Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Matemática na Música
A Escala Cromática e as Progressões Geométricas

Alexandre Carlos da Silva Teixeira

Catalão

2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Alexandre Carlos da Silva Teixeira
E-mail:	alexandre_cst@yahoo.com.br
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Educação de Goiás
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Sigla: CAPES
País: Brasil	UF: DF — CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título:	Matemática na Música A Escala Cromática e as Progressões Geométricas
Palavras-chave:	Música, Matemática, Escala Cromática e Progressões Geométricas.
Título em outra língua:	Mathematics in Music Chromatic Scale and Geometric Progressions.
Palavras-chave em outra língua:	Music, Mathematics, Chromatic Scale and Geometric Progressions.
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	26/06/2015
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Orientador (a):	Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
E-mail:	rocha.ufg@gmail.com
Co-orientador(a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Alexandre Carlos da S. Teixeira
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 06/07/2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Alexandre Carlos da Silva Teixeira

Matemática na Música
A Escala Cromática e as Progressões Geométricas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro

Catalão

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Teixeira, Alexandre Carlos da Silva
Matemática na Música [manuscrito] : A Escala Cromática e as Progressões Geométricas / Alexandre Carlos da Silva Teixeira. - 2015.
LXXVIII, 78 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Matemática. 2. Música. 3. Escala Cromática. 4. Progressões Geométricas. 5. Instrumentos Musicais. I. Ribeiro, Márcio Roberto Rocha, orient. II. Título.

Alexandre Carlos da Silva Teixeira

Matemática na música: a escala cromática e as progressões geométricas

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de Junho de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias de Goiás – IFG

Prof. Dr. Marcelo Henrique Stoppa
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Alexandre Carlos da Silva Teixeira graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - Catalão e, especializou-se em "Educação Infantil, Alfabetização e Letramento", e "Psicopedagogia Institucional e Clínica", ambas pela Faculdade Brasileira de Educação e Cultura. É professor efetivo na Educação Básica, onde leciona Matemática desde 2005.

...

Dedico este trabalho primeiramente a Deus e, posteriormente a minha mamãe Nilza Pires dos Santos Teixeira, juntamente à minha esposa Edilaine Pereira Cassiano e filhos, Antônio Carlos Pires Cassiano e Emanuel Carlos Pires Cassiano, pois sem o auxílo e compreensão por parte dos mesmos, não seria possível a conclusão deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS.

Aos meus familiares e amigos próximos que sempre me apoiaram nesta jornada.

Aos meus colegas do mestrado, que sempre me auxiliaram nas dificuldades encontradas no decorrer do curso.

Aos professores e tutores, que com exímia sabedoria souberam transmitir os conhecimentos necessários para o término deste curso.

Em destaque, ao professor Márcio Roberto Rocha Ribeiro, que tornou possível a conclusão deste trabalho.

À Capes, pelo suporte financeiro dado ao longo do curso.

Resumo

Este trabalho traz uma proposta de estudos da relação existente entre a Matemática e a Música, relação esta que foi estabelecida desde os primórdios da humanidade, e pôde ser observada de forma mais clara a partir dos estudos desenvolvidos por Pitágoras. Abordamos a evolução da Música no contexto histórico e introduzimos as noções básicas de teoria musical, essencial ao estabelecimento de relações com a Matemática. Nossos esforços foram focados nos instrumentos com cordas, pelos quais apresentamos uma relação entre uma escala musical, denominada Cromática, e as progressões geométricas; também apresentamos uma relação entre intervalos musicais e os triângulos retângulos. Apresentamos uma relação matemática entre a Música e as cores, por meio de suas respectivas frequências de som e luz. Também abordamos a matemática presente na construção de alguns instrumentos com cordas, via Proporção Áurea, e finalizamos o trabalho apresentando algumas propostas de atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula, voltadas para alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave

Música, Matemática, Escala Cromática, Progressões Geométricas, Instrumentos Musicais, Trastes do Violão, Cores e Luz, Proporção Áurea.

Abstract

This paper presents a proposal for relationship studies between mathematics and music, a relationship that has been established since the dawn of humanity, and could be seen more clearly from the studies developed by Pythagoras. We approach the evolution of music in the historical context and introduce the basics of music theory, essential to establishing relationships with mathematics. Our efforts were focused on instruments with strings, by which present a relationship between a musical scale, called Chromatic and geometric progressions; also we present a relationship between musical intervals and right triangles. We present a mathematical relationship between music and colors, through their respective frequencies of sound and light. Also we address the present mathematics in the construction of some instruments with strings, via Golden Proportion, and finished the work presented some proposals for activities that can be worked in the classroom, aimed at high school students.

Keywords

Music, Mathematics, Chromatic Scale, Geometric Progressions, Musical Instruments, The Guitar Frets, Colors and Lights, Golden Proportion.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Desde as mais antigas manifestações humanas percebe-se uma estreita relação entre música e matemática, como por exemplo, quando Pitágoras estica uma corda e analisa o som produzido através da vibração desta em função de um deslocamento aplicado. Pitágoras provou que considerando metade da corda, a vibração gera um som com tonalidade igual àquela produzida com a corda inteira, mas uma oitava acima, ou seja, com o som mais agudo. Ao testar novas divisões, Pitágoras descobriu que as principais consonâncias (combinações de sons mais agradáveis) eram as oitavas, as quartas e as quintas, que correspondem às divisões exatas da corda esticada em um arco e são a base da harmonia para instrumentos de cordas. Posteriormente, Pitágoras associou números ao comprimento da corda, associando o número 1 com a corda inteira, $\frac{1}{2}$ com a metade da corda, $\frac{1}{3}$ a um terço da corda e assim por diante. Como mostra esta experiência, a relação entre música e matemática é muito mais evidente do que imaginamos e pode ser vista como uma forma de descrever a natureza e de desenvolvimento da ciência.

Neste contexto, este trabalho propõe o estudo de algumas das diversas formas que relacionam a matemática e a música, inseridas num contexto histórico, avaliando as possibilidades de tratamento musical com ajuda da matemática formal.

Considerando-se as várias interseções entre a teoria matemática e a teoria musical destacam-se os seguintes fatos, de acordo com Ortolon (2011):

No século XI, o italiano Guido d'Arezzo desenvolveu um algoritmo que substituía as letras (vogais) por notas musicais, no canto eclesiástico. Para cada vogal era associada uma nota. Este foi o primeiro algoritmo conhecido na história da música. O algoritmo é fundamental para a concepção de música computacional, a qual usa algoritmos bem mais complexos do que aqueles usados por d'Arezzo.

No século XVII, o astrônomo Kepler, em seu livro "A Harmonia dos Mundos", estabelecia uma profunda relação entre a matemática, a música e a natureza. Kepler associava a posição dos planetas e de suas órbitas com números relacionados com as escalas musicais, de modo que, cada planeta possuía uma tonalidade musical e a movimentação em conjunto dos planetas produzia uma "melodia celeste". Ao elaborar a sua Lei Harmônica, ele estabeleceu uma relação correta entre os períodos das órbitas dos planetas e as suas distâncias do Sol.

Os grandes compositores da música clássica universal também se valiam da matemática. No período Barroco, Bach aplicou os princípios de simetria em suas composições, as quais tinham características claras de raciocínio matemático. Posteriormente, Mozart, apesar da sua forma intuitiva de criar, criou um sistema chamado atualmente de "Jogos de Dados de Mozart", que aplicava os princípios de probabilidade para organizar e construir temas musicais.

No início do século XX, foi com o desenvolvimento da eletrônica, que a associação entre a música e a matemática passou a aparecer mais intensamente. Os compositores Milton Babbit e Allen Fort desenvolveram pesquisas usando conceitos de Lógica e Teoria dos Conjuntos para formalizar tipos de processos de criação musical.

A partir de 1945, com o final da Segunda Guerra, compositores como Stockhausen, Karl Heins e Hebert Eimert, passaram a fazer experiências com sons eletrônicos e criaram um estúdio na cidade de Colônia na Alemanha. A partir desta época, várias tendências se abriram para a música eletrônica, com o uso de sons sintetizados, filtros de ondas sonoras e produções transformadas eletronicamente.

