UNICAMP

Adilson Pedro Roveran

ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA USANDO COMO RECURSO PEDAGÓGICO A HISTÓRIA MATEMÁTICA. DAS QUADRATURAS AO NÚMERO PI. MATEMÁTICA NA ANTIGA GRÉCIA.

CAMPINAS
2015

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

ADILSON PEDRO ROVERAN

ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA USANDO COMO RECURSO PEDAGÓGICO A HISTÓRIA MATEMÁTICA. DAS QUADRATURAS AO NÚMERO PI. MATEMÁTICA NA ANTIGA GRÉCIA.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. OTÍLIA TEREZINHA WIERMANN PAQUES

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO
ADILSON PEDRO ROVERAN E ORIENTADA PELA
PROFA. DRA OTÍLIA TEREZINHA WIERMANN PAQUES.

Assinatura da Orientadora

Otília T. Wiermann Paques

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R769a Roveran, Adilson Pedro, 1958-
Atividades para a sala de aula usando como recurso pedagógico a história matemática : das quadraturas ao número Pi : matemática na antiga Grécia / Adilson Pedro Roveran. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Otília Terezinha Wiermann Paques.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Arquimedes. 2. Quadraturas (Matemática). 3. Construções geométricas. 4. Pi. I. Paques, Otília Terezinha Wiermann,1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Activities for classroom using mathematics history as teaching resource : from the squarings to the number Pi : mathematics in ancient Greece
Palavras-chave em inglês:
Archimedes
Squarings (Mathematics)
Geometric constructions
Pi
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Otília Terezinha Wiermann Paques [Orientador]
Eduardo Sebastiani Ferreira
Yuriko Yamamoto Baldin
Data de defesa: 26-01-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 26 de janeiro de 2015 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Otília T. Wiermann Paques

Prof.(a). Dr(a). OTÍLIA TEREZINHA WIERMANN PAQUES

Prof.(a). Dr(a). EDUARDO SEBASTIANI FERREIRA

Yuriko Yamamoto Baldin

Prof.(a). Dr(a). YURIKO YAMAMOTO BALDIN

Abstract

This study aims to build a path, guided the Greek geometric thought, based on the idea of equivalence between areas of plane figures to the estimate of the number π, achievement of Archimedes, through the squaring polygons and the pursuit of squaring the circle. An important achievement of the lunulae Hippocrates of Chios and the calculating of the circle area, by Archimedes method, serve to encourage the use of the History of Mathematics in Mathematics Teaching, which is the central theme of this research. The activities proposed in the third chapter intend to retrace a path for geometric constructions and algebric reasoning that quest, since the squaring of polygons, to determine the value of the number π, for the use in the classroom.

Keywords: Archimedes, Squarings, Geometric constructions, Number π.

Resumo

Este estudo tem por objetivo construir um caminho, norteado pelo pensamento geométrico grego, partindo da ideia de equivalência de figuras planas até chegar a estimativas do número π, conquista de Arquimedes, passando pelas quadraturas de figuras planas e pela busca da quadratura do círculo. Uma conquista importante, a quadratura das lúnulas de Hipócrates de Chios ao lado do cálculo da área do círculo, pelo método de Arquimedes servem de incentivo ao uso da História da Matemática no Ensino de Matemática, que é o tema central dessa pesquisa. As atividades propostas no terceiro capítulo pretendem refazer um caminho, por construções geométricas e raciocínio algébrico dessa busca, desde as quadraturas de polígonos, até a estimativa do valor do número π, para a sala de aula.

Palavras-chave: Arquimedes, Quadraturas, Construções geométricas, Número π.

Sumário

Dedico essa dissertação a meu pai, Alfeu Roveran, eterno inspirador ....

Agradecimentos

A Deus por ser responsável pela minha caminhada.

A minha família, pais, irmãos, filhos, Christian, Samuel e Jenifer e esposa, Vânia por todo carinho, colaboração e paciência nessa fase tão assoberbada de compromissos com os estudos.

A todos os amigos que tive o prazer de ter ao meu lado ou que à distância me incentivaram em todos os momentos.

Aos colegas e amigos do PROFMAT−2012, que de diversas formas me incentivaram, torceram e deram apoio nessa empreitada, em especial Audino Castelo Branco, André da Silva Coura e José Francisco Mota.

A todos os meus colegas e à direção da E. E. Elvira de Pardo Mêo Muraro, em especial à diretora Zilda Aparecida Lyra, pelo apoio e à professora Kelly Cristina de Faria, que me auxiliou na aplicação das atividades nas suas classes de oitava série do Ensino Fundamental.

Às professoras Cristina Fernandes e Adriana Soldera pelo auxílio prestado.

A todos os meus professores desde os anos iniciais até todos de quem tive o prazer de receber as ferramentas oferecidas pelo PROFMAT, que muito contribuiram nessa caminhada.

Em especial à minha orientadora, Profa. Dra. Otília Terezinha W. Paques, pelo incentivo, apoio e firmeza na determinação dos objetivos e na concretização dessa dissertação.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro e ao IMECC-UNICAMP, pela oportunidade de estar nesse processo.

Lista de Figuras

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Este estudo pretende fazer uma reflexão a respeito do uso da História da Matemática nas aulas de Matemática, mais especificamente, seu uso na resolução de problemas. A questão que se coloca como central nesse estudo é: quanto mede a área de um círculo?

De acordo com Corrêa (p.5 e 6) [4], há que se diferenciar História na Educação Matemática e História da Matemática na Educação Matemática. O primeiro campo, tratado com a sigla HEM, permite a possibilidade de questionar o papel do historiador, enquanto que o segundo campo, HMEM, se restringe à utilização da História da Matemática no ensino da Matemática e a discussão de como fazer história é deixada a cargo do primeiro. Será com ênfase na HMEM que será desenvolvida essa reflexão.

Desde tempos imemoriais, homens observam a abóbada celeste em busca de respostas para suas questões religiosas, localização geográfica ou determinação da passagem do tempo, seja para prever colheitas ou determinação das estações do ano. Coube aos gregos o uso dos mesmos "instrumentos de pesquisa" na busca pelo conhecimento abstrato, determinação de regularidades ou até do comportamento dos números.

"Egípcios e babilônios desenvolveram uma Matemática voltada para soluções de problemas práticos. (Já, na Grécia antiga,) Arquimedes e Hipócrates desenvolveram outro tipo de Matemática, que se concentra na etapa das magnitudes constantes." (p.54) [4]

John Fauvel, em seu artigo "A utilização da História em Educação Matemática" (Fauvel, p.17) [7], lista:

Algumas razões que têm sido apresentadas para defender o uso da História no ensino da Matemática.

- Ajuda a aumentar a motivação para aprender;

- Humaniza a Matemática;
- O desenvolvimento histórico ajuda a ordenar a apresentação dos assuntos no currículo;
- Mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram, ajuda-os na sua compreensão;
- Muda a percepção que os alunos têm da matemática;
- Comparar o antigo e o moderno valoriza as técnicas modernas;
- Ajuda a desenvolver uma aproximação multicultural;
- Proporciona oportunidades para realizar investigações;
- Os obstáculos ao desenvolvimento passado ajudam a explicar aquilo que os alunos de hoje acham difícil;
- Os alunos sentem-se melhor ao perceberem que não são os únicos a terem dificuldades;
- Encoraja os bons alunos a ir mais longe;
- Ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade;
- Torna a Matemática menos assustadora;
- Explorar a história ajuda a manter o nosso interesse e entusiasmo na Matemática;
- Fornece a oportunidade de realização de trabalhos inter-curriculares com outros professores ou disciplinas.

Com tantos bons argumentos, deve-se esclarecer que o presente trabalho não é uma pesquisa em Educação Matemática, mas um exemplo de como a História da Matemática pode contribuir em atividades em sala de aula.

Ainda no mesmo artigo, é relevante citar orientações quanto ao uso da História da Matemática, de acordo com o autor (Fauvel, p.18):

Algumas formas de usar a História da Matemática na sala de aula.

- Mencionar episodicamente os matemáticos antigos;
- Fazer introduções históricas aos conceitos que são novos para os alunos;

- Encorajar os alunos a compreender os problemas históricos dos quais os conceitos que estão a aprender são respostas;
- Dar aulas de "História da Matemática";
- Apresentar exercícios na aula ou como trabalho para casa baseados em textos matemáticos antigos;
- Dirigir atividades teatrais que reflitam interação matemática;
- Encorajar a criação de cartazes ou outros projetos com temas históricos;
- Realizar projetos sobre a atividade matemática local no passado;
- Usar exemplos críticos do passado para ilustrar técnicas e métodos;
- Explorar mal entendidos/erros/visões alternativas do passado para ajudar na compreensão e na resolução de dificuldades dos alunos atuais;
- Optar por uma abordagem pedagógica de um tópico em sintonia com o seu desenvolvimento histórico e
- Ordenar e estruturar os temas do programa tendo em consideração o seu enquadramento histórico.

Nessa mesma linha de raciocínio, Frank J. Swetz em seu artigo "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" [19] reflete:

"O ensino da matemática pode, portanto, ser humanizado pela inclusão de perspectivas históricas nas discussões na sala de aula. Isto pode e deve ser feito discretamente em intervenções do professor através da utilização de anedotas históricas, filmes, projetos, exposições e problemas, assim como na reprodução de experiências históricas relevantes, tais como, a estimativa do número π pelo método da exaustão..." (Swetz, p.22) [19].

O ponto central em que se apoiam essas notas situa-se nas construções geométricas com o uso dos instrumentos euclidianos: régua não graduada e compasso. Tais construções, no entanto, devem seguir regras básicas, como (A): dados dois pontos distintos, é possível traçar uma reta, utilizando-se uma régua e (B): é possível traçar uma circunferência, dado um ponto como centro e passando por um segundo ponto, já determinado. Com essas regras, e por meio de uma sequência finita de operações, traçamos intersecções de retas, de circunferência e entre retas e circunferências, ações que determinam novos pontos e, com estes, a possibilidade de traçar novas retas e circunferências, e assim, sucessivamente, conforme Silva Jr. (p.6) [18].

Os problemas que ficaram conhecidos como os três problemas clássicos (insolúveis, apenas com o uso dos instrumentos euclidianos) são:

- A trissecção do ângulo.
  Dado um ângulo qualquer, dividi-lo em três partes iguais.

- A duplicação do cubo.
  Atribui-se ao oráculo de Apolo, em Delos, o problema de construir um altar de forma cúbica que tivesse exatamente o dobro do volume de outro, dado, para pôr fim a uma peste que acometeu Atenas. A busca, então, concentrou-se em encontrar a medida da aresta do cubo duplicado a partir de um valor conhecido, utilizando os instrumentos permitidos.

- A quadratura do círculo.
  Construir um quadrado com exatamente a mesma área de um círculo dado.

A quadratura do círculo constituiu um desafio constante na Antiguidade. "Quadrar" uma figura significa encontrar um quadrado que tenha a mesma área de uma figura dada, assim, as quadraturas de retângulos e triângulos são imediatas, de acordo com os processos a serem descritos. De posse do processo de "quadrar" triângulos e a partir da ideia de que todo polígono pode ser dividido em uma quantidade finita de triângulos, conclui-se que é possível "quadrar" qualquer figura poligonal.

O desafio já exposto – "quadrar" um círculo – tornou-se uma meta perseguida por muitos, gerou muitos estudos com a obtenção de resultados intermediários, que, supostamente, levariam à descoberta tão almejada. Para os gregos, "quadrar" o círculo significava encontrar um segmento de reta de medida igual ao número π, para ser o lado do quadrado de área igual à do círculo dado. Mas o número π, como razão entre o perímetro de um círculo e seu diâmetro já era conhecido na Mesopotâmia, aproximadamente $3\frac{1}{8}$ e no antigo Egito, $3\frac{1}{6}$.

Voltando à Grécia antiga, daremos ênfase aos estudos de Hipócrates de Chios (c. 440 a.C.) [3], que "quadrou" três tipos de lúnulas, provavelmente com o objetivo de, a partir daí, encontrar a quadratura do círculo

É importante ressaltar, no entanto, que, segundo Boyer (p.48) [3], este Hipócrates "não deve ser confundido com seu contemporâneo ainda mais famoso, o médico Hipócrates de Cos. Tanto Cos como Chios são ilhas do grupo do Dodecaneso; mas Hipócrates de Chios, em 430 a.C., aproximadamente, deixou sua terra natal por Atenas, na qualidade de mercador."

Sabemos hoje que somente no século XVIII, com estudos mais aprofundados e com uso de outros instrumentos, foi verificado que existem cinco tipos de lúnulas quadráveis. As duas que não foram estudadas por Hipócrates e envolvem uso de trigonometria, foram estudadas por Martin Johan Wallenius (1731-1773) e Leonhard Euler (1707-1783), a partir dos avanços obtidos por François Viète (1540-1603), conforme Galvão e Souza, p.27 [10].

O mesmo objetivo (o da quadratura do círculo) motivou Arquimedes de Siracusa, porém com diversa metodologia: a prova por exaustão[1] (fruto da Escola de Mileto) e redução ao absurdo (conforme Roque e Carvalho, p.147) [17].

Ainda na tentativa de "quadrar" o círculo, Hípias (c. 460-400 a.C) e Dinostratus (c. 390-327 a.C.) conforme Ferreira (p.199) [8], construíram a curva "quadratriz", usada mais tarde por Nicomede na trisseccção do ângulo.

Até o Renascimento, usava-se o número π como obtido por Arquimedes. Diversos outros matemáticos, no período que se estende até o século XIX, tentaram, sem sucesso, a quadratura do círculo, acreditando que o número π fosse um número racional. De Morgan (1806-1871) declara a "morte da quadratura do círculo" em obra póstuma (Budget of Paradoxes - 1872) e a transcendência do número π foi provada em 1880 por Lindemann (1852-1939), o que prova, irrefutavelmente, que a quadratura do círculo é impossível (Ferreira, p.202) [8]. Cabe aqui citar que, possivelmente, a irracionalidade do número π foi demonstrada pela primeira vez por J. H. Lambert em 1891, usando frações contínuas (Figueiredo, p.16) [9].

A apresentação e as propriedades das quadratizes, cicloides, espirais (entre elas a de Arquimedes) e outras curvas não fazem parte do objetivo deste trabalho, apesar de serem uma fonte irresistível de pesquisa.

Este trabalho, portanto, é dirigido ao professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio como sugestão para incentivar seus alunos ao estudo com reflexões centradas no uso da História da Matemática. Para isso, é apresentada a fundamentação teórica, no capítulo 2, desde a definição de quadraturas, como deve ser compreendida no contexto dos matemáticos da antiga Grécia e, principalmente, à luz de Os Elementos, de Euclides.

A equivalência entre figuras planas, entendida como igualdade entre suas áreas, é o ponto de partida para as construções das quadraturas das regiões poligonais e, posteriormente, para as quadraturas das lúnulas de Hipócrates de Chios, que buscava a quadratura do círculo.

É dada ênfase nos estudos de Arquimedes de Siracusa, que apresentou uma equi-

[1]Euclides, Livro X, Proposição 1 (Lema de Euclides): "Sejam a e b as medidas de duas grandezas, respectivamente AB e CD, de mesmo tipo. Se de AB tirarmos uma parte maior do que ou igual à sua metade, do restante tirarmos uma parte maior ou igual à metade do restante, e assim, sucessivamente, então, após um certo número de repetições desse processo, obteremos uma grandeza menor do que CD.", conforme Roque e Carvalho, p.112 [17]

valência entre as áreas de um círculo e de um triângulo e suas engenhosas e elegantes estratégias para encontrar aproximações para o número π.

Estas considerações teóricas visam atingir o objetivo principal destas notas: a proposição de atividades que, à luz da História da Matemática, auxiliem o professor mostrar a seus alunos os desafios enfrentados pelos gregos antigos e seus sucessos.

No capítulo 3 são apresentadas as atividades e as orientações ao professor. As atividades foram coletadas, executadas e elaboradas para acompanhar as dificuldades enfrentadas e os sucesos obtidos, conforme as técnicas dos antigos gregos para construções geométricas, ao lado de sua utilidade nos aspectos práticos da vida de então.

Por razão de os cálculos efetuados por Arquimedes para a quadratura do círculo (não executado com compasso e régua não graduada) e para a obtenção de aproximações para o número π (segundo Heath [11]) serem muito extensos e difíceis de serem acompanhados pelos alunos nessa faixa etária, foi feita a opção de apresentá-los conforme o trabalho apresentado por Katz [12], que emprega o uso de calculadora e do teorema de Pitágoras.

Capítulo 2

QUADRATURAS

De acordo com Galvão e Souza [10], o início da história da geometria está intimamente associado à determinação de áreas de figuras planas e o primeiro grande desafio enfrentado foi a determinação da área do círculo por quadratura, que hoje sabemos ser impossível com os instrumentos usados pelos gregos: a régua não graduada e o compasso.

Na antiguidade clássica, os gregos adotaram a quadratura para a determinação da área de uma figura plana. A primeira e mais imediata delas foi a do retângulo, que, segundo Boyer:

"...mostram que os matemáticos atenienses eram hábeis no tratar transformações de áreas e proporções. Em particular, evidentemente não havia dificuldade em converter um retângulo de lados a e b num quadrado. Isso exige achar a média proporcional, ou geométrica, entre a e b, isto é, se $a : x = x : b$, os geômetras de então construíam facilmente x" (p.50) [3].

