Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Implementação de Métodos Iterativos e Computacionais para Resolução de Sistemas de Equações Lineares: um Estudo Aplicado

Alterno Jerônimo Junior

Brasília

2015

Alterno Jerônimo Junior

Implementação de Métodos Iterativos e Computacionais para Resolução de Sistemas de Equações Lineares: um Estudo Aplicado

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz

Brasília

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Jerônimo Junior, Alterno
J112i IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS ITERATIVOS E COMPUTACIONAIS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UM ESTUDO APLICADO / Alterno Jerônimo Junior; orientador Rui Seimetz. -- Brasília, 2015.
116 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Ensino Médio. 2. Aplicação de Métodos Iterativos e Computacionais. 3. Motivação nas Aulas de Matemática. 4. Sistemas Lineares. 5. Recursos Computacionais. I. Seimetz, Rui, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Implementação de Métodos Iterativos e Computacionais para Resolução de Sistema de Equações Lineares: Um Estudo Aplicado

por

Alterno Jerônimo Junior *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 19 de junho de 2015.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Guy Grebot – MAT/UnB

Prof. Dr. Edson Alves da Costa Junior – UNB/Gama

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Alterno Jerônimo Junior graduou-se em Matemática pelo Centro Universitário São Camilo- ES e fez especialização pala FIJ- RJ. Atualmente é professor da Secretaria de Educação do Distrito Federal onde vem desenvolvendo um trabalho na grande área das Ciências da Natureza e Matemática com alunos que possuem necessidades educacionais especiais. Também atua como professor no Centro Universitário IESB-DF onde leciona as disciplinas de Cálculo Numérico, Cálculo I, Cálculo II e Física Geral I.

Dedicatória

À meus Pais Jerônimo e Neusa, minha irmã Michelle, meu filho Juan e minha namorada Yasmim, por todo incentivo e amor ao longo dessa caminhada.

"Os homens passam, mas suas obras ficam"
Ausgustin Louis Cauchy (1789-1857)

Agradecimentos

Agradecer é sempre um momento difícil. Durante essa jornada de pouco mais de 2 anos, foram muitas pessoas que passaram e de alguma forma contribuíram para o sucesso desse momento.

Mas vou começar agradecendo aos meu pais, Jerônimo e Neusa. Sempre incansáveis no trabalho e fonte de inspiração para todos. Obrigado por me oportunizarem esse momento, me apoiando e me deixando sempre seguir com minhas escolhas. À vocês um agradecimento especial.

À minha irmã e amiga Michelle, pelas sábias palavras nos momentos difíceis e pelo companheirismo.

Ao meu filho Juan, que desde pequeno ficou longe do pai mas mesmo assim nunca deixou de querer estar perto. Que essa conquista te inspire a ser um grande homem.

À minha namorada Yasmim, que desde o início me deu forças e foi a primeira a saber da aprovação para o mestrado. Obrigado por estar ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis. Seu amor sempre me inspirou.

Aos meus primos Bruno e Rodrigo, que conviveram comigo sobre o mesmo teto durante anos e de muitas formas sempre estiveram ao meu lado. À vocês meu mais sincero Obrigado!

Ao meu orientador, Professor Rui Seimetz, por ter aceitado esse desafio e dedicado parte de seu precioso tempo as correções e orientações deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, os professores Guy Grebot e Edson Alves da C. Junior, pelo tempo dispendido na leitura deste trabalho e pelas importantes sugestões apontadas.

Aos nossos professores do Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) campus UNB, por sempre nos incentivarem e por todos os momentos juntos.

Aos meus amigos, em especial ao Carlos Henrique, que revisou o Resumo e o Abstract e fez valiosas contribuições.

A todos os meus companheiros de classe. Sem vocês essa caminhada não teria tanto sucesso. Que todos continuem contribuindo para a melhora da Educação desse Pais.

Agradecer a CAPES pelo suporte financeiro, que contribuiu de forma significativa para essa formação.

E por fim agradecer ao Pai dos Pais. Senhor Jesus Cristo que pode propiciar todos esses momentos e agradecimentos. Sem ele nada aqui teria sido feito.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo principal mostrar como a implementação de métodos iterativos e computacionais para resolução de sistemas lineares pode contribuir para a motivação e melhoria do aprendizado dos alunos do 2° ano do Ensino Médio em Matemática. Para atingir os objetivos do trabalho, quinze alunos participarem de aulas sobre o tema e responderam a dois questionários, um no início e outro no final do programa. Uma revisão bibliográfica foi feita analisando livros, artigos e outras teses/dissertações que também abordavam o assunto. No referencial teórico estudou-se o surgimento histórico dos sistemas lineares, fez-se uma análise dos métodos de resolução de sistemas lineares estudados no Ensino Médio e outros tratados pelo Cálculo Numérico, destacando-se a eliminação de Gauss com pivoteamento e fatoração LU como métodos diretos e os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel entre os iterativos. Também foi analisado as condições de convergência dos métodos iterativos. Mostrou-se exemplos de como resolver sistemas lineares por cada método citado no trabalho. Observou-se métodos de soluções computacionais para sistemas lineares contemplando os *softwares GeoGebra, Winplot, Máxima e SciLab*, todos eles de código aberto e divulgação livre. Mostrou-se exercícios aplicados de sistemas lineares de dimensão n, com $n > 3$, em várias áreas do conhecimento como motivação para a pesquisa de campo. Como sujeitos da pesquisa foram selecionados alunos de escolas públicas e privadas da rede de ensino do DF. Esses alunos participaram das aulas, desenvolvendo os conteúdos relativos aos métodos abordados neste trabalho, destacando-se os métodos iterativos e computacionais. Observamos as aulas da pesquisa e os questionários respondidos pelos alunos para inferirmos que a resolução das aplicações, principalmente por métodos computacionais, motivam e ajudam os alunos a terem uma aprendizagem significativa nas aulas de matemática relacionadas a sistemas lineares.

Palavras-chave

Sistemas Lineares, Métodos iterativos e computacionais, Motivação.

Abstract

The work main objective is to show how the implementation of iterative and computational methods for solving linear systems can contribute to motivation and improve learning of Mathematics classes for high school students. To achieve the objectives of this paper, a set of classes was delivered to fifteen students and the students answered two questionnaires, one at the beginning and another at the end of the program. A bibliographic review was done considering books, articles and past work about this subject. The theoretical background includes the history of linear systems. There was an analysis of linear systems solving methods studied in high school and other methods from Numerical Calculus. The main direct methods analyzed were the Gaussian elimination with pivoting and LU factorization. As iterative methods, Gauss-Jacobi and Gauss-Seidel were used. The conditions of convergence for the iterative methods were also analyzed. Examples were used to illustrate each method of resolution that is part of this paper. Many methods of computational solutions for linear systems were applied using the following software: GeoGebra, Winplot, Maxima and SciLab. All the software is freeware and open-source. The motivation for field research was the applicability of linear systems with dimension n, (considering $n > 3$), in various areas of knowledge. Students from public and private school system of Distrito Federal were selected as research subject. Those students attended classes, and used the methods discussed in this work, specially the iterative and computational methods. After the analysis of the classes and feedback questionnaires about the outlined methods, especially the computational methods for applied exercises, we inferred that they motivate the students to have improved learning of Mathematic related to linear systems.

Keywords

Linear systems, iterative and computational methods, Motivation.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A presente dissertação surge da inquietação advinda das aulas de Geometria Analítica e Cálculo Numérico em um curso de graduação em Engenharia Civil. Por muitas vezes, a obscuridade do porquê da grande dificuldade dos alunos, quando o assunto pendia para resolução de sistemas de equações lineares ou apenas sistemas lineares, causou noites e mais noites de reflexão.

Talvez tais dificuldades tenham raízes profundas, alicerçadas no mal desempenho dos estudantes no Ensino Médio. Não muito surpreendente, após algumas pesquisas, descritas na subseção 1.2, o que se observou foi um problema muito mais grave. O Ensino Médio não vem preparando os jovens para prosseguirem seus estudos em Universidades e Faculdades, nas mais diversas áreas do conhecimento e principalmente na Matemática, adequadamente. Consequentemente, a rejeição pelas disciplinas envolvendo conhecimentos e habilidades em matemática vem aumentando, o que acarreta em um péssimo nível de aprendizagem entre os discentes.

Ao analisarmos pesquisas anteriores, descritas na subseção 1.2, que tratam do tema sistemas lineares, decidimos pelo estudo de sistemas de equações de dimensão n, com $n > 3$, ou sistemas de maiores dimensões, como serão denominados agora em diante, como forma de motivar e capacitar os estudantes no 2° ano do ensino médio.

Aproveitamos para apresentar aqui, de maneira sucinta, a estrutura do texto.

No primeiro capítulo procuramos fazer, inicialmente, uma revisão bibliográfica destacando as principais pesquisas na área e qual sua relevância para este trabalho. Seguindo, ainda no primeiro capítulo, tratamos da problemática que norteou a pesquisa, qual a nossa questão de investigação e os objetivos que esperamos que sejam alcançados.

No segundo capítulo, traçamos um perfil histórico dos sistemas de equações lineares seguindo por uma rigorosa fundamentação teórica, onde analisamos as definições e teoremas relevantes ao bom desenvolvimento e compreensão do assunto.

O terceiro capítulo se reserva a resolução de sistemas lineares por diversos métodos, incluindo os vistos no Ensino Médio e os novos métodos a serem ensinados.

No quarto capítulo são apresentados softwares educacionais para auxiliarem a resolução de sistemas lineares de maiores dimensões.

No quinto capítulo apresentamos aplicações de sistemas lineares de maiores dimensões onde são explorados usos cotidianos e em outras áreas do conhecimento, destacando-se: Engenharia, Economia, fluxos de trânsito e alimentação.

O sexto capítulo tem um lugar especial. É onde analisamos e descrevemos a pesquisa de campo realizada com alunos do 2° ano do Ensino Médio de várias escolas do Distrito Federal, incluindo as redes particular e pública, com aplicações de sistemas de equações lineares de maiores dimensões, recorrendo a métodos alternativos aos encontrados no ensino médio para resolução. Também são testados alguns métodos computacionais.

Por fim, apresentamos as considerações finais, onde esperamos poder responder a nossa questão de investigação, validar as hipóteses e refletir se nossos objetivos foram alcançados. Além disso, orientarmos os rumos as quais novas pesquisas sobre o tema sistemas lineares podem seguir.

1.1 Revisão bibliográfica

Apresentamos aqui uma pequena revisão de livros, artigos e principalmente outras dissertações/teses que se preocuparam em pesquisar o tema Sistema de Equações Lineares e quais suas implicações no Ensino Médio.

De acordo com Pantoja (2008), os sistemas lineares podem ser resolvidos de várias formas, empregando métodos diferentes e fazendo uma conexão entre esses métodos. A autora também evidencia que essa articulação entre os saberes e o conhecimento que os alunos já possuíam tornou a aprendizagem mais significativa e reflexiva, visto que emaranhou a construção dos significados.

Para Ferreira (2013) o conteúdo de sistemas lineares abordado no Ensino Médio é insuficiente, induzindo os estudantes a acreditarem que nada mais sobre o tema é relevante e que não há muitas aplicações no quotidiano ou em outros campos do saber. Por não dar continuidade ao conteúdo, peca em limitar-se a manipulações algébricas extensas, em detrimento de métodos computacionais para auxiliar na resolução de sistemas de maiores dimensões. Por fim, delineia o conteúdo de sistemas de equações em relação a Álgebra Linear, Geometria Analítica e Cálculo Numérico.

Lima (1993), em seu artigo intitulado "Sobre o Ensino de Sistemas Lineares", mostra muita preocupação em relação ao ensino de sistemas lineares no Brasil. Segundo o autor, a abordagem do tema nas nossas escola é obsoleta, árida e desmotivada pois os professores não utilizam contextualização para dinamizar e tornar mais atraentes suas aulas. Critica, também, a abordagem dos conteúdos, que não fazem alusão a diferentes interpretações como: geométrica, matricial e vetorial. Sugere que a utilização de computadores abre caminho para novas técnicas de resolução de sistemas lineares.

Vale salientar que desde 1993, como exposto acima, já se tinha uma preocupação relevante quanto ao ensino de sistemas de equações lineares e essa preocupação ainda tem lugar, como veremos abaixo.

Matos (2013) inicia sua dissertação se preocupando com a qualidade do ensino da Matemática nas escolas, que, na sua opinião, cada dia fica pior. Faz uma análise detalhada de livros de Matemática adotados no Ensino Médio e conclui que houve um avanço no material mas ainda está longe do ideal. Continua com uma apresentação de recursos geométricos e computacionais para resolução de sistemas lineares, vinculando uma ideia de relações entre diferentes eixos da Matemática. Segundo o autor, essa relação é benéfica para o aluno pois contribui para uma melhoria do aprendizado.

Chiari (2011) se preocupou em investigar o uso do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do Ensino Médio. Ao aplicar sequências didáticas, observou que os estudantes se satisfazem encontrando respostas numéricas sem a necessidade de validação das mesmas. Também orienta que, para uma aprendizagem significativa, outras técnicas de resolução de sistemas lineares devem ser empregadas. Por fim, sugere que novas pesquisas explorem sistemas de equações de ordens de grandezas distintas de 3x3.

Freitas (1999) realizou uma pesquisa com o objetivo de diagnosticar o sentido que os alunos dão às soluções de sistemas lineares, no final do 2° ano do Ensino Médio. A autora entendeu que o motivo dos estudantes terem dificuldades no entendimento e resolução de um método qualquer está relacionado ao princípio de que métodos se reduzem a um algoritmo, enquanto que o entendimento dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ideia geométrica em dimensão 2 ou 3.

Já para Fernandes e Miyasaki (2011) o estudo de sistemas lineares se delimitou a suas aplicações nas áreas tecnológicas, biológicas, engenharias entre outras. Anteriormente as aplicações, enfatizaram a importância do estudo de sua história, definições e teoremas.

Jordão (2011) explicou que ao perceber que os estudantes resolviam sistemas lineares sem apresentar um sentido a eles, resolveu analisar graficamente essas soluções. Também relatou que os livros didáticos são carentes em relação a atividades e, desta forma, abre caminho para exploração de novos modos de ensinar, utilizando, em especial, a ferramenta computacional. Por fim, mostrou que a análise gráfica é um bom caminho para introduzir o assunto de sistemas lineares.

Em uma perspectiva histórica Tavares e Pereira (2013) ressaltaram a importância de se utilizar a história da matemática para desenvolver atividades que auxiliem na construção de conceitos pelo aluno. Os autores fizeram uma análise de resolução e conceituação de sistema lineares baseado no livro "os nove capítulos da arte matemática", publicado na China durante o século III A.C.

Após a análise de diversos autores, fica claro a importância dos sistemas lineares para o Ensino Médio. Também é fato que o tema preocupa gerações. É o que podemos perceber nas falas de Lima (1993) e Ferreira (2013).

A vivência em sala de aula vem mostrando que toda essa preocupação em relação à qualidade do Ensino Médio e, consequentemente, com o tema sistemas lineares é verídica e se alastra para o próximo segmento educacional, o ensino superior. Os alunos recém chegados aos cursos de exatas em instituições particulares, principalmente, não vem apresentando saberes necessários inerentes à matemática básica, o que nos permite inferir sobre a preparação inadequada que o Ensino Médio vem imprimindo a esses jovens.

1.2 Relevância do problema

Nos últimos anos, o Ensino Médio teve um aumento considerável no número de matriculas (PCN, 2000; p. 8) devido à expansão do ensino proporcionado pelo governo federal. Ao mesmo tempo, vem amargurando péssimos resultados nos exames de avaliação nacionais e internacionais, principalmente nos que dizem respeito às Ciências da Natureza e, em específico, à Matemática.

Um dos exames mais conceituados é o PISA - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – que é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países.

De acordo com o relatório do PISA (2012) no Brasil, mais de um em cada três (36%) estudantes de 15 anos de idade tinha repetido uma série, pelo menos, uma vez; muitos tinham sido retidos mais de uma vez. Essa é uma das mais altas taxas de repetência entre os países que participam do PISA. Repetência no Brasil está associada negativamente com o desempenho em Matemática. Nesse mesmo ano, o país amargurou a 58^a posição entre 65 países participantes.

Segundo Pantoja (2008) as causas dessa aversão à Matemática podem estar associadas à não articulação entre os saberes escolares, o que acaba por deixar, na maioria das vezes, os alunos sem a devida compreensão dos significados envolvidos no estudo dos objetos matemáticos.

A desconexão entre os saberes pode levar à um aprendizado mecânico e desprovido de indagação, visto que sem uma ponte entre os saberes aprendidos e suas aplicações nos problemas cotidianos, ficamos a mercê de meras repetições conteudistas que não empolgam o alunado em geral. A esse respeito as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006; p.69) dizem que:

> "...espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico."

Outro fator relevante, para se explicar as dificuldades pelas quais vem passando o Ensino Médio no Brasil, está relacionado a alta taxa de evasão vivenciada pelas escolas. Segundo Krawczyk (2009; pg.9):

> A evasão, que se mantém nos últimos anos, após uma política de aumento significativo do número de matrículas no Ensino Médio, nos revela uma crise de legitimidade da escola que resulta não apenas da crise econômica ou do declínio da utilidade social dos diplomas, mas também da falta de outras motivações para os alunos continuarem seus estudos.

Em geral a permanência dos estudantes na escola está ligada a sua integração social e ao seu desempenho nas diversas disciplinas cursadas. Para os grupos sociais mais privilegiados, essa continuidade nos estudos já está alçada culturalmente. Mas, para os grupos menos favorecidos, onde o Ensino Médio não faz parte da realidade dos seus pais e familiares, o desafio de motivar a permanência na escola é maior.

Os professores têm um papel central nessa motivação. Estimular a curiosidade pela disciplina tornando-a mais atraente, investigadora e interligada com os anseios dos estudantes pode, cada vez mais, estimular alunos a permanecerem na escola.

Embora sejam comum as orientações quanto ao desenvolvimento da Matemática pautado nos desdobramentos sociais e históricos, alicerçada na modelagem e resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento e entrelaçada entre os diversos assuntos matemáticos PCN (2010), ainda nos deparamos com estudos matemáticos que não seguem essa métrica. Isto se verifica, por exemplo, com o estudo de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio que, na maioria dos livros, é tratada de forma algébrica, totalmente matricial e desconectado de modelos aplicados à realidade e à vivência dos alunos.

Segundo Leon (2010), mais de 75% dos problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de sistemas lineares em algum estágio. Delimitando para os problemas de engenharia, temos que estes nos remetem a resolução de sistemas simples (poucas variáveis e equações) até sistemas complexos grandes e esparsos (muitas variáveis, equações e elementos nulos).

Os livros de Ensino Médio que tratam do assunto vão na contramão dessa realidade. Como exemplo, Iezzi et. al (2012) e Filho et. al (2000) introduzem o assunto com sistemas lineares 2x2 e métodos diretos de solução, a saber: adição e substituição. Depois continuam com escalonamento e regra de Cramer para sistemas 3x3. Em nenhum momento fazem alusão a outros métodos ou situações problemas que justifiquem suas soluções. Também não mencionam a possibilidade de sistemas de dimensões maiores, visto que sua manipulação algébrica pelos métodos de escalonamento ou de Cramer seriam desgastantes.

Lima (1993) sugere que a abordagem ao assunto deve fornecer diferentes interpretações como: geométrica, matricial e vetorial. Da mesma forma, para a resolução podem ser apresentados diversos métodos diretos e iterativos. Ainda destaca que a utilização dos computadores abre caminho para novas técnicas de resolução de sistemas lineares incluindo os de maiores dimensões.

A utilização de softwares computacionais pode surgir como ferramenta importante para a resolução de sistemas lineares, trazendo um enfoque tecnológico e uma dinâmica diferente para aulas de matemática. Também contribui diminuindo o esforço algébrico para resolução de problemas que envolvem sistemas lineares de maiores dimensões e esparsos.

> Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. (PCN, 2000)

Neste sentido, fica evidenciado outro problema característico da utilização de sistemas lineares no Ensino Médio.

> "O aprofundamento fica limitado pelas dificuldades de manipulação algébrica. As ferramentas computacionais podem ajudar a suprir essas carências, permitindo um estudo mais interessante aos alunos. Podem desmistificar um possível conceito de que a partir de sistemas 4x4 a resolução é tecnicamente inviável. A utilização de recursos computacionais é uma alternativa para o avanço a sistemas de maior porte. Transferindo a manipulação algébrica para os softwares específicos e reduzindo o tempo dedicado aos cálculos manuais, os conceitos e aplicações poderiam ser mais explorados." (Ferreira, 2013; pg. 89)

De forma geral, a apresentação dos sistemas lineares no Ensino Médio é feita de forma rápida e sem aplicações práticas. Não se tem preocupação em analisar casos mais específicos e métodos diferentes dos tradicionais, o que induz os alunos a imaginarem que acabam ali todas as opções de trabalho com os sistemas lineares. Ainda segundo Ferreira (2013; pg. 63):

> Aparentemente o conteúdo dos sistemas lineares é abordado no Ensino Médio, de maneira sucinta e superficial. Pode levar os alunos a acreditarem que tudo que existe de sistemas lineares se finda ali, sem identificar quaisquer aplicações. As situações problema são sugeridas, em livros didáticos, para até três incógnitas e não se trabalham aplicações dos sistemas para a percepção de sua importância científica e também industrial. [. . .] Não se abordam aplicações mais sofisticadas nem se aprimora os problemas propostos, impedindo uma visão mais generalista do tema.

Tal abordagem desfavorece os alunos, pois prima por práticas sem conexão entre os saberes desenvolvidos ao longo de sua história e torna a aula de matemática um lugar de reprodução em detrimento a indagação e investigação, esvaziando assim o interesse pela disciplina.

> "De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade." (PCN, 2000)

Nesta dissertação são analisadas as condições de ensino de sistemas lineares no 2° ano do Ensino Médio bem como as práticas pedagógicas que vem sendo desenvolvidas pelos seus professores, introduzindo técnicas de soluções com auxilio computacional, inferindo em processos não só diretos como também iterativos para sistemas de maiores dimensões, de modo a obter soluções numéricas. Concomitantemente, se lançará uma fundamentação teórico do tema, sugestões de aplicações nos mais variados campos do saber e uma transposição didática.

A pesquisa de campo, envolvendo o tema sistemas de equações lineares de maiores dimensões, foi aplicada à alunos do 2° ano do Ensino Médio de diferentes realidades educacionais, buscando privilegiar a conexão entre conhecimento quotidiano e matemático, por meio da construção de sistemas lineares em situações problema e resolvendo-os por métodos iterativos e computacionais. Ao final fez-se uma analogia dos benefícios de se expandir o tema, visando o conhecimento e, principalmente, a motivação dos alunos nas aulas de Matemática.

Ao final do trabalho esperamos ser possível responder a pergunta: *Como a implementação dos métodos iterativos e computacionais, para resolução de sistemas lineares de maiores dimensões, pode contribuir para motivação e melhora da aprendizagem nas aulas de Matemática do 2° ano do Ensino Médio?*

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Apresentar metodologia de ensino com o uso de métodos iterativos e computacionais na resolução de sistemas de equações lineares visando a motivação e melhora na aprendizagem dos alunos do 2° ano do Ensino Médio em Matemática.

1.3.2 Objetivos Específicos

Na metodologia de ensino proposta, pretende-se:

- Aplicar e orientar os estudantes em relação a métodos iterativos e computacionais para resolução de sistemas de equações lineares;

- Avaliar se a resolução de aplicações que envolvem sistemas lineares de maiores dimensões motiva os alunos nas aulas de Matemática;

- Avaliar se os métodos iterativos e computacionais contribuem para uma melhor aprendizagem de sistemas lineares.

2 Fundamentação teórica

2.1 Um breve histórico dos sistemas lineares

O surgimento dos Sistema Lineares está atrelado as inovações matemática surgidas na China, datada no século III a.C., e difundida pela importante obra "Chiu-Chang Suan-Chu"(Nove Capítulos sobre Aritmética).

