pela união desses pulsos e que envolve o avião, nesse instante  $t$ , ou seja, a onda de choque, temos que esta onda de choque é um cone, chamado de *Cone de Mach*.

O eixo do *cone de Mach* é a trajetória do avião e o vértice é o ponto  $P_n$ .

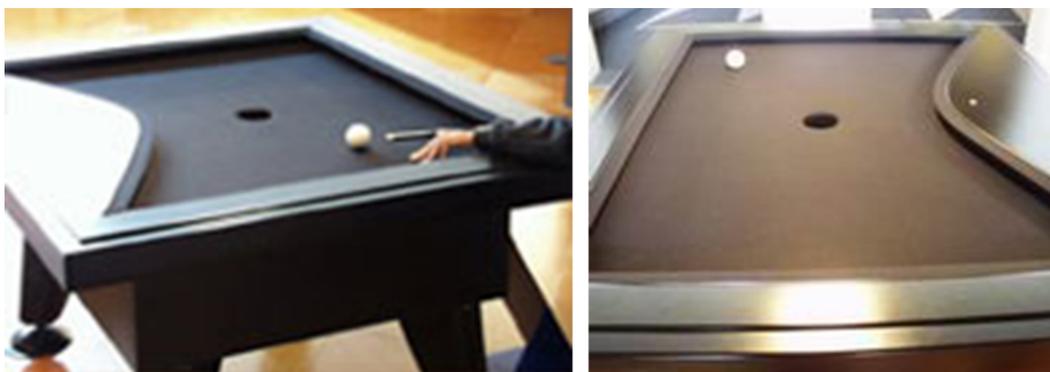
A superfície do *Cone de Mach* é denominada onda de choque e seu impacto pode ser altamente destrutivo. A onda de choque quando atinge o solo, produz uma curva limite entre a região onde o som da aeronave não é ouvido (região exterior à curva) e a região onde o som é percebido (região interior à curva). Esta curva limite é denominada limiar de audibilidade.

Como a trajetória da aeronave é, geralmente, uma linha reta paralela ao solo, então o limiar de audibilidade será, em geral, uma hipérbole.

## 6.2.6 A hipérbole em atividades lúdicas

### 6.2.6.1 Bilhar hiperbólico:

Figura 129 – Bilhar hiperbólico



Fonte: <http://goo.gl/sZffTx> (acessado em 07/04/2015)

Trata-se de uma sinuca análoga ao bilhar parabólico, mas que faz uso de um cilindro hiperbólico de duas folhas em um dos lados da sinuca, onde um foco da hipérbole é marcado e o outro é o buraco.

## 6.3 Elipse

### 6.3.1 As órbitas planetárias

No início do Século XVI, Copérnico propôs o sistema Heliocêntrico, isto é, o sol como centro do sistema solar.

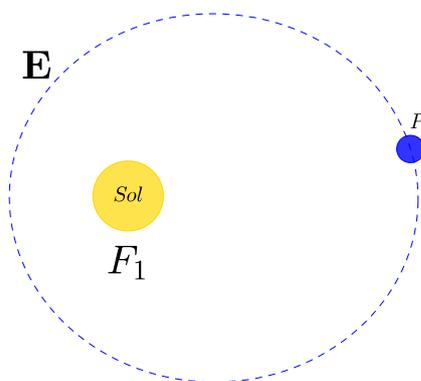
Mais tarde, Kepler adotou o sistema heliocêntrico e com base nas observações que lhe permitiram determinar pontos da órbita de Marte. Ele lança o que hoje é conhecida como a Segunda Lei de Kepler.

A partir da obtenção desta lei e dos dados, em seu poder, Képler começou a procurar uma curva que passasse pelos pontos determinados pelas observações e que satisfizesse a referida lei.

