Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

José Rauryson Alves Bezerra

Uma ferramenta didática para ajudar na fixação dos conceitos introdutórios de análise combinatória.

Natal, fevereiro de 2013

José Rauryson Alves Bezerra

Uma ferramenta didática para ajudar na fixação dos conceitos introdutórios de análise combinatória.

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Análise Combinatória

Orientador:
Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Natal, fevereiro de 2013

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Bezerra, José Rauryson Alves.
Uma ferramenta didática para ajudar na fixação dos conceitos introdutórios de análise combinatória / José Rauryson Alves Bezerra. - Natal, 2013.
37 f. il.:

Orientador: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Matemática - Ensino - Dissertação. 2. Análise combinatória – Dissertação. 3. Heurística – Problemas - Dissertação. I. Pereira, André Gustavo Campos. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU 51:37.

José Rauryson Alves Bezerra

Uma ferramenta didática para ajudar na fixação dos conceitos introdutórios de análise combinatória.

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Análise Combinatória

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof. Dr. Francisco Antônio Morais de Souza
Departamento de Matemática - UFCG
Examinador Externo

Agradecimentos

A minha mãe, Dona Ruth, que conseguiu com hercúleo esforço o valor da minha inscrição no vestibular. Duas vezes. Não foi o único sacrifício que fez por mim mas foi um dos que me trouxeram até aqui.

Ao amigo, agora distante, Ezequiel Rodrigues que com suas sutis indicações me fez ver a beleza e a importância da música, literatura e da arte plástica.

Aos professores amigos:

Papaléo, por ter me ensinado a importância das definições e a ver as mesmas coisas com variados olhares. Nossas conversar nunca serão esquecidas.

André Gustavo, por ter sempre me incentivado e me mostrado com seu exemplo o que é ser um bom professor. Sua dedicação, persistência e paciência nunca serão esquecidas.

Marcelo, por ter se dedicado tanto a nossa turma e por sua excelente didática. Suas aulas e seu companheirismo nunca serão esquecidos.

Tiago, por ter me mostrado que filho de pobre também pode virar doutor. Seu exemplo nunca será esquecido.

Benedito, por ter me mostrado a importância de dominar outras áreas do conhecimento afim de fazer o meu conhecimento em matemática ser ampliado. Suas orientações nunca serão esquecidas.

Aos professores Walter Abrantes e João Dantas por terem, cada um ao seu modo, me feito gostar tanto de Matemática.

Aos amigos Paulinho e Gibran por terem sido companheiros e por nossas mais variadas conversas e discussões.

Ao amigo Luciano por ter me dado tão sábios conselhos para que eu tomasse as minhas decisões. Essas decisões também me trouxeram até aqui.

Resumo

Os seres humanos, assim como alguns animais, nascem dotados da capacidade de perceber quantidades. Portanto técnicas para contar quantidades foi um passo natural no desenvolvimento do homem. As necessidades provindas da evolução das sociedades e recursos tecnológicos tornam necessário a otimização de tais métodos de contagem. Apesar de necessário e útil, o estudo desses métodos no Ensino Médio esbarram em dificuldades didáticas. Com o objetivo de ampliar o leque de ferramentas disponíveis aos professores para o ensino de Análise Combinatória apresentamos neste trabalho um fluxograma que pretende dinamizar o processo de fixação dos conceito via resolução de exercícios.

Palavras chave: Ensino de Matemática; Análise Combinatória; Heurística de problemas de Análise Combinatória.

Abstract

Humans, as well as some animals are born gifted with the ability to perceive quantities. The needs that came from the evolution of societies and technological resources make the the optimization of such counting methods necessary. Although necessary and useful, there are a lot of difficulties in the teaching of such methods.In order to broaden the range of available tools to teach Combinatorial Analysis, a flowchart is presented in this work with the goal of helping the students to fix the initial concepts of such subject via pratical exercises.

Keywords: Teaching of Mathematics; Combinatorial Analysis; Heuristic Analysis of Combinatorial problems.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

a_n Termo que ocupa a posição n em uma sequência

r Razão de uma Progressão Aritmética

$n!$ Fatorial do número n

$P_n = n!$ Permutação Simples de n elementos

$A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!)}$ Arranjo Simples de n elementos tomados p a p

$C_n^p = C_{n,p} = \dfrac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$ Combinação Simples de n elementos tomados p a p

$PR_n^{n_1,n_2,\ldots} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots}$ Permutação de n elementos com repetição de um elemento n_1 vezes, de outro elementos n_2 vezes, etc.

$AR_{n,p} = n^p$ Arranjo com Repetição de n elementos tomados p a p

$CR_{n,p} = C_{n+p-1,1}$ Combinação Completa de n elementos tomados p a p

Sumário

Capítulo 1

Por que contamos?

"(...) the future is more than a whim of the gods and that men and women are not passive before nature."

Bernstein [9]

Antes de dominar o fogo ou inventar a roda certamente o homem aprendeu a contar. A percepção de quantidade nos acompanha há milhares de anos e foi essa capacidade que permitiu a manutenção de grande parte dos conceitos que hoje nos permitem viver em sociedade.

O primeiro capítulo de Devlin[3] versa sobre o resultado de uma pesquisa feita pela professora Karen Wynn, da Universidade de Yale (Connecticut, Estados Unidos da América), com bebês de até quatro meses de idade. Nessa pesquisa conclui-se que, apesar de não dominar o conceito formal de número, os bebês são possuidores da percepção de quantidade. A pesquisa causou surpresa por apresentar dados que permitiram inferir que a percepção de quantidade nasce conosco ou no máximo vem antes mesmo de aprendermos formalmente a contar, contrariando o paradigma até então aceito de que a percepção de quantidade só viria depois que o indivíduo aprendesse a contar. As experiências de Wynn foram reproduzidas por diferentes psicólogos de todo mundo, corroborando a precisão do resultado. A necessidade de desenvolver, manipular e registrar as quantidades que percebemos naturalmente levou o homem a contar.

Mas sendo o ser humano dotado de uma percepção de quantidade que nos permitiu contar, podemos partir para outra questão: com que objetivo contamos? A resposta dessa pergunta sofre variações ao longo do tempo pois esses objetivos evoluíram junto com a nossa sociedade. O homem já foi nômade, viveu em cavernas, supria a si e aos seus coletando e caçando. Suas necessidades de contagem eram basicamente as de medir a passagem do tempo e a de determinar a quantidade de alimentos para dar sustento à sua família.

Ao dominar a agricultura e a pecuária o homem deixa de ser nômade e começa a se organizar em sociedade criando o conceito de propriedade privada. À medida que as relações sociais vão se tornando mais complexas o homem evolui e sua capacidade de contar melhora, permitindo assim que ele controle de maneira mais eficiente suas posses. O controle de suas posses leva às necessidades de escambos que por sua vez evoluem para os rudimentos do comércio e seu progresso acabou por nos trazer ao sistema financeiro atual.

Figura 1.1: Pintura rupestre que possivelmente representa uma contagem [11]

A evolução da sociedade também levou o homem a se preocupar com a sistematização dos conhecimentos que adquiriram ao longo dos anos e o registro dessa sistematização faz parte do processo. Durante muito tempo acreditou-se que os primeiros textos que versavam sobre as técnicas de contagem fossem aqueles que surgiram pela necessidade de resolver problemas de contagem originados quando o homem se preocupou com os primeiros seguros. Os fenícios, os gregos e os romanos possivelmente já tinham uma maneira rudimentar de calcular as chances de suas embarcações de comércio sofrerem reveses e geravam taxas que garantissem certo retorno sobre possíveis perdas, eram os primeiros seguros. Apesar de não haver registro específicos de como esses cálculos eram feitos, o registro da cobrança dessas taxas nos induz a pensar que esses povos tinham técnicas de contagem avançadas.

Grandes estudiosos, como Girolamo Cardano, em seu livro *"De proportionibus Libri V"* apresenta um estudo matemático sobre os seguros; Edmond Halley, que na obra *"Degree of Mortality of Mankind"* elaborou uma estimativa dos graus de mortalidade da humanidade a partir da observação das taxas de natalidade e mortalidade da cidade de Breslaw com o intuito de calcular o valor da anuidade do seguro de vida em função da expectativa de vida e da probabilidade da pessoa sobreviver por mais certa quantidade de anos; Daniel Bernoulli, entre tantos outros, contribuíram para aperfeiçoar as formas de calcular possibilidades. As técnicas de contagem e os conhecimentos de probabilidade também foram usados para outros fins, que podem ser julgados como menos nobres: o de possibilitar que jogadores aumentassem suas chances de ganhar em jogos de azar. Segundo Casalderrey[4], é no século XVI que os matemáticos italianos Luca Paccioli, Girolamo Cardano e Niccoló Tartaglia apresentam suas primeiras considerações sobre como aumentar as chances de ganhar em apostas relacionadas a jogos de azar. Cardano é o autor do livro *"De ludo Aleae"* em que usa sua experiência com jogos de azar e suas brilhantes ideias sobre matemática para ensinar como melhorar as chances de ganhar dinheiro com jogos. Ideias essas que pôs em prática durante muitos anos de sua vida, nem sempre sendo bem sucedido e alternando épocas de acúmulo de grandes fortunas com dívidas imensas, originadas de seu vício em jogos. Os jogos de azar também chamaram a atenção de dois grandes matemáticos franceses: Blaise Pascal e Pierre Fermat que contribuíram de maneira contundente no avanço da Teoria das Probabilidades, e consequentemente na Análise Combinatória.

Pesquisa mais recente [10] aponta que o registro das técnicas de contagem é ainda mais antigo que aquele que se tinha notícia e remonta à época de Arquimedes, de duzentos a trezentos anos antes de Cristo. Reviel Netz, da Universidade de Stanford (Califórnia, Estados Unidos da América), investigou esses registros em sua pesquisa sobre antigos pergaminhos, um em especial, o Palimpsesto de Arquimedes, nos traz uma elucidação maior sobre os primeiros registros das técnicas de contagem que se tem comprovação escrita.

Figura 1.2: Palimpsesto de Arquimedes [1]

O palimpsesto é um antigo material de escrita, um tipo de pergaminho. Acredita-se que, devido à escassez deste material, ou ao seu alto preço, ele era usado duas ou três vezes, depois de passar por uma raspagem do texto anterior. Em um livro de orações do século XII encontrou-se uma série de textos apagados que foram escritos muitos séculos antes. Entre estes textos, Netz identificou dois tratados, em um deles há um quebra-cabeças criado há mais de 2200 anos: o Lóculos ou *Stomachion* ou *Ostomachion* ou *Syntemachion* ou Caixa de Arquimedes, que indica que Arquimedes foi um pioneiro na organização e registro de métodos de contagem. Com o auxílio de raios ultravioleta e de programas de computador, foi possível obter a escrita original, o texto de Arquimedes sobre o que é aparentemente um jogo semelhante ao Tangran, composto de 14 peças que devem ser encaixadas de maneira a formarem um quadrado. Os estudos expostos no pergaminho pretendiam determinar a quantidade de maneiras de se organizar as peças, a fim de obter o quadrado.