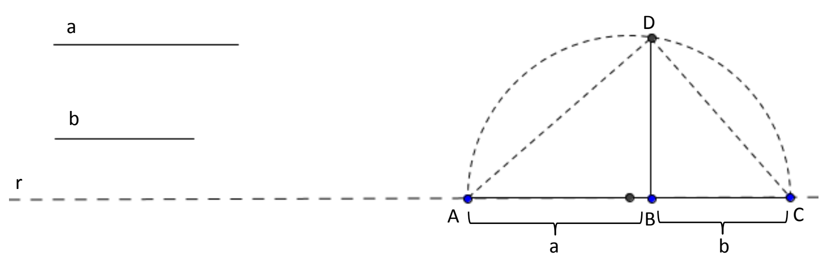


Figura 2.1: Média proporcional entre os segmentos a e b.

De fato, dados dois segmentos, a e b (ver figura 2.1, acima), uma das formas de se construir a média geométrica (ou proporcional) entre eles consiste em transportá-los sobre a reta suporte r. Sendo $a = AB$ e $b = BC$, construimos o triâgulo DAC, retângulo em D e com o vértice D na perpendicular à hipotenusa $\overline{AC}$ pelo ponto B. Denotando por x o segmento de medida BD, obtemos $x = \sqrt{ab}$, logo x é a média geométrica entre os segmentos a e b (segundo Rezende e Queiroz, p.154 e 155) [16].

As figuras a seguir mostram um conceito anterior à quadratura: a equivalência de figuras planas, utilizada por Euclides, segundo Rezende e Queiroz [16]. Usaremos neste trabalho a expressão "equivalência de (ou entre) figuras" sempre que as figuras planas em questão tiverem a mesma área, ou como cita Euclides, "figuras iguais (em área)".

2.1 Equivalência de paralelogramos

Torna-se oportuno esclarecer que a partir desse ponto, sempre que formos grafar um segmento de reta, por exemplo, o segmento AB, será usada a forma $\overline{AB}$, enquanto que se a referência for à sua medida, será usado AB.

Além disso, seguiremos, doravante, a recomendação feita por Rezende e Queiroz (p.106) [16] no que se refere a usar a expressão "área de um polígono" em lugar de "área de uma região poligonal".

Um simples conceito, o de que a medida da superfície de um paralelogramo qualquer pode ser calculada desde que se conheçam as medidas de sua base e de sua altura, permite concluir que há uma infinidade de paralelogramos equivalentes, mesmo que sua forma seja diversa, mas mantendo fixas as medidas da base e da altura. Conforme cita Euclides (livro I, Proposição 35, conforme Roque e Carvalho, p.90) [17] "Paralelogramos que estão postos sobre a mesma base e entre as mesmas (retas) paralelas, são iguais (em área)".

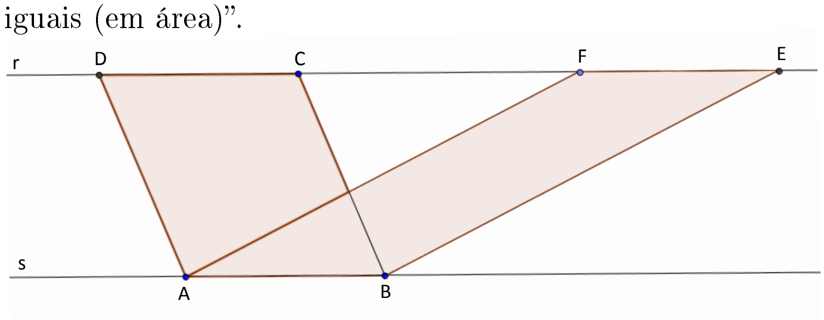


Figura 2.2: Equivalência entre paralelogramos.

Dadas as retas r e s, paralelas, conforme figura (2.2), os paralelogramos $ABCD$ e $ABEF$ têm a mesma área, por terem a mesma base.

Mas a quadratura de um polígono exige um raciocínio mais aprofundado. Iniciaremos pela quadratura do retângulo. Segundo Galvão e Souza (p.19) [10], "quadrar" um retângulo e posteriormente um triângulo leva à quadratura das regiões poligonais.

2.2 Igualdade de áreas: triângulo - retângulo

Equivalências entre polígonos são encontradas nos livros I e II de Euclides.

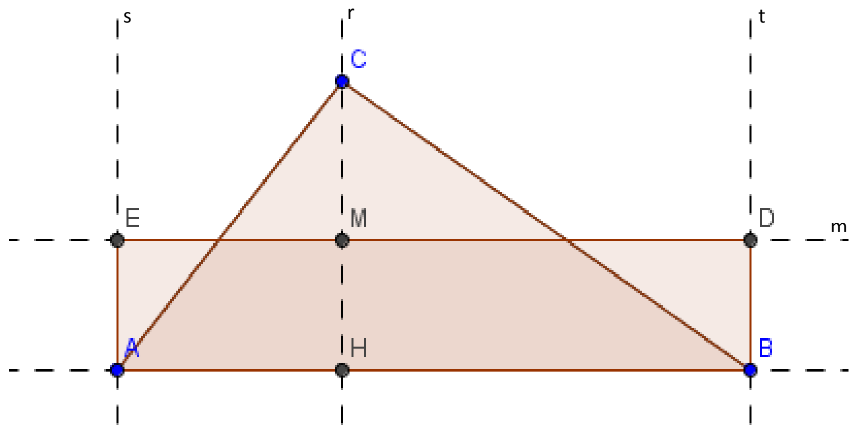


Figura 2.3: Equivalência entre triângulo e retângulo.

Dado o triângulo ABC, conforme figura 2.3, seguimos os passos abaixo para construir um retângulo equivalente:

Traçamos a reta r, perpendicular à base $\overline{AB}$, passando pelo vértice C. Denotamos por H o ponto de concorrência de r com $\overline{AB}$.

Traçar a reta m, mediatriz da altura $\overline{CH}$ e as retas s perpendicular a $\overline{AB}$ em A e t perpendicular a $\overline{AB}$ em B.

Obtemos assim, os pontos D e E, como na figura 2.3. O retângulo $ABDE$ é equivalente ao triângulo ABC.

Demonstração:

A área do triângulo ABC é igual a $AB \cdot \dfrac{CH}{2}$.

Desde que $MH = \dfrac{CH}{2}$, temos que $AB \cdot \dfrac{CH}{2} = AB \cdot MH = AB \cdot BD$, que é igual à área do retângulo $ABDE$.

2.3 Quadratura do retângulo

Um problema antigo e conhecido sobre igualdade de áreas é aquele sobre a quadratura de um polígono, conforme livros I e II de Euclides.

Iniciaremos com a quadratura do retângulo, ou seja, dado um retângulo, encontrar um quadrado de mesma área, construído com régua não graduada e compasso.

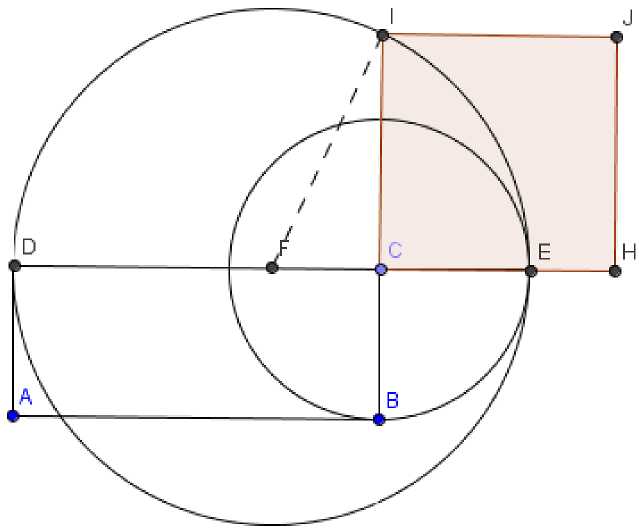


Figura 2.4: Quadratura do retângulo.

Dado o retângulo $ABCD$, (ver a figura 2.4), seguimos os passos abaixo para construir um quadrado equivalente.

Prolongamos o lado $\overline{DC}$. Traçamos a circunferência com centro em C e raio CB, obtendo o ponto E sobre a reta suporte do lado $\overline{DC}$. Sabe-se que $DC + CE = DE$ e que $CE = CB$. A mediatriz do segmento $\overline{DE}$ define o ponto F. Traçamos a circunferência com centro em F e de raio FE. Prolongamos o lado $\overline{BC}$, e obtemos o ponto de concorrência I com esta circunferência. O segmento $\overline{IC}$ é a média geométrica entre os segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{CE}$. De fato, como $\overline{DE}$ é o diâmetro da circunferência de centro F e I situa-se nesta circunferência, pela semelhança dos triângulos CEI e CID, $IC^2 = DC \cdot EC$.

$\overline{IC}$ é, portanto, o lado do quadrado $CIJH$, cuja área é igual à do retângulo $ABCD$.

Demonstração:

Seja S_{ABCD} a área do retângulo $ABCD$ e S_{CIJH} a área do quadrado $CIJH$.
Então $S_{ABCD} = DC \cdot CB$.
Por construção, $CB = CE$ então $S_{ABCD} = DC \cdot CE$.

Como $DC = DF + FC$ e $CE = DF - FC$, tem-se que
$S_{ABCD} = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DF^2 - FC^2$.
Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo FIC, temos que
$FI^2 = FC^2 + IC^2$, mas $FI = DF$, logo $IC^2 = DF^2 - FC^2$.
Como a área do quadrado $CIJH$ é igual a IC^2, fica demonstrado que

$$S_{ABCD} = S_{CIJH}.$$

2.4 Quadratura do triângulo

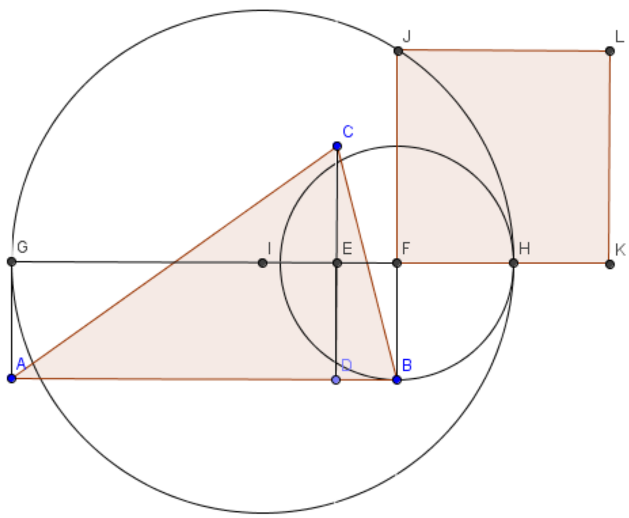


Figura 2.5: Quadratura do triângulo

Dado o triângulo ABC, pela seção 2.2, página 9, para "quadrá-lo", basta "quadrar" o retângulo equivalente ao triângulo. Veja a figura 2.5.

2.5 Equivalência entre um quadrilátero e um triângulo

Para se "quadrar"' um quadrilátero qualquer, devemos dividi-lo em dois triângulos.

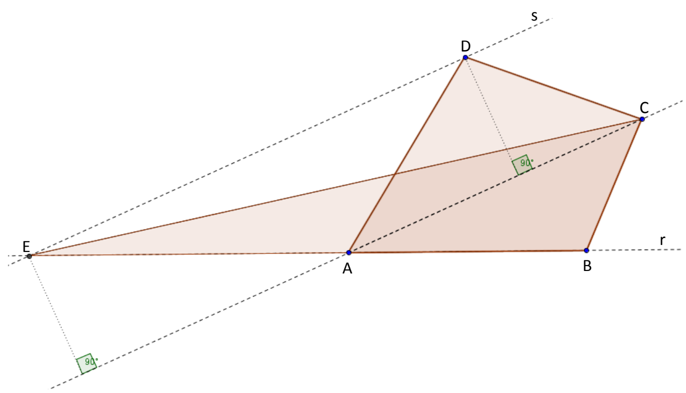


Figura 2.6: Triângulo equivalente a um quadrilátero dado.

Dado um quadrilátero $ABCD$, conforme a figura 2.6, seguimos os passos abaixo para construir um triângulo equivalente.

Prolongamos o lado $\overline{AB}$. Traçamos a diagonal $\overline{AC}$. Construimos a reta paralela à diagonal $\overline{AC}$, passando pelo vértice D. Marcamos o ponto E onde a reta paralela ao segmento $\overline{AC}$ e a reta suporte do lado $\overline{AB}$ concorrem. Traçamos o lado $\overline{EC}$. Então o triângulo EBC é equivalente ao quadrilátero $ABCD$.

Demonstração:

Ao traçar a diagonal $\overline{AC}$, o quadrilátero $ABCD$ fica dividido em dois triângulos: ABC e ACD.

O ponto de concorrência E da reta suporte de $\overline{AB}$ com a reta paralela a $\overline{AC}$ que passa por D define o triângulo EAC que possui a mesma área do triângulo ACD, pois têm um lado em comum e a mesma altura.

Logo $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{EAC} + S_{ABC} = S_{EBC}$.

A solução do problema de "quadrar" um quadrilátero qualquer leva à compreensão de que a quadratura de qualquer polígono é possível, dado que um polígono de n lados pode ser decomposto em $n + 1$ triângulos. Veja a figura 2.7 abaixo:

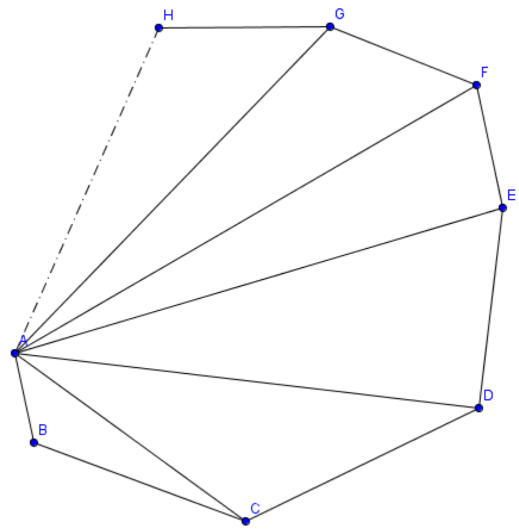


Figura 2.7: Polígono decomposto em n triângulos.

2.6 Quadratura das lúnulas de Hipócrates de Chios

Com o domínio das quadraturas de polígonos, o desafio – "quadrar" o círculo – é óbvio, passou a ser perseguido por inúmeros matemáticos. Destacam-se nessa busca, os trabalhos de Hipócrates de Chios, que escreveu a obra "Elementos de geometria", precursora em mais de um século, do mais conhecido, de Euclides, "Os Elementos"(Boyer, p.49) [3].

Ainda segundo Boyer, o teorema de Hipócrates sobre as áreas dos círculos: "Segmentos de círculo semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases", parece ser o mais antigo enunciado sobre mensuração curvilínea no mundo grego e desse teorema, deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma lúnula(p.49) [3].

As obras de Hipócrates se perderam, mas foram citadas por Eudemo[1], que relatou que as áreas dos círculos estão entre si, como os quadrados dos diâmetros [3].

As lúnulas estudadas por Hipócrates de Chios ficam determinadas ao traçarmos duas circunferências em um plano, com centros distintos (C_1 e C_2) cujos raios são, respectivamente r_1 e r_2 e concorrentes em, exatamente, dois pontos. São as duas

[1]"Eudemo de Rodes, discípulo de Aristóteles, viveu por volta de 320 a.C., escreveu uma História da Matemática, obra que se perdeu, mas foi resumida (resumo este que também se perdeu), e incorporada por Proclus (c. 410-485) nas páginas iniciais de seu Comentário sobre o primeiro livro de Os Elementos de Euclides" (Boyer, p.35) [3].

regiões não convexas, ou côncavo-convexas, limitadas pelos arcos de circunferência, como se pode ver na figura 2.8.

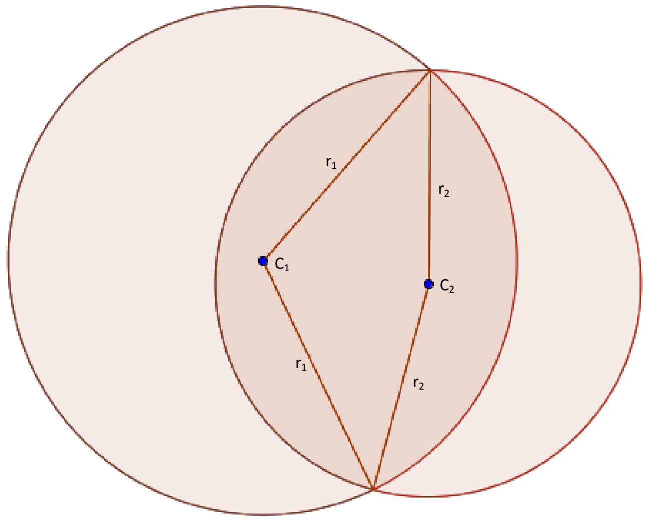


Figura 2.8: As lúnulas de Hipócrates são as áreas em tonalidade mais clara.

No entanto, as quadraturas das lúnulas dependem de um raciocínio que emprega o conceito de proporcionalidade aplicado aos setores circulares e apoiado, também, no teorema de Hipócrates sobre as áreas dos círculos acima citado.