> Até onde se sabe, os chineses foram o primeiro povo a usar um método sistemático para resolver sistemas de equações lineares, o qual, em essência, é idêntico ao moderno método de eliminação de Gauss ou de escalonamento. A importância que os chineses atribuem a esse tópico pode ser medida pelo fato de ele ser o objeto de um dos capítulos da importante obra *A arte da matemática em nove capítulos* (século III a.C.) (IEZZI et. al 2012, pg. 234)

De forma curiosa, é com grande probabilidade que os chineses devem ter descoberto esse método, pois sua "calculadora"consistia em um tabuleiro quadriculado e num conjunto de barras de marfim ou bambu usados para representar os números.

Outra referência a equações lineares e talvez, a um par de equações com duas incógnitas, pode ser encontrada em problemas matemáticos Egípcios e na Mesopotâmia quando "em um texto da Babilônia antiga achamos duas equações lineares simultâneas em duas incógnitas."(BOYER, 2010, pg. 11).

Avançando um pouco mais na história, curiosamente a famosa Regra de Cramer que resolve sistemas de equações lineares de n equações em n incógnitas por meio de determinantes é, na verdade, uma invenção do escocês Colin Maclaurin e data provavelmente de 1729, embora sua publicação seja de 1750. O nome de Cramer, suíço de primeiro nome Gabriel, não aparece aí por acaso. Em trabalhos independentes, ele também conseguiu desenvolver a regra, mas só em meados de 1750. (IEZZI et. al 2012, pg. 235)

Atrelado a todo esse conhecimento está a ideia de determinantes. O primeiro a mostrar conhecimento sobre o assunto foi o japonês Seki Kowa (1642-1708), que, em um manuscrito de 1683, discutiu até mesmo a questão do sinal de cada termo, mas não usou deste conhecimento para resolver sistemas lineares. Porém o alemão Gottfried W. Leibniz estabeleceu como condição necessária para a compatibilidade de um sistema com três equações em duas incógnitas que o polinômio, hoje chamado de determinante completo do sistema, seja igual a zero.

Luccas (2004, pg. 10), no excerto abaixo, sinaliza bem essa aliança entre Sistemas

Lineares e Determinantes, além de confirmar toda a participação dos matemáticos notáveis citados acima.

> Outro ponto positivo da análise epistemológica dos Sistemas de Equações consiste no reconhecimento da produção de algumas generalizações, que podem acabar originando outros assuntos, como a que o matemático japonês Seki Kowa e o alemão Leibniz encontraram ao trabalhar com sistemas. Tais pesquisadores conseguiram encontrar o mesmo método para eliminar os "valores desconhecidos" de um sistema de equações, embora tenham utilizado processos cognitivos distintos e inseridos em culturas diferentes, descobrindo a gênese do processo que empregamos atualmente no cálculo de Determinantes.

Os métodos iterativos de resolução são técnicas frequentemente utilizadas para sistemas de médio e grande porte. Métodos clássicos como Jacobi e Gauss-Seidel datam do final do século XVIII.

Para o leitor interessado em mais histórias de sistemas lineares sugerimos como referência [BOYER, 2010].

2.2 Definições e análise de sistemas lineares

2.2.1 Definições via Álgebra Linear

Para introduzir o assunto, Poole (2004, pp. 56) define equação linear como:

Definição 1. *Uma* **equação linear** *nas n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \tag{2.1}$$

onde os **coeficientes** *$a_1, a_2, ..., a_n$ e o* **termo independente** *b são constantes pertencentes ao conjunto dos números reais.*

Equações lineares, portanto, não contêm produtos, recíprocos ou outras expressões algébricas das variáveis; as variáveis aparecem somente na potência 1 e multiplicadas apenas por constantes. O autor também ressalta que os coeficientes e termos constantes são números reais, em sua maioria, mas também podem assumir valores no conjunto dos números complexos.

Uma solução de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ é um vetor $[s_1, s_2, ..., s_n]$, cujas coordenadas satisfazem a equação quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$.

Assim um *sistema de equações lineares* é um conjunto finito de equações lineares, nas mesmas variáveis. Podemos representá-lo com m equações e n incógnitas como mostrado em (2.2)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

com a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, números reais ou complexos. (Boldrini et. al, 1980, pp. 33)

Uma solução do sistema (2.2) é um vetor $[x_1, x_2, ..., x_n]$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro. (Leon, 2010, pg. 4)

2.2.2 Sistemas lineares e matrizes

Neste trabalho não será desenvolvido o conteúdo de matrizes, mas se faz necessário sua ideia visto que uma maneira simplificada de apresentar um sistema linear é por meio de notação matricial. Segundo Poole (2004, pg. 128)

Definição 2. *Uma matriz é uma tabela retangular de números chamados de elementos ou termos da matriz.*

Denota-se uma matriz por letra maiúscula do alfabeto. Usamos a notação de índice subscrito duplo para nos referirmos aos elementos de uma matriz A: o elemento de A na linha i coluna j é denotado por a_{ij}.

Com essa notação uma matriz genérica de m linhas e n colunas tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Podemos escrever o sistema de equação (2.2) numa forma matricial completa, geralmente relacionado à:

$$Ax = b \tag{2.4}$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

é a matriz das incógnitas e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

é a matriz dos termos independentes.

Definido matrizes e sua relação direta com o sistema linear podemos então escrever o sistema (2.2) numa forma matricial (2.8) única, omitindo as incógnitas.

Assim, segundo Poole (2004, pg. 132), se nós mantivermos guardado na memória a localização dos sinais de soma, das variáveis e das constantes, poderemos abreviar a escrita de um sistema de m equações lineares e n incógnitas para uma matriz *aumentada* (2.8).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

A matriz (2.8) é chamada de matriz aumentada ou ampliada do sistema linear e nos fornece os coeficientes numéricos das incógnitas bem como as constantes. Logo, cada linha da matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente do sistema e nos será muito útil na hora da resolução.

Outra matriz que se faz necessária para nossos estudos é a matriz reduzida à forma escada (2.9). Boldrini et. al, (1980, pg. 37) à define como:

Definição 3. *Uma matriz* m x n *é reduzida à forma escada se:*

i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

ii) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).

iv) Se as linhas 1, ..., r são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_r$.

Esta última condição impõe a forma escada à matriz (2.9).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

2.2.3 Análise de sistemas lineares

Discutir um sistema linear é analisar quais e quantas são suas soluções, caso existam.

De acordo com Boldrini et. al, (1980, pg. 44), um sistema linear descrito por (2.2) poderá ter:

i) uma única solução:

$$\begin{cases} x_1 = k_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = k_n \end{cases} \tag{2.10}$$

onde k_1, ..., k_n são números reais;

ii) infinitas soluções;

iii) nenhuma solução.

No caso (i) dizemos que o sistema é possível (compatível) e determinado. No casso (ii) dizemos que o sistema é possível e indeterminado. E no caso (iii) dizemos que o sistema é impossível (incompatível).

Para investigar os casos acima precisamos recorrer as matrizes aumentada (2.8) e na forma escada (2.9) e utilizar a definição e os teoremas abaixo.

Teorema 1. *Toda matriz A_{mxn} é equivalente a uma única matriz reduzida à forma escada.*

Demonstração.

1° parte: Seja A uma matriz m x n qualquer. Se todo elemento da primeira linha de A é zero então a condição (i) da definição 3 está satisfeita, no que diz respeito a esta linha. Se a primeira linha tem algum elemento não nulo, seja k o menor inteiro j tal que $a_{ij} \neq 0$. Multiplicamos a primeira linha por $\frac{1}{a_{ij}}$ e a condição (i) da definição 3 ficará satisfeita. Agora, para $i \geq 2$ somemos $-a_{ij}$ vezes a primeira linha à i-ésima linha. Como resultado, teremos uma matriz cujo primeiro elemento da primeira linha é 1 e ocorre na coluna k. Além disso, todos os outros elementos da coluna k são nulos.

Consideremos agora a matriz B obtida de A após a operação acima. Se a segunda linha desta matriz for nula nada faremos. Se houver elementos não nulos nesta linha, seja a coluna k' a primeira a conter um destes. Multiplicamos a segunda linha por $\frac{1}{b_{2k'}}$ e a seguir, somando múltiplos adequados desta nova segunda linha às demais linhas obtemos uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1 e todos os outros elementos da coluna em que este elemento se encontra são nulos. O importante é que nesse processo não foram alterados os elementos b_{11}, b_{1k}, e nem a k-ésima coluna da matriz B.

Repetindo o procedimento acima em relação às demais linhas obteremos uma matriz M que é equivalente à inicial A, e que satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 3.

As condições (iii) e (iv) da definição 3 serão satisfeitas através de um número finito de permutações de linhas da matriz M.

2° parte: Assim, mostramos nesta primeira parte que toda matriz A é equivalente a uma matriz reduzida à forma escada. Para mostrarmos que só existe uma única matriz na forma escada equivalente a A, observamos primeiro que duas matrizes na forma escada que são equivalentes só podem ser iguais.

De fato, não temos uma outra condição para essas matrizes. □[1]

Definição 4. *Dada uma matriz A_{mxn}, seja B_{mxn} a matriz reduzida à forma escada equivalente a A. O posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é o número n-p.*

Desse modo, para determinarmos o posto de uma matriz A, qualquer, primeiro é necessário encontrar sua matriz na forma escada e depois contabilizar suas linhas não nulas. Sua nulidade é a diferença entre colunas de A e o posto.

[1]Símbolo usado para mostrar que a demonstração chegou ao fim

Teorema 2. *i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii) Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Demonstração.

1° parte: Se o posto da matriz ampliada for maior que o da matriz dos coeficientes (menor não pode ser), então essa matriz reduzida à forma escada deve ter pelo menos uma linha do tipo (0 0 ... 0 c_k), com $c_k \neq 0$. Isto significa que o sistema associado a esta matriz, que é equivalente ao inicial, tem uma equação do tipo:

$$0x_1 + ... + 0x_n = c_k \neq 0 \tag{2.11}$$

e portanto não admite solução.

2° parte: Por outro lado, se o posto da matriz ampliada, P, for igual ao da matriz dos coeficientes, temos dois casos a considerar:

(a) se $p = n$, teremos a matriz reduzida à forma escada:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & & \dots & & 0 & | & c_1 \\
0 & 1 & 0 & \dots & & 0 & | & c_2 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & | & \vdots \\
\underline{0} & \underline{0} & \underline{\dots} & \underline{\dots} & \underline{0} & \underline{1} & | & c_n \\
0 & & & \dots & 0 & 0 & 0 & \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & & & \dots & 0 & 0 & 0 &
\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

A solução do sistema será $x_1 = c_1$, ..., $x_n = c_n$, portanto o sistema admite uma única solução.

(b) se $p \neq n$ então $p < n$ (pois p não pode ser maior que n).

Nesse caso, devemos considerar as várias possibilidades para a matriz reduzida à forma escada. Podemos analisar inicialmente quando esta matriz de posto $p < n$ tem a forma:

1.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & ... & & 0 & | & a_{1p+1} & ... & a_{1n} & c_1 \\
0 & 1 & ... & & 0 & | & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & | & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\underline{0} & \underline{0} & \underline{...} & \underline{0} & \underline{1} & | & c_{pp+1} & ... & a_{pn}c_p & \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 &
\end{bmatrix}
\tag{2.13}
$$

Teremos nesse caso:

$$
\begin{cases}
x_1 = c_1 - a_{1p+1}x_{p+1} + ... - a_{1n}x_n \\
\qquad\qquad\vdots \\
x_p = c_p - a_{pp+1}x_{p+1} + ... - a_{pn}x_n
\end{cases}
\tag{2.14}
$$

e o sistema terá portanto infinitas soluções, sendo $x_{p+1}, ..., x_n$ variáveis livres.

Uma segunda forma a ser considerada para a matriz reduzida é

2.

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & ... & & 0 & | & a_{1p+2} & ... & a_{1n} & c_1 \\
0 & 0 & 1 & & 0 & | & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & | & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\underline{0} & \underline{0} & \underline{...} & \underline{0} & \underline{1} & | & c_{pp+2} & ... & ... & a_{pn}c_p \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{2.15}
$$

então:

$$\begin{cases} x_2 = c_1 - a_{1p+2}x_{p+2} + ... - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_{p+1} = c_p - a_p x_{p+2} + ... - a_{pn}x_n \end{cases} \tag{2.16}$$

sendo $x_1, x_{p+2}, ..., x_n$ variáveis livres.

E assim podemos prosseguir de uma maneira sistemática e ver que em todas as possibilidades para a matriz reduzida à forma escada de posto $p < n$, teremos um sistema de infinitas soluções e $n - p$ variáveis livres.

Observe que na 1ª parte mostramos, usando contra-recíproca, que a igualdade de postos entre as matrizes ampliada e dos coeficientes é uma condição necessária para a existência da solução do sistema. Na 2ª parte mostramos que essa condição também é suficiente, considerando as possibilidades (a) e (b). Ficou assim demonstrada a afirmação (i) do teorema 2. Note ainda que também as condições (ii) e (iii) foram demonstradas em (a) e (b), respectivamente. □

2.3 Métodos diretos de resolução

Os métodos diretos são assim denominados porque a solução exata do sistema linear é obtida, caso ela exista e a menos de erros de arredondamento, após um número finito de passos previamente conhecidos. O custo computacional de tempo pode ser estimado através do número de operações que ele envolve. (Sperandio, Mendes e Silva 2003, pg. 63)

Para Ruggiero e Lopes (1988, pg. 96) podemos incluir aqui todos os métodos estudados no Ensino Fundamental - Adição, Substituição, Comparação- no Ensino Médio - Escalonamento (eliminação) e principalmente a Regra de Cramer- e destacamos ainda outros métodos diretos que não são vistos no Ensino Básico, entre eles: Eliminação de Gauss (com pivoteamento), Gauss-Jordan e fatoração LU.

Apresentamos agora os principais métodos.

2.3.1 Regra de Cramer

De forma geral podemos analisar a Regra de Cramer a partir do sistema (2.4). (Leon, 2010, pg. 22)

Para aplicar a regra é preciso calcular o determinante Δ da matriz dos coeficientes e mais os n determinantes Δx_i resultantes da substituição da coluna i da matriz dos coeficientes pelo vetor dos termos independentes. É importante observar que este método é válido para sistemas de equações lineares com n variáveis e n equações. Assim, pela Regra de Cramer, a solução $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é dada por:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}. \tag{2.17}$$

Para Ruggiero e Lopes (1988, pg. 96) é necessário o estudo de métodos mais eficientes visto que este método envolve um número de operações da ordem de $n!$ e a resolução de um sistema linear com 20 incógnitas duraria, em um computador que efetua cerca de 100 milhões de multiplicações por segundo, 3 x 10^8 anos para executar a tarefa de obter a solução.

Em suma, a Regra de Cramer apresenta um gasto computacional elevado para solucionar problemas práticos que, normalmente, exigem a resolução de sistemas lineares de grande porte.

Para mais detalhes o leitor pode consultar Poole (2004).

2.3.2 Método de eliminação de Gauss

Os métodos de eliminação que são classificados como métodos diretos, evitam o cálculo da matriz inversa e reduzem o tempo de execução em relação a outros métodos como o da Regra Cramer, por exemplo.

Conforme Sperandio, Mendes e Silva (2003, pg. 63) a ideia fundamental da eliminação de Gauss é transformar o sistema linear (2.2), sendo $m = n$, por meio de operações elementares em matrizes, num sistema cuja matriz dos coeficientes seja triangular superior (abaixo da diagonal principal todos os elementos são nulos). Os coeficientes a_{ij} com $i > j$ são transformados por meio do seguinte algoritmo:

$i)$ Faz-se $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n+1$ com $a_{in+1} = b_i$.

$ii)$ Para $k = 1,\ 2,\ ...,\ n-1,\ i = k+1, k+2, ..., n$ e $j = k+1, k+2, ..., n+1,$

calcula-se o multiplicador:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\ a_{kk}^{(k)} \neq 0 \tag{2.18}$$

e

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ij}a_{kj}^{(k)}. \tag{2.19}$$

Após $n+1$ passos, a matriz dos coeficientes (2.5), aumentada do vetor constante (2.7), passa a ter a estrutura triangular:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} & a_{1n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} & a_{2n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & ... & a_{3n}^{(3)} & a_{3n+1}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn}^{(n)} & a_{nn+1}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$iii)$ Para $i = n, n-1, ..., 1$ obtêm-se as incógnitas $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$ por meio de

$$x_i = \frac{a_{in+1}^{(i)} - \sum\limits_{k=i+j}^{n} a_{ik}^{(i)} x_k}{a_{ii}^{i}}. \tag{2.21}$$

Conforme vimos anteriormente o método consiste em transformar covenientemente o sistema linear original para obter um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior e a partir dessa matriz podemos isolar as variáveis e determinar sua solução.

Segundo Ruggiero e Lopes (1988, pg. 103) todo esse algoritmo de resolução requer a utilização de um multiplicador (2.18) em cada estágio k do processo. Se o pivô escolhido for nulo impede o procedimento do algoritmo e se for bem próximo de zero pode conduzir a resultados totalmente imprecisos. Tentando contornar esse problema deve-se adotar uma Estratégia de Pivoteamento escolhendo uma linha ou coluna pivotal.

Podemos dividir em duas estratégias de pivoteamento:

(**a**) **Pivoteamento Parcial** - Esta estratégia consiste em:

(i) no início do estágio k do processo de eliminação, escolher para Pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes $a_{ik}^{(k)}$.

(ii) trocar as linhas k e i se for necessário.

(**b**) **Pivoteamento Completo** - Nesta estratégia, no início do estágio k é escolhido para Pivô o elemento de maior módulo, entre todos os elementos que ainda atuam no processo de eliminação. Logo escolhemos $Max_{j \geq k}\ |a_{ij}^{k}|$ como Pivô.

2.3.3 Método de eliminação de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan é uma complementação ao método de Gauss. Ele transforma a matriz dos coeficientes em uma matriz diagonal (todos os elementos fora da diagonal principal são nulos). De acordo com Sperandio, Mendes e Silva (2003, pg. 72) o algoritmo para resolução pelo método fica sendo:

i) Para k = 1,2,3,...,n-1; i = 1,2, ..., n; $i \neq k$; $j = k+1, k+2, ..., n+1$; calcula-se

$$\begin{cases} a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k+1)} a_{kj} \end{cases} \tag{2.22}$$

ii) A solução do sistema é $x_i = a_{i,n+1}^{(n+1)}$; i = 1,2, ..., n.

Este método requer 50% a mais de multiplicações e divisões do que o método de eliminação de Gauss. Este motivo o deixa com menos uso em relação aos métodos diretos vistos acima. Para este método também podemos usar todas as ideias de pivotação discutidas no método anterior.

2.3.4 Fatoração LU

Para resolver o sistema linear (2.2) podemos empregar um processo de fatoração que consiste em decompor a matriz A dos coeficientes (2.5) em um produto de dois ou mais fatores e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas lineares que nos conduzirão à solução do sistema linear original. (Ruggiero e Lopes 1988, pg. 96)

A decomposição LU é uma consequência do método de eliminação de Gauss, mas também pode ser obtido a partir de fórmulas. O uso de fórmulas não contempla as estratégias de pivoteamento.

De Sperandio, Mendes e Silva (2003, pg. 73), suponhamos que seja possível decompor a matriz A em duas matrizes: uma triangular inferior, $L = [m_{ij}]$, e uma triangular superior, $U = [u_{ij}]$, tal que

$$A = LU. \tag{2.23}$$

Então, o sistema linear (2.4) com $m = n$ em notação matricial é equivalente ao sistema $(LU)X = B$, que pode ser decomposto em dois sistemas triangulares:

$$LY = B \text{ e } UX = Y. \tag{2.24}$$

Dessa forma, de posse de L e U, a solução de (2.4) é imediata, pois

$$y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} m_{ik} y_k}{m_{ij}}, \ i = 1, 2, ..., n \tag{2.25}$$

e

$$x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k}{u_{ii}}, \ i = n, n-1, ..., 1. \tag{2.26}$$

Duas questões aparecem: a existência da decomposição LU e como realizá-la. O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para a existência de L e U e a realização da fatoração será mostrada como exemplo no capítulo 3 da dissertação. (Dahlquist e Bjorck, 1974 pg. 47)

Teorema 3. *Sejam A uma matriz n x m e A_k a matriz k x k formada pela interseção das primeiras k linhas e colunas em A. Se $det(A_k) \neq 0$, k = 0, 1, 2, ..., n-1, então* *existe uma única matriz triangular inferior $L = [m_{ij}]_{nxn}$, com $m_{ii} = 1, i = 1, 2, ..., n$ e uma única matriz triangular superior $U = [u_{ij}]_{nxm}$, tal que $LU = A$.*

Demonstração.

Para provar esse teorema usaremos indução sobre n. Se $n = 1$, temos que: $a_{11} = 1 \cdot u_{11}$ unicamente, e det(A) $= u_{11}$. Assumimos que o teorema é verdadeiro para $n = k - 1$. Para $n = k$ partimos A em sub-matrizes:

$$L = \begin{bmatrix} L_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{k-1} & P \\ 0 & u_{kk} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Então:

$$LU = \begin{bmatrix} L_{k-1}U_{k-1} & L_{k-1}P \\ mU_{k-1} & mP + u_{kk} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Agora, pela hipótese de indução, L_{k-1} e U_{k-1} são unicamente determinados e $L_{k-1}U_{k-1} = A_{k-1}$. Além disso, nem L_{k-1} nem U_{k-1} são singulares[2] (ou A_{k-1} também seria singular, contrariando a hipótese). Assim $LU = A$ é equivalente a $L_{k-1}P = x$; $mU_{k-1} = y$ e $mP + u_{kk} = a_{kk}$; ou seja: $P = L_{k-1}^{-1}x$; $m = yU_{k-1}^{-1}$ e $u_{kk} = a_{kk} - mP$. Então P, m e u_{kk} são determinados univocamente nesta ordem, e L e U são determinados unicamente. Finalmente,

$$Det(A) = det(L)\ .\ det(U)$$

$$Det(A) = 1.\ det(U_{k-1})\ .\ u_{kk}$$

$$Det(A) = u_{11}u_{22}...u_{k-1}\ .\ u_{kk}$$

o que completa a demonstração. □

[2]Uma matriz é dita singular quando não possui inversa, ou seja, seu determinante vale zero

2.4 Métodos iterativos de resolução

Apresentamos agora métodos que recorrem ao uso de sucessivas iterações para determinar a solução aproximada do sistema linear, num processo cuja convergência depende da matriz dos coeficientes (2.5).

Os métodos iterativos são convenientes para sistemas grandes e esparsos[3] que aparecem com frequência em problemas cotidianos. (Cunha 2003, pg. 57)

De acordo com Ruggiero e Lopes (1988, pg. 119), para tais sistemas os métodos de eliminação ou fatoração (métodos diretos) não são aconselháveis, pois não preservam a esparsidade do sistema linear tornando muitos elementos nulos não nulos. Ainda, segundo os autores, os métodos iterativos apresentam outra vantagem, que é o fato de não se sensibilizarem ao crescimento dos erros de arredondamento.

A ideia central do método iterativo é converter o sistema linear em outro sistema de modo que apresente uma função de iteração $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ que, partindo de $x^{(0)}$, onde $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}]$, representa um vetor aproximação inicial para solução do sistema de equação, construa consecutivos vetores $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$, que são as soluções aproximadas do sistema de equações nas iterações k seguintes, de modo que $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(k)} = \alpha$, ou que, α é solução do sistema linear (2.4).

O método iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$. Medimos a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ por:

$$m^{(k)} = \max_{1\leq i\leq n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \tag{2.30}$$

Assim, dada uma precisão ϵ, o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como solução aproximada se $m^{(k)} < \epsilon$. Chamamos de teste de parada a relação presente em (2.30).

Computacionalmente usamos também como teste de parada um número máximo de iterações.

