UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CLARISSA ROSA PINTO

O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES. HISTÓRIA E DESDOBRAMENTOS NOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Boa Vista, RR

2015

CLARISSA ROSA PINTO

O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES. HISTÓRIA E DESDOBRAMENTOS NOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda

Boa Vista, RR

2015

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

P659q Pinto, Clarissa Rosa.
O quinto postulado de Euclides. História e desdobramentos nos fundamentos da matemática / Clarissa Rosa Pinto – Boa Vista, 2015.
62 p.: il.

Orientador : Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT) da sociedade brasileira de matemática (SBM), Curso de Matemática.

1 – Matemática. 2 – Problema das paralelas. 3 – Elementos de Euclides . 4 – Quinto postulado. 5 – Método axiomático. I - Título. II – Castañeda, Alberto Martin Martinez (orientador).

CDU – 510.2

CLARISSA ROSA PINTO

O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES. HISTÓRIA E DESDOBRAMENTOS NOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 29 de abril de 2015 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda
Orientador / UFRR

Prof. Dr. Oscar Tintorer Delgado
UERR

Prof. Dr. Joselito de Oliveira
UFRR

A meus filhos,
pela paciência,
por suportarem minha ausência,
e por me incentivarem
a ir até o fim.

AGRADECIMENTOS

Sou grata à minha família, que me deu total apoio para enfrentar essa nova etapa da minha vida. Agradeço ao meu orientador Alberto Martinez, pelas sugestões, além da paciência e do incentivo na confecção deste trabalho.

”One of Euclid’s postulates - his postulate 5 - had the fortune to be an epoch-making statement - perhaps the most famous single utterance in the history of science".
Cassius J. Keyser.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os resultados de uma pesquisa bibliográfica sobre o denominado *Problema das Paralelas*. O V Postulado de Euclides, desde sua aparição na sua obra monumental *Os Elementos*, suscitou dúvidas e controvérsias e deu lugar a inúmeras pesquisas que se alastraram, desde sua publicação até o século XIX, quando surgiram as Geometrias Não-Euclidianas e ficou perfeitamente esclarecida a essência do problema. Essa história, emotiva e altamente ilustrativa da natureza do método axiomático, teve importantes desdobramentos nos Fundamentos da Matemática, especialmente na consolidação dos princípios da Escola Formalista como paradigmas da construção da Matemática.

Palavras-chave: Problema das paralelas. *Os Elementos* de Euclides. O Quinto Postulado. Método Axiomático.

ABSTRACT

In this dissertation, we present the results of a bibliographic research about the so-called Problem of Parallels. Euclid's fifth postulate, since its appearance in his monumental opus The Elements, raised suspicions and controversies and led to numerous researches that spread abroad since its publication until the nineteenth century, when appear the non-Euclidean Geometries and it was perfectly clarified the problem's essence. This story, emotional and highly illustrative of the nature of the axiomatic method, had important consequences in Mathematical Foundations, especially, consolidating the principles of the Formalist School as paradigms of the construction of Mathematics.

Key-words: Problem of parallels. *The Elements* of Euclid. The Fifth Postulate. Axiomatic Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No estudo da Geometria Plana elementar se revela claramente a importância do Quinto Postulado de Euclides, como pedra angular na construção da teoria das paralelas, que pela sua vez, serve de alicerce de vários conteúdos relacionados, como por exemplo, o Teorema de Tales e a proporcionalidade; a comparação dos ângulos determinados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal; a congruência e semelhança de triângulos e de outras figuras e a própria Trigonometria, dentre outros.

No Ensino fundamental nenhum aluno mostra inconformidade, perplexidade ou incompreensão quando se depara com a mais popular das formulações do Quinto Postulado de Euclides: “Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela reta dada”. Por detrás desse enunciado tão simples e convincente existe uma rica história de desafios, pesquisas, decepções e finalmente, o encontro da “verdade”. Uma verdadeira e cativante “novela” que ilustra a essência epistemológica da Matemática e desmistifica opiniões sobre esta ciência.

Este postulado chamou a atenção dos matemáticos desde muito cedo e gerou dúvidas e pesquisas durante vários séculos. O enunciado original dado por Euclides é complexo se comparado aos outros postulados e carece da “evidência” que aqueles possuem. Parecia mais uma teoria que um postulado. Muitas investigações foram realizadas e os resultados obtidos influenciaram profundamente a Matemática. Finalmente, no século XIX, foi provada a independência do V Postulado de Euclides em relação aos demais postulados e apareceram as Geometrias Não-Euclidianas pondo ponto final ao debate.

Nosso objetivo é estudar a evolução histórica da formulação e interpretação do Quinto Postulado de Euclides, desde sua publicação na obra monumental *Os Elementos*, até o aparecimento das Geometrias Não-Euclidianas no século XIX, bem como a evolução das concepções epistemológicas na Matemática no marco dessa evolução. Pretendemos oferecer um subsídio aos professores do ensino médio que poderia ser utilizado na motivação das aulas sobre esse assunto e ainda ajudar a mostrar que a Matemática é uma ciência em desenvolvimento dinâmico, contrariamente aos mitos a respeito. Apresentamos um exemplo de sistema axiomático dedutivo formal, devido a Lukasiewicz[1], muito adequado didaticamente para explanar esse conceito. A metodologia utilizada na elaboração da dissertação consistiu fundamentalmente de uma ampla pesquisa bibliográfica, a partir da qual houve a compreensão do assunto

1 Jan Lukasiewicz (1878-1956), foi um lógico polonês. Reconhecido pelo seu desenvolvimento da lógica multivalente e seus estudos sobre a história da lógica, particularmente sua interpretação da lógica aristotélica.

pesquisado e a elaboração da síntese aqui apresentada.

A dissertação consta de três capítulos. No capítulo I apresentamos uma síntese da evolução do conceito de axioma na Matemática e o conceito de sistema formal, incluído um exemplo com fins didáticos. No capítulo II comentamos o método de Euclides nos *Elementos*, e fazemos uma descrição dessa obra prima do pensamento matemático e seu método (no sentido epistemológico), bem como das críticas ao método. No capítulo III fazemos um histórico das tentativas de demonstração do V Postulado, das controvérsias suscitadas e das pesquisas realizadas até o esclarecimento definitivo da questão, com o aparecimento das Geometrias Não-Euclidianas.

1 O MÉTODO AXIOMÁTICO E OS SISTEMAS FORMAIS

Neste capítulo apresentamos uma síntese do conceito de Sistema Axiomático Formal Dedutivo e da evolução do conceito de axioma na Matemática, o que contribuirá para a melhor compreensão da dissertação.

Segundo (BICUDO, 2009): "Atribui-se ao filósofo e matemático grego Tales de Mileto (625-546 a.C.) as primícias do processo de transformação da Matemática empírica, típica dos antigos povos egípcio e babilônio, numa ciência como a conhecemos modernamente. Mas, a história da Matemática entregou a “coroa láurea” ao grande matemático grego Euclides de Alexandria, nascido no século III a.C., pela autoria da monumental obra em treze livros intitulada *Os Elementos*, um tratado de Geometria escrito em volta de trezentos anos antes de Cristo".

Em *Os Elementos* Euclides recopilou e sistematizou a maior parte do conhecimento matemático, particularmente o geométrico, conhecido até aquele momento. Mas ele não foi um simples compilador, foi o primeiro a estruturar formalmente uma teoria matemática, no caso, a Geometria. *Os Elementos* reinaram até o século XIX como livro de texto de Geometria e, melhor ainda, como paradigma do pensamento e do rigor matemático.

1.1 EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE AXIOMA NA MATEMÁTICA

No epicentro do trabalho de Euclides está o conceito de axioma, hoje tomado como sinônimo de postulado, embora para ele não eram o mesmo, como veremos no capítulo 2. Qualquer aluno com algum tempo de experiência em um curso de Matemática está mais ou menos familiarizado com os termos técnicos: definição, axioma, teorema e demonstração, intimamente relacionados com o método científico da Matemática. O raciocínio lógico-dedutivo é o pilar epistemológico da ciência matemática, isto é, a forma de construir e validar o conhecimento nesta área. Formalismo, abstração e rigor são componentes presentes e essenciais na forma de se fazer e transmitir a Matemática.

Usualmente os axiomas são apresentados nos cursos elementares como enunciados de verdades inquestionáveis, universalmente válidas, que pela sua evidência não precisam ser demonstradas e são utilizadas como ponto de partida na construção de uma teoria matemática. Nesse contexto, um sistema axiomático é a lista ou o conjunto de todos os axiomas que serão utilizados na formulação da teoria. A partir deles e utilizando um raciocínio lógico não explicitado se demonstram os resultados dessa teoria, ou seja, os teoremas que exprimem as proposições verdadeiras. O mais familiar desses sistemas axiomáticos é o da Geometria Euclidiana.

Quando se aprofunda no assunto, ainda num marco elementar, se exige que um sistema axiomático deve cumprir algumas propriedades, como:

1. Consistência: os axiomas não devem se contradizer entre si, ou seja, a partir deles não podem ser provadas duas proposições contraditórias.
2. Independência: nenhum axioma pode ser deduzido a partir dos outros. Isto é, não podem ser colocados axiomas que na realidade sejam teoremas. Por razões didáticas, às vezes este requisito é violado em alguns livros de texto.
3. Completitude: o conjunto escolhido de axiomas deve ser suficiente para desenvolver completamente a teoria, ou seja, deve permitir a demonstração de todos os teoremas.

Para GERÔNIMO (2010) pág. 11 :

> Os axiomas são o começo dessa cadeia dedutiva e são as afirmações não demonstradas que podiam ser aplicadas a várias áreas de conhecimento.

O entendimento sobre o conceito de axioma tem variado no transcurso do tempo. Apresentaremos a seguir os três períodos da história da Matemática que mostram a evolução da compreensão do conceito de axioma, segundo o professor Andrei Kolmogorov[1].

a) Primeiro Período: PERÍODO DA AXIOMATIZAÇÃO MATERIAL OU CONSTRUTIVA.

Este período abarca desde o estabelecimento da Matemática como ciência na Grécia antiga (séculos V-IV a.C.) até o século XIX. Em todo o período se considerou como axioma toda proposição matemática absolutamente evidente, intuitivamente clara e que, portanto, não precisava ser demonstrada. *Os Elementos* de Euclides é o melhor exemplo dessa concepção e durante os aproximadamente vinte e três séculos que correspondem a este período foi o paradigma do modelo de ciência dedutiva construída utilizando o método axiomático.

b) Segundo Período: PERÍODO DA AXIOMATIZAÇÃO SEMIFORMAL.

[1] Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987). Foi um eminente matemático soviético, que participou das principais descobertas científicas do século XX nas áreas de probabilidade, estatística e teoria da informação. Interessou-se também pela história da matemática e seus fundamentos.

Este período se estende desde o aparecimento das Geometrias Não-Euclidianas no início do século XIX até finais do próprio século, quando David Hilbert[2] apresenta seu famoso programa onde exige na Matemática, o rigor dos os sistemas formais. Nesse período se compreendem os axiomas como um conjunto de proposições da teoria, assumidas como verdadeiras, que constituem seu ponto de partida. Não se cobra dos axiomas simplicidade, evidência ou clareza intuitiva. Assim, os axiomas perdem o caráter de verdades absolutas, são verdades restritas ao universo da teoria construída.

c) Terceiro Período: PERÍODO DA AXIOMATIZAÇÃO FORMAL.

Este período se corresponde com o programa formalista de fundamentação da Matemática desenvolvido por David Hilbert e sua escola a partir da última década do século XIX. O conceito de axioma possui um rigoroso caráter formal. Os axiomas são um conjunto de fórmulas não demonstráveis da teoria. Eles não são mais meras proposições primárias de uma teoria concreta. A diferença marcante em relação ao período anterior reside em que todas as regras de inferência lógica utilizadas na dedução têm que ser formalmente explicitadas. Não é mais admissível utilizar a lógica matemática comum e geral nas deduções.

As origens dessas novas concepções surgidas neste período resultam da convergência dos estudos na Geometria e do desenvolvimento da Lógica Matemática. O exemplo mais brilhante do método axiomático formal é a obra do grupo Bourbaki[3].

A etapa formal do método axiomático é um ganho de primeiríssima importância na metodologia científica da Matemática. Na época atual (já no século XX) se logrou uma análise rigorosa dos sistemas axiomáticos, determinando-se perfeitamente as regras de inferência e as regras de construção de tais sistemas. O processo de formalização progressivo da Matemática levou a que o estudo tradicional sobre a axiomática (incluindo a seleção dos axiomas, a formulação das regras de inferência e o processo de dedução a partir dos axiomas e de outras proposições da teoria) convergisse com o estudo dos sistemas formais, desenvolvidos na Lógica Matemática e nos Fundamentos da Matemática. Dessa convergência surgiu a chamada Metamatemática, um dos ramos fundamentais da Lógica Matemática.

[2] David Hilbert (1862 - 1943). Um dos maiores matemáticos do século XX, alemão. Foi o principal pilar da escola formalista nos fundamentos da Matemática, contribuiu com numerosas áreas da Matemática. Em 1900 apresentou sua famosa lista de 23 problemas que norteariam as pesquisas matemática no século XX.

[3] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo de um grupo de matemáticos na sua maioria franceses, que escreveram uma série de livros com o objetivo de fundamentar toda a Matemática na teoria dos conjuntos. Os cinco membros fundadores foram: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsart e André Well.

A Metamatemática, termo criado pelo lógico e matemático francês Jacques Herbrand em 1930, se ocupa das propriedades gerais e formais dos sistemas axiomáticos. A Metamatemática é uma parte da metaciência, que trata a partir de fora, o que cada ciência é. A Metamatemática não é parte específica da Matemática, mas se insere no campo da filosofia da Matemática.

Associado à concepção de axioma adotada, podemos distinguir basicamente três níveis de apresentação das teorias matemáticas: apresentação intuitiva, apresentação axiomático-informal e apresentação axiomático-formal. A seguir, daremos uma descrição de cada uma de elas, o que é importante também desde o ponto de vista da didática da Matemática.

I) Apresentação intuitiva das teorias matemáticas.

Uma primeira forma de apresentar as teorias matemáticas, estreitamente vinculada ao surgimento histórico, é a apresentação intuitiva das teorias. A palavra intuição significa a faculdade de perceber, discernir ou pressentir coisas, independentemente de raciocínio ou de análise. O conhecimento intuitivo é direto, claro e imediato.

Um exemplo típico de apresentação intuitiva de teorias matemáticas o encontramos no tema dos conjuntos como usualmente é ministrado no ensino básico ou em cursos elementares na universidade. No nível intuitivo, uma teoria não é outra coisa além de um conjunto de enunciados acerca de certos elementos, suas relações e as operações factíveis entre eles descritas pelos algoritmos correspondentes.

II) Apresentação axiomático-informal das teorias matemáticas.

Uma segunda forma de apresentação das teorias matemáticas é a apresentação axiomático-informal. Como por exemplo, nos cursos de Geometria Euclidiana, numa boa escola de ensino básico ou em cursos de graduação. Esta forma de apresentação está historicamente associada a um processo de reflexão com o objetivo de organizar e sistematizar os conhecimentos acumulados em uma dada disciplina matemática.