A relação entre matemática e música ficou ainda mais íntima com o desenvolvimento dos computadores. Em 1957, foi criada a primeira música com a utilização de um computador como objeto de criação musical. Foi um marco histórico comparado à invenção do algoritmo de substituição de letras por notas, feito nove séculos antes por Guido d'Arezzo.

Outros exemplos do século XX mostram novas aplicações da matemática na música, como o compositor Iannis Xenakis, que escreveu o livro "Formalized Music", onde descreve e discute várias estruturas matemáticas como princípios de organização do som e composição musical. Por exemplo, Xenakis usava os Processos de Markov para fazer o controle de massas sonoras evoluindo no tempo. Os Processos de Markov pertencem a uma área da matemática que estuda os Processos Probabilísticos e Controle Temporal, para determinar um próximo passo de um sistema físico através de uma distribuição de probabilidade.

Mais recentemente, Valder Steffen Jr. e Romes Antônio Borges, aplicaram algoritmos genéticos como ferramenta de otimização na busca de novas composições a partir de uma canção conhecida.

Neste trabalho apresentamos inicialmente, no Capítulo 2, um breve histórico da música, envolvendo a evolução da notação musical e da origem dos nomes das notas musicais.

No Capítulo 3, com o intuito de permitir um melhor entendimento do capítulo seguinte, é apresentada uma introdução à teoria musical formal contemporânea.

O Capítulo 4 apresenta um paralelo entre a escala cromática e as progressões geométricas, culminando num processo prático para a determinação da distância entre os trastes de instrumentos musicais.

Posteriormente, no Capítulo 5, mostramos como relacionar, as frequências de notas com as frequências de luzes no espectro visível ao ser humano.

No Capítulo 6, ao mostrar a importância da Proporção Áurea, apresetamos como alguns instrumentos são construídos através desta porporção.

Uma proposta de atividade com os alunos das 1ª séries do Ensino Médio, apresentada no Capítulo 7, afim de que esta seja uma importante ferramenta no processo de ensino/aprendizagem dos alunos, no estudo de progressões geométricas.

Finalmente, seguem as considerações finais e a bibliografia deste trabalho.

2 Evolução da Música

2.1 Breve Histórico da Música

Segundo Ortolan (2011), uma tarefa verdadeiramente complicada é dizer precisamente quando nasceu a música, uma vez que não existem relatos confiáveis sobre as primeiras manifestações musicais. As observações sobre os artefatos e desenhos primitivos encontrados nas pesquisas arqueológicas, conduzem à dedução de que o homem das cavernas usava a música para presentear seus deuses. A música de maneira geral era associada à dança, as quais, juntas, assumiam um caráter ritualístico.

O que se supõe, de acordo com Stoppa e Teixeira (2004), é que o ritmo tomava corpo com o bater cadenciado de mãos e pés, para celebrar vitórias na guerra, descobertas, etc. Posteriormente, o homem primitivo em vez de usar só as mãos e os pés, ritmavam suas danças com pancadas na madeira, e depois as trabalhavam para soarem de forma diferente, propiciando o surgimento de um tipo primitivo de instrumento de percussão.

Com o passar do tempo, eles passariam a utilizar suas gargantas de um modo diferente para emitir sons, aparecendo ali, uma forma rudimentar de canto a qual juntamente com o ritmo, resultaria numa mistura de palmas, roncos, pulos, uivos, batidas e berros.

Diante dos atuais conceitos musicais, essas manifestações teriam sido muito pobres para entrarem numa categoria musical. Porém, numa contextualização histórica, elas foram muito importantes para o surgimento da música.

Com o passar do tempo, a música foi evoluindo, através da evolução das notações, o desenvolvimento dos instrumentos, que na maioria das vezes, eram criados e produzidos com motivação religiosa.

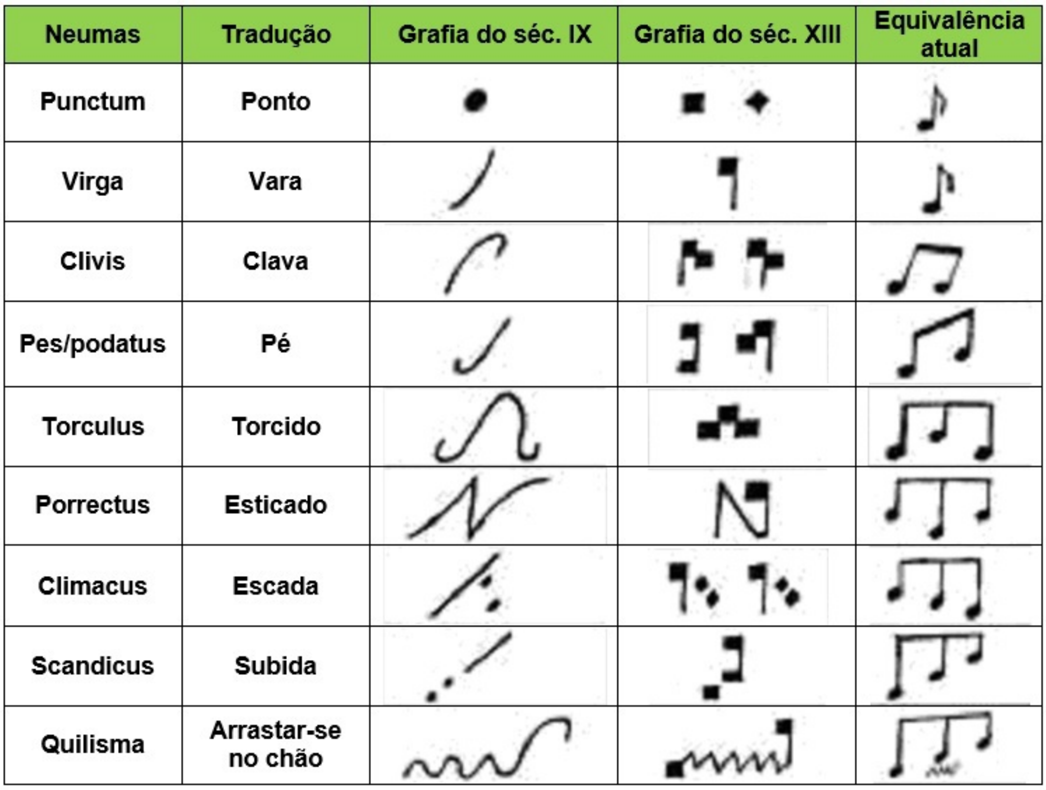
Assim, a música evoluiu de simples roncos e palmas a uma teoria musical, incluindo a música computacional, amplamente utilizada nos dias de hoje.

2.2 Evolução da Notação Musical

Os povos antigos (gregos, romanos e hebreus) procuravam na escrita uma forma de representação musical. Para tanto, vários tipos de sistema de escrita musical foram experimentados. Uma das tentativas, segundo Bordini (2005), ocorreu por volta dos séculos IV e V, com abreviações de expressões latinas para cantar a mesma altura, um tom acima, um tom abaixo, etc.

No princípio do século VII foram acrescentados no texto a ser cantado, sinais derivados da gramática grega: / \ ∧

Estes sinais, segundo Bordini (2005), receberam o nome neumas ("ar"em grego). Os neumas ajudavam o cantor a se lembrar da direção da melodia, mas não indicavam com precisão as notas. Os neumas foram se desenvolvendo graficamente do século IX ao XIII, da seguinte forma:



Neumas	Tradução	Grafia do séc. IX	Grafia do séc. XIII	Equivalência atual
Punctum	Ponto			
Virga	Vara			
Clivis	Clava			
Pes/podatus	Pé			
Torculus	Torcido			
Porrectus	Esticado			
Climacus	Escada			
Scandicus	Subida			
Quilisma	Arrastar-se no chão			

Figura 1: Desenvolvimento dos Neumas

Fonte: `http://www.movimento.com/2011/09/historia-da-musica-ocidental/`

Para indicar a altura exata, utilizava-se letras do alfabeto latino, entre os neumas e o texto, pelo menos na primeira nota. Depois, utilizou-se uma linha horizontal vermelha, para um tom central, para o qual foi escolhido o fá (abaixo do dó central), que é uma boa altura para a voz masculina. Mais tarde, colocou-se uma outra linha de cor amarelo ou verde, sobre a anterior para indicar o dó central.