Sejam OAB e OCD setores circulares (ver figura 2.9), de forma que:

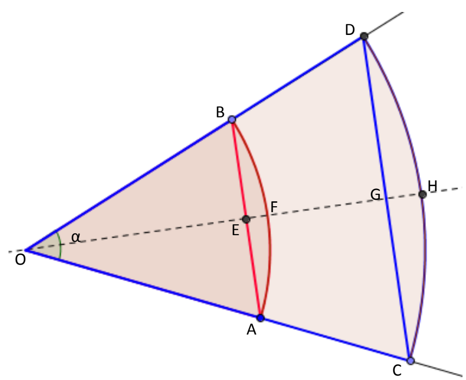


Figura 2.9: Segmentos e setores circulares.

- OAB é limitado pelas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$, referente ao ângulo α, em graus. Corresponde à adição do segmento circular que está compreendido entre a corda $\overline{AB}$ e o arco $\overset{\frown}{AB}$ com o triângulo OAB.

- OCD é limitado pelas semi-retas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ e pelo arco $\overset{\frown}{CD}$, também referente ao ângulo α, em graus. Corresponde à adição do segmento circular que está compreendido entre a corda $\overline{CD}$ e o arco $\overset{\frown}{CD}$ com o triângulo OCD.

Sejam A_1 a área do setor circular OAB, de raio r e A_2 a área do setor OCD, de raio R. Então:

$A_1 = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^o}$ e $A_2 = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360^o}$, o que leva a $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{r^2}{R^2}$

Mas pela semelhança dos triângulos temos: $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{CD}$, logo $\dfrac{r}{R} = \dfrac{AB}{CD}$, consequentemente, $\dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{AB^2}{CD^2}$, do que podemos concluir que $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{AB^2}{CD^2}$, ou seja: se A_1 e A_2 são as áreas dos setores circulares OAB e OCD então a razão $\dfrac{AB^2}{CD^2}$ é também a razão entre as áreas dos triângulos OAB e OCD (*) e também entre as áreas dos correspondentes segmentos circulares de cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (**).

Sejam, agora, T_1 a área do triângulo OAB e T_2 a área do triângulo OCD.

$T_1 = 2 \cdot \dfrac{AE \cdot OE}{2}$, mas como $AE = OA \cdot sen(\frac{\alpha}{2})$ e $OE = OA \cdot cos(\frac{\alpha}{2})$, então $T_1 = r \cdot sen(\frac{\alpha}{2}) \cdot r \cdot cos(\frac{\alpha}{2})$, o que leva a $T_1 = r^2 \cdot sen(\frac{\alpha}{2}) \cdot cos(\frac{\alpha}{2})$ e

$T_2 = 2 \cdot \dfrac{CG \cdot OG}{2}$, mas como $CG = OC \cdot sen(\frac{\alpha}{2})$ e $OG = OC \cdot cos(\frac{\alpha}{2})$, então $T_2 = R \cdot sen(\frac{\alpha}{2}) \cdot R \cdot cos(\frac{\alpha}{2})$, o que leva a $T_2 = R^2 \cdot sen(\frac{\alpha}{2}) \cdot cos(\frac{\alpha}{2})$.

Logo $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{AB^2}{CD^2}$, como afirmado em (*).

Sejam, agora, S_1 a área do segmento circular compreendido entre a corda $\overline{AB}$ e o arco $\overset{\frown}{AB}$ e S_2 a área do segmento circular compreendido entre a corda $\overline{CD}$ e o arco $\overset{\frown}{CD}$. Sabendo que $S_1 = A_1 - T_1$ e $S_2 = A_2 - T_2$, então

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^o} - r^2 \cdot sen(\frac{\alpha}{2}) \cdot cos(\frac{\alpha}{2})}{\dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha}{360^o} - R^2 \cdot sen(\frac{\alpha}{2}) \cdot cos(\frac{\alpha}{2})} = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\dfrac{\pi \cdot \alpha}{360^o} - sen(\frac{\alpha}{2}) \cdot cos(\frac{\alpha}{2})}{\dfrac{\pi \cdot \alpha}{360^o} - sen(\frac{\alpha}{2}) \cdot cos(\frac{\alpha}{2})},$$

ou, simplesmente, $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{AB^2}{CD^2}$, como afirmado em (**).

Essas considerações são fundamentais para compreender o raciocínio de Hipócrates a respeito das áreas das lúnulas quadráveis.

2.6.1 1º exemplo: Lúnulas cujas cordas são os catetos de um triângulo retângulo isósceles

O primeiro exemplo estudado por Hipócrates trata da quadratura das lúnulas cujas cordas são os catetos de um triângulo retângulo isósceles, segundo Galvão e Souza [10].

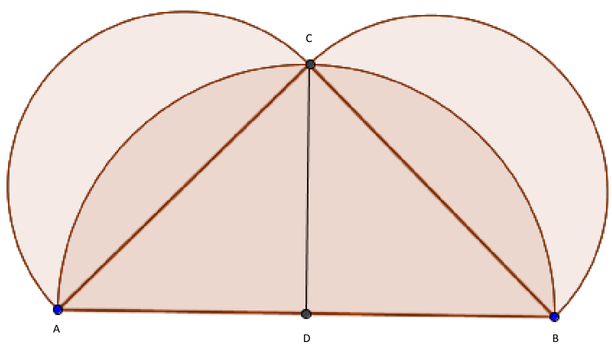


Figura 2.10: Lúnulas de Hipócrates construídas sobre os catetos de um triângulo retângulo isósceles.

A estratégia de Hipócrates para calcular a área destas lúnulas é baseada na igualdade de áreas (Galvão e Souza, p. 21) [10]. Consideremos os semicírculos menores (veja a figura 2.10 onde as lúnulas aparecem em tom mais claro de cinza), cuja área chamaremos A_1. Os diâmetros desses semicírculos são os catetos do triângulo retângulo isósceles ABC. A área do triângulo ABC chamaremos A_T. A área total da figura 2.10, assim formada, é $2A_1 + A_T$. Consideremos agora o semicírculo maior, de diâmetro $\overline{AB}$, cuja área chamaremos A_2.

A área das lúnulas, cuja soma chamaremos $2A$, será a diferença entre $2A_1 + A_T$ e A_2.

Porém, $A_2 = 2A_1$, então, $2A = A_2 + A_T - A_2$, ou seja, $2A = A_T$, portanto a área de cada lúnula é igual à metade da área do triângulo ABC.

O ponto de partida para as quadraturas a seguir é a construção de um trapézio isósceles cuja base menor seja congruente aos lados não paralelos. Para esta construção, devemos:

Dados um segmento de reta e um ângulo

- traçar a reta r suporte da base maior;

- denotar um ponto da reta por A;

- traçar uma circunferência com centro em A cujo raio tenha a mesma medida do segmento dado;

- transportar o ângulo dado, fazendo coincidir seu vértice com o ponto A e um dos lados sobre a reta r;

- prolongar o outro lado do ângulo até encontrar o ponto de concorrência com a circunferência traçada e denotar este ponto por B;

- traçar a reta s paralela a r por B;

- traçar outra circunferência de raio igual à medida AB, encontrando assim o ponto C sobre s;

- traçar outra circunferência de mesmo raio e com centro em C e denotar o ponto de concorrência com a reta r por D;

- temos, assim, o trapézio $ABCD$, cujos lados não paralelos são congruentes à base menor, por construção.

Um dado importante: o ângulo de construção dado define o tipo de lúnula a ser construída tendo o trapézio $ABCD$ como referência. Se o ângulo da base medir 60^o, a base maior coincidirá com o diâmetro da circunferência em que o trapézio $ABCD$ está inscrito, remontando ao 1^o caso, descrito na seção 2.6.1, página 16. Se o ângulo da base medir mais que 60^o, teremos o segundo caso de quadratura, seção 2.6.2, página 17, em que o arco exterior é maior que uma semicircunferência. Se o ângulo da base medir menos que 60^o, teremos o terceiro caso de quadratura, seção 2.6.3, página 19, em que o arco exterior é menor que uma semicircunferência.

2.6.2 2º exemplo: Lúnulas em que o arco exterior é maior que uma semicircunferência.

Na sequência de seu trabalho, Hipócrates exibiu dois exemplos de lúnulas, cuja quadratura pode ser descrita com argumentos semelhantes aos acima expostos. No primeiro deles, o arco exterior é maior do que uma semicircunferência e, no segundo, menor [10].

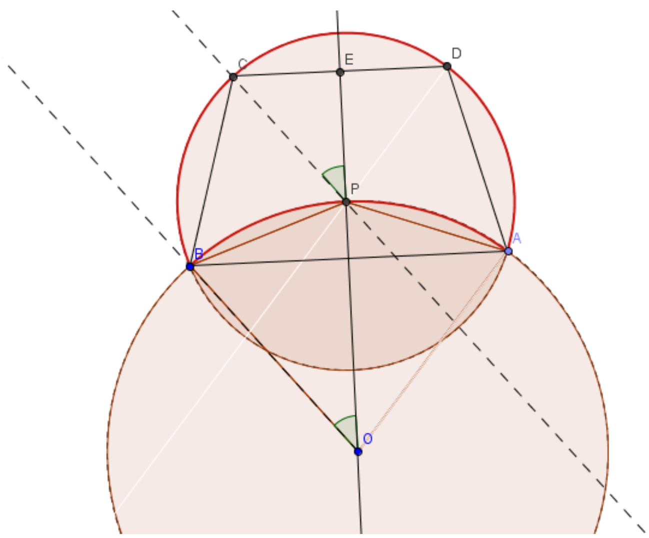


Figura 2.11: Lúnula de Hipócrates cujo arco exterior é maior que uma semicircunferência.

Se o arco exterior é maior que uma semicircunferência (figura 2.11), dividamos este arco em três outros, congruentes que correspondem a ângulos centrais congruentes ao ângulo do arco inferior ($A\hat{O}B$). A solução parte de um trapézio isósceles cuja base menor é congruente aos lados não paralelos [10].

Considere o trapézio isósceles $ABCD$[2], tal que a base menor seja congruente aos lados não paralelos, ou seja, $\overline{AD} \equiv \overline{DC} \equiv \overline{CB}$.

Hipócrates admitiu, por hipótese, que $AB^2 = 3BC^2$ e que os ângulos $E\hat{P}C$ e $E\hat{O}B$ são congruentes (Galvão e Souza, p.22) [10]. Daí segue-se que, se A é a área da lúnula, A_T é a área do trapézio, A_1 é a área do segmento circular correspondente à corda $\overline{AB}$ e A_2 é a área do segmento circular correspondente à corda $\overline{BC}$ (ou $\overline{AD}$ ou $\overline{CD}$), então, $A_1 = 3A_2$. Temos: $A = A_T + 3A_2 - A_1$ de onde se conclui que $A = A_T$, o que significa que a área da lúnula é igual à área de um polígono, no caso o trapézio $ABCD$, e portanto, é quadrável.

[2]Trapézio é um quadrilátero em que dois lados são paralelos - as bases - e os outros dois são chamados laterais. Um trapézio é isósceles quando suas laterais são congruentes (conforme Rezende e Queiroz, p.71) [16].

2.6.3 3º exemplo: Lúnulas em que o arco exterior é menor que uma semicircunferência.

O terceiro tipo de lúnula estudado por Hipócrates explora o caso em que o arco externo é menor do que uma semicircunferência.

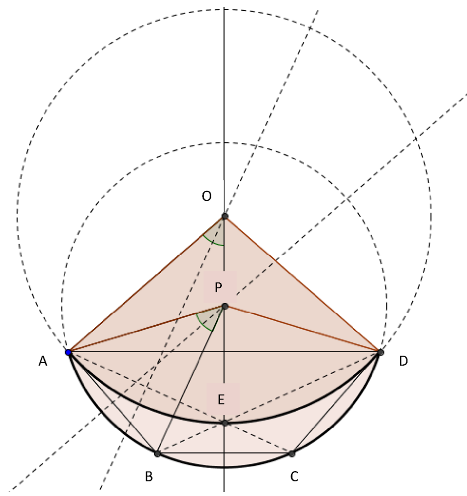


Figura 2.12: Lúnula de Hipócrates cujo arco exterior é menor que uma semicircunferência.

Hipócrates partiu de um trapézio isósceles cuja base menor é congruente aos lados não paralelos, conforme figura 2.12. O arco interno fica dividido em dois arcos congruentes pelo ponto de encontro das diagonais do trapézio, e o arco externo fica dividido em três arcos congruentes, cujas cordas são os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. Por construção, todos os arcos em ambas as circunferências correspondem a um mesmo ângulo central (Galvão e Souza, p. 23) [10].

Da construção temos que: $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD}$, assim o arco $\overset{\frown}{AD}$, de centro P fica dividido em 3 arcos congruentes: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CD}$. (1)

As diagonais do trapézio $ABCD$ se intersectam em E, então, $\overline{AE} \equiv \overline{ED}$, logo o arco $\overset{\frown}{AD}$ de centro O fica dividido em 2 arcos congruentes: $\overset{\frown}{AE}$ e $\overset{\frown}{ED}$. (2)

Como $A\hat{O}E \equiv A\hat{P}B$, consideremos A_1 a área do segmento circular cuja corda é $\overline{AB}$ e A_2 a área do segmento circular cuja corda é $\overline{AE}$. De (1) e (2) temos que $2A_1 = 3A_2$. (3)

Sejam A_P a área do pentágono $ABCDE$ e A a área da lúnula, $A = A_P + 3A_2 - 2A_1$. De (3) obtemos $A = A_P$, do que se conclui que a área da lúnula é igual à área do pentágono $ABCDE$, portanto, a lúnula é quadrável.

2.7 O cálculo da área do círculo pelo método de Arquimedes.

Proposição I do livro de Arquimedes (segundo Heath, p.91) [11]:

"A área de qualquer círculo é igual à de um triângulo retângulo em que um dos catetos tem a mesma medida do raio do círculo e o outro é igual à circunferência do círculo".

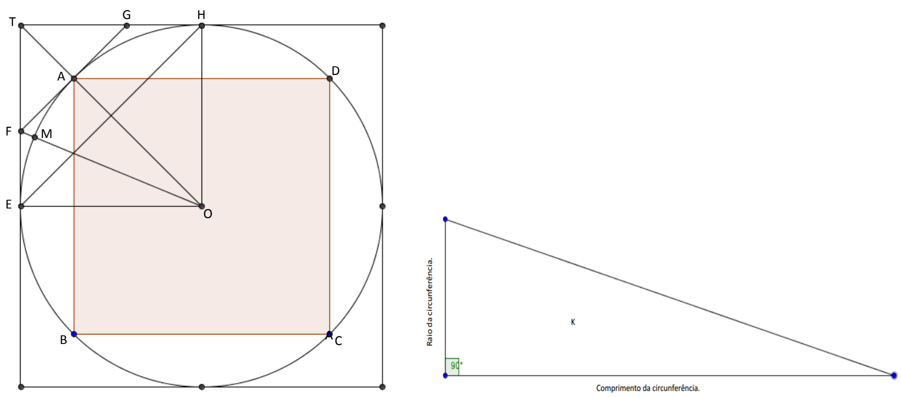


Figura 2.13: Área do círculo equivalente à do triângulo, por Arquimedes.

Demonstraremos, por exaustão, (segundo Heath, p. 91-93) [11], que o círculo C de centro O (à esquerda, na figura 2.13) tem a mesma área do triângulo K (à direita, na figura 2.13).

Se a área do círculo C não é igual à área de K, deve ser maior ou menor.

I- Suponhamos que a área do círculo C seja maior que a área do triângulo retângulo K.

Inscrevamos o quadrado $ABCD$ (ver figura 2.13, na página 20), no círculo, bissectemos os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{DA}$, então, bissectemos suas metades e, assim, sucessivamente, até que os lados do polígono inscrito, cujos vértices são os pontos de divisão, subtendam segmentos cuja soma seja menor que o excesso da área do círculo sobre a área de K.

Então a área desse polígono é maior que a área de K (*).

Sejam $\overline{AE}$ um lado do polígono e $\overline{OM}$ o segmento perpendicular sobre $\overline{AE}$, passando pelo centro O.

Então OM é menor que o raio do círculo e portanto menor que qualquer lado sobre o ângulo reto de K. Também o perímetro do polígono é menor que a circunferência do círculo, isto é, menor que qualquer outro lado sobre o ângulo reto de K.

Portanto a área do polígono é menor que a área de K, o que contraria (*), logo, a área do círculo não é maior que a área de K.

II- Suponhamos que a área do círculo C seja menor que a área do triângulo retângulo K.

Circunscrevamos um quadrado ao círculo C, conforme figura 2.13, e façamos com que dois lados adjacentes o tangenciem em E e H, encontrando-se em T. Agora bissectemos os arcos entre pontos consecutivos e tracemos as retas tangentes ao círculo C pelos pontos de bisseccção. Sejam A, o ponto médio do arco $\overset{\frown}{EH}$ e $\overline{FG}$ o segmento tangente a C em A.

Então o ângulo $T\hat{A}G$ é um ângulo reto.

Portanto, $TG > GA$, e consequentemente $TG > GH$.

Segue que a área do triângulo FTG é maior que metade da área do polígono $TEAH$.

Do mesmo modo, se o arco $\overset{\frown}{AH}$ for bissectado e a reta tangente nesse ponto de bissecção for construída, será retirado da área de GAH mais que a metade.

Assim, ao continuar o processo, que deve, em última análise chegar a um polígono circunscrito, tal que os espaços interceptados entre ele e o círculo sejam menores do que o excesso da área de K sobre a área do círculo.

Então, a área deste polígono é menor que a área de K (**).

Agora, uma vez que a perpendicular a partir de O em qualquer dos lados do polígono é igual ao raio do círculo, enquanto que o perímetro do polígono é maior do que a circunferência do círculo, segue que a área do polígono é maior que a área do triângulo K, o que é impossível, por (**).