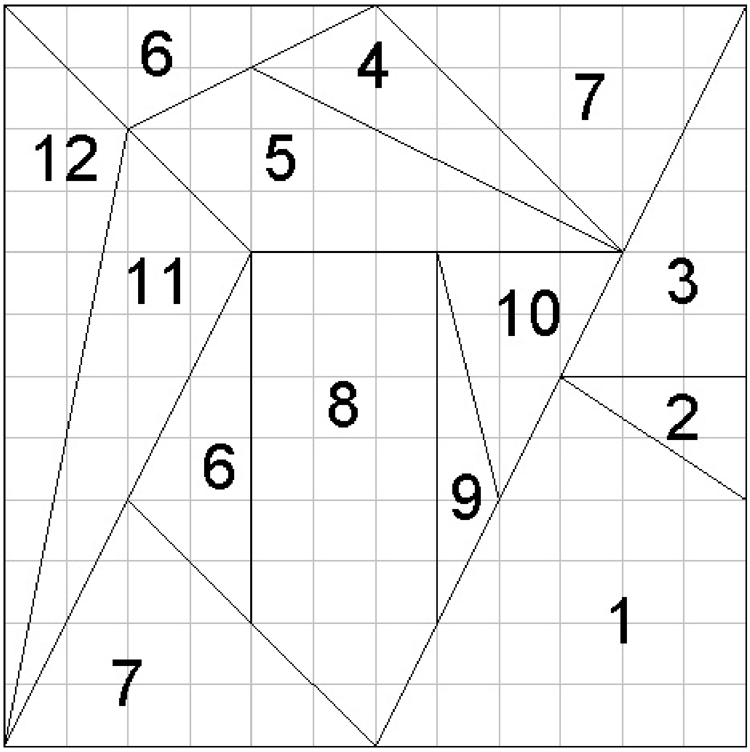


Figura 1.3: Uma das possibilidades de montagem das peças do Lóculos [7]

A pesquisa de Netz faz crer que o Lóculos não era apenas um jogo de entreterimento mas um rigoroso experimento de estudo de Arquimedes sobre a Análise Combinatória. A possível motivação que levou Arquimedes a se dedicar a esse problema é a mesma que se vê em tantas outras questões da Análise Combinatória: De quantos modos distintos é possível fazer?

A constatação de que a capacidade de contar é nata, ou no máximo surge nos primeiros meses de vida, assim como o fato de que o homem tem se preocupado com as técnicas de contagem e suas melhorias há milênios, nos permite fazer uma nova pergunta: Como essa capacidade se perde à medida em que se avança nos níveis do sistema escolar de ensino, se o resultado mais lógico que haveria de se esperar é de que, com acesso a novos conhecimentos e técnicas ao longo da vida escolar, as crianças dessem lugar a adolescentes e esses a adultos com uma capacidade esmerada de contagem? A resposta para essa pergunta será apresentada no próximo capítulo. Por hora, podemos responder que contamos porque precisamos, porque para organizarmo-nos em sociedade e fazer avanços tecnológicos precisamos contar.

Capítulo 2

Por que erramos ao contar?

"Aquilo que está escrito no coração não necessita de agendas porque a gente não esquece. O que a memória ama fica eterno"

Rubem Alves

A Análise Combinatória, componente do currículo de Matemática para o Ensino Médio, é motivo de horror tanto para alunos, quanto para professores. Os comentários mais frequentes giram em torno das dificuldades de resolução das questões do referido assunto. Não se pode culpar exclusivamente o aumento na complexidade dos problemas, muitas vezes a resolução do problema emperra na fase de interpretação, outras vezes no estabelecimento da estratégia que deveria ser usada para resolução da questão.

Na edição do Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM, realizado em novembro de 2012 uma questão de contagem pode ser usada para mostrar que não é necessário um nível de complexidade grande para que se comentam erros em conceitos básicos. Assim que o exame é aplicado e as provas começam a serem divulgadas, várias redes de ensino no país expõem suas expectativas de respostas. Para a questão a seguir, os erros de contagem já começaram a aparecer em algumas dessas expectativas, que eram distintas e discordavam em uma unidade. A questão dizia:

> *"Um maquinista de trem ganha R\$100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no primeiro dia de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias. Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará*

fazer?
A) 37 B) 51 C) 88 D) 89 E) 91"

Este é um problema simples de contagem que possui várias versões semelhantes apresentadas e discutidas exaustivamente durante o Ensino Fundamental e Médio. Duas das versões apresentadas e divulgadas por grandes canais de comunicação na internet são as seguintes:

I)

"Do primeiro de janeiro a 31 de maio temos 151 dias:

$151 = 4.37 + 3 \Rightarrow 37$ *viagens possíveis nesse período.*

De 11 de junho a 31 de dezembro temos 204 dias:

$204 = 4.51 + 0 \Rightarrow 51$ *viagens possíveis nesse período.*

Assim, tem-se 37 + 51 = 88 viagens."

II)

"Do primeiro de janeiro, dia 1, a 31 de maio, dia 151, o maquinista irá viajar todas as vezes que um dia coincidir com um dos termos da Progressão Aritmética com $a_1 = 1$ e $r = 4$, assim:

$$a_n \leq 151 \Rightarrow 1 + (n-1).4 \leq 151 \Rightarrow 4.(n-1) \leq 150$$
$$\Rightarrow n - 1 \leq \frac{150}{4} \Rightarrow n \leq 37,5 + 1 \Rightarrow n \leq 38,5$$

Portanto o maquinista viajou, nesse período, 38 vezes.

Do dia 11 de junho, dia 1, a 31 de dezembro, dia 204, o maquinista irá viajar todas as vezes que um dia coincidir com um dos termos da Progressão Aritmética com $a_1 = 1$ e $r = 4$, assim:

$$a_n \leq 204 \Rightarrow 1 + (n-1).4 \leq 204 \Rightarrow 4.(n-1) \leq 203$$
$$\Rightarrow n - 1 \leq \frac{203}{4} \Rightarrow n \leq 50,75 + 1 \Rightarrow n \leq 51,75$$

Portanto o maquinista viajou, nesse período, 51 vezes. Assim, durante os 365 dias o maquinista poderá fazer 38 + 51 = 89 viagens

(Adaptado de: http://estaticog1.globo.com/2012/vestibular/enem/objetivo /resolucao_objetivo2.pdf e http://enem.cursoanglo.com.br/Enem_V2/Index.asp. Acesso em 19.12.2012 às 18h.)

Esta situação pode ser resolvida com uma estratégia mais simples, bem conhecida pelo homem primitivo e muito usada por crianças nos seus primeiros contatos com os problemas de contagem, a saber: contar! Veja na figura 4 a contagem:

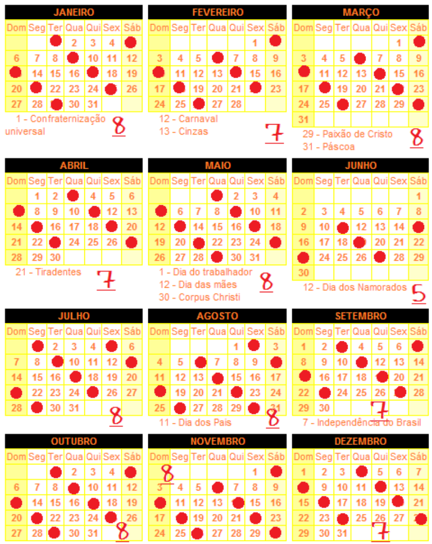


Figura 2.1: Calendário do ano de 2013 com marcações indicando os dias de viagem.

Quando o INEP, órgão do Governo Federal, lançou seu gabarito oficial este trazia 88 viagens como sendo a quantidade que levaria o maquinista a ganhar o máximo de dinheiro possível, o resultado errado de uma contagem tão simples foi dado como correto. As questões do ENEM são avaliadas por especialistas antes da divulgação do gabarito oficial e, por isso, todas as respostas divulgadas são mantidas, não sendo possível a nenhum candidato impetrar recurso contra o gabarito.

Todos são passíveis de erros. Errar contagem ou as estimativas que se permitem fazer a partir dessas contagens é algo que macula até mesmo o currículo de alguns cientistas famosos. Em [8], Mlodinow, conta que um programa televisivo chamado *Let's Make a Deal* gerou um problema, não tão simples quanto aquele cobrado no ENEM de 2012, que confundiu até mesmo alguns PhDs em Matemática nos Estados Unidos da América. Na década de 1980, Marilyn von Savant recebeu em sua coluna uma pergunta sobre probabilidade, transcrita em [8]:

"Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz ao participante: 'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?'. Para o participante é vantajoso trocar a sua escolha?"

Marylin afirmou em sua coluna que era mais vantajoso mudar a escolha. Sua resposta para o problema gerou um "confronto" com mais de 10 mil leitores, que lhe enviaram cartas externando seu descontetamento por ela, que, à época, era considerada uma das pessoas com maior QI da história, ter errado algo tão simples. Muita gente importante, como Paul Erdös [1] mesmo depois de ter conhecimento de que Marylin estava certa, só se convenceu de que é mais vantajoso trocar de porta depois de uma simulação do problema feita em um computador por um colaborador.

Para corroborar que esse problema está muito próximo da realidade do ensino brasileiro, com uma pesquisa feita tomando como amostra as duas turmas da disciplina Análise Combinatória e Probabilidade oferecidas pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte no ano de 2012 aos alunos da Licenciatura Plena em Matemática, sob a responsabilidade do Prof. Dr. André G.C. Pereira, buscou-se dados que nos permitissem identificar a capacidade dos alunos em reconhecer situações específicas de contagem. Essa busca por dados foi feita a partir de uma análise do resultado das avaliações elaboradas e aplicadas pelo professor (Anexo A).