E a única curva que satisfez estes requisitos foi mencionada no que hoje é conhecida como a Primeira Lei de Kepler. As leis de Kepler são:

- a) **Primeira Lei de Kepler:** *Cada planeta se move em órbita elíptica onde o Sol se localiza em um dos focos da elipse.*
- b) **Segunda Lei de Kepler:** *Uma linha unindo um planeta ao Sol varre áreas iguais em períodos de tempo iguais.*

Figura 130 – A posição do Sol concinde com o foco  $F_1$  da elipse  $E$  que define a órbita do planeta  $P$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para um estudo mais detalhado sobre as Leis de Képler, veja [2] ou [23].

Vale comentar que a excentricidade das elipses descritas pelas órbitas dos planetas, geralmente, é muito pequena. Este fato, justifica, em parte, os vários anos de insistência nas órbitas circulares.

De modo mais geral, as órbitas de corpos girando em torno de corpos maiores são elipses, por exemplo, os satélites artificiais ou naturais circulam ao redor dos planetas por órbitas elípticas.

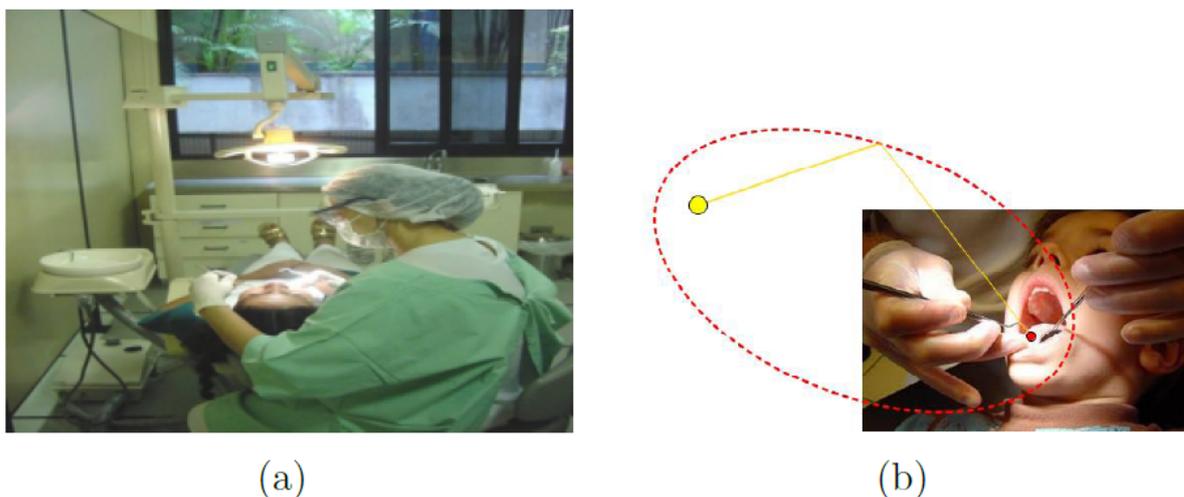
### 6.3.2 Elipses, odontologia e medicina

Os refletores elípticos são muito usados na medicina como por exemplo: na odontologia, na litotripsia e na radioterapia.

#### 6.3.2.1 Tratamentos odontológicos

Os equipamentos usados por dentistas possuem refletores elípticos que têm a missão de concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando e também evitar que os raios luminosos ofusquem a visão do paciente, causando incômodo. Dessa forma, a lâmpada do equipamento se localiza em um dos focos da superfície elíptica do equipamento, de onde os raios incidentes são refletidos para o outro foco. Basta então posicionar o paciente de forma que sua boca fique exatamente neste outro foco.