Portanto a área do círculo C não é menor que a área de K.

Se a área do círculo C não é maior nem menor que a área de K, tem que ser igual à área de K.

2.8 Aproximações do número π pelo método de Arquimedes.

Proposição 3 do livro I de Arquimedes (segundo Heath, p. 93-98) [11]:

“A razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro é menor que $3\frac{1}{7}$ e maior que $3\frac{10}{71}$”.

É necessário ressaltar que, de acordo com Heath (p. 93) [11], esclarecimentos adicionais foram incorporados à demonstração original de Arquimedes, como segue. “Tendo em vista questões interessantes decorrentes do conteúdo aritmético desta proposição de Arquimedes, é necessário, em reproduzi-lo, para distinguir cuidadosamente os passos reais previstos no texto como o temos, dos passos intermediários (na sua maioria fornecidos por Eutocius) que é conveniente para o propósito de tornar a prova mais fácil de seguir. Assim, todos os passos, que na verdade, não aparecem no texto foram colocados entre colchetes, a fim de que possa ser visto claramente o quanto Arquimedes omite cálculos reais e só dá resultados. Observa-se que ele dá duas aproximações para a $\sqrt{3}$ (sendo uma delas menor e a outra maior), sem qualquer explicação de como chegou a elas; e em como chegou a aproximações das raízes quadradas de vários números que não são quadrados perfeitos”.

I) “A razão da circunferência de qualquer círculo pelo seu diâmetro é menor que $3\frac{1}{7}$”.

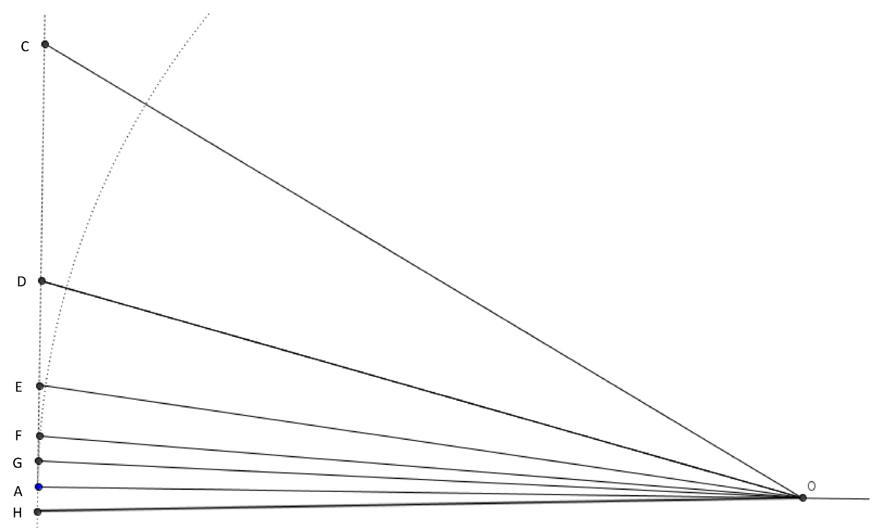


Figura 2.14: Esquema da demonstração por polígonos circunscritos.

Demonstração, segundo Heath (p.93-96):

Seja $\overline{AB}$ o diâmetro de um círculo qualquer, O seu centro, $\overline{AC}$ o segmento tangente ao círculo em A e seja o ângulo $\angle A\hat{O}C$, um terço do ângulo reto como na figura 2.14.

Então: $\dfrac{AO}{AC}$[3] $[=\sqrt{3}:1] > \dfrac{265}{153}$ (Conforme observado na página 22) (1)

e $\dfrac{OC}{CA}[= 2 : 1] = \dfrac{306}{153}$ (2)

Primeiro passo: tracemos $\overline{OD}$, bisseccionando o ângulo $\angle A\hat{O}C$ e encontrando $\overline{AC}$ em D.

Então $\dfrac{CO}{AO} = \dfrac{CD}{DA}$ [Conforme Euclides, VI, 3]

Daí $\left[\dfrac{CO+AO}{AO} = \dfrac{CA}{DA}\right]$ ou

$$\frac{CO+AO}{CA} = \frac{AO}{AD}$$

Portanto, [por (1) e (2)] $\dfrac{OA}{AD} > \dfrac{571}{153}$ (3)

Então: $\dfrac{OD^2}{AD^2}\left[= \dfrac{OA^2+AD^2}{AD^2} > \dfrac{571^2+153^2}{153^2}\right] > \dfrac{349450}{23409}$

E assim $\dfrac{OD}{DA} > \dfrac{591\frac{1}{8}}{153}$ (4)

Segundo passo: seja $\overline{OE}$ a bissetriz do ângulo $\angle A\hat{O}D$, encontrando $\overline{AD}$ em E.

[Então: $\dfrac{DO}{OA} = \dfrac{DE}{EA}$, logo $\dfrac{DO+OA}{DA} = \dfrac{OA}{AE}$].

Portanto $\dfrac{AO}{AE}\left[> \dfrac{591\frac{1}{8}+571}{153} \text{por (3) e (4)}\right] > \dfrac{1162\frac{1}{8}}{153}$ (5),

[Segue, então, que $\dfrac{OE^2}{EA^2} > \dfrac{(1162\frac{1}{8})^2+153^2}{153^2} > \dfrac{1350534\frac{33}{64}+23409}{23409} > \dfrac{1373943\frac{33}{64}}{23409}$]

então $\dfrac{OE}{EA} > \dfrac{1172\frac{1}{8}}{153}$ (6)

Terceiro passo: seja $\overline{OF}$ a bissetriz do ângulo $\angle A\hat{O}E$ e encontrando $\overline{AE}$ em F. Obtemos assim o resultado [o que corresponde a (3) e (5) acima] que

$\dfrac{OA}{AF}\left[> \dfrac{1162\frac{1}{8}+1172\frac{1}{8}}{153}\right] > \dfrac{2334\frac{1}{4}}{153}$ (7)

[3] Em todo seu raciocínio, Heath usa a notação "$AO : AC$" ao indicar divisões. Optamos por grafar em forma de fração, para evitar dúvidas do tipo "$CO + AO : AO$"

logo $\quad \dfrac{OF^2}{FA^2} > \left[\dfrac{(2334\frac{1}{8})^2 + 153^2}{153^2} > \dfrac{5472132\frac{1}{16}}{23409}\right].$

então $\dfrac{OF}{FA} > \dfrac{2339\frac{1}{4}}{153}$ (8)

Quarto passo: seja $\overline{OG}$ a bissetriz do ângulo $\angle A\hat{O}F$, encontrando $\overline{AF}$ em G.

Temos, $\dfrac{OA}{AG}\left[> \dfrac{2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4}}{153}, \text{[10]por meio de (7) e (8)}\right] > \dfrac{4673\frac{1}{2}}{153}.$

Conclusão: o ângulo $\angle A\hat{O}C$, que é $\frac{1}{3}$ do ângulo reto, foi bisseccionado 4 vezes e segue que o ângulo $\angle A\hat{O}G$ mede $\frac{1}{48}$ do ângulo reto.

Seja o ponto A, simétrico ao ponto G com relação à reta suporte de AO. Então os ângulos $\angle A\hat{O}G$ e $\angle A\hat{O}H$ são congruentes e o ângulo $\angle G\hat{O}H$ é igual a $\frac{1}{24}$ do ângulo reto.

Logo $\overline{GH}$ é um dos lados do polígono regular de 96 lados circunscrito ao círculo dado.

E se $\quad \dfrac{OA}{AG} > \dfrac{4673\frac{1}{2}}{153}$

e como $\quad AB = 2 \cdot OA,\, GH = 2 \cdot AG,$

daí segue que $\dfrac{AB}{\text{Perímetro do polígono de 96 lados}}\left[> \dfrac{4673\frac{1}{2}}{153 \cdot 96}\right] > \dfrac{4673\frac{1}{2}}{14688}$

mas $\quad \dfrac{14688}{4673\frac{1}{2}} = \dfrac{3 + 667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}\left[< \dfrac{3 + 667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}\right] < 3\dfrac{1}{7}.$

Portanto o comprimento da circunferência do círculo (sendo menor que o perímetro do polígono circunscrito) é, $a\, fortiori$, menor que $3\dfrac{1}{7}$ vezes o diâmetro $\overline{AB}$.

II) “A razão do comprimento da circunferência de qualquer círculo pelo seu diâmetro é maior que $3\frac{10}{71}$”.

Demonstração, segundo Heath (p.96-98):

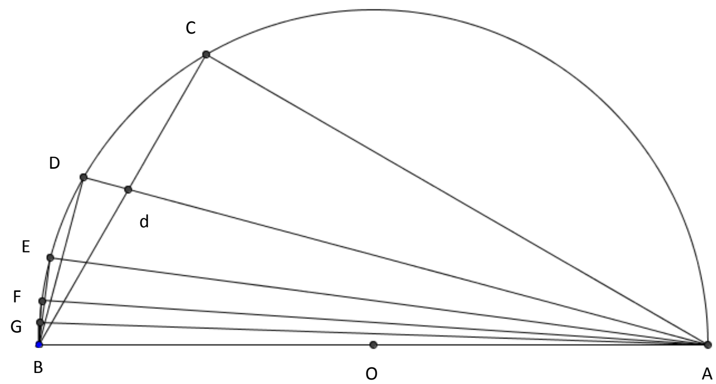


Figura 2.15: Esquema da demonstração por polígonos inscritos.

Agora, seja $\overline{AB}$ o diâmetro de um círculo (ver figura 2.15) e $\overline{AC}$ concorrendo com a circunferência em C, tal que o ângulo $\angle C\hat{A}B$ seja igual a um terço do ângulo reto. Liguemos B a C.

Então: $\dfrac{AC}{CB}\left[=\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right]<\dfrac{1351}{780}$ (Conforme observado na página 22).

Primeiro passo: seja $\overline{AD}$ a bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}C$ concorrendo com $\overline{BC}$ em d e com o círculo em D. Ligar B a D.

Então $\angle B\hat{A}D \equiv \angle d\hat{A}C \equiv \angle d\hat{B}D$, e os ângulos dos vértices $\angle B\hat{D}A$ e $\angle B\hat{C}A$ são ambos retos.

Segue que os triângulos ADB, $[ACd]$ e BDd são semelhantes.

Portanto $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{BD}{Dd}\left[=\dfrac{AC}{Cd}\right]=\dfrac{AB}{Bd}$ [Euclides VI, 3]

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AB+AC}{Bd+Cd}=\frac{AB+AC}{BC}$$

ou $\dfrac{BA+AC}{BC}=\dfrac{AD}{DB}$

$$\left[\text{mas} \quad \frac{AC}{CB}=\frac{1351}{780} \qquad \text{enquanto} \quad \frac{BA}{BC}=\frac{2}{1}=\frac{1560}{780}\right].$$

$$\text{Portanto} \qquad \frac{AD}{DB}=\frac{2911}{780} \tag{1}$$

$$\left[\text{Então} \quad \frac{(AB)^2}{(BD)^2} = \frac{2911^2 + 780^2}{780^2} = \frac{9082321}{608400^2}\right].$$

$$\text{Então} \qquad \frac{AB}{BD} = \frac{3013\frac{3}{4}}{780}. \tag{2}$$

Segundo passo: Seja $\overline{AE}$ a bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}D$, concorrendo com a circunferência em E. Liguemos B a E.

Então, nós provamos, do mesmo modo que $\dfrac{AE}{EB}\left[= \dfrac{BA + AD}{BD} < \dfrac{3013\frac{3}{4} + 2911}{780}, \quad \text{por (1) e (2)}\right]$.

$$\frac{AE}{EB} = \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{5924\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{13}}{780 \cdot \frac{4}{13}} = \frac{1823}{240} \tag{3}$$

$$\left[\text{Então} \frac{(AB)^2}{(BE)^2} = \frac{1823^2 + 240^2}{240^2} = \frac{3380929}{576000}\right].$$

$$\text{Portanto } \frac{AB}{BE} = \frac{1838\frac{9}{11}}{240}. \tag{4}$$

Terceiro passo: seja $\overline{AF}$ a bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}E$, concorrendo com a circunferência em F.

$$\text{Assim, } \frac{AF}{FB}\left[= \frac{BA + AE}{BE} < \frac{3661\frac{9}{11}}{240} \qquad \text{por (3) e (4)}\right]$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{3661\frac{9}{11} \cdot \frac{11}{40}}{240 \cdot \frac{11}{40}} = \frac{1007}{66} \tag{5}$$

$$\left[\text{Segue então,} \frac{(AB)^2}{(BF)^2} = \frac{1007^2 + 66^2}{66^2} = \frac{1018405}{4356} \qquad \right],$$

$$\text{portanto} \qquad \frac{AB}{BF} = \frac{1009\frac{1}{6}}{66}. \tag{6}$$

Quarto passo: seja $\overline{AG}$ a bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}F$, concorrendo com a circunferência em G.

$$\text{Então} \qquad \frac{AG}{GB}\left[= \frac{BA + AF}{BF}\right] < \frac{2016\frac{1}{6}}{66} \text{ de (5) e (6).}$$

$$\left[\text{e} \quad \frac{(AB)^2}{(BG)^2} = \frac{(2016\frac{1}{6})^2 + 66^2}{66^2} = \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356}\right]$$

$$\text{Portanto} \qquad \frac{AB}{BG} = \frac{2017\frac{1}{4}}{66},$$

logo $\quad \dfrac{BG}{AB} = \dfrac{66}{2017\frac{1}{4}}.$ (7)

[Agora, o ângulo $\angle B\hat{A}G$, que é resultado da quarta bissecção do ângulo $\angle B\hat{A}C$, que é $\frac{1}{3}$ do ângulo reto, é igual a $\frac{1}{48}$ do ângulo reto.

Então o ângulo subtendido por $\overline{BG}$ ao centro é $\frac{1}{24}$ (do ângulo reto)].

Portanto $\overline{BG}$ é o lado do polígono regular de 96 lados.

De (7) segue que

$$\frac{\text{Perímetro do polígono}}{AB} \left[> 96 \cdot \frac{66}{2017\frac{1}{4}}\right] > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}.$$

Como, $\dfrac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\dfrac{10}{71}$ e $\dfrac{\text{comprimento da circunferência do círculo}}{AB}$ é maior que $\dfrac{\text{perímetro do polígono}}{AB}$, então o comprimento da circunferência do círculo é maior do que $3\frac{10}{71}$ vezes seu diâmetro.

Capítulo 3

Uma proposta de atividades para sala de aula.

Nesse capítulo vamos propor atividades, para a sala de aula de Matemática, de construção com o uso de régua não graduada e compasso de forma a aproximar o mais possível da técnica de construções geométricas usada pelos gregos, conforme proposto no capítulo 1 dessas notas, evidenciando o uso da História da Mastemática no Ensino de Matemática.

As atividades de construção geométrica foram pensadas como uma evolução a partir da apresentação dos materiais de desenho aos alunos, de forma que se familiarizem com sua manipulação e com os termos associados ao assunto. Pensando em desenvolvimento e aprimoração da coordenação motora, é necessário uma exposição da técnica de transposição de segmentos, sua multiplicação e divisão por um número inteiro e construção e transposição de ângulos dados. As construções apresentadas exigem, também, que o aluno esteja familiarizado com o traçado de retas paralelas e perpendiculares, por um ponto na reta dada ou fora dela e de retas mediatrizes de um segmento de reta dado. Todas essas construções são apresentadas por Rezende e Queiroz [16].

Na construção de uma figura, é sempre conveniente fazer seu esboço, supondo o problema resolvido, segundo Wagner (Prefácio, página 2) [20].

Todas as atividades podem ser desenvolvidas no oitavo ano do Ensino Fundamental II, de modo sequencial, de forma a paulatinamente construir um caminho a partir da construção de um triângulo até atingir o conceito de quadratura e posteriormente, com auxílio do Teorema de Pitágoras, adaptar o método de Arquimedes para a obtenção de aproximações do número π.

Uma outra sugestão é utilizar essa sequência de atividades para iniciar o ano letivo do nono ano, a título de revisão e aprofundamento dos conceitos vistos no ano anterior.

Todas as atividades incluem orientações para o professor.

3.1 Construção de um triângulo dados três segmentos.

Objetivo: construir um triângulo dados três segmentos de reta, usando régua não graduada e compasso.

Nome: n^o: série:

FOLHA DE ATIVIDADE

Para esta atividade você precisará de lápis, régua não graduada e compasso.

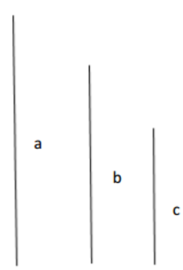
Atente para os termos empregados e solicite auxílio sempre que necessitar de esclarecimento.

Siga corretamente, e na ordem, os passos sugeridos.

Esta construção que você vai executar é básica para compreender e acompanhar o método usado pelos antigos gregos. Construções com régua e compasso eram muito comuns e constituíam desafios, como o que será solicitado a você ao final da atividade. Euclides, em seu livro Os Elementos, apresenta essas construções no Livro I, Proposições 20 e 22.

Procedimentos:

São dados os segmentos de reta, de medidas a, b e c.



a) Trace uma linha reta r em qualquer posição dessa folha.

b) Transporte, com o compasso, o segmento de medida a, sobre a reta r. Denote suas extremidades por pontos: B e C.

c) Transporte, com o compasso, o segmento de medida b, fazendo com que a ponta seca incida sobre C e trace uma circunferência, cujo raio mede b.

d) Transporte, com o compasso, o segmento de medida c, fazendo com que a ponta seca incida sobre B e trace um circunferência, cujo raio mede c.

e) Repare que as duas circunferências são concorrentes em dois pontos distintos: um acima da reta r e outro abaixo. Escolha um dos pontos de concorrência das circunferências e denote-o por A.

f) Una os pontos A com B e A com C, formando assim o triângulo ABC.