Na avaliação tenta-se mensurar a capacidade do aluno de reconhecer as situações de contagem em que se possam usar os algoritmos de Permutação e suas variações, assim como os de Arranjo Simples, Combinações Simples e Combinações Completas e gerar exemplos dessas situações. Apesar de contar com uma amostra bem pequena, os dados coletados nos dão algumas noções sobre a compreensão dos alunos quanto ao uso dos algoritmos de contagem. Para facilitar a análise, as respostas foram divididas em

[1] Paul Erdös (1913 – 1996) foi um matemático húngaro extremamente proficiente, com uma produção acadêmica invejável. Publicou mais de 1400 artigos sobre várias áreas da matemática, entre elas, a Análise Combinatória, Teoria dos Grafos e a Teoria das Probabilidades. Marcou seu trabalho pela característica de ser um resolvedor de problemas. Resoluções essas que sempre tentava fazer de maneira simples e elegante.

categorias em que leva-se em conta a proximidade da definição dada com a definição formal e se os exemplos de fato podem ser resolvidos com a técnica apontada, assim:

•Explicaram de maneira errada e exemplificaram de maneira errada ou não exemplificaram

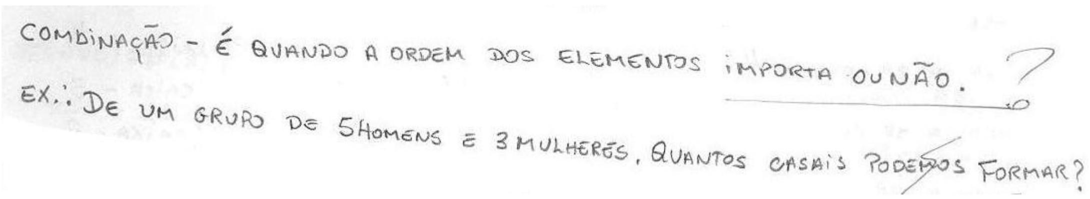


Figura 2.2: Exemplo de resposta de um aluno classificada como errada, acompanhada de um exemplo que não se aplica à técnica apontada

•Explicaram de maneira errada mas exemplificaram de maneira correta

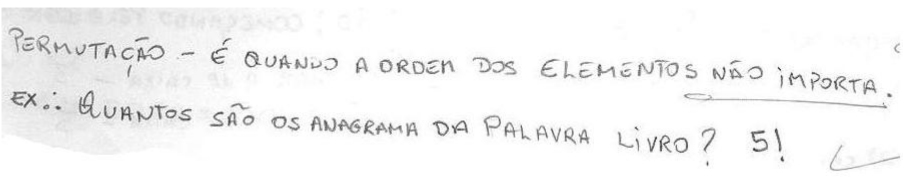


Figura 2.3: Exemplo de resposta de um aluno classificada como errada, acompanhada de um exemplo que se aplica à técnica apontada

•Explicaram de maneira parcialmente correta mas exemplificaram de maneira errada ou não exemplificaram

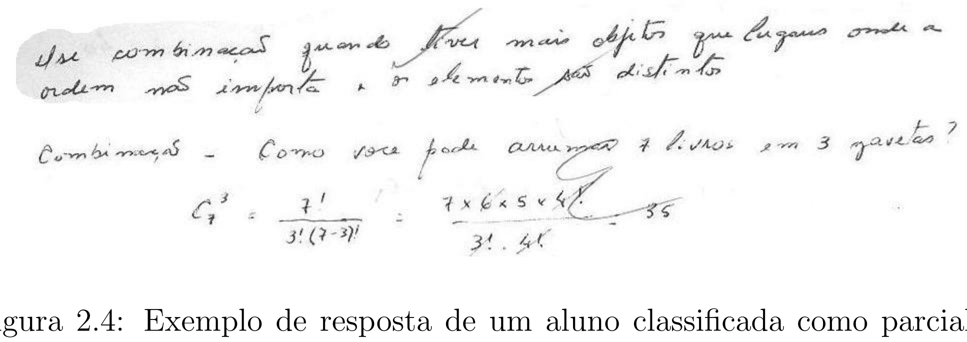


Figura 2.4: Exemplo de resposta de um aluno classificada como parcialmente certa, acompanhada de um exemplo que não se aplica à técnica apontada

•Explicaram de maneira parcialmente correta, exemplificaram de maneira correta

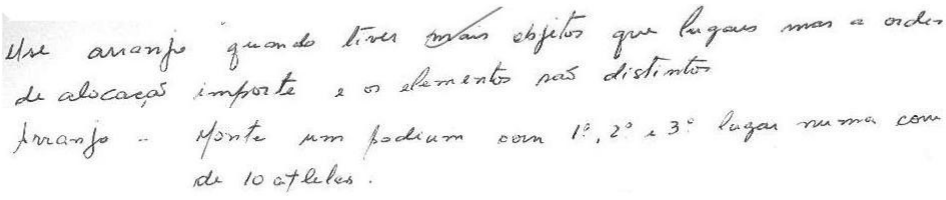

Use arranjo quando tiver mais objetos que lugares mas a ordem de alocação importe e os elementos são distintos
Arranjo - Monte um podium com 1º, 2º e 3º lugar numa com de 10 atletas.

Figura 2.5: Exemplo de resposta de um aluno classificada como parcialmente certa, acompanhada de um exemplo que se aplica à técnica apontada

•Explicaram corretamente mas exemplificaram de maneira errada ou não exemplificaram

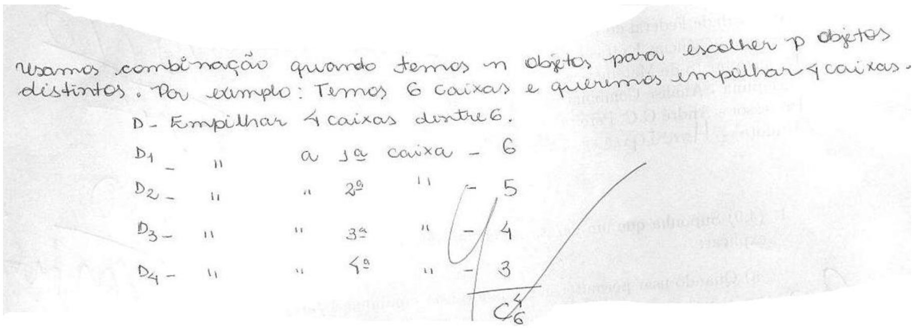

usamos combinação quando temos n objetos para escolher p objetos distintos. Por exemplo: Temos 6 caixas e queremos empilhar 4 caixas.
D - Empilhar 4 caixas dentre 6.
D_1 - " a 1ª caixa - 6
D_2 - " " 2ª " - 5
D_3 - " " 3ª " - 4
D_4 - " " 4ª " - 3
C_6^4

Figura 2.6: Exemplo de resposta de um aluno classificada como certa, acompanhada de um exemplo que não se aplica à técnica apontada

•Explicaram corretamente e exemplificaram de maneira correta

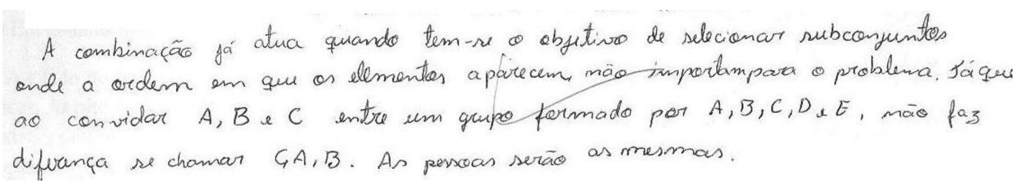

A combinação já atua quando tem-se o objetivo de selecionar subconjuntos onde a ordem em que os elementos aparecem não importampara o problema. Já que ao convidar A, B e C entre um grupo formado por A, B, C, D e E, não faz diferença se chamar C A, B. As pessoas serão as mesmas.

Figura 2.7: Exemplo de resposta de um aluno classificada como certa, acompanhada de um exemplo que se aplica à técnica apontada

Os dados apresentados na tabela 2.1 foram obtidos através da análise de todas as respostas dadas à questão 01 da avaliação aplicada pelo professor, onde foi pedido que os alunos descrevessem como procederiam se tivessem que explicar quando usar Permutação e quando usar Combinação ou Arranjo, qual a diferença entre Arranjo e Combinação e exemplificassem o uso dessas técnicas.

Tabela 2.1: Quantidade e Percentual de alunos em cada uma das variações estabelecidas quanto à compreensão e resposta da questão 01 da prova

Variável	Frequência
Em branco	2 (2,25%)
Explicaram de maneira errada e exemplificaram de maneira errada ou não exemplificaram	20 (22,47%)
Explicaram de maneira errada mas exemplificaram de maneira correta	7 (7,87%)
Explicaram de maneira parcialmente correta mas exemplificaram de maneira errada ou não exemplificaram	10 (11,24%)
Explicaram de maneira parcialmente correta e exemplificaram de maneira correta	24 (26,97%)
Explicaram corretamente mas exemplificaram de maneira errada ou não exemplificaram	13 (14,60%)
Explicaram corretamente e exemplificaram de maneira correta	13 (14,60%)
Total	89(100%)

O resultado exposto na tabela nos mostra que apenas uma parcela muito pequena dos alunos é capaz de apresentar corretamente uma definição formal associada a bons exemplos do uso dessas técnicas de contagem. Estes dados passam a ser mais preocupantes quando constatamos que na turma todos os alunos são oriundos do Ensino Médio, onde estas técnicas já foram mostradas e estão em um curso de Licenciatura em Matemática, onde, em tese, se preparam para serem professores. Mesmo os alunos que por ventura não tiveram oportunidade de ver esse assunto antes de cursar a disciplina, contaram com uma exposição do assunto e uma grande gama de exemplos expostos pelo professor.

Ao efetuar uma cuidadosa leitura nas avaliações percebe-se que os alunos não conseguem desvincular as técnicas de contagem de situações particulares, sendo incapazes de gerar uma modelagem apropriada aos problemas mais simples de contagem presentes em livros de Ensino Médio, em uso no nosso país, bem como em questões presentes nos concursos que permitem o acesso ao Ensino Superior. Uma grande variedade de vícios é percebida, como, por exemplo, o de limitar o uso da permutação aos anagramas ou a formação de filas, sem entender que existem outras situações às quais essa técnica se aplica. O prejuízo dessa associação é percebido quando o aluno é desafiado a aplicar estas técnicas a situações que o remetam ao mesmo modelo matemático de contagem em situações diferentes daquelas a que está mais habituado. Por exemplo, ao responder a questão 05 da prova que está no Anexo A

> Se no tabuleiro da baiana em Salvador tem mungunzá, caruru, vatapá, sarapateu e acarajé. E ela fez a seguinte promoção: quaisquer dois quitutes (distintos ou não) por R$3,00. De quantas maneiras você pode fazer suas escolhas?

a resposta dada foi:

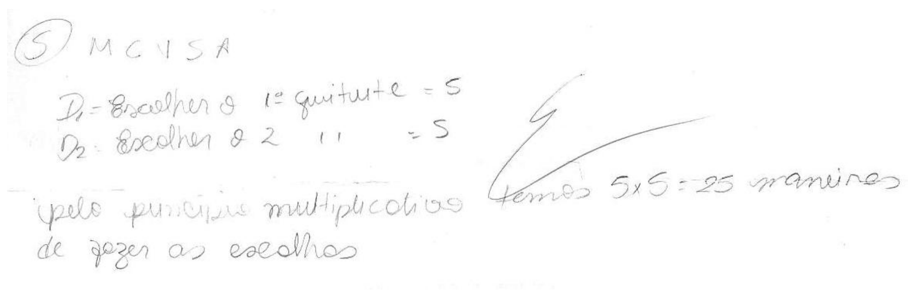


Figura 2.8: Erro cometido por aluno ao respoder a questão 05 da prova do Anexo A

Aqui o erro foi que ele não percebeu que “MC” é igual a “CM”, ou seja, representa o mesmo pedido.