Figura 131 – Tratamento odontológico



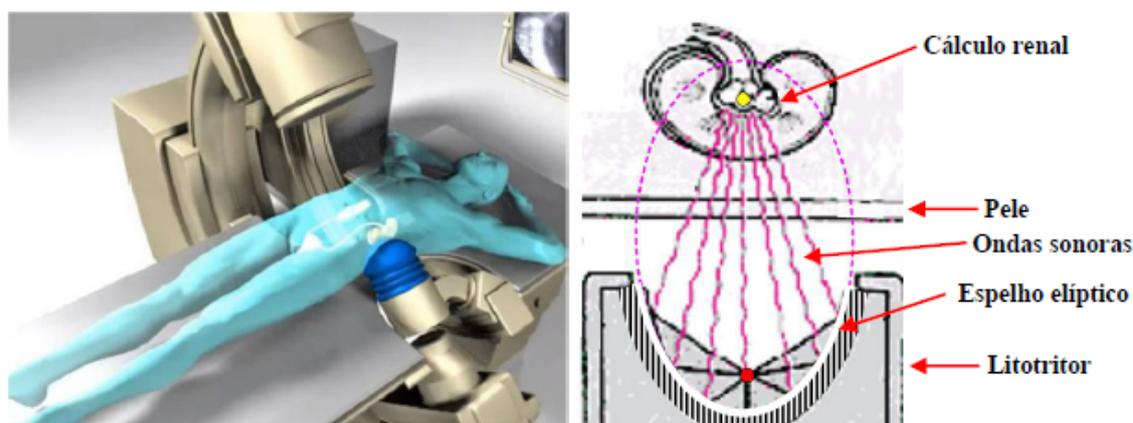
Fonte: (a) <http://goo.gl/MGik2e> (acessado em 17/04/2015)

Fonte: (b) Retiradas de [14]

#### 6.3.2.2 Tratamento de cálculo renal (litotripsia)

A litotripsia é um tratamento feito para se evitar a cirurgia para a remoção de cálculos renais. Neste procedimento, o paciente é colocado em um aparelho com formato de elipsóide, onde o cálculo renal é posicionado em um de seus focos. Uma fonte de ondas sonoras de alta frequência (ultrassom) é colocada no outro foco. Assim, todas as ondas sonoras convergem para o cálculo, causando vibrações até quebrá-lo em pequenos pedaços que possam ser expelidos junto com a urina do paciente.

Figura 132 – Tratamento do cálculo renal.



Fonte: Retirada de [38]

### 6.3.2.3 Tratamento de câncer (radioterapia)

A radioterapia usa radiações de alta energia para combater células malignas, é usada para tratamento de tumores localizados, uma vez que só funciona na área que está recebendo a radiação. Na radioterapia, os raios devem eliminar os tecidos cancerígenos sem afetar as células saudáveis que se encontrem próximas. O equipamento usado é semelhante ao usado na litotripsia e emite raios oriundos de um dos focos de uma superfície elíptica, para o outro foco, onde deve ser posicionado o tumor.

Figura 133 – Equipamento usado para fazer radioterapia



Fonte: <http://goo.gl/MGik2e> (acessado em 17/04/2015)

### 6.3.3 Estruturas elípticas

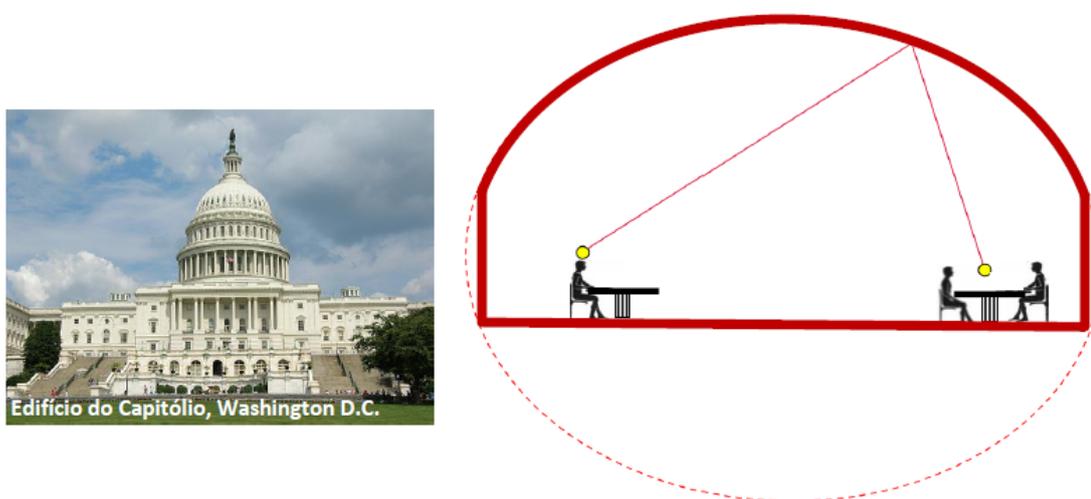
Devido à propriedade refletora da elipse as superfícies elípticas, têm propriedades que se usam para criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros e igrejas. No caso do teatro, o artista fica em um dos focos.