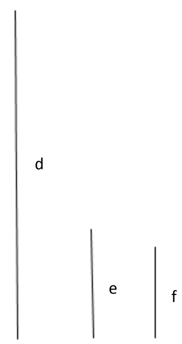
Responda:

1- É possível, usando transporte das medidas dos segmentos, mostrar que a figura forma um triângulo?

2- Use as medidas dos três novos segmentos abaixo e siga os mesmos passos do procedimento indicado para construir o triângulo DEF.

3- O que ocorreu durante a construção do triângulo DEF?

4- Qual conclusão pode ser tomada com a comparação das duas atividades?



ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

A construção do triângulo ABC, deve ser compreendida como uma experiência de construção de um triângulo com os segmentos dados na página 31. Esta atividade é importante para preparar os alunos no caminho do uso da História da Matemática no Ensino de Matemática, como proposto no capítulo 1 e como preparação para as atividades inspiradas na teoria apresentada no capítulo 2 dessas notas.

Os alunos devem conhecer os procedimentos de transporte de segmentos e traçado de circunferências para executar essa atividade.

A formação de grupos com até três participantes favorece a discussão a respeito dos motivos pelos quais não se consegue fazer a segunda construção. Torna-se interessante investigar essas causas e estabelecer, com as próprias palavras dos alunos, um critério que permita a construção de triângulos dados três segmentos.

Esta atividade é para que o aluno possa verificar que nem sempre, dados três segmentos, existe um triângulo cujos lados são os segmentos dados, constatação que permite discutir o teorema de desigualdade triangular. Ver Os Elementos, de Euclides, Livro I, Proposições 20 e 22, (p.112 e 114) [5].

Na sequência dessa atividade, que foi aplicada também para os sétimos anos, aconselha-se explorar outras construções de triângulos. Utilizando os mesmos segmentos dados podem-se construir triângulos equiláteros e isósceles, o que ajuda a melhorar a destreza no uso dos instrumentos. A construção do triângulo equilátero é encontrada no Livro I, Proposiçao 1, de Euclides, página 99 [5].

3.2 Construção de um quadrado usando régua não graduada e compasso.

Objetivo: construir um quadrado, com régua não graduada e compasso, sendo dado um segmento de reta.

Nome: n^{o}: série:

FOLHA DE ATIVIDADE

Para esta atividade você precisará de lápis, régua não graduada e compasso.

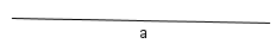
Atente para os termos empregados e solicite auxílio sempre que necessitar de esclarecimento.

Siga corretamente, e na ordem, os passos sugeridos.

A construção de um quadrado, usando régua não graduada e compasso é descrita em Os Elementos de Euclides, Livro I, Proposição 46. Será necessário, nesta construção, traçar uma reta perpendicuar à reta dada, por um ponto dado, pertencente a esta reta. Tal construção aparece no Livro I, Proposição 11.

Procedimentos:

Dado o segmento de reta de medida a



a) Trace a reta r em qualquer posição da folha.

b) Transporte o segmento dado, usando o compasso, sobre a reta r. Denote suas extremidades por A e B.

c) Trace a reta s, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, por A.

d) Trace a reta t, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, por B.

e) Desenhe uma circunferência de raio AB com centro em A.

f) Denote por D o ponto de concorrência da circunferência com a reta s.

g) Desenhe uma circunferência de raio BA com centro em B.

h) Denote por C o ponto de concorrência da circunferência com a reta t.

i) Ligue, com a régua, os pontos C e D, formando o quadrado $ABCD$.
j) Prove que $ABCD$ é um quadrado.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

A atividade exige que o aluno execute todos os passos descritos na ordem, sendo necessário o acompahamento, por parte do professor.

É comum o aluno necessitar de orientação, como revisão, sobre o traçado de uma reta perpendicular a um segmento dado, por um ponto do segmento, conforme Euclides, Livro I, Proposição 11, página 106 [5] e do traçado da mediatriz de um segmento dado.

De acordo com o capítulo 2, na Grécia Antiga, quadrar uma figura significava encontrar um quadrado equivalente à figura dada, usando régua não graduada e compasso. Assim, a construção de um quadrado, conforme Euclides, Livro I, Proposição 46, página 134 [5], é requisito primordial para as quadraturas que serão feitas nas atividades 3.4, página 41 e 3.5, página 45.

Os passos a seguir são uma sugestão de justificativa para o fato de $ABCD$ ser um quadrado:

a) O segmento $\overline{AB}$ tem medida a.

b) As retas s e t são perpendiculares a $\overline{AB}$.

c) O lado $\overline{AD}$, por construção, tem medida a e é perpendicular a $\overline{AB}$.

d) O lado $\overline{BC}$, por construção, tem medida a e é perpendicular a $\overline{AB}$.

e) Em consequência de (c) e (d), $\overline{CD}$ é paralelo a $\overline{AB}$, logo $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

e) $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$. Assim $ABCD$ é um quadrado.

3.3 Construção de um retângulo de área igual à de um triângulo dado.

Objetivo: construir um retângulo, usando régua não graduada e compasso, cuja área seja igual à de um triângulo dado.

Nome: $n^{\underline{o}}$: série:

FOLHA DE ATIVIDADE

Para esta atividade você precisará de lápis, régua não graduada e compasso.

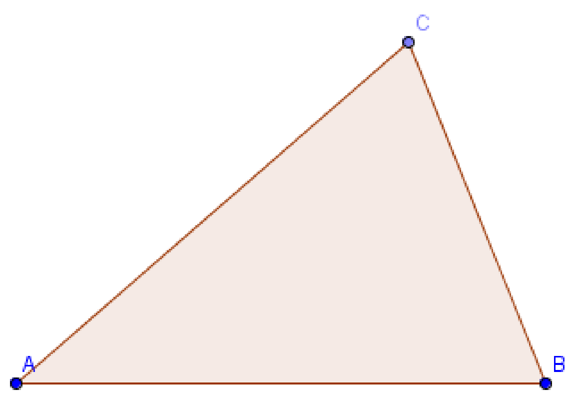
Atente para os termos empregados e solicite auxílio sempre que necessitar de esclarecimento.

Siga corretamente, e na ordem, os passos sugeridos.

Os antigos gregos já conheciam esta construção, conforme vem descrita em Os Elementos de Euclides, Livro VI, Proposição I. A equivalência entre figuras planas era muitíssimo importante no cálculo de áreas e de volumes.

Procedimentos:

Dado o triângulo ABC abaixo:



a) Trace a reta r suporte do lado $\overline{AB}$.

b) Trace três retas perpendiculares a $\overline{AB}$, s, t e u, passando respectivamente por A, B e C.

c) Marque o ponto H, pé da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{AB}$.

d) Trace a mediatriz m da altura $\overline{CH}$.

e) Denote os pontos de concorrência da mediatriz m com as perpendiculares s e t, respectivamente como E e D.

Depois de pronto o desenho, reflita e responda:

1- Escreva a expressão que permite calcular a área do triângulo ABC.

2- Escreva a expressão que permite calcular a área do retângulo $ABDE$.

3- Elabore um raciocínio que associe as áreas dos polígonos desenhados para mostrar que são iguais.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

É recomendável aplicar esta atividade logo após a anterior 3.2 - Construção de um quadrado usando régua não graduada e compasso, aproveitando os conceitos empregados. De acordo com a seção 2.2, página 9, esta equivalência é encontrada no livro VI, Proposição 1, página 231 de Os Elementos de Euclides [5].

1- Para o triângulo ABC, o cálculo da área é expresso por $AB \cdot \dfrac{CH}{2}$.

2- A área do retângulo $ABDE$ é dada pela expressão $AB \cdot AE$. Note que $\overline{AE} \equiv \overline{BD}$, logo a expressão também pode ser grafada como $AB \cdot BD$.

3- Com base nas expressões encontradas em (1) e (2), é comum o aluno chegar à conclusão da igualdade entre as áreas do retângulo e do triângulo por já ter notado que $MH = \dfrac{CH}{2}$, logo $AE = MH$, ou, também, que $BD = MH$.

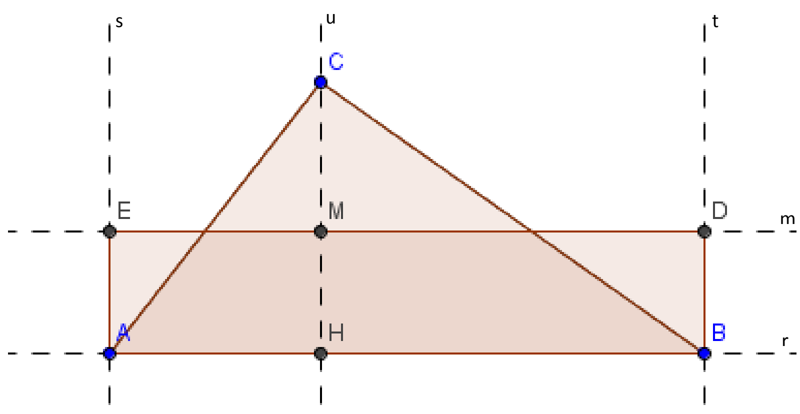


Figura 3.1: Retângulo equivalente a um triângulo dado.

3.4 Quadratura do retângulo

Objetivo: Dado um retângulo, encontrar um quadrado equivalente a ele.
Nome: $n^{\underline{o}}$: série:

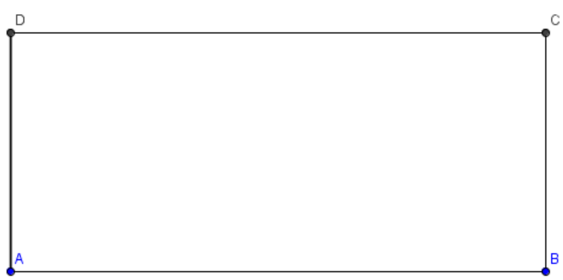
FOLHA DE ATIVIDADE

Para esta atividade você precisará de lápis, régua não graduada e compasso.

Atente para os termos empregados e solicite auxílio sempre que necessitar de esclarecimento.

Os antigos gregos faziam quadraturas com o intuito de tornar mais eficiente o cálculo de áreas de figuras poligonais planas das mais diversas formas. Um conceito muito engenhoso e útil é a média geométrica. Euclides, em seu livro Os Elementos, apresenta esse conceito no Livro VI, Proposição 13.

Siga corretamente, e na ordem, os passos sugeridos.



Procedimentos:

Dado o retângulo $ABCD$:

a) Trace uma circunferência de centro em C e raio CB.

b) Prolongue o lado $\overline{DC}$ e marque o ponto E na intersecção com a circunferência traçada em (a).

c) Marque o ponto médio do segmento $\overline{DE}$ e denote-o por F.

d) Trace uma circunferência com centro em F e raio FE.

e) Trace a reta perpendicular ao diâmetro $\overline{DE}$ passando por C.

f) Marque o ponto I na intersecção dessa reta perpendicular com a circunferência de centro F.

g) Construa o quadrado $CIJH$ a partir do segmento CI.

Após ter o desenho pronto, reflita e responda:

1- Qual é a área do retângulo $ABCD$?

2- Forme um grupo com mais dois colegas e tente demonstrar que o quadrado $CIJH$ tem a mesma área do retângulo $ABCD$.

Dica: Você vai precisar do conceito de semelhança de triângulos.

A quadratura do retângulo é uma preparação para a atividade seguinte (3.5 - Quadratura do triângulo, página 45) e proporciona, aos alunos, a discussão sobre a aplicação da média geométrica, conforme pode ser verificado no capítulo 2, figura 2.1, página 7. A construção de um segmento cuja medida é a média geométrica das medidas dos outros dois, dados, é apresentada em Os Elementos de Euclides, Livro VI, Proposição 13, página 244 [5].

A justificativa teórica desta quadratura é encontrada na seção 2.3, página 10 do capítulo 2 destas notas.

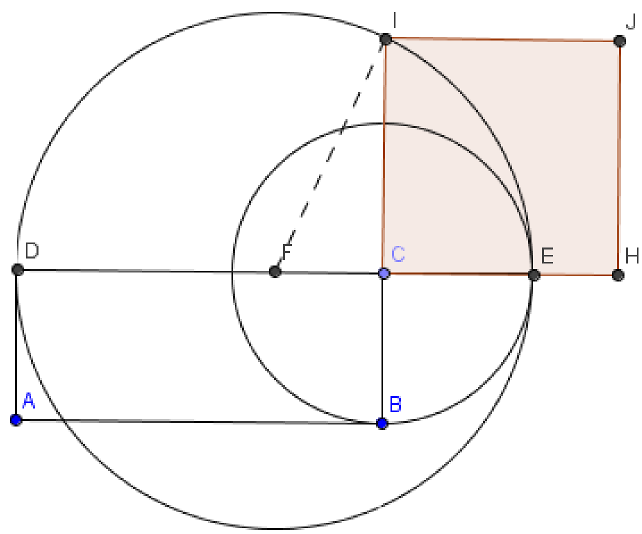


Figura 3.2: Quadratura do retângulo.

As respostas dos alunos tendem a ser intuitivas, na maioria das vezes.

Uma resposta possível, e muito comum: os alunos usam a semelhança de triângulos:

Sabendo que $\Delta CEI \sim \Delta CID$, podemos escrever a proporção $\dfrac{CE}{CI} = \dfrac{CI}{CD}$.

Então, $CI^2 = CE \cdot CD$. Mas $CE = CB$, porque são raios da circunferência de centro C, logo $CI^2 = CB \cdot CD$.

Mas CI^2 é a área do quadrado $CIJH$ e $CB \cdot CD$ é a área do retângulo $ABCD$, logo as duas áreas são iguais.

Outra justificativa possível faz uso de uma das relações métricas no triângulo retângulo, vista no nono ano do Ensino Fundamental II. Ver Rezende e Queiroz, p.154-155 [16].

Imaginando o triângulo retângulo IDE, de hipotenusa $\overline{DE}$ e altura $\overline{IC}$, pode-se usar a relação métrica $h^2 = m \cdot n$, sabendo que h é a altura relativa à hipotenusa e que esta altura divide a base em dois segmentos, m e n.

Seja $h = IC$, $m = CE$ e $n = CD$, então $IC^2 = CD \cdot CB$.

3.5 Quadratura do triângulo

Objetivo: dado um triângulo, encontrar um quadrado equivalente a ele.
Nome: $n^{\underline{o}}$: série:

FOLHA DE ATIVIDADE

Para esta atividade você precisará de lápis, régua não graduada e compasso.

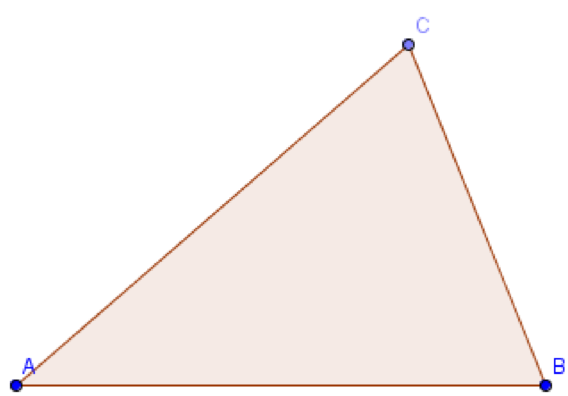
Atente para os termos empregados e solicite auxílio sempre que necessitar de esclarecimento.

Ao chegar a esta atividade, você já executou (e acompanhou a sequência histórica) as atividades 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4. Elas constituem um conjunto de procedimentos que irão auxiliá-lo na execução desta nova atividade e facilitarão suas reflexões em grupo, para justificar suas ações solicitadas ao final. Tenha em mãos as folhas já corrigidas dessas atividades.

Em seu livro Os Elementos, Euclides propõe passos para a quadratura de um triângulo dado. De forma detalhada, devemos acompanhar no Livro I as Proposições 4, 8, 26, 34, 35, 36, 37, 38 e 47 e no Livro II, as Proposições 5 e 14. De forma mais simples, podemos ver os resultados no Livro VI, Proposições 1 e 13, como visto nas atividades 3.3 e 3.4, que você já executou.

Procedimentos:

Dado o triângulo ABC abaixo:



a) Forme um grupo com mais dois colegas e discutam, refletindo sobre as atividades anteriores, quais passos devem ser seguidos para que se possa construir um quadrado que tenha a mesma área do triângulo ABC dado.

b) Cada um deve fazer seu próprio desenho seguindo os passos apontados pelo grupo.

c) Justifique, com suas palavras, que as áreas do triângulo e do quadrado obtido são iguais.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR.

Ao chegar a esta atividade, os alunos já executaram as construções do triângulo (atividade 3.1) e do quadrado (atividade 3.2) usando régua e compasso, bem como as equivalências entre um retângulo e um triângulo. Na sequência, a quadratura do retângulo, na atividade 3.4, página 41, serve de suporte para que se consiga a quadratura do triângulo. No capítulo 2, temos as justificativas para esta atividade, conforme seção 2.4, página 11.

Tal construção se adequa à proposta da apresentação da História da Matemática na Educação Matemática, citada no capítulo 1. É imediata a associação que os alunos fazem à técnica grega de quadratura e suas dificuldades de execução.