No nível axiomático informal, como no nível intuitivo, uma teoria é também um conjunto de enunciados acerca de certos elementos, suas relações, e as operações factíveis entre eles descritas pelos algoritmos correspondentes. A característica distintiva fundamental numa axiomática informal é a dependência dedutiva entre os enunciados e as proposições da teoria. A dependência dedutiva entre os enunciados ou proposições consiste em considerar um conjunto A de enunciados, chamados axiomas, dos quais se extrai, por meio de um sistema lógico não explicitado, um conjunto $C(A)$ de consequências lógicas de A; isto é, um conjunto de enunciados chamados teoremas, que se estabelecem estruturando demonstrações a partir dos axiomas e mediante o uso de certas regras de dedução não esclarecidas explicitamente. A Lógica Matemática utilizada não é explicitada.

Para construir uma dada teoria matemática, além do conjunto dos axiomas, são necessários outros "ingredientes", que a seguir descreveremos brevemente. No processo de formalização encontramos certos objetos que são impossíveis de definir em termos de outros mais simples ou anteriores a eles, por exemplo, ponto, reta e plano na Geometria. Então, se assume sua existência sem defini-los. Outro exemplo de elemento primitivo é o conceito de conjunto. Tais elementos, que se encontram no alicerce da teoria são chamados atualmente de elementos primitivos. Os axiomas enunciam certas relações entre os elementos primitivos que também são assumidas sem demonstração. Por exemplo, em BARBOSA (1995) pág.01, no Axioma I1:

> Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

Também usualmente é necessário admitir sem uma definição formal a existência de certas relações entre os elementos primitivos. Por exemplo, a relação de pertinência de um elemento a um conjunto. Tais relações são chamadas de relações primitivas. Os elementos primitivos e as relações primitivas são denominados conjuntamente de noções primitivas. Assim, no alicerce da dada teoria se encontram os axiomas e as noções primitivas, admitidos sem demonstração. Este fato motivou a Bertrand Russell[4] a dizer certa vez que na Matemática não se sabe do que se está falando, nem se o que se fala é verdadeiro.

Outro elemento primordial na apresentação de uma teoria matemática são as definições. As definições permitem uma conceituação, organização e estruturação das ideias e conceitos matemáticos. Mediante as definições caracterizamos novos objetos matemáticos a partir de outros anteriores, mostrando a relação entre diversos conceitos que não apareceriam tão evidentes. Sem as definições seria praticamente impossível entender a teoria e, muito menos, desenvolvê-la. Exemplos de definições são as de triângulo na Geometria, a de função entre dois conjuntos, as das operações de união e interseção entre conjuntos.

O processo de construção da teoria se encerra com a demonstração dos teoremas. Um teorema é uma proposição que para ser aceita como verdadeira precisa ser demonstrada. Os teoremas geram o conhecimento na Matemática. Na construção de uma teoria matemática estamos interessados em provar o maior número possível de teoremas. John B. Fraleigh, no seu livro *A First Course in Abstract Algebra*, diz: “The main business of mathematics is proving theorems”, que podemos livremente traduzir como: “A atividade principal da matemática é provar teoremas”. Para um matemático, descobrir (ou inventar, segundo seja sua posição filosófica) teoremas proporciona o má-

[4] Bertrand Arthur William Russel (1871 - 1970). Um dos mais influentes matemáticos, filósofos e lógicos do século XX.

ximo do prazer e da realização profissional. Os teoremas são demonstrados utilizando as regras de inferência da Lógica Matemática.

Para concluir este item, transcrevemos de FILHO (2012) pag.168, o seguinte parágrafo:

> Um modelo axiomático é um conjunto finito de noções primitivas, de axiomas e de regras de inferência, usados para definir objetos e deduzir teoremas. Nas definições se utilizam as noções primitivas ou outras definições previamente feitas. Nas demonstrações dos teoremas podem se utilizar as definições, as noções primitivas, os axiomas, as regras de inferências e os teoremas previamente demonstrados.

III) Apresentação axiomático-formal das teorias matemáticas.

Esta forma de apresentação das teorias matemáticas é resultado de uma análise crítica da linguagem utilizada para expressar as teorias (capacidade expressiva) e da lógica utilizada na argumentação e a apresentação das provas dos teoremas (capacidade de inferência). Uma apresentação axiomática que inclua uma explicitação exaustiva das bases expressivas e lógicas de uma teoria é uma apresentação axiomático-formal. Trata-se de um tratamento desenvolvido por lógicos e matemáticos fundamentalistas. Modernamente a axiomatização formal tem-se desenvolvido num ramo especial da Lógica Matemática denominado teoria dos sistemas formais.

A forma axiomático-formal das teorias matemáticas se desenvolveu fundamentalmente no fim do século XIX e durante as primeiras décadas do século XX, quando a revolução operada no desenvolvimento da lógica, devida fundamentalmente a Bertrand Russel, chamou a atenção para a lógica utilizada na argumentação e apresentação de teoremas em Matemática. Esta situação culminou com a monumental obra de Bertrand Russel, *Principia Mathematica*, escrita em colaboração com A.N. Whitehead[5], e com os trabalhos de Hilbert, cujas teses fundamentais foram recolhidas em seus *Grundlagem des Mathematik* (Fundamentos da Matemática), escrita em colaboração com Paul Bernays[6]. Como resultado desta análise surge esta terceira forma de apresentação das teorias matemáticas, que conforme dito, distingue-se das anteriores ao incluir uma explanação das bases expressiva e lógicas das teorias matemáticas.

Não deve ser esquecido que a forma de apresentação das teorias matemáticas está estreitamente vinculada com as conceições filosóficas a respeito do objeto e do método da matemática e da relação entre matemática e realidade.

[5] Alfred North Whitehead (1861-1947), lógico, matemático e metafísico britânico, reconhecido como um dos grandes filósofos do século XX. Principal obra: *Principia mathematica*.

[6] Paul Isaac Bernays (1888 - 1977). Foi um matemático suíço que contribuiu significativamente com a lógica matemática, teoria axiomática dos conjuntos e filosofia da matemática. Foi um assistente e grande colaborador de David Hilbert.

Pela sua importância para o entendimento do assunto objeto da nossa dissertação, abordaremos com maior detalhamento os sistemas axiomáticos formais, ou melhor denominados, sistemas formais axiomático-dedutivos. No século XIX convergiram dois fatos que tiveram forte influência nas concepções sobre os fundamentos da Matemática. Por um lado, foram constatadas falhas de raciocínio lógico em demonstrações contidas nos *Elementos* de Euclides (no próximo capítulo trataremos disso). Outro fato de extrema importância foi o aparecimento das Geometrias Não-Euclidianas, que colocou em xeque a ideia de que os axiomas deveriam ser “verdades evidentes” ou "corresponder com a realidade". As tentativas de encontrar alguma contradição lógica nestas geometrias foram infrutuosas.

Principalmente por estas duas razões, o estudo dos sistemas dedutivos entrou a formar parte da pauta das pesquisas na Matemática e na Lógica nos séculos XIX e XX.

1.2 SISTEMAS AXIOMÁTICOS FORMAIS DEDUTIVOS

Sistema, segundo (BERTALANFFY, 1971):

> ...é um conjunto de elementos inter-relacionados que formam uma determinada integridade.

Numa primeira aproximação podemos dizer que um sistema formal é uma espécie de linguagem artificial S construído rigorosamente, passo a passo, e que se costuma chamar de linguagem objeto. Para descrever ou falar sobre S estamos obrigados a utilizar outra linguagem, que pode ser natural ou artificial. Tal linguagem é chamada de metalinguagem. Se pensarmos numa linguagem natural, como o português, podemos estabelecer certo paralelismo que nos permitirá compreender melhor a estrutura de uma linguagem artificial. Em português se parte do alfabeto, com as letras do alfabeto se formam as palavras e com as palavras são construídas as frases. Existe uma gramática normativa que dita as regras para a grafia correta das palavras, nem toda combinação de letras constitui uma palavra que tenha sentido.

Seja S a linguagem dedutiva formal que será construída como exemplo e que chamaremos de linguagem objeto. No caso, utilizaremos o português como metalinguagem. A seguir, como exemplo didático, apresentamos a construção de uma linguagem objeto S_1, de FEDOSEEV P. N.; SOLVEIRA (1998), mostrando as etapas de construção. A metalinguagem utilizada, denotada por MS_1, será o português.

1. O alfabeto de S_1, isto é, os símbolos ou signos primários de S_1.

   Como signos iniciais de S_1 admitem-se:

   a) $p, q, r, s, ..., p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, ...$

b) Os quatro signos seguintes: $(,),\supset,\neg$.

c) Não existem outros signos iniciais no sistema S_1, fora os descritos em (a) e (b).

Observações: Todas as palavras em português, as vírgulas e os pontos pertencem à metalinguagem MS_1. Na metalinguagem MS_1 podemos introduzir denominações genéricas para os diferentes grupos de signos. Os signos $p,q,r,s,...$ são chamados de variáveis proposicionais e os signos $(,),\supset,\neg$ são denominados de signos lógicos.

2. Construção das fórmulas bem formadas (também chamadas de fórmulas bem estruturadas, ou simplesmente, fórmulas). As regras de formação em S_1 são:

a) Qualquer dos signos $p,q,r,s,...,p_1,q_1,r_1,s_1,p_2,q_2,r_2,s_2,...$, por separado, é uma fórmula.

b) Se A é uma fórmula, então $(\neg A)$ é uma fórmula.

c) Se A e B são fórmulas, então $(A \supset B)$ é uma fórmula.

d) Não há outras fórmulas em S_1 além das determinadas em $2a$, $2b$ e $2c$.

Observações: Os signos $A,B,...,P$ são nomes metalinguísticos para designar qualquer fórmula do sistema e, evidentemente, não pertencem à S_1. As regras de formação introduzidas em S_1 são suficientes para a construção de infinitas fórmulas em S_1. Por exemplo, são fórmulas: p,q,r,s,p_1,q_1,r_1,s_1 (devido à regra $2a$); $(\neg p)$, $(\neg q)$, $(\neg r)$, $(\neg s)$,$(\neg p_1)$, $(\neg q_1)$, $(\neg r_1)$, $(\neg s_1)$, $(p \supset q)$, $(q \supset r)$, $(r \supset s)$, $(s \supset p_1)$ (em virtude de $2a$ e $2b$); $\neg(p \supset q)$, $\neg\neg(p \supset q)$, $(\neg(\neg p) \supset r)$ (por $2a$, $2b$ e $2c$).

3. Seleção, dentre as fórmulas de S_1, do conjunto dos axiomas, ou seja, das fórmulas que serão admitidas sem demonstração. Como axiomas de MS_1 tomamos:

A1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$

A2. $P \supset (\supset P \supset Q)$

A3. $(\neg P \supset P) \supset P$

Observações: Não existe nenhum outro axioma fora de A_1, A_2 e A_3. P,Q e R são denominações metalinguísticas que representam os signos de S_1.

4. Nesta etapa da construção de S_1 diremos quais as regras de inferência que são usadas para provar novas fórmulas em S_1. Cada uma das fórmulas deduzidas forma parte do conjunto das fórmulas de S_1. Como regras de inferência em S_1 tomam-se:

R1. Regra de Substituição: De qualquer fórmula de S_1 se infere uma nova fórmula de S_1 mediante a substituição de alguma variável da primeira fórmula por outra fórmula de S_1.

R2. Regra do *modus ponens*: De $(A \supset B)$ e A, se infere B.

Observações: A e B são nomes em MS_1 para designar fórmulas de S_1. Em $(A \supset B)$, A é chamado de antecedente e B de consequente. Se utiliza a notação A/B para indicar que a fórmula A é substituída pela B.

A seguir ilustraremos mediante um exemplo a aplicação das regras de inferência de S_1 para obter teoremas:

Teorema (Lei de Identidade): $p \supset p$.

Demonstração: Sejam p e q dois signos quaisquer de S_1. Por $(2a)$ tem-se que p e q são fórmulas. Por $(2b)$ resulta que $(\neg p)$ é uma fórmula. Por $(2c)$, $(\neg p \supset q)$ é uma fórmula.

No axioma $A1$ substituiremos q pela fórmula $(\neg p \supset q)$. Esta substituição pode ser denotada por "Em $A1$: $q/(\neg p \supset q)$", assim:

Em $A1$: $q/(\neg p \supset q)$.

$T1$: $(p \supset (\neg p \supset q)) \supset ((\neg p \supset q) \supset r) \supset (p \supset r))$ (Efetuando a substituição)

Observemos que em $T1$ o axioma 2 pode está como antecedente e a expressão $((\neg p \supset q) \supset r) \supset (p \supset r)$ como consequente. Aplicando $R2$ a $T1$, obtemos: $T2$: $((\neg p \supset q) \supset r) \supset (p \supset r)$.

Em $T2$ efetuamos as substituições q/p, r/p e resulta: $T3$: $((\neg p \supset p) \supset p) \supset (p \supset p)$.

Observemos que em $T3$ aparece $\neg p \supset p) \supset p$ como antecedente e $(p \supset p)$ como consequente. O antecedente é o axioma 3. Aplicando $R2$ a $T3$, obtemos $T4$: $(p \supset p)$. O teorema está provado, isto é, $p \supset p$ é uma fórmula bem formada.

5. A última etapa na construção de S_1 consiste na inferência sistemática de fórmulas a partir de $A1$, $A2$ e $A3$ utilizando as regras de inferência $R1$ e $R2$. No exemplo acima vimos como fazer isto para provar a fórmula $(p \supset p)$. O registro de todas as fórmulas demonstradas em S_1 e dos modos inferenciais constitui a parte fundamental do "corpo" do sistema que se foi construído. Com isto termina o processo de construção do sistema dedutivo S_1. Na frente o sistema pode e deve ser atualizado.

   É importante entender que o sistema S_1 representa uma determinada linguagem sintática-formal, onde temos que lidar somente com signos de determinada forma e suas combinações. Estes signos carecem de significado extralinguístico. Examinando S_1 somente podemos afirmar que, a partir de determinadas combinações de signos obtemos certo conjunto de outras combinações dos signos do sistema. O sistema S_1 não expressa outra coisa.

O sistema S_1, conforme afirmado, não possui nenhuma interpretação que o vincule com a realidade. Nele, nos interessamos somente no aspecto sintático, não interessa dar um sentido ou interpretação aos signos que aparecem nem aos axiomas e fórmulas obtidas utilizando as regras de inferência. Portanto, podemos o chamar de sistema dedutivo sintático-formal. Se nos interessarmos em construir um sistema dedutivo para expressar alguma situação, correlação ou fenômeno seria necessário passar do sistema dedutivo sintático a um sistema dedutivo semântico. A construção de um sistema semântico S_2 pode ser feita de diferentes formas, que neste contexto não abordaremos.

