UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

VICTOR HUGO DUARTE DE ASSIS

Características da Função Quadrática e a Metodologia de Resolução de Problemas

São José do Rio Preto
2015

Victor Hugo Duarte de Assis

Características da Função Quadrática e a Metodologia de Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos do título de Mestre, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática Profissional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

São José do Rio Preto
2015

Assis, Victor Hugo Duarte de.
Características da função quadrática e a metodologia de resolução de problemas / Victor Hugo Duarte de Assis. -- São José do Rio Preto, 2015
82 f. : il.

Orientador: Rita de Cassia Pavani Lamas
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 3. São Paulo (Estado) - Matemática - Currículos. 4. Matemática – Metodologia. I. Lamas, Rita de Cassia Pavani. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 517.5(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Victor Hugo Duarte de Assis

Características da Função Quadrática e a Metodologia de Resolução de Problemas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos do título de Mestre, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática Profissional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora:

Profª. Drª. Rita de Cássia Pavani Lamas
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Tatiana Bertoldi Carlos
UFMS – Paranaíba

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
26 de junho de 2015

Resumo

O ensino de Matemática anseia por mudanças de metodologias e estas estão previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, em particular, a Metodologia de Resolução de Problemas introduzida por George Polya no início do século passado. Hoje esta metodologia é estudada por diversos pesquisadores e é indicada no Currículo do Estado de São Paulo. Os objetivos deste trabalho se resumem em fundamentar teoricamente as propriedades da função quadrática para obtenção do seu gráfico; apresentar aspectos da metodologia de Resolução de Problemas e os resultados de sua aplicação na terceira série do Ensino Médio para o ensino da função quadrática .

Palavras-Chave: Função Quadrática, Metodologia de Resolução de Problemas, Ensino Médio.

Abstract

Teaching of Mathematics craves change methodologies and these are set out in National Curriculum Parameters, in particular, the Troubleshooting methodology introduced by George Polya early last century. Today this methodology is studied by many researchers and is indicated in the curriculum of the State of São Paulo. The objectives of this work are summarized in theory support the properties of quadratic function to obtain your chart; present aspects of the methodology Troubleshooting and results of its application in the third year of high school for teaching quadratic function.

Keywords: Quadratic Function, Troubleshooting Methodology, High School.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Resolução de Problemas em Matemática desempenha um papel fundamental na formação dos alunos, pois incentiva a lidar com desafios e melhorar sua criatividade em todas as ciências, não só na Matemática. Desta forma, ajuda nas situações da vida cotidiana e no mundo do trabalho.

A metodologia de Resolução de Problemas não se restringe apenas às estratégias de como resolver problemas, mas de como ensinar matemática através de problemas. É uma das metodologias de ensino proposta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) visando uma melhor aprendizagem dos alunos na disciplina de Matemática. Entretanto, as dificuldades dos discentes na resolução de problemas matemáticos e na compreensão dos conteúdos, nesta disciplina, são preocupantes no ensino fundamental e revela um baixo rendimento também em níveis mais avançados, isto é, Ensino Médio e Ensino Superior.

A dificuldade inicia na compreensão dos problemas. Os alunos querem efetuar contas, sem primeiro compreender o problema e estabelecer um plano para a obtenção da solução do problema, como proposto por Polya (2006).

O conteúdo de funções quadráticas é desenvolvido na primeira série do Ensino Médio, mas as suas propriedades nem sempre são devidamente explicadas nos livros didáticos. Isso pode levar a falta de compreensão por parte dos alunos. Isso motivou desenvolvê-las neste trabalho. É também apresentada uma proposta de aplicação da Metodologia de Resolução de Problemas para o ensino deste conteúdo. Na aplicação da proposta em sala de aula, conforme proposto por Polya (2006), é utilizado o diálogo professor-aluno de forma a induzir os próprios alunos a obterem essas propriedades.

O trabalho tem a seguinte estrutura: os capítulos 2 e 3 são direcionados mais diretamente aos professores com o objetivo de esclarecer como identificar o polinômio do segundo grau com a função quadrática. Nos capítulos 4 e 5, são desenvolvidas as propriedades das funções quadráticas, as quais devem ser utilizadas pelo professor quando for formalizar os resultados a serem obtidos pelos alunos, conforme resultados de aplicação da metodologia de Resolução de Problemas no capítulo 8. O capítulo 7 contempla os pressupostos teórico-metodológicos da Metodologia da Resolução de Problemas.

2. GRUPOS E ANÉIS

As definições e resultados deste capítulo têm por objetivo esclarecer como são identificados os polinômios e as funções polinomiais.

2.1. GRUPO

Segue, agora, uma sequência de definições e resultados, para que se consiga diferenciar, ao final, polinômios de funções polinomiais.

Definição 2.1: Sendo E um conjunto não vazio, toda aplicação $f: E \times E \to E$ recebe o nome *operação* sobre E (ou em E) ou *lei de composição interna* sobre E (ou em E).

Exemplo 2.2 (Notação Aditiva): O símbolo da operação *adição* é +, o composto $x + y$ é chamado *soma* e os termos são as parcelas.

Exemplo 2.3 (Notação Multiplicativa): O símbolo da operação multiplicação é ., o composto $x.y$ é chamado *produto* e os termos são os fatores.

Definição 2.4: Um *grupo* é um conjunto não vazio E, onde se define uma operação $*$ sobre E, se essa operação satisfaz as seguintes condições:

- Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c)$, para todos $a, b, c \in E$;
- Existência de elemento neutro: existe um elemento $e \in E$, tal que

$$a * e = e * a = a, \text{ para todo } a \in E;$$

- Existência de simétricos: existe, para todo $a \in E$, um elemento $a' \in E$, tal que

$$a * a' = a' * a = e.$$

Notação: $(E, +)$.

Observação 2.5: Se o grupo satisfaz a condição de comutatividade, isto é, se

$$a * b = b * a, \text{ para todos } a, b \in G,$$

então o grupo recebe o nome de *comutativo* ou *abeliano*.

Exemplo 2.6: Um exemplo conhecido de grupo abeliano é o grupo dos números reais $(\mathbb{R}, +)$, pois:

- se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então, $a + (b + c) = (a + b) + c$;
- se $a, b \in \mathbb{R}$, então, $a + b = b + a$;
- se $a \in \mathbb{R}$, então, $a + 0 = a$, ou seja, o número zero é o elemento neutro do grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$;
- se $a \in \mathbb{R}$, então $a + (-a) = 0$, ou seja o número $-a$ é o simétrico de a do grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$.

Exemplo 2.7: Outro exemplo conhecido é o grupo das matrizes 2 x 2 $(M_{2X2}(\mathbb{R}), +)$. Considere:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = (A + B) + C.$$

Logo, $A + (B + C) = (A + B) + C$;

Calculemos $A + B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = B + A.$$

Logo, $A + B = B + A$;

Considere, agora a matriz nula: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Temos:

$$A + O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A.$$

Também vale que $O + A = A$ e a demonstração é análoga.

Logo, $A + O = A$, ou seja, a matriz nula é o elemento neutro do grupo abeliano $(M, +)$.

Provemos agora que existe B, tal que $A + B = B + A = O$.

Seja $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Logo,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por igualdade de matrizes:

$$a_{11} + b_{11} = 0 \Rightarrow b_{11} = -a_{11}$$
$$a_{12} + b_{12} = 0 \Rightarrow b_{12} = -a_{12}$$
$$a_{21} + b_{21} = 0 \Rightarrow b_{21} = -a_{21}$$
$$a_{22} + b_{22} = 0 \Rightarrow b_{22} = -a_{22}$$

Logo, a simétrica de A é a matriz, que é representada por A':

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

Definição 2.8: Sejam $a, b \in A$. Chama-se *diferença* entre a e b e indica-se por $a - b$ o elemento $a + (-b) \in A$. Portanto, $a - b = a + (-b)$.

Proposição 2.9: Seja $(E,*)$ um grupo. Valem as seguintes propriedades:

- a unicidade do elemento neutro de $(E,*)$.
- a unicidade do simétrico de cada elemento de E.
- se e é elemento neutro, então o seu simétrico é ele mesmo.
- O simétrico do simétrico de um elemento a do grupo E é a. Em símbolos,$(a')' = a$, qualquer que seja $a \in E$.
- $(a * b)' = b' * a'$, para todos $a, b \in E$.
- Todo elemento de E é regular para a operação $*$, isto é,

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

Demonstração: Suponhamos que e e f são dois elementos neutros pertencentes ao grupo $(E,*)$. Assim,

$$e = e * f = f.$$

Logo, o elemento neutro é único.

Considere, agora, a' e a'' dois elementos simétrico de a em E. Logo,

$$a * a' = e = a * a'' \Rightarrow a' * [a * a'] = a' * [a * a''] \Rightarrow [a' * a] * a' = [a' * a] * a''$$
$$\Rightarrow e * a' = e * a'' \Rightarrow a' = a''$$

Logo, o elemento simétrico é único.

Sejam e o elemento neutro do grupo $(E,*)$ e e' seu simétrico. Temos:

$$e = e * e' = e'.$$

Logo, o simétrico de e é o próprio elemento.

Seja $a \in E$.

$$a' * (a')' = e = a * a' \Rightarrow a * [a' * (a')'] = a * [a * a'] \Rightarrow [a * a'] * (a')' = a * e \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e * (a')' = a * e \Rightarrow (a')' = a.$$

Sejam $a, b \in E$. Como G é grupo, $a * b \in E$. Assim,

$$(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = a * e * a' = a * a' = e.$$

$$(b' * a') * (a * b) = b' * (a' * a) * b = b' * e * b = b' * b = e.$$

Logo, $b' * a'$ é simétrico de $(a * b)$.

Generalizando: Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$. Então, $a_1 * a_2 * \dots * a_n \in E$. Assim,

$$(a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n) * (a_n' * a_{n-1}' * \dots a_2' * a_1') =$$
$$= a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * (a_n * a_n') * a_{n-1}' * \dots * a_2' * a_1' =$$
$$= a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * e * a'_{n-1} * \dots * a_2' * a_1' =$$
$$= a_1 * a_2 * \dots * (a_{n-1} * a'_{n-1}) * \dots * a_2' * a_1' =$$
$$= a_1 * a_2 * \dots * a_{n-2} * e * a_{n-2} * \dots * a_2' * a_1' =$$
$$\dots$$
$$= a_1 * a_1' = e$$

Analogamente, $(a_n' * a_{n-1}' * \dots a_2' * a_1') * (a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n) = e$.

Assim, $a_n' * a_{n-1}' * \dots a_2' * a_1'$ é o simétrico de $a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n$.

Sejam $a, x, y \in E$ e e seu elemento neutro.

$$a * x = a * y \Rightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y) \Rightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y.$$

$$e * x = e * y \Rightarrow x = y.$$

Logo, todo elemento de E é regular para a operação dada.

Essa propriedade é chamada Lei do Cancelamento da Operação $*$.

□

2.2. Anel

Definição 2.10: Um conjunto não vazio A, com duas operações sobre A, é chamado *anel* quando satisfaz as propriedades:

- Em relação à primeira operação, chamada de adição, $(A, +)$ é um grupo abeliano;
- A segunda operação, chamada multiplicação, é associativa, isto é, se $a, b, c \in A$:

$$a.(b.c) = (a.b).c.$$

- A multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, se $a, b, c \in A$:

$$a.(b + c) = a.b + a.c.$$

$$(b + c).a = a.b + a.c.$$

Esse anel é denotado por $(A, +, .)$.

Proposição 2.11: Seja $(A, +, .)$ um anel. São válidas as seguintes propriedades:

- O elemento neutro 0_A da adição é único, pois $(A, +)$ é grupo;

- O simétrico de um elemento a, em relação à adição, chamado de oposto de a e representado por $-a$, é único;

- Se $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, então,

$$-(a_1 + a_2 + \ \dots + a_n) = (-a_n) + (-a_{n-1}) + \cdots + (-a_2) + (-a_1) =$$

$$= (-a_1) + (-a_2) + \cdots + (-a_{n-1}) + (-a_n)$$

A comutatividade é possível porque $(A, +)$ é grupo abeliano;

- Se $a \in A$, então, $-(-a) = a$, isto é, o simétrico do simétrico de um elemento de um grupo é o próprio elemento;

- Todo elemento de A é regular para a adição;

- A equação $a + x = b$ tem uma única solução, que seja $x = b + (-a)$.
- Se $a \in A$, então $a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0$.
- Se $a, b \in A$, então $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$.