No século X, de acordo com Bordini (2005), o monge italiano Guido D'arezzo (991-1033), criou o tetragrama, ou conjunto de quatro linhas, todas em vermelho. As duas linhas que foram acrescentadas, eram colocadas uma entre as duas antigas e a outra acima ou abaixo das outras duas antigas.

Somente no século XII, o pentagrama (que são as atuais cincos linhas), foi utilizado a fim de escrever as primeiras músicas polifônicas, canções e danças consideradas profanas, e no século XVI, surgiram as linhas e espaços suplementares.

Mais tarde, houve a necessidade de usar as claves ("chaves"em latim), para determinar as alturas e também abolir a coloracão de cada linha com uma cor diferente. A grafia medieval e atual das claves podem ser observadas a seguir:

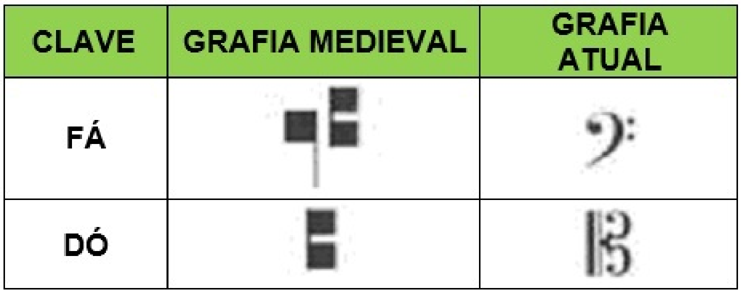


Figura 2: Desenvolvimento da grafia das claves de FÁ e DÓ

Fonte: `http://www.movimento.com/2011/09/historia-da-musica-ocidental/`

É importante ressaltar que a clave de SOL, amplamente utilizada nos dias de hoje, só surgiu em meados do século XIV.

2.3 Origem dos Nomes das Notas e Componentes Musicais

Havendo a necessidade de distinguir as notas musicais, as mesmas foram representadas inicialmente, por letras do alfabeto, sendo elas: A, B, C, D, E, F e G.

Mais tarde o monge Guido D'Arezzo, criador do pentagrama, procurando facilitar a memorizacão das melodias, adotou outros nomes para as notas (pois eram representadas por letras).

A inspiração surgiu, segundo Bordini (2005), quando ao pesquisar centenas de cânticos, e observar que havia um em louvor a São João Batista (Santo dos músicos), contendo versos que começavam com alturas diferentes e cada um superior ao anterior.

Assim, ele trocou as letras pelas primeiras sílabas de cada verso, como pode ser observado na figura abaixo:

Figura 3: Partitura do Cântico em louvor a São João Batista

Fonte: `http://musica.ufma.br/bordini/not_mus/hist.htm#N7`

ORIGINAL	TRADUÇÃO LIVRE	TRADUÇÃO LITERAL
Utqueant laxis	DOce, sonoro	Para que os servos
REsonare fibris	REssoe o canto	Possam fazer ressoar com
MIra gestorum	MInha garganta	As fibras cansadas as
FAmuli tuorum	FAça o pregão	Coisas maravilhosas dos
SOLve polluti	SOLta-me a lingua	Teus gestos, dissolve a
LAbii reatum	LAva-me a culpa	Condenação do lábio
Sancte Ioannes	Ó São João!	Manchado, ó São João!

Figura 4: Cântico em louvor a São João Batista

Fonte:

`http://orquestrainfantil.blogspot.com.br/p/informacoes-adicionais.html`

Vale ressaltar que o nome da nota SI, surgiu no final do século XV, com as iniciais do Santo homenageado, **S**ancte **I**onnes.

A nota **DÓ** usada atualmente, era **Ut** e foi modificada de **Ut** para **DÓ**, pelo compositor e teórico italiano Giovanni Battista Doni (1595-1647), que utilizou a primeira sílaba de seu nome **DO** (Doni), para facilitar o solfejo no idioma de seu país.

Na mesma época, com a necessidade de rebaixar em meio tom o SI, a fim de evitar o trítono, surgiram os nomes dos acidentes.

A letra minúscula b era escrita acima da pauta, chamado de **be molle** (b suave, b macio, em latim) ou **be rotundum** (b redondo). Quando se desejava o SI natural, escreviam-no de forma quadrada, B, o qual recebia o nome de **be quadratum** (b quadrado) ou **be durum** (b duro). Com os frequentes rebaixamentos das outras notas, e suas respectivas voltas ao natural, estas expressões se universalizaram.

O **sustenido** (elevado, em latim), decorre da mesma necessidade em relação ao trítono, mas elevando-se em meio tom a nota Fá. Na época, era colocada acima da nota uma cruz. Depois, seguindo os passos do bemol, todas as outras notas puderam ser "sustenizadas". O uso sistemático dos acidentes só se deu no século XVII.

A grafia das durações (tempo de execução ou não-execução de uma nota), naquele momento não era uma preocupação fundamental dos padres, e só foi desenvolvida a partir do século XIII, adaptada dos antigos neumas.

3 Teoria Musical

3.1 Introdução

A música, segundo Lacerda (1966), pode ser vista como uma arte ou ciência de combinação dos sons de modo agradável aos ouvidos. De maneira usual, pode ser composta por quatro propriedades:

a) **Duração**: tempo de produção do som;
b) **Intensidade**: define se o som é fraco ou forte;
c) **Altura**: os graves e os agudos;
d) **Timbre**: é a diferenciação dos diversos sons.

3.2 Notação Musical

A música é representada por figuras ou sinais chamados notas, as quais variam de acordo com a duração do som, e recebem nomes distintos, como pode ser observado na tabela da Fig. 5 abaixo:

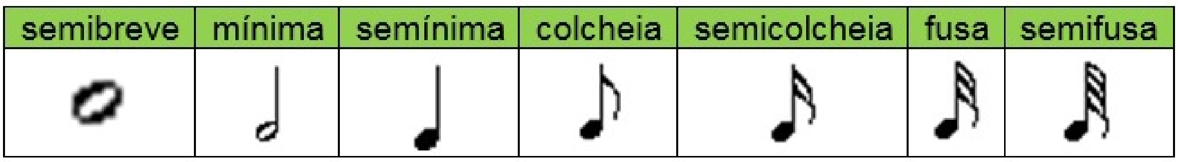


Figura 5: Figuras Musicais e seus respectivos nomes

Fonte: Adaptada de `http://magiadamusica.webnode.pt/figuras-musicais/`

As figuras musicais (ou notas), de acordo com Lacerda (1966), são escritas no pentagrama, que é um conjunto de cinco linhas horizontais, formando entre elas quatro espaços. Acrescenta-se também ao pentagrama, quando necessário, linhas e espaços superiores e inferiores, conforme se observa na Fig. 6.

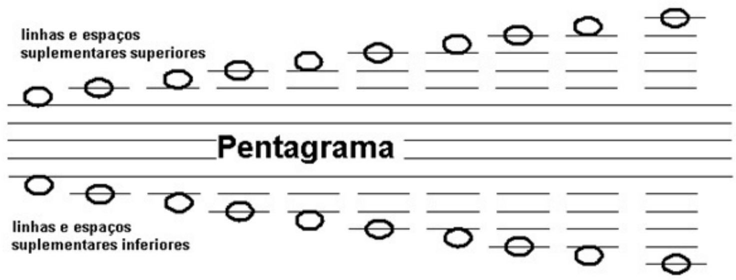


Figura 6: Pentagrama com linhas suplementares inferiores e superiores

Fonte: Adaptada de

http://www.guitarx.blogger.com.br/2003_10_26_archive.html

3.3 As Claves e as Notas Musicais

São sete as notas musicais: DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ e SI. Mas para que as notas recebam nome no pentagrama, é necessário a clave. Existem diversas claves que foram utilizadas com o decorrer da evolução da notação musical, sendo que as mais usuais, são a clave de FÁ na quarta linha e a clave de SOL, as quais determinam a posição, respectivamente das notas FÁ na quarta linha e SOL na segunda linha. Cada clave é representada por um sinal, indicado no início do pentagrama, conforme indicado na Fig. 6. As demais notas são distribuídas no pentagrama de forma usual tanto ascendente quanto descendente, obedecendo a posição das notas que dão nome às claves, como também pode ser vista na Fig. 7.