2 OS ELEMENTOS DE EUCLIDES. ANTECEDENTES, MÉTODO E CRÍTICAS

Neste capítulo apresentaremos *Os Elementos*, a obra monumental de Euclides de Alexandria que iniciou a Axiomatização formal na Matemática. Comentaremos algumas características de seu método científico e certas críticas sofridas ao longo da história da Matemática que estimularam a pesquisa em Geometria e nos Fundamentos da Matemática.

2.1 ANTECEDENTES

Os egípcios possuíam um conhecimento empírico da Geometria que lhes permitia resolver um problema prático muito importante na sua sociedade, a recuperação dos limites das propriedades após as enchentes anuais do rio Nilo. As inundações das áreas de cultivo destruíam as delimitações fixadas, fazendo necessário refazê-las cada ano. Os egípcios foram hábeis agrimensores e necessariamente devem ter realizado descobertas sobre linhas, ângulos, polígonos e outras figuras associadas. Por exemplo, deviam saber que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos; que a área de um paralelogramo é igual à do retângulo de igual base e altura.

Esses conhecimentos geométricos foram obtidos pela experiência, observação e experimentação. Eles eram muito bons agrimensores e construtores, para atestar isto é suficiente lembrar suas famosas pirâmides. Todo esse conhecimento geométrico, acumulado durante muito tempo, era totalmente prático e não existia nenhuma elaboração teórica ao respeito. Os egípcios não tinham noção do que é uma demonstração matemática. Como salienta (BOURBAKI, 1984):

> Não há hoje, qualquer dúvida de que existiu uma Matemática pré-helênica bem desenvolvida. Não somente são as noções (mais abstratas) de um número inteiro e de medida de qualidade comumente usadas nos documentos mais antigos que nos chegaram do Egito e da Caldeia, mas a álgebra babilônia, por causa da elegância e segurança dos seus métodos, não deve ser concebida como uma simples coleção de problemas resolvidos por um tatear empírico.

Os gregos tomaram contato com esse conhecimento empírico e assimilaram as habilidades e métodos dos egípcios na medição de terras e deram a esse conjunto de conhecimentos o nome de Geometria, que literalmente significa medida da terra. O pensamento helênico não se satisfez com a mera serventia prática da geometria, aliás, não apreciaram a Geometria por essa dimensão e se focaram na dimensão teórica e intelectual. Durante séculos descobriram e demonstraram inúmeras propriedades das figuras geométricas.

É nesse contexto que aparece na história da Matemática a dedução lógica, como método de validação do conhecimento matemático. Como escrevemos no Capítulo I, Thales de Mileto foi o primeiro que demonstrou proposições geométricas e Euclides o grande fundador do método axiomático na Matemática. Mas, como escreve (BICUDO, 2009):

> Um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do primitivo conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônios na ciência matemático grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas. Quem se achegue descuidadamente a essa história terá a impressão de a Geometria ter nascido inteiramente radiante da cabeça de Euclides, como Atenas da de Zeus.

Tal foi o êxito dos seus *Elementos* no resumir, corrigir, dar base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos que apagou, quase que completamente, os rastros dos que o precederam. A seguir descrevemos o método de Euclides na sua obra *Os Elementos*.

2.2 O MÉTODO DE EUCLIDES EM *OS ELEMENTOS*

A primeira questão a salientar é que não conhecemos a versão original de *Os Elementos* tal como Euclides os escreveu. As versões de que se dispõe são tomadas de comentários e edições feitas no mínimo uns seis séculos após Euclides ter escrito *Os Elementos*. Se o que se tem hoje como *Os Elementos* está mais ou menos próximo do original de Euclides é algo que não é possível elucidar.

Uma visão apologética de *Os Elementos*, muito bem escrita aparece no livro *The Criation of Mathematics* (A Criação da Matemática) da autoria do matemático alemão Benno Artmann. Transcrevemo-la da excelente tradução comentada de *Os Elementos*, de (BICUDO, 2009):

> Este livro é para todos os amantes da matemática. É uma tentativa entender a natureza da Matemática do ponto de vista da sua fonte antiga mais importante. Mesmo que o material coberto por Euclides possa ser considerado elementar na sua maior parte, o modo como ele o apresenta estabeleceu o padrão por mais de dois mil anos. Conhecer os *Elementos* de Euclides pode ser da mesma importância para o matemático hoje que o conhecimento da arquitetura grega para um arquiteto.

(BICUDO, 2009) comenta ainda que concorda com Peter Hilton[1] quando diz que a Matemática genuína constituiu uma das mais finas expressões do espírito humano, e acrescenta que aqui, como em tantos outros casos, aprendemos dos gregos aquela linguagem de expressão. Enquanto apresenta a geometria e a aritmética, Euclides

[1] Peter John Hilton (1923 - 2010). Matemático inglês, seus principais interesses de pesquisa estavam em topologia algébrica, álgebra homological, álgebra categórica e educação matemática.

ensina-nos aspectos essenciais da matemática em um sentido muito mais geral. Exibe o fundamento axiomático de uma teoria matemática e o seu desenvolvimento consciente rumo à solução de um problema específico. Vemos como a abstração trabalha e impõe a apresentação estritamente dedutiva de uma teoria. Um dos poderes maiores do pensamento científico é a habilidade de desvelar verdades que são visíveis somente "aos olhos da mente", como diz Platão, e de desenvolver modos e meios de lidar com elas. E, finalmente nos *Elementos* encontramos tantas amostras de bela matemática que são facilmente acessíveis e que podem ser minuciosamente estudadas por qualquer um que possua um treino mínimo em matemática.

Alguns autores, aparentemente (pode não ter sido a intenção), valorizam numa dimensão menor o aporte metodológico (no sentido de metodologia da ciência) do trabalho de Euclides em *Os Elementos*. O importante não foi fazer uma coletânea dos resultados de Geometria conhecidos na época, já existiam algumas bem anteriores que não tiveram transcendência, como a de Hipócrates de Quios, Teodoro e Arquitas, que não transcenderam. Por exemplo, (VAZ, 2010), pág. 20 lemos:

> Fora de disputa, no entanto, está o fato de que a grande maioria – se não a totalidade – dos resultados e de suas respectivas demonstrações já era de domínio comum entre os estudiosos da época. Assim, a boa reputação de Euclides deve-se basicamente à sistematização destes conhecimentos e sua apresentação da maneira mais clara possível. De qualquer modo, cabe notar que alguns detalhes da obra devem-se ao próprio Euclides, como é o caso da escolha dos axiomas e do ordenamento das demonstrações, da demonstração do teorema de Pitágoras, e da formulação do postulado das paralelas. De maneira original ou não, o mérito dos *Elementos* está em apresentar a geometria de uma maneira sistemática, dedutiva e com base em um número reduzido de princípios explicitamente admitidos de antemão.

Na realidade, o grande e transcendente mérito de Euclides em *Os Elementos* é, como já escrevemos, as primícias na criação do método axiomático na Matemática, que até hoje perdura (evoluído). Seu trabalho vai muito além de uma simples obra didática que sistematizou a Geometria conhecida na sua época, constitui a implementação de um paradigma epistemológico no "fazer” Matemática. Não existe documentado nada que possa ser considerado como um antecedente tão significativo que tire de Euclides a paternidade do Método Axiomático, embora está claro que a evolução da ciência é constituída de passos, onde alguns desses passos são dados por pés de gigantes. O objetivo de Euclides era apresentar a Geometria provida de estrutura epistemológica dedutiva sistemática, onde prevaleceria o rigor lógico nas demonstrações e todo seria construído sistematicamente a partir de um alicerce onde se reuniriam as definições, os axiomas e os postulados. Tudo deveria ser provado logicamente sobre essa base.

Euclides inicia sua obra escrevendo as *Definições*, onde pretendia conceituar com clareza todos os objetos geométricos que aparecem em algum lugar dos Livros.

Ao abrir o Livro I "damos de cara” com as definições. Euclides vai direto ao assunto, não faz nenhum preâmbulo ou introdução. Não declara objetivos nem plano da obra. Não diz qual o seu público alvo.

A seguir reproduzimos algumas das definições, tomadas de BICUDO (2009) pág. 97 e respeitando a numeração com que aparecem nesse texto:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. Uma superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
23. Paralelas são as retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Estas definições escritas no Livro I não são as únicas. Euclides coloca no início de outros Livros as definições que considerava pertinentes para os conteúdos. O Livro II se inicia com duas definições. O Livro III, com onze; o Livro IV com sete; o Livro V com dezoito; o Livro VI com cinco; o Livro VII com vinte três; o Livro X com quatro; o Livro XI com 28. Nos Livros VIII, IX e XII não aparecem definições.

Nas definições, Euclides pretendia conceituar todos os objetos geométricos que apareceriam em algum lugar da obra, estabelecendo seus atributos para poder utilizar esses termos no discurso demonstrativo. Ele não percebeu a impossibilidade dessa tarefa, devido à existência dos elementos primitivos. Assim, algumas das suas definições são obscuras e não cumprem o objetivo. Por exemplo, a definição 1, que pretende definir o conceito de ponto, é muito imprecisa e vaga. Sabemos que ponto é um elemento primitivo. Realmente, Euclides não define o conceito de ponto, simplesmente, faz um chamado à intuição, uma tentativa de esclarecimento sobre a ideia de ponto. Um comentário semelhante poderia ser feito em relação às definições 2 e 4, que pretendem, respectivamente, definir os conceitos de linha e linha reta.

Uma vez conceituados os elementos da teoria nas definições, Euclides enunciou um conjunto de fatos (proposições) iniciais admitidos sem demonstração. Essas proposições são os axiomas e postulados que servem de premissas para a dedução dos teoremas. A ideia implícita na determinação dos axiomas e dos postulados é que eles sejam absolutamente evidentes e, portanto, isentos de qualquer dúvida ou questionamento. Os postulados se referem especificamente a enunciados de fatos geométricos. Modernamente não se usa a palavra postulado, somente se fala em axiomas.

Os cinco postulados de Euclides são, tomados de BICUDO (2009) pág. 98:

P1. Fique postulado traçar uma linha reta a partir de todo ponto a todo ponto.

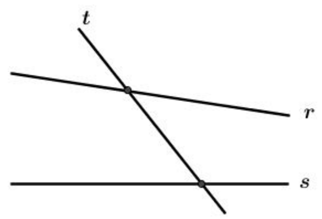
P2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

P3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

P4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

P5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Figura 1 – O Quinto Postulado.



Fonte: Autor

Na literatura existem muitos comentários sobre os critérios de escolha dos postulados, suas interpretações e consequências. Por exemplo, em BARKER (1964) pág. 31 se lê:

> Os três primeiros postulados de Euclides revelam que ele não está de maneira direta, discutindo nenhum problema concreto de mensuração de terras; com efeito, em condições reais não é sempre possível traçar uma reta que passe por dois pontos dados. Obstáculos vários (montanhas, lagos, parte de um país estrangeiro) impedem, muitas vezes, o traçado.

Para BARKER, em condições reais, não é verdadeiro que um segmento seja indefinidamente prolongável. É óbvio que um segmento vertical só poderá ser prolongado para cima ou para baixo, não podem ser desenhado um círculo no qual o centro tenha sido arbitrariamente selecionado e cujo raio seja apreciavelmente grande, os obstáculos impedirão certamente o traçado. Euclides sabia de tudo isso, é claro: mas as codições práticas não o interessavam. Concebia que, em princípio, uma reta poderia ser traçada de modo a ligar dois pontos quaisquer, fosse ou não possível traçá-la em realidade. BARKER comenta que: "Segundo Euclides, havia um espaço em que inexistia obstáculos absolutos e em volta do qual inexistiam fornteiras exteriores absolutas".

Os três primeiros postulados exprimem certas consequências importantes. O primeiro é adotado em CASTRUCCI (1978) como o primeiro axioma de incidência:

$\forall A$ e $\forall B(A \neq B \rightarrow \exists a(A \in a \wedge B \in a))$, isto é, *quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe uma reta a tal que $A \in a$ e $B \in a$*. Desse axioma se infere que a reta determinada por quaisquer dois pontos diferentes é única e que se dois pontos diferentes pertencem a duas retas a e b, então $a = b$.

O segundo, estabelece que a linha reta pode ser prolongada em uma única direção, em cada extremidade. Na linguagem moderna um segmento está incluído numa única reta (infinita). Duas linhas retas diferentes não têm um segmento comum.

Do terceiro postulado, segundo BULMER-THOMAS (1956), se deduz que o espaço é infinito porque o raio do círculo não é limitado, decorrendo disso ser o espaço contínuo, não-discreto. Segundo o mesmo autor, o quarto e o V Postulados são de uma outra natureza porque não prevêm que alguma coisa deve ser feita, como “traçar”, “prolongar”, “descrever”.

O Postulado impressiona pela evidência, parece que até poderia ser eliminado como axioma. Para BULMER-THOMAS (1956) significa dizer que o ângulo reto é uma grandeza tomada para medir outros ângulos, o que equivale a pressupor o espaço homogêneo ou a invariabilidade das figuras. O famoso e controverso quinto postulado será comentado no próximo capítulo.

A continuação dos postulados aparece no Livro I as *Noções Comuns*, chamadas de axiomas em algumas traduções de *Os Elementos*. Os axiomas euclidianos são princípios lógicos de carácter geral e amplo, que ele julgava que seriam aplicados não somente na Geometria, mas em todo o saber, especialmente o matemático. As Noções Comuns na tradução de BICUDO (2009) pág. 98:

A1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.

A2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

A3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, os restantes são iguais.

A4. E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.

A5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.

A6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.

A7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.

A8. E o todo é maior do que a parte.

A9. E duas retas não contêm uma área.

Em algumas traduções ou comentários de *Os Elementos* aparecem cinco noções comuns e alguns textos, inclusive, declaram em forma absoluta que são cinco. A diferença no número é por causa das edições modificadas, algumas bem antigas.

2.3 O CONTEÚDO DOS *ELEMENTOS*

Contrariamente à uma impressão muito difundida, os *Elementos* de Euclides não tratam apenas de geometria, contêm também bastante teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de 465 proposições distribuídas em treze livros. Os textos de geometria plana e espacial da escola secundária americana trazem basicamente o material que se encontra nos livros I, III IV, VI, XI e XII dos *Elementos*.

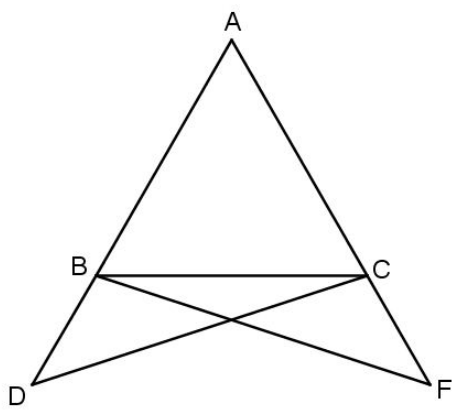
As quarenta e oito primeiras proposições do Livro I se distribuem em três grupos. As primeiras vinte e seis tratam principalmente das propriedades do triângulo e incluem os três teoremas de congruência. As proposições I 27 a I 32 estabelecem a teoria das paralelas e provam que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. As demais proposições do livro lidam com paralelogramos, triângulos e quadrados, com atenção especial a relações entre áreas. A proposição I 47 é o teorema de Pitágoras com uma demonstração atribuída universalmente ao próprio Euclides e a proposição final, I 48, é o recíproco do teorema de Pitágoras. O material desse livro foi desenvolvido pelos pitagóricos antigos.