As cinco primeiras propriedades resultam do fato de $(A, +)$ ser um grupo abeliano, conforme demonstrado na proposição 2.9. Demonstremos as seguintes.

Demonstração: Sejam $a, b, x \in A$.

$$a + x = b \Rightarrow -a + (a + x) = -a + b \Rightarrow (-a + a) + x = -a + b$$
$$\Rightarrow 0 + x = -a + b \Rightarrow x = b + (-a).$$

Sejam $a \in A$ e 0 o elemento neutro de $(A, +)$. Como $(A, +, \ .)$ é anel, vale a propriedade distributiva. Assim,

$$0.a = (0 + 0).a = 0.a + 0.a \Rightarrow 0 + 0\,.\,a = a\,.0 + a.0.$$

Pela Lei do Cancelamento da Adição,

$$0 = a\,.\,0.$$

Sejam $a, b \in A$.

$$a.b + a.(-b) = a.[b + (-b)] = a.0 = 0.$$

Também,

$$(-a).b + a.b = (-a + a).b = 0.b = 0.$$

Logo, $a.(-b) = -(a.b)$.
Analogamente,

$$a.b + (-a).b = b.[a + (-a)] = b.0 = 0$$

e

$$(-a).b + a.b = (-a + a).b = 0.b = 0.$$

Logo, $a.(-b) = -(a.b)$.

□

Exemplo 2.12: Um exemplo conhecido de anel é o anel dos números reais $(\mathbb{R}, +, \ .)$, pois:

- $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano, pelo Exemplo 2.6;
- se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então, $a(bc) = (ab)c$;
- se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então, $a.(b + c) = ab + ac$.

Exemplo 2.13: O conjunto de matrizes quadradas, $(M_{m\times m}(\mathbb{R}), +, .)$, é um anel

Analogamente ao que foi mostrado no exemplo 2.7, pode ser mostrado que valem as propriedades para o conjunto das matrizes de ordem n.

- $(M_{m\times m}(\mathbb{R}), +)$ é um grupo abeliano, pelo Exemplo 2.4;
- se $A_{m\times m}, B_{m\times m}, C_{m\times m} \in M$, então, $A(BC) = (AB)C$;
- se $A_{m\times m}, B_{m\times m}, C_{m\times m} \in M$, então, $A(B + C) = AB + AC$.

2.2.1. Tipos de anéis

Definição 2.14: Seja A um anel. Se a multiplicação de A goza da propriedade comutativa, isto é, se, dados $a, b \in A$,

$$ab = ba,$$

tal anel é chamado de *comutativo*.

Exemplo 2.15: O anel dos números reais é um exemplo de anel comutativo, pois, se $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a.b = b.a.$$

Definição 2.16: Sejam A um anel e $a \in A$. Se A conta com elemento neutro para a multiplicação, isto é, se existe um elemento $1_A \in A$, com $1_A \neq 0_A$, tal que

$$a\,.\,1_A = 1_A\,.\,a = a.$$

então, 1_A é a unidade de A e A é dito *anel com unidade*.

Definição 2.17: Seja A um anel comutativo com unidade. Se para esse anel vale a *lei do anulamento* do produto, ou seja, se uma igualdade do tipo

$$ab = 0_A$$

em que $a, b \in A$, só for possível para

$$a = 0_A \text{ ou } b = 0_A$$

então se diz que A é um *anel de integridade*.

Exemplo 2.18: O anel dos números reais é um anel que tem como unidade o número 1, pois, para cada $a \in \mathbb{R}$:

$$a\,.\,1 = 1\,.\,a = a.$$

Definição 2.19: Seja A um anel com unidade. Se $a \in A$ e n é um número natural, define-se a^n por recorrência da seguinte maneira:

$$a^0 = 1_A \text{ e } a^{n+1} = a^n a \text{ (sempre que } n \geq 0).$$

Postulado 2.20 (Primeiro Princípio de Indução Finita): Seja $a \in \mathbb{N}$ e suponhamos que a cada número natural $n \geq a$ esteja associada uma afirmação $P(n)$. Admitamos, ainda, que seja possível provar o seguinte:

a) $P(a)$ é verdadeira;
b) Para todo $r \geq a$, se $P(r)$ é verdadeira, então $P(r+1)$ também é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \geq a$.

Observação 2.21: Uma demonstração, na qual o Postulado 2.20 é empregado, é chamada *demonstração por indução.*

Proposição 2.22: Seja A um anel com unidade. Se $a \in A$ e m, n são números naturais, então:

- $a^m a^n = a^{m+n}$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$.

Demonstração: Será feita por indução sobre n.

Se $n = 0$, então

$$a^m a^0 = a^m \,.\, 1 = a^m = a^{m+0}$$

Logo, a propriedade vale para $n = 0$.

Seja $r > 0$ um número natural e suponha que $a^m a^r = a^{m+r}$. Então, usando a Definição 2.19 e a associatividade do anel, temos:

$$a^m a^{r+1} \underbrace{=}_{definição} a^m(a^r \,.\, a) \underbrace{=}_{associatividade\ do\ anel} (a^m\, a^r).\, a.$$

Usando o princípio de indução:

$$(a^m a^r).\, a = (a^{m+r}).\, a = a^{m+r+1}.$$

Portanto, a propriedade vale para todo número natural $n \geq 0$, pelo primeiro princípio da indução finita.

A demonstração do segundo item da proposição também será feita por indução sobre n.

Se $n = 0$, então

$$(a^m)^0 = 1_A = a^0 = a^{m\,.\,0}.$$

Logo, a propriedade vale para $n = 0$.

Seja $r > 0$ um número natural e suponha que $(a^m)^r = a^{mr}$. Então,

$$(a^m)^{r\,+\,1} \underbrace{=}_{definição} (a^m)^r\, a^m \underbrace{=}_{H.I.} a^{mr} \,.\, a^m \underbrace{=}_{propr.\ anterior} a^{mr\,+m} = a^{m(r+1)}.$$

Assim, a propriedade vale para todo número natural $n \geq 0$, pelo primeiro princípio da indução finita.

□

2.2.2. Subanéis

Definição 2.23: Sejam $(A, +, \ .)$ um anel e L um subconjunto não vazio de A. Diz-se que L é *subanel* de A se:

- L é fechado para as operações de adição e multiplicação que dotam o conjunto A da estrutura de anel;
- $(L, +, \ .)$ também é um anel.

Exemplo 2.24: O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é subanel do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, pois a adição e a multiplicação dos números reais aplicadas aos números racionais:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \, . \, s + r \, . \, q}{q \, . \, s}$$

e

$$\frac{p}{q} \, . \, \frac{r}{s} = \frac{p \, . \, r}{q \, . \, s}$$

pertencem ao conjunto dos números racionais. Mostremos que $(\mathbb{Q}, +, .)$ satisfaz a definição 2.10. Considere $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ e $\frac{t}{v}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Tem-se:

1.

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{t}{v} = \frac{(p \, . \, s + r \, . \, q)}{q \, . \, s} + \frac{t}{v} = \frac{(p \, . \, s) \, . \, v + (r \, . \, q). \, v + (t \, . \, q) \, . \, s}{q \, . \, s \, . \, v} =$$

$$\frac{p}{q} + \frac{r \, . \, v + t \, . \, s}{s \, . \, v} = \frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{v}\right).$$

Logo, vale a associatividade com relação à adição.

2. O número $0 \in \mathbb{Q}$, pois pode ser escrito como $\frac{0}{s}$. Este número é o elemento neutro da adição neste conjunto, pois:

$$\frac{p}{q} + \frac{0}{s} = \frac{p\,.\,s + 0\,.\,q}{q\,.\,s} = \frac{p\,.\,s}{q\,.\,s} \underbrace{=}_{\substack{equivalência \\ de\ frações}} \frac{p}{q}$$

Logo, 0 é elemento neutro de $\mathbb{Q}$ com relação à adição.

3. Tem-se, ainda, que $\frac{-(p)}{q}$ é o elemento oposto de $\frac{p}{q}$, pois:

$$\frac{p}{q} + \frac{(-p)}{q} = \frac{p + (-p)}{q} = 0.$$

Logo, $-\frac{p}{q}$ é o oposto de $\frac{p}{q}$ com relação à adição no conjunto dos números racionais.

4. Considere os elementos $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p\,.\,s + r\,.\,q}{q\,.\,s} = \frac{r\,.\,q + p\,.\,s}{s\,.\,q} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}.$$

Logo, vale a comutatividade para a operação da adição.

Com as propriedades de 1 a 4, $(\mathbb{Q}, +)$ é grupo abeliano.

5. A multiplicação é associativa, pois:

$$\left(\frac{p}{q}\,.\,\frac{r}{s}\right)\,.\,\frac{t}{v} = \frac{(p\,.\,r)}{(q\,.\,s)}\,.\frac{t}{v} = \frac{(p\,.\,r)\,.\,t}{(q\,.\,s)\,.\,v} = \frac{p.(r\,.\,t)}{q.(s\,.\,v)} = \frac{p}{q}\,.\,\left(\frac{r}{s}\,.\,\frac{t}{v}\right).$$

6. A multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{v}\right) = \frac{p}{q} \cdot \frac{r.v + t.s}{s.v} = \frac{p.(r.v + t.s)}{q.(s.v)} = \frac{p.r.v + p.t.s}{q.s.v} = \frac{p \, . \, r}{q \, . \, s} + \frac{p \, . \, t}{q \, . \, v}$$

e

$$\left(\frac{r}{s} + \frac{t}{v}\right) . \frac{p}{q} = \frac{r.v + t.s}{s.v} . \frac{p}{q} = \frac{(r.v + t.s).p}{(s.v).q} = \frac{r.v.p + t.s.p}{s.v.q} = \frac{r \, . \, p}{s \, . \, q} + \frac{t \, . \, p}{v \, . \, q}$$

Assim, $(\mathbb{Q}, +, .)$ é anel, isto é, $\mathbb{Q}$ é um subanel de $\mathbb{R}$

Definição 2.25: Sejam A um anel e L um subanel de A, ambos com unidade. Se $1_A = 1_L$, diz-se que L é um *subanel unitário* de A.

Definição 2.26: Dá-se o nome de *homomorfismo* de um anel $(A, +, \, .)$ num anel $(B, +, \, .)$ a toda aplicação $f: A \longrightarrow B$ que satisfaz

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

e

$$f(x \, . \, y) = f(x) \, . \, f(y), \ \forall \, x, y \in A.$$

Definição 2.27: Seja $f: A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Se f for também uma bijeção, então será chamado de *isomorfismo* do anel A no anel B. Neste caso, diz-se que f é um isomorfismo de anéis.

3. POLINÔMIOS E FUNÇÕES POLINOMIAIS

3.1. SEQUÊNCIAS E POLINÔMIOS

Definição 3.1: Uma *sequência* de números, em um anel A, é uma função $x: \mathbb{N} \to A, \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, que associa a cada número natural n um número $x_n \in A$, chamado o *n-ésimo termo* da sequência.

Observação 3.2: Uma sequência pode ser representada das seguintes formas: $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_i).

Definição 3.3: Sejam $f = (x_n)$ e $g = (y_n)$ sequências de elementos de um anel A. Como se trata de funções, então $f = g$ se, e somente se, $x_i = y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Observação 3.4: Não se deve confundir a sequência $(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots)$ com a sequência $(0, 0, 1, 1, \dots, 0, 0, 1, 1, \dots)$. Apesar de terem como conjunto de seus termos $\{0, 1\}$, elas são diferentes.