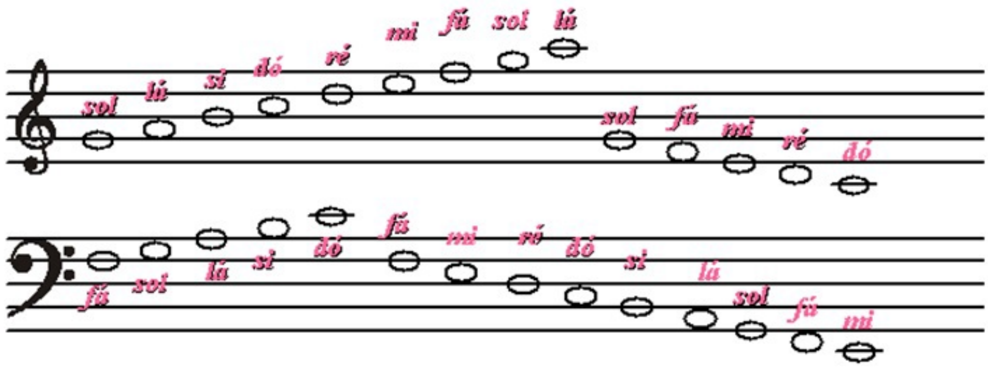


Figura 7: Disposição das notas musicais nas Claves de SOL e FÁ, respectivamente

Fonte: Adaptada de http://www.cifraclub.com.br

Cada figura representativa da nota indica a duração do som. De acordo com Lacerda (1966), quando se quer representar o silêncio numa melodia, existem sinais especiais correspondentes a cada uma destas figuras. Assim, para a semibreve, existe a pausa de semibreve, para a mínima, existe a pausa de mínima e assim por diante como pode ser observado na Fig. 8 abaixo:

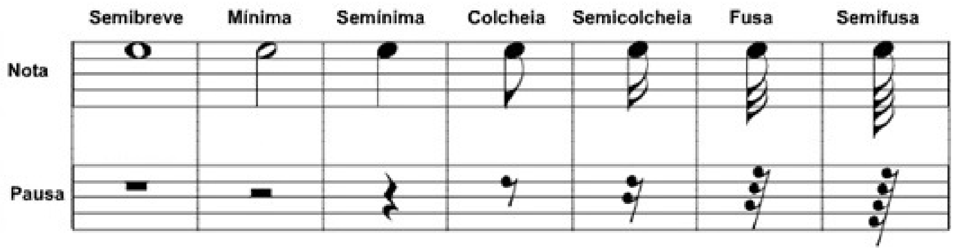


Figura 8: Correspondência entre notas e pausas

Fonte: `http://proascg3.pbworks.com/w/page/18659126/TEMPO%20DAS%20NOTAS`

Estes símbolos indicam o tempo de execução (ou não, no caso das pausas) de cada nota. Começando da semibreve, que é a que tem maior duração, cada um dos símbolos tem duas vezes o tempo de duração do seguinte, conforme comparativo a seguir:

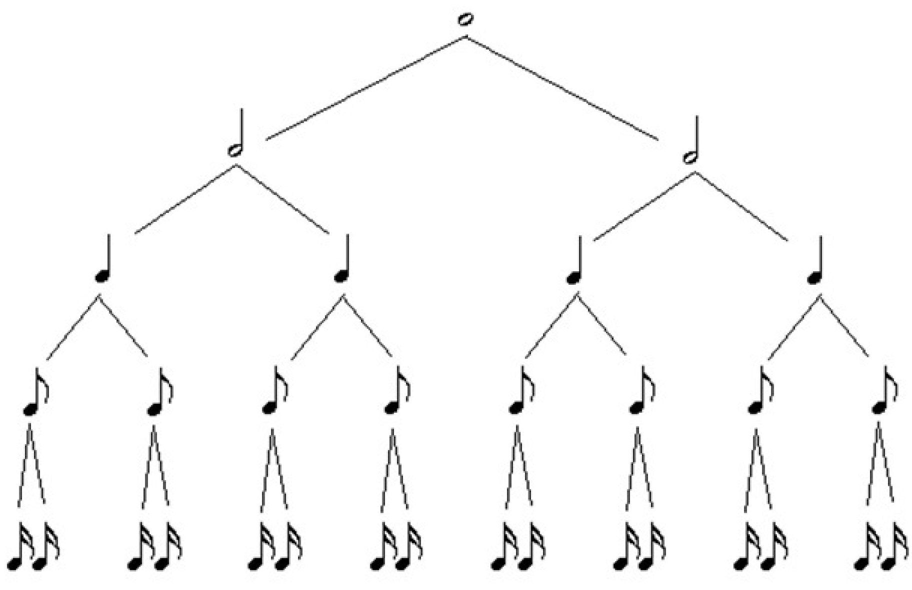


Figura 9: Equivalência entre as notas musicais

Fonte: Método Musical Paschoal Bona

3.4 Pontos de Aumento e Ligaduras

Existem algumas maneiras de aumentar o valor de uma nota ou pausa, merecendo destaque os três casos abaixo:

a) **Ligadura**: é uma linha curva que une duas notas da mesma altura, somando as suas durações:

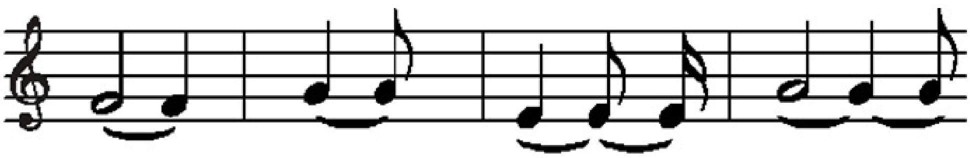


Figura 10: Exemplos de ligadura

Fonte: Método Musical Paschoal Bona

b) **Ponto de aumento**: é um ponto que se indica à direita da nota para aumentar metade de seu valor:

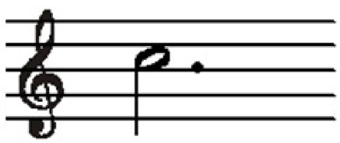


Figura 11: Exemplo de Ponto de Aumento

Fonte: Método Musical Paschoal Bona

c) **Fermata**: é um sinal que se coloca sobre a nota ou pausa para sustentá-la por um tempo que o músico achar adequado:

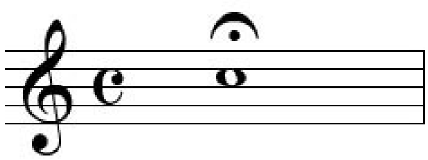


Figura 12: Exemplo de Fermata

Fonte: Método Musical Paschoal Bona

3.5 Compassos

Compasso é a divisão da música em pequenas partes de duração igual ou variável, que são classificados em simples e compostos. Os compassos são separados por barras verticais. Na Fig. 13, observa-se um exemplo de compasso:

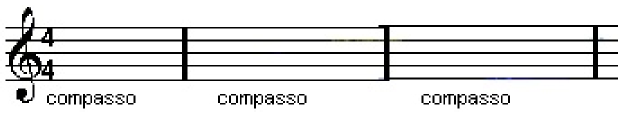


Figura 13: Exemplo de Compasso

Fonte: Método Musical Paschoal Bona

3.6 Tons e Semi-tons

Na música existem intervalos de um som para outro, usualmente considera-se que um semi-tom é o menor intervalo entre dois sons consecutivos quaisquer, sendo que um tom é a soma de dois semi-tons.

Por exemplo, em um piano a diferença entre qualquer tecla preta e uma branca adjacente é um semi-tom.

3.7 Sinais de Alteração (acidentes)

Sinais de Alteração ou Acidentes Musicais, são sinais que são utilizados para modificar a entonação de uma nota, ou no caso das escalas, quando colocados juntos às claves, indicam que todas as notas naquela linha ou posição que eles foram colocados, durante a execução musical devem sofrer a alteração por eles indicada.