#### 6.3.3.1 Salas de sussurros

Outra interessante aplicação da propriedade refletora da elipse pode ser encontrada nas salas de sussurros, presentes em castelos e museus. Nestas salas, que têm a forma de elipsóide de revolução, uma pessoa posicionada em um dos focos do elipsóide pode se comunicar com outra pessoa que esteja no outro foco, apenas sussurrando.

No entanto, tal comunicação é impossível em outros pontos da sala. Para isso, a forma da sala é fundamental. Ao projetá-la, fixam-se os dois focos que ficam à altura das cabeças que vão se comunicar. Em seguida, admite-se uma elipse com estes focos e a sala é construída de tal forma que qualquer plano que passe por estes focos intersecte a sala segundo uma elipse idêntica a elipse inicial. Assim, pelas propriedades da elipse, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos chegarão ao outro foco ao mesmo tempo, o que proporciona uma ampliação natural do som.

Figura 134 – Galeria de sussurros



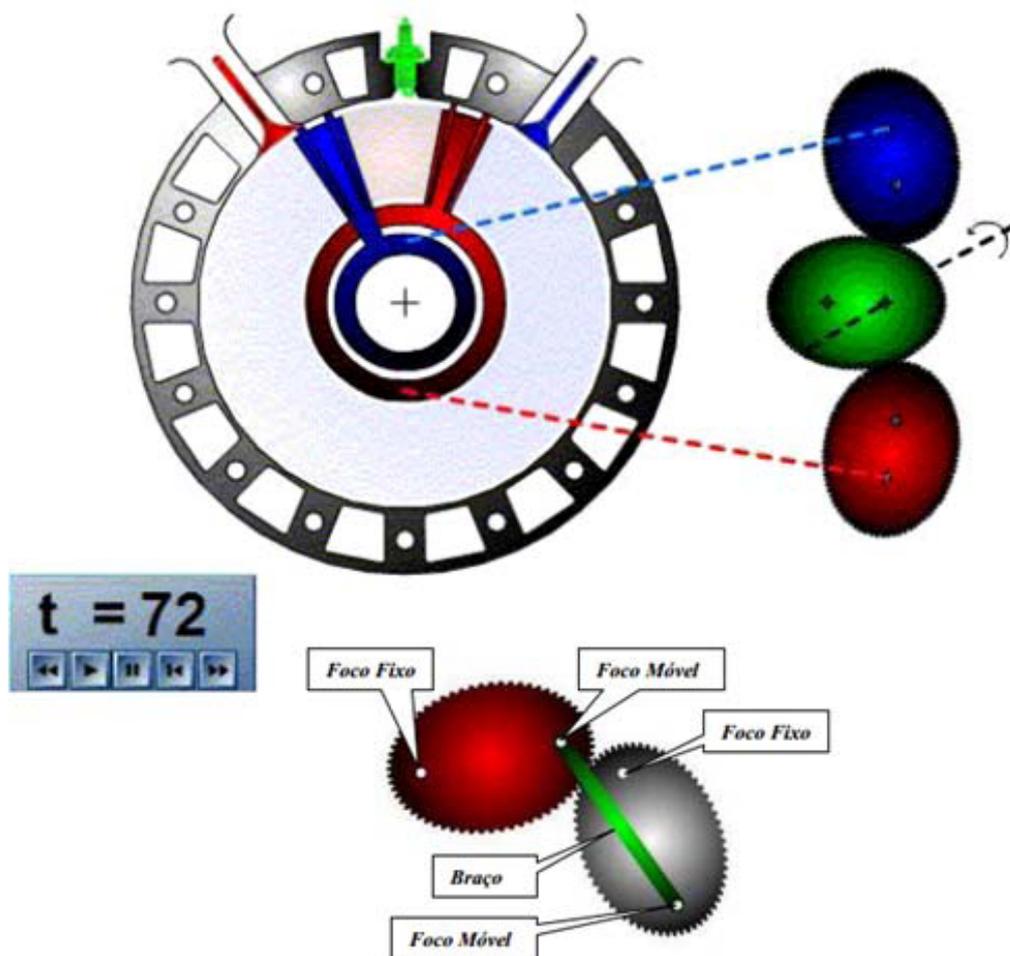
Fonte: Retirada de [14]