Definição 3.5: Dadas duas sequências $f = (x_n)$ e $g = (y_n)$ de elementos de um anel A, chama-se *soma* de f com g a sequência $h = (z_n)$, tal que $z_n = x_n + y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.6: Chama-se *produto* de duas sequências $f = (x_n)$ e $g = (y_n)$ à sequência $h = (z_n)$, definida por:

$$z_0 = x_0 y_0$$

$$z_1 = x_1 y_0 + x_0 y_1$$

$$z_2 = x_2 y_0 + x_1 y_1 + x_0 y_2$$

$$z_3 = x_3 y_0 + x_2 y_{\mathbf{1}} + x_{\mathbf{1}} y_2 + x_{\mathbf{0}} y_3$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$z_k = x_k y_0 + x_{k-1} y_{\mathbf{1}} + x_{\boldsymbol{k-2}} y_2 + \cdots + x_{\mathbf{0}} y_k$$

3.2. POLINÔMIOS

Definição 3.7: Dado um anel A, uma sequência (x_n) sobre A recebe o nome de *polinômio* ou *sequência quase toda nula* sobre A se existe um índice $i \in \mathbb{N}$, tal que $x_n = 0$, para $n > i$. Será indicado por $A[X]$ o conjunto dos polinômios sobre o anel A.

Exemplos 3.8:

A sequência $(0,0,0,\dots)$ é um polinômio nulo, uma vez que ela é igual a zero, para todo $n > n_0$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$. Pode ser considerado $n_0 = 1$;

A sequência x_n, onde $x_0 = 1$ e $x_n = 0$, para $n > 1$, é um polinômio, pois se anula, para $n > 1$;

A sequência $x_n = 1$, para todo n, não é um polinômio.

Proposição 3.9: A soma de dois polinômios sobre A também é um polinômio sobre A, isto é, $A[X]$ é fechado em relação à operação de adição.

Demonstração: Sejam $f = (x_n)$ e $g = (y_n)$ dois polinômios sobre A.

Por definição, existe n_1 e n_2, tais que $x_i = 0$, para todo $i > n_1$ e, $y_i = 0$, para todo $i > n_2$. Seja $n = \max\{n_1, n_2\}$. Temos:

$$x_n + y_n = 0 + 0,$$

para $i > n$. Assim, $f + g = (x_i + y_i)$ é um polinômio sobre A.

□

Lema 3.10: O produto de dois polinômios é polinômio.

Demonstração: Sejam $f = (x_n)$ e $g = (y_n)$ duas sequências quase toda nulas. Por hipótese, tem-se que existem n_1 e n_2, tais que $x_n = 0$, para $n > n_1$, e que $y_n = 0$, para $n > n_2$.

Com o produto z_k de duas sequências definido acima, temos que:

$$z_0 = x_0 y_0$$

$$z_1 = x_1 y_0 + x_0 y_1$$

$$z_2 = x_2y_0 + x_1y_1 + x_0y_2$$

$$z_3 = x_3y_0 + x_2y_{\mathbf{1}} + x_{\mathbf{1}}y_2 + x_{\mathbf{0}}y_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_{n_1+n_2} = x_{n_1}y_{n_2}$$

pois $z_{n_1+n_2}$é a soma dos produtos x_iy_j, onde $i + j = n_1 + n_2$.

E $z_k = 0$, para todo $k > n_1 + n_2$.

Logo, a sequência z_k é quase toda nula.

□

Exemplo 3.11: Considere $f = (3, 5, -6)$ e $g = (-7, 8, -9, 5)$. O produto deles será:

$$f \,.\, g = (3 \times -7, 5 \times -7 + 3 \times 8, -6 \times -7 + 5 \times 8 + 3 \times -9, -6 \times 8 + 5 \times -9 + 3 \times 5, -6 \times -9 + 5 \times 5, -6 \times 5) = (-21, -11, 55, -78, 79, -30)$$

Proposição 3.12: Se A é um anel, então $A[X]$ também é um anel.

Demonstração: Mostremos que valem as propriedades da definição 2.10.

Sejam f, g e h polinômios sobre o anel A.

- $f + (g + h) = (f + g) + h, \forall\, f, g, h \in A[X]$.
  Fazendo $f = (x_n)$, $g = (y_n)$, $h = (z_n)$.

$$f + (g + h) = x_n + (y_n + z_n) = (x_n + y_n) + z_n = (f + g) + h, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

- $f + g = g + f$.
  Fazendo $f = (x_n)$, $g = (y_n)$.

$$f + g = x_n + y_n = y_n + x_n = g + f, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

- $\exists\, e \in A[X] \mid f + e = f, \forall\, f \in A[X]$.
  Fazendo $f = (x_n)$ e $e = (e_n)$:

$$f + e = f \Leftrightarrow x_n + e_n = x_n, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e, portanto, $e_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e,

$$e = (0, 0, \dots, 0, \dots) = 0$$

é o elemento neutro para a adição de polinômios, chamado polinômio nulo.

- $\forall\, f \in A[X], \exists\, f' \in A[X] |\, f + f' = e$.
  Fazendo $f = (x_n)$ e $f' = (x'_n)$:

$$f + f' = e \Leftrightarrow x_n + x'_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

então, $x'_n = -x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, portanto:

$$f' = \left(-x_0, -x_1, \dots, -x_j, \dots\right) = -f$$

é o simétrico aditivo de f, isto é, é o polinômio que somado com f dá o polinômio nulo.

- $f.(g.h) = (f.g).h, \forall\, f, g, h \in A$[X].
  Fazendo
  $f = (x_n),\ g = (y_m),\ h = (z_k),\ gh = (w_l),\ f(gh) = \left(v_j\right),\ fg = (a_i)$ e $(fg)h = (b_j)$:

$$v_j = \sum_{n+l=j} x_n w_l = \sum_{n+l=j} x_n \left(\sum_{m+k=l} y_m z_k \right) = \sum_{n+m+k=j} x_n (y_m z_k)$$

$$= \sum_{n+m+k=j} (x_n y_m) z_k = \sum_{i+k=j} \left(\sum_{n+m=i} x_n y_m \right) z_k = \sum_{i+k=j} a_i z_k = b_j$$

o que prova a associatividade da multiplicação em $A[X]$.

- $f\,.\,(g+h) = f\,.\,g + f\,.\,h$ e $(g+h)\,.\,f = g\,.\,f + h\,.\,f$.

  Fazendo

  $f = (x_n),\ g = (y_m),\ h = (z_m),\ f\,.\,(g+h) = (w_j),\ f\,.\,g = (v_j)$ e $f\,.\,h = (v'_j)$:

$$(w_j) = \sum_{m+n=j} x_n(y_m + z_m) = \sum_{m+n=j} x_n y_m + \sum_{m+n=j} x_n z_m$$
$$= v_j + v'_j$$

□

3.2.1. GRAU DE UM POLINÔMIO

Definição 3.13: Seja $f = (a_i)$ um polinômio não nulo. Chama-se *grau de* f, e representa-se por ∂f, o número natural n tal que $a_n \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > n$. O termo a_n, nessas condições, é chamado coeficiente dominante de f.

Observação 3.14: Se o coeficiente dominante de f é 1, diz-se que f é um polinômio unitário.

Exemplo 3.15: $f = (4, 7, 0, 2, 5, 0, 0, 0, \ldots)$ em $\mathbb{Z}[X]$ tem grau 4.

Exemplo 3.16: $g = \left(-1, \frac{1}{2}, 0, 5, -1, 2, \frac{2}{3}, 0, 0,0, \ldots\right)$ em $\mathbb{Q}[X]$ tem grau 6.

3.2.2. NOTAÇÃO USUAL

Definição 3.17: Seja $X = (0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ um polinômio. Tal polinômio é chamado *indeterminada sobre o anel* A.

Pela definição de produto de polinômios:

- X^2 só possui o termo x_2, pois somente $x_1 \in X$ é tal que $x_1 \neq X$ e tal valor é:
  $X^2 = X \, . \, X = x_0 \, . \, x_2 + x_1 \, . \, x_1 + x_2 \, . \, x_0 = 0 \, . \, 0 + 1 \, . \, 1 + 0 \, . \, 0 = 1$;
  ou seja, $X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots 0, \dots)$.

- $X^3 = X^2 \, . \, X = x_0 \, . \, x_3 + x_1 \, . \, x_2 + x_2 \, . \, x_1 + x_3 \, . \, x_0 = 0 \, . \, 0 + 0 \, . \, 0 + 1 \, . \, 1 + 0 \, . \, 0 = 1$; ou seja, $X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots 0, \dots)$.

Definição 3.18: A notação $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ é chamada *notação polinomial* ou *usual* para indicar um polinômio f de grau n sobre um anel com unidade.

3.2.3. RAÍZES DE POLINÔMIOS

Definição 3.19: Seja B um anel comutativo com unidade e A um subanel unitário de B. Dados $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in A[X]$ e $u \in B$, chama-se *valor de* f *em* u o seguinte elemento de B:

$$f(u) = a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n.$$

Quando se verifica que $f(u) = 0$, dizemos que u é *raiz de* f.

Proposição 3.20 (Segundo Princípio de Indução): Seja $P(n)$ uma função proposicional cujo universo é o conjunto dos inteiros maiores que ou iguais a um inteiro dado a. Suponhamos que se consiga provar o seguinte:

a) $P(a)$ é verdadeira.

b) Se $r > a$ e $P(k)$ é verdadeira para todo k tal que $a \leq k < r$, então $P(r)$ também é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Proposição 3.21: Dados os polinômios $f, g \in A[X]$, onde A é anel de integridade, com $g \neq 0$ e o coeficiente dominante de g diferente de zero, então existem polinômios q, r tais que $f = gq + r$, em que ou $r = 0$ ou $\partial r < \partial g$. Além disso, é único o par (q, r) que cumpre as condições da proposição.

Demonstração: Suponhamos $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ e $g = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$, com $m \geq 0$ e $b_m \neq 0$.

a) Se $f = 0$, neste caso, $q = r = 0$ cumprem as condições do enunciado, pois $0 = g\,.\,0 + 0$.

b) Se $f \neq 0$ e $\partial f < \partial g$, basta tomar $q = 0$ e $r = f$, uma vez que $f = g\,.\,0 + f$.

c) Se $f \neq 0$ e $\partial f \geq \partial g$, provemos que são válidas as condições da Proposição 3.20 sobre o grau da f:

Provemos para $\partial f = 0$. Quando isso acontece, $\partial g = 0$, devido à hipótese. Neste caso, f e g são polinômios constantes não nulos: $f = a_0$ e $g = b_0$ e $b_0 \neq 0$. A divisão recai em A, que é possível e exata: o quociente é $q = {b_0}^{-1}a_0$ e o resto é $r = 0$. De fato, $a_0 = b_0\left({b_0}^{-1}a_0\right) + 0$.

Suponhamos que $\partial f = n > 0$ e que a proposição seja válida para todo polinômio de grau menor que n.

Consideremos o polinômio f_1 definido da seguinte maneira:

$$f_1(x) = f(x) - a_n{b_m}^{-1}x^{n-m}g(x).$$

Se $f_1 = 0$ ou $\partial f_1 < \partial g$, então $q = a_n{b_m}^{-1}x^{n-m}$ e $r = f_1$.

Caso contrário, tem-se $\partial f \geq \partial g$ e $\partial f_1 < n$, pois o coeficiente dominante de f é igual ao do polinômio expresso por $a_n {b_m}^{-1} x^{n-m} g(x)$. Portanto, devido à hipótese de indução, existem polinômios q_1 e r_1, tais que

$$f_1(x) = g(x) q_1(x) + r_1(x), \text{com } r_1 = 0 \text{ ou } \partial r_1 < \partial g.$$

Das duas igualdades destacadas, segue que

$$f(x) - a_n {b_m}^{-1} x^{n-m} g(x) = g(x) q_1(x) + r_1(x)$$

e, portanto,

$$f(x) = [a_n {b_m}^{-1} x^{n-m} + q_1(x)] g(x) + r_1(x)$$

onde $r_1 = 0$ ou $\partial r_1 < \partial g$.

Isso demonstra a existência. Mostremos, agora, a unicidade.

Suponhamos que se pudesse ter $f = gq + r = gq_1 + r_1$, com $\partial r < \partial g$, se $r \neq 0$, e $\partial r_1 < \partial g$, se $r_1 \neq 0$. Então, $g(q - q_1) = r_1 - r$. Como $A[X]$ é um anel de integridade, então $r_1 - r = 0$ se, e somente se, $q - q_1 = 0$, pois $g \neq 0$.

Logo, $r_1 = r$ e $q_1 = q$.