A proposta de solução desses problemas é o de trabalhar com uma ideia exposta em [2] pelo professor Morgado [2] em uma de suas aulas, através de uma metáfora:

> *“Para atravessar a rua existe uma boa técnica. Se você pretende atravessar a rua o que você deve fazer: Afastar-se da esquina, ir mais ou menos para o meio da quadra. No meio da quadra você olha cuidadosamente para os dois lados e tendo certeza de que não vem carro, aí você atravessa a rua.*

[2]Augusto César de Oliveira Morgado (1944–2006) foi um matemático e estatístico brasileiro, natural do Rio de Janeiro que lecionou em várias Universidades do país e em muitos cursos organizados pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada, o IMPA. Era considerado um dos maiores resolvedores de problema de nosso país.

Essa é a maneira correta de atravessar a rua em segurança. Tem gente que acha que isso é uma perda de tempo e vai atravessar a rua, chega alí na esquina, olha pra um lado e para o outro e vê que não vem carro, aí dá uma corrida (...). O cara faz isso 50 vezes e 50 vezes ele dá sorte, não vem carro nenhum e ele atravessa a rua de modo seguro, apesar da imprudência da pessoa. Quando chega a quinquagésima primeira vez, o cara vai atravessar, vem uma carrocinha de chicabom em desabalada carreira pela esquina, ele não viu a carrocinha de chicabom, a carrocinha vira, atropela o cara,o cara morre. Olha que morte ridícula (...). Uma coisa que acontece muito com problemas de Combinatória é que apesar de haver técnicas para resolvê-los, as pessoas desrespeitam sistematicamente a boa técnica. Diante de 50 problemas fáceis a pessoa consegue resolvê-los desrespeitando a boa técnica. Quando chega no quinquagésimo primeiro, que é um pouquinho melhor, um pouquinho mais difícil, o cara não consegue mais resolver. É preciso habituar os alunos a usar a boa técnica desde o início, nos problemas fáceis, pois só dominando a boa técnica vamos conseguir resolver os problemas difíceis."

Nisso consiste a proposta deste texto, expor o que acreditamos ser uma boa técnica, nos apoiando nas ideias sobre resolução de problemas expostas por Polya [5] [3] e Schoenfeld [4] canalizadas para a melhoria do ensino de Análise Combinatória, gerando alunos mais capazes de efetuar contagens de maneira mais eficiente.

[3]George Polya [5] (1887 - 1985) nasceu em Budapeste na Hugria. Foi professor em Zurich e em Stanford. Apesar de ter se aposentado em 1953, continuou ativo até praticamente sua morte. Foi um dos, senão o primeiro, matemático a apresentar um conjunto de técnicas específicas para o ensino de matemática. Suas pesquisas foram principalmente em Probabilidade e Equações Diferenciais Parciais.

[4]Alan Schoenfeld, americano, é PhD em Matemática pela Univesidade de Stanford. Atualmente leciona na Universidade de Berkeley, Califórnia nos EUA. Já foi presidente da *American Educational Research Association.* Ganhou prêmios pelas suas investigações em educação matemática e desenvolvimento cognitivo, ganhando a medalha Felix Klein em 2011. Pode ser contatado pelo e-mail alans@berkeley.edu

Capítulo 3

O que consideramos a boa técnica?

> *"Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem que ir à agua e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas', tem que resolver problemas"*
>
> George Polya [5]

Prever os resultados de uma técnica ou mesmo mensurar a qualidade de seus efeitos é algo muito delicado. Mesmo após a experimentação continuada e realizada em vários contextos distintos não é possível garantir que ela será sempre eficaz. Desta forma é importante que o professor esteja dotado de um grande arsenal de opções, ao qual possa recorrer quando uma técnica com a qual está mais habituado falhe. Este texto não tem a pretensão de trazer uma fórmula mágica que permita desenvolver, sem esforço, o potencial para resolver problemas de contagem. Tampouco traz algo que substitua o que já costuma-se lecionar deste tema. Propõem-se um algoritmo para dinamizar a resolução de exercícios de Análise Combinatória. Na verdade, acreditamos que tal algoritmo já deva existir, pois nada mais é do que o resumo através de um fluxograma, de tudo o que foi ensinado sobre Permutação, Arranjo e Combinação. Entretanto, não encontramos nenhum texto com tal fluxograma da maneira como é apresentado e ilustrado neste trabalho. Assim, se o professor, após instruir seus alunos sobre cada assunto e fazer uma grande quantidade de exemplos, ainda perceber que esses continuam com dificuldades em resolver problemas de contagem, pode usar o algoritmo apresentado como um norteador na escolha da estratégia a ser usada para atacar um problema. O algoritmo também não garante que o processo de resolução do problema será simplificado, ocorre em alguns casos o contrário, como será exemplificado adiante.

Da minha prática docente, assim como da troca de experiências com vários professores de matemática, é possível constatar que persistentemente o aluno, mesmo recebendo diversas orientações e sendo exposto a uma grande variedade de exercícios, não consegue decidir ou confunde as estratégias que deve usar para resolver problemas de contagem. Não há garantias de que o fluxograma sirva para auxiliar na tomada de decisões em todos os problemas de Combinatória, mas fazendo uso da técnica aqui exposta pretende-se reduzir a dificuldade de compreensão dos alunos para aqueles problemas que comumente encontramos nesse nível escolar.

Segundo Polya [5], um problema deve ser atacado em algumas etapas:

i) compreensão;
ii) construção de uma estratégia;
iii) execução da estratégia;
iv) revisão da solução.

3.1 A compreensão do problema

Em [2] os autores chamam atenção para algo inerente aos problemas de Análise Combinatória:

> *"Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema."*

É muito comum que na fase da compreensão algumas confusões ocorram, principalmente se essa fase for tratada com desleixo. Uma grande gama de erros podem ser evitados se aquele que resolve o problema se põe na obrigação de gerar exemplos do que é pedido e investiga que condições ele está sendo obrigado a seguir para satisfazê-las. Nessa investigação pode-se tomar como referência problemas semelhantes já resolvidos, entretanto é muito importante tomar cuidado pra não cair em vícios que interfiram na capacidade de julgar o que realmente é necessário fazer para efetuar corretamente a contagem. Analisando as provas aplicadas nas duas turmas citadas (vide capítulo 2), percebe-se que os alunos costumam, principalmente, ignorar regras ou estabelecer exigências que não fazem parte do enunciado. Por exemplo, em uma das avaliações perguntava-se:

> *"Usando os 10 dígitos que conhecemos, quantas senhas você pode montar de 4 dígitos?"*

Apesar de ser um problema que a maioria dos estudantes do assunto consideraria simples, ao avaliar as respostas dadas por grande parte dos alunos, que possivelmente remeteram-se a questões semelhantes já resolvidas, esses consideram que a resposta seria o produto $10.9.8.7 = 5040$. Percebe-se que há compreensão do princípio que deveria ser empregado na contagem mas os mesmos erraram ao interpretar uma condição, a de que o problema não impõe que os dígitos usados nas senhas sejam diferentes.

Uma maneira de evitar que isso ocorra é iniciar a construção de uma árvore de possibilidades, isto é, listar uma a uma as possibilidades de senha. Como a lista completa é muito extensa, o aluno deve, baseado nas condições dadas no enunciado, eliminar de sua lista algumas das possibilidades que não atendem o que foi solicitado. Fazendo isso, quem se debruça sobre o problema assume a postura de quem o resolve de fato, verificando assim que decisões deve tomar.

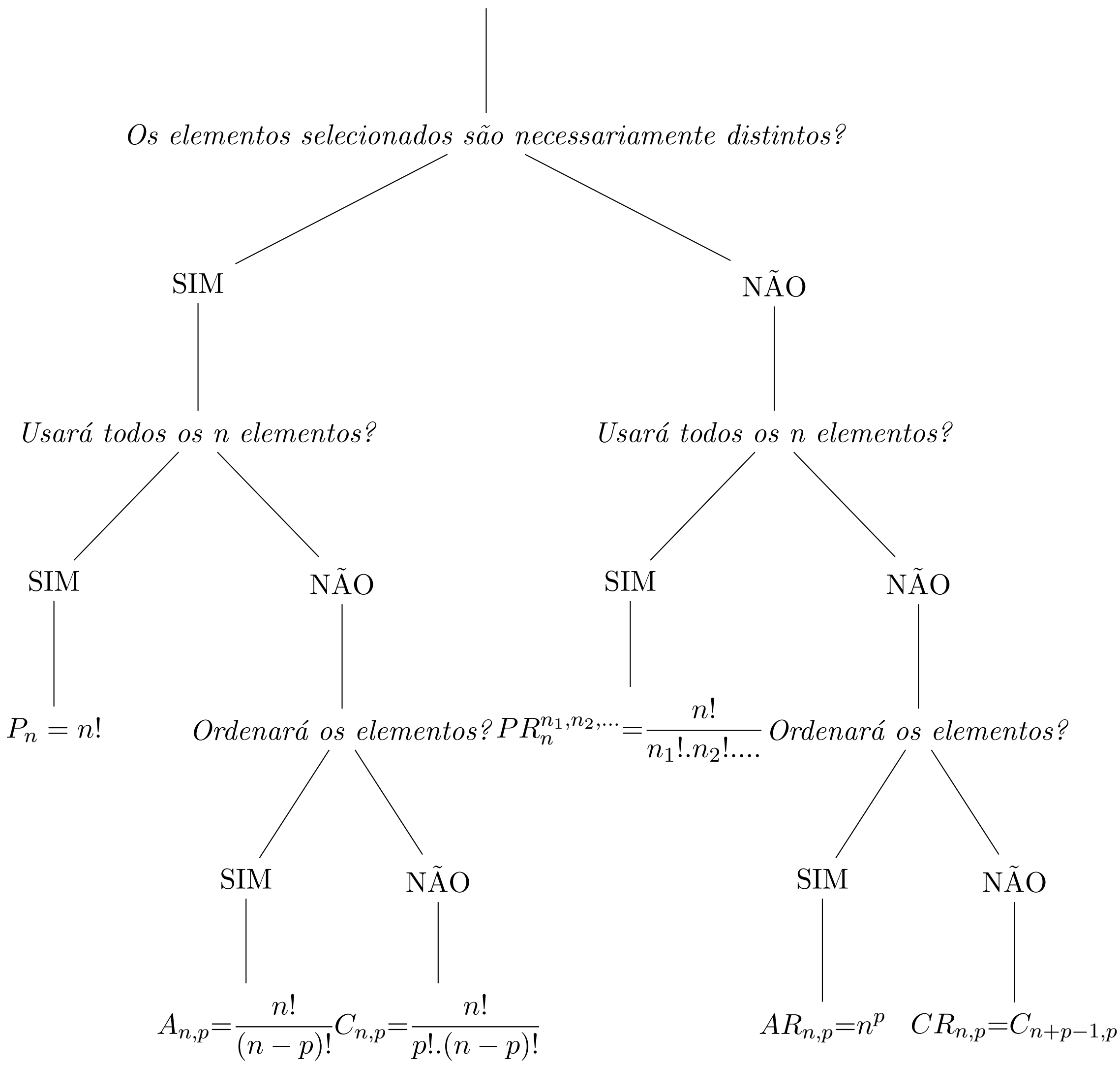
No problema que acabamos de citar, se o aluno escrevesse algumas senhas e verificasse se elas satisfazem o enunciado, por exemplo 0000 ou 0001, ele veria que o enunciado não proíbe as senhas anteriores e assim perceberia que a quantidade de possibilidades para a escolha de cada dígito não decresce, é sempre 10.