Todas as proposições citadas na atividade, de Os Elementos, podem ser comentadas em classe, desde que se adeque a linguagem para melhor compreensão dos alunos.

Uma sugestão para a construção pedida é seguir os passos abaixo:

- Construir um retângulo equivalente ao triângulo dado, segundo a atividade 3.3 e

- Fazer a quadratura do retângulo obtido no passo anterior, conforme já feito na atividade 3.4.

A discussão entre os colegas do grupo envolve o manuseio das folhas das atividades anteriores e a troca de experiências e dificuldades na sua execução.

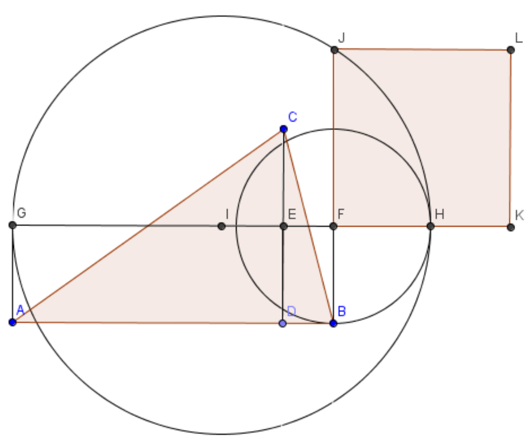


Figura 3.3: Quadratura do triângulo

Nesta etapa da atividade, a entreajuda é fundamental, para que todos os integrantes do grupo atinjam o objetivo.

A tendência mais comum, para a justificativa, é argumentar que a construção do retângulo de área equivalente à área do triângulo dado, segundo a atividade 3.3 prepara para que, quadrando o retângulo, obtém-se a quadratura do triângulo.

A área do triângulo é dada por:

$\dfrac{AB.CD}{2} = AB.ED =$ área do retângulo $ABFG$.

De forma análoga ao que foi feito na justificativa da quadratura do retângulo, provamos que a área do triângulo ABC é igual à área do quadrado $FJLK$.

3.6 Construção de um triângulo de área igual à de um quadrilátero qualquer dado.

Objetivo: construir, com régua não graduada e compasso, um triângulo cuja área seja igual à de um quadriátero dado.

Nome: $n^{\underline{o}}$: série:

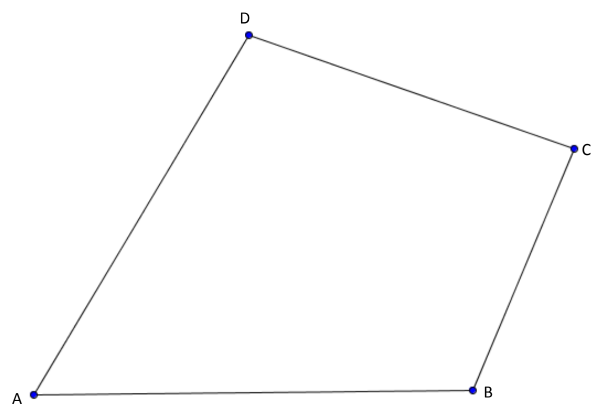
FOLHA DE ATIVIDADE

Para esta atividade você precisará de lápis, régua não graduada e compasso.

Atente para os termos empregados e solicite auxílio sempre que necessitar de esclarecimento.

A ideia de decomposição de figuras, sugerida ao final da atividade, como dica, é muito engenhosa e a parte que fundamenta esta atividade consta no Livro I, Proposição 37, de Os Elementos, de Euclides.

Siga corretamente, e na ordem, os passos sugeridos.



Procedimentos:

Dado o quadrilátero $ABCD$:

a) Trace a reta r, suporte do lado $\overline{AB}$ usando a régua.

b) Trace a diagonal $\overline{AC}$.

c) Construa a reta paralela s ao segmento $\overline{AC}$, passando pelo vértice D.

d) Marque o ponto E onde r e s concorrem.

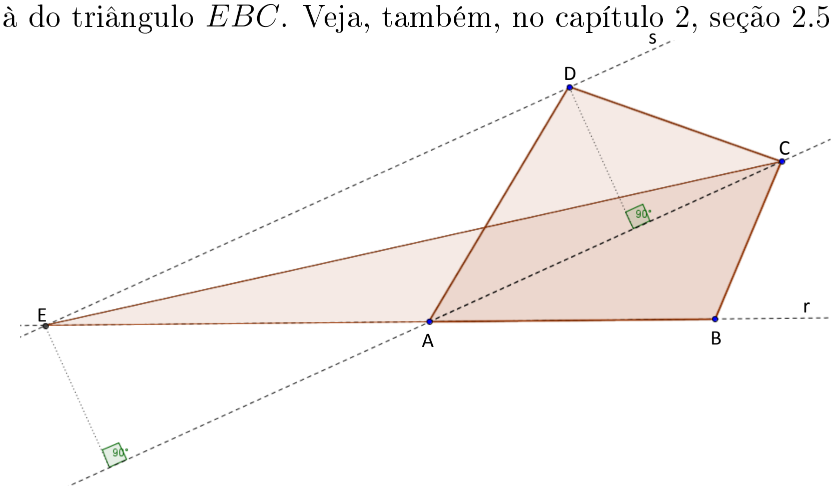
e) Trace o segmento $\overline{EC}$, obtendo o triângulo ACE.

Depois de pronto o desenho, reflita e responda:

O triângulo EBC, que você acaba de construir, tem a mesma área do quadrilátero $ABCD$? ( ) Sim ( ) Não

De que forma você pode mostrar que suas áreas são iguais?
Dica: Use a ideia de decomposição de um polígono em triângulos.

Segue abaixo uma sugestão de como provar que o quadrilátero $ABCD$ possui área igual à do triângulo EBC. Veja, também, no capítulo 2, seção 2.5, página 11.



O quadrilátero $ABCD$ pode ser decomposto em dois triângulos: ABC e ACD.

Vamos denotar as áreas de cada um desses polígonos por S_{ABCD}, S_{ABC} e S_{ACD}, então, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$

Ao traçar a reta paralela à diagonal $\overline{AC}$, passando por D e concorrendo com a reta suporte do lado $\overline{AB}$, em E, fica definido o triângulo EAC.

Os triângulos ACD e EAC possuem a mesma área, pois $\overline{AC}$ é lado comum e suas alturas são iguais. Logo:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABC} + S_{EAC} = S_{ECB}$$

.

Observação: o aluno pode apresentar esses argumentos, ou outro equivalente, de acordo com suas palavras.

É oportuno mostrar que essa técnica também se aplica para equivalência entre um quadrilátero não convexo e um triângulo.

No capítulo 2 apresentamos as justificativas teóricas incluindo a equivalência entre um triângulo e um polígono dado de n lados, conforme figura 2.7, página 13. No Livro I, Proposição 37, páginas 125 e 126, de Euclides [5], consta a equiavalência de áreas entre triângulos de mesma base e limitados por duas paralelas, ou seja, têm a mesma altura. Este é o conceito fundamental que permite fazer a equivalência sugerida.

É possível, de acordo com a receptividade de cada classe, mostrar e incentivar o aluno a fazer a quadratura de um pentágono dado.

3.7 Construção das lúnulas de Hipócrates associadas ao triângulo retângulo isósceles e sua quadratura.

Objetivos:

a) Dado um triângulo retângulo isósceles, construir as lúnulas de Hipócrates, associadas a ele, usando régua não graduada e compasso.

b) Obter a quadratura das lúnulas construídas.

Nome: $n^{\underline{o}}$: série:

FOLHA DE ATIVIDADE

1-) Para esta atividade você precisará de lápis, lápis de cor, régua não graduada e compasso.

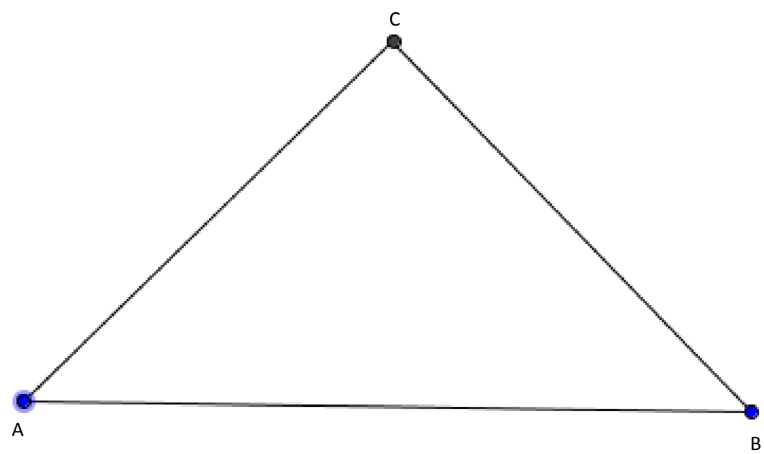
Atente para os termos empregados e solicite auxílio sempre que necessitar de esclarecimento.

Hipócrates de Chios (lê-se Quios) foi um importante matemático grego que viveu no século V a.C. Por coincidência, é homônimo do famoso médico Hipócrates, de Cós, que viveu na mesma época. Nosso Hipócrates pretendia encontrar a quadratura do círculo e teve sucesso em executar e justificar as primeiras quadraturas de figuras não poligonais (as lúnulas) da história. Esta que você vai executar é a primeira estudada por Hipócrates e se apoia sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles.

Siga corretamente, e na ordem, os passos sugeridos.

Procedimentos:

Dado o triângulo ABC, retângulo em C, abaixo:



a) Marque o ponto médio do cateto $\overline{AC}$ e denote-o por D.

b) Marque o ponto médio do cateto $\overline{BC}$ e denote-o por E.

c) Trace os arcos $\overset{\frown}{BC}$, com centro em E e $\overset{\frown}{CA}$, com centro em D, ambos no sentido anti-horário.

c) Marque o ponto médio da hipotenusa $\overline{AB}$ e denote-o por F.

d) Trace o arco $\overset{\frown}{BA}$, com centro em F, passando por C.

e) Pinte as regiões entre os arcos $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{BA}$ e entre os arcos $\overset{\frown}{CA}$ e $\overset{\frown}{BA}$. Estas são as duas lúnulas de Hipócrates associadas ao triângulo retângulo ABC.

2-) Utilize o teorema de Pitágoras para obter a quadratura das lúnulas que você desenhou. Considere, no seu raciocínio, a área de cada arco construído sobre os catetos e sobre a hipotenusa e compare-as com a área do triângulo retângulo ABC.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR.

Este é o primeiro exemplo das lúnulas estudadas por Hipócrates de Chios, visto no capítulo 2, seção 2.6.1, página 16 destas notas.

Oriente seus alunos, esclarecendo que, embora os arcos considerados sejam semicírculos, não há necessidade de usar a fórmula de área envolvendo o número π.

Como o número π será estudado na atividade investigativa 3.9, página 59, podemos aproveitar para mostrar a elegância da prova que utiliza o raciocínio por áreas dos semicírculos cujos diâmetros são os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles dado. Convém, também, ao chegar à atividade 3.9 - Descobrindo um número especial, já citada, refazer os cálculos das áreas de cada semicírculo. A comparação entre esses dois resultados torna a aula mais rica e instigante, conforme reflexões feitas por Fauvel, [7] citadas nas páginas 1 e 2 do capítulo 1 destas notas.

3.8 Quadratura da lúnula de Alhazen.

Objetivos: Encontrar a área das lúnulas de Alhazen[1] (Veja no rodapé dados sobre Alhazen) construídas sobre os catetos de um triângulo retângulo escaleno.

Observação: Atividade inspirada no Banco de Questões para a X OBMEP-2014, página 40 [1].

Nome: n^o: série:

FOLHA DE ATIVIDADE [1]

Materiais necessários: caneta ou lápis.

Leia atentamente as instruções e peça auxílio sempre que necessitar de algum esclarecimento.

Laodicéia desenhou as lúnulas de Alhazen, conforme mostrado na figura abaixo:

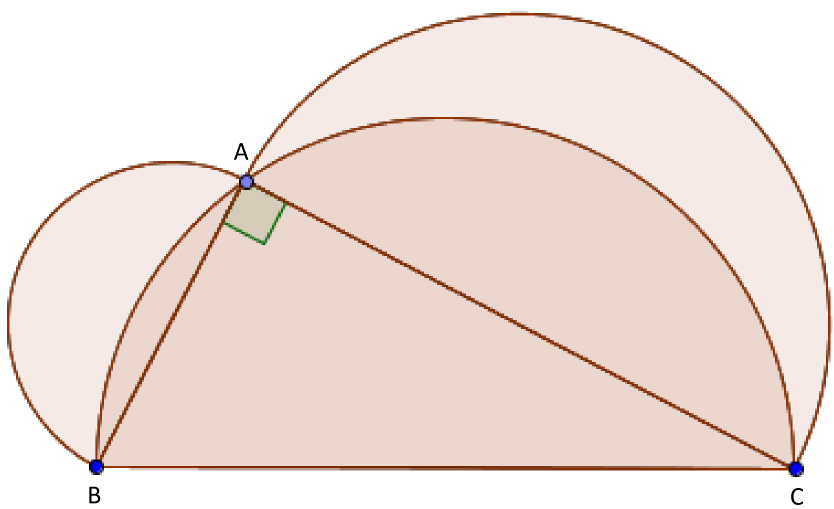


Figura 3.4: Lúnulas de Alhazen

[1] Ibn-al-Haitham (c.965-1039), conhecido no ocidente como Alhazen, escreveu o tratado "O Tesouro da Óptica", livro inspirado na obra de Ptolomeu. Entre as questões que considerou está a estrutura do olho humano e o aumento aparente da Lua quando está próxima do horizonte (Boyer, p. 174) [3].

Nessa figura, as lúnulas são as regiões em forma de lua crescente, em destaque, na figura 3.4. Um triângulo retângulo ABC e três semicircunferências são utilizados para obter essas regiões.

Mostre que a soma das áreas das duas lúnulas desenhadas por Laodicéia é igual à área do triângulo ABC.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR. [1]

Esta atividade foi inspirada no item (b) do Banco de Questões para a X OBMEP-2014, página 40 [1] e é adequada para incentivar o uso do raciocínio dedutivo dos alunos dos oitavos e nonos anos do Ensino Fundamental II.

Sejam A_1 a área do semicírculo cujo diâmetro é o cateto AB, A_2 a área do semicírculo cujo diâmetro é o cateto AC, A_3 a área do semicírculo cujo diâmetro é a hipotenusa BC, A_T, a área do triângulo retângulo ABC e A, a área total da figura 3.4.

Pelo teorema de Pitágoras, $A_3 = A_1 + A_2$.

Sabemos, contudo, que $A = A_T + A_1 + A_2$.

Então, $A = A_T + A_3$.

A soma das áreas das duas lúnulas, que chamaremos A_L é a diferença entre A e A_3, então, $A_L = A_T$.

Logo, a área do triângulo retângulo ABC é igual à soma das áreas das lúnulas de Alhazen.

Recomendamos, como desafio, as atividades 2.3, página 71 e 2.4, páginas 71 e 72 da obra de Roque e Carvalho [17].

3.9 Descobrindo um número especial.

Objetivo: Calcular a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, usando objetos redondos de dimensões variadas e descobrir a regularidade dessa razão.

Observação: Esta atividade é inspirada em atividade proposta por Katz [12].

Nome: n^{o}: série:

FOLHA DE ATIVIDADE

Materiais: 1 tampa redonda de qualquer embalagem ou recipiente, 1 pedaço de barbante, régua, lápis e caneta colorida.

Certifique-se de que você conhece e compreende os conceitos relativos a círculos: circunferência, diâmetro e raio.

Procedimentos:

a) Enrole o barbante na tampa circular cobrindo todo seu contorno.

b) Após marcar no barbante, o início e o final do contorno, com a caneta colorida, estique o barbante sobre a régua, para medir o comprimento da circunferência. Anote na tabela abaixo.

c) Meça o diâmetro da tampa e anote-o na tabela abaixo.

d) Use a calculadora para encontrar a razão $\dfrac{\text{Comprimento da circunferência}}{\text{Diâmetro}}$ e complete a primeira linha da tabela abaixo. Utilize, sempre, todos os dígitos encontrados no visor da calculadora.

e) Complete a tabela com os resultados de quatro colegas.

Comprimento da circunferência	Comprimento do diâmetro	$\dfrac{\text{Comprimento da circunferência}}{\text{Comprimento do diâmetro}}$

Para refletir e responder: O que se pode concluir a respeito dos números encontrados na terceira coluna? Eles são próximos, uns dos outros?

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

Esta é uma atividade manipulativa e de investigação que envolve a reflexão e a observação de regularidades numéricas.

Na última coluna aparecerão diversos resultados. É comum haver erro na medição ou na colocação do barbante, que pode ficar frouxo ao enrolar. A análise dos erros, no entanto, deve ficar para a parte final. Pode-se incentivar a investigação das diferenças e suas causas, refazendo as medições, se necessário.

Certamente concluirão que os valores são muito parecidos, regularidade que deve ser explorada e discutida em grupo. Esta é uma experiência para observar a regularidade da razão encontrada. Quanto mais variadas forem as dimensões das tampas empregadas, melhor será o resultado da atividade.

Nesse momento convém esclarecer aos alunos que $\dfrac{C}{d}$ é uma constante e que foi chamada de número π por William Jones em 1706, segundo Berggren, Borwein e Borwein (p.108) [2]. Sendo assim, temos a seguinte expressão:

$$C = \pi \cdot D = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Onde C é o comprimento da circunferência e D é seu diâmetro.