2.4.1 Convergência dos métodos iterativos

Sabemos que em todo método iterativo se faz necessário o estudo da convergência para garantia de que a resposta aproximada seja satisfeita.

Na função de iteração $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, dependendo da forma da matriz C, com x

[3]Dizemos que um sistema linear é esparso quando a matriz A dos coeficientes possui uma grande porcentagem de elementos nulos. (Ruggiero e Lopes 1988, pg. 119)

vetor, a sequência gerada pelo processo iterativo pode ou não convergir para a solução do sistema. Seja $\overline{x}$ a solução do sistema linear $AX = B$, logo $\overline{x}$ satisfaz $\overline{x} = C\overline{x} + g$. Com isto temos $x^{(k+1)} - \overline{x} = C(x^{(k)} - \overline{x})$.

O erro em cada iteração é dado por $\epsilon^k = x^k - \overline{x}$, logo:

$$||\epsilon^k|| \leq ||C||\ ||\epsilon^{k-1}||$$

$$||\epsilon^k|| \leq ||C||^2\ ||\epsilon^{k-2}||$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$||\epsilon^k|| \leq ||C||^k|\ |\epsilon^0||.$$

Logo a sequência $\{x^k\}$ converge para a solução do sistema $\overline{x}$ se

$$\lim_{n\to\infty} ||\epsilon^k|| = \lim_{n\to\infty} ||C||^k\ ||\epsilon^0|| = 0$$

e isto ocorre se e somente se a matriz C satisfaz a condição $||C|| < 1$ onde $||C||$ é norma da matriz C.[4] (Castilho, 2011; pg. 40)

Vale ressaltar e observar que a convergência dos métodos iterativos não está associado ao vetor inicial $x^{(0)}$. A única influência de $x^{(0)}$ está no número de iterações necessárias para atingir a precisão desejada. É fácil ver que quanto menor for o erro, $\epsilon = ||x^{(0)} - \overline{x}||$ menos iterações serão necessárias.

Critérios de convergência são comumente adotados nos dois métodos iterativos que foram abordados nas seções anteriores. Para o método de Jacobi o mais comum é o critério das linhas. Vejamos como ele se apresenta:

Teorema 4. (Critério das Linhas) *Dado o sistema linear $Ax = B$, sejam os α_k da forma:*

$$\alpha_k = \frac{1}{a_{k,k}} \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |a_{k,j}| < 1 \ para\ k = 1, 2, ..., n.$$

Então o método de Jacobi gera uma sequência $\{x_k\}$ que converge para a solução do sistema.

[4]Podemos calcular a norma matricial por $||A|| = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}^2 \right)^2$. (LEON 2010, p. 299)

Segundo Castilho (2011; pg. 42) o Teorema 4 fornece uma condição necessária, mas não suficiente. Ou seja, o método pode convergir mesmo o critério não sendo satisfeito.

Para o método de Gauss- Seidel, o critério de convergência mais usado é o chamado Critério de Sassenfeld. Vejamos:

Teorema 5. (Critério de Sassenfeld) *Dado o sistema linear $AX = B$, seja os β_k da forma:*

$$\beta_k = \frac{1}{a_{k,k}} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |a_{k,j}|\beta_j + \sum_{j=k+1}^{n} |a_{k,j}| \right) < 1 \text{ para } k = 1, 2, ..., n.$$

Então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência $\{x_k\}$ que converge para a solução do sistema.

Novamente temos uma condição necessária fornecida pelo teorema.

Abaixo analisamos os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel bem como suas condições de convergência.

2.4.2 Método de Jacobi

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) apresentou o método iterativo que recebe seu nome em 1845. O método, de forma geral, consiste em dado $x^{(0)}$, aproximação inicial, obter $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$ através da relação recursiva $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$. (Cunha 2003, pg. 58)

De acordo com Sperandio, Mendes e Silva (2003, pg. 82) supor que $a_{ij} \neq 0$; Para $i = 1, 2, ..., n$, podemos reescrever o sistema (2.2) na seguinte forma:

$$x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.31}$$

Sendo $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}]$ uma tentativa inicial para a solução do sistema de equações lineares, para $k = 0, 1, 2, ...$, calcula-se a sequência de aproximações x para a solução com $x^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k+1)}]$ por meio de

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, ..., n; \ k \geq 0, \tag{2.32}$$

até que um teste de parada seja satisfeito. Podemos adotar como teste de parada a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$, como em (2.30), ou o número um número máximo de iterações.

2.4.3 Método de Gauss-Seidel

Este método iterativo foi apresentado inicialmente por Gauss como forma de resolver sistemas de equações provenientes de quadrados mínimos. Mas foi Seidel que publicou a versão hoje usada. Seidel era aluno de Jacobi. (Cunha 2003, pg. 60)

O método de Gauss-Seidel pode ser olhado como uma modificação no método de Jacobi. De forma semelhante ao método de Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear (2.2) é escrito na forma equivalente $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ por separação da diagonal.

Por Sperandio, Mendes e Silva (2003, pg. 82) o método consiste em reescrever o sistema linear (2.2) em sua forma recursiva, como em (2.31). Com tentativa inicial $x^{(0)}$, calcula-se a sequência de aproximações $x^{(k+1)}$, $k = 0, 1, 2, ...$, para a solução, agora por meio de

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, ..., n; k \geq 0. \tag{2.32}$$

O teste de parada pode ser um dos citados anteriormente.

É fato, então, que no método de Jacobi, $x^{(k+1)}$ fica totalmente determinado usando as componentes de $x^{(k)}$. No método de Gauss-Seidel, $x^{(k+1)}$ fica determinado quando são usados as componentes de $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$ já determinadas na iteração, sempre vantajosa por não exigir o armazenamento conjunto dos dois vetores $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$ em cada passo e, na maioria dos casos, convergir mais rápido que o método de Jacobi como constatamos na análise de sua convergência, feita na seção 2.4.1.

2.5 Comparação entre os métodos diretos e iterativos

Vamos relacionar alguns aspectos inerentes aos sistemas lineares e compará-los entre os métodos diretos e iterativos. De acordo com Ruggiero e Lopes (1988, pg. 139):

(i) Convergência: Vimos que os métodos diretos são finitos e, a menos de erros de arredondamento, obtêm a solução exata de qualquer sistema não singular. Pelos

Teoremas 4 e 5 os métodos iterativos têm convergência garantida sob certos aspectos.

(ii) Esparsidade da matriz A: Para sistemas esparsos, que aparecem em muitos problemas práticos, os métodos diretos não são aconselháveis visto que destroem a esparsidade da matriz A com seus processos de triangularização. Os métodos iterativos têm como principal vantagem não alterar a estrutura da matriz dos coeficientes.

(iii) Número de operações: Os métodos diretos requerem operações da ordem de n^3 (sem contar as operações envolvidas com estratégias de pivoteamento) enquanto que o método de Gauss-Seidel requer $2n^2$ por iteração, assim se o número de iterações de Gauss-Seidel é menor que $n/2$ este método requer menos operações que os diretos.

(iv) Erros de arredondamento: Os erros de arredondamento são um sério problema para os métodos diretos. Uma forma de amenizá-los é adotar técnicas de pivoteamento. Os métodos iterativos como independem da aproximação inicial, uma vez garantida a convergência, apresentam menos erros de arredondamento. Assim, só erros cometidos na última iteração influenciam a solução.

2.6 Condicionamento de sistemas lineares

Um sistema linear está mal condicionado quando mudanças relativamente pequenas nos elementos da matriz dos coeficientes de (2.5) podem causar mudanças relativamente grandes nas soluções de (2.4). Ele é bem condicionado quando ocorre o contrário. (Burden e Faires; 2003, pg. 397)

Para Cunha (2003, pg. 42) a influência dessas mudanças nos dados de entrada da matriz dos coeficientes A pode ser analisada do seguinte modo:

Definição 5. *O número de condição de uma matriz A_{nxn} é*

$$cond(A) = ||A||\ ||A^{-1}||,$$

onde $||A||$ é alguma medida da matriz A denominada norma da matriz e A^{-1} é matriz inversa de A .

Suponhamos que, em vez de uma matriz exata A, trabalhemos com uma aproximação A'. Sejam x e y as soluções exata e aproximada, respectivamente, isto é,

$$Ax = b \quad e\ A'y = b.$$

Observe que

$$x = A^{-1}b = A^{-1}A'y = A^{-1}(A + A' - A)y = y + A^{-1}(A' - A)y.$$

Assim, se chamarmos $\delta A = A' - A$ teremos $x - y = A^{-1}\delta A y$.

Uma propriedade de normas de produtos de matrizes nos diz que $||Ax|| \leq ||A||\ ||x||$ e $||AB|| \leq ||A||\ |B||$. Usando duas vezes essa propriedade no último termo do desenvolvimento acima, temos:

$$||x - y|| \leq ||A^{-1}||\ ||\delta A||\ ||y|| = ||A||\ ||A^{-1}||\ \frac{||\delta A||}{||A||}\ ||y||.$$

Como sabemos que $cond(A) = ||A||\ ||A^{-1}||$, essa desigualdade fornece uma delimitação para o erro relativo (com relação a y) da solução, em termos do erro relativo dos dados de entrada, uma vez que ela pode ser escrita como

$$\frac{||x - y||}{||y||} \leq cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}.$$

Se o vetor independente b também conter erro, pode-se mostar [5] que

$$\frac{||x - y||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)}\left(\frac{||\delta A||}{||A||} + \frac{||\delta b||}{||b||}\right),$$

onde δb representa o erro absoluto do termo independente.

Para entender o papel do número de condição da matriz A podemos verificar as duas últimas desigualdades acima. Destes resultados podemos concluir que um número de condição elevado não nos permite estabelecer boas majorações para o erro relativo. Quanto maior for o número de condição, pior será a majoração de erro relativo obtida. Consequentemente, para matrizes cujo número de condição seja elevado, um pequeno erro relativo no vetor b, pode provocar um grande erro relativo na solução do sistema.

[5] O leitor pode encontrar tal demonstração em (Burden e Faires; 2003)

3 Métodos para resolução de sistemas lineares

Neste capítulo discorremos, com exemplos, sobre métodos de solução de sistemas lineares, abordando em tópicos diferentes os métodos estudados no Ensino Médio com os métodos iterativos propostos.

Na seção anterior comparamos os métodos diretos e iterativos mostrando as vantagens e desvantagens de cada um.

3.1 Resolução de sistemas lineares por métodos diretos estudados no Ensino Médio

Destacamos aqui a Regra de Cramer e o Escalonamento (também chamado de Eliminação de Gauss).

Quando se compara esses métodos para resolução de um sistema linear 3x3 verifica-se que a Eliminação tem custo de 28 operações, enquanto a Regra de Cramer de 39 operações. Para o caso 3x3, a diferença não é tão grande assim, o problema é que quanto maior for o sistema, maior vai ser essa diferença, atingindo cifras gigantescas. O custo da Regra de Cramer para um sistema nxn é de aproximadamente $(n+1)!(e-1)+n$ operações, enquanto que o custo para esse mesmo sistema pelo método da Eliminação é de $\frac{2n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}-\frac{7n}{6}$ operações, considerando o dobro de multiplicações necessárias, para que, desta forma, não sejam utilizadas frações.

Para comparar melhor esses métodos, pode-se utilizar como referência um computador capaz de efetuar um milhão de multiplicações ou divisões por segundo. Se considerar um sistema 20x20, esse computador gastaria seis milésimos de segundo para resolvê-lo por Eliminação, enquanto que, pela Regra de Cramer, o mesmo computador levaria 2754140 anos para resolvê-lo. Isso mostra que a Regra de Cramer não é apropriada para resolver sistemas de grande porte.

3.1.1 Regra de Cramer

Exemplo1: (Filho e Silva, 2000, pg. 355) Para resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

calculamos primeiro o determinante D da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5. \tag{3.2}$$

Depois calculamos os determinantes substituindo a coluna x_i da matriz dos coeficientes pela coluna dos termos independentes.

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -9. \tag{3.3}$$

A seguir, calculamos

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4. \tag{3.4}$$

Por fim, calculamos o valor das incógnitas: $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$.

Logo: $x = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5}$ e $y = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$. A solução do sistema é $(\frac{9}{5}, \frac{4}{5})$.

Exemplo2: (IEZZI et. al, 2012, pg. 220) Vamos determinar x, y e z no sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -x - 2y - 3z = -3 \\ 4x - y - z = 4 \end{cases} \tag{3.5}$$

Como

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 24 - 1 - 8 - 3 - 2 = -36, \tag{3.6}$$

então, procedendo como no exemplo anterior obtemos:

$$D_x = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 24 - 3 - 8 - 15 - 6 = -36, \tag{3.7}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 60 + 4 - 12 + 12 + 5 = 72, \tag{3.8}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 24 - 5 - 40 - 3 - 2 = -72. \tag{3.9}$$

Por fim, calculamos o valor das incógnitas: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$ e $z = \frac{D_z}{D}$.
Logo: $x = \frac{-36}{-36} = 1$, $y = \frac{72}{-36} = -2$ e $z = \frac{-72}{-36} = 2$. A solução do sistema é $(1; -2; 2)$.

3.1.2 Escalonamento

O método de resolução conhecido, no Ensino Médio, como Escalonamento é igual ao método de Eliminação de Gauss.

Exemplo: (Filho e Silva, 2000, pg. 355) Encontre a solução do sistema linear usando o processo de escalonamento.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 3x - y + 3z = 8 \end{cases} \tag{3.10}$$

Inicialmente vamos escalonar o sistema:

1^a etapa: multiplicamos a 1^a equação por (-2) e adicionamos o resultado à 2^a equação. Multiplicamos a 1^a equação por (-3) e adicionamos o resultado 3^a equação. Obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -7y + 5z = 19 \\ -7y + 9z = 23 \end{cases} \tag{3.11}$$

2^a etapa: adicionamos a 2^a equação multiplicada por (-1) à 3^a equação. Obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ -7y + 5z = 19 \\ 4z = 4 \end{cases} \tag{3.12}$$

Com o sistema escalonado, podemos determinar as incógnitas da seguinte forma:

- Obtendo z na 3^a equação: $4z = 4 \Rightarrow z = 1$.

- Substituindo $z = 1$ na 2^a equação, obtemos y: $-7y + 5.1 = 19 \Rightarrow y = -2$.

- Substituindo $z = 1$ e $y = -2$ na 1^a equação, obtemos x: $x + 2.(-2) - 2.(1) = -5 \Rightarrow x = 1$.

Logo a solução do sistema é (1; -2; 1).

3.2 Resolução de sistemas lineares por métodos diretos não estudados no ensino médio

No método de escalonamento (eliminação de Gauss) podem ser aplicadas técnicas mais avançadas com o intuito de minimizar os erros de arredondamento quando assim se fizer necessário. Essas técnicas são conhecidas como pivoteamento parcial e pivoteamento completo, tendo sido definidas na seção 2 subitem 2.3.2 deste trabalho. Além deles, podemos também destacar os métodos de Gauss-Jordan e Fatoração LU.

3.2.1 Eliminação de Gauss com pivoteamento parcial

Exemplo: (Ruggiero e Lopes, 1988, pg. 104) Consideremos um sistema linear, representado na forma matricial após a primeira etapa do pivoteamento por:

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & | & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & | & 15 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Início do estágio 2

I. Escolher o pivô $Máx|a_{j2}^{(1)}|$ para $j = 2, 3, 4$ então $|a_{32}^{(1)}| = 3$ logo: Pivô = -3

II. Trocar linhas (2) e (3).

Assim,

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & | & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & | & 15 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

e os multiplicadores desse estágio serão $m_{32} = -1/3$ e $m_{42} = -2/3$.

Em seguida fazemos as operações: $L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - m_{32}L_2^{(1)}$; $L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - m_{42}L_2^{(1)}$, onde $L_i^{(k)}$ se refere à linha i na iteração k, e o processo continua até triangularizarmos a matriz dos coeficientes.

OBS: É fácil ver que a escolha do maior elemento, em módulo, entre os candidatos a pivô faz com que os multiplicadores, em módulo, estejam entre zero e um, o que evita a ampliação dos erros de arredondamento. Para maior detalhamento consultar (Ruggiero e Lopes, 1988).

3.2.2 Eliminação de Gauss com pivoteamento completo

Exemplo: (Ruggiero e Lopes, 1988, pg. 104) Consideremos um sistema linear, representado na forma matricial após a primeira etapa do pivoteamento:

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & | & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & | & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & | & 15 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Início do estágio 2.

Escolher o pivô $Máx|a_{ij}^{(k-1)}|$ para $i, j \geq k$. Observamos que, no exemplo acima, adotando a estratégia de pivoteamento completo, o pivô seria $|a_{34}^{(1)}| = 7$, o que acarretaria a troca das colunas 2 e 4 e, em seguida, das linhas 2 e 3, onde:

$$A^{(1)}|b^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & | & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & | & 15 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

OBS: Essa estratégia não é muito empregada, pois envolve uma comparação extensa entre os elementos $Máx|a_{ij}^{(k-1)}|$ para $i, j \geq k$ e troca de linhas e colunas, conforme vimos no exemplo anterior; é evidente que todo este processo acarreta um esforço computacional maior que a estratégia de pivoteamento parcial.

3.2.3 Eliminação de Gauss-Jordan

Exemplo: Resolver o sistema linear abaixo usando eliminação de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -5 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 3x - y + 3z = 8 \end{cases} \tag{3.17}$$

Utilizando eliminação de Gauss chegamos ao sistema (3.12). Agora continuaremos eliminando os termos até encontrarmos uma matriz diagonal. Calculando as multiplicadores:
$m_{23}^{(3)} = 5/4$ e $m_{13}^{(3)} = -1/2$.
Faremos as operações: $L_3 = L_3$; $L_2 = L_2 - m_{23}L_3$; $L_1 = L_1 - m_{13}L_3$.

Assim:

$$\begin{cases} x + 2y + 0 = -3 \\ -7y + 0 = 14 \\ 4z = 4 \end{cases} \tag{3.18}$$

Continuamos agora calculando o multiplicador $m_{12}^{(4)} = -2/7$. Faremos: $L_3 = L_3$; $L_2 = L_2$; $L_1 = L_1 - m_{12}L_2$.

Logo:

$$\begin{cases} x + \ \ 0 + 0 = 1 \\ \quad -7y + 0 = 14 \\ \qquad\quad 4z = 4 \end{cases} \tag{3.19}$$

Agora podemos determinar o valor das incógnitas: $L_3/4$; $L_2/-7$ e $L_1/1$.

Isso nos fornece a solução: $x = 1$; $y = -2$ e $z = 1$.

3.2.4 Fatoração LU

Exemplo: (Ruggiero e Lopes, 1988, pg. 114) Resolver o sistema linear abaixo usando fatoração LU:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \tag{3.20}$$

Usando o processo de Gauss, sem estratégia de pivoteamento parcial, para triângularizar a matriz dos coeficientes A, temos:

Estágio 1: Pivô $= a_{11}^{(0)} = 3$.

Multiplicadores: $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{3}$ e $m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{4}{3}$.

Então, $L_1 \leftrightarrow L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_2 - m_{21}L_1$ e $L_3 \leftrightarrow L_3 - m_{31}L_1$. Assim:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Uma vez que os elementos $a_{22}^{(1)}$ e $a_{31}^{(1)}$ são nulos, podemos guardar os multiplicadores nas posições dos zeros.

Estágio 2:

Pivô $= a_{22}^{(1)} = 1/3$.

Multiplicadores: $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{1/3}{1/3} = 1$.

Então, $L_1 \leftrightarrow L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_2$ e $L_3 \leftrightarrow L_3 - m_{32}L_2$ assim:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Os fatores L e U são:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Resolvendo $L \cdot y = b$

I) Obter y: $L \cdot y = b \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 1/3y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \tag{3.25}$$

$\Rightarrow y_1 = 1;\ y_2 = 5/3$ e $y_3 = 0$.

II) obter x:
$U \cdot x = y \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -8x_3 = 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Assim, $x_1 = -3$; $x_2 = 5$ e $x_3 = 0$, é a solução do sistema de equações.

3.3 Resolução de sistemas lineares por métodos iterativos

Abordamos nesta seção os métodos de Gauss-Jacobi (Jacobi) e Gauss-Seidel bem como suas condições de convergência.

As vantagens e desvantagens em se usar os métodos iterativos, em relação aos métodos diretos, estão descritas na seção anterior.

3.3.1 Gauss-Jacobi

Exemplo: (Ruggiero e Lopes, p. 122) Seja resolver o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Jacobi com $x^{(0)} = (0,7; -1,6; 0,6)$, sendo o vetor aproximação inicial, e $\epsilon = 0,05$. Garanta a convergência do método.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \tag{3.27}$$

I) Garantindo a convergência pelo critério das linhas:
$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0,3 < 1.$
$\alpha_2 = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 < 1.$
$\alpha_3 = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = 0,2 < 1.$
Critério de convergência satisfeito.
II) Iniciando o processo iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = 0x_1^{(k)} - \frac{2}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{10}x_3^{(k)} + \frac{7}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} - 0x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{8}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) = -\frac{2}{10}x_1^{(k)} - \frac{3}{10}x_2^{(k)} - 0x_3^{(k)} + \frac{6}{10} \end{cases} \tag{3.28}$$

Na forma matricial $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ temos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

e

$$g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Assim ($k = 0$) temos:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0,2x_2^{(0)} - 0,1x_3^{(0)} + 0,7 = -0,2.(-1,6) - 0,1.(0,6) + 0,7 = 0,96 \\ x_2^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} - 0,2x_3^{(0)} - 1,6 = -0,2.(0,7) - 0,2.(0,6) - 1,6 = -1,86 \\ x_3^{(1)} = -0,2x_1^{(0)} - 0,3x_2^{(0)} + 0,6 = -0,2.(0,7) - 0,3.(-1,6) + 0,6 = 0,94 \end{cases} \tag{3.31}$$

Calculando $m^{(1)}$ (teste de parada), temos:
$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0{,}26$
$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0{,}26$
$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0{,}34$
então $m^{(1)} = \frac{0{,}34}{max|x_i^{(1)}|} = \frac{0{,}34}{1{,}86} = 0,1828 > \epsilon$

Prosseguindo as iterações, temos: para $k = 1$
$x^{(2)} = (0,978; -1,98; 0,966) \Rightarrow m^{(2)} = \frac{0{,}12}{1{,}98} = 0,0606 > \epsilon$
e para $k = 2$
$x^{(3)} = (0,9994;\ -1,9888;\ 0,9984) \Rightarrow m^{(3)} = \frac{0{,}0324}{1{,}9888} = 0,0163 < \epsilon$.

Então, a solução do sistema linear acima, com erro menor que 0,05 obtida pelo método de Gauss-Jacobi é:
$x^{(3)} = (0,9994;\ -1,9888;\ 0,9984)$.

OBS$_1$: Vale lembrar que o valor de $x^{(0)}$, que é o vetor aproximação inicial, é arbitrário, desde que seja satisfeita a condição de convergência do método.

OBS$_2$: O critério das linhas nos mostra que a sequência é convergente, mas não nos mostra o contrário, ou seja, a condição do critério é apenas suficiente.

3.3.2 Gauss-Seidel

Exemplo: (Ruggiero e Lopes, 1988, pg. 126) Seja resolver o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (0;\ 0;\ 0)$ e $\epsilon = 5 \times 10^{-2}$. Garanta a convergência do método.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Vamos resolver o exercício em passos:

I) Garantindo a convergência pelo critério de Sassenfeld:
$\beta_1 = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 < 1.$
$\beta_2 = \frac{(3).(0,4)+1}{4} = \frac{2,2}{4} = 0,55 < 1.$
$\beta_3 = \frac{(3).(0,4)+(3).(0,55)}{6} = \frac{4,5}{6} = 0,75 < 1.$
Critério de convergência satisfeito.