□

Proposição 3.22: Sejam A um anel comutativo com unidade, u um elemento de A e $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in A[X]$ um polinômio de grau n. Nessa condições:

a) (Teorema do Resto) O resto da divisão euclidiana de f por $X - u$ é $f(u)$;
b) (Algoritmo de Briot-Ruffini) Se $q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-2} X^{n-2} + b_{n-1} X^{n-1}$ e $r = b_0$ são respectivamente quociente e resto na divisão considerada, então $b_{n-1} = a_n$ e $a_{i-1} = u \,.\, b_i + b_{i-1}$, com $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração:

a) Suponha que:

$$f = (X - u)q + r, \text{ onde } r = 0 \text{ ou } \partial r < \partial f.$$

Achando o valor de f em u:

$$f(u) = (u - u)q(u) + r(u) = r(u)$$

Daí, $f(u) = r$.

b) Calculemos $(X - u)q + r$:

$$(X - u)(b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-2}X^{n-2} + b_{n-1}X^{n-1}) + b_0 =$$

$$= (b_0 - ub_0) + (b_0 - ub_1)X + \cdots + (b_{n-2} - ub_{n-1})X^{n-1} + b_{n-1}X^n$$

Levando em consideração que $f = (X - u)q + r$, comparando f com a expressão acima, conclui-se que:

$$b_{n-1} = a_n \text{ e } a_{i-1} = u \,.\, b_i + b_{i-1}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n.$$

□

Corolário 3.23: Se $f \in A[X]$, então. f é divisível por $X - u$ se, e somente se, $f(u) = 0$.

Demonstração: (⇒) Seja f dada como na definição 3.19. Por hipótese, f é divisível por $X - u$, isto é,

$$f = (X - u)q$$

Calculando o valor de f em u:

$$f(u) = (u - u)q = 0.$$

Logo,

$$f(u) = 0.$$

($\Leftarrow$) Seja f escrita como

$$f = (X - u)q + r$$

Por hipótese, $f(u) = 0$. Assim,

$$f(u) = (u - u)q(u) + r(u) = 0 \Rightarrow r = 0.$$

Logo, f é divisível por $X - u$.

□

Proposição 3.24: Seja A um anel de integridade e $f \in A[X]$ um polinômio não nulo. Então o número de raízes de f em A não ultrapassa ∂f.

Demonstração: Se o grau de f é zero, é imediato o resultado, pois f não terá raiz em A.

Suponhamos que $\partial f = n > 0$ e que a proposição seja válida para todo polinômio de grau $n - 1$. Se f não possui nenhuma raiz em A, a proposição está provada. Caso contrário, se u é uma raiz de f em A, então existe $q \in A[X]$ de modo que $f = (X - u)q$. Daí, qualquer outra raiz de f (caso exista) é raiz de q. De fato:

$$v \neq u \text{ e } f(v) = 0 \Rightarrow (v - u)q(v) = 0.$$

Como A é anel de integridade e $v \neq u$, segue que $q(v) = 0$.

Como o número de raízes de q não ultrapassa $\partial q = n - 1$, então o número de raízes de f em A e, no máximo, n.

□

Corolário 3.25: Se f e g são polinômios de grau n sobre um anel de integridade A e se existirem $n+1$ elementos $u_0, u_1, \dots, u_n \in A$, distintos entre si, tais que $f(u_i) = g(u_i)$, com $i = 0, 1, \dots, n$, então $f = g$.

Demonstração: Sejam f e g dois polinômios de grau n sobre um anel de integridade A. Considere $h = f - g$. Tal polinômio admite mais que n raízes em A. Logo $h = 0$, ou seja, $f = g$.

□

3.3. FUNÇÕES POLINOMIAIS

Definição 3.26: Seja A um anel comutativo com unidade. Para cada $f \in A[X]$ é possível definir a função:

$$f_A: A \longrightarrow A, \text{ dada por } f_A(u) = f(u), \forall\, u \in A.$$

Logo, f_A associa a cada $u \in A$ o valor de f em u. Tal função chama-se *função polinomial* definida por f sobre A. O conjunto dessas funções será denotado por $P(A)$. O conjunto $P(A)$ é anel.

Teorema 3.27: Se A é um anel de integridade infinito, então $A[X]$ e $P(A)$ são isomorfos através da aplicação $F: A[X] \longrightarrow P(A)$ definida como:

$$F(f) = f_A, \forall\, f \in A[X].$$

Demonstração: Sejam A um anel de integridade infinito, $A[X]$ o conjunto de polinômios em A e $P(A)$ o conjunto das funções f sobre A.

- F é homomorfismo: De fato

$$F(f+g) = (f+g)_A = f_A + g_A = F(f) + F(g);$$

e

$$F(f.g) = (f.g)_A = f_A \,.\, g_A = F(f)\,.\,F(g).$$

- Dada uma função polinomial $h_A, F(h) = h_A$.

Logo, F é sobrejetora.

- Sejam $f, g \in A[X]$.

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f_A = g_A \Rightarrow f_A - g_A = 0_A \Rightarrow (f-g)_A = 0_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f-g)_A(u) = 0_A(u), \forall\, u \in A \Rightarrow (f-g)(u) = 0, \forall\, u \in A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(u) = g(u), \forall\, u \in A.$$

Segue que $f = g$.

Logo, F é injetora.

Portanto, F é um isomorfismo de anéis.

□

Devido ao Teorema 3.27, identifica-se o polinômio f com a função polinomial f_A.

4. FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Definição 4.1: Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com domínio e contradomínio no anel dos números reais, chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Propriedade 4.2: Se $ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = a'x^2 + \mathrm{b}'x + \mathrm{c}'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a = a', \mathrm{b} = \mathrm{b}', \mathrm{c} = \mathrm{c}'$.

Demonstração: Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a^{'}x^2 + b^{'}x + c$. Como a igualdade é válida para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular, é válida para $x = 0, x = 1$ e $x = -1$. Substituindo $x = 0$:

$$a.0^2 + b.0 + c = a'.0^2 + b'.0 + c'.$$

Logo, $c = c'$, de onde vem

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x.$$

Desta forma,

$$\begin{cases} a + b = a' + b' \\ a - b = a' - b' \end{cases}$$

Somando as equações,

$$2a + b - b = 2a' + b' - b'$$

Logo, $a = a'$ e $b = b'$.

Assim, $a = a', b = b'$ e $c = c'$.

□

Devido ao isomorfismo, conforme Teorema 3.27, a função quadrática é identificada com o trinômio do segundo grau a ela associado e será permitido falar da função

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sempre que não houver perigo de confundi-la com o número real f(x), que é o valor que ela assume no ponto x.

Proposição 4.3: Sejam $x_1, x_2 \; e \; x_3$ três números reais distintos e $y_1, y_2 \; e \; y_3$ reais arbitrários. A função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$ será quadrática para $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, com

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x_3 - x_2}}\left(\frac{\boldsymbol{y_3 - y_1}}{\boldsymbol{x_3 - x_1}} - \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}\right).$$

Demonstração: Considere $x_1, x_2 \; e \; x_3$ e $y_1, y_2 \; e \; y_3$ como no enunciado da proposição. Assim,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a x_1^2 + b x_1 + c = y_1} \; (\mathbf{4.1}) \\ \boldsymbol{a x_2^2 + b x_2 + c = y_2} \; (\mathbf{4.2}). \\ \boldsymbol{a x_3^2 + b x_3 + c = y_3} \; (\mathbf{4.3}) \end{cases}$$

Subtraindo a equação (4.1) da (4.2) e da (4.3):

$$\begin{cases} a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = \boldsymbol{y_2 - y_1} \\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = \boldsymbol{y_3 - y_1} \end{cases}.$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$:

$$\boldsymbol{a(x_2 + x_1) + b} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}} \; (\mathbf{4.4})$$

e

$$\boldsymbol{a(x_3 + x_1) + b} = \frac{\boldsymbol{y_3 - y_1}}{\boldsymbol{x_3 - x_1}} \; (\mathbf{4.5})$$

Subtraindo (4.4) de (4.5):

$$\boldsymbol{a(x_3 + x_1) - a(x_2 + x_1) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Assim,

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}$$

Para a função f ser quadrática, $\boldsymbol{a}$ deve ser diferente de zero. Logo,

$$\boldsymbol{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}.$$

$\square$

Para que uma função, contendo os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), seja quadrática, os coeficientes angulares da reta que contém os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), e da reta que contém os pontos (x_1, y_1), (x_3, y_3) devem ser diferentes, ou seja, os três pontos não podem ser colineares.

Proposição 4.4: Sejam $x_1, x_2\ e\ x_3$ três números reais distintos e $y_1, y_2\ e\ y_3$ reais arbitrários. Existe uma, e somente uma, função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Demonstração: Suponhamos que existam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$ e $g(x_1) = y_1, g(x_2) = y_2$ e $g(x_3) = y_3$. Sejam α, β, γ, tais que $\alpha = a - a', \beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$. Para mostrar que f e g coincidem para todo x, basta mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

De $f(x_1) = y_1$ e $g(x_1) = y_1$,

$$a{x_1}^2 + bx_1 + c - a'{x_1}^2 - b'x_1 - c' = 0.$$

Das demais condições,

$$a{x_2}^2 + bx_2 + c - a'{x_2}^2 - b'x_2 - c' = 0.$$

e

$$ax_3{}^2 + bx_3 + c - a'x_3{}^2 - b'x_3 - c' = 0.$$

Isto significa que:

$$\begin{cases} \alpha x_1{}^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2{}^2 + \beta x_2 + \gamma = 0. \\ \alpha x_3{}^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras duas, esse sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} \alpha(x_2{}^2 - x_1{}^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0 \\ \alpha(x_3{}^2 - x_1{}^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0 \end{cases}.$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, é possível dividir a primeira dessas equações por $x_2 - x_1$ e a segunda por $x_3 - x_1$ de forma que a obter o sistema

$$\begin{cases} \alpha(x_2 + x_1) + \beta = 0 \\ \alpha(x_3 + x_1) + \beta = 0 \end{cases}.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira,

$$\alpha(x_2 - x_3) = 0.$$

Como $x_2 - x_3 \neq 0$, resulta que $\alpha = 0$. Logo,

$$\beta = 0.$$

Daí, $\gamma = 0$.

Portanto, $a = a',\ b = b'$ e $c = c'$.

□

4.1. A PARÁBOLA

Definição 4.5: Considere os pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$. Então a distância $d(P, Q)$ entre eles é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Definição 4.6: Considere o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta r, de equação geral $ax + by - c = 0$. Define-se a *distância entre* P *e* r como sendo a distância entre o ponto Q e o ponto P, onde $Q = r \cap s$,e s é a reta perpendicular a r passando por P.

Definição 4.7: Seja r uma reta de equação $y = mx + n$. Tal equação chama-se *equação reduzida de* r.

Definição 4.8: Sejam r uma reta como na definição 4.7 e $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pontos pertencentes à reta. Chama-se *coeficiente angular* da reta r ao número m, dado por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observa-se que $m = tg\theta$, onde θ é o ângulo entre o eixo x e a reta, no sentido anti-horário.

Teorema 4.9: Se duas retas r e s são perpendiculares, então são tais que o produto de seus coeficientes angulares m_r e m_s é igual a -1.

Demonstração: Sejam α e β as medidas dos ângulos entre a reta r e o eixo x e a reta s e o eixo x respectivamente, e no sentido anti-horário.

Se o menor ângulo mede α, então, por hipótese, $\beta = 90 + \alpha$.

Daí,

$$tg\,\beta = tg(90 + \alpha) = \frac{sen(90 + \alpha)}{\cos(90 + \alpha)} = \frac{sen\,(90).\cos(\alpha) + cos\,(90).\operatorname{sen}(\alpha)}{cos(90).\cos(\alpha) - sen\,(90).\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\cos\,(\alpha)}{-sen\,(\alpha)}$$

$$= \frac{\cos\,(\alpha)}{-sen\,(\alpha)} = -\frac{1}{tg(\alpha)}.$$

Logo,

$$tg\,\alpha\,.\;tg\,\beta = tg\,\alpha\,.\;\left(-\frac{1}{tg(\alpha)}\right) = -1.$$

□

Teorema 4.10: A distância $d(P,r)$ entre o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta $r: y = m_r x + n$ é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstração: Considere o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta $r: y = m_r x + n$. Seja s a reta perpendicular a r passando por P. Pela Definição 4.6, a distância entre P e r é a distância entre P e $Q(x, y)$, onde Q é a interseção entre a reta r e a reta s, onde s é a perpendicular à r passando por P.