3.10 Em busca do número π

A atividade a seguir é uma proposta de investigação que consta na publicação em DVD de Victor Katz [12]. Embora não seja a forma como Arquimedes abordou o assunto, é muito próxima em termos de raciocínio.

Apesar de ter sido idealizada para a realidade norteamericana, ela se adaptou perfeitamente para os alunos brasileiros, motivo pelo qual está considerada neste trabalho.

Objetivo: Encontrar, usando calculadora e com auxílio do teorema de Pitágoras, aproximações para o número π, segundo o raciocínio de Arquimedes, adaptado por Katz [12].

Nome: n^o série:

FOLHA DE ATIVIDADE

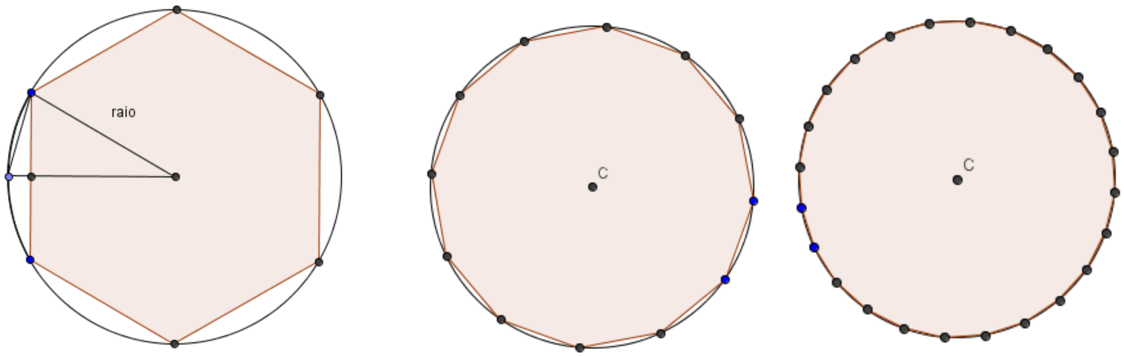
Materiais: folha de trabalho, lápis e calculadora.

Entre as mais originais realizações de Arquimedes, está seu método para encontrar uma aproximação numérica para o comprimento de uma circunferência, que é muito elegante e fácil de acompanhar.

Esta atividade é inspirada no Livro I, Proposição 3, de Arquimedes de Siracusa, segundo tradução de um matemático inglês, Sir Thomas L. Heath publicada em 1897. Os cálculos feitos por Arquimedes, apesar de seguirem um raciocínio engenhoso, são simples, mas muito trabalhosos devido ao sistema grego de numeração. Heath apresentou no início de seu livro um capítulo sobre o sistema de numeração grego, para que os leitores pudessem acompanhar a conquista de Arquimedes. Para esta atividade, vamos seguir a sugestão apresentada pelo americano Victor Katz, que, embora não seja a sequência original feita por Arquimedes, se aproxima muito do raciocínio e é mais adequada para ser compreendida, pois se utiliza de cálculos simpificados.

Arquimedes escolheu inscrever e circunscrever polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados em uma circunferência de raio unitário.

Como você pode notar na figura abaixo, os perímetros dos polígonos regulares de 12 e de 24 lados estão muito próximos do comprimento da circunferência de um círculo.



Hexágono inscrito no círculo.

Dodecágono inscrito no círculo.

Polígono de 24 lados inscrito no círculo.

Figura 3.5: Polígonos inscritos na circunferência.

Observe os diagramas abaixo e siga a técnica que Arquimedes aplicou. Vamos começar relembrando que na atividade 3.9 você aprendeu que a razão $\dfrac{C}{D}$ é constante onde C é o comprimento da circunferência e D é seu diâmetro. Esta constante foi denominada de π.

Nesta atividade você vai encontrar aproximações para o número π, através de aproximações para C, seguindo o raciocínio de Arquimedes e usando o teorema de Pitágoras. Nós já admitimos que o raio da circunferência é 1.

O hexágono regular inscrito na circunferência determina o ângulo central de 60°. Arquimedes bisseccionou este ângulo central, obtendo 30° e, consequentemente, bisseccionando o lado do hexágono e o arco correspondentes, assim obtendo o lado do dodecágono. Ver figura 3.6 abaixo (nesta figura “Novo lado” é um lado do dodecágono regular obtido).

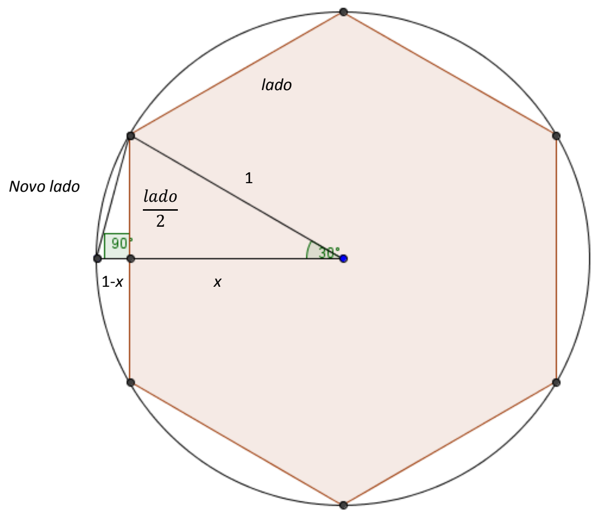


Figura 3.6: Diagrama 1: hexágono inscrito na circunferência.

Veja a ampliação do diagrama acima, para encontrar a medida do lado do dodecágono.

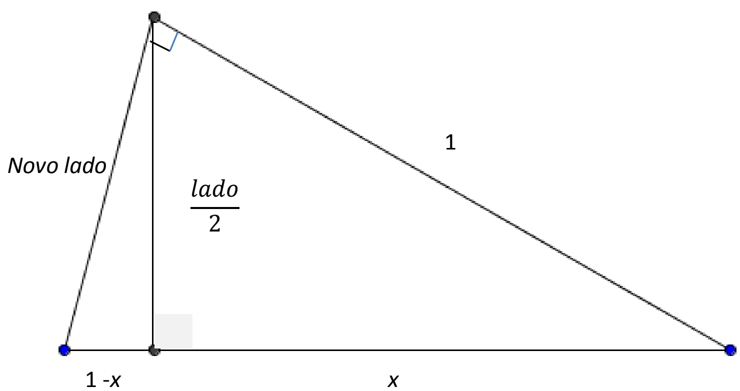


Figura 3.7: Diagrama 2: triângulo ampliado.

Siga o roteiro abaixo para, com o uso do teorema de Pitágoras, encontrar a medida do lado do dodecágono. Use uma calculadora para executar os cálculos e utilize todas as casas decimais encontradas.

a) Sabemos que a medida do raio da circunferência é 1, então a medida do lado do hexágono inscrito também é 1.

b) Ao dividir o ângulo central da circunferência, determinado pelo hexágono, por dois, o lado do hexágono também fica dividido por dois. Calcule $\frac{lado}{2} =$

c) Diferente do que Arquimedes fez, use o teorema de Pitágoras para encontrar o valor do cateto cuja medida é x. Complete: $x =$

d) Calcule, agora, o valor de $1 - x$. Complete: $1 - x =$

e) Com os valores já calculados $\frac{lado}{2}$ e $1 - x$, use, novamente, o teorema de Pitágoras e calcule o valor "*Novo lado*". Complete: "*Novo lado*" =

Assim você obteve a medida do lado do dodecágono. Encontre, então, a razão $\frac{\text{Perímetro do dodecágono}}{2}$ e coloque na tabela abaixo.

Repita o mesmo processo trocando o item (a), convenientemente em cada etapa, para os polígonos regulares de 12, 24 e 48 lados.

Número De lados	Comprimento do lado	Perímetro (P)	Diâmetro (D)	$\frac{P}{D}$
6			2	
12			2	
24			2	
48			2	
96			2	

Observe, então, na última coluna da tabela, aproximações crescentes para o número π menores que ele.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR. [12]

Arquimedes encontrou aproximações para o comprimento da circunferência, conforme visto no capítulo 2 destas notas, utilizando polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados, sucessivamente, encontrando os perímetros desses polígonos inscritos e circunscritos e dividindo pelo diâmetro da circunferência para localizar limitantes inferiores e superiores, para o número π. O que torna essa empreitada tão impressionante é o fato de Arquimedes não ter utilizado qualquer tipo de calculadora. Nesta atividade foram utilizados somente polígonos inscritos.

A tabela abaixo apresenta os valores encontrados até a sétima casa decimal de uma calculadora de oito dígitos.

Número de lados	Comprimento do lado	Perímetro (P)	Diâmetro (D)	$\frac{P}{D}$
6	1	6	2	3
12	0,51764	6,2117	2	3,10585
24	0,26105	6,2653	2	3,13265
48	0,13081	6,2787	2	3,13935
96	0,06544	6,2821	2	3,14105

Assim os valores da última coluna dão aproximações do número π que são crescentes, à medida que se aumenta o número de lados dos polígonos inscritos na circunferência e menores que o número π.

3.11 Em busca do número π - segunda atividade.

Objetivo: Encontrar, usando calculadora e com auxílio do teorema de Pitágoras, aproximações do número π, seguindo o raciocínio de Arquimedes, usando polígonos circunscritos a uma circunferência de raio unitário.

A atividade a seguir é uma proposta de investigação inspirada na publicação em dvd de Katz [12] e ampliando para a análise dos polígonos circunscritos. Embora não seja a forma como Arquimedes abordou o assunto, é muito próxima em termos de raciocínio.

Nome: $n^{\underline{o}}$: série:

FOLHA DE ATIVIDADE

Materiais: folha de trabalho, lápis e calculadora.

A exemplo da atividade 3.10, que você executou, esta também é inspirada no Livro I, Proposição 3 do livro de Arquimedes, de acordo com a tradução de Sir Thomas L. Heath, contida nas páginas 93 a 96 de seu livro.. Esta parte do raciocínio complementa os cálculos feitos por Arquimedes. Novamente faremos uso do teorema de Pitágoras e da calculadora, de forma a tornar mais compreensível a sequência de operações.

Nesta atividade vamos calcular os perímetros dos polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados, circunscritos à circunferência de raio unitário para obter aproximações do número π.

Como você pode notar na figura 3.8, os perímetros dos polígonos circunscritos regulares de 12 e de 24 lados estão muito próximos do comprimento da circunferência do círculo.

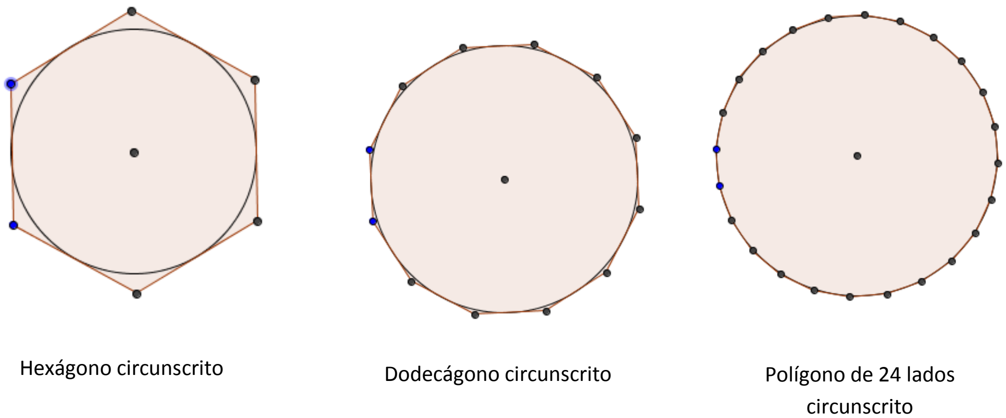


Figura 3.8: Polígonos circunscritos à circunferência.

Para os cálculos, você vai utilizar os valores da segunda coluna da tabela que você preencheu na atividade anterior (3.10).

Observe os diagramas abaixo. O primeiro mostra hexágonos, um inscrito e outro circunscrito em uma circunferência de raio unitário. Repare que o raio da circunferência divide o lado do hexágono circunscrito ao meio.

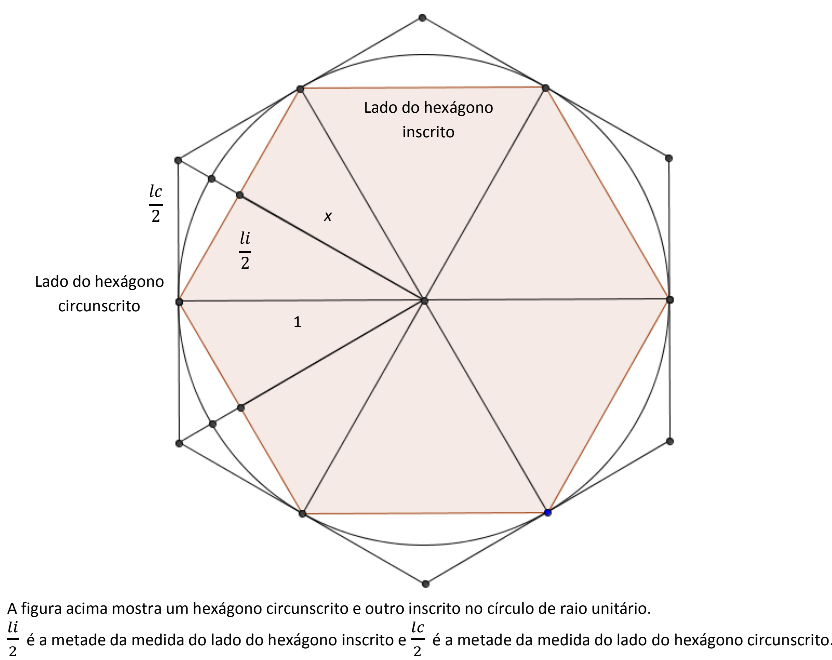


Figura 3.9: Diagrama 1: hexágono circunscrito.

Considerando um dos triângulos da figura 3.9, veja sua ampliação abaixo.

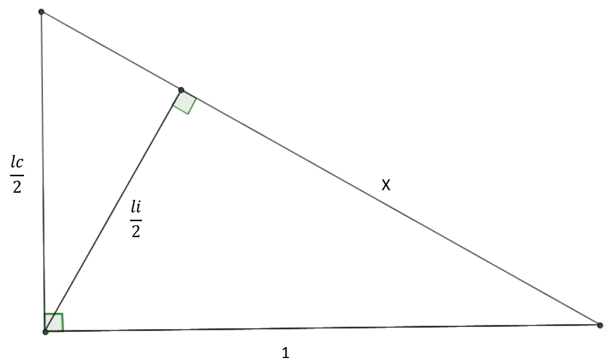


Figura 3.10: Diagrama 2: triângulo ampliado

Os passos a seguir são as orientações para que você preencha a primeira linha da tabela abaixo. Faça os cálculos usando uma calculadora e anote os resultados obtidos nos campos correspondentes. Use o diagrama 3, abaixo, como auxílio nos cálculos intermediários.

li	$\frac{li}{2}$	x	lc

Figura 3.11: Diagrama 3

a) Anote no campo li do diagrama 3 o valor do comprimento do lado do hexágono inscrito que você encontra na tabela-resposta da atividade 3.10.

b) Calcule $\dfrac{li}{2}$ e anote no campo correspondente.

c) Use o teorema de Pitágoras para calcular o valor de x.

Acompanhe o raciocínio abaixo para calcular a medida do lado do hexágono circunscrito.

Os triângulos retângulos, em destaque na ampliação, são semelhantes pelo caso AA, então, $\dfrac{\frac{lc}{2}}{\text{raio da circunferência}} = \dfrac{\frac{li}{2}}{x}$.

Sabendo que o raio da circunferência é unitário, temos $\dfrac{lc}{2} = \dfrac{\frac{li}{2}}{x}$, logo $lc = \dfrac{li}{x}$.

d) Calcule lc e anote na tabela do diagrama 3.

Assim, você obteve a medida do lado do hexágono circunscrito à circunferência, então você deve anotá-la na tabela abaixo para calcular o perímetro correspondente. Calcule, então, a razão $\dfrac{\text{Perímetro do hexágono}}{2}$ e coloque na tabela abaixo.

Número de lados	Medida do lado do polígono circunscrito	Perímetro (P)	Diâmetro (D)	P/D
6			2	
12			2	
24			2	
48			2	
96			2	

Repita o mesmo processo trocando o item (a), convenientemente em cada etapa, para os polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados.

Obeserve, então, na última coluna da tabela, aproximações decrescentes para o número π, maiores que ele.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR. [12]

Na atividade 3.10, obtivemos aproximações do número π a partir do perímetro de polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio unitário. Nesta atividade, com um raciocínio ligeiramente diferente, obtemos aproximações para o valor do número π a partir do perímetro dos polígonos regulares circunscritos à circunferência de raio unitário.

Uma diferença, no raciocínio empregado, é a utilização da semelhança entre triângulos retângulos, caso AA. É uma boa ocasião para recordar aos alunos a utilidade e praticidade desse conceito.

A tabela abaixo apresenta os valores encontrados até a sétima casa decimal de uma calculadora de oito dígitos.

Número de lados	Medida do lado do polígono circunscrito	Perímetro (P)	Diâmetro (D)	P/D
6	1,1547005	6,9282032	2	3,4641016
12	0,5358984	6,4307806	2	3,2153903
24	0,2633050	6,3193199	2	3,1596599
48	0,1310869	6,291724	2	3,1460862
96	0,0654732	6,2854282	2	3,1427146

Assim os valores da última coluna dão aproximações do número π, que são decrescentes, à medida que se aumenta o número de lados dos polígonos regulares circunscritos à circunferência e maiores que o número π.