II) Iniciando o processo iterativo:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 0,2x_2^{(k)} + 0,2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1,5 - 3/4x_1^{(k+1)} - 1/4x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0 - 0,5x_1^{(k+1)} - 0,5x_2^{(k+1)} \end{cases} \tag{3.33}$$

Como $x^{(0)} = (0;0;0)$ então $k = 0$ e

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1 \\ x_2^{(1)} = 1,5 - 0,75.(1) - 0 = 0,75 \\ x_3^{(1)} = 0 - 0,5.(1) - 0,5.(0,75) = -0,875 \end{cases} \tag{3.34}$$

Calculando $m^{(1)}$ (teste de parada), temos:
$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1$
$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0{,}25$
$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0{,}125$
então $m^{(1)} = \frac{1}{max|x_i^{(1)}|} = 1 > \epsilon.$

Assim, $k = 1$ e

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0,2.(0,75) - 0,2.(-0,875) = 1,025 \\ x_2^{(2)} = 1,5 - 0,75.(1,025) - 0,25.(-0,875) = 0,95 \\ x_3^{(2)} = 0 - 0,5.(1,025) - 0,5.(0,95) = -0,9875 \end{cases} \tag{3.35}$$

então: $|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0{,}025$
$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0{,}20$
$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0{,}1125$
então $m^{(2)} = \frac{0,2}{max|x_i^{(2)}|} = 0,1951 > \epsilon$.

Continuando as iterações obtemos:

$x^{(3)} = (1,0075;\ 0,9912;\ -0,9993) \Rightarrow m^{(3)} = 0,0402 < \epsilon$

Assim, a solução do sistema linear dado, com erro menor que ϵ, pelo método de Gauss-Seidel é: $x^{(3)} = (1,0075;\ 0,9912;\ -0,9993)$.

4 Recursos computacionais para resolução de sistemas lineares

Ao longo da história educacional recente, muitas mudanças e avanços vem ganhando espaço. Estamos mais sensíveis ao uso de novas tecnologias no processo de ensino aprendizagem e, cada vez mais, entendemos como essas tecnologias podem auxiliar no desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Neste sentido, os recursos computacionais aparecem cada vez mais inseridos em grande parte da sociedade e podem ser um aliado no desenvolvimento pedagógico e matemático dos alunos. Esse novo "parceiro"pode contribuir de forma primorosa para realização de atividades diferenciadas e de novas formas de agir e pensar (Balacheff e Kaput, 1996). Mas ainda nos deparamos com uma pouca utilização desses recursos computacionais, muitas vezes por despreparo do professor, outras por falta de infraestrutura da própria escola e em algumas situações por desinteresse dos estudantes.

No ensino médio, os métodos mais utilizados para resolução de sistemas lineares, entre eles Regra de Cramer e Escalonamento, dependem de muita manipulação algébrica o que inviabiliza o estudo de sistemas lineares de maiores dimensões. Os recursos computacionais e com eles os *softwares* matemáticos surgem como alternativa para minimizar os cálculos, priorizando, assim, os conceitos e possíveis aplicações.

Devemos, portanto, captar o máximo de aproveitamento dos recursos computacionais objetivando uma mudança tecnológica e social, em relação aos alunos, como forma de motiva-los mais nas aulas de Matemática. Gómez retrata bem essa ideia,

> “mesmo que o uso das tecnologias não seja a solução para os problemas de ensino e de aprendizagem da Matemática, há indícios de que ela se converterá lentamente em um agente catalizador do processo de mudança na educação matemática. Graças as possibilidades que oferece para manejar dinamicamente os objetos matemáticos em múltiplos sistemas de representação dentro de esquemas interativos, a tecnologia abre espaço para que os estudantes possam viver novas experiências matemáticas (difíceis de conseguir com recursos tradicionais como o lápis e o papel), visto que pode manipular diretamente os objetos matemáticos dentro de um ambiente de exploração."(GOMEZ, 1997, p.93-110)

Nota-se, na fala do autor, que o uso das tecnologias não é a solução de todos os problemas da educação, mas pode trazer ao processo educativo uma visão holística e menos descentralizada em relação ao papel do professor que, por muitas vezes, se mantêm resistente as inovações que podem ser implementadas na sala de aula.

Apresentaremos neste capítulo quatro *softwares* indicados para a resolução de sistema lineares, á saber: GeoGebra, Winplot, Máxima e Scilab. Todos eles são gratuitos.

Abaixo discorreremos acerca de cada um e mostraremos exemplos de como utilizar esses programas na resolução de sistemas lineares.

4.1 Resolução utilizando o GeoGebra

A palavra GeoGebra surgiu de uma junção de Geo (**Geo**metria) e Gebra (Ál**gebra**). É um *software* de matemática dinâmica que combina conceitos e representações de geometria e álgebra em uma única interface. Possui acesso livre e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

Iniciaremos com o GeoGebra por ser de manipulação fácil e, de certa forma, mais simples para introduzir essa tecnologia nas aulas. Nas seções 4.3 e 4.4 apresentaremos *softwares* que auxiliam na resolução de sistemas lineares de maiores dimensões.

Tal recurso computacional permite resolver sistemas lineares 2x2, traçando as retas respectivas com o auxílio de cada equação e determinando sua interseção. A partir do GeoGebra 5.0 também é possível fazer construções em três dimensões e assim resolver sistemas lineares 3x3. Abaixo, veremos alguns exemplos de soluções utilizando o *software* GeoGebra. Seja resolver o sistema linear abaixo utilizando o GeoGebra.

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ 10x + 50y = 980 \end{cases} \tag{4.1}$$

Vamos exemplificar como obter a solução desse sistema utilizando GeoGebra. Inicialmente devemos digitar a primeira equação, respeitando os comandos do GeoGebra, na parte denominada "Entrada", Figura 1, e em seguida proceder da mesma forma com a segunda equação.

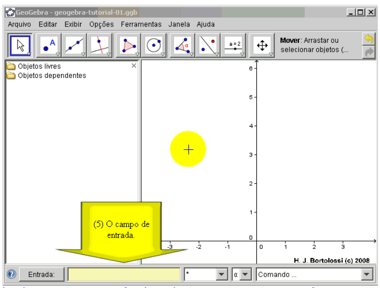


Figura 1: Tela inicial do GeoGebra e o campo "Entrada"

Quando as retas tiverem traçadas basta clicar na interseção delas na janela de visualização, e o ponto determinado será a solução do sistema. Vamos observar a solução na Figura 2 abaixo.

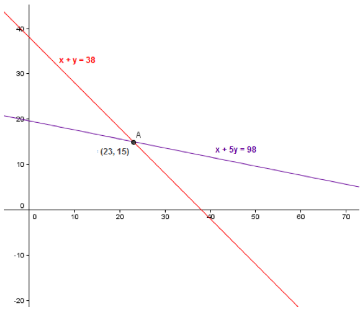


Figura 2: Solução do exemplo proposto no GeoGebra

4.2 Resolução utilizando o Winplot

Winplot é uma ferramenta que visa a interatividade aluno-aluno, aluno-professor e aluno-máquina de modo que o aluno possa, além de aprender sobre o conteúdo matemático, desenvolver habilidades como criatividade e autonomia.

Uma de suas vantagens é a de ser um "programa leve", ou seja, funciona em computadores mais antigos, sem perder qualidade. Pode ser usado em vários níveis educacionais e possui recursos que vão de uma simples função de 1° grau até funções de 3° grau com integrais de todos os tipos. Plota gráficos com maestria e possui uma interface muito simples, como representado na Figura 3. Possui ferramenta computacional para fazer gráficos 2D e 3D, é gratuito e está disponível em língua portuguesa. Sua desvantagem é que possui versões apenas para plataforma Windows.

Para se resolver sistemas lineares de três incógnitas e três equações nesse *software* devemos começar pelo menu janela, selecionando a opção 3-dim ou apertando a tecla F3 (para 2 incógnitas escolhe-se a opção 2-dim). Em seguida, no menu, pode se escolher a opção "equação explícita"como na Figura 4.

Uma caixa de diálogo irá se abrir para que se possa digitar cada equação. Vale observar que a função deve ser digitada em relação as outras duas incógnitas, ou seja, $z = f(x, y)$. Vamos observar o exemplo abaixo:

Figura 3: Tela inicial do Winplot

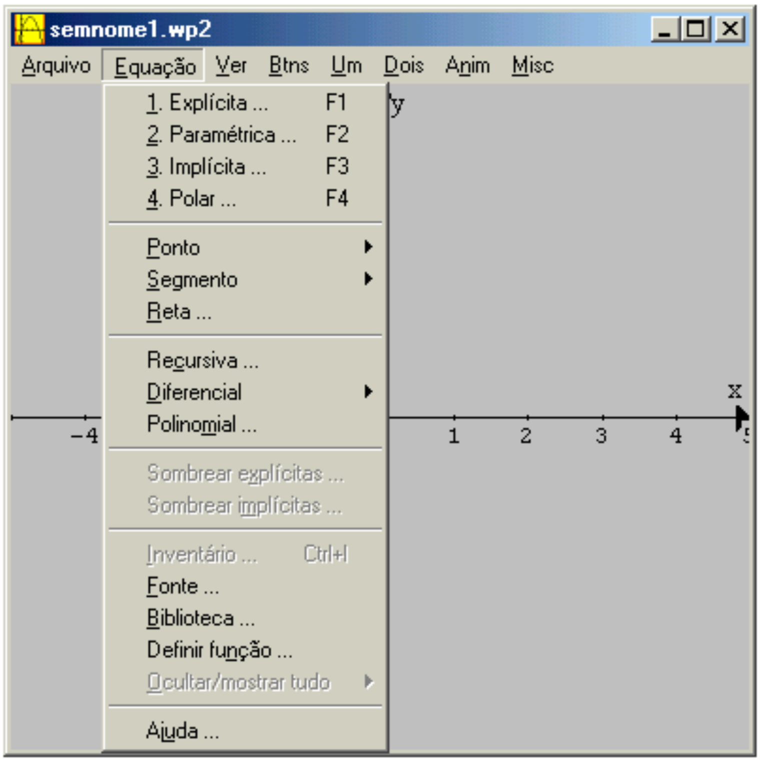


Figura 4: Menu completo Winplot

Utilizando o *software Winplot*, representar graficamente as equações do sistema linear a seguir, (Ishihara e Pessoa apud Ferreira, 2013, pg. 65)

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \tag{4.2}$$

Assim, para representarmos a primeira equação, devemos isolar a variável z, ou seja, $z = \frac{-2x-y+1}{3}$. Na janela, procedemos como na Figura 5 abaixo.

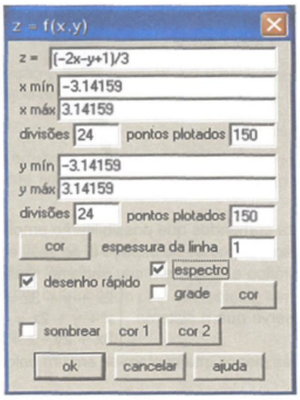


Figura 5: Janela de equação Winplot

Seguindo, podemos proceder da mesma forma e traçar as outras equações para representarmos os três planos característicos as equações (Cada equação de um sistema 3x3 gera um plano diferente no Winplot). A Figura 6 mostra a representação gráfica das três equações.

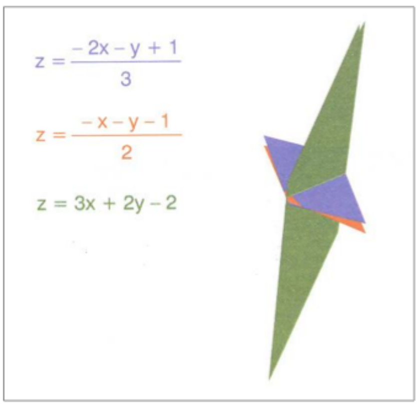


Figura 6: Representação das três equações

Sendo assim, o *Winplot* oferece uma representação gráfica das equações, que nos permite determinar seu ponto de interseção, ou a solução do sistema, que é única pela figura acima, e vale $(x, y, z) = (7/3; -8/3; -1/3)$. Ele também oferece comandos que nos auxiliam a editar a figura, de forma a mostrar a solução, no espaço, de forma mais simples. Os eixos podem ser ocultados.

4.3 Resolução utilizando o Maxima

O Maxima é um sistema para a manipulação de expressões simbólicas e numéricas, incluindo diferenciação, integração, equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações lineares, vetores, matrizes, entre outros. O Maxima produz resultados de precisão elevada, e pode traçar funções e dados em duas e três dimensões.

O código fonte do Maxima pode ser compilado em muitos sistemas, incluindo Windows, Linux e MacOS.

O Maxima é um descendente de Macsyma, um sistema legendário de álgebra para computador desenvolvido nos anos de 1960 no Instituto de Tecnologia de Massachusetts. É o único sistema baseado em Macsyma ainda publicamente disponível e com uma comunidade de usuários ativa. A filial do Maxima de Macsyma foi mantida por William Schelter. Em 1998 obteve permissão para liberar o código fonte sob a GNU General Public License (GPL). Foram seus esforços e habilidade que fizeram a sobrevivência do Maxima possível. Desde então um grupo de usuários e de colaboradores deu forma para trazer o Maxima a uma maior audiência. Assim sendo, o Maxima é considerado um software livre, podendo então ser usado sem necessidade de registro e pagamento, isto é, um software open source, um dos poucos nessa área.

Seja resolver o sistema (Ferreira, 2013, pg. 60).

$$\begin{cases} 2x - y + z + 2w - t = 0 \\ x + y + z + w + t = 1 \\ 3x - y - 2z + w - t = -4 \\ -2x + 3y - z + w + 11t = -15 \\ -x + y - z + w - t = -19 \end{cases} \tag{4.3}$$

Poderíamos pensar em uma resolução com ajuda de algum *software* matemático, mas certamente os dois *softwares* vistos anteriormente não nos ajudariam, visto que eles tem uma limitação de solução, à sistemas lineares de dimensão 3. Para sistemas igual ao do exemplo (4.3), sistemas de maiores dimensões, podemos utilizar o Maxima, que não limita o número de equações.

Para iniciarmos a solução do exemplo (4.3) pelo Maxima, selecionamos na janela inicial o menu "equações"e depois a opção "resolver sistema linear", como mostra a Figura 7.

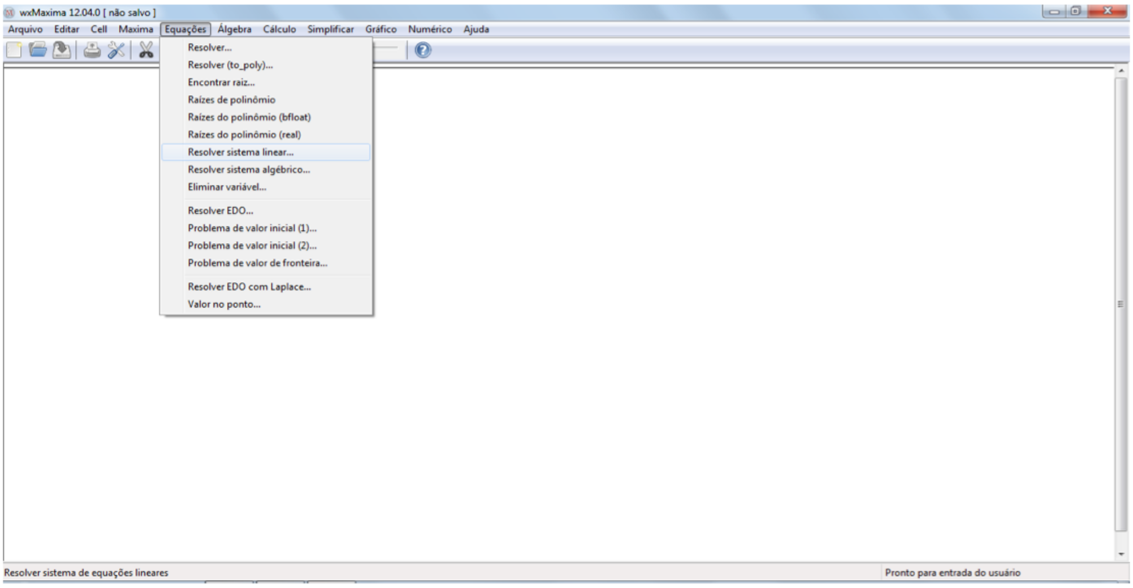


Figura 7: Janela incial do Maxima

Em sequência, será necessário inserir o número de equações e incógnitas do seu sistema linear. Essa representação está na Figura 8, abaixo.

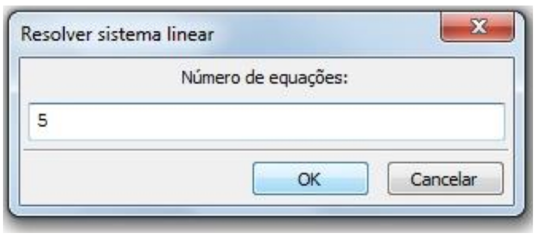


Figura 8: Caixa do número de equações no Maxima

Continuando com o processo, agora é a vez da inserção das equações no *software*. Na nova caixa será digitado cada equação no seu lugar, como mostra a Figura 9.

Por fim, ao se clicar no "OK"obtemos a solução do sistema requerido, conforme representado na figura 10.

Figura 9: Caixa para inserção das equações no Maxima

Figura 10: Solução do exemplo proposto no Maxima

A solução do sistema linear pelo Maxima é $(x; y; z; w; t) = (4; -2; 5; -7; 1)$.

É importante salientar que o Maxima, através da sua opção de resolução de sistemas lineares, como visto na figura 7, opera sobre o comando *linsolve* como aparece na solução do exemplo da figura 10. Esse comando será melhor detalhado na subseção seguinte, visto que, o próximo *software* também pode resolver um sistema linear pelo mesmo comando.

O Maxima também possui outras opções para resolver sistemas lineares, que podem ser programadas como novo algoritmo.

4.4 Resolução utilizando o Scilab

Scilab é um ambiente voltado para o desenvolvimento de algoritmos para resolução de problemas numéricos. O Scilab foi criado em 1990 por um grupo de pesquisadores do INRIA – Institut de Recherche en Informatique et en Automatique e do ENPC - Ècole Nationale des Ponts et Chaussées.

Desde 1994, quando passou a ser disponível na Internet, Scilab é gratuito e distribuído com o código fonte aberto. Além da distribuição com o código fonte, existem, também, distribuições pré-compiladas do Scilab para vários sistemas operacionais.

As principais características desse ambiente de programação numérica extremamente flexível são:

• Ambiente poderoso para geração de gráficos bi e tridimensionais, inclusive com animações;

• Manipulações com matrizes são facilitadas por diversas funções implementadas nos *toolboxes*;

• Permite trabalhar com polinômios, funções de transferência, sistemas lineares e grafos;

• Define funções facilmente;

• Permite acesso a rotinas escritas em FORTRAN e C;

• Pode ser acessado por programas de computação simbólica, como o MuPad;

• Permite o desenvolvimento e apresenta diversos conjuntos de funções voltadas para aplicações específicas, os chamados *toolboxes*.

De modo geral, o Scilab é um *software* avançado onde é possível "criar"programas mais complexos para resolução de sistemas lineares que requerem mais refinamento, como são os casos de sistemas lineares cujas soluções não são inteiras, sistemas lineares esparsos (como muitas posições valendo zero) ou de grandes dimensões. Assim, podemos aplicar os métodos numéricos dependendo da necessidade do sistema linear.

Vejamos como seria resolver o mesmo exemplo exposto na seção 4.3 (4.4) no Scilab utilizando o método de eliminação de Gauss sem pivoteamento. Exemplo:

$$\begin{cases} 2x - y + z + 2w - t = 0 \\ x + y + z + w + t = 1 \\ 3x - y - 2z + w - t = -4 \\ -2x + 3y - z + w + 11t = -15 \\ -x + y - z + w - t = -19 \end{cases} \tag{4.4}$$

Começamos escrevendo a matriz aumentada dos coeficientes A colocando os elementos entre parênteses, separando com espaço simples os elementos da mesma linha e com ponto-vírgula os elementos de colunas diferentes assim como mostra a Figura 11.

Em seguida clicamos na tecla "enter" e a matriz aparecerá de forma usual (Figura 12).

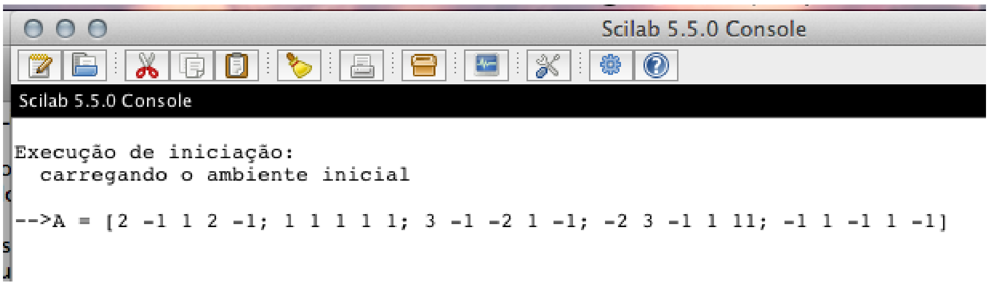


Figura 11: Matriz aumentada dos coeficientes do Exemplo 4.4 no Scilab

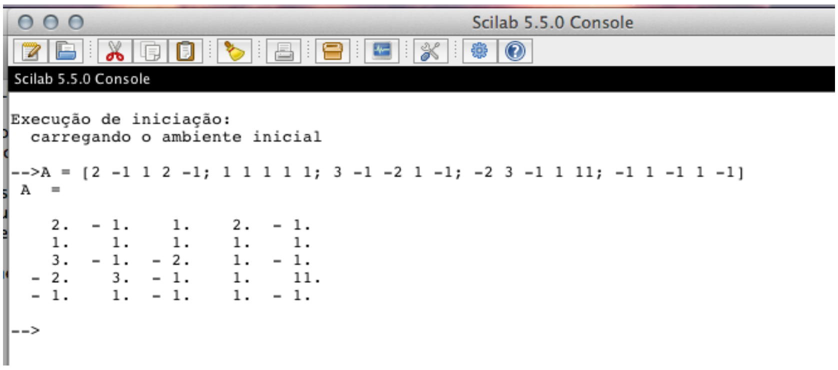


Figura 12: Matriz aumentada dos coeficientes do Exemplo 4.4 de forma usual no Scilab

Para a matriz das constantes b é necessário escrever os elementos entre parênteses e separa-los por ponto-e-vírgula. Vamos observar a Figura 13.