3.2 A construção da estratégia com uso do algoritmo

Nesta fase, segundo [5], aquele que se propõe a resolver o problema deve conseguir encontrar conexões entre os dados, as condições e o que se pergunta. Isso pode ser feito partindo-se de uma ideia nova, por meio do desenvolvimento dos axiomas, corolários, lemas e teoremas associados à teoria abordada no problema ou ainda comparando a situação proposta atualmente com alguma outra semelhante. Na maioria das vezes faz-se opção pela tática de usar o que se aprendeu em problemas correlatos. Como já comentado, essa técnica exige atenção e uma série de indagações: Será possível usar o método nesta questão que resolveu a outra questão? É necessário acrescentar ou retirar alguma condição que foi proposta?

Não se pode esquecer que essas propostas não são independentes, elas podem e devem ser usadas em conjunto. O fluxograma que segue é um caminho para orientar os alunos a fazerem uma análise mais direcionada, a fim de tomar decisões mais acertadas sobre que técnicas de contagem que se deve usar para atacar os problemas, configurando mais uma opção para a construção de uma estratégia eficaz.

Conjunto com n elementos.



3.3 Como executar a estratégia

Nessa fase trabalhamos os problemas que foram retirados de sites em que se discutem questões de matemática e física, para estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Nestes sites, além de questões, são expostas as respostas propostas pelos participantes e também as dúvidas que alguns alunos tiveram ao tentar resolver a questão.

Com estes problemas, queremos ilustrar qual foi o ponto que causou o erro ou a não conclusão dos alunos, mostrar como seguir as etapas sugeridas para evitar o erro e em seguida ilustrar como o algoritmo pode ser utilizado para resolução destas questões.

A primeira questão na qual será executada a estratégia proposta foi encontrada em um fórum virtual, o http://pir2.forumeiros.com:

> *"Cada pedra de dominó é constituída de 2 números. As peças são simétricas, de sorte que o par de números não é ordenado.*
> *a) Quantas peças diferentes podem ser formadas, se usarmos os números 0,1,2,3,4,5,6?*
> *Resposta 28*
> *b) Quantas peças diferentes podem ser formadas num jogo de dominó se usarmos os números 0,1,2,3,...,n?*
> *Resposta* $\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$
>
> *No primeiro caso eu cheguei a 21 peças, fazendo 00;01;02...06; 10;11;12...até 66, dando assim 42 agrupamentos, mas como existiam repetições (01 e 10) cortei pela metade, e assim ficaram faltando 7 possibilidades. O segundo caso errei em decorrência do erro no raciocínio já no primeiro, porém, onde foi esse erro?"*
>
> (Adaptado de: http://pir2.forumeiros.com/t17730-analise-combinatoria-principio-fundamental-da-contagem. Acesso em 14.12.2012 às 20h.)

Inicialmente o aluno tentou construir exemplos, pondo em ação seu Pensamento Combinatório [1]. A partir da construção dos exemplos, pode-se conjecturar que o

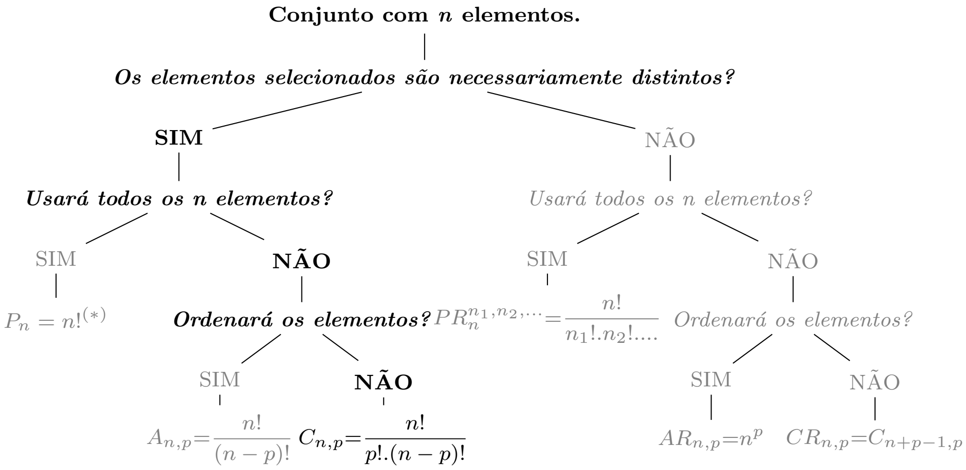
[1] Chamaremos de Pensamento Combinatório a capacidade do resolvedor do problema gerar as combinações possíveis atendendo as condições impostas no problema. É necessário investir no desenvolvimento desta habilidade antes de passar às etapas propostas por Polya.

número de 42 agrupamentos citados na explicação do seu raciocínio tenha sido obtido usando o princípio fundamental da contagem: Há 7 maneiras de tomar a primeira decisão, que é a de escolher o primeiro número a ser colocado na peça e há 6 maneiras de se escolher um número distinto daquele que já foi escolhido, supondo ainda que o aluno aplicou esta condição apenas às peças que tem números diferentes. Ele também percebeu que a peça formada pelo par (0;1) equivale àquela que é formada pelo par (1;0) e assim dividiu o número de agrupamentos por 2. As 7 possibilidades que ele cita, consideramos que são as 7 peças formadas por números iguais. Perceba que o aluno conseguiu aplicar o Pensamento Combinatório, conseguiu elaborar uma estratégia para resolver o problema, ou seja, gerou um algoritmo mas não conseguiu formalizar o conceito para uma quantidade qualquer de números.

Segundo Mendes [6], o ensino de matemática deve estar baseado em um pressuposto que possibilite a condução do aluno a uma construção constante das noções matemáticas presentes em cada atividade. Entre as ações sugeridas para garantir a condução, o texto propõe que as atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas, para que permitam aos alunos a autocondução durante a construção de sua aprendizagem. O algoritmo que apresentamos se presta a essa autocondução, sem abrir mão de outras fases, a saber: Verbalização, Manipulação/Experimentação e Simbolização/Abstração. Para fazer uso do algoritmo o aluno precisa ter posto seu Pensamento Combinatório em ação, precisa ter dedicado um tempo na geração de exemplos e na discussão desses exemplos mas, mesmo tendo cumprido essa etapa corretamente, ainda pode apresentar dificuldades em gerar um algoritmo e em seguida uma formalização para o problema. O uso do fluxograma apresenta uma possibilidade de vencer essa dificuldade. Vejamos a aplicação do algoritmo em duas interpretações distintas:

I) Dividindo as peças em dois grupos, um com peças formadas por números distintos e outro com peças formadas por números iguais.

Se usarmos os números 0,1,2,3,4,5,6 poderemos formar 7 peças com números iguais. A saber 00, 11, 22, 33, 44, 55 e *66. As outras peças, como por exemplo 10, 23, 56, etc., são formadas a partir da seleção de dois valores entre os 7 que estão disponíveis. Mas selecionando 5 e 6 ou 6 e 5 não se formam peças distintas. Daí, temos um conjunto com 7 números, de onde serão selecionados valores distintos mas apenas dois dos sete por vez. A ordem dos elementos não será importante, assim:*



Portanto o número de peças formadas com números distintos será dado por $C_{7,2} = \frac{7!}{2!.5!} = 21$. *Assim, com os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 podemos formar um total de* $21 + 7 = 28$ *peças.*

Para encontramos a quantidade de peças que podem ser formadas se usarmos os números 0,1,2,3,...,n, segue-se de forma análoga, que há $n+1$ *peças que pode ser formadas com números iguais. Usando o fluxograma já exposto, tem-se que a quantidade de peças formadas por números distintos será dado por:*

$$C_{n+1,2} = \frac{(n+1)!}{2!.(n-1)!}$$

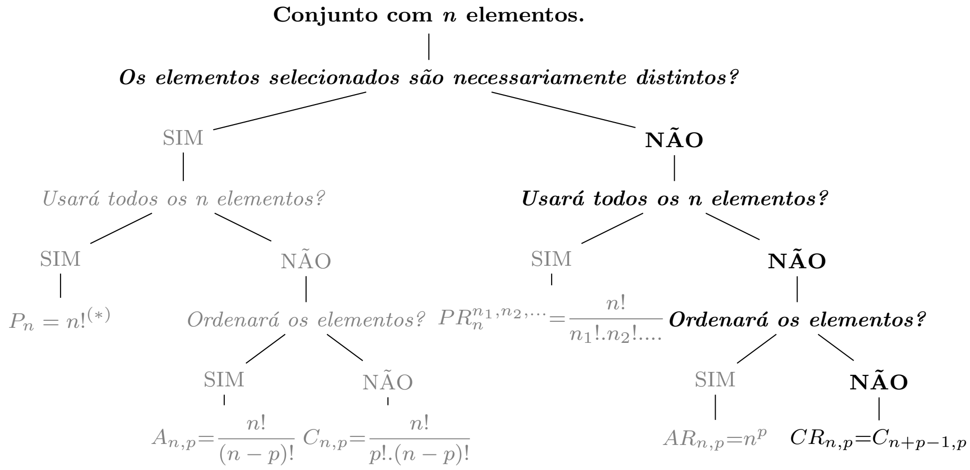
Portanto tem-se um dominó com um número de peças igual a:

$$\frac{(n+1).n}{2} + (n+1) = \frac{(n+2).(n+1)}{2}$$

Outra possibilidade:

II) Considerando qualquer uma das peças sem distinção de grupos:

Para usar o fluxograma temos que consirerar que: Há um conjunto com 7 números, serão selecionados dois valores mas esses não são necessariamente distintos. A ordem dos elementos não será importante, assim:



Portanto o número de peças formadas com números distintos será dado por $CR_{7,2}=C_{7+2-1,2}=\dfrac{8!}{2!.6!}$. *Assim, com os números 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 podemos formar um total de* $\dfrac{8!}{2!.6!}=28$ *peças.*

Para encontramos a quantidade de peças que podem ser formadas se usarmos os números 0,1,2,3,...,n, segue de forma análoga, que há:

$$CR_{n+1,2}=C_{n+1+2-1,2}=\frac{(n+2)!}{2!.n!}$$

Portanto tem-se um dominó com um número de peças igual a:

$$\frac{(n+2)!}{2!.n!}=\frac{(n+2).(n+1)}{2}$$

É importante observar que o uso do fluxograma não deve podar em nenhum momento a criatividade do aluno, ele deve ser usado como uma orientação para as suas escolhas percebidas após a criação dos exemplos. Observe também que o aluno deve ter claro o significado de: usar todos os elementos, a ordem importa ou não, o que significa usar elementos repetidos, etc., ou seja, que o aluno já tenha estudado todos os assuntos que implicam nas saídas do algoritmo, até para que faça uma análise crítica do resultado obtido. Mais uma vez ressaltamos que o algoritmo deve ser utilizado como uma ferramenta de apoio após estudados todos os tópicos que aparecem no mesmo e nunca como substituição ao ensino dos mesmos.

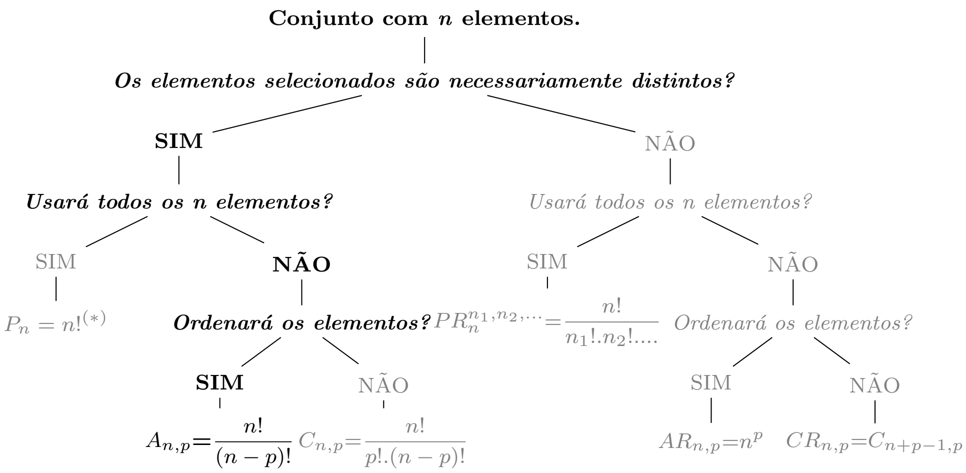
O próximo problema foi retirado de um aplicativo disponibilizado pelo Yahoo! denominado "Yahoo! Respostas":

"(Puccamp 96) Usando os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, sem repetição, quantos números pares de três algarismos e maiores que 234 pode-se formar?
a) 110 b) 119 c) 125 d) 129 e) 132
fiz o seguinte:
Casa dos 200: eu teria o número 238, além das possibilidades 1.4.3 pois o primeiro algarismo teria que ser o 2, portanto, só uma chance, o último algarismo seria um dos 3 pares restantes das opções, e o segundo algarismo seria tudo o que restou, lembrando de retirar o 3.
Casa dos 300: 1.5.4 =20
400: 1.5.3 =15
500: 1.5,4= 20
600: 1.5.3=15
700: 1.5.4=20
800: 1.5.3=15
900: 1.5.4=20
depois fiz 20.4 + 15.3 + 1.12 + 1 = 138 porém a resposta é 119."
(Adaptado de: http://br.answers.yahoo.com/question/index?qid=2011112409 2609AAKNdac. Acesso em 05.01.2013 às 05h.)

Não é a toa que, recorrentemente, chamamos atenção a importância que deve ser dada à construção dos exemplos e à discussão das regras que permitem gerar cada um deles. É este procedimento que irá dar suporte preciso àquele que resolve o problema a fim de evitar erros de interpretação ou erros por falta de atenção. Perceba que o equívoco cometido não é conceitual, os princípios aditivo e multiplicativo estão corretamente aplicados, a obediência da regra de usar algarismos sem repetição também está atendida. A solução proposta não está correta por terem sido considerados números começados com o algarismo 7, sendo que este não está disponibilizado no problema e também por não ter sido incluido na contagem o número 236, que poderia ter sido facilmente identificado se a listagem com os números tivesse começado a ser construída, já que posto em ordem crescente seria o primeiro a atender todas as exigências.

Este é um caso em que o uso do algoritmo não é útil, usar o princípio multiplicativo e o aditivo é suficiente para resolver o problema sem maiores complicações. É fato que, para algumas situações, a proposta apresentada nessa dissertação não torna a solução mais simples. Como já foi citado, não contamos aqui com uma fórmula mágica. Usando o fluxograma, tem-se:

A fim de atender as condições do problema iremos selecionar um elemento entre 2, 4, 6 e 8, para alocá-lo na posição da unidade e dois elementos entre todos os algarismos disponibilizados que ainda não tenha sido selecionado, para alocá-los nas posições referentes à dezena e centena, sendo sua ordem importante, pois nosso sistema é posicional. Assim:



Dessa forma, há 4 maneiras de selecionar o algarismo da unidade e $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$ *maneiras de selecionar os dois algarismos para a centena e dezena. Logo será possível formar* $4.30 = 120$ *números pares.*

Ainda tem-se que de todos os números formados com as condições estabelecidas, o menor deles é o 234, que não atende o que foi pedido. Portanto $120 - 1 = 119$ *números podem ser formados nas condições descritas.*

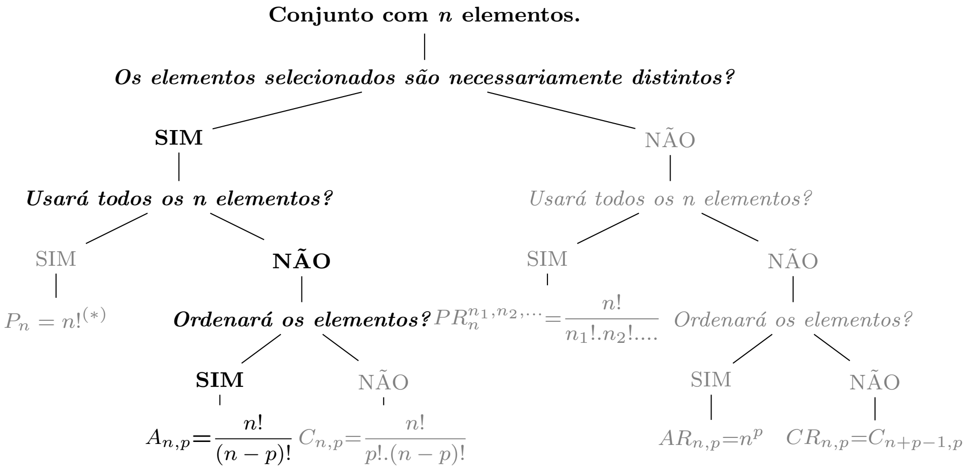
No exemplo anterior ficou claro como é importante saber o que foi contado, a fim de podermos fazer os ajustes finais ao resultado, a saber: acrescentar no caso da resolução proposta no site e retirar no caso da nossa resolução.

Para que haja um aproveitamento pleno desta ferramenta didática o aluno deve exemplificar até compreender de que maneira as regras propostas no enunciado irão permitir que as perguntas feitas nos entrocamentos do fluxograma possam ser respondidos corretamente. Com essa prática, espera-se que o aluno desenvolva maturidade suficiente para perceber que em algumas contagens é melhor dividir as escolhas em partes. Para mostrar uma aplicação neste caso iremos usar uma questão do vestibular da Universidade Federal Fluminense:

(Uff 2007) A administração de determinado condomínio é feita por uma comissão colegiada formada de 8 membros: síndico, subsíndico e um conselho consultivo composto de seis pessoas. Note que há distinção na escolha de síndico e subsíndico enquanto não há esta distinção entre os membros do conselho consultivo. Sabendo que 10 pessoas se dispõem a fazer parte de tal comissão, determine o número total de comissões colegiadas distintas que poderão ser formadas com essas 10 pessoas.

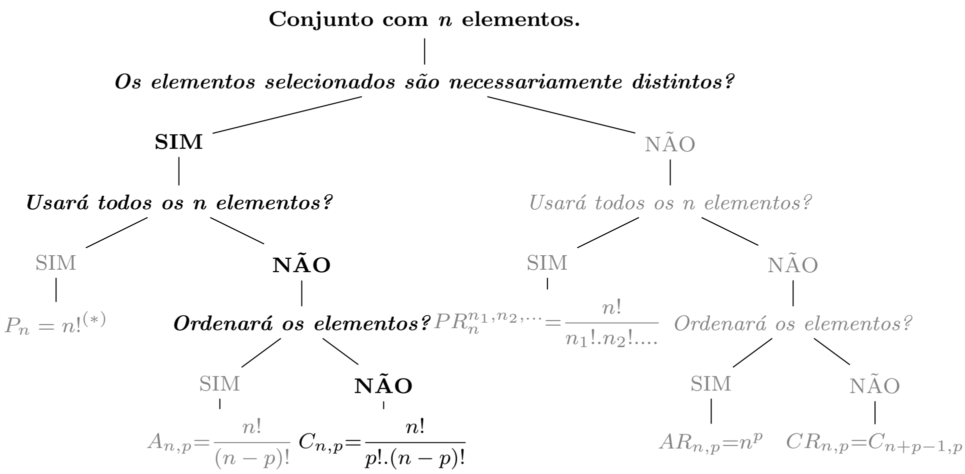
Ao se debruçar sobre o problema, o aluno deverá por meio da exemplificação, das possíveis comissões colegiadas, perceber que a escolha de síndico e subsíndico tem características diferentes da escolha do conselho consultivo. Assim, para resolver o problema, iremos dividí-lo em etapas:

A fim de determinar o número de comissões colegiadas, vamos dividir a escolha de seus membros em duas etapas. Na primeira delas iremos nos preocupar com a escolha do síndico e do súbsíndico. Nessa etapa temos 10 pessoas disponíveis para os dois cargos, sabemos que a mesma pessoa não poderá ocupar os dois cargos, portanto precisamos escolher pessoas duas distintas, e além disso é necessário compreender que escolher A para o cargo de síndico e B para o cargo de subsíndico não constitui a mesma escolha de de B para síndico e A para subsíndico. Assim



Dessa forma, o número de maneira de selecionar duas pessoas, entre as 10 dispostas, para ocupar os cargos de síndico e subsíndico será dado por $A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = 90$.