Pelo Teorema 4.9, $m_s = -\frac{1}{m_r}$, e, pela Definição 4.8,

$$m_r = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

A equação de s é dada por:

$$y = -\frac{x - x_0}{m_r} + y_0$$

Daí, para se encontrar as coordenadas do ponto Q, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = m_r x + n} \\ y = -\frac{x - x_0}{m_r} + y_0 \end{cases}.$$

Assim,

$$-\frac{x - x_0}{m_r} + y_0 = \boldsymbol{m_r x + n} \Rightarrow \boldsymbol{-x + x_0 = m_r{}^2 x + m_r n - m_r} y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m_r{}^2 x + x = x_0 + m_r y_0 - m_r n} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x_0 + m_r}(y_0 - \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}}.$$

Assim,

$$\boldsymbol{y = m_r} \frac{\boldsymbol{x_0 + m_r}(y_0 - \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}} + \boldsymbol{n}.$$

Portanto,

$$\boldsymbol{Q} = \left(\frac{\boldsymbol{x_0 + m_r}(y_0 - \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}}, \boldsymbol{m_r} \frac{\boldsymbol{x_0 + m_r}(y_0 - \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}} + \boldsymbol{n} \right).$$

Calculando a distância entre $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{r}$ é, pela definição 4.6, a distância entre $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$. Assim,

$$\boldsymbol{d(P, r) = d(P, Q)} = \sqrt{\left[\frac{\boldsymbol{x_0 + m_r}(y_0 - \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}} - \boldsymbol{x_0} \right]^{\boldsymbol{2}} + \left[\boldsymbol{m_r} \frac{\boldsymbol{x_0 + m_r}(y_0 - \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}} + \boldsymbol{n - y_0} \right]^{\boldsymbol{2}}} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{\boldsymbol{x_0 + m_r}(y_0 - \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{m_r{}^2 + 1})\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}} \right]^{\boldsymbol{2}} + \left[\frac{\boldsymbol{x_0 m_r + m_r}{}^2(y_0 - \boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{m_r{}^2 + 1})(y_0 - \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}} \right]^{\boldsymbol{2}}}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{\boldsymbol{x_0}(\boldsymbol{-m_r{}^2 - 1 + 1}) + \boldsymbol{m_r}(y_0 - \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}} \right]^{\boldsymbol{2}} + \left[\frac{\boldsymbol{x_0 m_r} + (y_0 - \boldsymbol{n})(\boldsymbol{m_r{}^2 - m_r{}^2 - 1})}{\boldsymbol{m_r{}^2 + 1}} \right]^{\boldsymbol{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\boldsymbol{m_r}^2[-\boldsymbol{m_r x_0} + \boldsymbol{y_0} - \boldsymbol{n}]^2}{(\boldsymbol{m_r}^2 + \mathbf{1})^2} + \frac{[\boldsymbol{m_r x_0} - (y_0 - \boldsymbol{n})]^2}{(\boldsymbol{m_r}^2 + \mathbf{1})^2}} = \sqrt{\frac{[-\boldsymbol{m_r x_0} + (\boldsymbol{y_0} - \boldsymbol{n})]^2(\boldsymbol{m_r^2} + \mathbf{1})}{(\boldsymbol{m_r}^2 + \mathbf{1})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{[-\boldsymbol{m_r x_0} + (\boldsymbol{y_0} - \boldsymbol{n})]^2}{(\boldsymbol{m_r}^2 + \mathbf{1})}} = \frac{|\boldsymbol{y_0} - \boldsymbol{m_r x_0} - \boldsymbol{n}\,|}{\sqrt{(\boldsymbol{m_r}^2 + \mathbf{1})}} = \frac{\left|\boldsymbol{y_0} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x_0} - \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{b}^2} + \mathbf{1}\right)}} = \frac{|\boldsymbol{a x_0} + \boldsymbol{b y_0} - \boldsymbol{c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}}$$

□

Definição 4.11: Dados um ponto F e uma reta r no plano. Chama-se *parábola*, com *foco* F e *diretriz* r, ao conjunto dos pontos P do plano, tais que $d(P,F) = d(P,r)$, que tem como elementos:

- O eixo da parábola, a reta AF, que é a reta perpendicular à reta diretriz r, baixada a partir do foco F;
- O vértice V, que é o ponto da parábola mais próximo da diretriz r.

Em particular, $d(V,F) = d(V,r)$, isto é, V é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco F e a interseção do eixo AF com a diretriz r (figura 4.1).

Figura 4.1. Representação da parábola para $a > 0$ e para $a < 0$.

Teorema 4.12: A parábola de vértice $V(h,k)$, tendo como distância do vértice ao foco $F(h, k+p)$ da parábola o parâmetro p, e a diretriz $r\!: y = k - p$ tem como equação

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Neste caso, o eixo da parábola é paralelo ao eixo y. Analogamente, para o eixo paralelo ao eixo x,

$$(y-k)^2 = 4p(x-h).$$

Demonstração: Considere a parábola de vértice $V(h,k)$, foco $F(h,k+p)$ e diretriz $r: y-k+p=0$. Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola. Pela definição de parábola,

$$d(P,F) = d(P,r).$$

Assim,

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-p)^2} = \frac{|y-k+p|}{\sqrt{0^2+1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k-p)^2 = (y-k+p)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + y^2 - 2yk - 2yp + k^2 + 2pk + p^2 = y^2 - 2ky + k^2 + 2yp - 2kp + p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = -2kp + 2yp - 2kp + 2yp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 = 4yp - 4kp \Rightarrow (x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Logo, a equação da parábola com vértice $V(h,k)$, foco $F(h,k+p)$ e diretriz $r: y-k+p=0$ é:

$$\boldsymbol{(x-h)^2 = 4p(y-k)}.$$

$\square$

5. O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Teorema 5.1: A equação $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é a equação de uma parábola de vértice $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ e foco $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$.

Demonstração: Considere a função

$$y = \ ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

As duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{\mathrm{b}}{2a}\right)^2$. Completando o quadrado dentro dos colchetes, podemos escrever:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \ 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

o que é equivalente a:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - \ b^2}{4a^2}\right].$$

Esta é chamada de *Forma Canônica do Trinômio*.

Desta forma,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y - \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Comparando com a equação do Teorema 4.12, essa é a equação da parábola de vértice $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, foco $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$, cuja reta diretriz é a reta horizontal $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$ e $p = \frac{1}{4a}$. □

Os próximos resultados têm por objetivo mostrar que o gráfico da função quadrática tem, de fato, a forma apresentada na Figura 4.1.

Definição 5.2: Chamamos de *zero* ou *raiz da função quadrática* $y = ax^2 + bx + c$ o valor de x tal que $f(x) = 0$.

Corolário 5.3: Seja $y = ax^2 + bx + c$.

- Se $b^2 - 4ac > 0$, a função y tem duas raízes distintas;
- Se $b^2 - 4ac = 0$, a função y tem uma raiz dupla; e
- Se $b^2 - 4ac < 0$, a função y não tem raiz.

Demonstração: Seja $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Do Teorema 5.1, $y = 0$ se, e somente se

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0,$$

o que é equivalente a escrever

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Assim,

- Seja $b^2 - 4ac = 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$. Logo, $x = -\frac{b}{2a}$ e a equação admite duas raízes iguais;
- Se $b^2 - 4ac < 0$, como o primeiro membro é positivo ou igual a zero, a equação não admite raízes;
- Se $b^2 - 4ac > 0$,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Neste caso, as duas raízes são:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

□

Corolário 5.4: A função $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, é equivalente $y = a(x^2 - Sx + P)$, onde S e P são a soma e o produto, respectivamente, das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, para $b^2 - 4ac \geq 0$.

Demonstração: Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Para $\mathrm{b}^2 - 4ac > 0$, a função

$$y = ax^2 + bx + c$$

tem duas raízes

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

com x'≥ x'', cuja soma é:

$$\mathrm{S} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-\mathrm{b}}{a}$$

e cujo produto é:

$$\mathrm{P} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\mathrm{b^2-b^2+4ac}}{4a^2} = \frac{\mathrm{c}}{a}.$$

Logo, $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - \ Sx \ + P)$

□

Em particular, a média aritmética das raízes é:

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{S}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a},$$

ou seja, as raízes x’ e x’’ são equidistantes do ponto $\frac{-\mathrm{b}}{2a}$.

Definição 5.5: Um número x_0 é chamado *ponto de máximo absoluto* (ou *global*) de uma função f, se $f(x_0) \geq f(x), \forall\ x\ \in dom(f)$. Neste caso, o *valor máximo* da função é $f(x_0)$.

Definição 5.6: Um número x_0 é chamado *ponto de mínimo absoluto* (ou *global*) de uma função f, se $f(x_0) \leq f(x), \forall\ x\ \in dom(f)$. Neste caso, o *valor mínimo* da função é $f(x_0)$.

Proposição 5.7: Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a > 0$, então $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o valor mínimo absoluto de f; se $a < 0$, então $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é máximo de f.

Demonstração: A forma canônica

$$f(x) = \ ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - \ b^2}{4a^2}\right]$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre igual ou maior que zero. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \text{isto é, quando } x = \ - \frac{\mathrm{b}}{2a}.$$

Neste ponto, $f(x)$ também assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}.$$

Se $a < 0$, o valor $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

□

Definição 5.8: Uma função é dita *crescente* se, para $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$; e a função é dita *decrescente* se, para $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Proposição 5.9: Para $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ é crescente para $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ e decrescente para $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$.

Demonstração: Considere a forma canônica da função quadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$, com $a > 0$,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Sejam x_1 e x_2 números reais, tais que $-\frac{b}{2a} < x_1 < x_2$. Provemos por contrarrecíproca. Considere $f(x_1) \geq f(x_2)$.

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow a\left[\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \geq a\left[\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \geq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left|x_1 + \frac{b}{2a}\right| \geq \left|x_2 + \frac{b}{2a}\right| \Rightarrow x_1 + \frac{b}{2a} \geq x_2 + \frac{b}{2a}$$

contrariando o fato de que $x_1 < x_2$. Logo, a função quadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$, para $a > 0$, é crescente para $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Analogamente, f é decrescente para $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$.

$\square$

Proposição 5.10: Para $a < 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ é crescente para $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ e decrescente para $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Demonstração: Considere a forma canônica da função quadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$, com $a < 0$,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Sejam x_1 e x_2 números reais, tais que $-\frac{b}{2a} < x_1 < x_2$. Considere $f(x_1) \leq f(x_2)$. Assim,

$$a\left[\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \leq a\left[\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Multiplicando por -1,

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \geq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2},$$

$\Rightarrow \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \left|x_1 + \frac{b}{2a}\right| \geq \left|x_2 + \frac{b}{2a}\right| \Rightarrow x_1 + \frac{b}{2a} \geq x_2 + \frac{b}{2a} \Rightarrow$ $x_1 \geq x_2$, contrariando o fato de que $x_1 < x_2$. Logo, a função quadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$, para $a < 0$, é decrescente para $x \in \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Analogamente, f é crescente para $a < 0$ e $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$.

□

Proposição 5.11: A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor $f(x) = f(x')$ para $x \neq x'$ se, e somente se, os pontos x e x' são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$.

Demonstração: Considere a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

e os pontos x e x'. Temos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a\left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

ou

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(x' + \frac{b}{2a}\right)\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(x' + \frac{b}{2a}\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \left(x' + \frac{b}{2a}\right) \Rightarrow x = x' \text{ ou} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\left(x' + \frac{b}{2a}\right) \end{cases}.$$

Como estamos supondo $x \neq x'$, isto significa que:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\left(x' + \frac{b}{2a}\right) \Rightarrow$$

isto é

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Portanto, se a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor $f(x) = f(x')$ para $x \neq x'$, então os pontos x e x' são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$.