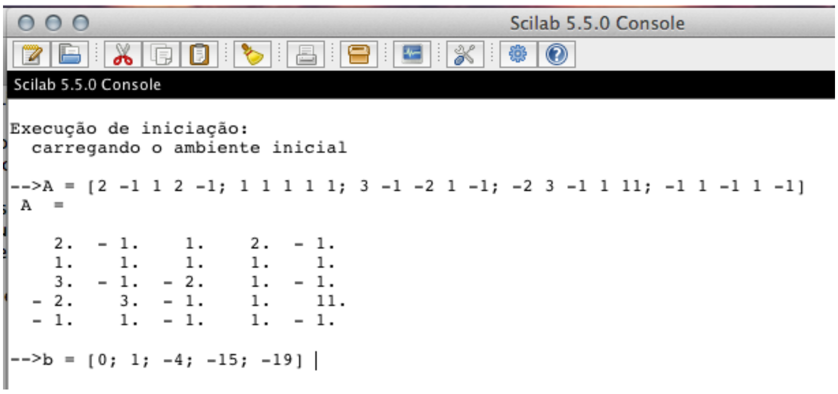


Figura 13: Matriz das constantes do Exemplo 4.4 no Scilab

Novamente, ao acionar a tecla "enter" , a matriz ficará na disposição usual. (figura 14)

Observe que até agora não se fez necessário a programação na caixa de texto do Scilab e isso se deve ao fato do próprio *software* já possuir a opção da solução de sistemas

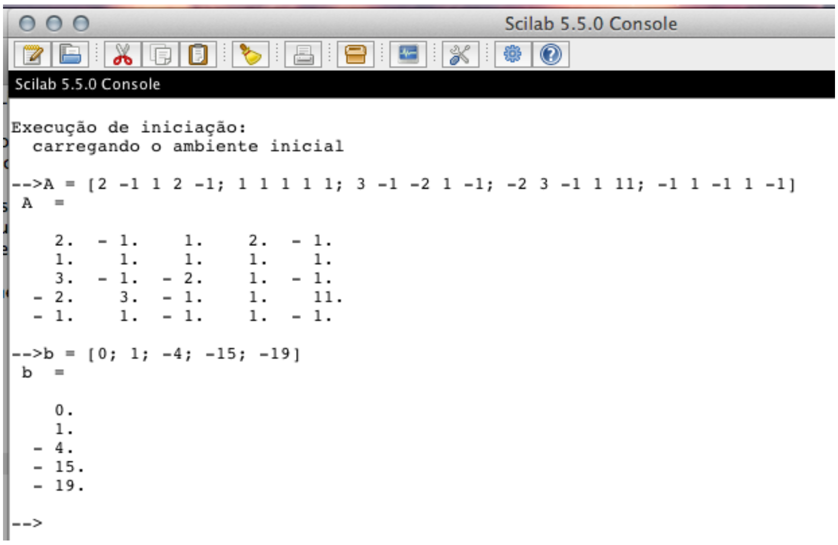


Figura 14: Matriz das constantes do exemplo 4.4 no Scilab

lineares pelo método tradicional de eliminação de Gauss. Para tal resolução devemos usar o comando *Linsolve*, que resolve a equação $A.x + b = 0$. Mas como queremos resolver $A.x = b$ utilizaremos, junto com o comando a notação $(A, -b)$. (Figura 15)

Outro cuidado que devemos ter é perceber se o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero pois, de modo contrário, o sistema não estaria bem definido e o programa não encontraria nenhuma solução, mesmo se o sistema tiver solução.

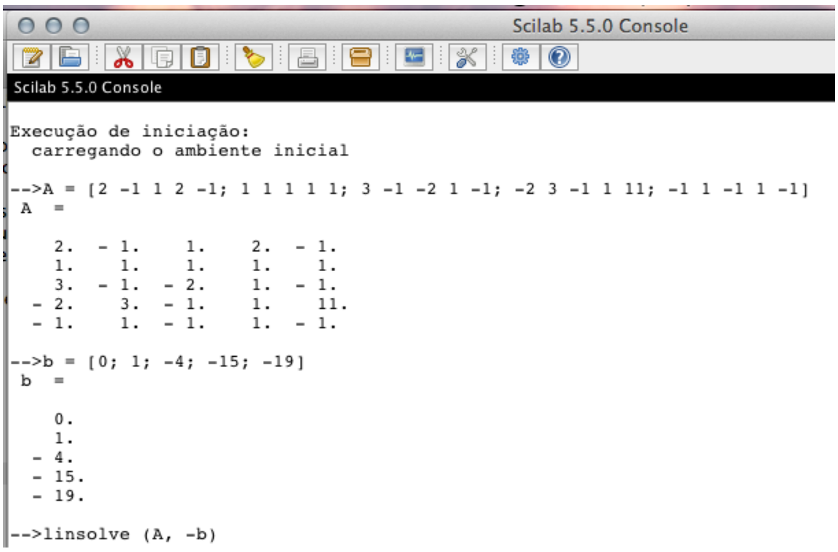


Figura 15: Comando linsolve para resolução de sistemas lineares no Scilab

Por fim acionamos a tecla "enter" para determinar a solução do exemplo (4.4).

A solução do sistema linear pelo Scilab é $(x; y; z; w; t) = (4; -2; 5; -7; 1)$, a mesma encontrada pelo Maxima.

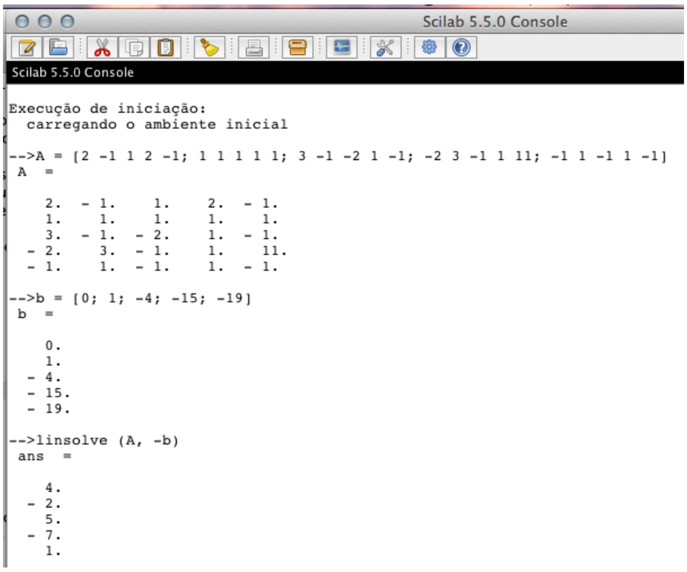


Figura 16: Solução do exemplo 4.4 no Scilab

É fácil observar que tanto o Maxima quanto o Scilab resolvem sistemas lineares de maiores dimensões com grande facilidade, poupando cálculos e manipulações algébricas extensas que muitas vezes inviabilizam o trabalho, em sala de aula, com aplicações que dependem de tais sistemas.

No próximo capítulo veremos as aplicações de sistemas lineares de maiores dimensões e como poupamos esforços para chegar a suas soluções quando utilizamos *softwares*.

5 Aplicações de sistema lineares de maiores dimensões

Neste capítulo apresentamos Aplicações de sistemas lineares com pelo menos 4 variáveis. Os sistemas resultantes das Aplicações são apresentados e suas soluções são discutidas no capítulo 6.

O problema seguinte se apresenta como ideia para análise dos nutrientes necessários a uma boa alimentação.

Aplicação 1: (Boldrini et. al, 1980, p. 54) Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.

Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

ii) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

iii) O alimento III tem 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B, 5 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

iv) O alimento IV tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 13 unidades de vitamina E.

v) O alimento V tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 9 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.
Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

Para modelagem do problema é importante definir quem será a variável a ser obtida. Nesse caso, a variável x_i será a quantidade de cada alimento i (em gramas) que deverá ser ingerida para obter o total de vitamina exposto no enunciado. Assim:

$$
\begin{cases}
x_1 + 9x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 170 \\
10x_1 + 1x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 180 \\
x_1 + 0x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 140 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 9x_5 = 180 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + 13x_4 + 2x_5 = 350
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

Agora, veremos um problema relacionado a uma certa quantidade de moedas.

Aplicação 2: (Poole, 2004, p. 110) Você tem no bolso algumas moedas de 1 centavo, 5 centavos, 10 centavos, 25 centavos, 50 centavos e 1 real. Há 61 moedas no total e exatamente duas vezes mais moedas de 1 real do que de 5 centavos. As moedas de 5 centavos, 10 centavos e 25 centavos totalizam 3,80 reais. As moedas de 1 centavo, 10 centavos, 25 centavos e 50 centavos totalizam 8,60 reais. As moedas de 1 centavo, 10 centavos, 50 centavos e 1 real totalizam 18,60 reais. O valor total das moedas é 22,60 reais. Encontre a quantidade de moedas de cada tipo.

Inicialmente precisamos modelar o problema. Definimos como variável x_i a quantidade de moedas de cada valor, sendo $i = 1, ..., 6$ respectivamente em relação as moedas de 1 centavo, 5 centavos, 10 centavos, 25 centavos, 50 centavos e 1 real.

Logo:

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 61 \\
x_6 = 2x_2 \\
0,05x_2 + 0,10x_3 + 0,25x_4 = 3,80 \\
0,01x_1 + 0,1x_3 + 0,25x_4 + 0,5x_5 = 8,6 \\
0,01x_1 + 0,10x_3 + 0,50x_5 + x_6 = 18,60 \\
0,01x_1 + 0,05x_2 + 0,10x_3 + 0,25x_4 + 0,50x_5 + x_6 = 20,90
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

Um problema atual e muito discutido em vários níveis, diz respeito à mobilidade urbana que, a cada ano, vem causando prejuízos e atrasos nas cidades. Vamos analisar o fluxo de veículos.

Aplicação 3: (Poole, 2004, p. 110) O coração do centro da cidade de Gotham, onde reside o BATMAN!!, consiste em ruas de mão única; o fluxo f do tráfego é medido em cada cruzamento. Para os quarteirões mostrados na Figura 17 abaixo, os números representam o número médio de veículos a cada 10 minutos entrando e saindo dos cruzamentos A, B, C, D, E e F durante o horário comercial.

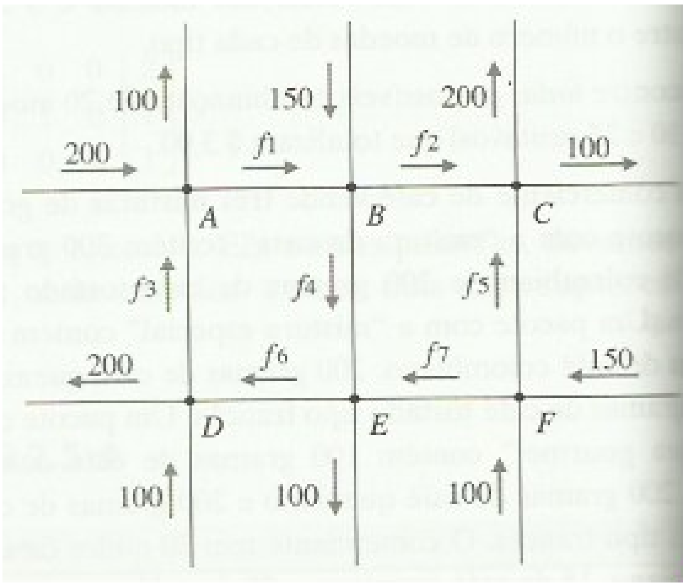


Figura 17: Fluxo do tráfego no centro de Gotham

Monte e resolva um sistema de equações lineares para encontrar os possíveis fluxos $f_1, ..., f_7$.

Organizando os dados dos cruzamentos temos que o fluxo f é a variável definida.

-No cruzamento A: $f_3 + 200 = f_1 + 100$

-No cruzamento B: $f_1 + 150 = f_2 + f_4$

-No cruzamento C: $f_2 + f_5 = 200 + 100$

-No cruzamento D: $100 + f_6 = f_3 + 200$

-No cruzamento E: $f_4 + f_7 = f_6 + 100$

-No cruzamento F: $100 + 150 = f_5 + f_7$

O melhor modo de representar esse sistema é na forma matricial $A.x = b$, assim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

sendo a matriz dos coeficientes,

$$x = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_7 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

sendo a matriz das incógnitas e

$$b = \begin{bmatrix} -100 \\ -150 \\ 300 \\ 100 \\ 100 \\ 250 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

a matriz dos termos independentes.

Nota-se, nesse exemplo, que há uma quantidade significativa de zeros na matriz dos coeficientes A, e no cálculo do seu determinante encontraremos zero. Por esse motivo a matriz não é invertível e o *software* SciLab não consegue resolver o sistema pelo comando $A\backslash b$ (posto da matriz não é completo). Já o comando *linsolve* necessita que o número de equações seja igual ao número de incógnitas.

Tal erro deve levar o aluno a entender as limitações dos comandos usados, ao mesmo tempo que insere ideias novas como: posto de uma matriz, inversão de matrizes e solução de sistemas lineares e deve levá-lo a procurar outros métodos de solução, como veremos no exemplo abaixo.

Na aplicação 3, acima, vimos que nem sempre o modelo computacional irá solucionar o nosso problema. No próximo exemplo, veremos que, com um pouco de sorte e usando métodos iterativos, podemos obter a solução exata.

Aplicação 4: (Poole, 2004, p. 110) Suponha que aqueçamos cada lado de uma placa de metal a uma temperatura constante. Com o passar do tempo, a temperatura em cada ponto do interior da placa alcançará um equilíbrio, e a seguinte propriedade poderá ser comprovada: *A temperatura em cada ponto interior P é a média das temperaturas nos pontos adjacentes a P.*

Na placa abaixo, Figura 18, refinamos a malha para obter informações mais acuradas sobre as temperaturas de equilíbrio nos pontos do interior da placa. Vamos obter soluções aproximadas usando o método Gauss-Seidel.

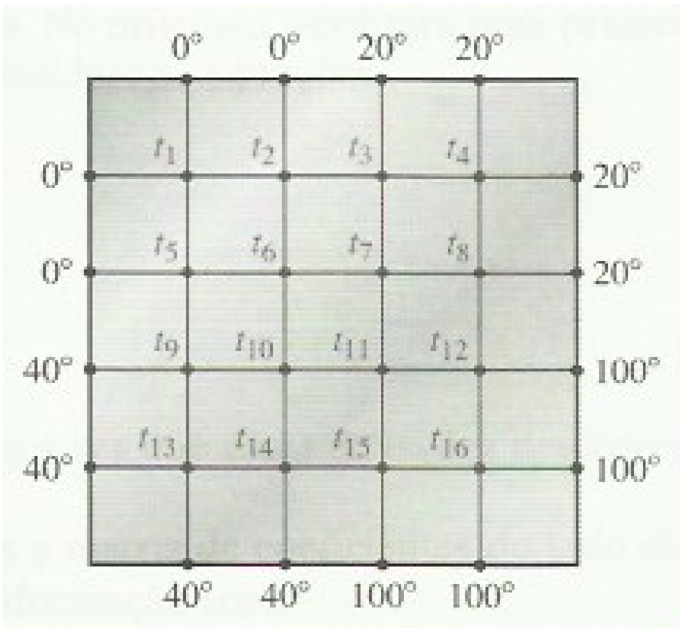


Figura 18: Placa metálica sendo aquecida

Para resolver esse problema devemos aplicar a propriedade descrita no enunciado acima, onde t_i para $i = 1, 2, 3, ..., 16$ é a temperatura nos 16 vértices interiores da placa. A temperatura em um vértice é aproximadamente igual a média dos quatro vértices vizinhos mais próximos. Logo:

$t_1 = \frac{t_2+t_5+0+0}{4}$ $\quad t_5 = \frac{t_1+t_6+t_9+0}{4}$ $\quad t_9 = \frac{t_5+t_{10}+t_{13}+40}{4}$ $\quad t_{13} = \frac{t_9+t_{14}+40+40}{4}$

$t_2 = \frac{t_1+t_3+t_6+0}{4}$ $\quad t_6 = \frac{t_2+t_5+t_7+t_{10}}{4}$ $\quad t_{10} = \frac{t_6+t_9+t_{11}+t_{14}}{4}$ $\quad t_{14} = \frac{t_{10}+t_{13}+t_{15}+40}{4}$

$t_3 = \frac{t_2+t_4+t_7+20}{4}$ $\quad t_7 = \frac{t_3+t_6+t_8+t_{11}}{4}$ $\quad t_{11} = \frac{t_7+t_{10}+t_{12}+t_{15}}{4}$ $\quad t_{15} = \frac{t_{11}+t_{14}+t_{16}+100}{4}$

$t_4 = \frac{t_3+t_8+20+20}{4}$ $\quad t_8 = \frac{t_4+t_7+t_{12}+20}{4}$ $\quad t_{12} = \frac{t_8+t_{11}+t_{16}+100}{4}$ $\quad t_{16} = \frac{t_{12}+t_{15}+100+100}{4}$

Antes de iniciarmos as iterações para determinar a solução, temos que garantir a convergência do método.

Partindo de um vetor solução qualquer, podemos determinar a solução do problema.

Podemos desenvolver aplicações interdisciplinares com conteúdos do ensino médio. Vejamos a aplicação 5 que trata de balanceamento de equações químicas e o exemplo 6 que nos mostra circuitos elétricos físicos.

Aplicação 5: (Pescador et. al., 2011) Num balanceamento de equações químicas, o número relativo de reagentes e produtos na reação tem o mesmo número de átomos de cada tipo do lado esquerdo e direito. Mantêm reagentes à esquerda e produtos à direita. Tem-se que $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ é uma equação balanceada. Duas moléculas de hidrogênio se combinam com uma molécula de oxigênio para formar duas moléculas de água. Ainda, $6H_2 + 3O_2 \rightarrow 6H_2O$ também é uma equação balanceada. No caso abaixo, a combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Uma nova aplicação de sistemas lineares se dá quando se quer encontrar uma equação química balanceada para a reação seguinte:

$$wNH_3 + tO_2 \rightarrow yN_2 + zH_2O \tag{5.6}$$

Pode-se fazer a seguinte correspondência:

Nitrogênio: $w = 2y$

Hidrogênio: $3w = 2z$

Oxigênio: $2t = z$

E assim, o sistema linear (homogêneo) está formado:

$$
\begin{cases}
w - 2y = 0 \\
3w - 2z = 0 \\
2t - z = 0
\end{cases}
\tag{5.7}
$$

Sua solução pode ser facilmente calculada usando Eliminação de Gauss com pivoteamento.

Neste caso notamos que o sistema possui infinitas soluções. Este tipo de sistema é muito comum em várias áreas do conhecimento.

Um sistema com mais equações que incógnitas pode ter uma, infinitas ou nenhuma solução, embora este último caso seja o mais frequente em aplicações e um sistema com mais incógnitas que equações, que é o caso de (5.7), pode não ter soluções ou ter infinitas soluções, que é o caso mais frequente para esse tipo de sistema.

Aplicação 6: (Pescador et. al., 2011) Circuitos elétricos

O fluxo de corrente em um circuito elétrico simples pode ser descrito por um sistema linear de equações. Um gerador de voltagem, como uma bateria, faz com que uma corrente de elétrons percorra o circuito. Quando a corrente passa por uma resistência (como uma lâmpada ou um motor), parte da voltagem é "consumida"; pela lei de Ohm, essa "queda de voltagem"ao atravessar um resistor é dada por V = RI onde a voltagem V é medida em volts, a resistência R em ohms (denotada por Ω) e o fluxo de corrente I em ampéres (abreviado por amps).

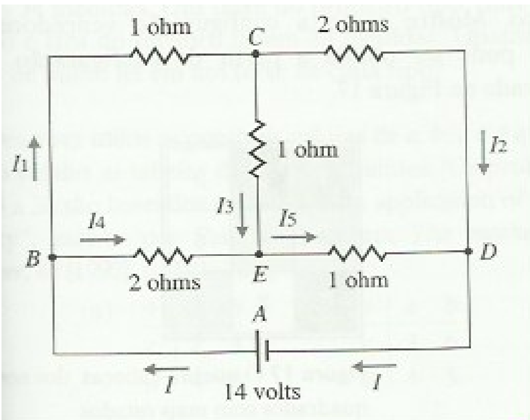


Figura 19: Circuito elétrico

O circuito da figura 19 contém ciclos fechados. As correntes dos ciclos 1, 2 e 3 são denotadas por I, I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 respectivamente. As direções atribuídas a cada uma dessas correntes são arbitrarias. Se uma corrente aparece com valor negativo, então sua direção real é a inversa da estipulada na figura. Se a direção indicada da corrente é do lado positivo da bateria (segmento maior) para o lado negativo (segmento menor), então a voltagem é positiva; caso contrário, a voltagem é negativa. O fluxo de corrente num ciclo é governado pela regra abaixo.

Lei de Kirchhoff para a Voltagem: *A soma algébrica das quedas de voltagem, RI, em tomo de um ciclo é igual a soma algébrica das fontes de voltagem na mesma direção nesse ciclo.*

Agora podemos modelar as equações a partir dos ciclos e determinar as soluções.

Obtemos a solução: $I = 10A, I_1 = I_5 = 6A, I_2 = I_4 = 4A$ e $I_3 = 3A$.

Por fim, uma aplicação complexa e interessante para visualização de temas discutidos na Engenharia.

Aplicação 7: (Ferreira, 2012) Considere o problema do projeto de uma estrutura metálica como esboçada na Figura 20 . Trata-se de um guindaste que deverá içar cargas. O problema consiste em determinar qual é o esforço mecânico em cada viga da estrutura, de modo que se possa escolher as vigas com a resistência adequada.

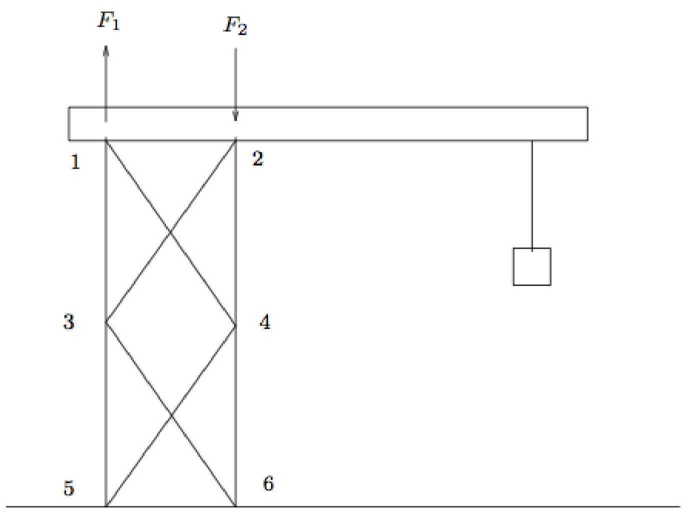


Figura 20: Diagrama de estrutura metálica composta por vigas

O cálculo das forças que incidem na estrutura, F_1 e F_2, é imediato, conhecendo-se a massa que irá ser suspensa e o comprimento do braço do guindaste. Com essas forças, é preciso agora calcular a força exercida por cada viga nos nós (pontos de interseção de duas ou mais vigas) para que a estrutura permanecerá em equilíbrio. Essas forças serão denotadas pelas variáveis f_{ij}, em que os índices indicam os nós ligados por esta viga. Assim, por exemplo, a força f_{41} significa a força exercida sobre o nó 4 pela viga que liga o nó 4 ao nó 1.

A somatória das forças em cada nó, de 1 a 6, deve ser nula tanto na direção horizontal quanto na direção vertical. Para montar o conjunto de equações, tomemos como exemplo o nó 1. O nó 1 é afetado pelas vigas que o ligam aos nós 2, 3 e 4. As equações que implicam no equilíbrio de forças sobre o nó 1 são:

$$\begin{cases} f_{12}cos\theta_{12} + f_{13}cos\theta_{13} + f_{14}cos\theta_{14} = F_1 \\ f_{12}sen\theta_{12} + f_{13}sin\theta_{13} + f_{14}sen\theta_{14} = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Sendo que θ_{ij} representa o ângulo entre a viga (ij) e a vertical. Construindo cada equação da somatória das forças em cada um dos nós, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} f_{12}cos\theta_{12} + f_{13}cos\theta_{13} + f_{14}cos\theta_{14} = F_1 \\ f_{12}sen\theta_{12} + f_{13}sin\theta_{13} + f_{14}sen\theta_{14} = 0 \\ f_{21}cos\theta_{21} + f_{23}cos\theta_{23} + f_{24}cos\theta_{24} = F_2 \\ f_{21}sen\theta_{21} + f_{23}sin\theta_{23} + f_{24}sen\theta_{24} = F_2 \\ f_{31}cos\theta_{31} + f_{35}cos\theta_{35} + f_{32}cos\theta_{32} + f_{36}cos\theta_{36} = 0 \\ f_{31}sen\theta_{31} + f_{35}sin\theta_{35} + f_{32}sen\theta_{32} + f_{36}sen\theta_{36} = 0 \\ f_{41}cos\theta_{41} + f_{45}cos\theta_{45} + f_{42}cos\theta_{42} + f_{46}cos\theta_{46} = 0 \\ f_{41}sen\theta_{41} + f_{45}sin\theta_{45} + f_{42}sen\theta_{42} + f_{46}sen\theta_{46} = 0 \\ f_{35}sen\theta_{35} + f_{46}sin\theta_{46} + f_{54}sen\theta_{54} + f_{63}sen\theta_{63} = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

A última equação (5.9) diz respeito ao equilíbrio de toda a estrutura, que não deve ter, em conjunto, nenhuma aceleração horizontal.