É interessante fazer alguns comentários adicionais sobre algumas poucas proposições do Livro I. As primeiras três proposições são problemas de construção que mostram como, juntamente com uma régua, um compasso euclidiano pode transferir um segmento de reta de uma dada posição a uma outra posição desejada. A proposição I 4 estabelece a congruência de dois triângulos quando dois lados e um ângulo formado por eles num dos triângulos forem iguais a dois lados e o ângulo formado por eles no outro. A demonstração se faz por suposição: colocando-se o ângulo dado de um dos triângulos sobre o ângulo do outro triângulo de maneira que os lados iguais também coincidam, prova-se que um dos triângulos pode ser aplicado no outro. Posteriormente os matemáticos levantaram objeções às demonstrações feitas por superposição.

A proposição I 5, que prova a igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, tem interesse pois há relatos de que muitos, principalmente em geometria, acharam-na tão confusa que resolveram abandonar o estudo da matéria nesse ponto. Essa proposição foi batizada de *pons asinorum* ou “ponte de tolos” devido à semelhança imaginária da figura da proposição com uma ponte de cavaletes simples, muito difícil de atravessar por um burro, devido à anatomia das patas. Na realidade queriam dizer que as pessoas de pouca inteligência matemática não conseguiriam atravessar essa ponte para entrar no reino da Geometria.

A demonstração de Euclides envolve a construção de alguns segmentos de reta preliminares. Nessa figura os lados iguais AB e AC de um triângulo isósceles dado BAC são prolongados igualmente até D e F, traçando-se então CD e BF. Segue-se então que os triângulos AFB e ADC são congruentes, o que implica $BF = DC$ e ângulo BDC = ângulo CFB. Daí, os triângulos BDC e CFB são congruentes, garantindo isso a igualdade dos ângulos DBC e FCB e, então, dos ângulos ABC e ACB. Na verdade, essa demonstração poderia ser em boa parte encurtada, como observou mais tarde Papus (300 d. C.), aplicando-se diretamente a proposição I 4 aos triângulos ABC e ACB, em que AB no primeiro deles é igual a AC no outro, AC no primeiro é igual a AB no outro e o ângulo BAC no primeiro é igual a CAB no outro.

Figura 2 – Igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles.



Fonte: Autor

A proposição I 6 estabelece a recíproca da proposição I 5. Nesse caso sabe-se que no triângulo BAC se tem ângulo ABC = ângulo ACB e se deseja provar que $BA = CA$. Euclides procede por *reductio ad absurdum*, admitindo que, por exemplo, $BA > CA$. Então pode-se tomar em BA um ponto M tal que $BM = CA$. Pela proposição I 4 os triângulos CBM e BCA são congruentes, o que é absurdo pois o primeiro deles é parte do segundo. Logo não se pode ter BA maior que CA. Analogamente não se pode ter CA maior que BA. Donde $BA = CA$. É nessa proposição dos *Elementos* que se usa pela primeira vez no texto o método de demonstração indireta ou pelo absurdo. Posteriormente ele é empregado com frequência por Euclides.

O Livro II, relativamente pequeno com suas quatorze proposições, lida com transformações de áreas e com a álgebra geométrica da escola pitagórica. É nele que se encontram os equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas, como as proposições II 4, II 5 e II 6 que estabelecem respectivamente as identidades:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$$

Têm interesse particular as Proposições II 12 e II 13 que, conjuntamente, em linguagem mais moderna, enunciam o seguinte: Num triângulo obtusângulo (acutângulo), o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso (agudo), é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados acrescida (diminuída) do dobro do produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele. Assim, essas duas proposições estabelecem a generalização do teorema de Pitágoras hoje conhecida como “lei dos cossenos”. Presentemente verifica-se um debate aceso entre historiadores da Matemática sobre se, de fato, as proposições do Livro II pretendiam estabelecer uma forma geométrica de álgebra, conforme se supôs por muito tempo.

O Livro III, consistindo em trinta e nove proposições, contêm muito dos teoremas familiares sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos associados que hoje fazem parte dos textos de geometria elementar. No Livro IV, que tem apenas dezesseis proposições, discute-se a construção, com régua e compasso, de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e quinze lados bem como a inscrição e a circunscrição desses polígonos num círculo dado. Como pouco da geometria do círculo dada nos Livros III e IV se encontra nos trabalhos dos pitagóricos, é provável que o material desses livros tenha sido fornecido pelos sofistas antigos e pelos pesquisadores dos três problemas famosos:

1. Duplicação do cubo ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro de um cubo dado.

2. Trissecção do ângulo ou o problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais.

3. Quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

O Livro V é uma exposição magistral de teoria das proposições de Eudoxo. Foi por meio dessa teoria, tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis, que se resolveu o “escândalo lógico” decorrente da descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos. A definição de proporção, ou igualdade de duas razões, eudoxiana é notável e digna de ser repetida aqui. Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos (números resultantes do produto de outros números pelo mesmo fator) quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente. Em outras palavras, se A, B, C e D são quatro grandezas desprovidas de sinal, sendo A e B da mesma espécie (ambas segmentos de retas, ou ângulos, ou áreas, ou volumes) e C e D se, para inteiros positivos arbitrários m e n, $mA \geq nB$ ou $mA \leq nB$ conforme $mC \geq nD$ ou $mC \leq nD$. A teoria das proporções eudoxiana forneceu a fundamentação, posteriormente desenvolvida por Dedekind[2] e Weierstrass[3], para o sistema dos números reais da análise matemática.

O Livro VI aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontramos nele os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais; a resolução geométrica de equações quadráticas; a proposição que assegura que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; uma generalização do teorema de Pitágoras na qual, em vez de quadrados, traçam-se sobre os lados de um triângulo retângulo três figuras semelhantes descritas de maneira análoga; e muitos outros teoremas. Provavelmente não há nenhum teorema nesse livro que fosse desconhecido dos pitagóricos antigos, mas as demonstrações pré-eudoxianas de muitos deles eram falhas, posto que baseadas numa teoria incompleta das proporções.

[2] J. W. Richard Dedekind, (1831 - 1899). Alemão, aos dezenove anos obteve seu doutorado e três anos depois com uma tese sobre o Cálculo que foi elogiada por Gauss. O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos Elementos de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872.

[3] Karl Weierstrass, (1815 - 1897). Foi um matemático alemão, professor na Universidade de Berlim. Em 1860 apresentou a primeira fórmula para uma função contínua que não fosse derivável em nenhum ponto, seu trabalho forneceu as bases da teoria das funções analíticas.

Os Livros VII, VIII e IX, que no total têm cento e duas proposições, tratam da teoria elementar dos números. O Livro VII começa com o processo, hoje conhecido como algoritmo euclidiano, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si. Encontra-se nele também uma exposição da teoria das proporções numérica ou pitagórica. Estabelecem-se ainda nesse livro muitas propriedades numéricas básicas. O Livro VIII ocupa-se largamente das proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas. Se temos uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica.

No Livro IX encontram-se muitos teoremas significativos. A proposição IX 14 é equivalente ao importante teorema fundamental da aritmética – a saber que todo inteiro maior que 1 pode se expressar como produto de primos de uma e, salvo quanto à ordem de fatores, uma só maneira. A proposição IX 35 fornece uma dedução geométrica da fórmula da soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica e a última proposição, IX 36, estabelece a notável fórmula para números perfeitos. A prova de Euclides da proposição IX 20 (o número de números primos é infinito) é considerada universalmente pelos matemáticos como um modelo de elegância matemática. Nela se emprega o método indireto, ou *reductio ad absurdum*, e em linhas gerais consiste no seguinte. Suponha que só houvesse um número finito de números primos e denote-os por $a, b, ..., k$. Faça $P = (a)(b)...(k)$. Então $P + 1$ ou é primo ou é composto. Mas como $a, b, ..., k$ são todos primos, $P + 1$, que é maior que cada um desses números, não pode primo. Se $P + 1$ fosse composto deveria ser divisível por algum primo p. Mas p deve ser um dos elementos $a, b, ..., k$, pois estes são todos os números primos. Logo p deve dividir P e, por consequência, não é divisor de $P + 1$ (pois $p > 1$). Portanto a hipótese inicial de que o conjunto de números primos é infinito leva a um absurdo, o que estabelece o teorema.

O Livro X focaliza os irracionais – isto é, segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado. Para muitos especialistas, esse livro é, talvez, o mais notável dos Elementos. Atribui-se grande parte de seu conteúdo a Teeteto mas sua inteireza, classificação elaborada e acabamento são creditadas a Euclides. Custa a crer que se provaram esses resultados por raciocínios abstratos sem o apoio de uma notação algébrica conveniente. A proposição de abertura X 1 é a base do método de exaustão empregado posteriormente no Livro XII – a saber, que se de qualquer grandeza subtrair-se uma parte não menor que sua metade, do que restou outra parte não menor que sua metade e assim por diante, chegar-se-á finalmente a uma grandeza restante menor do que qualquer grandeza fixada da mesma espécie. Encontramos também nesse livro fórmulas que fornecem ternos de números pitagóricos, fórmulas essas que os babilônios antigos talvez já conhecessem um milênio antes.

Os três livros restantes, XI, XII e XIII tratam de geometria sólida e cobrem grande parte de material, com exceção do que diz respeito à esfera, comumente encontrado nos textos para a escola secundária. As definições, os teoremas sobre as retas e planos no espaço e os teoremas sobre paralelepípedos se encontram no livro XI. O método de exaustão desempenha um papel importante na abordagem de volumes do Livro XII. Na Livro XIII se desenvolvem construções visando a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.

Para EVES (2004):

> A observação frequentemente exposta de que, na realidade, os Elementos de Euclides pretendiam servir meramente como um prolongamento amplo da discussão sobre os cinco poliedros regulares parece representar uma avaliação equivocada. É mais provável que os Elementos tivessem sido escritos como um texto introdutório de matemática geral.
>
> ...talvez mais importante ainda seja a maneira formal como se apresenta esse conteúdo. De fato, os Elementos de Euclides tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna.

2.4 CRÍTICAS AO MÉTODO DE EUCLIDES EM *OS ELEMENTOS*

Durante mais de dois milênios os *Elementos* de Euclides resistiram a todos os desafios e revelaram-se como suprema conquista do pensamento matemático. Os padrões de rigor adotados por Euclides foram considerados paradigmáticos e o caráter das demonstrações parecia concludente.

O gosto pela filosofia, a análise crítica e o debate logicamente argumentado eram típicos da civilização helênica. Portanto, é de esperar-se que a seleção das definições, axiomas e postulados deve ter originado, bem no começo, as primeiras insatisfações com *Os Elementos*. Euclides era um inovador, nunca a Matemática tinha sido apresentada naquela estrutura axiomático-formal, pelo que muito provavelmente não existiu unanimidade na aceitação das mudanças na sua época. Por exemplo, Aristóteles aponta o paralelismo como um tema a respeito do qual não havia um consenso, logo deve ter existido alguma polêmica.

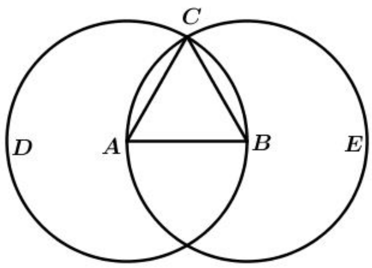
Lentamente, porém, cresceu o número de pequenas críticas. Durante o século XIX os padrões de rigor matemático tornaram-se muito mais elevados e se percebeu que o trabalho de Euclides, embora admirável, era, de fato, defeituoso, do ponto de vista lógico. Há inúmeras passagens nas demonstrações de Euclides em que as hipóteses enunciadas não são suficientes para fazer que a conclusão apareça como decorrendo apenas da Lógica formal.

Um exemplo de falha desse tipo está na demonstração da Proposição I do Livro Primeiro: “Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada”, citada em

BICUDO (2009) pág. 99.

Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.

Figura 3 – Proposição I de Euclides



Fonte: Bicudo

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB. E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.

Na demonstração, dada a "reta limitada" (segmento) AB, Euclides pede que se tracem duas circunferências de raio AB, respectivamente centradas nos pontos A e B. A seguir, Euclides diretamente toma o ponto C, "no qual os círculos se cortam". O que justifica que exista um ponto onde as circunferências se cortem? Por que, se existir, esse ponto é único?

Euclides não se vale de nenhum postulado de qual se deduza a existência e unicidade do ponto C. Não existe em *Os Elementos* algum postulado que assegure a continuidade de segmentos e circunferências. Existe, então, uma brecha lógica em seu raciocínio; das premissas realmente apresentadas não se infere mediante a Lógica formal, que exista um ponto como o C. Para resolver essa falha, poder-se-ia introduzir um novo postulado capaz de atestar que se uma linha no plano fica dividida em duas partes (por exemplo, o interior e o exterior do círculo), então qualquer outra linha que tiver pelo menos um ponto situado em cada parte, corta à fronteira da primeira linha em pelo menos um ponto. Um postulado adicional desse gênero é necessário no sistema euclidiano.

O que teria levado Euclides e a maioria de seus leitores, durante séculos, a cometer um erro lógico como o descrito? A primeira questão a levantar é que naquela época o conceito de “demonstração logicamente rigorosa” era diferente do que temos hoje. Durante toda a história da Matemática podemos ver uma evolução dos padrões de rigor lógico nas demonstrações. Por exemplo, no século XVIII o eminente matemático Niels Abel num artigo sobre o Curso de Análise de Cauchy diz: *O excelente tratado de Cauchy "Cours d’Analyse de l’ Ecole Polytechnique", deve ser estudado por todo analista que goste do rigor na pesquisa matemática.*

Um pouco depois expressa, se referendo ao teorema do livro que expressa que a soma de uma série convergente de funções contínuas é convergente: *Me parece que este teorema sofre de exceções*. Imagine atualmente falar de um teorema com exceções! É um erro julgar severamente a forma em que era construída a Matemática faz séculos, comparando-a com os paradigmas de rigor surgidos na escola formalista de fins do século XIX.

Com certeza, é a figura que acompanha a demonstração a que induz a aceitar sem objeções a existência e unicidade do ponto C. A existência desse ponto parecia tão óbvia que a ninguém se lhe ocorreu solicitar a demonstração. A situação é a mesma em outras várias demonstrações: as conclusões não são inferidas com auxílio exclusivo da Lógica formal. O raciocínio de Euclides é altamente didático e convincente, apoiado nas figuras que retratam as ideias geométricas e convencem da validade da demonstração. Os geômetras daquela época e durante séculos posteriores recorriam ao uso de figuras para construir as demonstrações dos teoremas.