Reciprocamente, se os pontos x e x' são eqüidistantes de $-\frac{b}{2a}$:

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por 2:

$$x + x' = -\frac{b}{a} = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = -x' - \frac{b}{2a} = -\left(x' + \frac{b}{2a}\right)$$

ou

$$x + \frac{b}{2a} = -\left(x' + \frac{b}{2a}\right).$$

Elevando ao quadrado, multiplicando por a e somando $\frac{-b^2+4ac}{4a}$, chegamos à forma canônica da função quadrática, ou seja,

$$f(x) = f(x').$$

□

Segue, das propriedades do Capítulo 5, que o gráfico da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é, de fato, como apresentado na Figura 4.1. Essas características são possíveis de serem trabalhadas na 1ª série do Ensino Médio.

Normalmente nos livros didáticos é somente citado que se $a > 0$ o gráfico é uma parábola côncava para cima e se $a < 0$ o gráfico é uma parábola côncava para baixo.

O capítulo 6, a seguir, visa esclarecer ainda mais as características da função quadrática, direcionado principalmente para o professor de Ensino Médio e alunos de graduação, e esclarece essa questão de concavidade.

6. VARIAÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

6.1. LIMITES

Definição 6.1: Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f. Dizemos que f *tem limite* L em p, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in Dom\, f$,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por

$$L = \lim_{x \to p} f(x).$$

Definição 6.2: Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. A função f será uma *função contínua* em p quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ (δ dependendo de ε), tal que, para todo $x \in Domf$,

$$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon,$$

ou seja, f é *contínua* se, e somente se,

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p).$$

Exemplo 6.3: Provar que $f(x) = x$ é contínua em todo p real.

Para todo $\varepsilon > 0$, considerando $\delta = \varepsilon$, se $p - \delta < x < p + \delta$. Como $f(x) = x$, $f(p) = p$, então

$$f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon.$$

Proposição 6.4: Quaisquer que sejam os números reais x e y:

$$|xy| = |x||y|.$$

Demonstração: Sejam x e y dois números reais. Assim, como $|a| = \sqrt{a^2}$

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|.$$

□

Proposição 6.5 (Desigualdade Triangular)**:** Quaisquer que sejam os reais x e y:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Demonstração: Sejam x e y dois números reais. Assim,

Se $x + y \geq 0$ então $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.

Se $x + y < 0$ então $|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$.

□

Proposição 6.6: Sejam f e g funções e x_0, L e M números reais, tais que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ são válidas as seguintes propriedades de limites:

a) $\lim_{x\to x_0} a = a$, com a constante;

b) $\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = L.M$;

c) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$.

Demonstração: Considere, primeiramente, a função constante $f(x) = a$. Provemos que $\lim_{x \to x_0} a = a$.

Sejam $\varepsilon > 0$. Assim,

$$|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - \ f(x_0)| = \ |a - a| = 0 < \varepsilon.$$

Para qualquer $\delta > 0$.

A prova de (b) pode ser encontrada em Guidorizzi (2011).

Para provar o terceiro item da proposição, consideremos as funções $f(x)$ e $g(x)$, os números reais x_0, L e M. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$:

$$\forall \ \varepsilon > 0, \exists \ \delta_1 > 0 \ ; \ |x - \ x_0| < \delta_1 \ \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\forall \ \varepsilon > 0, \exists \ \delta_2 > 0 \ ; \ |x - \ x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando, $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$:

$$\forall \ \varepsilon > 0, \exists \ \delta > 0 \ ; \ |x - \ x_0| < \delta \ \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L + M)| <$$

$$< |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Essa propriedade pode ser estendida para as funções. □

Corolário 6.7: A função $f(x) = \ ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$, com domínio e contradomínio nos números reais, é contínua.

Demonstração: Pela Proposição 6.6,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ = \ ap^2 + ap + c \ = \ f(p).$$

Logo, a função é contínua.

□

Definição 6.8: Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $]a,+\infty[\subset Dom f$. Definimos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \text{com } \delta > a, \text{tal que} \\ x > \delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon. \end{cases}$$

Definição 6.9: Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $]-\infty, a[\subset Dom f$. Definimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Rightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \text{com } -\delta < a, \text{tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon. \end{cases}$$

Definição 6.10: Suponhamos que exista a tal que $]a,+\infty[\subset Dom f$. Definimos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \text{com } \delta > a, \text{tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, com - \delta < a, tal\ que \\ x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon. \end{cases}.$$

Com essas definições, é possível mostrar que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

Proposição 6.11: Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$. Assim, se $a > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Demonstração: Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(a + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{x}^2}\right) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(a + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{x}^2}\right) = +\infty.$$

Analogamente, se $a < 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

□

Quando $a > 0$, $f(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ não assume valor máximo. Diz-se que essa é uma função ilimitada superiormente. Analogamente, quando $a < 0$, $f(x)$ não assume valor mínimo. Neste caso, é uma função ilimitada inferiormente.

6.2. DERIVADAS

A fim de obter o ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática, vamos considerar agora o problema que consiste em traçar a reta tangente à parábola dada num determinado ponto da curva, a fim de encontrar o ponto de máximo ou mínimo da função. Sejam t e $f(t)$ as coordenadas do ponto P, onde desejamos traçar a tangente. Consideremos outro ponto Q do gráfico de f, cuja abscissa representamos por $t + h$; então, a ordenada de Q é $f(t + h)$. A inclinação da reta secante PQ é dado pelo quociente

$$\frac{f(t+h) - f(h)}{h}$$

chamado a razão incremental. Essa designação se justifica, já que h é realmente um incremento que damos à abscissa de P para obter a abscissa de Q; em consequência, a ordenada $f(t+h)$ é obtida de $f(t)$ mediante o incremento $f(t+h)-f(t)$:

$$f(t+h) = f(t) + [f(t+h) - f(t)]$$

Vamos imaginar agora que, enquanto o ponto P permanece fixo, o ponto Q aproxima-se de P, passando por sucessivas posições Q_1, Q_2, Q_3 etc. Logo, a secante PQ assumirá as posições PQ_1, PQ_2, PQ_3 etc. O que se espera é que a razão incremental já citada, que é o declive da secante, se aproxime de um determinado valor m, à medida que o ponto Q se aproxima de P.

Definição 6.12: Uma *reta tangente* ao gráfico de uma função no ponto P é aquela que passa por P e cuja inclinação ou coeficiente angular é m. Tal coeficiente angular é chamado de *derivada* da função quadrática e denotado por $f'(x)$.

$$f'(x) = m = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Proposição 6.13: A derivada da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ é $f'(x) = 2ax + b$.

Demonstração: Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x^2 + 2xh + h^2) + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{i\to 0}(2ax + ah + b).$$

Pela Proposição 6.6, o limite da soma de funções é a soma dos limites das funções.

$$f'(x) = 2ax + b.$$

□

A função tem ponto de máximo ou mínimo local quando $f'(x) = 0$: O ponto de máximo ou mínimo local de f é o valor de x onde a função assume maior ou menor valor em um intervalo aberto apenas. No caso da função quadrática.

$$2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Observamos que, com as Proposições 5.9 e 5.10, esse ponto satisfaz também as Definições 5.5 ($a > 0$) e 5.6 ($a < 0$).

Definição 6.14: Seja f derivável num intervalo aberto I. A *reta tangente* ao gráfico de f em $(p, (f(p))$ é o gráfico de T:

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Definição 6.15: Dizemos que o gráfico de f tem *concavidade voltada para cima (ou baixo)*, num intervalo aberto I, se

$$f(x) > T(x) \text{ (ou } f(x) < T(x)).$$

quaisquer que sejam $x, p \in I$, com $x \neq p$.

Definição 6.16: Define-se *a derivada segunda de uma função* $f(x)$ por $f''(x) = (f'(x))'$, quando existe o limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Proposição 6.17: Sejam f uma função e x_0, um ponto tal que $f'(x_0) = 0$. Se f é derivável em um intervalo I contendo x_0 e existe $f''(x_0)$, temos:

a) Se $f''(x_0) < 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo; ou
b) Se $f''(x_0) > 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

Essa prova, assim como as demais não apresentadas nesse trabalho, pode ser encontrada em Guidorizzi (2011).

Proposição 6.18: O gráfico da função quadrática tem concavidade voltada para cima, se $a > 0$; e possui a concavidade voltada para baixo se $a < 0$.

Demonstração: Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pela Proposição 6.14, $f'(x) = 2ax + b$. Calculemos $f''(x)$.

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2a(x+h) + b - 2ax - b}{h} = \lim_{h\to 0} 2a = 2a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, se $a < 0$, $2a < 0$ e o gráfico de f está voltada para baixo; e, se $a > 0$, $2a > 0$ e o gráfico de f está voltada para cima.

Proposição 6.16: O gráfico de uma função quadrática, com todas as propriedades citadas tem o aspecto mostrado nas figuras 4.1.

Basta considerar as propriedades demonstradas nos Capítulos 5 e 6.

7. METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE FUNÇÕES

Ao estudar a Metodologia de Resolução de Problemas é conveniente saber o verdadeiro significado do termo problema.

Segundo Dante (2003), um problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. Um problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e os conhecimentos matemáticos para solucioná-la.

Os problemas matemáticos são classificados em exercícios e problemas. Exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar suas habilidades algorítmicas.

Problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não tem previamente nenhum algoritmo que garanta a solução. A resolução de um problema exige certa dose de iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Os problemas matemáticos são classificados em:

- Exercícios algorítmicos: Trata-se de exercícios que podem ser resolvidos com um procedimento passo-a-passo;
- Exercícios de reconhecimento: Este tipo de exercício tem por objetivo reconhecer ou recordar um fato específico, uma definição ou enunciado de um teorema;
- Problemas de aplicação: Os problemas de aplicação envolvem algoritmos aplicativos. Os problemas tradicionais caem nesta categoria, exigindo:
    - A formulação do problema simbolicamente; e
    - Manipulação dos símbolos mediante algoritmos diversos.
- Problemas de pesquisa aberta ou problemas-processo: São problemas de pesquisa aberta. Problemas em cujo enunciado não há imediatamente alguma estratégia para resolvê-los. Nesses problemas, a solução envolve operações que não estão contidas no enunciado, não são traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos com aplicação imediata de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que

poderá levá-lo à solução. Esse seria o tipo ideal de problema para trabalhar com o aluno através de Resoluções de Problemas.

Resolução de Problemas é uma maneira de incentivar a criança a estudar, devendo começar a instigar a curiosidade na criança desde os primeiros anos escolares. Não é uma metodologia apenas para se trabalhar a Matemática, mas sim todas as disciplinas, porque assim o professor estará instigando sempre a curiosidade do aluno em buscar novos conceitos e cria uma pró-atividade, o que é bom para o mercado de trabalho e para a vida do cidadão.

Segundo Polya (2006), são quatro as principais etapas da Resolução de Problemas:

- Compreender o problema;
- Elaborar um plano;
- Executar o plano;
- Fazer o retrospecto ou verificação.

É óbvio que estas etapas não são rígidas, fixas ou infalíveis. O problema da Resolução de Problemas é algo mais complexo e rico, que não se limita a seguir instruções passo-a-passo que levarão à solução, como se fosse um algoritmo. Entretanto, as etapas sugeridas por Polya ajudam o solucionador a se orientar durante o processo.

Vejamos com mais detalhes cada uma dessas etapas.

Compreensão do problema: Não se pode responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É difícil trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema e desejar resolvê-lo. O problema deve ser bem escolhido por sua natureza e deve ser bem interessante.

Primeiro de tudo, o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido. O aluno deve também estar em condições de identificar os dados do problema. Daí, porque, raramente, pode o professor não precisar das indagações: *Quais são os dados do problema?*

Estabelecimento de um plano: Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano pode ser longo. O principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Tal ideia pode surgir, na maioria das vezes, após tentativas infrutíferas. A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia.

Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Assim, deve-se muitas vezes começar o trabalho pela indagação: *Conhece um problema correlato?*

Se conseguir se lembrar de um problema anteriormente resolvido que esteja relacionado com o proposto, o estudante terá muita sorte. Deve-se fazer por merecer esta sorte e aproveitá-la. *Eis um problema correlato já resolvido. É possível utilizá-lo?*

Se os questionamentos acima não funcionarem, precisar-se-á procurar algum outro ponto de contato apropriado e examinar os diversos aspectos do problema, que poderá ser modificado. *É possível reformular o problema?* Algumas das indagações feitas até aqui indicam meios específicos de Variação do Problema, tais como a Generalização, a Particularização, o recurso à Analogia, o abandono de uma parte da condicionante e outros.