### 6.3.4 Na engenharia mecânica

Além das aplicações já vistas, também está sendo crescente o uso de engrenagens com formas elípticas.

Figura 135 – Engrenagens elípticas

*Motor de Combustão Interna com Câmaras Rotativas Controladas por Engrenagens Elípticas  
-- Esquema de Funcionamento --*



Fonte: Retirada de [5]

### 6.3.5 Aplicação lúdica

#### 6.3.5.1 O bilhar elíptico

De modo inteiramente análogo ao bilhar parabólico e o bilhar hiperbólico, é possível construir um bilhar elíptico cujas propriedades refletoras da elipse podem ser exploradas (Figura 136).

Figura 136 – Bilhar elíptico



Fonte: <http://goo.gl/zAaBxU> (acessado em 07/04/2015)

## 7 CONCLUSÃO

A aceitação à sugestão para escolher um tema sobre as secções cônicas veio com certa desconfiança, em virtude de um conhecimento, que tinha sobre tais curvas, muito limitado à relação das mesmas com as equações de segundo grau, onde pouco se sabia de suas propriedades e aplicações. Porém, logo na leitura dos primeiros textos sobre as secções cônicas, foi visível uma geometria de resultados extraordinariamente belos e importantes. Além de um verdadeiro arsenal de aplicações práticas das propriedades das cônicas em diversas áreas do conhecimento, sem falar das diversas ocasiões em que estas curvas surgem naturalmente, o que pode chegar a fascinar quem tem conhecimento mais completo sobre as cônicas.

Não foi atoa que os geômetras gregos e muitos outros matemáticos (geômetras ou não), depois dos gregos, deram tanta atenção e empenho ao estudo das secções cônicas. Como vimos no segundo capítulo, muitos matemáticos deixaram suas contribuições no estudo das cônicas.

A própria descoberta destas curvas já dá uma dica do que seria o estudo sintético das secções cônicas. Estudo este, que muitas vezes pode ser feito por meio de ideias bem elementar da geometria.

Isto pôde ser constatado em várias demonstrações, feitas no decorrer do texto. O que mostra que, além de belos resultados, o estudo das secções cônicas, por uma abordagem não somente analítica, pode ser feito de forma muito simples, o que facilitaria o entendimento dos alunos.

Um questionamento frequente dos alunos do Ensino Médio é para que serve um determinado conteúdo estudado em matemática. Isto ocorre com praticamente todos os conteúdos da matemática. A falta de aplicação no dia a dia. O pior é que, muitas vezes, o próprio professor não faz ideia de para que serve um conteúdo  $x$  ou um assunto  $y$ , de fato, já que isso, em muitos casos, não foi uma das prioridades da formação acadêmica.

Não é diferente com as secções cônicas, inclusive, percebe-se que é dada uma importância cada vez menor as estas curvas, em avaliações externas como, ENEM e vestibulares, o que faz com que o estudo das mesmas, no Ensino Médio, muitas vezes, seja colocado em um segundo plano. Isso foi verificado pela reação de surpresa que vários colegas de profissão esboçaram quando, em conversas informais, eram-lhes apresentadas uma ou outra aplicação de uma cônica ou alguma curiosidade na qual há envolvimento de uma curva deste tipo.