As críticas ao rigor lógico-formal de Euclides foi tomando força com o tempo e no século XIX era já uma opinião consensual entre os matemáticos. Existem opiniões divergentes no relativo à utilização de figuras nas demonstrações, como a manifestada na tese doutoral de Lopez Vaz. Dela extraímos o seguinte texto (pág. 6):

> À luz de trabalhos recentes acerca do tema, pretende-se promover, em particular, uma nova avaliação daquele que é considerado o primeiro sistema dedutivo rigoroso na história da matemática: a geometria de Euclides, sistematizada nos seus Elementos. Com efeito, a utilização dos diagramas (figuras) como partes essenciais das demonstrações neste sistema fez com que, na modernidade, tal sistema fosse considerado um exemplo de sistema informal, no qual as demonstrações são meros esboços do que seriam verdadeiras demonstrações.

(VAZ, 2010) estabelece ainda que estas, de acordo com a concepção de demonstração que é comum na modernidade, devem ser compostas exclusivamente de fórmulas, as quais podem ser derivadas umas das outras apenas com base em regras lógicas ou princípios explícitos de antemão (o autor se refere aos sistemas dedutivos axiomáticos formais). Uma vez que tal concepção tornou-se dominante, por conta de diversos fatores nem sempre interligados, os diagramas que faziam parte das demonstrações euclideanas passaram a ser vistos como uma das principais causas de uma alegada falta de rigor por parte das mesmas. Para devolver às demonstrações matemáticas o rigor que lhes é necessário, autores como Hilbert e Pasch propuseram reconstruções formais da obra de Euclides, nas quais as demonstrações prescindem totalmente dos diagramas (figuras). No presente trabalho pretende-se reconstruir a sequência de eventos que levou ao declínio das representações diagramáticas (uso das figuras em demonstrações formais) em geometria, bem como mostrar que é possível uma interpretação da obra de Euclides que leve em conta a participação dos diagramas (das figuras) nas demonstrações, sem que com isso as demonstrações sejam deficientes em termos de rigor.

Na mesma fonte aparece um resumo das críticas modernas ao método em *Os Elementos*.

Kline, em Mathematical Thought – From Ancientto Modern Times, oferece na descrição do declínio da matemática grega uma boa síntese das fontes de descontentamento com a obra de Euclides na modernidade. Em suma, as queixas mais comuns envolvem: (i) a ausência de justificação para a determinação de pontos por meio da intersecção de linhas no diagrama; (ii) a falta de generalidade que a escolha de uma configuração diagramática pode ocasionar; (iii) o uso do método de superposição; (iv) a falta de um tratamento adequado para casos envolvendo a noção de infinito; e (v) as limitações impostas pela escolha da construtibilidade como critério de existência e pela restrição às linhas planares para a solução dos problemas.

À luz das concepções formalistas nos fundamentos da Matemática surgidas no século XIX, a consistência da Geometria Euclidiana não mais podia ser garantida pela correspondência do modelo euclidiano com o mundo real. Os matemáticos assumiram a tarefa da prova da sua consistência. Os trabalhos de Pasch Veronese (o primeiro que tratou formalmente do assunto em 1882), Pieri e especialmente Hilbert (na sua obra Grundlagen der Geometrie, em 1899) provaram essa consistência com o devido rigor.

O trabalho de Pasch era difícil de compreender e não teve popularidade, ao invés do trabalho de Hilbert[4]. Hilbert manteve seu sistema axiomático formal próximo da ideia original de Euclides nos *Elementos*, mas sem ter nenhuma intenção de mostrar um vínculo com a realidade empírica. Este fato se corrobora, talvez, pela famosa frase a ele atribuída em 1892, durante uma palestra de Hermann Wiener: "devemos ser capazes de nos referir sempre–ao invés de pontos, linhas e planos – a mesas, cadeiras

[4] David Hilbert (1862-1943), alemão, é um dos mais notáveis matemátcos já conhecido. Os tópicos de sua pesquisa são fundamentais em diversos ramos da Matemática atual.

e canecas de cerveja”.

3 HISTÓRIA DAS PESQUISAS RELACIONADAS COM O V POSTULADO

"Nem tudo pode ser provado, já que, de outra maneira, a cadeia das provas seria interminável. Como temos de começar em algum sítio, começamos com coisas que admitimos, mas que são indemonstráveis".

Aristóteles.

O V Postulado é uma das pedras angulares sobre as quais descansa a grandiosidade de *Os Elementos* de Euclides, mas também tem sido a causa dos mais severos ataques a seu sistema geométrico. As discussões e pesquisas sobre o assunto começaram praticamente desde a publicação dos *Elementos* e, somente no século XIX, com o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas, ficou definitivamente esclarecida a problemática referente ao V Postulado. Neste capítulo apresentamos um resumo dessas controvérsias, o denominado *Problema das Paralelas*, trama longa e complicada, e seus desdobramentos nos Fundamentos da Matemática. A história do Problema das Paralelas mostra de forma admirável que a Matemática não é uma ciência rígida e dogmática, mas dinâmica e em constante superação das dificuldades.

3.1 TENTATIVAS DE DEMONSTRAÇÃO DO V POSTULADO COMO UM TEOREMA

Salta à vista que a formulação não tem a simplicidade presente nos quatro primeiros postulados, não possui a evidência presente neles. A complexidade do enunciado faz lhe parecer um teorema mais do que um postulado. Por essa razão, o V Postulado chamou a atenção dos matemáticos e gerou dúvidas durante muitos séculos. Será que poderia ser demonstrado a partir dos outros quatro postulados? Muitos matemáticos tentaram inutilmente demonstrá-lo durante séculos, sem nenhum resultado positivo.

O V Postulado "debuta em cena" em *Os Elementos* na demonstração da proposição 29, cujo enunciado original BICUDO (2009) pág. 120 é:

> A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.

Na terminologia moderna pode-se enunciar: *Quando uma reta corta duas paralelas tem-se que: os ângulos alternos internos são iguais; os ângulos correspondentes são iguais e os ângulos colaterais internos são suplementares.*

Para provar as 28 proposições anteriores são suficientes os quatro primeiros postulados, mas para demonstrar a proposição 29 é imprescindível assumir o V postulado.

Desde Euclides até o século XIX, a análise do V Postulado foi assunto presente nas pesquisas em Geometria. O objetivo era provar que o V Postulado não era realmente um postulado, mas uma proposição que poderia ser provada assumindo somente os quatro primeiros postulados, isto é, era um teorema. Simbolicamente, pretendiam provar que $P_1 \bigwedge P_2 \bigwedge P_3 \bigwedge P_4 \Rightarrow P_5$. Alguns historiadores da Matemática especulam que o próprio Euclides teve essa percepção, argumentando que ele evitou no possível sua utilização nas demonstrações, ainda ao custo de fazê-las mais complicadas, e que provou o enunciado recíproco do V Postulado.

Durante todo esse longo período propuseram-se muitas supostas demonstrações do V postulado, mas todas tinham erros. Frequentemente seus autores utilizavam alguma afirmação geométrica equivalente ao V Postulado, mas que era tão evidente que se infiltrava nos raciocínios sem ser percebido pelo próprio autor. Ao submeter as pretensas demonstrações a uma análise lógica rigorosa se descobria o círculo vicioso. Muitos matemáticos gastaram seu tempo e energias tentando provar o V Postulado como um teorema. A seguir apresentamos algumas dessas tentativas. Existem relatos que num tratado perdido de Arquimedes sobre a Teoria das Paralelas aparecia uma tentativa de demonstração do V Postulado.

Em um livro de Claudio Ptolomeu (Alexandria, século II), intitulado: *Que linhas prolongadas de ângulos menores que dois ângulos retos encontram-se uma com a outra*, que infelizmente também se perdeu, aparece uma tentativa de demonstração do V Postulado. Sabemos disso pelos comentários de Proclo (século V) sobre essa obra de Arquimedes. Ao ler o título do livro de Ptolomeu se percebe que se trata do V Postulado, pois os ângulos a que se refere são os descritos no enunciado desse postulado.

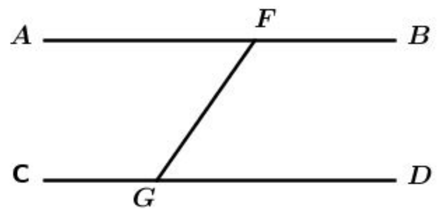
Proclo não reproduz toda a argumentação de Ptolomeu, mas apresenta as demonstrações feitas por Ptolomeu das proposições 28 e 29 dos *Elementos* de Euclides, sem apelar ao V Postulado. Sabemos que é impossível provar a proposição 29 sem assumir o V Postulado ou alguma formulação equivalente, logo em algum lugar há um erro. A seguir, Ptolomeu prova, a partir da proposição 29, o V Postulado. Nesta última parte Ptolomeu está correto, pois se se assume a proposição 29, pode se deduzir o V Postulado.

Enunciado da Proposição 28, em Bicudo: *Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto e no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas entre si.*

MARQUES (2004) reproduz as demonstrações de Ptolomeu transcritas por Proclo, e faz uma análise lógica dos erros que conduziram a Ptolomeu a acreditar que tinha provado o V Postulado. Resumindo, ele argumenta que:

- Ptolomeu utiliza uma definição de paralelismo coincidente com a de Euclides.
- Na demonstração da proposição 28, num passo ele comete um erro lógico na negação de uma proposição que utilizará para uma prova por redução ao absurdo. Esse erro não traz consequências, pois é possível fazer a demonstração correta da proposição que Ptolomeu utilizou.
- Na demonstração da proposição 29, o próprio Proclo comenta que Ptolomeu não poderia assumir que (Figura 4): se AB e CD são paralelas, como FB e GD são tão paralelas de um lado quanto AF e CG são do outro, então a soma dos ângulos internos de um lado teria de ser igual à soma dos ângulos internos do outro.

Figura 4 – Retas paralelas de Ptolomeu



Fonte: Marques

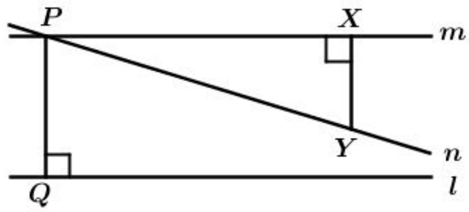
Na realidade, afirmar que FA e GC são tão paralelas para um lado quanto FB e GD são para o outro, é equivalente a afirmar que, por qualquer ponto exterior a uma reta, passa uma única paralela (Axioma de Playfair), que é equivalente ao V Postulado de Euclides, como veremos mais tarde. Logo, a demonstração é incorreta.

Proclo Lício (412-485 d.C.) em seus comentários ao Livro I, criticou duramente o V Postulado, escrevendo: *"Deve ser apagado por completo dos postulados porque se trata de um teorema cheio de dificuldades,*[...] *, e sua demonstração requer várias definições e teoremas. Ainda mais: a proposição recíproca é efetivamente demonstrada pelo próprio Euclides como um teorema. A afirmação de que quando as retas são prolongadas mais e mais, alguma vez se cortarão parece plausível, mas não necessária. Por isto, é claro que devemos dar uma prova deste teorema, que é alheio ao caráter especial dos postulados."*

(PARICIO, 2001), pág. 12 reproduz uma "demonstração” do V Postulado devida ao próprio Proclo (Figura 5): Sejam m e l, duas retas paralelas. Suponhamos que a reta

n é distinta de m e que corta a m no ponto P. Seja Q o pé da perpendicular desde P à l. Vejamos que n corta l. Se n coincide com a reta PQ, n corta l. Se n não coincide com a reta PQ, uma das semirretas de n, a PY está entre a semirreta PQ e uma semirreta de m. Seja X o pé da perpendicular de Y até m. Agora, se Y se desliza até o final de n, o segmento XY cresce indefinidamente e como a distância entre m e l é constante, em algum momento deverá cruzar l.

Figura 5 – Retas paralelas segundo Proclo



Fonte: Paricio

Paricio observa dois erros na argumentação de Proclo: (i) Uma grandeza pode crescer indefinidamente sem ultrapassar uma cota superior predeterminada; (ii) Não pode ser pressuposto que a distância entre m e l é constante. Na hipótese está assumido que as retas m e l são paralelas, mas dizer que "a distância entre duas retas paralelas é constante", é outra hipótese, de fato, equivalente ao V Postulado.

Os matemáticos árabes também estudaram a teoria das paralelas, mas sem obter resultados significativos. Como se sabe, o Islã iniciou a sua expansão no ano de 622, com a Égira, data da fuga do profeta Maomé, de Meca para Medina. Rapidamente se expandiu de uma forma extraordinária através de várias conquistas: Damasco (635); Jerusalém (638); Alexandria (643) e Cartago (698). Constantinopla sofreu assédios em 673 e 717. Em 711 chegam à Espanha e ali se fixam após as derrotas para os franceses, em 732. Com o passar do tempo Bagdá se converteu na "nova Alexandria", isto é, no principal polo da cultura da época. Os Califas de Bagdá foram, em geral, protetores da cultura. Nesse contexto muitas obras matemáticas foram traduzidas ao árabe. As matemáticas dos árabes foram muito destacadas em álgebra, aritmética e trigonometria.

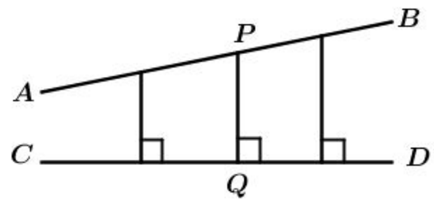
Registramos algumas tentativas,por parte de matemáticos árabes, de demonstrar o V Postulado, tomado também de Marques.

Ibn-al-Haitham (aproximadamente 965-1039), chamado Alhazen no Ocidente, deu uma tentativa de demonstração argumentando que se um quadrilátero tem três ângulos retos, então o quarto também é reto. Na sua prova, supôs que o lugar geométrico dos pontos equidistantes à uma dada reta é uma reta, caindo na armadilha da equidistância entre as paralelas. A afirmação de que existam duas retas equidistantes é equivalente ao V Postulado. Por outro lado, a propriedade que afirma que num quadrilátero, se três dos seus ângulos são retos também é o quarto, também equivale ao V Postulado.

Para os árabes o nome de Omar Khayyam (1050-1123) é muito conhecido pelas contribuições na astronomia e na álgebra. Os escritos de Omar sobre a teoria das paralelas aparecem em *A Verdade das Paralelas e a Discussão sobre a famosa dúvida* que ocupa a parte I da sua "Discussão sobre as dificuldades de Euclides". Omar Khayyam estudou, 600 anos antes que Saccheri, quadriláteros $ABCD$ em que AB é congruente a CD e os ângulos em A e D são retos.

O persa Nasiraddin-Tusi (1201-1274), astrônomo e matemático, escreveu um tratado sobre a geometria euclidiana e parece ter sido o primeiro a chamar a atenção para a importância, no estudo do quinto postulado, do teorema da soma dos ângulos de um triângulo. Em sua tentativa de provar o V Postulado encontra os germes de ideias importantes que seriam desenvolvidas mais tarde. Nasiraddin apresenta uma demonstração onde começa assumindo como evidente que se duas retas AB e CD são cortadas por uma reta PQ, perpendicular apenas a uma delas, então, as distâncias medidas nas perpendiculares de AB para CD são menores do que PQ no lado em que AB faz um ângulo agudo com PQ, e são maiores onde AB faz um ângulo obtuso (Figura 6).