Claramente, $f_{ij} = -f_{ji}$. Assim, por exemplo, $f_{12} = -f_{21}$. O conjunto de variáveis a serem determinadas, portanto, pode ser arranjado no vetor:

$$f = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \\ f_{23} \\ f_{24} \\ f_{35} \\ f_{36} \\ f_{45} \\ f_{46} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Definindo um vetor F e uma matriz Ω da seguinte forma:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$
\Omega = \begin{bmatrix}
cos\theta_{12} & cos\theta_{13} & cos\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
sen\theta_{12} & sen\theta_{13} & sen\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-cos\theta_{12} & 0 & 0 & cos\theta_{23} & cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-sen\theta_{12} & 0 & 0 & cos\theta_{23} & cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -cos\theta_{13} & 0 & -cos\theta_{23} & 0 & cos\theta_{35} & cos\theta_{36} & 0 & 0 \\
0 & -sen\theta_{13} & 0 & -sen\theta_{23} & 0 & sen\theta_{35} & sen\theta_{36} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -cos\theta_{14} & 0 & -cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & cos\theta_{46} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sen\theta_{35} & sen\theta_{36} & sen\theta_{45} & sen\theta_{46}
\end{bmatrix} \tag{5.12}
$$

é fácil verificar que (5.9) é equivalente à equação matricial:

$$\Omega f = F \tag{5.13}$$

Qual é a vantagem de se escrever (5.9) na forma (5.13)? Há inúmeras vantagens: Deve ter ficado claro para o leitor que há uma regra simples que leva diretamente do desenho da Figura 20 para as entradas da matriz Ω. Qualquer que fosse a estrutura composta de vigas que se ligam em nós, a regra seria a mesma. Seria possível representar por meio de uma matriz Ω qualquer estrutura e essa representação poderia ser obtida automaticamente (por meio de um programa de computador). Uma vez nessa forma, torna-se pertinente perguntar: quais são as soluções desse problema? Quais são os valores necessários para as resistências que as vigas devem suportar? Dado um conjunto de forças externas F, o conjunto de forças sobre as vigas será dado por:

$$f = \Omega^{-1} F \tag{5.14}$$

Note-se que a matriz Ω deve ser invertível para que o problema tenha solução. Se não for invertível, isso quer dizer que a estrutura correspondente não é capaz de se manter de pé e tem de ser trocada.

Considere agora a estrutura da Figura 21:

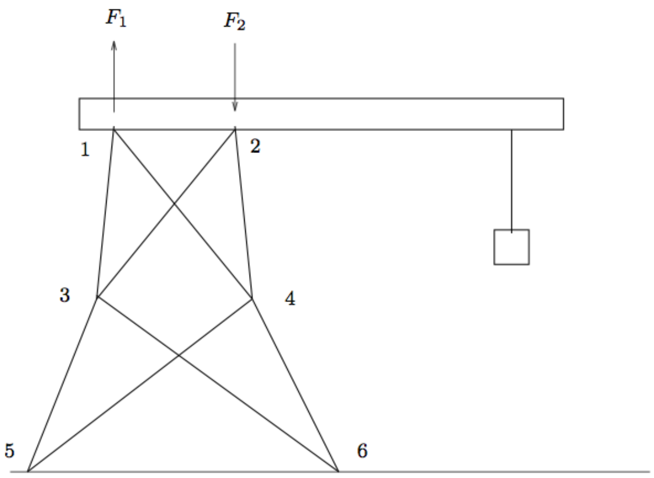


Figura 21: Diagrama de outra estrutura metálica composta por vigas

A equação que resolve essa outra estrutura possui exatamente a mesma forma que a equação anterior. Só mudam os ângulos das vigas em relação à vertical, ou seja, as entradas da matriz Ω. É possível, portanto. mexer nas posições dos nós da estrutura e resolver novamente o sistema a cada nova configuração. Dessa forma, é possível escolher a melhor geometria possível para a estrutura de forma a obter, por exemplo, as soluções que representem o mínimo gasto de metal, ou a máxima resistência da estrutura, etc.

Em que esses exemplos diferem de um exemplo real de engenharia? Na prática, as estruturas com que se trabalha são maiores, possuindo um número muito maior de vigas. As estruturas também teriam profundidade, além de largura e altura (em outras palavras, seriam estruturas tridimensionais). Por fim, as vigas teriam cada uma o seu peso. Todos esses detalhes a mais iriam conduzir a equações maiores, mas que, essencialmente, teriam a mesma forma que as equações mostradas aqui.

6 Exposição e análise do desenvolvimento da pesquisa de campo

Neste capítulo descrevemos a exposição e análise do desenvolvimento da pesquisa. Iniciamos retomando a questão de investigação e os objetivos descritos no Capítulo 1.

Em seguida, apresentamos a metodologia da pesquisa explicitando os sujeitos e condições com as quais nos deparamos. Finalizamos com uma análise dos dados obtidos nos questionários e na observação e depoimentos dos discentes nas aulas.

6.1 Retomando a questão de investigação e os objetivos

No primeiro capítulo, fizemos uma revisão bibliográfica do tema e nos preocupamos em buscar elementos que nos fornecessem ideias para a construção do nosso problema de investigação. Nos capítulos subsequentes procuramos nos fundamentar a respeito da parte teórica de sistemas lineares e dos métodos disponíveis para sua solução.

Assim, tais discussões nos permitiram elaborar a seguinte questão, passível de investigação, que se realaciona com a motivação e aprendizagem de matemática e, em especial, ao tema sistemas lineares:

Como a implementação dos métodos iterativos e computacionais, para resolução de sistemas lineares de maiores dimensões, pode contribuir para motivação e melhora da aprendizagem nas aulas de matemática do 2° ano do Ensino Médio?

Tal investigação está relacionada com problemas modernos enfrentados pelo sistema educacional brasileiro e atinge vários níveis de ensino.

Quanto aos objetivos, nos propomos de maneira geral a apresentar metodologias de ensino com o uso de métodos iterativos e computacionais na resolução de sistemas de equações lineares visando a motivação e melhora na aprendizagem dos alunos do 2° ano do Ensino Médio.

Queremos então, especificamente, orientar os estudantes em relação ao uso de métodos iterativos e computacionais e avaliar se a resolução das Aplicações que envolvem sistemas lineares de maiores dimensões motiva os alunos nas aulas de Matemática. Retornamos com a questão de investigação e objetivos na elaboração das considerações finais no último capítulo.

6.2 Metodologia e descrição da pesquisa

Para a pesquisa de campo foram escolhidas duas metodologias: a quantitativa e a qualitativa. A quantitativa se fez necessária visto que os instrumentos de coleta de dados iniciais e finais, que estão disponíveis nos apêndices "A" e "B", tem um caráter numérico e estatístico. Já a metodologia qualitativa foi necessária pois observamos as aulas durante a aplicação da pesquisa e as analisamos, juntamente com as respostas dos questionários, de modo a obter uma visão descritiva dos fatos. Outro fator determinante que nos fez optar pela análise final qualitativa, se deve ao número reduzido da amostra. Segundo Gewandsznajder (1989; pg 34):

> "... uma característica da pesquisa qualitativa está associada ao pequeno número de unidades amostrais - individuais ou em grupo - que em geral está envolvido. Os pequenos números não constituem uma característica inalienável da pesquisa qualitativa."

Neste sentido, a metodologia de pesquisa qualitativa é usada quando se deseja entender respostas ou opiniões de modo a analisar a importância do que se está pesquisando. Os dados qualitativos constituem descrições detalhadas de situações, eventos ou interações comportamentais observadas; citações diretas de pessoa acerca de sua experiências e pensamentos. Os dados coletados quantitativamente quando analisados de forma discreta e descritiva passam a compor de uma análise qualitativa (Glazier, 1992).

Talvez a melhor maneira de entender o que significa pesquisa qualitativa é determinar o que ela não é. Ela não é um conjunto de procedimentos que depende fortemente de análise estatística para suas inferências ou de métodos quantitativos para a coleta de dados (Glazier, 1992).

Por outro lado, podemos entender por metodologia quantitativa aquela usada para descobrir quantas pessoas de uma determinada população compartilham uma característica ou um grupo de características. Segundo Moresi (2003; pg. 64) ela é especialmente projetada para adquirir medidas precisas e confiáveis que permitam uma análise estatística.

A característica principal da pesquisa quantitativa é a ordem direta e clara das perguntas onde não é apropriada nem tem custo razoável para compreender "porquês".

Definidas a metodologia de pesquisa escolhida, passaremos agora para o detalhamento de todas as atividades da pesquisa, buscando descrever o contexto em que ela foi realizada e seus indivíduos.

Além dos questionários, também observamos as aulas que foram aplicadas durante a pesquisa de campo, bem como as atividades de resolução de sistemas lineares de maiores dimensões, para formularmos a análise dos dados descritos nos subseções abaixo como forma de responder a questão de investigação nas considerações finais.

A pesquisa de campo foi realizada no segundo semestre do ano de 2014, com 15 alunos, 10 eram homens e 5 mulheres, de 2 escolas públicas e 3 escolas privadas do Distrito Federal, individualmente ou em grupos. Dos alunos selecionados para participarem da pesquisa, 8 deles já haviam tido aulas particulares com o professor/pesquisador e os outros 7 foram convidados a participar da pesquisa por um dos 8 alunos iniciais.

Os encontros, 5 no total, aconteceram na casa dos alunos pesquisados, em grupos de no máximo dois estudantes, onde os questionários foram aplicados entre as aulas da pesquisa.

Tal abordagem foi necessária visando a diversidade de sistemas de ensino e, principalmente, à falta de condições encontrada para realizar a pesquisa em algumas escolas públicas do Distrito Federal, podendo destacar: laboratório de Informática sem condições de uso ou sem monitores para auxiliar na instalação dos *softwares* e utilização das máquinas, burocracia para liberação e aplicação da pesquisa, equipamentos sem a capacidade mínima para instalação dos *softwares* necessários à pesquisa.

Em um primeiro encontro, os alunos foram convidados a participar da pesquisa, sendo informados dos objetivos gerais e como se desenvolveriam as aulas. A seguir, foi aplicado o Primeiro Questionário (Apêndice A), divido em duas partes, que visa traçar, entre outros itens:

- o perfil do discente;
- as condições educacionais gerais a que ele está submetido;
- sua percepção em relação à escola e todas as disciplinas cursadas;
- sua percepção em relação à matemática e ao tema Sistemas Lineares.

Em seguida, no segundo encontro, o tema sistemas de equações lineares foi introduzido de forma prática com a análise de uma aplicação (Aplicação 1). Ao investigar a aplicação proposta, encontramos um sistema linear de 5 equações e 5 incógnitas. A partir desse exemplo, definimos e exemplificamos sistemas lineares e métodos de solução já estudados por eles, que são a Regra de Cramer e o Escalonamento (Eliminação). Também ali, já introduzimos a ideia dos métodos computacionais para resolver sistemas lineares de maiores dimensões, onde mostramos aos alunos como resolver um sistema linear utilizando o SciLab e, posteriormente, os alunos resolveram a Aplicação 1 no SciLab.

No terceiro encontro, os alunos foram orientados, mais detalhadamente, quanto ao manuseio do *software* SciLab para resolução de sistemas lineares e foram convidados a modelarem as Aplicações 2 e 3 para resolverem nos *software* mencionados.

O quarto encontro foi iniciado com uma discussão sobre o problema encontrado na solução da Aplicação 3 pelo *software*. Começamos a definir o método de eliminação de Gauss com pivoteamento e os métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel com seus critérios de convergência. Os alunos passaram então para a Aplicação 4, onde tiveram a oportunidade de modelar o problema e analisar qual melhor recurso, métodos iterativos ou computacional, que poderia ser aplicado para resolver o sistema linear.

No quinto e último encontro, orientamos os alunos quanto às Aplicações 5 e 6. Eles puderam modelar e resolver as aplicações da forma que entendiam que seria melhor. A Aplicação 6 acabou ficando como exercício extra. Depois foram convidados a responder o questionário final (Apêndice B), que trata da sua percepção sobre a matemática e, principalmente, se as aulas de Matemática seriam mais motivadoras ou não, depois das aplicações e dos métodos alternativos para solução de sistemas lineares, estudados.

6.3 Análise do questionário inicial

No início da pesquisa, aplicamos um questionário com o objetivo de identificar a opinião dos participantes em relação à Matemática e ao tema sistemas lineares, procurando entender sua motivação em relação à escola e, principalmente, as aulas de Matemática. Aproveitamos para investigar como o conteúdo de sistemas lineares estava sendo trabalhado pelos professores e se os alunos entendiam o que estava sendo aplicado. Também analisamos o perfil educacional do aluno, identificando, entre outros pontos: a relação da família com a escola, disciplinas que ele não gostava e as que já havia reprovado.

A maioria dos alunos pesquisados eram dos sexo masculino e os pais possuem curso superior, respectivamente 60% e 90% do total. Isso nos mostra que o grau de instrução entre as famílias é elevado, visto que quase a totalidade dos pais da amostra possui um diploma de curso superior.

Outro fato relevante é que 20% dos participantes já reprovaram alguma vez e apenas uma das reprovações foi em Matemática. Quase a totalidade dos participantes tem aulas particulares de Matemática, apoio da família na hora dos estudos e costumam estudar fora do horário da escola. Os alunos pesquisados têm idades entre 15 anos e 18 anos, com maior incidência para estudantes de 16 anos (idade comum a alunos do

2° ano do Ensino Médio).

Os resultados acima nos mostram uma preocupação com o desenvolvimento escolar dos estudantes por parte da família. Mesmo os alunos que não reprovaram têm aulas particulares constantes e apoio da família para fazer as tarefas extra classe. Segundo (Polonia e Dessen, 2005) "As pesquisas têm demonstrado que os pais estão constantemente preocupados e envolvidos com as atividades escolares dos filhos e que dirigem a sua atenção à avaliação do aproveitamento escolar."Esta afirmação confirma os dados coletados, em relação a participação da família, entre os alunos participantes da pesquisa.

Outro fator que fica claro na pesquisa é a dificuldade encontrada pelos alunos com as disciplinas chamadas de exatas (Matemática, Física e Química), onde mais de dois terços (2/3) responderam que estudam mais essas matérias fora do horário escolar. Entre as disciplinas preferidas, menos de 10% responderam Matemática. E as que poderiam ser eliminadas do currículo escolar, um terço (1/3) eliminariam Sociologia, Filosofia ou Física. Nesse contexto, as escolhas dos estudantes tem nos mostrado a dificuldade real advinda das disciplinas ditas exatas e, em especial à Matemática. Mas, ao mesmo tempo, reconhecem como a Matemática é relevante no currículo da aprendizagem. Prova disso, é que a maioria dos alunos não eliminaria a Matemática do contexto escolar.

Em relação às aulas de Matemática, a grande maioria, quase 70% dos participantes, destacou que às vezes entende os conteúdos e o que o professor de Matemática explica em sala de aula, mas um pouco menos da metade dos entrevistados, cerca de 46%, afirmou que às vezes se sentem motivados e, outros 33,33%, disseram que nunca se sentem motivados a ir nas aulas de Matemática. Em contrapartida, os alunos que responderam que não se sentem motivados para ir para escola ficou em torno de 7%. Podemos identificar aqui, uma concordância, com o que já discorremos em relação a desmotivação que os discentes vem sentindo com a escola e, principalmente, com as aulas de Matemática.

Quando questionados sobre o que foi aprendido em sistemas lineares, quase a totalidade dos alunos disseram que entendem como se resolve um sistema 2x2 e menos da metade respondeu que entende como se resolve um sistema 3x3. Em relação a sistemas de maiores dimensões, um terço dos participantes relatou que os professores ensinaram métodos para resolver este tipo de sistema, mas destes, um pouco mais da metade conseguiu entender tais métodos. Quanto a exercícios aplicados de sistemas lineares quase todos os alunos responderam ter vistos aplicações de dimensão de, no máximo,

$n = 3$. Podemos identificar nas respostas da maioria dos estudantes uma tendência já observada anteriormente, no que diz respeito ao trabalho do professor com sistemas lineares de maiores dimensões, que são deixados de lado privando o aluno de descobrir outras aplicações advindas de tais sistemas. Em Ferreira (2013, pg. 51) podemos evidenciar tais fatos:

> As situações problema são sugeridas para até três incógnitas e não se trabalham aplicações dos sistemas para a percepção de sua importância científica e também industrial. (...) Não se abordam aplicações mais sofisticadas nem se aprimora os problemas propostos, impedindo uma visão mais generalista do tema.

Embora grande parte dos alunos tenham dificuldades com Matemática, esse primeiro questionário nos mostrou que os alunos entendem grande parte do que é ensinado pelo professor, mas esbarram na falta de motivação e, quando o tema é sistemas lineares, na ausência de exemplos que estimulem sua curiosidade e criatividade.

6.4 Análise das aulas da pesquisa

No segundo semestre de 2014, aconteceram as aulas da pesquisa tendo como objetivo o de orientar os estudantes quanto a utilização de métodos iterativos e computacionais para resolução de sistema lineares de maiores dimensões e identificar se as aplicações propostas poderiam motivá-los mais nas aulas de Matemática.

Na segunda aula com os participantes, entre os dias 03 e 08 de novembro, foi introduzido o assunto sistemas lineares através da primeira aplicação (Aplicação 1). Para alguns alunos já se tratava de um exercício conhecido, visto que já sabiam como montar o problema transformando em um sistema de equações lineares. A maior surpresa foi em relação ao número de equações e incógnitas, como podemos ver no diálogo abaixo, registrado durante as aulas.

Aluno: *Montar essas equações até que é fácil. Basta observar os valores associados a cada vitamina e depois igualar ao valor total. Mas o problema é resolver isto! Vai dar muito trabalho. Aliás, nem sei como faz isso.*

Professor: *E se eu disser que existe uma forma de resolver esse problema só digitando as equações em um programa de computador?*

Aluno: *Mas nem vou precisar fazer contas? Tipo aquele escalonamento e "tals"?*

Professor: *Não vai precisar. Mas antes precisamos relembrar alguns métodos para resolver esse sistema, para entender o que o programa vai fazer para te dar a solução.*

A figura 22 mostra o sistema linear resultante da Aplicação 1, feita por um dos participantes.

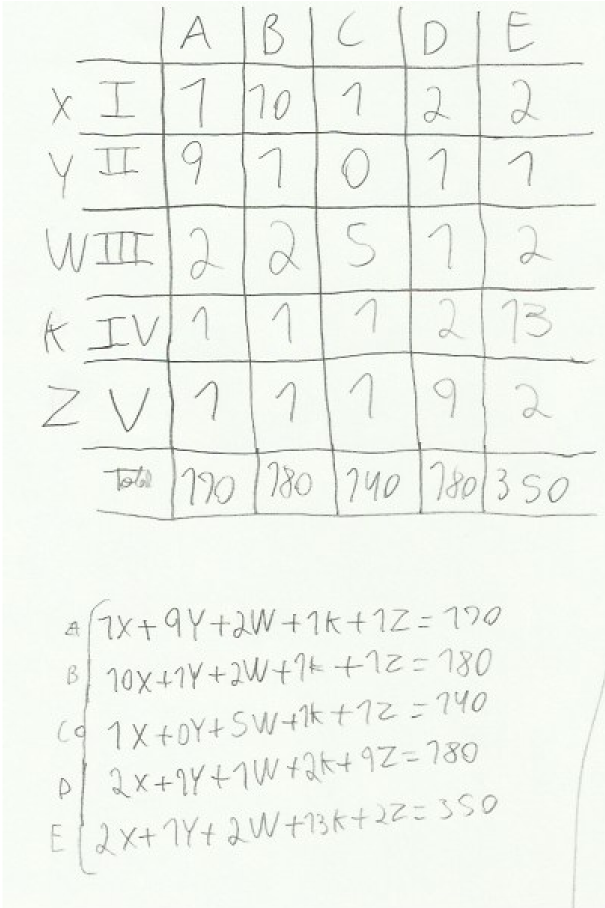


Figura 22: Sistema linear construído por um aluno a partir da Aplicação 1

Grande parte dos alunos não teve dificuldades em montar o sistema de equações proposto pela aplicação, os que não conseguiram foram orientados quanto à sua montagem e logo conseguiram também.

Antes de mostrar como os alunos poderiam utilizar um programa para resolver a aplicação, optamos por revisar os métodos de solução por inversão de matrizes, escalonamento e Regra de Cramer, assim, poderiam entender o que seria feito pelo programa para resolver o sistema linear proposto. Essa revisão foi feita com explicações teóricas e com exemplos. Em seguida, foram orientados em como manusear e resolver um sistema linear no programa SciLab. Foram abordados duas técnicas para solução: o comando linsolve e o comando a\b . O comando linsolve resolve sistemas de equações em que o número de equações é igual ao número de incógnitas através da equação matricial $Ax + b = 0$. Já o comando a\b resolve por inversão de matrizes. A figura 23 mostra uma das soluções da Aplicação 1 feita por um dos alunos.

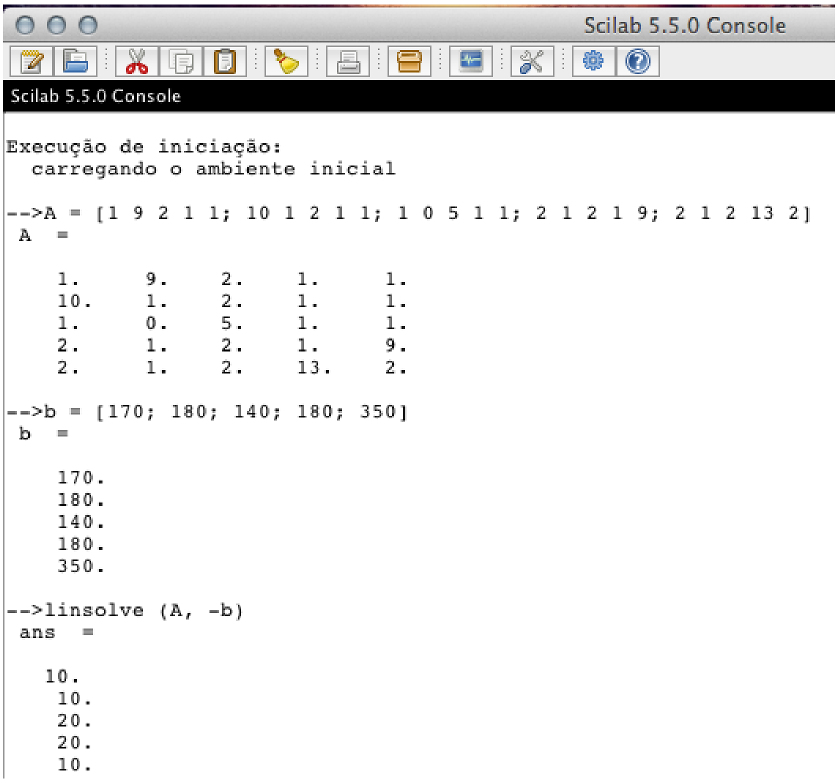


Figura 23: Solução da Aplicação 1 por um dos alunos no SciLab

Após a resolução da primeira aplicação, através do método computacional descrito acima, foi nítida a euforia entre os alunos. Verificamos que todos ficaram impressionados com a simplicidade da aplicação do método no software SciLab e de como o resultado era satisfatório. Os diálogos abaixo definem bem o entusiasmo dos alunos:

Aluno 1: *Achei muito fera! O mais legal de tudo é que não precisamos fazer nenhuma conta (risos). Podíamos usar esse programa na escola também né (mais risos).*

Aluno 2: *Achei muito fácil resolver o sistema assim professor. Gostei mais porque foi bem rápido. Acho que do outro jeito teríamos que fazer muitos cálculos.*

Quando indagados, pelo pesquisador, se isso os ajudaria a se motivarem mais nas aulas de Matemática, a resposta foi rápida.