Os Acidentes Musicais são:

a) **Sustenido**: aumenta a nota em um semi-tom.

b) **Bemol**: diminui a nota em um semi-tom.

c) **Dobrado Sustenido**: aumenta a nota em um tom.

d)**Dobrado Bemol**: diminui a nota em um tom.

e) **Bequadro**: anula o efeito do sustenido e/ou do bemol em uma nota.

Figura 14: Acidentes Musicais

Fonte: `http://www.baixista.com.br/artigos/didatica/leitura-musical-ii`

3.8 Escala Cromática

Escala, segundo Bona (1998), é uma sucessão de oito notas ordenadas de acordo com suas frequências, do grave para o agudo (ascendente) ou do agudo para o grave (descendente), que pode ser reproduzida de forma arbitrária.

Assim, uma escala é composta pelas notas (dó, ré, mi, fá, sol, lá, si) havendo repetição de uma delas, mantendo-se esta ordem. Exemplos: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó ou ré, mi, fá#, sol, lá, si, dó#, ré. A nota em que começa a escala é chamada tônica. Veja na Fig. 15 dois exemplos de escalas em um pentagrama.

Figura 15: Exemplos de Escala

Fonte: `http://erices.uphero.com/?page_id=142`

De acordo com Lacerda (1966), as escalas podem ser classificadas em cromática ou diatônica:

i) **Escala Cromática** é uma escala em que as notas são ordenadas sucessivamente apenas por semitons.

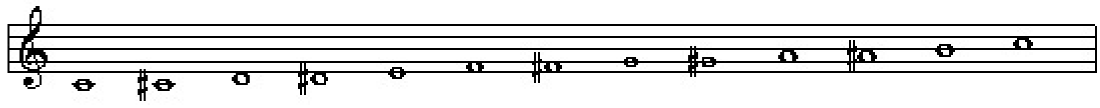


Figura 16: Escala Cromática ascendente de DÓ

Fonte: Método Musical Paschoal Bona

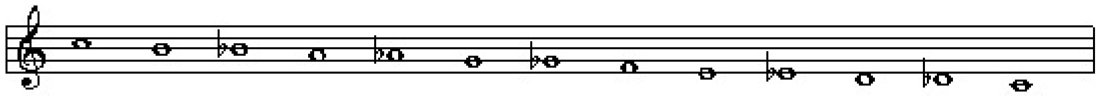


Figura 17: Escala Cromática descendente de DÓ

Fonte: Método Musical Paschoal Bona

ii) **Escala Diatônica** é uma escala em que as notas são ordenadas sucessivamente por tons e semitons.

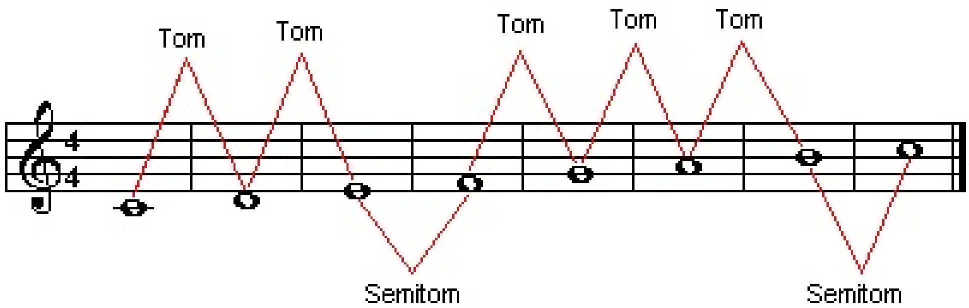


Figura 18: Exemplo de escala diatônica

Fonte:

http://musicaeadoracao.com.br/26178/aulas-de-teoria-musical-aula-07/

A teoria musical é bastante extensa e não é o objetivo deste trabalho ressaltar todos os aspectos desta teoria minuciosamente.

Assim, este capítulo vem apenas familiarizar o leitor com os jargões usuais básicos da teoria musical, facilitando a leitura e compreensão dos capítulos seguintes.

4 A Matemática nos Instrumentos com Cordas

Neste capítulo abordamos alguns tópicos sobre a estreita relação entre a Matemática e a Música observada sobre os instrumentos com cordas, em específico violões e similares.

4.1 Pitágoras e os Instrumentos com Cordas

Pitágoras, filósofo e matemático grego, teve uma grande contribuição no desenvolvimento da música e, em particular, na construção de instrumentos com cordas.

Segundo Soares (2005), Pitágoras teria observado os sons produzidos por martelos de diferentes pesos em uma oficina de ferreiro, e estes sons proporcionavam uma sensação agradável possuindo uma harmonia entre si. Tais martelos teriam pesos diferentes e, através desta observação colocou tais pesos sobre cordas iguais e observou que se produziam os sons consonantes correspondentes.

Figura 19: Pitágoras utilizando pesos em cordas

Fonte: `http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/noticia.php?artigo=codigo-secreto-platao#.VZIIdUauj-B`

Antes de proseguirmos, **ressaltamos o significado das oitavas, quartas e quintas:** Na música alguns intervalos de uma escala tem nomes específicos, como a relação de $\frac{1}{1}$ que é chamada de uníssono, de $\frac{1}{2}$ que é chamada de oitava, $\frac{2}{3}$ de quinta e $\frac{3}{4}$ de quarta. Em geral, a oitava é tida como intervalo de referência na formação das escalas e os outros intervalos são subdivisões da mesma.

Prosseguindo, Pitágoras estabeleceu uma genial relação existente entre a harmonia musical e os números. Pitágoras teria esticado uma corda musical que produzia um determinado som que tomou como fundamental, o tom. Fez marcas na corda que a dividiam em doze secções iguais, este instrumento mais tarde seria chamado de monocórdio, o qual se assemelha a um violão, mas com apenas uma corda.

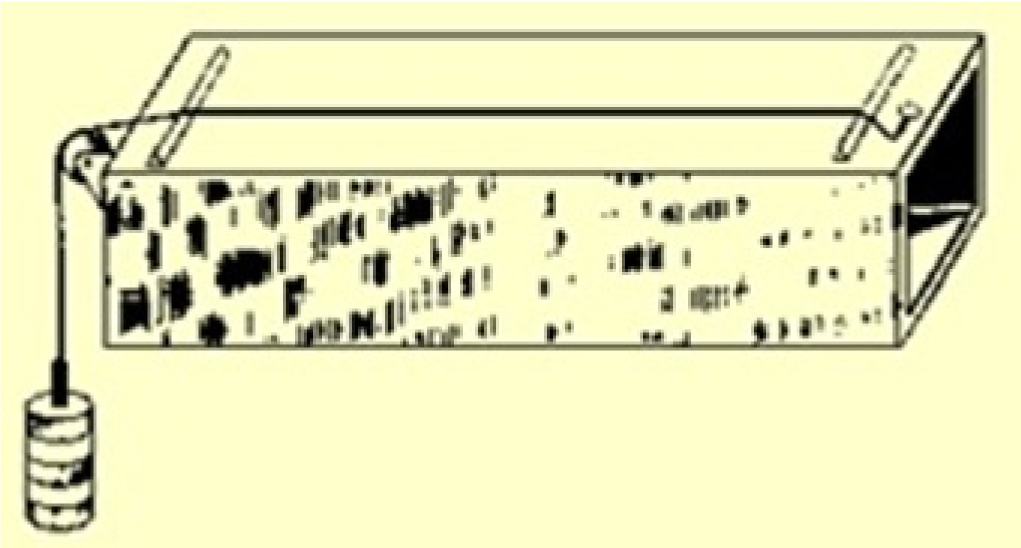


Figura 20: Monocórdio

Fonte: `http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Lucas-Soares/monocordio%20de%20pitagoras.html`

Pitágoras ao tocar a 6ª marca (correspondente a $\frac{1}{2}$ do comprimento da corda), observou que se produzia a oitava, tocando a 9ª marca (correspondente a $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda) resultava a quarta e ao tocar a 8ª marca (correspondente a $\frac{2}{3}$ do comprimento da corda) resultava-se na quinta. Veja como seria nas figuras abaixo:

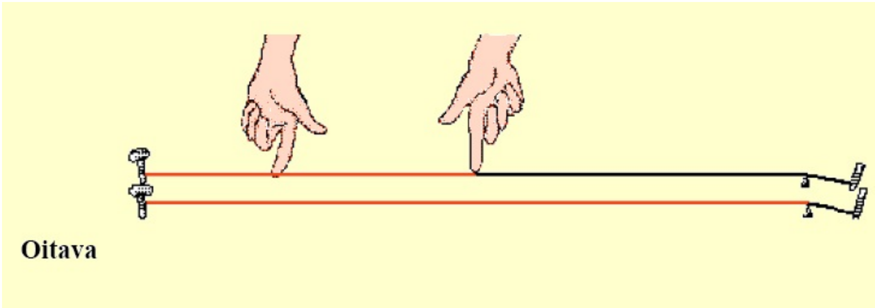


Figura 21: Oitava de Pitágoras

Fonte: `http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Lucas-Soares/monocordio%20de%20pitagoras.html`

Figura 22: Quarta de Pitágoras

Fonte: `http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Lucas-Soares/monocordio%20de%20pitagoras.html`

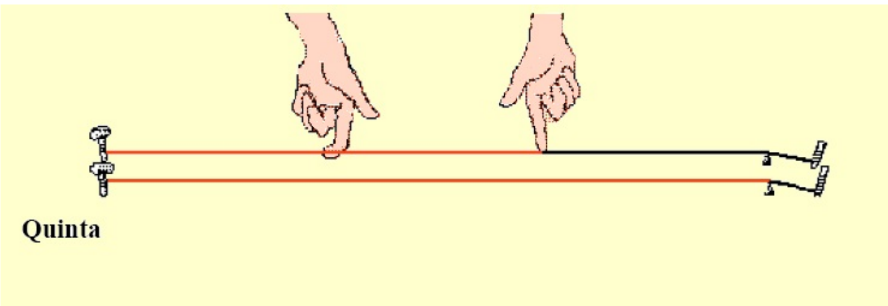


Figura 23: Quinta de Pitágoras

Fonte: `http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Lucas-Soares/monocordio%20de%20pitagoras.html`

Assim as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ correspondiam à oitava, à quarta e à quinta, respectivamente.

A observação feita por Pitágoras, pode ser ressaltada nos dias de hoje, em uma guitarra, já que posicionando o dedo na casa determinada pelos trastes 11 e 12, faz com que a corda que produz som, seja exatamente a metade do seu comprimento total sem dedo em qualquer casa, isto significa que esta metade, produzirá o dobro da frequência de vibração da corda "solta", tornando-se a mesma nota, mas uma oitava acima.

A frequência da nota, aumenta diretamente com a diminuição do comprimento da corda. Esta é uma parte matemática fundamental de todos os instrumentos de cordas.

Não cabe neste trabalho, detalhar como seriam encontradas as demais frações do comprimento da corda que produz as demais notas de uma corda de um instrumento com cordas. Mas, vale ressaltar que, sabe-se que partindo da razão definida para a quinta, ou seja $\frac{2}{3}$, determina-se o ciclo das quintas, obtendo então as outras frações, $\frac{8}{9}$, $\frac{64}{81}$, $\frac{16}{27}$ e $\frac{128}{243}$, como ilustrado na Fig. 24.

Observe na Fig. 24 a seguir, que os comprimentos da cordas determinados pelos trastes da guitarra, podem ser encontrados por frações, como Pitágoras observou.

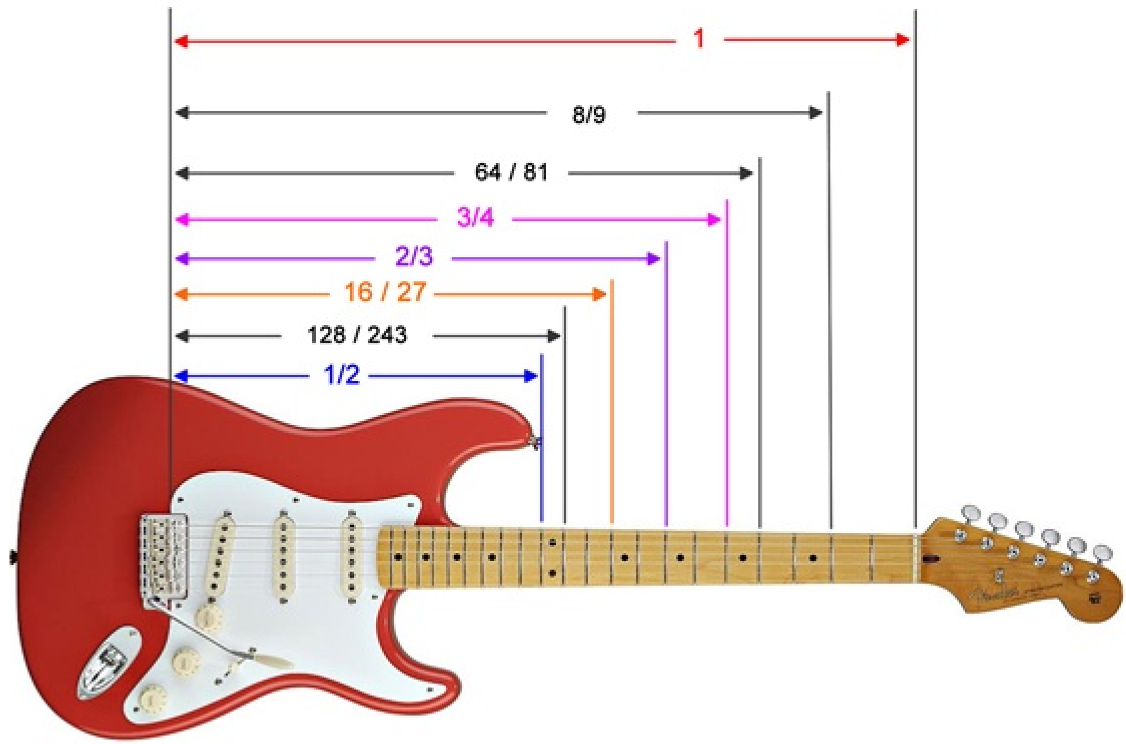


Figura 24: Proporções de Pitágoras em uma Guitarra

Fonte: `http://passyworldofmathematics.com/guitar-mathematics/`

4.2 A Escala Cromática e as Progressões Geométricas

4.2.1 Intervalos

O ser humano pode detectar uma faixa de áudio em torno de 10 oitavas, ou seja, numa faixa de 20 Hz a 20000 Hz. Na música ocidental mais recente, utiliza-se escalas cromáticas, lembrando que estas possuem 12 intervalos musicais.

A respeito de intervalo musical, a grande pergunta é a seguinte: É possível estabelecer um valor numérico para o mesmo em uma ou mais oitavas?

Na escala cromática a frequência da tônica ao ser multiplicada sucessivas vezes por um valor i, resulta no dobro de sua frequência inicial, pois em uma oitava, após 12 semitons a frequência dobra. Assim, denotando o tamanho de um semiton por i, e $f_{inicial}$ como a frequência da tônica, têm-se:

$$f_{inicial}.i^{12} = 2.f_{inicial}$$

$$i^{12} = 2$$

$$i = \sqrt[12]{2}$$

$$i \approx 1,0594631$$

Mas como determinar o valor numérico para o intervalo entre duas notas distintas separadas por uma ou mais oitavas?

Inicialmente, determina-se se as notas estão em uma mesma oitava ou não. Para isso utiliza-se a equação abaixo, que é dada pelo logarítmo na base dois da razão entre as frequências das notas (utiliza-se logarítmo na base dois, pelo fato de que a cada oitava a frequência de uma nota dobra):

$$log_2 \left(\frac{f_{final}}{f_{inicial}} \right) = x$$

onde x é o número de oitavas que separam as duas notas relacionadas com suas respectivas frequências.

Deste modo, se $0 < x \leq 1$, então as notas estão em uma mesma oitava, senão, ou seja, se $x > 1$, as notas estão em oitavas diferentes.

Encontrado o valor da(s) oitava(s), basta multiplicar este valor por $12.i = 12.\sqrt[12]{2} \approx 12,71135572$ (já que em cada oitava temos doze intervalos i) que encontramos o valor numérico para o intervalo entre duas notas distintas quaisquer.

Para exemplificar, utilizamos a faixa audível ao ser humano para determinar respectivamente, o número de oitavas e um valor numérico associado ao intervalo dos extremos desta faixa.