Figura 6 – Suposição de Nasiraddin-Tusi

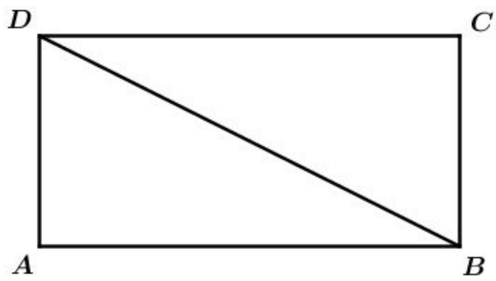


Fonte: Marques

Em seguida, ele introduziu uma figura destinada a se tornar famosa. Nas extremidades de um segmento AB (Figura 7) ele desenhou igualmente perpendiculares AD e BC do mesmo lado, em seguida, juntou-se C e D.

Para provar que ângulos CDA e DCB são ângulos retos, ele recorreu a *reductio ad absurdum*, usando, sem muito cuidado, a suposição mencionada acima. Assim, se o ângulo DCB fosse agudo, DA seria menor do que CB, ao contrário da realidade. Daí ângulo DCB não é agudo. Nem é obtuso. É claro que ele tacitamente assumiu aqui que, quando o ângulo DCB é agudo, ângulo CDA deve ser obtuso. Seu argumento levou à conclusão de que todos os quatro ângulos do quadrilátero são ângulos retos. Em seguida, se DB está empatado, os triângulos ABD e CDB são congruentes e a

Figura 7 – Gráfico II de Nasiraddin



Fonte: Autor

soma dos ângulos internos de cada um é igual a dois ângulos retos.

Se tudo tivesse até aqui sido rigorosamente provado, o V Postulado seguiria facilmente. Nasiraddin apresentou uma prova elaborada e exaustiva, mas sua suposição inicial, de fato implicitamente pressupõe o V Postulado. Mais uma vez, uma tentativa falida.

No ocidente, um dos primeiros centros de ensino foi o criado por Gerberto de Aurillac (940-1003), na cidade francesa de Reims. Ele foi um monge beneditino francês formado em Barcelona, nasceu em Auvernia, sul da França, em 940. Gerberto entrou em contato também com a ciência árabe no coração da Catalunha e isto lhe permitiu adquirir uma sólida formação científica. Como um dado curioso, de 999 até seu falecimento em 1003, Gerberto foi papa da Igreja Católica, com o nome de Silvestre II.

Como matemático ele foi o primeiro que introduziu o sistema numérico arábico e expôs suas vantagens em relação à numeração tradicional romana com as letras I, V, X, L, C, D, M. No entanto, não teve êxito com sua proposta, que acabaria sendo adotada duzentos anos mais tarde.

Gerberto também estudou o paralelismo, dentre suas obras está a intitulada "Geometria", mas não existem registros de que tenha tentado provar o V Postulado. Nessa obra, se encontra a seguinte definição: *Duas linhas retas distintas continuamente uma da outra pelo mesmo espaço e que quando se prolongam indefinidamente nunca se cortam se denominam paralelas; ou seja, equidistantes.*

Como se observa ele também caiu no "pecado" de embutir a equidistância na definição de retas paralelas.

Possivelmente, o rabi de Avinhon conhecido por Gersónides (1288-1344) foi o primeiro ocidental que analisou o Postulado das Paralelas. Ele trabalhou com quadriláteros equiláteros e equiângulos. A proposição que estabelece que os ângulos de um quadrilátero equilátero e equiângulo são retos é também é equivalente ao V Postulado.

Em 1584, na cidade de Roma, Clavius publicou uma edição impressa comentada dos *Elementos* de Euclides. Nessa edição, às 468 proposições originais de Euclides foram adicionadas mais 671, devidas a Clavius, totalizando 1234 proposições geométricas. Clavius foi chamado por alguns do Euclides do século XVI. Nessa obra monumental ele incluiu uma demonstração do V Postulado, na qual de novo se utilizava o argumento errado de que uma linha equidistante a uma linha reta é uma reta.

Dos múltiplos trabalhos dedicados ao V Postulado, merecem especial menção os de Saccheri e Lambert, que deixaram uma pegada significativa no caminho da fundamentação da teoria das paralelas.

O italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) ingressou na ordem dos jesuítas aos 23 anos, foi professor de Teologia num colégio da ordem em Milan e posteriormente lecionou filosofia em Turim. Mais tarde foi professor de Matemática na Universidade de Pavia. Nesse período se manifestou seu extraordinário talento para a Matemática, especialmente motivado pelo estudo dos *Elementos* de Euclides. Saccheri ficou admirado pela potência da dedução lógica, em particular pelo método de redução ao absurdo. Posteriormente publicou a "Lógica Demonstrativa", onde aplicava seu método favorito, *reductio ad absurdum*.

Juntando suas habilidades na lógica com o conhecimento dos trabalhos de outros matemáticos sobre as paralelas, se adentrou no trabalho de pesquisa para resolver o Problema das Paralelas. Mas, tomou um caminho diferente do assumido pelos seus predecessores. Saccheri concentrou seus esforços na análise das consequências de negar o V postulado, assumindo os quatro primeiros. Sua esperança era deduzir uma contradição que permitisse, por redução ao absurdo, provar o V Postulado. Mas, Sachieri não obteve o que procurava, não achou contradição alguma. Curiosamente, demonstrou muitos resultados "estranhos", que seriam considerados mais tarde como teoremas da Geometria Não-Euclidiana, especificamente da Geometria Hiperbólica. Ele não enxergou o extraordinário valor dos resultados que havia encontrado. Os descartou por causa da sua fé cega na validade do V Postulado.

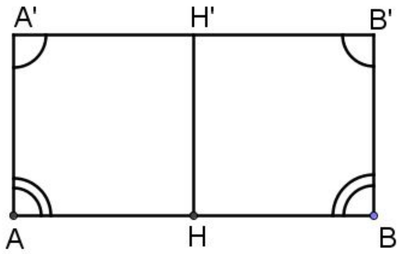
Saccheri apresenta no final da obra uma prova equivocada do V Postulado. Alguns estudiosos especulam que essa prova, com "uma gritante falha de argumentação e completamente fora da sagacidade da sua obra", foi devida ao medo da censura da Igreja. Essa opinião é muito discutível. Sua fidelidade a Euclides e o convencimento de que a Geometria Euclidiana era a única possível, são a explicação mais provável. Segundo (AYALA, 2009):

> Aún cuando Saccheri entró en el "selecto” grupo de los que fracasaron con el problema delpostulado de las paralelas de Euclides y aunque la lista continuó aumentando algún tiempo después con matemáticos como D'Alambert y Legendre, dejó abierto el camino para que alguien diera ese paso decisivo de aceptar y construir rigurosamente una nueva geometría. Quizás Saccheri pudo haber sido la figura que diera fin

> al famoso problema si, como dijimos antes, sehubiera liberado de la influencia de un mundo euclidiano.

A seguir apresentamos alguns detalhes das ideias de Saccheri, tomadas de EFÍMOV (1998).

Figura 8 – Ângulos de um quadrilátero.



Fonte: Autor

Saccheri parte do quadrilátero $AA'BB'$ (Figura 8) com dois ângulos retos na base AB e dois iguais, AA' e BB'. Da simetria da figura em relação a perpendicular HH' até a metade da base AB, segue que os ângulos nos vértices A' e B' são iguais entre si. Se é aceito o V Postulado e, em conseqüência, a teoria euclidiana das paralelas, se pode estabelecer imediatamente que os ângulos A' e B' são retos, e $AA'BB'$ é um retângulo. Reciprocamente, como mostra Saccheri, se ao menos em um quadrilátero do tipo indicado os ângulos da base superior resultam ser retos, ocorre no postulado euclidiano das paralelas. Com objetivo de demonstrar esse postulado, Saccheri considera três casos possíveis: ou os ângulos A' e B' são retos, ou obtusos, ou agudos. Essas três hipóteses se chamam, respectivamente, hipótese do ângulo reto, do obtuso e do agudo. Como a hipótese do ângulo reto equivale ao V postulado, a fim de demonstrá-lo, devemos descartar as outras hipóteses. Com raciocínios totalmente rigorosos, Saccheri chega, antes de tudo, a uma contradição com a hipótese do ângulo obtuso. A continuação, adotando a hipótese do ângulo agudo, deduz consequências extremamente elaboradas de tal premissa, a fim de obter também aqui duas afirmações contraditórias.

Ao desenvolver estas consequências, Saccheri constrói um sistema geométrico complexo, das quais algumas proposições são tão contraditórias com nossas ideias habituais sobre a disposição das retas no plano, que poderiam ser consideradas absurdas. Por exemplo, em um sistema geométrico correspondente a hipótese do ângulo agudo, duas paralelas têm ou uma única perpendicular comum, a ambos os lados da qual estas se afastam indefinidamente uma da outra, ou não possuem nenhuma, no caso em que convirjam assintoticamente em um sentido e divirjam indefinidamente em outro.

Para EFÍMOV (1998) pág.18:

> Saccheri, com justiça, não considera somente a contradição com as ideias intuitivas das representações habituais no espaço seja um argumento para a invalidação lógica destas premissas. Mas, depois de uma série de raciocínios precisos, Saccheri conclui a falsidade da hipótese do ângulo agudo, baseando-se em que duas retas que se convergem assintoticamente devem ter uma perpendicular comum em um ponto do infinito, coisa que *contradiz a natureza da reta*.

Aceitando que, deste modo, as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo conduzem a contradições, Saccheri conclui que a única verdadeira hipótese é a hipótese do ângulo reto, com o que é demonstrado no V Postulado. Evidentemente, o próprio Saccheri sente aqui que pode reduzir a hipótese do ângulo agudo a uma contradição lógica e ele regressa a ela, a fim de demonstrar que *contradiz a si mesma*. Com este fim, calcula de duas maneiras diferentes o comprimento de certa linha e obtém dois valores distintos para ela. Isto seria, com efeito, uma contradição, mas Saccheri chegou a ela cometendo um erro de cálculo.

Na pesquisa histórica, às vezes, encontramos opiniões divergentes ou parcialmente divergentes. Tal é o caso em relação ao impacto da obra de Saccheri. Em Paricio, pág. 5, encontramos:

> El libro de Saccheri atrajo una considerable atención en el tiempo de su publicación. En las historias de matemáticas realizadas en Alemania y Francia durante el siglo XVIII se menciona dicho libro. Sin embargo, en Francia e Italia pronto se olvidó esta obra aunque no ocurrió lo mismo en Alemania.

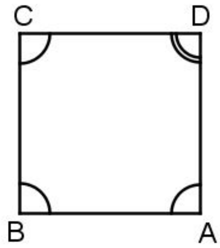
A verdadeira dimensão dos resultados de Saccheri só foram justamente avaliados à luz das Geometrias Não-Euclidianas.

Posteriormente, o matemático suíço-alemão Johann Heinrich Lambert (26 de agosto de 1728 - 25 de setembro de 1777) escreveu a obra póstuma intitulada *Die Theorie der Parallel linien* (A Teoria das Paralelas). No seu trabalho Lambert também pesquisou se o V Postulado poderia ser deduzido dos quatro primeiros, ou se seria necessária alguma hipótese adicional. Depois listou diferente proposições que se provadas implicavam o V Postulado.

As ideias de Lambert, desenvolvidas na obra *Teoria das linhas paralelas* (1766) se aproximam aos raciocínios de Saccheri. Lambert considera o quadrilátero ABCD com os três ângulo A, B e C retos (Figura 9).

Em relação ao quarto ângulo podem-se fazer três suposições; ou é agudo, ou é reto, ou é obtuso. Deste modo, surgem aqui novamente três hipóteses. Uma vez estabelecida a equivalência da hipótese do ângulo reto com o V Postulado e havendo reduzido a uma contradição a hipótese do ângulo obtuso, Lambert como Saccheri, se vê obrigado a analisar mais a hipótese do ângulo agudo. E novamente

Figura 9 – Teoria das linhas paralelas.



Fonte: Autor

esta hipótese conduz Lambert a um sistema geométrico complicado. No entanto, apesar de que este sistema foi profundamente desenvolvido por Lambert, não foi possível encontrar contradição lógica alguma. Também no trabalho de Lambert se encontram as particularidades, paradóxicas a primeira vista, da disposição das retas em um sistema baseado na hipótese do ângulo agudo, que foi exposto mais acima, ao descrever as ideias de Sachheri. Lambert, como Saccheri, não deduziu a falsidade da hipótese do ângulo agudo baseando-se unicamente em que estas particularidades contradizem nossas ideias intuitivas sobre as propriedades das retas. Mas, a diferença de Saccheri, é não cometer erro algum, que lhe dera legitimidade para considerar descartada a hipótese do ângulo agudo e, portanto, demonstrado o V Postulado. Lambert não afirma, em nenhuma parte de sua obra, haver demonstrado o V Postulado e chega a firme conclusão de que as restantes tentativas nesta direção não levaram a meta desejada.

Em EFÍMOV (1998) pág.19:

> As demonstrações do postulado euclidiano – escreve Lambert – podem ser levadas tão longe que, a primeira vista, são um detalhe insignificante. Mas, ao fazer uma análise escrupulosa, resulta que reside nesta aparente insignificância, precisamente, a essência do problema; comumente esta contém ou a proposição a demonstrar, ou um postulado equivalente a ela.

E mais, ao desenvolver o sistema de corolários da hipótese do ângulo agudo, Lambert descobre uma analogia deste sistema com a geometria esférica e vê nisto uma possibilidade de sua existência. Mais adiante veremos que Lambert previu genialmente a verdadeira solução do problema do V Postulado. Em todo caso, ele seguiu o caminho correto muito mais longe do que qualquer um dos que o precederam.

Agora vamos nos deter a analisar as investigações de Legendre[1] , que é bem conhecido por seus trabalhos em análises e em mecânica, e deixou uma herança importante em geometria.

---

[1] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês, fez importantes contribuições à estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática.

Legendre tentou, durante muito tempo, demonstrar o V Postulado e chegou a publicar algumas variantes de sua "demonstração". Apesar de que nenhuma teve um correto resultado, de todos os modos os raciocínios de Legendre têm interesse, pois deixam clara a relação existente entre o V Postulado e a proposição relacionada com a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Na geometria de Euclides a demonstração é bem conhecida, baseada no V Postulado, de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos. Legendre mostra, primeiramente, que, reciprocamente, se admite sem demonstração que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, o V Postulado pode ser demonstrado como um teorema.

Logo, com a finalidade de obter uma demonstração do V Postulado sem introduzir outros novos, Legendre considera três hipóteses exclusivas:

I. A soma dos ângulos de um triângulo é maior que dois retos.

II. A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos.

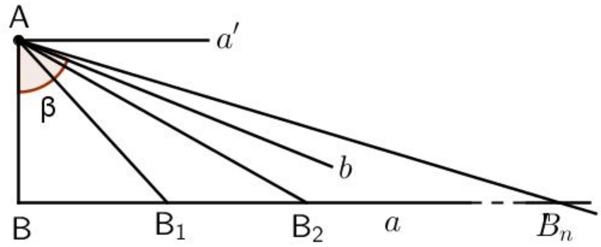
III. A soma dos ângulos de um triângulo é menor que dois retos.