Na segunda etapa, teremos que escolher os seis membros do conselho consultivo. Essa seleção deve ser feita levando-se em conta que agora há apenas oito pessoas habilitadas para compor este conselho, pois dos dez que haviam no início dois já foram selecinados para os cargos de síndico e subsíndico. Assim, observa-se que as pessoas selecionadas devem ser distintas, que dos oito apenas seis serão selecionados e que a ordem em que a seleção dos seis componentes do conselho é feita não determinará conselhos distintos, logo tem-se:



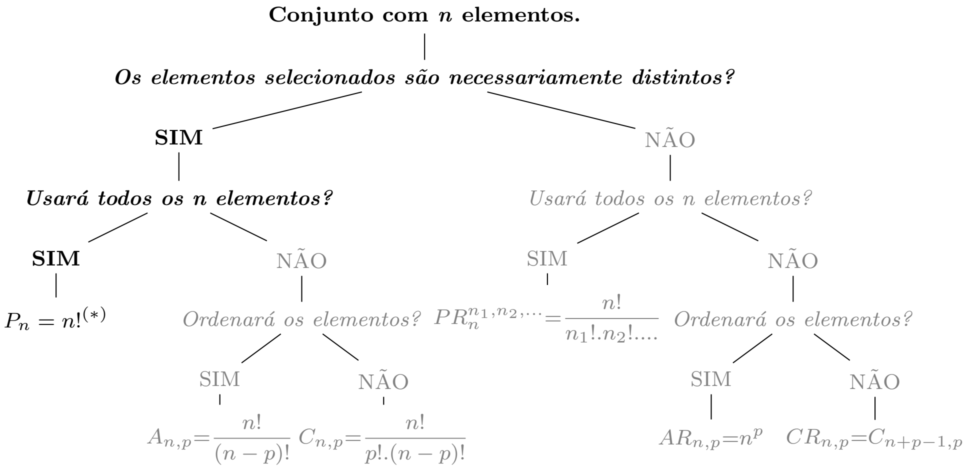
Portanto o número de conselhos consultivos que podem ser formados será dado por $C_{8,6} = \dfrac{8!}{2!.6!} = 28$. *A formação da comissão colegiada foi dividida em duas etapas: A escolha de síndico e subsíndico, que pode ser feita de 90 maneiras distintas, e a escolha do conselho consultivo, que pode ser feita de 28 maneiras distintas. Dessa forma, será possível escolher a comissão colegiada de* $90.28 = 2520$ *maneiras distintas.*

A seguir o fluxograma será aplicado a algumas questões da prova que está no Anexo A. Esta prova foi aplicada a turma do turno matutino da disciplina Análise Combinatória e Probabilidade oferecidas pelo Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte sob a responsabilidade do Prof. Dr. André G.C. Pereira, uma das turmas citadas no capítulo 2. No item a da questão, pergunta-se:

De quantas maneiras distintas 6 caixas brancas de tamanhos diferentes podem ser alinhadas?

Segue a seleção de escolhas guiadas pelo fluxograma:

Para determinar o número de maneiras que atendem as condições do problema, faz-se a construção de exemplos. Iremos nomear as caixas usando as letras A, B, C, D, E e F. Ao alinhar as caixas teriamos configurações do tipo ABCDEF, ABCDFE, FEBCDA, FEDCBA, etc. O que se pode perceber é que em todas as configurações usamos todas as caixas. Também temos que as caixas são todas distintas e a ordenação está imposta pois devemos considerar que ABCDEF e FEDCBA são alinhamentos diferentes. Assim:



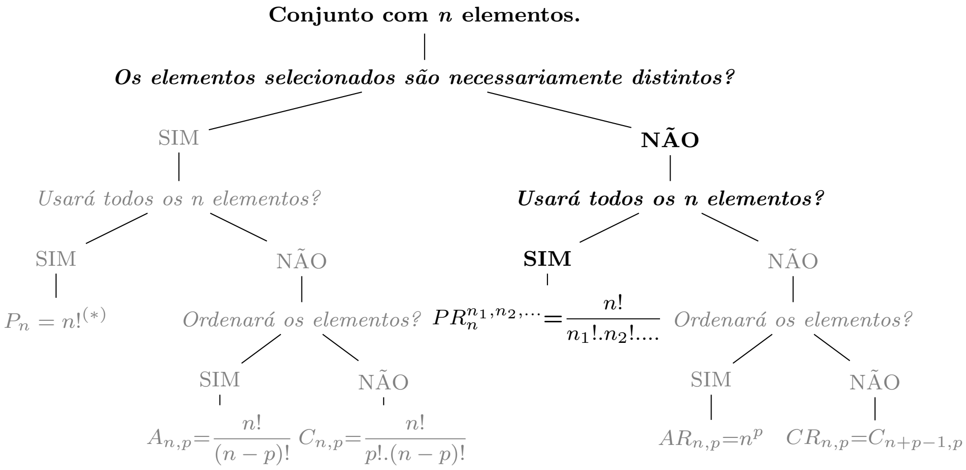
Dessa forma, há $6! = 720$ *maneiras de alinhar as seis caixas.*

No item b, pergunta-se:

E se fossem 3 de um tamanho e 3 de outro tamanho?

Tem-se:

Desta vez, temos 6 caixas idênticas 3 a 3. Iremos então denominá-las de a e A. Assim ao alinhar as caixas teriamos configurações do tipo AaAaAa, AAAaaa, AAaAaa, etc. O que se pode perceber é que em todas as configurações usamos todas as caixas mas agora temos que as caixas não são todas distintas e, apesar da ordenação estar imposta, AAAaaa constitui o mesmo alinhamento se trocarmos a posição das duas primeiras caixas. pois devemos considerar que:



Dessa forma, há $PR_6^{3,3} = \frac{6!}{3!.3!}$ *maneiras de alinhas as seis caixas.*

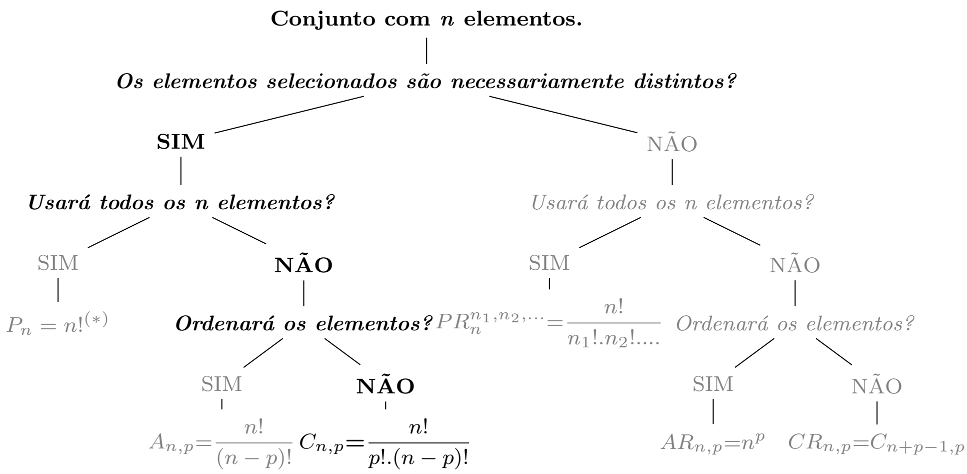
Na próxima questão além de usar o fluxograma para decidir que algoritmo será necessário, haverá necessidade de decidir se os valores obtido devem ser somados ou multiplicados. Essa é uma dúvida recorrente que pode ser eximida se for reforçado para o aluno a associação que existe entre os conectivos lógicos "e" e "ou" e os princípios multiplicativo e aditivo, respectivamente.

> *Um departamento de uma empresa tem 10 funcionários, sendo 6 homens e 4 mulheres. Quantos grupos de trabalho diferentes pode ser formados, contendo 4 homens e 2 mulheres?*

Segue a seleção de escolhas guiadas pelo fluxograma:

> *Suponha que cada grupo de trabalho é formado por dois subgrupos, um formado por 4 homens escolhidos entre os 6 disponíveis na empresa e outro formado por 2 mulheres escolhidas entre as 4 disponíveis na empresa. A fim de gerar nossos exemplos vamos denominar os homens por* h_n*. Assim, nossa subcomissão masculina pode ser formada por:* $h_1h_2h_3h_4$, $h_1h_2h_3h_5$, $h_1h_2h_3h_6$, ..., $h_3h_4h_6h_5$, *etc. Se eu selecionar* h_1, h_2, h_3 *e* h_4 *nessa ordem*

ou nesta h_2, h_4, h_1 e h_3 ainda assim terei a comissão $h_1h_2h_3h_4$, portanto a ordem em que seleciono os meus candidatos não torna as comissões diferentes. Assim:



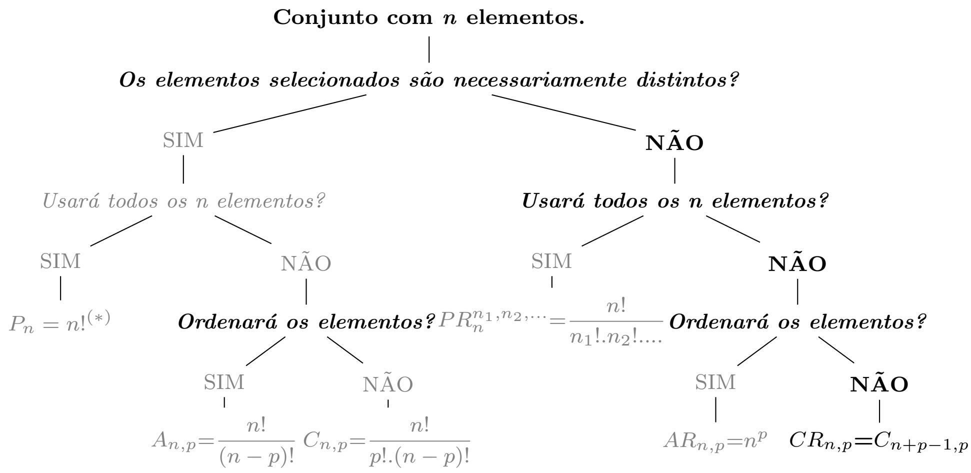
Dessa forma, há $C_{6,4}=\dfrac{6!}{4!.(6-4)!}=15$ *maneiras de selecionar os 4 homens para o grupo e há* $C_{4,2}=\dfrac{4!}{2!.(4-2)!}=6$ *maneiras de selecionar as 2 mulheres para esse grupo. Ora, para formar o grupo de trabalho será necessário selecionar os 4 homens* **e** *as 2 mulheres, logo há* $15.6=90$ *grupos de trabalhos possíveis.*

Segue o próximo enunciado:

Se no tabuleiro da baiana em Salvador tem munguzá, caruru, vatapá, sarapateu e acarajé. E ela fez a seguinte promoção: quaisquer dois quitutes (distintos ou não) por R\$3,00. De quantas maneiras você pode fazer suas escolhas?