Ao se tentar aplicar vários problemas ou teoremas conhecidos, cogitando de diversas modificações e ensaiando problemas auxiliares diferentes, pode-se distanciar-se tanto do problema original que se corre o risco de perdê-lo por completo. Há, no entanto, uma boa indagação que pode nos trazer de volta a ele: *Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?*

Execução de um plano: Para se conseguir estabelecer um plano, é preciso ter bons hábitos mentais e de concentração no objetivo. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o de que mais se necessita.

O plano proporciona apenas um roteiro geral. É preciso que o estudante esteja certo de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, tem-se de examiná-los, um após o outro até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum detalhe ocultando um erro.

Se o aluno tiver feito um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor ou de um colega. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno *verifique cada passo.*

Pode-se convencer intuitivamente ou formalmente da correção de um passo do raciocínio, se concentrando no ponto em questão até que se perceba com tanta clareza e nitidez que não reste dúvida de que o passo é correto. Em certos casos, pode o professor realçar a diferença entre perceber e demonstrar: *É possível perceber claramente que o passo está certo?* Mas é possível *demonstrar que o passo está certo?*

Retrospecto do problema e solução: Até mesmo alunos bons, chegando a uma solução do problema, fecham os livros e passam a outro assunto, perdendo uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, considerando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. O professor deve transmitir a seus alunos que nenhum problema fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a se fazer. Com estudo e aprofundamento, pode-se melhorar qualquer resolução e é sempre possível aperfeiçoar a compreensão da resolução. Questionamentos a serem feitos são: *É possível verificar o resultado?*

Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação têm com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade de investigar as relações de um problema quando se faz o retrospecto de sua resolução. Os estudantes acharão interessante o retrospecto se eles houverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido o problema. O professor deve encorajar os alunos a imaginar casos em que eles poderão outra vez utilizar o procedimento usado ou o resultado obtido. *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*

Essas etapas devem ser desenvolvidas em sala de aula através do diálogo professor- aluno (DANTE, 2003). Durante a resolução do problema, o professor faz os questionamentos aos alunos de forma que as 4 etapas sejam executadas.

Na Metodologia de Resolução de Problemas, segundo Allevato e Onuchic (2011), deve haver a relação professor-aluno, de modo que o professor entregue para cada aluno uma cópia do problema e solicite que seja feita sua leitura e que, depois, seja feita em conjunto de alunos sentados em grupo. Caso tenham dificuldade, o professor pode ajudá-los com a leitura e, se não conseguirem, deve o professor propor um problema secundário, de modo a esclarecer as dúvidas do principal. Para incentivar os alunos, o professor observa o trabalho sendo desenvolvido por eles, analisa o comportamento e estimula o trabalho em grupo, deixando-os trocar informações. Feito isso, representantes de cada grupo registra, na lousa, os resultados obtidos, não existindo, nesse momento, certo ou errado, todos fazem seus registros para análise e discussão geral da sala. A partir desse ponto, o professor media as discussões, incentivando os alunos para este momento de aprendizagem em conjunto. Após sanarem suas dúvidas, o professor tenta, com toda a classe, chegar à solução correta. Assim, o professor formaliza a solução e o conteúdo envolvido no problema, destacando as técnicas e as demonstrações das propriedades.

Isso foi considerado na aplicação da Metodologia, conforme apresentado no Capítulo 8.

8. ALGUMAS APLICAÇÕES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A seguir, é apresentada uma proposta para o desenvolvimento das características da função quadrática com o uso da metodologia de Resolução de Problemas. Parte da proposta foi aplicada apenas para a 3ª série do Ensino Médio da Escola Estadual Monsenhor Gonçalves e será indicado, também, como trabalhar tais características na 1ª série do Ensino Médio.

8.1. Proposta

Ano escolar recomendado: 1ª e 3ª série do ensino médio.

Objetivo Geral: Fazer o gráfico da função quadrática, utilizando as suas características, obtidas através da Resolução do Problema 1.

Objetivos Específicos:

- Conhecer as raízes da função quadrática;
- Conhecer o crescimento e decrescimento da função quadrática;
- Conhecer a simetria do gráfico da função quadrática;
- Conhecer o valor mínimo (ou máximo) da função quadrática.

Conteúdos a serem abordados:

- Função quadrática;
- Raízes da função quadrática;
- Crescimento e decrescimento da função quadrática;
- Simetria do gráfico da função quadrática;
- Vértice do gráfico da função quadrática;
- Concavidade do gráfico da função quadrática;
- Gráfico da função quadrática.

Problema 1: Na administração de uma empresa, procura-se estabelecer relações matemática entre as grandezas envolvidas, tendo em vista a otimização da produção, ou seja, a busca de um custo mínimo ou de um rendimento máximo.

Suponha que, em certa empresa de produtos eletrônicos, a organização da produção seja tal que o custo total C para produzir uma quantidade q de determinado produto seja apresentado pela função $C(q) = q^2 - 1000q + 800000$ (C em reais, q em unidades do produto).

a) O custo de produção pode ser zero? Por quê? (Faça os cálculos para verificar)
b) Qual o custo para a empresa quando não se fabrica nenhum produto? Por que isso ocorre?
c) Qual o custo para 300 produtos? E para 700 produtos?
d) É mais vantajoso produzir 300 ou 700 em termos de rendimentos?
e) Qual o custo mínimo de produção? Quantos produtos são necessários fabricar para que se atinja o custo mínimo?
f) Pode-se trocar a palavra mínimo pela palavra máximo no item anterior? Por quê?
g) Esboce o gráfico de C.

8.2. Aplicação na 3ª série

O problema foi entregue para os alunos e houve a necessidade do diálogo professor-aluno conforme segue:

Professor: O que é custo?

Aluno 1: É o que a empresa paga a produção do produto.

Professor: Então, o custo de produção pode ser zero?

Aluno 2: Então, não. Porque ele vai pagar energia, água e matéria-prima.

Professor: Para a empresa em questão, como se saber qual o custo da produção quando não se fabrica nenhum produto?

Aluno 3: Se q é a quantidade, é só substituir por zero, já que não fabricou nada. E vai ser 800 mil, porque é o número que não tem q. E a resposta é água, energia,...

Professor: Como eu calculo o custo para 300 unidades?

Aluno 4: Substituo q por 300.

Professor: E qual o resultado?

Aluno 4: Espera aí... (alguns segundos depois) 590000 reais.

Professor: E para 700?

Aluno 5: 590000 reais.

Professor: Qual o custo mínimo de produção?

Aluno 6: Se eu somar o 700 com o 300 e dividir por 2, eu acho a quantidade a ser produzida.

Professor: Por quê?

Aluno 6: Porque é uma função do segundo grau e 700 e 300 tem o mesmo custo. Então, a quantidade a ser produzida é 500. Aí, é só substituir.

Professor: E qual o custo então?

Aluno 6: 550000 reais.

Professor: Posso calcular o custo máximo?

Aluno 1: Não é interessante porque a empresa quer saber qual o mínimo de gasto para a produção. E o máximo não existe, porque é função do segundo grau. Como eu faço o gráfico?

Aluno 7: Dos itens anteriores temos que quando q vale 300 ou 700, C vale 590000; e, quando q vale 500, C vale 550000. Basta colocar no gráfico.

Professor: Você já estudou um gráfico, que pode ser comparado ao gráfico dessa função?

Os alunos conseguiram completar quadrado, identificando a função quadrática à equação da parábola:

$$y = (x - 500)^2 + \ 550000.$$

Professor: E, no caso da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, qual é o seu gráfico?

A princípio não conseguiram responder e houve a necessidade do diálogo.

Professor: A função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita como a equação de uma parábola com foco no eixo das ordenadas?

Aluno: Sim. Completando quadrado.

Professor: Como? Podemos colocar o coeficiente a em evidência?

Aluno: Sim.

Professor: Por que posso?

Não entenderam a pergunta.

Professor: Quando coloco a em evidência, esse coeficiente aparece dividindo os coeficientes *b* e *c*. Isso pode acontecer? O que me garante?

Aluno: O coeficiente a é diferente de zero.

Professor: Desta forma:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Como completo quadrado?

Aluno: Vendo que número que multiplicado por 2 dá $\frac{b}{a}$. Então é:

$$\frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{2a}.$$

E seguindo um problema resolvido anteriormente, observaram que precisavam somar e subtrair o valor desse quadrado. Assim,

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right).$$

E, consequentemente,

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Professor: Posso somar as duas parcelas de dentro do colchete?

Aluno: Tem que achar o MMC.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right].$$

Professor: Agora, podemos aplicar a distributiva?

Aluno: Sim. E fica:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

Professor: Está parecendo com alguma fórmula conhecida?

Aluno: Com a fórmula da parábola.

Professor: O que está faltando para ficar igual à equação da parábola?

Aluno: Passar para o outro lado aquilo fora do parêntese.

Daí, chegamos a:

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Para verificação do resultado compararam o vértice da parábola obtida com o vértice que utilizaram no primeiro ano do Ensino Médio.

Professor: Como encontrar as coordenadas do foco em função de a, b e c?

Aluno: Comparando a equação da parábola à equação a que chegamos, isto é,

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

a

$$y - \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

e, após desenhar um esboço de gráfico, os alunos viram que o valor da abscissa do vértice é igual à abscissa do foco; viram, também, que

$$\frac{1}{4p} = a$$

e, daí,

$$p = \frac{1}{4a}.$$

Logo, concluíram que a ordenada do foco está $\frac{1}{4a}$ unidades de diferença do vértice. Assim,

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac+1}{4a}\right).$$

Neste caso, os alunos já conheciam a equação da parábola. No entanto, a formalização das características da função quadrática, de acordo com o que foi apresentado nos capítulo 4 e 5, normalmente, não é desenvolvida na 1ª série nem na 3ª série do Ensino Médio.

Para introduzir as demais propriedades da função quadrática, o professor induziu o aluno a chegar às raízes da função conforme o corolário 5.3 através de questionamentos apropriados. Os alunos mostraram que não conheciam essas justificativas apresentadas neste trabalho.

Pretende-se trabalhar também as demais propriedades, crescimento e decrescimento, e concavidade na forma diálogo professor-aluno.

8.3. Diálogo para a 1ª série

O Problema 1 não foi desenvolvido com os alunos da 1ª série do Ensino Médio, mas o diálogo esperado para se resolver o problema 1, nessa série, é semelhante ao que ocorreu na 3ª série. No entanto, para a formalização do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o diálogo esperado é apresentado a seguir. São mencionadas as etapas correspondentes ao diálogo apresentado.

Compreendendo o Problema:

Professor: A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita com o uso de um quadrado perfeito?

Aluno: A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Professor: O que é um quadrado perfeito?

Aluno: $x^2 + 2xy + y^2$.

Caso o aluno não saiba, segue o diálogo:

Professor: Como desenvolvo $(x + y)^2$?

Aluno: $x^2 + 2xy + y^2$.

Elaborando uma Estratégia:

Professor: Para que $ax^2 + bx + c$ seja um quadrado perfeito, o que deve acontecer com a segunda parcela deste trinômio?

Aluno: b deve ser o produto de 2 com o produto da raiz do primeiro membro com a raiz do terceiro membro, ou seja $b = 2x\sqrt{ac}$.

Professor: Tenho algo próximo de um quadrado perfeito na expressão $ax^2 + bx + c$?

Aluno: Sim, pois tem x em dois termos e no primeiro está ao quadrado.

Professor: Como transformar $ax^2 + bx$ em um quadrado perfeito?

Aqui, o aluno deve perceber que tem o coeficiente a atrapalhando; caso não perceba, continua-se o diálogo:

Professor: No quadrado perfeito, tem algo multiplicando o x^2?

Aluno: Tem o número um.

Professor: Como ‘tirar’ esse a do trinômio?

Aluno: O coeficiente a deve dividir toda a expressão.

Professor: O a pode dividir a expressão?

Aluno: Pode porque é uma função quadrática e a é diferente de zero

Caso não responda:

Professor: Por qual número não podemos dividir?