A primeira é reduzida a uma contradição por Legendre, mediante raciocínios exatos. Se pudesse fazer o mesmo com a terceira, sem usar o V Postulado, haveria demonstrado que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos, com o qual haveria demonstrado o V Postulado. No entanto, ao efetuar a redução da terceira hipótese a uma contradição, Legendre utilizou, sem se dar conta, uma das proposições equivalentes ao V Postulado.

O saldo positivo do trabalho de Legendre se encontra nas seguintes proposições:

Proposição 3.1.1. *Se a soma dos ângulos de cada triângulo é igual a dois ângulos retos, ocorre o V Postulado.*

Figura 10 – Proposição 3.1.1



Fonte: Autor

Para provar, tomemos uma reta arbitrária a e algum ponto A que não pertence a reta (Figura 10).

Seja AB a perpendicular a reta a que passa por B. Sabemos que a reta a', que passa por A e é perpendicular ao segmento AB, não intersecta a. Devemos mostrar que qualquer outra reta que passa por A corta a. Na demonstração que segue utilizaremos a hipótese adotada de que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois retos.

Seja b alguma reta que passa por A e β o ângulo que esta reta forma com o segmento AB. Provemos que b corta a do lado do ângulo agudo. Com este fim, determinemos sobre a reta a, um ponto B_1 de forma que o segmento BB_1 seja igual ao AB. Do mesmo lado a partir de B_1 determinemos o ponto B_2 de modo que B_1B_2 seja igual a AB_1, etc. Determinemos, por fim, o ponto B_n de modo que $B_{(n-1)}B_n$ seja igual ao segmento $AB_{(n-1)}$.

Consideremos os triângulos ABB_1, AB_1B_2, ..., $AB_{(n-1)}B_n$. Como admitimos que a soma dos ângulos de cada triângulo é igual a dois ângulos retos, devemos ter que no triângulo isósceles AB_1B_2 os ângulos internos nos vértices A e B_1 são iguais a $\frac{\Pi}{4}$.

Logo, o ângulo interno correspondente a B_1 no triângulo ABB_1 é externo em relação ao triângulo AB_1B_2, e como este último é também isósceles, seus ângulos internos não adjacentes a B_1 serão iguais entre si. Mas da hipótese feita acerca da soma dos ângulos de um triângulo segue-se que um ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele; por isso, os ângulos internos do triângulo AB_1B_2 nos vértices A e B_2 são iguais a $\frac{\Pi}{8}$ cada um. Continuando esse processo, teremos que o ângulo interno correspondente a B_n no triângulo $AB_{(n-1)}B_n$ é igual a $\frac{1}{2^n}.\frac{\Pi}{2}$.

Daqui segue que $\angle\, BAB_n = \frac{\Pi}{2} - \frac{1}{2^n}.\frac{\Pi}{2}$.

Como β é um ângulo agudo, podemos por $\beta = \frac{\Pi}{2} - \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$. Escolhemos n tão grande para que se cumpra $\frac{1}{2^n}.\frac{\Pi}{2} < \varepsilon$.

Então, devemos ter que $\beta < \angle BAB_n$.

Neste caso, a reta b passa entre os lados AB e AB_n do triângulo BAB_n e, como consequência, terá um ponto comum com a reta a, situado entre os pontos B e B_n. Isto prova nossa afirmação.

Passemos agora a discutir o problema sobre os possíveis valores da soma dos ângulos internos de um triângulo. Para maior comodidade, designaremos por $S(\Delta)$ a soma dos ângulos internos de um triângulo Δ, e por $D(\Delta)$, a diferença entre dois ângulos retos, de forma que $D(\Delta) = \Pi - S(\Delta)$; esta diferença é muitas vezes chamada de defeito do triângulo.

Proposição 3.1.2. *Em cada triângulo* $S(\Delta) \leq \Pi$.

A demonstração se baseia nos dois lemas seguintes:

I Em cada triângulo a soma de dois ângulos internos é menor que dois ângulos retos.

II Para cada triângulo é possível construir um novo que tenha a mesma soma de ângulos internos que o triângulo dado e com pelo menos um de seus ângulos duas vezes menor que algum ângulo prefixado do triângulo dado.

Demonstraremos estes lemas.

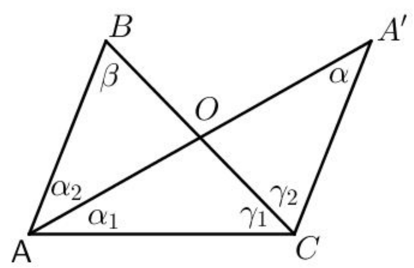
O primeiro segue diretamente da proposição que se refere aos ângulos interno e externo de um triângulo. Com efeito, sejam α e β ângulos internos de um certo triângulo, e α' o ângulo externo deste triângulo que é adjacente a α. Então:

$$\alpha + \alpha' = \Pi. \tag{3.1}$$

Mas o ângulo externo de um triângulo é maior que o interno não adjacente a ele. Assim, para $\alpha' > \beta$ e, portanto $\alpha + \beta < \Pi$.

Para demonstrar o segundo lema, consideremos algum triângulo ABC e mostraremos que é possível construir um novo que tenha a mesma soma de ângulo que o triângulo dado, e que possua pelo menos um ângulo duas vezes menor que, digamos, o ângulo do vértice A do triângulo dado (Figura 11).

Figura 11 – Lema II.



Fonte: Autor

Designamos com O o ponto médio de BC, unimos A com O e prolongamos o segmento AO até o ponto A', de forma que $AO = OA'$. Então o triângulo $AA'C$ terá a propriedade requerida. Com efeito, com as notações da figura 11, teremos:

$$S(ABC) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1. \tag{3.2}$$

$$S(AA'C) = \alpha_1 + \alpha' + \gamma_1 + \gamma_2. \tag{3.3}$$

Da igualdade dos triângulos ABO e COA', que se considera de imediato, segue que $\alpha' = \alpha_2$, $\gamma_2 = \beta$. Daqui, antes de tudo, segue que os triângulos ABC e $AA'C$ têm igual soma de ângulos.

Também, os ângulos internos do segundo triângulo correspondentes aos vértices A e A' formam, somados, o ângulo ao vértice A do primeiro. Por isso, algum deles é ao menos duas vezes menor que o ângulo prefixado A do triângulo ABC, que é o que se desejava mostrar.

Vamos agora à demonstração da proposição básica. Faremos a demonstração por redução ao absurdo.

Supondo que algum triângulo $\triangle$ tenha soma de ângulos internos maior que dois ângulos retos, de forma que $S(\triangle) = \Pi + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$.

Denotamos um dos ângulos internos de $\triangle$ com α. Segundo o lema II, podemos construir um novo triângulo $\triangle_1$, tal que um de seus ângulos internos α_1 seja pelo menos duas vezes menor que α e que $S(\triangle_1) = S(\triangle)$. Construamos agora um triângulo $\triangle_2$ de maneira que um de seus ângulos internos α_2 seja pelo menos duas vezes menor que α_1 e que $S(\triangle_2) = S(\triangle_1)$. Continuando este processo, construímos um triângulo α_n, tal que um de seus ângulos internos α_n será ao menos duas vezes menor que $\alpha_{(n-1)}$,e que $S(\triangle_n) = S(\triangle_{(n-1)})$. Deste modo:

$$S(\triangle) = \Pi + \varepsilon \tag{3.4}$$

$$\alpha_n \leq \frac{\alpha}{2^n} \tag{3.5}$$

Escolhemos n tão grande para que seja $\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$ e, consequentemente $\alpha_n < \varepsilon$. Então a soma dos outros dois ângulos internos do triângulo $\triangle_n$ será maior que Π, o qual contradiz o lema I.

Podemos dizer, portanto, sem depender do V postulado, que a soma dos ângulos internos de um triângulo não supera a soma de dois retos.

Isso prova ser extremamente importante para o que se segue. Seguinte a Legendre, agora mostraremos, sem recorrer ao V Postulado, que se supomos que ao menos para um triângulo a soma de seus ângulos internos é igual a dois retos, então para todos os outros triângulos a soma de seus ângulos também será igual a dois retos.

Estabeleçamos alguns lemas prévios.

I. *Se o triângulo ABC se divide em dois pela transversal BP, o defeito de ABC será igual à soma dos defeitos dos triângulos ABP e BPC.*

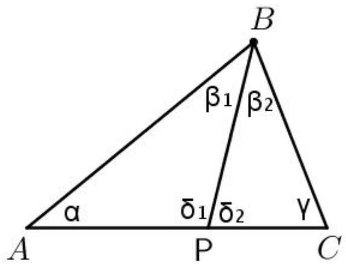
Demonstração: De fato, nas notações da Figura 12,

$$D(ABP) = \Pi - (\alpha + \beta_1 + \delta_1) \tag{3.6}$$

$$D(BPC) = \Pi - (\beta_2 + \delta_2 + \gamma) \tag{3.7}$$

Daqui segue que $D(ABP) + D(BPC) = 2\Pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2 + \gamma) = \Pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma) = D(ABC)$.

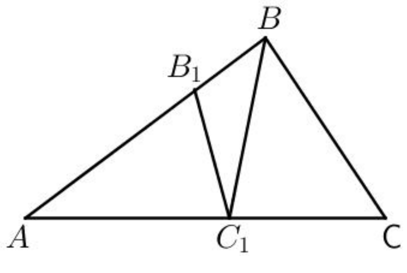
Figura 12 – Lema I.



Fonte: Autor

II. *São dados dois triângulos ABC e AB_1C_1 com vértice comum A e tais que os vértices B_1 e C_1 do segundo se encontram respectivamente nos lados AB e AC do primeiro. Então o defeito do segundo triângulo não supera o do primeiro* (Figura 13).

Figura 13 – Lema II.



Fonte: Autor

A demonstração se obtém imediatamente utilizando a proposição II e o lema anterior.

Com efeito, unamos os pontos B e C; então segundo o lema anterior,

$$D(ABC) = D(AB_1C_1) + D(B_1BC_1) + D(BC_1C).$$

Mas da proposição II segue que o defeito de cada triângulo é ou um número positivo ou igual a zero. Daqui e da igualdade que acabamos de escrever se tem que

$$D(AB_1C_1) \leq D(ABC).$$

III. *São dados dois triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$, tais que os catetos AC e BC do triângulo ABC são maiores que os catetos $A'C'$ e $B'C'$ respectivamente. Então, se a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a dois ângulos retos, a soma dos ângulos internos de $A'B'C'$ também será.*

Para provar isto, transladaremos $A'B'C'$ até que seu vértice C' coincida com C, o cateto $A'C'$ está sobre AC, e o cateto $B'C'$ está BC do triângulo ABC. Então, em virtude do lema anterior,

$$D(A'B'C') \leq D(ABC).$$

Mas, como havíamos adotado $D(ABC) = 0$ e, pela proposição II, $D(A'B'C') \geq 0$, da desigualdade acima se deduz que $D(A'B'C') = 0$, o qual desejávamos demonstrar.

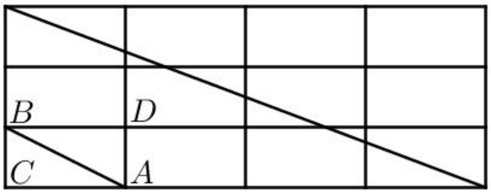
IV. *Se a soma dos ângulos internos de certo triângulo retângulo é igual a dois retos, a soma dos ângulos de qualquer outro triângulo retângulo também será.*

Consideremos dois triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$. Suponhamos que a soma dos ângulos do triângulo ABC é igual a dois retos. Demonstraremos que também será igual à soma dos ângulos de $A'B'C'$. Se os catetos AC e BC do primeiro triângulo são respectivamente maiores que os catetos $A'C'$ e $B'C'$ do segundo, a afirmação é confirmada pelo lema III. Se pelo menos um dos catetos de ABC é menor que um cateto de $A'B'C'$, para provar o lema mostraremos que se pode construir um novo triângulo retângulo cuja soma dos ângulos seja, como a de ABC, igual a dois retos, e cujos catetos sejam arbitrariamente grandes. Pra esta finalidade, sobreponhamos ao triângulo ABC outro igual a ele, de forma que sua hipotenusa coincida com a de ABC e que no quadrilátero assim obtido os lados iguais sejam opostos. Denotemos por D o vértice do ângulo reto do novo triângulo (Figura 14). Como a soma dos ângulos internos de cada um dos triângulos retângulos ABC e ABD é igual a dois retos, é evidente o resultado de que todos os ângulos internos do quadrilátero $ACBD$ serão retos.

Movendo $ABCD$, podemos ”pavimentar” o plano com retângulos iguais, tal como se mostra na figura 14.

É fácil ver que a parte do plano indicada nesta figura representa um retângulo.

Figura 14 – Lema IV.



Fonte: Autor

Dividindo-o por meio de uma diagonal, obtemos dos triângulos retângulos iguais, cuja soma dos ângulos internos é iguala dois retos. Os catetos destes triângulos, evidentemente, podem ser feitos tão longos como desejado.

Com este resultado é possível construir um triângulo retângulo cuja soma dos ângulos sejam dois retos, e cujos catetos sejam maiores que do triângulo retângulo $A'B'C'$.

Daqui e do lema III segue que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo (arbitrário) $A'B'C'$ é igual a dois retos. Agora, utilizando o último lema, estamos em condição de provar a proposição enunciada mais acima.

Proposição 3.1.3. *Se a soma dos ângulos de pelo menos um triângulo é igual a dois retos, também será em qualquer outro triângulo.*

São dados os triângulos ABC, $A'B'C'$ e se sabe que a soma dos ângulos de ABC é igual a dois retos. Mostremos que a soma dos ângulos de $A'B'C'$ também são iguais a dois retos.

Tracemos as alturas dos triângulos dados. Cada um deles terá pelo menos um vértice tal que a altura traçada por ele mesmo cairá dentro do lado oposto. Sem restrição de generalidade, podemos supor que tal vértice é A para o triângulo ABC e A' para $A'B'C'$.

Seja P o pé da altura do triângulo ABC correspondente ao vértice A, e P' o pé da altura do triângulo $A'B'C'$ correspondente ao vértice A'. Segundo o lema II,

$$D(ABP) \leq D(ABC).$$

Por hipótese, $D(ABC) = 0$, e como, em virtude da proposição II, $D(ABP) \geq 0$, concluímos que $D(ABP) = 0$.

Assim, a soma dos ângulo de um triângulo retângulo ABP é igual a dois retos. Então, pelo lema IV, cada triângulo retângulo terá soma de ângulos iguais a dois retos.

Mas, segundo o lema I,

$$D(A'B'C') = D(A'B'P') + D(B'P'C'). \tag{3.8}$$

Como os triângulos $A'B'P'$ e $B'P'C'$ são retângulos, do que acabamos de demonstrar, segue-se que $D(A'B'P') = 0$ e $D(B'P'C') = 0$.