A aplicação das cônicas pode ser usada para cativar o aluno e instigar-lhe o interesse, não só pelo estudo das cônicas, mas pelo estudo de matemática de um modo generalizado, já que existem íntimas ligações entre os conteúdos de matemática. Mais

de uma vez tive a oportunidade de verificar um súbito interesse, por parte de alguns alunos pelas curvas cônicas, após ter-lhes sido apresentada alguma aplicação prática ou curiosa.

## REFERÊNCIAS

- 1 LIMA Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio** vol. 1. 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- 2 MARTINS, Cesar Pereira. **Tópicos de Geometria Analítica: Elipse**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás. Goiânia. 2013.
- 3 SILVA, Diego Maradona Felix da. **A Hipérbole e suas Aplicações**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás. Goiânia. 2013.
- 4 PEIXOTO, Hugo César. **Tópicos de Geometria Analítica: Parábola**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás. Goiânia. 2013.
- 5 SILVA, Osiel Gomes da. **DESENHO GEOMÉTRICO: UM RECURSO PARA O ENSINO DAS CÔNICAS**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal Rural do Semiárido. Mossoró, RN. 2014.
- 6 BOYER, Carl Benjamin. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. Tradução de: A History of Mathematics.
- 7 PEDROSO, Hermes Antonio. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**. [São José do Rio Preto]: [s. n.]. 2009.
- 8 EVES, Harward. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.
- 9 NEVES, Marcos Cesar Danhoni. **“Conatus recedenti ab axe motus” ou a parábola do balde de Newton**. Acta Scientiarum. Laboratório de Criação Visual, Universidade Estadual de Maringá. Maringá. v.5. n.22. p. 1263-1267. nov. 2000.
- 10 ALVES, Sergio. **A PARÁBOLA REVISITADA**. Artigo. IME, USP. [São Paulo]. [entre 2009 e 2014].
- 11 SATO, Juscelino. **As Cônicas e suas Aplicações**. 2004. Artigo. Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia. 2004.
- 12 SIQUEIRA, Paulo Henrique; COSTA, Antonio Mochon. **CÔNICAS**. 2. ed. [S. I.]: Departamento de Expressão Gráfica, Universidade Federal do Paraná. 2012.

- 13 OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco de. **CÔNICAS (PROPRIEDADES DE REFLEXÃO)**. Equações Diferenciais e Aplicações - MAT130 - IMEUSP - Cônicas: História, Princípios de reflexão e Coordenadas polares, 2013. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/oliveira/MAT130-2013.html>. Acesso em: 02 mai. 2015.
- 14 CORREIA, Mário César Ludgero Fernandes. **Diferentes Abordagens ao Estudo das Cônicas**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática). Faculdade de Ciências, Universidade do Porto. Porto. 2013.
- 15 GARCIA, João Calixto. **Explorando as definições de cônicas**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro. 2013.
- 16 IEZZI, Gelson *et al.* **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR: GEOMETRIA ANALÍTICA**. vol.7. São Paulo: Atual. 1979.
- 17 TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Parábola e catenária: história e aplicações**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação). Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2008.
- 18 PEREIRA, Lúcia Resende; BONFIM, Valdair. **Regiões de segurança em lançamento de projéteis**. Revista Brasileira de Ensino de Física. Universidade Federal de Uberlândia. v. 30. n. 3. out.2008. Paginação irregular.
- 19 LOUZADA, Sílvia. **Relação entre Cônicas e Funções no Ensino Médio**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória. 2013.
- 20 NETO, Francisco de Quaranta. **Tradução Comentada da Obra “Novos Elementos das Secções Cônicas”(Philippe de La Hire-1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2008.
- 21 DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **GEOMETRIA ANALÍTICA**, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- 22 SOARES, Domingos S.L.. **O Balde de Newton e o Espaço Absoluto: Uma Resenha de Mecânica Relacional**, de... Revista Brasileira de Ensino de Física. UFMG. Belo Horizonte. v. 21. n. 4. p. 558-560. dez. 1999.
- 23 ROCHA, Elder Borges Vieira Laranjeira da. **As Leis de Kepler**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Centro de Ciência da Natureza, Universidade Federal do Piauí. Teresina. 2013.