Na faixa de áudio de 20Hz a 20000Hz, têm-se:

$$log_2\left(\frac{20000}{20}\right) = log_2\left(1000\right) = x$$

$$2^x = 1000 = 10^3$$

$$log\left(2^x\right) = log\left(10^3\right)$$

$$xlog\left(2\right) = 3log\left(10\right)$$

$$x = \frac{3log(10)}{log(2)}$$

$$x = \frac{3.1}{log(2)}$$

$$x \approx \frac{3}{0,30103}$$

$$x \approx 9,96578441$$

ou seja, o intervalo na faixa de áudio de 20Hz a 20000 HZ, corresponde aproximadamente a 9,96 oitavas.

E deste modo, multiplicando o valor das oitavas por $12i = 12\sqrt[12]{2} \approx 12,71135572$ obtemos um valor numérico aproximado de 126,6021.

4.2.2 Distância entre os Trastes dos Instrumentos com Cordas

Seguindo a ideia de Pitágoras, dado um instrumento musical com cordas em que há trastes, é razoável pensar em como as distâncias destes trastes são determinadas, visto que as frações correspondentes as mesmas não seriam de fácil dedução. É importante ressaltar que a frequência e consequentemente a nota musical, é dada não somente pela espessura e material que é feito a corda, mas também pelo comprimento da corda, que no caso de um instrumento com cordas e trastes, pode ser alterado conforme a posição que se pressiona o dedo no braço do instrumento.

A fim de simplificar, ao invés de tratarmos de todos os instrumentos musicais com cordas que tenham trastes, neste momento relatamos apenas o violão.

Abaixo, pode-se ver as partes de um violão para que haja uma melhor compreensão do que mencionamos posteriormente.

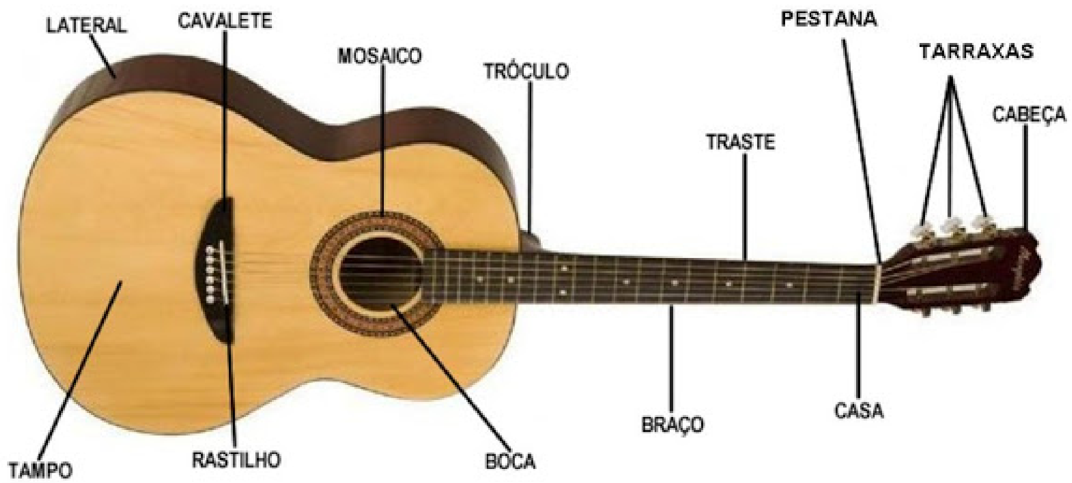


Figura 25: Violão e suas partes

Fonte: `http://musicaplena.com/conhecendo-o-violao/`

Os trastes de um violão são colocados de modo que possam definir escalas cromáticas. Deste modo, a partir da pestana, a cada doze trastes teremos a referida escala, daí, como visto anteriormente, determina-se doze intervalos musicais. Neste contexto, a nota determinada pelo 12º intervalo, possui o dobro da frequência da nota determinada pelo primeiro intervalo.

Então, observando um violão, um questionamento comum é a forma como os trastes foram distribuídos ao longo do braço do instrumento. Qual o significado daquelas distâncias?

A seguir são apresentados dois gráficos que procuram esclarecer matematicamente a sequência das notas da escala cromática, os quais podem ser obtidos experimentalmente.

O primeiro gráfico (Fig. 26) refere-se a um valor y em função do x-ésimo traste de um instrumento com cordas, onde $y = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^x$. O valor y ao ser multiplicado pela frequência inicial da corda, ou seja, a frequência produzida pela corda "solta"resulta na frequência da nota produzida pela "nova"corda. Para exemplificar, o gráfico ressalta também as notas produzidas pelos respectivos trastes de uma corda MI de frequência 164,8 Hz. Assim, o traste 5 produz um valor que ao ser multiplicado por 164,8 Hz, resulta exatamente em 220 Hz que é a frequência de uma nota LÁ.

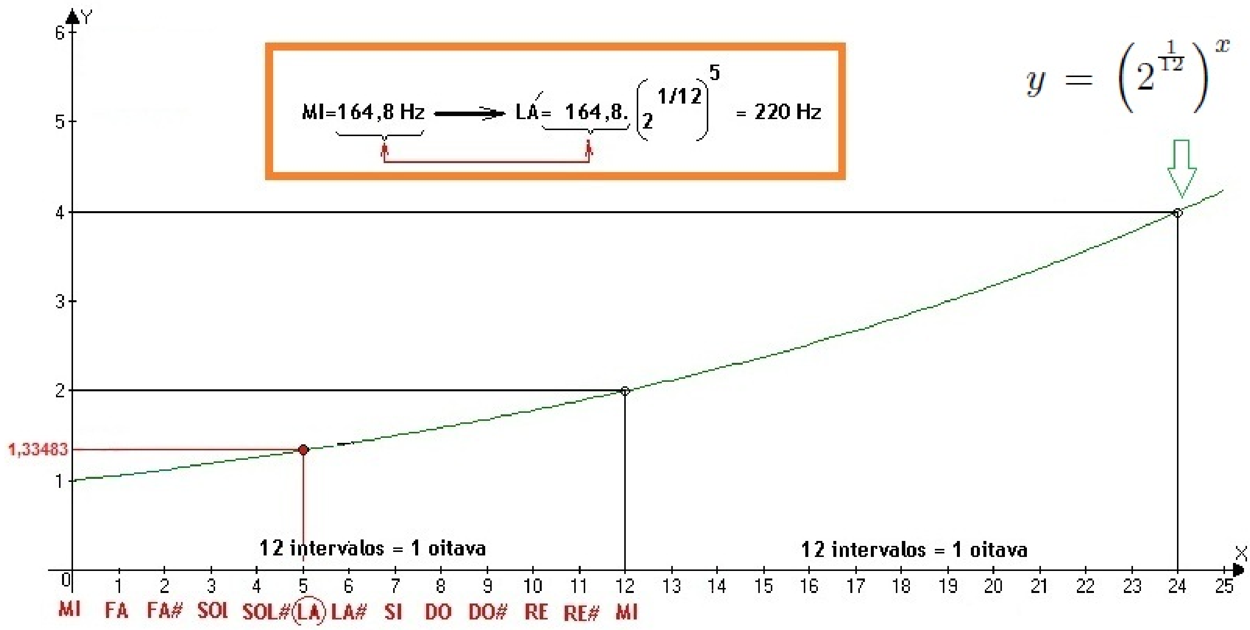


Figura 26: Sequências de notas - Escala Cromática

Fonte: Própria

O gráfico seguinte (Fig. 27), relaciona um valor y em função do x-ésimo traste de um instrumento com cordas, onde $y = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-x}$. O valor y ao ser multiplicado pelo comprimento inicial da corda, estabelece o comprimento da corda "produzido"pelo respectivo traste ou se preferirmos a distância entre o traste x e o rastilho.