Portanto, $D(A'B'C') = 0$ e, em consequência, a soma dos ângulos internos de $A'B'C$' é igual a dois retos, a proposição está assim demonstrada.

Uma vez estabelecida as proposições 3.1.1 a 3.1.3, pode-se tentar provar que existe pelo menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a dois retos.

Se isso pudesse ser feito, então, em virtude da proposição 3.1.3, cada triângulo teria a soma de seus ângulos internos iguala dois retos e, pela proposição 3.1.1, se verificaria o V postulado.

Proposição 3.1.4. *Se existe um ângulo agudo tal que a perpendicular levantada em qualquer ponto de um de seus lados corta até o outro lado, então tem lugar o V Postulado.*

É fácil perceber uma estreita relação entre os raciocínios de Legendre e os de Saccheri e Lambert.

Com efeito, as três hipóteses de Legendre sobre os possíveis valores da soma dos ângulos internos de um triângulo correspondem às hipóteses do ângulo obtuso, do reto e do agudo de Saccheri. Se é aceita a hipótese do ângulo obtuso, para algum quadrilátero de Saccheri, então, dividindo por meio de uma diagonal, obteremos dois triângulos, dos quais pelo menos um terá a soma de seus ângulos maior que dois retos. E, reciprocamente, se assumirmos que a soma dos ângulos de algum triângulo é maior que dois retos, deve ser aceita a hipótese de Saccheri do ângulo obtuso.

A proposição 3.1.2, vem expressar assim o caráter contraditório da hipótese do ângulo obtuso. Se supormos que a soma dos ângulos de um triângulo é menor que dois retos, é evidente que para algum quadrilátero de Saccheri terá que ser aceita a hipótese do ângulo agudo. E reciprocamente se aceitarmos a hipótese do ângulo agudo pelo menos para algum quadrilátero de Saccheri, então, dividindo-o por uma diagonal em dois triângulos, vamos descobrir que pelo menos um deles tem a soma de seus ângulos menor que dois retos e, consequentemente, os ângulos da base superior de cada quadrilátero de Saccheri serão agudos. Podemos, portanto, afirmar que vale a:

Proposição 3.1.5. *Se é aceita a hipótese do ângulo agudo para um quadrilátero de Saccheri, será necessário adaptá-la para todos os quadriláteros de Saccheri.*

Por último, se estabelece diretamente que a hipótese do ângulo reto de Saccheri e a hipótese de Legendre sobre a existência de um triângulo cuja soma dos ângulos seja igual a dois retos, são em igual medida equivalentes ao V Postulado.

Apesar de sua inúmeras tentativas, Legendre não conseguiu demonstrar que não existe nenhum triângulo cuja soma dos ângulos seja menor que dois retos, assim como Saccheri, também conseguiu levar a uma contradição a hipótese do ângulo agudo. Com tudo, na construção de um sistema de corolários das hipóteses que rejeitam o V Postulado, Saccheri e Lambert foram muito mais longe que Legendre.

Deve-se notar que as proposições 3.1.1 a 3.1.3 eram conhecidas já antes de Legendre. Em todo caso, tanto Saccheri como Lambert conheciam bem a dependência existente entre o V Postulado e a afirmação de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos.

As proposições 3.1.1 a 3.1.3 estão relacionadas com o nome de Legendre por pura tradição, pois foi ele que as anunciou de maneira particularmente clara, e estas se tornaram conhecidas graças precisamente a seus trabalhos.

Não podemos deixar de mencionar a Franz Adolph Taurinus (1794 -1874). Ele, junto com Sacchieri e Lambert foram os três grandes precursores das Geometrias Não-Euclidianas. Em 1825 publicou a *Théorie der Parallel linien*. No mesmo ano se desagradou com algumas coisas do seu próprio livro e decidiu complementá-lo com um novo livro, *Geometriae prima elementa* (1826). Taurinus custeara a publicação do seu bolso e enviou alguns exemplares a amigos e autoridades matemáticas. Mas, ao não encontrar nenhum reconhecimento, zangado queimou o resto da edição. Por isso, é muito difícil encontrar algum exemplar do livro.

3.2 O CURSO DAS PESQUISAS SOBRE O V POSTULADO APÓS AS TENTATIVAS FALHAS DE DEMONSTRAÇÃO

No item anterior mostramos várias tentativas mal sucedidas realizadas por matemáticos de diferentes culturas, desde o século III até o século XIX, com o objetivo de provar o V Postulado de Euclides. A estatura de Euclides aumentou após essas tentativas. A Geometria Euclidiana construída assumindo só os quatro primeiros postulados é chamada de "*Geometria absoluta*". Vimos que todas as demonstrações continham alguma falha que usualmente consistia em utilizar alguma afirmação verdadeira na Geometria Euclidiana, que pela sua evidência achavam que não era preciso provar rigorosamente. Segundo Paricio, algumas dessas "verdades evidentes” que erroneamente se utilizaram para "purificar” os fundamentos da Geometria são as seguintes:

- "existem duas retas equidistantes";

- "a distância entre retas paralelas não se expande nem se contrai";
- "uma linha equidistante a uma linha reta é uma reta";
- "em um quadrilátero, se três dos seus ângulos são retos, também o é o quarto";
- "se um quadrilátero $ABCD$ tem ângulos retos em A e em D e AB é congruente com DC, então ângulo em B é agudo se e somente se o ângulo em C é obtuso";
- "os ângulos de um quadrilátero equilátero e equiângulo são retos";
- "existem dois triângulos semelhantes, mas não congruentes";
- "dado um triângulo sempre existem triângulos semelhantes a ele, mas não congruentes";
- "por um ponto que não esteja em uma reta dada passa uma única paralela";
- "por três pontos não colineares passa uma única circunferência";
- "a soma dos ângulos de um triângulo é dois retos";

Todas essas proposições, e outras muitas na Geometria absoluta, são equivalentes ao V Postulado. Isto é, pode-se substituir o V Postulado por uma qualquer delas e se obtém a mesma Geometria. Nesse caso a proposição escolhida adquire o carácter de postulado e o V Postulado perde seu caráter axiomático para se converter numa proposição que precisa ser demonstrada, ou seja, vira um teorema. As outras proposições não eleitas para serem assumida como postulado também serão teoremas.

Finalmente, no século XIX, foi provada a independência do V Postulado de Euclides em relação aos demais postulados. Trabalhando independentemente e sem prévio conhecimento dos trabalhos de Sacchieri, o alemão Carl F. Gauss, o russo Nicolai I. Lobachevsky e o húngaro Janos Bolyai criaram novas geometrias consistentes, alternativas à geometria euclidiana, substituindo o V Postulado. Na geometria de Lobachevsky, por exemplo, é possível passar mais de uma paralela a uma reta dada por um ponto fora dela; também é verdade que a soma dos ângulos interiores de um triângulo qualquer sempre é menor que dois ângulos retos.

Um pouco mais tarde, Riemann desenvolveu um novo sistema geométrico, a Geometria Elíptica, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos. Nesse sistema não existem retas paralelas. Na Geometria euclidiana plana a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.

O desenvolvimento destas Geometrias Não-Euclidianas, sem aparente suporte no mundo real, conduziu os matemáticos à supervalorização da concepção abstrata, não interpretada, dos sistemas formais. A legitimação das teorias formais passou a ocorrer muito menos com centro num esperado isomorfismo entre o mundo matemático e o mundo empírico e muito mais com base na consistência das teorias formais que se produziam independentemente de elas admitirem, de imediato, interpretações empíricas.

Lobachevski compreendia de maneira profunda e fina a relação entre a geometria de Euclides e sua geometria não euclidiana: ambas são logicamente não contraditórias e por isso estão destinadas ao fracasso todas as tentativas de mostrar desde um ponto de vista lógico que só a primeira é a única verdadeira; contudo, o problema de qual destas geometrias corresponde melhor às propriedades do espaço real, é algo que se deve decidir experimentalmente.

Lobachevski chamava "usual" a geometria de Euclides, e "imaginária" a sua geometria. Isto, no entanto, não significava que considerasse sua geometria como um sistema fechado, puramente lógico. Do contrário, via nela um instrumento útil para a Análise Matemática, e foi neste plano que escreveu o extenso trabalho Aplicações da geometria imaginária a algumas integrais (1836).

Para encerrar o capítulo incluímos a demonstração da equivalência entre o V Postulado e uma outra formulação:

Afirmação I: *O V Postulado de Euclides* (escrito de outra maneira): Se BC é uma transversal a AB e DC com A e D do mesmo lado de BC e $\angle ABC + \angle DCB < 180^o$ então $BA \cap CD \neq \varnothing$.

Afirmação II: (*A unicidade das paralelas)* de Playfair[2]. Dadas uma reta r e um ponto P não pertencente a r existe no máximo uma reta que contém P e é paralela a r.

Vamos demonstrar que *Afirmação I* $\Longrightarrow$ *Afirmação II* (Figura 15)

(1) Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, considere uma reta s que contém, P e é paralela a r (essa reta existe pela Proposição I 31 de *Os Elementos*).

(2) Seja AB uma reta qualquer, distinta de s, com P entre A e B.

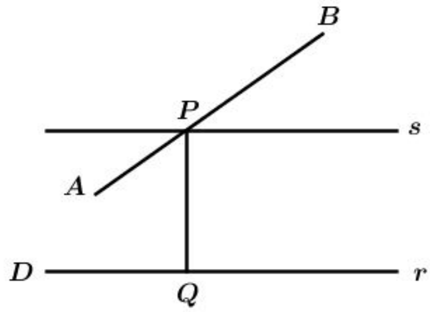
(3) Sendo Q o pé da perpendicular a r a partir de P, um dos ângulos $\angle APQ$ ou $\angle BPQ$ é necessariamente agudo. Suponha, sem perda de generalidade, que o ângulo $\angle APQ$ seja agudo.

(4) Tomando $D \in r$, com A e D do mesmo lado de PQ, como $\angle APQ + \angle DPQ = \angle APQ + 90^o < 180^o$ segue, do V Postulado de Euclides, que $PA \cap QD \neq \varnothing$.

(5) Portanto, $AB \cap r \neq \varnothing$. Concluímos que s é a única reta paralela a r contendo P.

[2] William Playfair (1759 - 1823), era um engenheiro escocês e economista político, o fundador de métodos gráficos de estatísticas.

Figura 15 – *Afirmação I* $\Longrightarrow$ *Afirmação II*



Fonte: Autor

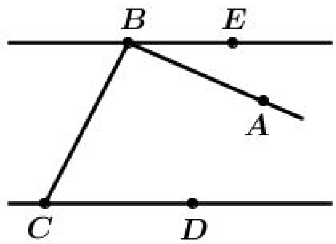
Vamos demonstrar agora que *Afirmação II* $\Longrightarrow$ *Afirmação I* (Figura 16)

(1) Seja BC uma transversal a AB e DC com A e D do mesmo lado de BC e supondo que $\angle ABC + \angle DCB < 180°$.

(2) Escolhendo E, com E e A do mesmo lado de BC, tal que $\angle EBC$ e $\angle DCB$ são ângulos suplementares temos $BE \parallel CD$ (ângulos alternos internos).

(3) Mas $BA \neq BE$ e, como estamos supondo que a paralela é única, segue que $BA \cap CD \neq \varnothing$.

Figura 16 – *Afirmação II* $\Longrightarrow$ *Afirmação I*



Fonte: Autor

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática é tida por muitos como a ciência das verdades absolutas, onde não há lugar para incertezas, tudo pode ser provado ou refutado. Alguns consideram o saber matemático como definitivo, estático e irrefutável. Esse mito se reproduz em várias ocasiões, infelizmente, no ensino da Matemática.

A história do Problema das Paralelas mostra tudo o contrário. O V Postulado de Euclides foi questionado desde seu “nascimento”, uns 300 anos a.C., até o século XIX. Alguns estudiosos dizem que o próprio Euclides duvidava se era mesmo um axioma ou um teorema. Esse longo tempo foi testemunha de diversos e numerosos esforços dos mais eminentes matemáticos para elucidar “a verdade”. As críticas ao método de Euclides nos *Elementos* contribuíram ao aperfeiçoamento do rigor lógico nas demonstrações. Euclides saiu fortalecido de cada uma das batalhas. Sua extraordinária estatura como matemático, criador do método axiomático, está plenamente reconhecida.

Como vimos, só no século XIX foi provada a independência do V Postulado de Euclides em relação aos demais postulados e apareceram as Geometrias Não-Euclidianas pondo um ponto final ao debate. Não há uma Geometria, mas várias. Como diz Henri Poincaré[1]: "Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra; poderá ser apenas mais cômoda".

A escola formalista de David Hilbert saiu fortalecida extraordinariamente da conclusão da longa “novela” do Problema das Paralelas. Se pensou no início do século XX que o futuro das pesquisas matemáticas estava determinado pelo chamado programa de Hilbert, que propunha encontrar um conjunto completo e consistente de axiomas para toda a Matemática. Em 1931 Kurt Gödel provou seus famosos teoremas da incompletude que demonstraram que as ideias de Hilbert não podiam ser executadas, ao menos, com a universalidade pretendida.

---

[1] Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), matemático, físico, astrônomo e filósofo francês. Deixou mais de 500 escritos sobre temas científicos, entre as suas pesquisas matemáticas destaca-se a descoberta das funções *fuchsianas* e *kleinianas* e o estudo dos grupos descontínuos. É considerado o precursor da moderna topologia combinatória.

REFERÊNCIAS

AYALA, J. d. J. *Saccheri y el V postulado: Preludio de un nuevo pensamiento matemático.* [S.l.: s.n.], 2009.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: SBM, 1995.

BARKER, S. F. *Filosofia da matemática*. 2ª. ed. Ohio: [s.n.], 1964.

BERTALANFFY, V. *General system theory. Fundations, aplications.* Londres: [s.n.], 1971.

BICUDO, I. *Tradução e comentários de "Os Elementos" de Euclides*. São Paulo: Unesp, 2009.

BOURBAKI, N. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Masson, 1984.

BULMER-THOMAS, I. *Euclid: life and works*. New York: Dictionary of scientific biography, 1956.

CASTRUCCI, B. *Estudo axiomático do plano euclidiano*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

EFÍMOV, N. V. *Geometria superior*. União Soviética: LAntiga URSS:MIR, 1998. (Em espanhol).

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

FEDOSEEV P. N.; SOLVEIRA, M. R. e. R. G. *Metodologia do conhecimento científico*. [S.l.]: Editorial de Ciencias Sociales, Instituto Cubano del Libro., 1998. (Em espanhol).

FILHO, D. C. D. M. *Convite à matematica*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GERÔNIMO, J. R. *Geometria plana e espacial: um estudo axiomático.* 2ª. ed. Maringá: Eduem, 2010. 320 p.

MARQUES, H. *As tentativas de demonstraçãodo Quinto Postulado dos Elementos de Euclides.* Portugal: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa., 2004.

PARICIO, L. J. H. *Sobre los principios fundamentales de la Geometría.* Espanha: Universidad de la Rioja, 2001.

VAZ, B. R. L. *O Papel dos diagramas na geometria euclideana.* Rio de Janeiro: [s.n.], 2010.