Aluno: Zero.

Aplicando a Estratégia:

O professor escreve no quadro

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Professor: E agora, está mais próximo de um quadrado perfeito?

Aluno: Sim.

Professor: Como fazer para deixar mais parecido?

Aluno: O segundo é o dobro do primeiro com o segundo. Então, $\frac{b}{a}$ é o dobro de $\frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{2a}$. Então, vamos ficar com algo do tipo: $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c$.

Caso o aluno não perceba o $\frac{b}{2a}$:

Professor: Se $2y = \frac{b}{a}$, como escrever y em função de b e a?

Aluno: $\frac{b}{2a}$.

Professor: Desenvolvendo $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c$, quais parcelas aparecem?

Aluno: ax^2, bx, $\frac{b^2}{4a}$ e c.

Professor: Está igual à expressão original?

Aluno: Não, tem um $\frac{b^2}{4a}$ a mais.

Professor: Posso subtrair?

Aluno: Sim.

Assim, o professor, com a metodologia de Resolução de Problemas, fará com que os alunos cheguem à expressão:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Retrospecto:

Professor: Desenvolvendo a expressão a que chegamos, o que obtemos?

O aluno resolve:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = ax^2 + bx + c.$$

Esse problema pode ser usado para se trabalhar as raízes da função quadrática (o que acontece quando se trabalha com resolução de problemas: um problema dar entrada para outro), como:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0.$$

Professor: Como resolver?

Aluno: É só 'passar' para o outro lado os que não estão multiplicando o a.

Professor: O que significa 'passar para o outro lado'?

Aluno: Tenho que isolar o x, então tenho que tirar o que está me atrapalhando.

Professor: Como faço isso?

Aluno: Se eu somar $\frac{b^2}{4a}$, ele 'some' do lado esquerdo.

Professor: Basta somar do lado esquerdo?

Aluno: Não, pois é uma igualdade. Então, tenho que somar do outro lado também. E faço o mesmo com o c, subtraindo dos dois lados.

Aqui o professor trabalha com a propriedade do grupo dos números reais. Assim, chega-se a:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c.$$

Aluno: Agora, acha o M.M.C. e soma os dois do lado direito da igualdade.

Professor: E qual é esse Mínimo Múltiplo Comum?

Aluno: Como um dos números é 1, o M.M.C. vale $4a$. Então, fica:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Agora, professor, o a passa dividindo, ficando:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac,,}{4a^2}.$$

Professor: Agora, o que podemos fazer?

Aluno: Achar a raiz quadrada dos dois lados.

Professor: Do lado esquerdo, o que teremos?

Aluno: Aquilo sem o quadrado.

Professor: E quando teremos resultado?

Aluno: Quando existir a raiz quadrada do lado direito. Do denominador, a raiz é $2a$. Agora, do numerador, só se for positivo.

Professor: Pode ser zero?

Aluno: Sim.

Professor: O que acontece se for zero?

Aluno: Zero dividido por um número diferente de zero é sempre zero. Raiz quadrada de zero é zero. Então, só vai ter uma solução, que é $-\frac{b}{2a}$.

Professor: E se não for zero?

Aluno: Teremos:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ou

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Professor: A solução está certa?

Aluno: Sim, pois foi essa fórmula que a professora do nono ano passou no ano passado.

Caso o aluno não se lembre disso, continuar o diálogo:

Professor: Como confirmar se essas soluções estão certas?

Aluno: Substitui os dois valores, um de cada vez, na função e vê se dá zero.

O professor pode pedir para esse aluno ir até o quadro e fazer os cálculos como segue:

$$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c =$$

$$=\frac{b^2-2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2-4ac}{4a}+\frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c=$$

$$=\frac{2b^2-2b\sqrt{b^2-4ac}-4ac}{4a}+\frac{-2b^2+2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a}+\frac{4ac}{4a}=0.$$

Professor: Podemos escrever a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ de outra forma?

Aluno: Sim, como foi feito nos outros problemas.

Assim, o professor anota no quadro:

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Professor: Qual o menor valor de um número ao quadrado?

Aluno: Zero.

Professor: Para qual valor de x, o quadrado se anula?

Aluno: $-\frac{b}{2a}$.

Caso o aluno não consiga observar isso, o professor escreve no quadro:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right).$$

Professor: Para qual valor de x, essa expressão se anula?

Aluno: $-\frac{b}{2a}$.

Professor: Qual o valor de x na expressão anterior?

Aluno: $-\frac{b}{2a}$.

Professor: E o valor de $f(x)$?

Aluno: $-\frac{b^2}{4a} + c$.

Caso, não o faça:

Professor: Qual o valor de $f(x)$, para o qual $x = -\frac{b}{2a}$?

O professor convida um aluno para ir ao quadro e fazer o seguinte cálculo:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

Professor: Esse valor é o menor?

Aluno: Sim, porque pegamos o menor valor que o quadrado pode assumir.

Professor: Poderia ter trocado a palavra ‘menor’ pela palavra ‘maior’?

Aluno: O quadrado é sempre positivo. Então, depende do sinal de a.

Professor: Então, se $a > 0$, uso ‘maior’ ou ‘menor’?

Aluno: Menor, porque o quadrado é positivo e estou pegando um valor menor (positivo) e multiplicando por um número positivo. Então, ficará menor. E se $a < 0$, usa a palavra ‘maior’, porque multiplico um valor menor (positivo) por um número negativo.

Observe que esse problema atraiu o tema “Máximos e Mínimos” (o que é muito comum em Resolução de Problemas), que, com esse último diálogo, atrai o tema “Concavidade”, pois, se se tem um valor máximo, a curva está totalmente para baixo; caso contrário, isto é, se se tem um valor mínimo, a curva está inteiramente para cima. Tal tema pode ser trabalhado com o seguinte problema:

Professor: Para $a > 0$, a função tem ponto de mínimo ou de máximo?

Aluno: Se a função tem valor mínimo, então esse valor é o menor de todos. Assim, todos os outros são maiores que ele. Então, a concavidade é para baixo. Logo, se $a > 0$, o gráfico da função tem concavidade para baixo. E se a função tem valor máximo, então esse valor é o maior de todos. Assim, todos os outros são menores que ele. Então, a concavidade é para cima. Logo, se $a < 0$, o gráfico da função tem concavidade para cima.

Caso o aluno não tenha esse raciocínio:

Professor: O que significa valor máximo?

Aluno: Esse valor é o maior de todos.

Professor: Então, qual a relação entre os outros valores e esse?

Aluno: Os outros valores são menores que esse. Então, todos os pontos estarão para baixo e a concavidade estará para baixo. Assim, se $a < 0$, a concavidade é para cima; se $a > 0$, a concavidade é para baixo.

Professor: Por que a concavidade é para baixo?

Aluno: Se $a > 0$, a função tem valor de mínimo. Então, todos os valores são maiores que esse mínimo. Daí, a concavidade é para baixo.

Professor: Podemos escrever a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ de outra forma?

Aluno: Sim. $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.

Professor: O que significa ‘para os quais $f(x)$ tem valores iguais’?

Aluno: Significa que quando substitui x por dois valores diferentes, $f(x)$ dá o mesmo valor.

Professor: Se esses valores existirem, conheço tais valores?

Aluno: Não.

Professor: Como encontrar?

Aluno: Iguala a função para dois valores diferentes, x e y, por exemplo.

O professor pede para o aluno ir ao quadro e este escreve:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Professor: E agora?

Aluno: Agora é só resolver:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=\ a\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\ a\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\ a\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\ \left(y+\frac{b}{2a}\right)^2\Rightarrow\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\ \sqrt{\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\ \left|y+\frac{b}{2a}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{b}{2a}=\ -y-\dfrac{b}{2a}\Rightarrow x+y=\ -\dfrac{2b}{2a}=\ -\dfrac{b}{a}\Longrightarrow\dfrac{x+y}{2}=\ -\dfrac{b}{2a}.\\ x+\dfrac{b}{2a}=\ y+\dfrac{b}{2a}\Rightarrow x=y\end{cases}$$

Professor: Então, quando a função terá imagens iguais?

Aluno: Quando for o mesmo valor ou quando o ponto médio entre esses pontos for o ponto mínimo (ou máximo).

Professor: Esse valor está certo?

Aluno: Sim, pois, se temos valores.

Professor: Para $a>0$, a função tem concavidade para cima ou para baixo?

Aluno: Para baixo.

Professor: Como ficaria esse gráfico?

O professor chama um aluno para fazer o desenho no quadro. O aluno desenha algo com a concavidade para baixo.

Professor: Observando essa figura feita, o gráfico é crescente?

Aluno: Não. Só em um pedaço.

Professor: É decrescente?

Aluno: Não. Só em um intervalo.

Professor: Ele é crescente em que intervalo?

Aluno: A partir do ponto de mínimo.

Professor: Ele é decrescente em que intervalo?

Aluno: Até o ponto de mínimo.

8.4. Comentários e Resultados

Com o uso da metodologia proposta os próprios alunos da 3ª série do ensino Médioconseguiram entender que o gráfico da função quadrática é uma parábola e encontrar as suas raízes. O professor fez o papel de mediador, não transmitindo o conhecimento, mas induzindo o aluno para que ele mesmo solucionasse as situações-problema apresentadas.

Na aplicação, com o diálogo professor-aluno, houve maior interesse por parte dos alunos para a compreensão dos resultados, se comparado com o ensino desse conteúdo com o uso da metodologia tradicional (definições, propriedades, exemplos, exercícios de fixação).

Essa metodologia pode ser aplicada não somente na disciplina de Matemática, mas em qualquer outra, pois situações-problema existem em qualquer disciplina. Basta o professor problematizar a sua aula e deixá-la mais dinâmica para os alunos.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o trabalho apresentado, é possível ao professor compreender todas as características da função quadrática. Parte delas pode ser trabalhada na 1ª série do Ensino Médio e, pela aplicação já desenvolvida na 3ª série, mostrou ser viável o uso da metodologia para a compreensão de tais propriedades.

Para o professor que, normalmente, trabalha com a metodologia tradicional (definições, propriedades, exemplos, exercícios de fixação), pode ser encontrada dificuldade na aplicação da Metodologia de Resolução de Problemas, principalmente com relação à elaboração da aula nesse novo formato. No entanto, com esse trabalho, recomenda-se seu uso pelos benefícios que trará com relação à aprendizagem dos alunos.

Parte desse trabalho foi apresentado no III Seminário de Resolução de Problemas da UNESP – Rio Claro e o resumo está disponível em:

https://drive.google.com/viewerng/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxzZW1pbmFyaW9yZXNvbHVjYW98Z3g6NDQzMWJlYTdjMWFjY2IwZg,

acesso em 14 de julho de 2015.

BIBLIOGRAFIA

[1] AIRES, C. N., LAMAS, R. C. P.: Uma análise da metodologia de resolução de problemas em sala de aula. Rio de Janeiro: SBEM, 2013.

[2] ALLEVATO, N. S. G., ONUCHIC, L. R.: Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Rio Claro: Bolema, 2011.

[3] ÁVILA, G. Cálculo I: Funções de uma Variável. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática,* terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2013.

[5] COURA, F. C. F., FERREIRA, F. N.: Ensino de matemática via resolução de problemas. São João Del Rey: UFSJ, 2011.

[6] DANTE, L. R.: Didática da resolução de problemas de matemática. São Paulo: Ática, 2003.

[7] D'AMBRÓSIO, U.: Educação Matemática: Da Teoria à Prática. Campinas: Papirus, 2009.

[8] GUIDORIZZI, H. L.: Um Curso de Cálculo, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[9] KRULIK, S., REYS, R. E.: A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997.

[10] LEITHOLD, L.: Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo: Habra, 1977.

[11] MOREN, E. B. S., DAVID, M. M. M. S., MACHADO, M. P. L.: Diagnóstico e análise de erros em matemática: subsídios para o processo ensino-aprendizagem. São Paulo: Caderno de Pesquisa, 1992.

[12] ONUCHIC, L. R.: A Resolução de Problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos?. Passo Fundo: Bolema, 2013.

[13] POLYA, G.: A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[14] SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: Caderno do Professor; Matemática, Ensino Médio. Secretaria da Educação. São Paulo: SE, 2014.