3.12 A área de um círculo.

Atividade baseada na experiência descrita por Luzetti (p.24-28) [14].

Objetivo: Compreender que a área de um círculo é igual à área de um triângulo retângulo, cujos catetos, medem, respectivamente, o comprimento da circunferência do círculo e o raio do círculo.

Nome: $n^{\underline{o}}$: série:

FOLHA DE ATIVIDADE

Materiais: cartolina, régua, estiliete e um pedaço de, aproximadamente, 2,5 m de barbante.

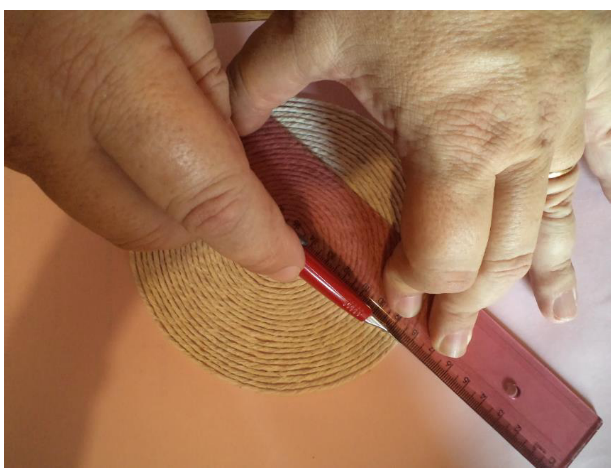
As atividades 3.10 e 3.11 que você executou ajudaram a situar o valor do número π, como aproximação, entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$, de acordo com os cálculos de Arquimedes. A busca pela quadratura do círculo, sabemos que não teve êxito, com o uso de régua não graduada e compasso, porém, Arquimedes, mais uma vez, com um raciocínio engenhoso, conseguiu estabelecer uma equivalência entre um círculo e um triângulo, registrada em seu livro I, Proposição I. Aqui, também, vamos nos valer da tradução feita por Sir Thomas L. Heath, que adaptamos para que sobressaia a engenhosidade e praticidade da ideia de Arquimedes, sem que tenhamos de executar os trabalhosos cálculos com o sistema de numeração grego antigo.

Forme um grupo com mais dois colegas e siga as instruções abaixo.

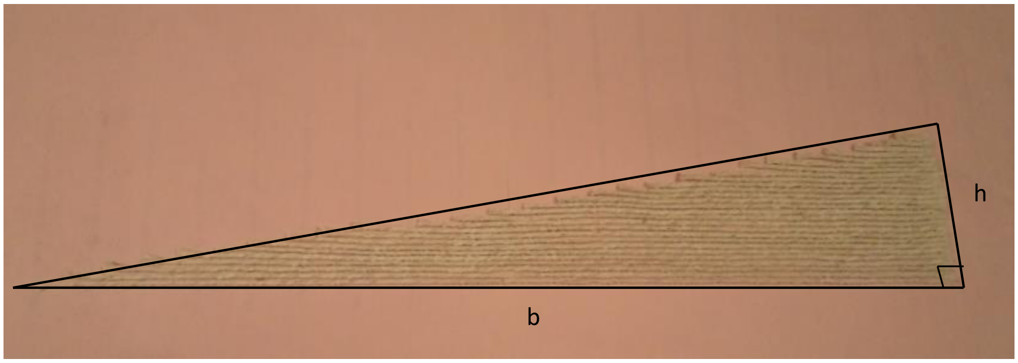
Certifique-se de que você e seus colegas conhecem e compreendem os conceitos relativos a círculos: circunferência, diâmetro e raio.

Passo 1: pegue o barbante que você recebeu e enrole-o de modo a formar um círculo, como mostra a figura abaixo.

Passo 2: posicione a régua sobre o círculo, segurando-a firmemente, de modo que passe pelo seu centro e depois, com um estilete, faça um corte a partir do centro, como mostrado na figura abaixo, até a ponta do barbante, na parte externa. Peça ajuda aos seus colegas.



Passo 3: Estique os pedaços de barbante, cuidadosamente, de modo a formar a figura abaixo.



Responda:

a) Observe atentamente as figuras mostradas nos passos 1 e 3. O que você pode concluir a seu respeito?

b) No passo 3, qual foi a figura geométrica formada? As medidas b e h representam que elementos dessa figura?

c) Qual é a área da figura em (b)?

d) Considere C o comprimento da circunferência do círculo mostrado no passo 1 e R o raio desse mesmo círculo, assinale as alternativas corretas com (X).

( )$C = h$ ( )$C = b$ ( )$R = h$ ( )$R = b$

e) Agora, observe todas as informações que você e seus colegas obtiveram com essa atividade e escrevam uma fórmula que permita calcular a área de um círculo, sabendo quais são C e R.

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR.

Esta atividade aproxima-se muito do método empregado por Arquimedes, relatado no capítulo 2, seção 2.7, página 20, destas notas. Convém realçar a engenhosidade de Arquimedes e mostrar que as atividades já executadas, 3.10, página 61 e 3.11, página 66, são uma simplificação dos resultados que durante muito tempo foram utilizados pelos matemáticos, até que métodos modernos fossem descobertos.

Após executarem os três passos da atividade proposta e discutirem entre si, os alunos devem estar preparados para responder às questões formuladas.

Espera-se:
- que os alunos concluam que as áreas das figuras formadas são iguais;
- que reconheçam o triângulo retângulo formado e associem seus catetos com as medidas b, da base e h, da altura;
- que percebam que $C = b$ e $R = h$ e
- que, de posse de essas informações e da conclusão da atividade 3.9, cheguem à expressão abaixo:

$$A_{\text{círculo}} = A_{\text{triângulo}} = \frac{C \cdot R}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot R}{2} = \pi \cdot R^2$$

Capítulo 4

Conclusão

Ao longo deste trabalho foi feita uma exposição sobre o uso da História da Matemática em sala de aula como elemento incentivador para as aulas de Matemática. Mais do que contar histórias, este recurso orienta e facilita a compreensão de conteúdos, aborda suas dificuldades de execução e indica sequências de raciocínio possíveis e baseadas na inventividade, com os recursos do pensamento humano.

A questão central do trabalho foi a busca da área de um círculo. Historicamente, nos remetemos à Grécia antiga e ao conceito de quadratura de uma figura plana, que, segundo os matemáticos gregos de então, significava construir um quadrado com área igual à da figura dada, com régua não graduada e compasso.

Inicialmente, no capítulo 2, fizemos as construções geométricas que resultaram nas quadraturas de polígonos (segundo Euclides, I e II). Em seguida, na tentativa de encontrar a quadratura de um círculo, Hipócrates obteve a quadratura de três tipos de lúnulas. Apresentamos essas construções no capítulo 2.

Contudo, é sabido que é impossível obter a quadratura de um círculo (conforme De Morgan, 1872 e Lindemann, 1880).

A área de um círculo de raio r foi encontrada por Arquimedes como sendo igual à área de um triângulo retângulo de cateto C (comprimento da circunferência do círculo dado) e altura r. Arquimedes obteve estimativas para C e, consequentemente, para o número π.

Mostrou-se particularmente instigante o desenvolvimento dessas construções geométricas, muitas delas apresentadas durante as aulas de Matemática no oitavo ano do Ensino Fundamental II, com as devidas ressalvas à faixa etária e respeitando o estágio de desenvolvimento motor e cognitivo dos alunos envolvidos. Cabe aqui expor que elementos da História da Matemática, na sua acepção informativa, despertam curiosidade sobre a vida dos personagens investigados e os usos e costumes dos povos em questão, bem como da geografia/geopolítica do mundo à época dos personagens estudados.

As atividades propostas no capítulo 3 e aplicadas em sala de aula proporcionaram um estudo de modo crescente, em nível de dificuldade de manuseio e do uso do raciocínio dedutivo, seja geométrico ou algébrico e seus resultados são, como não poderia ser diferente, variáveis, de acordo com o momento de desenvolvimento cognitivo de cada estudante, porém, como já expresso no parágrafo anterior, motivador, para a grande maioria dos envolvidos.

Na rede pública estadual convivemos com situações de falta de recursos e com alunos que costumam não portar o material necessário para as atividades, sejam quais forem. Esse obstáculo foi contornado com o auxílio da direção da escola, que ofereceu compassos em número suficiente para aqueles que por qualquer motivo não possuíam, como empréstimo durante as aulas.

Mostrou-se particularmente importante, durante a aplicação das atividades, a recomendação "Siga corretamente e, na ordem, os passos sugeridos.", uma vez que nessa faixa etária, e no estágio de domínio do conteúdo em que estavam os estudantes, deixar que buscassem uma melhor forma de desenhar as figuras propostas afastaria do objetivo primordial: o uso dos instrumentos usados pelos gregos - a régua não graduada e o compasso.

Durante a apresentação dos instrumentos - régua não graduada e compasso - aos estudantes, foi mostrado como se usa o compasso grego. Desatarraxando o parafuso do compasso de lousa, soltam-se suas hastes. Mostrar essa técnica ajuda a compreender as dificuldades por que passavam os gregos de antigamente no transporte de ângulos e de segmentos e no traçado de circunferências. As atividades de treino no uso da régua não graduada incluíram a ênfase em oferecer o segmento ou o ângulo, desenhados previamente em folha à parte, de modo que o aluno não tivesse a necessidade de utilizar a graduação de sua régua. Dificuldades iniciais de traçado são comunns e exigiram presença constante do professor na orientação quanto ao uso dos instrumentos. Ressalte-se aqui o espírito de colaboração em classe: alunos que mais rapidamente dominaram as técnicas serviram como monitores aos demais, o que reforçou seu aprendizado e agilizou os procedimentos.

A atividade 3.1, página 31, Construção de um triângulo dados três segmentos, pôde ser apresentada nos sétimos e oitavos anos, para alunos que não tiveram contato com essas técnicas em anos anteriores. Assim como nas atividades seguintes, as dificuldades de execução foram superadas com a prática subsequente. Por ser uma atividade que exige acuidade motora, sua repetição é necessária. Os alunos fizeram diversas outras construções de triângulos: usando os mesmos segmentos dados, constroem-se triângulos equiláteros e isósceles em diversas posições na folha.

A atividade 3.2, página 35, Construção de um quadrado usando régua não graduada e compasso, apresentou nível crescente de dificuldade ao exigir o traçado de uma reta perpendicular ao segmento transportado. O traçado de retas perpendiculares, sabemos que pode ser feito com régua e esquadro, porém mantendo o objetivo de apresentar as construções geométricas como eram feitas pelos gregos antigos, foi necessário praticar previamente. Tanto estudantes do sétimo ano, como do oitavo mostraram-se mais confiantes e seus resultados melhoraram consideravelmente, à medida que a prática se intensificou.

Com a construção do retângulo equivalente ao triângulo dado, atividade 3.3 página 38, encerrou-se o ciclo de subsídios necessários para as quadraturas. A utilização das atividades já executadas e corrigidas favoreceu o avanço mais rápido na execução das tarefas propostas. A conexão com o uso da História da Matemática permitiu aos alunos maior consciência das dificuldades enfrentadas e das elegantes soluções apresentadas na solução dos problemas propostos. Notou-se, nesse estágio, um crescente domínio dos instrumentos de desenho e da terminologia empregada nas atividades, evidenciando, mais uma vez, que a prática depende muito da execução continuada de atividades que oferecem oportunidades de crescimento constante em termos de complexidade.

As quadraturas, atividades 3.4, 3.5 e 3.7, nesse estágio do estudo, foram executadas pela maioria dos alunos com poucas intervenções por parte do professor e a monitoração dos alunos com maior facilidade nesse tipo de execução foi intensificada. As justificativas teóricas, solicitadas em cada atividade geraram pesquisas na internet, por parte dos alunos mais motivados nesse sentido, fazendo com que novas constribuições com ligação à História da Matemática viessem enriquecer as aulas. Ao executar a atividade 3.6, página 49 - Construção de um triângulo de área igual à de um quadrilátero dado, alguns alunos pediram que se aprofundasse o conceito e executaram a quadratura de um pentágono dado, porém não foi reportado esse fato nestas notas, como atividade, pelo motivo de não haver uma folha formalizada com as orientações e por terem sido poucos alunos a executarem o desafio.

As atividades 3.7, página 53 e 3.8, página 56 apresentaram uma nova abordagem ao exigir o uso do teorema de Pitágoras. Em razão de a atividade da descoberta da razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro ser a próxima, foi feita a opção de direcionar os alunos no uso da elegante comparação entre as áreas das figuras em questão.

A atividade 3.10 - a determinação de valores aproximados do número π inspirado no método de Arquimedes, por Katz [12] - foi aplicada na oitava série (atualmente denominado nono ano) do Ensino Fundamental II, com o uso da calculadora. Esta atividade mostrou-se particularmente desafiadora, mas frutífera, pelo envolvimento dos estudantes na sua execução, o que reforça a ideia de que as dificuldades encontradas podem ser superadas com o intelecto e a engenhosidade. O uso da calculadora justifica-se pelo fato de os cálculos, como mostrados por Heath, da maneira como interpretou Arquimedes (ver [11]) não serem apropriados para essa etapa do aprendizado. Foi, contudo, mostrado um exemplo com o uso do sistema grego de numeração e o valor inicial assumido por Arquimedes para $\sqrt{3} > \dfrac{265}{153}$ (23) como elemento de instigação a pesquisas posteriores. Esta atividade foi repetida no ano seguinte junto às sétimas séries (oitavos anos) com a complementação proposta na atividade 3.11, página 66 - Em busca do número π - segunda atividade, que enfoca o cálculo das aproximações do número π, mas maiores do que ele, com o uso dos polígonos circunscritos e da tabela construída na atividade 3.10.

A atividade 3.12 que resultou no cálculo da área de um círculo, foi aplicada na sétima série (atualmente denominada oitavo ano) do Ensino Fundamental II e o recurso do barbante foi fundamental para que, de forma manipulativa, os alunos pudessem construir o conceito de equivalência entre as áreas de figuras tão diferentes como um círculo e um triângulo.

O estudo chegou ao seu termo com a constatação de que o uso da História da Matemática no ensino da Matemática é uma opção que apresenta desafios e dificuldades a cada passo dado, mas seu lado instigador incentiva as investigações extra-classe e a discussão em sala de aula a respeito das descobertas, tornando o ensino da Matemática mais contextualizado, no que se refere à sua apresentação para estudantes do Ensino Fundamental.

Referências Bibliográficas

[1] ABREU, Alex; BELTRÁN, Johel; FARFÁN, Jonathan; HILÁRIO, Marcelo e FRANCO, Tertuliano. *OBMEP – Banco de Questões 2014*. Rio de Janeiro, IMPA, 2014.

[2] BERGREN, Lennart.; BORWEIN, Jonathan M.; BORWEIN, Peter. *Pi: A Source Book*. 3. ed. New York, Springer-Verlag, 2003.

[3] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

[4] CORRÊA, Julio F. *Um Estudo Histórico sobre Quadraturas*. Trabalho de dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2008.

[5] EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo, Editora UNESP, 2009.

[6] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, Editora da Unicamp, 2011.

[7] FAUVEL, John. For the learning of Mathematics. Artigo traduzido por Isabel Cristina Dias, João Nunes e Paula Nunes. In: *História da Matemática Cadernos do GTHEM* - Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática, Portugal.

[8] FERREIRA, Eduardo S. Nicomede e os Três Problemas Clássicos Gregos. In: *Revista Brasileira de História da Matemáica*. SBHMat, Rio Claro, v.10, n. 20, p. 193 – 213, 2010.

[9] FIGUEIREDO, Djairo G. *Números Irracionais e Transcendentes*. Rio de Janeiro, SBM, 1985.

[10] GALVÃO, Maria E. E. L. e SOUZA, Vera H. G. de. Luas, Áreas e Quadraturas - Um Problema e Muitos Séculos Na História Da Matemática. In: *Revista Brasileira de História da Matemáica*. SBHMat, Rio Claro, v.13, n. 27, p. 17 – 32, 2013.

[11] HEATH, T. L. *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1897 (Book contributor: Osmania University).

[12] KATZ, Victor e MICHALOWICZ, Karen D. Editors. *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*. The Mathematical Association of America, 2004.

[13] LIMA, Elon L. *Temas e Problemas Elementares*. 12. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[14] LUZETTI, Fabiano D. da S. *Figuras Circulares: Uma Atividade Envolvendo Perímetro e Área do Círculo*. Dissertação de Mestrado Profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2013.

[15] OBMEP. Disponível em http://www.obm.org.br/provas.htm, acesso em 29/03/14.

[16] REZENDE, Eliane Q. F. e QUEIROZ, Maria L. B. de. *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. 2. ed. Campinas, Editora da Unicamp, 2008.

[17] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João B. P. de. Tópicos de História da Matemática. In: *Coleção PROFMAT*, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[18] SILVA Jr, Luís P. da. *Construções Geométricas por Régua e Compasso e Números Construtíveis*. Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Campina Grande, 2013.

[19] SWETZ, Frank J. Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática. Artigo traduzido de Mathematics Teacher 77 (Jan. 1984) por Maria João Lagarto, com autorização do National Council of Teachers of Mathematics. in *História da Matemática Cadernos do GTHEM* - Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática, Portugal.

[20] WAGNER, E. Construções Geométricas. *Coleção do Professor de Matemática*. 6. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2007.