Aluno: *Acho que seria legal sim. As aulas, por muitas vezes, são chatas. O professor fica lá falando e falando, passa exercícios e depois faz a correção. Sempre assim. Nunca tem nada de novo.*

A terceira aula aconteceu na semana seguinte, de 10 à 15 de novembro, e os alunos foram convidados a resolver as aplicações 2 e 3 (pgs. 68 e 69). Antes, foram orientados em como utilizar corretamente o SciLab em relação aos comandos e ao tipo de sistema encontrado. Também foram orientados a utilizar o Máxima e entenderam que o comando Linsolve do SciLab é o mesmo comando que o Máxima utiliza na sua solução. Os sistemas montados por dois alunos, que se refere às Aplicações 2 (figura 24) e 3 (figura 25) estão representadas abaixo.

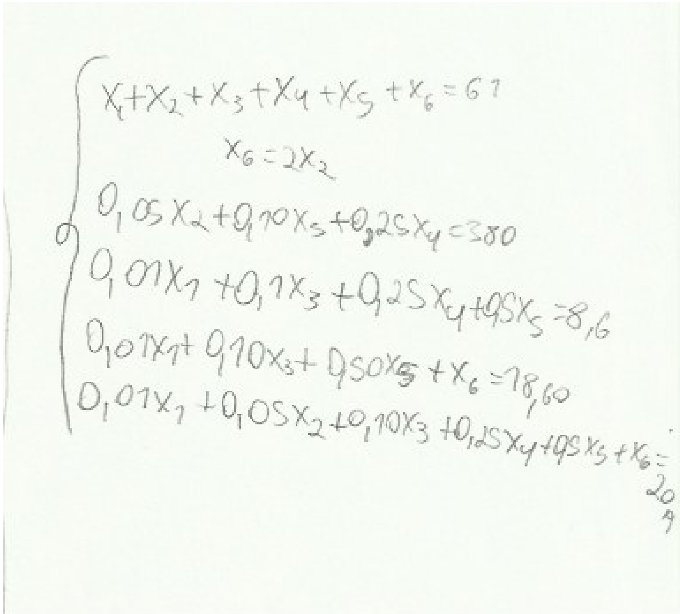


Figura 24: Sistema linear construído por um aluno a partir da Aplicação 2

Dessa vez os alunos apresentaram algumas dificuldades para montar os sistemas relativos às aplicações. A maior dificuldade apareceu na montagem da Aplicação 2. Neste momento tivemos que fazer uma intervenção e explicar alguns tópicos necessários à montagem.

Aluno: *Professor, esses aqui estão mais difíceis do que os da aula passada. Como posso representar o sistema com essas moedas?*

Professor: *A ideia é parecida com o que fizemos na aula passada. Basta associar cada incógnita à quantidade de moedas de cada tipo.*

Aluno: *Mas aqui ele dá valores em reais e centavos. Como faço isso?*

Professor: *Quando ele der o valor da moeda, associa esse valor á incógnita.*

Aluno: *"tipo"10 centavos vale 0,1x?*

Professor: *isso mesmo.*

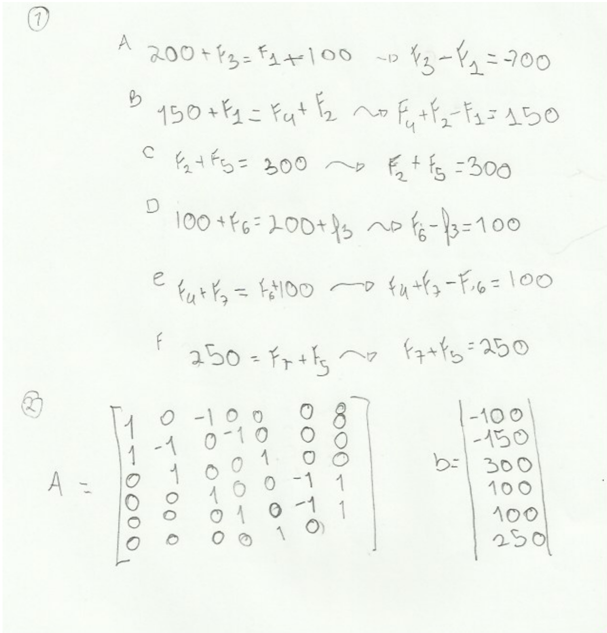


Figura 25: Sistema linear construído por um aluno a partir da Aplicação 3

Aluno: *vou tentar*

A mesma dúvida relatada no diálogo acima permaneceu entre quase todos os alunos sujeitos da pesquisa. Passado as explicações a maioria dos alunos conseguiu montar corretamente o sistema relativo à Aplicação 2, como mostrou a figura 24.

Para a solução do sistema, a maioria dos alunos escolheram o SciLab. Não tiveram nenhum problema na hora de digitar os dados no programa e visualizar a solução. Uma das soluções pode ser vista na figura 26.

Quanto à Aplicação 3, o próprio enunciado já trazia um direcionamento para a montagem das equações do sistema linear. Aqui os alunos tiveram dificuldades em definir as matrizes dos coeficientes e das constantes. Novamente foi necessário uma intervenção:

Aluno: *Como vamos montar o sistema no programa se falta um monte de incógnitas?*

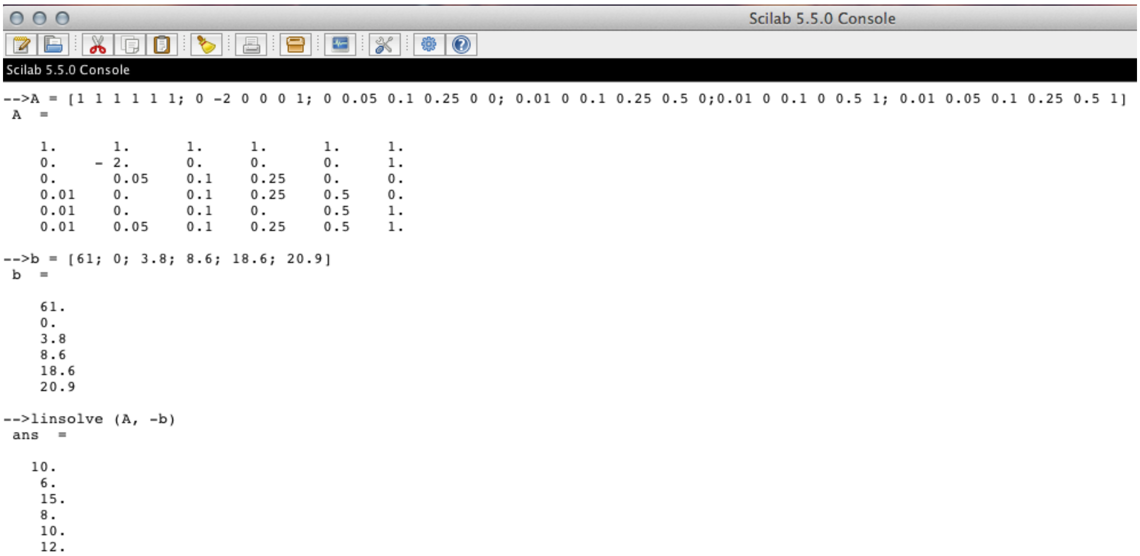
Professor: *As que faltam são nulas.*

Aluno: *Então a incógnita fica multiplicada por 0?*

Professor: *isso mesmo.*

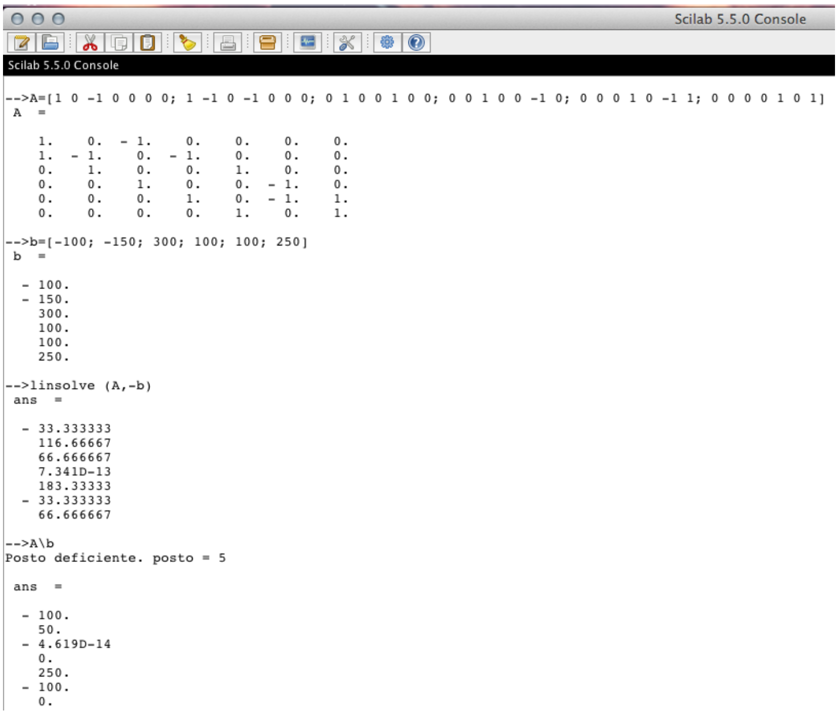
Aluno: *Então vamos ter muitos zeros (risos).*

Montado o sistema e feito a aplicação no SciLab, figura 27, os alunos perceberam que a solução não foi a esperada. Nesse momento tivemos que fazer uma nova intervenção:



```
Scilab 5.5.0 Console
-->A = [1 1 1 1 1 1; 0 -2 0 0 0 1; 0 0.05 0.1 0.25 0 0; 0.01 0 0.1 0.25 0.5 0;0.01 0 0.1 0 0.5 1; 0.01 0.05 0.1 0.25 0.5 1]
 A  =

    1.      1.      1.     1.      1.     1.
    0.    - 2.      0.     0.      0.     1.
    0.      0.05    0.1    0.25    0.     0.
    0.01    0.      0.1    0.25    0.5    0.
    0.01    0.      0.1    0.      0.5    1.
    0.01    0.05    0.1    0.25    0.5    1.

-->b = [61; 0; 3.8; 8.6; 18.6; 20.9]
 b  =

    61.
    0.
    3.8
    8.6
    18.6
    20.9

-->linsolve (A, -b)
 ans  =

   10.
    6.
    15.
    8.
    10.
    12.
```

Figura 26: Solução da Aplicação 2 por um dos alunos no SciLab



```
Scilab 5.5.0 Console
-->A=[1 0 -1 0 0 0 0; 1 -1 0 -1 0 0 0; 0 1 0 0 1 0 0; 0 0 1 0 0 -1 0; 0 0 0 1 0 -1 1; 0 0 0 0 1 0 1]
 A  =

    1.    0.  - 1.    0.    0.    0.    0.
    1.  - 1.    0.  - 1.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.    0.  - 1.    0.
    0.    0.    0.    1.    0.  - 1.    1.
    0.    0.    0.    0.    1.    0.    1.

-->b=[-100; -150; 300; 100; 100; 250]
 b  =

  - 100.
  - 150.
    300.
    100.
    100.
    250.

-->linsolve (A,-b)
 ans  =

  - 33.333333
    116.66667
    66.666667
    7.341D-13
    183.33333
  - 33.333333
    66.666667

-->A\b
Posto deficiente. posto = 5

 ans  =

  - 100.
    50.
  - 4.619D-14
    0.
    250.
  - 100.
    0.
```

Figura 27: Solução da Aplicação 3 por um dos alunos no SciLab

Aluno: *Professor acho que essa solução não está correta.*

Professor: *Mas porque você acha isso?*

Aluno: *"ué"professor, pelo comando linsolve só apareceu um erro e pelo comando $A\backslash b$ apareceu números negativos e zeros. Não tem sentido o fluxo no cruzamento ser* *negativo.*

Professor: *isso mesmo, não faz sentido. Vocês devem se lembrar que o comando Linsolve do SciLab só resolve sistemas de equações em que o número de incógnitas é igual ao número de equações. Você contou a quantidade de incógnitas e equações?*

Aluno: *Não contei. Como eu já tinha feito os outros dois diretos no "programa"achei que esse também dava.*

Professor: *Pois é, nem todos os sistemas lineares podem ser solucionados no SciLab com os comandos que aprendemos.*

Aluno: *Entendi. Nesse caso então teríamos que resolver de outro jeito.*

Ao analisar a conversa entre professor/pesquisador e aluno, sobre a utilização do SciLab em todos os problemas, percebemos que o aluno se identificou com a resolução via método computacional, visto que o esforço para se resolver o problema é menor, mas, de início, não entendeu as limitações que possuíam os comandos estudados. Foi necessário a intervenção do professor para esclarecer novamente esse tópico.

A quarta aula (17 à 22 de novembro) teve como foco a solução de sistemas lineares através de métodos numéricos. Iniciamos com observações sobre o erro encontrado na solução da Aplicação 3 pelo SciLab. Novamente retomamos a discussão sobre quando os comandos linsolve e A\b podem ser utilizados. Em seguida, trabalhamos os conceitos dos métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel bem como critérios básicos de convergência. Aproveitamos também para revisar método direto de solução de Gauss (eliminação) mas com o acréscimo da ideia de pivoteamento.

Essa aula acabou sendo mais extensa que as anteriores, visto que o conteúdo a ser apresentado era totalmente novo para os alunos. Para nossa surpresa, os alunos não encontraram dificuldades em entender e aplicar os métodos iterativos. Passamos então para à Aplicação 4 (pg. 71), onde o aluno deveria montar o sistema linear respectivo à aplicação e, posteriormente, o resolveria pelo método iterativo de Gauss-Seidel. A modelagem do sistema por um dos alunos está representada na figura 28.

Mais uma vez se fez necessário a intervenção do professor para a modelagem da aplicação. Muitos alunos ficaram confusos ao perceber que seria necessário a construção de 16 equações, visto que o problema possuía 16 incógnitas. O enunciado do problema dissertava sobre a maneira correta de montar cada equação. Essa parte também trouxe um pouco de dificuldade para os alunos. O diálogo abaixo entre professor e aluno, relata os problemas advindos da montagem da Aplicação 4.

Professor: *Essa cara de assustado deve ser porque teremos 16 equações "né"?*

Aluno: *16 equações? Tenho que calcular cada "T"desses? agora sim vai dar traba-*

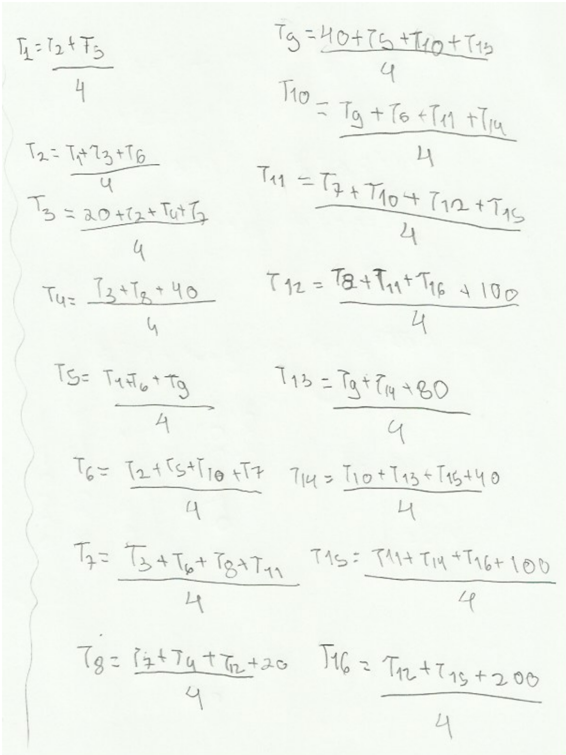


Figura 28: Sistema Linear construído por um dos alunos a partir da Aplicação 4

lho. Se não der para fazer no computador nem quero fazer esse.

Professor: *Isso, tem que calcular cada "T". E não vai ser possível fazer no computador. Vamos fazer por um dos métodos iterativos que aprendemos. Vocês entenderam como montar cada equação?*

Aluno: *Mais ou menos professor. Tem como você fazer o primeiro?*

Professor: *Tem sim. Observe que é só pegar os pontos que estão em torno da T_1 e fazer a média, ou seja, são 4 pontos em torno então soma eles e divide por 4*

Fizemos a construção da primeira equação da temperatura, para que o aluno percebesse como seria feita a média entre os pontos. Depois da construção da primeira equação os alunos construíram as outras com certa facilidade como mostra a figura 28.

Depois de construídas as equações os alunos perceberam que o melhor método para solucionar o sistema seria um dos métodos iterativos estudados, visto que as equações iterativas já estavam prontas. Iniciando com um vetor aproximação zero, uma iteração da solução está retratada na figura 29.

Essa aula se mostrou muito proveitosa pois os alunos puderam aplicar um conhecimento totalmente novo através de um exercício que, à primeira vista, parecia de difícil

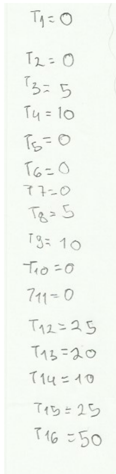

$T_1=0$
$T_2=0$
$T_3=5$
$T_4=10$
$T_5=0$
$T_6=0$
$T_7=0$
$T_8=5$
$T_9=10$
$T_{10}=0$
$T_{11}=0$
$T_{12}=25$
$T_{13}=20$
$T_{14}=10$
$T_{15}=25$
$T_{16}=50$

Figura 29: Solução da Aplicação 4 feita por um dos alunos utilizando o método de Gauss-Seidel

solução. Outro aspecto interessante pode ser observado através do relato de um dos alunos da pesquisa:

Aluno: *Quando estava montando as equações pensei que seria bem difícil resolver tudo aquilo, mas ao aplicar o método iterativo e substituir os valores tudo foi bem fácil. Acho que foi mais fácil do que no computador.*

A quinta e última aula aconteceu na semana seguinte, de 25 à 29 de novembro, e teve como foco a Aplicação 5 e a Aplicação 6, que abordam conteúdos estudados por eles no ensino médio. A Aplicação 5 tratou de balanceamento de equações químicas e a Aplicação 6 da determinação de correntes elétricas em um circuito elétrico.

Os alunos ficaram surpresos quando descobriram que podiam determinar os coeficientes do balanceamento químico através de um sistema de equações lineares. Segundo eles, normalmente usavam regras ou outros métodos químicos para descobrir tais coeficientes. Logo quiseram fazer o sistema referente à Aplicação 5. Um dos modelos com a tentativa de resolução está representado na figura 30.

Aqui o aluno entendeu como esquematizar o sistema linear através da Aplicação 5 e escolheu o método de eliminação de Gauss com Pivoteamento para resolver o problema. No entanto, após construir a matriz aumentada do sistema o aluno cometeu um erro ao construir o multiplicador e fazer a operação de soma entre as linhas L_1 e L_2. Nesse momento, o aluno fez alguns questionamentos.

Aluno: *Professor acho que alguma coisa está errada. Essa linha aqui ficou -2 e o restante tudo zero. Pode alguma parte do balanceamento ser zero?*

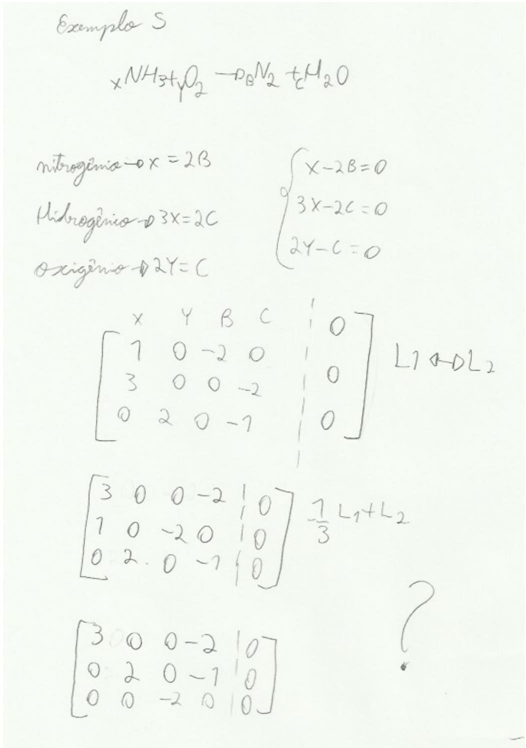


Figura 30: Sistema Linear construído por um dos alunos a partir da Aplicação 5

Professor: *Nenhuma incógnita pode ser zero. Você se equivocou quando montou o multiplicador e quando fez a soma entre as linhas* L_1 *e* L_2*. Tenta fazer novamente a operação observando que o multiplicador tem que ser de sinal contrário.*

Aluno: *Mas não está certo trocar as linhas? Foi assim que você ensinou para minimizar os erros.*

Professor: *Trocar as linhas está certo. O multiplicador que tem que ser negativo. Assim, quando somar com a outra linha vai zerar a posição escolhida.*

Aluno: *Vi aqui professor. Somei errado também.*

A maioria dos alunos resolveu a Aplicação 5 por eliminação Gaussiana. O interessante foi observar que a maioria dos alunos aplicou e entendeu o motivo do uso da eliminação e da eliminação com pivoteamento, como ficou claro no diálogo entre professor e aluno acima. O problema aqui foi a dificuldade em resolver a eliminação, algo que não deveria acontecer, visto que este tema é tratado no Ensino Médio.

Outra dificuldade percebida foi em relação à solução encontrada. Como o sistema não tinha uma única solução, sistema SPI, alguns alunos pediram ajuda para encontrar o valor mínimo de cada coeficiente do balanceamento.

A Aplicação 6 não foi proposta aos alunos durante as aulas da pesquisa. Como essa última aula serviu também para responder o questionário final da pesquisa, o tempo não foi suficiente. Sendo assim, decidimos por deixar os alunos livres para tentarem resolver essa última aplicação em um momento posterior, ficando como exercício extra.

6.5 Análise do questionário final

Após as aulas da pesquisa, foi aplicado o questionário final, respondido individualmente, objetivando retomar questões levantadas no questionário inicial, tentando identificar como o aluno se sentia agora em relação às aulas de Matemática e à aprendizagem de sistemas lineares; também identificar se os novos métodos estudados para resolução de sistemas lineares de maiores dimensões seriam interessantes e se contribuiriam para sua motivação nas aulas de Matemática.

Com relação à aprendizagem de sistemas lineares a grande maioria dos alunos pesquisados respondeu que entendeu melhor o conteúdo e que as aplicações usadas para introduzir os métodos de resolução são bem interessantes.

Observamos que as aulas da pesquisa contribuíram de forma significativa para a melhoria na aprendizagem de sistemas lineares, em relação ao início da pesquisa, onde à introdução dos assuntos com aplicações práticas teve uma receptividade positiva por parte dos alunos. Isto foi percebido através dos questionários aplicados e principalmente pela fala dos alunos pesquisados durante as aulas.

No que diz respeito ao aprendizado de métodos iterativos e com pivoteamento, cerca de 2/3 dos alunos pesquisados afirmaram ter aprendido os conteúdos propostos e, estudar os novos métodos, foi interessante.

Em relação aos recursos computacionais analisados, quase a totalidade dos alunos pesquisados destacaram o modo facilitador para resolução de sistemas lineares. Também destacaram seu interesse pelos recursos computacionais e como sua aprendizagem foi significativa.

Nos parágrafos acima, podemos destacar o interesse dos alunos pelos novos métodos estudados e como a implementação deles pode contribuir para uma aprendizagem mais dinâmica e significativa.

Quanto à motivação dos alunos nas aulas de Matemática, o questionário mostrou que mais da metade dos alunos pesquisados se sentiriam mais motivados se as aplicações de sistemas lineares de maiores dimensões e os novos métodos de solução apresentados fossem incorporados às aulas de matemática.

Desse modo, iremos continuar a análise desse questionário fazendo uma correlação com o questionário inicial e as aulas da pesquisa nas considerações finais, nos remetendo aos nossos objetivos e a responder a questão de investigação.