Solução por meio do fluxograma:

No tabuleiro da baiana tem munguzá, caruru, vatapá, sarapateu e acarajé. Posso comprar duas porções de munguzá? Sim. Caruru e Vatapá representam a mesma compra de Vatapá e Caruru? Sim. Ao pensar nos exemplos *que usamos podemos propor que estamos selecionando dois quitutes entre os 5 disponíveis, sendo que nessa seleção os dois quitutes não precisam necessariamente ser distintos. Logo:*



Dessa forma, há $CR_{5,2} = C_{5+2-1,2} = \frac{6!}{2!.(6-2)!} = 15$ *maneiras de selecionar os 2 quitutes entre os 5 disponíveis no tabuleiro da baiana.*

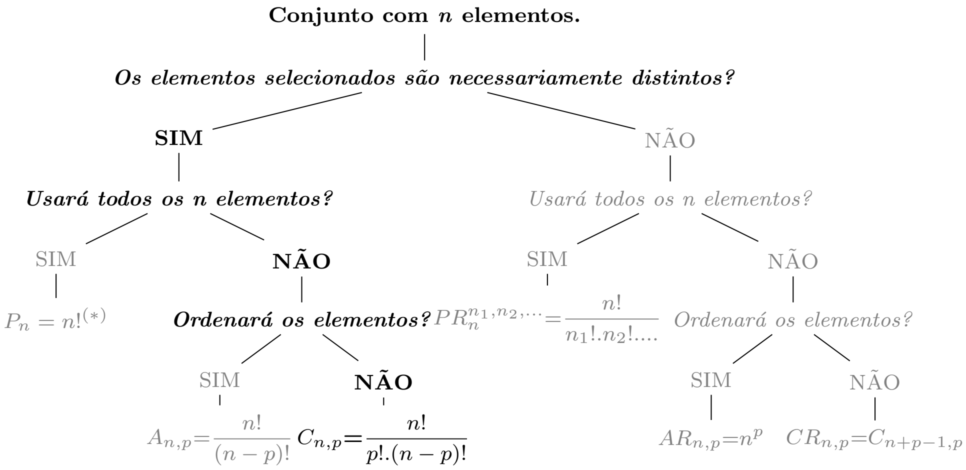
A última questão da prova se mostra um excelente exercício para o desenvolvimento do Pensamento Combinatório.

Quantas senhas diferentes, de 4 dígitos, com 2 dígitos iguais e os outros diferentes, podem ser montadas utilizando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

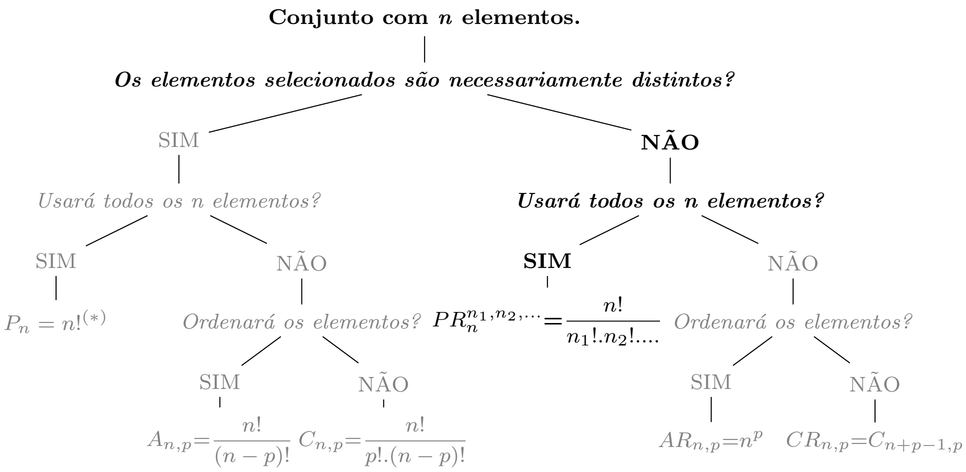
A estratégia usada para a resolução do problema deve ser bem cadenciada. Primeiramente gerar uma senha que atenda as condições descritas, em seguida esmiuçar quais decisões permitiram a formação dessa senha pondo em prática o Pensamento Combinatório.

Uma sugestão de decisões, seria: Escolher três algarismos distintos, decidir qual deles irá se repetir e em seguida permutá-los a fim de gerar uma senha. Assim seria possível propor a seguinte solução:

Ainda sem se preocupar com a ordenação dos algarismos, vamos determinar de quantas maneiras é possível selecionar três algarismos distintos entre os cinco disponibilizados:



Dessa forma, há $C_{5,3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = 10$ *maneiras de fazer a seleção. Como dispõe-se de 3 algarismos e é necessário escolher um para se repetir na senha, essa escolha poderá ser feita de três modos distintos. Para finalizar, deve-se escolher uma ordem para os quatro algarismo, sendo dois deles iguais, logo:*



O número de senhas geradas pela permutação dos algarismos é dado por $PR_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$. *Bem, como para gerar as senhas será necessário escolher os três algarismos distintos* **e** *dentre os três escolher um para ser duplicado* **e** *permutá-los, o número de senhas possíveis é igual a* $10.3.12 = 360$.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho buscou-se apresentar a síntese de uma prática didática construída com base na necessidade de manipulação antes da formalização de uma estratégia. O fluxograma apresentado não deve ser entendido de maneira alguma como um método que dará a resposta dos problemas de Análise Combinatória e sim como um guia sobre que questionamentos devem ser feitos após ter consciência das regras estabelecidas nas situações de contagem, a fim de decidir que recursos deverão ser empregados para realizar as contagens de forma eficaz e eficiente.

Apresentamos essa síntese como um instrumento que se presta a enriquecer o arsenal dos professores de matemática, como o próprio título "Uma ferramenta didática para ajudar na fixação dos conceitos introdutórios de análise combinatória" sugere. Com mais tempo de pesquisa e com maior amostragem é possível que o método aqui exposto possa produzir mais resultados dentro da proposta de melhorar o ensino de Análise Combinatória, e por consequência o da Matemática.

Tendo consiência das limitações dessa dissertação, entrego-a a apreciação dos que se interessam em melhorar o ensino. Que as possíveis lacunas aqui deixadas sirvam de motivação a outros estudantes do programa para se debruçarem sobre este e outros problemas.

Anexo A

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Centro de Ciências Exatas e da Terra - CCET

Departamento de Matemática

Disciplina - Análise Combinatória e Probabilidade

Professor - André G.C. Pereira

Aluno(a) -

1^a Avaliação

1. (4,0) Suponha que um garoto do ensino médio pedisse para você lhe explicar:

   a) Quando usar permutação e quando usar combinação/arranjo?

   b) A diferença entre combinação e arranjo.

   c) A diferença ente combinação e combinação completa.

   Explique com suas palavras e dê um exemplo para ilustrar.

2. (2,0)

   a) De quantas maneiras distintas 6 caixas brancas de tamanhos diferentes podem ser alinhadas?

   b) E se fossem 3 de um tamanho e 3 de outro tamanho?

3. (1,0) Um departamento de uma empresa tem 10 funcionários, sendo 6 homens e 4 mulheres. Quantos grupos de trabalho diferentes pode ser formados, contendo 4 homens e 2 mulheres?

4. (1,0) Numa pesquisa feita com 500 pessoas, perguntava-se ao entrevistado se ele jogava voley ou se jogava basquete, o resultado foi: jogava voley = 210, jogava basquete = 250 e não, nenhuma das modalidades = 200. Pergunta-se:

   a) Quantas das pessoas entrevistadas jogavam alguma das modalidades (ou seja, jogavam voley, basquete ou os dois)?

b) Quantas pessoas entrevistadas jogavam ambas as modalidades?

5. (1,0) Se no tabuleiro da baiana em Salvador tem mungunzá, caruru, vatapá, sarapateu e acarajé. E ela fez a seguinte promoção: quaisquer dois quitutes (distintos ou não) por R$3,00. De quantas maneiras você pode fazer suas escolhas?

6. (1,0) Quantas senhas diferentes de 4 dígitos com 2 dígitos iguais e os outros diferentes podem ser montadas utilizando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

Referências Bibliográficas

[1] The archimedes palimpsest. Disponível em http://www.archimedespalimpsest.org/about/ Acesso em 14.02.2012 às 19h.

[2] Morgado. A.C, de Carvalho. J.B.P., Carvalho. P.C.P., and Fernandez. P.J. *Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios*. Coleção do Professor de Matemática. Impa / Vitae, 2006.

[3] Keith. Devlin. *O Instinto Matemático*. Record, 2009.

[4] Casalderrey. Francisco Martín. *Cardano y Tartaglia: las matemáticas en el Renacimiento Italiano*. Nivola, 2000.

[5] Polya. George. *A arte de resolver problemas.* Interciência, Rio de Janeiro, 1978.

[6] Mendes. Iran Abreu. *Ensino da matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Educação., 2001.

[7] Ed Pegg Jr. The loculus of archimedes, solved. Disponível em http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_17_03.html Acesso em 14.02.2012 às 19h30.

[8] Mlodinow. Leonard. *O Andar do Bêbado - Como o Acaso Determina Nossas Vidas*. Jorge Zahar, 2009.

[9] Bernstein. P. *Against the gods: The Remarkable Story of Risk*. John Wiley Sons, New York, NY., 1996.

[10] Noel. Reviel, Netz. William. *O Codex Arquimedes*. Nivola, 2000.

[11] Oliveira. Wagner. Educação ambiental em góias. Disponível em http://wagneroliveiragoias.blogspot.com.br/2012/05/e-s-p-e-ci-l-homem-pre-historico-de.html Acesso em 14.02.2012 às 20h30.