- 24 PRADO, Enéias de Almeida. *at al.* **APLICAÇÃO DE CONCORDÂNCIA, TANGÊNCIA E CURVAS CÔNICAS NA ARQUITETURA.** Artigo. Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina. [20- -?].
- 25 FILHO, Newton Rodrigues. **CÔNICAS E SUAS APLICAÇÕES EM FARÓIS AUTOMOTIVOS.** Monografia (Especialização em Matemática). Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2007.
- 26 MACHADO, Ana Lúcia Lima. **Determinação das Propriedades Ópticas do Radiotelescópio GEM em 5 GHz e em 10 GHz.** 2010. Dissertação (Mestrado em Física e Matemática Aplicada). Universidade Federal de Itajubá. Itajubá. 2010.
- 27 CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 6., 2010, Campina Grande. **FOGÃO SOLAR COM PARÁBOLA RECICLÁVEL DE ANTENA.** Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010. Não paginada.
- 28 SANTOS, Admilson Alves dos. **TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA: uma abordagem elementar.** 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Roraima. Boa Vista. 2014.
- 29 DOS Nossos Alunos: 1. A concavidade da parábola. **Revista do Professor de Matemática.** [Campinas]. n. 4. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 30 SILVA, Geni Schulz da. As Coisas que Ensinamos: Por que elipse, parábola e hipérbole?. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro. n. 7. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 31 WAGNER, Eduardo. Por que as Antenas são Parabólicas. **Revista do Professor de Matemática.** [S. I.]. n. 33. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 32 VALLADARES, Renato J. C.. Elipse, Sorrisos e Sussurros. **Revista do Professor de Matemática.** Santa Úrsula. n. 36. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 33 IMENES, Luiz Márcio P.. Para que Serve?: Arredondada ou achatada. **Revista do Professor de Matemática.** [S. I.] n. 11. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 34 LIMA, Elon Lages. As Coisas que Ensinamos: ZOROASTRO e a Equação da Circunferência. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro. n. 29. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 35 ÁVILA, Geraldo, A Hipérbole e o Telescópio. **Revista do Professor de Matemática.** [Goiânia]. n. 34. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 36 BARUFI, Maria Cristina Bonomi. O Gráfico de  $f(x)=1/x$  é uma Hipérbole?. **Revista do Professor de Matemática.** [São Paulo]. n. 45. 2004. CD-ROM. Não paginado.

- 37 CARNEIRO, José Paulo. A Sombra do meu Abajur **Revista do Professor de Matemática**. [S. I.]. n. 59. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 38 BONGIOVANNI, Vincenzo. As Cônicas como Ferramentas para Resolver Problemas Geométricos. **Revista do Professor de Matemática**. [S. I.]. n. 60. 2004. CD-ROM. Não paginado.
- 39 FIRMO, Célio da Silveira. **ESTRUTURAS TUBULARES ENRIJECIDAS POR SUPERFÍCIES DE DUPLA CURVATURA (HIPERBÓLICAS)**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro preto. 2003.
- 40 NUNES, Rosana Aparecida Ferreira. **AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO ESTRUTURAL DE COBERTURAS DE AÇO NA FORMA DE ARCO CIRCULAR E PARABÓLICO**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro preto. 2011.
- 41 SILVA, Silvio Tome da. **CÔNICAS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA E ALGÉBRICA**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional). Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá. Maringá. 2013.
- 42 VENTURI, Jacir J.. **cônicas e quádricas**. 5. ed. Curitiba: Artes Gráficas e Editora Unificado, 1949.
- 43 ROCIO, Osvaldo Germano do; GERÔNIMO, João Roberto. **Um Tiro na Intersecção da Hipérboles**. [S.I.: s. n ]. [20- -?].
- 44 NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana**. vol.2. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- 45 LIMA, Elon Lages *et al.* **Coordenadas no Plano**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.