7 Considerações finais

É fato que o ensino brasileiro vem passando por transformações e, com o advento da tecnologia, cada dia mais as pessoas se conectam e se globalizam. Para nossos alunos não é diferente. Uma grande gama de informação chega até eles e é preciso saber transformar tudo isso a favor da escola. Alguns avanços já vem sendo feito nesse sentido, mas ainda é preciso progredir mais. O que vemos é um contínuo vácuo nas inovações e uma perpetuação do ensino tradicional a tanto tempo ultrapassado. O resultado desse atraso educacional torna, cada dia mais, nosso aluno desmotivado e o reflexo é sentido no péssimo desempenho do Brasil em avaliações internacionais.

Nesse momento de retomada de ideias queremos mostrar como a *implementação dos métodos iterativos e computacionais para resolução de sistemas lineares de maiores dimensões pode contribuir para a motivação e melhora na aprendizagem nas aulas de Matemática do 2° ano do Ensino Médio*, que é justamente nossa questão de investigação.

Para responder a essa questão, nos propomos a pesquisar sobre o tema, fazendo uma revisão bibliográfica e, a partir daí, passamos a relacionar nossos objetivos com a questão de investigação. Traçamos então três objetivos específicos que poderiam nortear todo o trabalho posterior de pesquisa. Antes de iniciarmos com as aulas e os questionários da pesquisa, tivemos o cuidado de fazer um embasamento teórico e prático dos temas relacionados a sistemas lineares que foram tratados nessa dissertação.

Nessas considerações, vamos expor nossas reflexões sobre os dados produzidos com os questionários inicial e final, com as aulas da pesquisa e toda a experiência trazida da sala de aula, tentando elucidar nossa questão central de investigação e nossos objetivos.

Nosso primeiro objetivo tinha como meta *Aplicar e orientar os estudantes em relação a métodos iterativos e computacionais para resolução de sistemas de equações lineares.* Com as aulas da pesquisa conseguimos sistematicamente ensinar os métodos iterativos e computacionais e, em seguida, usa-los nas aplicações propostas. Com o questionário final e as observações feitas durante as aulas da pesquisa, percebemos que os alunos entenderam os métodos iterativos e aprenderam como utilizar os recursos computacionais propostos para resolução de sistemas lineares.

O segundo objetivo foi o de *avaliar se a resolução de aplicações que envolvem sistemas lineares de maiores dimensões motiva os alunos nas aulas de matemática.* Ao longo das aulas da pesquisa e na análise dos questionários, buscamos observar como os alunos se sentiam ao realizar as atividades propostas e, pelos diálogos entre os alunos participantes e entre professor e alunos, alguns citados no capítulo anterior, fica claro que a inserção de recursos computacionais quando aplicados a resolução de sistemas de maiores dimensões auxilia na melhora do tempo de execução da aplicação e com isso motiva os alunos a tentarem fazer o problema. Quando questionados ao final da pesquisa, a maioria dos alunos participantes da pesquisa afirmaram que a resolução das aplicações seria um fator motivador nas aulas de matemática. Ao iniciarmos a pesquisa um pouco menos da metade dos alunos pesquisados se sentiam motivado nas aulas de matemática de acordo com o questionário inicial.

Outro ponto que merece destaque está na utilização da tecnologia através dos recursos computacionais. Durante as aulas da pesquisa e depois através do questionário final é notório o envolvimento dos alunos pesquisados com esse método de resolução, em particular. Todos eles relataram que utilizar a ferramenta computacional através de *softwares* que auxiliam no trato com a matemática é uma forma de deixar a aula mais prazerosa e menos tradicional. Nesse contexto, seria interessante, ainda, pesquisar sua viabilidade na sala de aula com turmas completas.

O terceiro e último objetivo: *avaliar se os métodos iterativos e computacionais contribuem para uma melhor aprendizagem de sistemas lineares*. Nesse último objetivo nos preocupamos com a melhora significativa da aprendizagem dos alunos. Não só é necessário motivá-los como também trabalhar a qualidade da aprendizagem. No início da pesquisa, segundo as respostas no questionário inicial, quase 70% dos alunos pesquisados disseram entender, as vezes, o que é ensinado pelo professor de Matemática. Ao final das aulas, mais de 2/3 dos alunos pesquisados disseram ter entendido melhor o conteúdo de sistemas lineares. Deste modo, considerando o conjunto de alunos pesquisados, os dados coletados dos questionários e das observações feitas durante as aulas da pesquisa, entendemos que os alunos participantes melhoraram seus conhecimentos em relação aos sistemas lineares.

Assim sendo, acreditamos que é possível melhorar a motivação dos alunos nas aulas de Matemática, através da resolução de aplicações de sistemas lineares de maiores dimensões com o uso de métodos interativos e recursos computacionais e, ao mesmo tempo, podendo contribuir de forma significativa para melhoria na qualidade do aprendizado dos alunos. Sabemos que muitos outros modelos que proporcionam uma melhora do Ensino podem ser desenvolvidos e esperamos que os leitores continuem nessa busca.

Assim como nós nos validamos de sugestões para construir os tópicos deste trabalho, também achamos por bem finalizá-lo deixando algumas sugestões para trabalhos futuros, à saber: exploração de algoritmos programados para resolução dos métodos iterativos no SciLab; aplicação da pesquisa com um número maior de alunos; pesquisa e aplicação de outros métodos de resolução de sistema lineares; exploração de outros *softwares* para resolução de problemas numéricos; desenvolvimento de pesquisa em outras áreas que motivem os alunos nas aulas de Matemática.

Referências

[1] BALACHEFF, N., KAPUT, J. *Computer-Based Environments in Mathematics.* p. 469-501. En International Handbook of Mathematical Education, Bishop, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[2] BATTAGLIOLI, C.S.M. *Sistemas Lineares na Segunda Série do Ensino Médio: Um Olhar Sobre os Livros Didáticos.* 2008. 114p. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática. PUC, São Paulo.

[3] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. *Álgebra linear.* São Paulo: Harbra, 1980.

[4] BOYER, C. B. *História da Matemática.* 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

[5] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

[6] BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros curriculares nacionais(PCN): ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, parte III. Brasília: SEMT, 2000.

[7] BRASIL, Ministério da Educação. Orientacões curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: SEB, 2006, v. 2.

[8] CASTILHO, J.E. *Cálculo Numérico.* Apostila elaborada na Universidade Federal de Uberlândia, MG; 2011.

[9] CHIARI, A.S. *A utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio.*, 2011. 143p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul,Campo Grande.

[10] CUNHA, M. C. C. *Métodos Numéricos.* São Paulo: Ed. Unicamp, 2003.

[11] DAHLQUIST, G.; BJORCK, A. *Numerical Methods.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974.

[12] FERNADES, W. M.; MIYASAKI, R. *Sistemas Lineares e aplicações.* Anais do IX Seminário de Iniciação Científica, VI Jornada de Pesquisa e Pós-Graduação e Semana Nacional de Ciências e Tecnologia, Anápolis, 2011.

[13] JORDÃO, A. L. I. *Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no* 2° *ano do Ensino Médio* . 2011. 192f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

[14] FERREIRA, A. E. G. *A importância dos sistemas lineares no ensino médio e a contribuição para a matemática e suas aplicações.*, 2013. 92p. Dissertação de Mestrado Profissional em Rede Nacional de Matemática (PROFMAT) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa.

[15] FILHO, B. B.; SILVA, C. X. *Matemática aula por aula.* São Paulo: FTD, 2000.

[16] FREITAS, I.M. *Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno.* 1999. 101p. Dissertação de Mestrado. PUC, São Paulo.

[17] GEWANDSZNAJDER, F. *O que é o método científico.* São Paulo: Pioneira, 1989.

[18] GLAZIER, J.; POWELL, R. R. *Qualitative research in information management.* Englewood, CO: Libraries Unlimited, 1992 - 238p.

[19] GÓMEZ, P. *Tecnologia y educación matemática.* 1997. UNIANDES-LIDIE. Vol. 10.

[20] IEZZI, G. ... ET AL *Matemática: ciência e aplicações.* São Paulo: ATUAL, 2012.

[21] KOLMAN, B.; HILL, D. R. *Introdução a Álgebra Linear com Aplicações.* Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[22] KRAWCZYK, N. *O Ensino Médio no Brasil.* São Paulo: Ação Educativa, 2009.

[23] LEON, S.J. *Linear Algebra: With Applications.* Dartmouth: Pearson, 8th. ed., 2010.

[24] LIMA, E.L. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.* Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

[25] LIMA, E.L. *Sobre o Ensino de Sistemas Lineares.* Rio de Janeiro: RPM, n° 23, 1993.

[26] LUCCAS, S. *Abordagem Histórico-Filosófica no Ensino e na Aprendizagem dos Sistemas de Equações Lineares e Determinantes* . 2004. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.

[27] MATOS, V.F. *O ensino de sistemas de equações lineares: Uma abordagem geométrica.*, 2013. 65p. Dissertação de Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal de Uberaba, Minas Gerais.

[28] MORESI, E. *Metodologia da pesquisa.*, 2003. 108p., Universidade Católica de Brasília, Distrito Federal.

[29] PANTOJA, L.F.L. *A conversão de Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares.*, 2008. 105p. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática do Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica – Universidade Federal do Pará, Belém.

[30] PESCADOR, A.; POSSAMAI, J. P.; POSSAMAI, C. R.; *Aplicação de Álgebra Linear na Engenharia.* XXXIX Congresso Nacional de Educação em Engenharia (COBENGE), Blumenau, Brasil, 2011.

[31] POLÔNIA, A.C.; DESSEN, M.A. *Em Busca de uma Compreensão das Relações entre Família e Escola.* Psicologia Escolar e Educacional (2005), 9(2), 303-312.

[32] POOLE, D. *Álgebra linear.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

[33] RUGIERO, M.; LOPEZ, V.L. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.* São Paulo: MacGraw-Hill, 1988.

[34] SPERANDIO, C.; MENDES, J.T.; SILVA, L. H. M. *Cálculo Numérico.* São Paulo: Pearson, 2003.

[35] TAVARES, A.H.; PEREIRA, A.G.C. *História da Matemática no Ensino de Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes.* 2013. VII CIBEM, Montevideo, Uruguay.

SOFTWARES UTILIZADOS

GEOGEBRA. Disponível em: *www.geogebra.org/cms/pt_BR/download.* Acesso em 25/05/2014.

MAXIMA. Disponível em: $maxima.sourceforge.net/download.html$. Acesso em 25/05/2014.

WINPLOT. Disponível em: $winplot.softonic.com.br$. Acesso em 25/05/2014.

SCILAB Disponível em: $www.scilab.org/download/$5.4.1. Acesso em 25/05/2014.

A Primeiro Questionário

Este questionário é parte integrante de uma pesquisa de mestrado que está sendo realizada a fim de compreender qual a relação de motivação para com o Ensino Médio e principalmente à matemática. Além deste questionário, você será convidado também a participar de outras atividades e, posteriormente, responder a um novo questionário. Conto com sua colaboração para essa pesquisa ser validada de modo a seguir sempre com a verdade.

Mestrando: Alterno Jerônimo Junior

Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz

Primeira Parte (Perfil do aluno)

1. Idade:
i) ( ) 14 anos
ii) ( ) 15 anos
iii) ( ) 16 anos
iv) ( ) 17 anos
v) ( ) 18 anos
vi) ( ) NDA
Especifique:

2. Sexo:
i) ( ) Masculino
ii) ( ) Feminino

3. Idade com a qual ingressou na escola?
i) ( ) 2 anos
ii) ( ) 3 anos
iii) ( ) 4 anos
iv) ( ) 5 anos
v) ( ) 6 anos
vi) ( ) NDA
Especifique:

4. Escolaridade do pai:
i) ( ) Nunca estudou
ii ( ) Ensino fundamental
iii) ( ) Ensino Médio
iv) ( ) curso superior completo
Profissão do pai:

5. Escolaridade da mãe:
i) ( ) Nunca estudou
ii ( ) Ensino fundamental
iii) ( ) Ensino Médio
iv) ( ) curso superior completo
Profissão do mãe:

6. Você já reprovou alguma vez?
i) ( )sim
ii) ( ) não

OBSERVAÇÃO: SE VOCÊ RESPONDEU SIM NA QUESTÃO ACIMA, ISTO É, VOCÊ JÁ REPETIU ALGUMA SÉRIE, RESPONDA AS QUESTÕES ABAIXO. CASO CONTRÁRIO, SE VOCÊ NUNCA FOI REPROVADO PULE PARA A QUESTÃO 10.

7. Quantas vezes você repetiu de ano?
i) ( ) 1
ii) ( ) 2
iii) ( ) 3
iv) ( ) 4
v) ( ) NDA
Especifique:

8. Quais as séries que você já repetiu?
Especifique:

9. Quais as matérias que você já foi reprovado?

Especifique:

10. Você tem apoio da sua família durante os estudos fora da escola?
i) ( )sim
ii) ( ) não

11. Em caso afirmativo, quais pessoas te ajudam?
Especifique:

12. Você já teve algum tipo de aula particular?
i) ( )sim
ii) ( ) não

13. Em caso afirmativo, em qual ou quais disciplinas?
Especifique:

14. Quantas vezes, por semana, você costuma estudar fora da escola?
i) ( ) 1
ii) ( ) 2
iii) ( ) 3
iv) ( ) 4
v) ( ) NDA
Especifique:

15. Quais disciplinas você mais estuda fora da escola?
Especifique:

16. Quantas horas, por dia, você estuda matemática fora da escola?
i) ( ) 0
ii) ( ) 1
iii) ( ) 2
iv) ( ) 3
v) ( ) NDA
Especifique:

17. Você consegue entender a matéria de matemática dada em sala?
i) ( ) Sim, entendo sempre.
ii) ( ) Entendo as vezes.
iii) ( ) Não, nunca entendo.

18. Você consegue entender o que seu professor de matemática explica em sala? i) ( ) Sim, entendo sempre.
ii) ( ) Entendo às vezes.
iii) ( ) Não, nunca entendo.

19. Você presta atenção nas aulas de matemática?
i) ( ) Sim, sempre presto atenção nas aulas.
ii) ( ) Presto atenção as vezes.
iii) ( ) Não, nunca presto atenção nas aulas de matemática.

20. Você se sente motivado, ou seja, você sempre quer ir à escola?
i) ( ) Sim, sempre quero ir à escola.
ii) ( ) Às vezes quero ir à escola.
iii) ( ) Não, nunca quero ir à escola.

21. E em relação às aula de matemática, você se sente motivado, ou seja, você sempre quer ir às aulas de matemática?
i) ( ) Sim, sempre quero ir nas aulas.
ii) ( ) As vezes quero ir nas aulas.
iii) ( ) Não, nunca quero ir as aulas.

22. Suas notas em matemática são sempre?
i) ( ) Melhores que as da turma.
ii) ( ) iguais as da turma.
iii) ( ) menores que a da turma.

23. Qual a matéria que você mais gosta?
Especifique:

24. Qual disciplina você eliminaria do currículo escolar?

Especifique:

Segunda parte
(Diagnóstico inicial em relação ao conteúdo sistemas lineares)

1. Você já estudou sistemas lineares?

i) ( )sim

ii) ( ) não

2. Em caso afirmativo, gostou do modo como seu professor introduziu o conteúdo?

i) ( ) Sim, gostei muito.

ii) ( ) Poderia ter sido melhor.

iii) ( ) Não gostei da forma como ele introduziu o conteúdo.

iv) ( ) Não sei como ele introduziu o conteúdo.

3. O seu professor começou o conteúdo com exemplos práticos do dia-a-dia?

i) ( ) Sim, ele iniciou com exemplos cotidianos.

ii) ( ) Não, ele já iniciou com a teoria.

iii) ( ) Não sei como ele começou o conteúdo.

4. O seu professor ensinou métodos de resolução de sistemas de equações 2x2?

i) ( ) Sim, ele ensinou.

ii) ( ) Não, ele não ensinou.

iii) ( ) Não sei responder.

5. Em caso afirmativo, você entendeu a explicação dele?

i) ( ) Sim, entendi.

ii) ( ) Não.

iii) ( ) Não sei responder.

6. O seu professor ensinou métodos de resolução de sistemas de equações 3x3?

i) ( ) Sim, ele ensinou.

ii) ( ) Não.

iii) ( ) Não sei responder.

7. Em caso afirmativo, você entendeu a explicação dele?
i) ( ) Sim, entendi.
ii) ( ) Não.
iii) ( ) Não sei responder.

8. O seu professor mostrou aplicações cotidianas de sistemas lineares 2x2 e 3x3?
i) ( ) Sim, ele mostrou aplicações cotidianas.
ii) ( ) Não, ele só ensinou a teoria.
iii) ( ) Não sei responder.

9. Em caso afirmativo, você entendeu o que ele explicou?
i) ( ) Sim, eu entendi.
ii) ( ) Não, eu não entendi.
iii) ( ) Não sei responder.

10. O seu professor ensinou métodos de resolução de sistemas de equações lineares com dimensões maiores que 3x3?
i) ( ) Sim, ele ensinou a resolver sistemas com dimensões maiores que 3x3.
ii) ( ) Não, ele não ensinou sistemas maiores que 3x3.
iii) ( ) Não sei responder.

11. Em caso afirmativo, você entendeu a explicação dele?
i) ( ) Sim, entendi.
ii) ( ) Não.
iii) ( ) Não sei responder.

12. Como você classificaria seu interesse pelo conteúdo de sistemas lineares?
i) ( ) Me interesso muito pelo conteúdo.
ii) ( ) Me interesso pelo conteúdo igual me interesso por todos os outros.
iii) ( ) Não me interesso pelo conteúdo.
iv) ( ) Não me interesso pelo conteúdo e nem por nenhum outro de matemática.

B Segundo Questionário

Diagnóstico final em relação as aulas ministradas durante a pesquisa

1. Você entendeu o conteúdo de sistemas lineares depois da aplicação das aulas da pesquisa?
i) ( )sim, entendi melhor o conteúdo.
ii) ( ) não, meu entendimento não mudou.
iii) ( ) Não sei responder.

2. Gostou de como o conteúdo foi introduzido nas aulas da pesquisa?
i) ( ) Sim, gostei muito.
ii) ( ) Poderia ter sido melhor.
iii) ( ) Não gostei da forma como ele introduziu o conteúdo.
iv) ( ) Não sei como ele introduziu o conteúdo.

3. Você achou interessante aprender métodos alternativos de resolução de sistemas lineares, entre eles: pivoteamento e métodos iterativos?
i) ( ) Sim, achei interessante.
ii) ( ) Não, achei desnecessário.
iii) ( ) Não sei responder.

4. Em caso afirmativo, você entendeu como resolver sistemas lineares nesses diferentes métodos analisados?
i) ( ) Sim, consegui aprender.
ii) ( ) Não, achei muito difícil.
iii) ( ) Não sei responder a essa pergunta.

5. Você achou interessante aprender métodos computacionais que auxiliam a resolução de sistemas lineares?
i) ( ) Sim, achei muito válido.
ii) ( ) Não, achei desnecessário.
iii) ( ) Não sei responder.

6. Em caso afirmativo, você entendeu como resolver sistemas lineares nos softwares analisados?
i) ( ) Sim, consegui aprender.
ii) ( ) Não, achei muito difícil.
iii) ( ) Não sei responder a essa pergunta.

7. Na sua opinião, as aplicações de sistemas lineares de maiores dimensões estudadas contribuiriam para sua motivação nas aulas de matemática?
i) ( ) Sim, seriam mais motivadoras as aulas.
ii) ( ) Talvez, acho que poderia melhorar um pouco as aulas.
iii) ( ) Não, minha motivação não mudaria.
iv) ( ) Não sei responder.

8. E os métodos computacionais e iterativos abordados, contribuiriam para sua motivação nas aulas de matemática?
i) ( ) Sim, seriam mais motivadoras as aulas.
ii) ( ) Talvez, acho que poderia melhorar um pouco as aulas.
iii) ( ) Não, minha motivação não mudaria.
iv) ( ) Não sei responder.

9. Como você classificaria seu interesse pelo conteúdo de sistemas lineares depois da aplicação das aulas da pesquisa?
i) ( ) Me interesso muito pelo conteúdo.
ii) ( ) Me interesso pelo conteúdo igual me interesso por todos os outros.
iii) ( ) Não me interesso pelo conteúdo.
iv) ( ) Não me interesso pelo conteúdo e nem por nenhum outro de matemática.

10. Como você classificaria seu interesse pela matemática depois da aplicação das aulas da pesquisa?
i) ( ) Me interesso muito pela disciplina.
ii) ( ) Me interesso pela disciplina igual me interesso por todas as outras.
iii) ( ) Não me interesso pela matemática.

1 Anexo- Fotos

Figura 31: Alunos respondendo o questionário inicial e utilizando o SciLab

Figura 32: Alunas resolvendo as aplicações e utilizando o SciLab

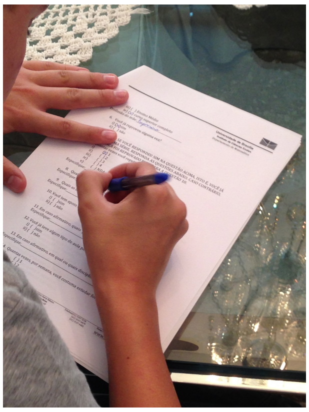


Figura 33: Aluno respondendo o questionário inicial

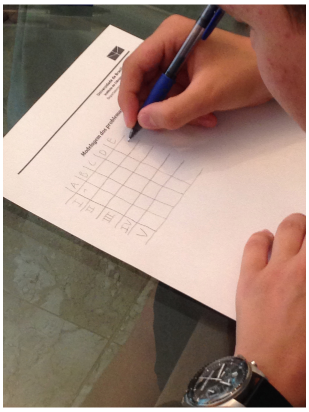


Figura 34: Aluno montando o sistema linear da Aplicação 1

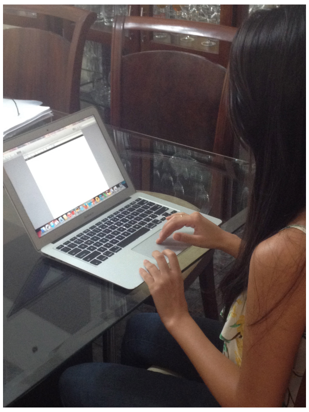


Figura 35: Aluna resolvendo o sistema linear da Aplicação 1 no SciLab

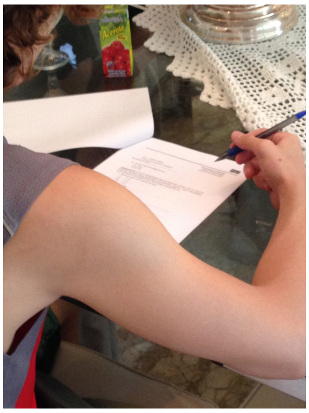


Figura 36: Aluno respondendo o questionário final

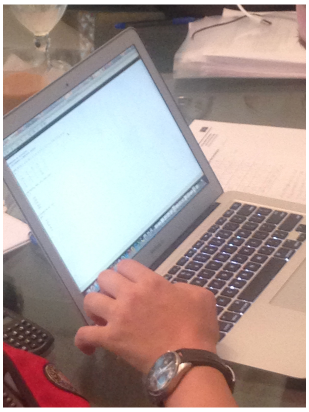


Figura 37: Aluno respondendo a Aplicação 2 utilizando o SciLab

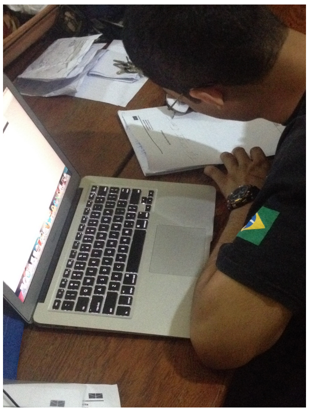


Figura 38: Aluno modelando e respondendo a Aplicação 3 utilizando o SciLab

Figura 39: Aluna respondendo a Aplicação 5