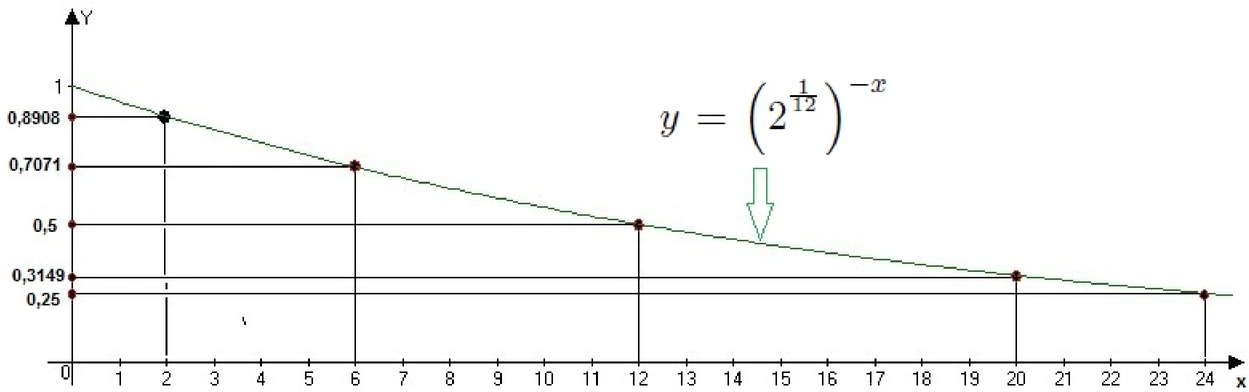


Figura 27: Posicionamento dos trastes

Fonte: Própria

Ao analisarmos os gráficos da Fig. 26 e da Fig. 27, obtemos que o comprimento das cordas é inversamente proporcional a frequência da nota que ela "produz", deste modo é possível saber como crescem os comprimentos das cordas.

Então, segundo Netto [199−?], a expressão que permite calcular as distâncias dos trastes que produzem as frequências que se quer gerar é a seguinte:

$$t_n = C_e . \left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-1}\right]^n \text{ com } n \geq 0$$

onde t_n, C_e e n são respectivamente, a distância do n-ésimo traste em relação ao rastilho, o comprimento da escala (distância entre os suportes, rastilho e pestana) e a ordem do traste a partir da pestana.

Para exemplificar a eficiência da fórmula, aplicamos-na em um contrabaixo, cuja distância entre os suportes das cordas é de 864 mm, com 20 trastes, permitindo visualizar como ficam distribuídas as distâncias entre os trastes, como pode ser visto na Fig. 28.

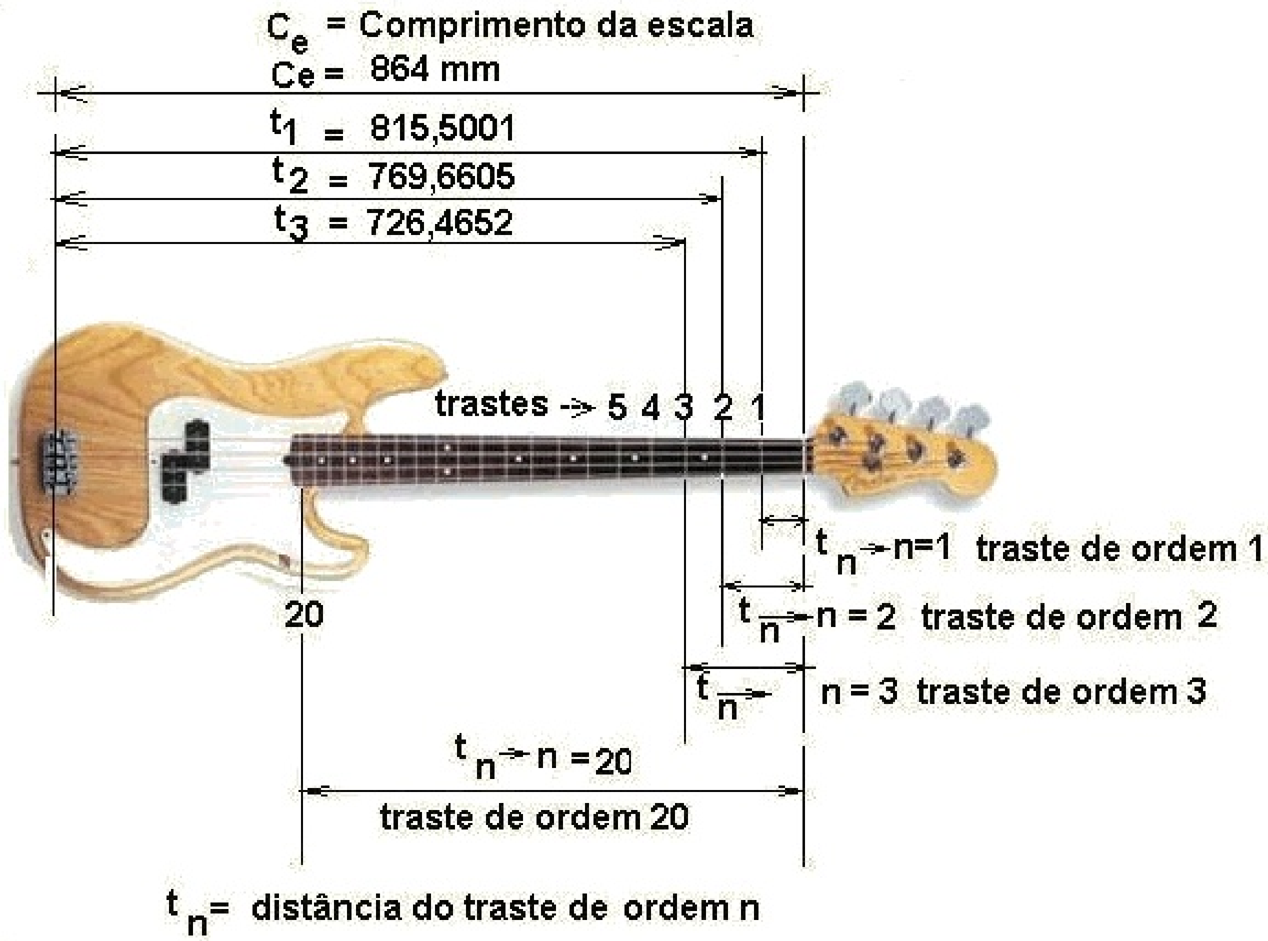


Figura 28: Distância dos trastes em um contrabaixo

Fonte: `http://musicaeadoracao.com.br/25383/a-musica-e-os-logaritmos/`

Na equação $t_n = C_e.\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-1}\right]^n$, se $n = 1$ temos

$$t_1 = 864.\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-1}\right]^1 \approx 815,5074$$

A distância do primeiro traste em relação a pestana, é obtida da diferença entre o comprimento total da escala (C_e) e o valor encontrado acima. Isto é,

$$C_e - t_1 \approx 864 - 815,5074 \approx 48,4926 \text{ mm}$$

que é a distância ente o primeiro traste e a pestana (traste "0"mais próximo à cabeça do baixo).

Agora, se $n = 2$, temos:

$$t_2 = 864.\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-1}\right]^2 \approx 769,7365 \text{ mm},$$

donde,

$$C_e - t_2 \approx 864 - 769,7365 \approx 94,2635 \text{ mm}.$$

De maneira análoga, repetindo este procedimento, são encontrados todos os valores de t_n, os quais devem ser subtraídos de 864 mm (C_e), para se obter a posição de cada traste.

Uma outra maneira é considerar t_n como sendo a distância entre o rastilho e o traste, não sendo necessária as subtrações do processo anterior como pode ser observado na tabela da Fig. 29.

n	$t_n = 864\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-1}\right]^n$	n	$t_n = 864\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-1}\right]^n$	n	$t_n = 864\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-1}\right]^n$
0	**864.0000**	7	**576.6508**	14	**384.8682**
1	**815.5074**	8	**544.2859**	15	**363.2673**
2	**769.7365**	9	**513.7375**	16	**342.8786**
3	**726.5345**	10	**484.9036**	17	**323.6343**
4	**685.7573**	11	**457.6881**	18	**305.4701**
5	**647.2687**	12	**432.0000**	19	**288.3254**
6	**610.9403**	13	**407.7537**	20	**272.1429**

Figura 29: Valores para 20 trastes do contrabaixo

Fonte: Própria

Por outro lado, de acordo com Netto [199−?], e como pôde ser visto anteriormente, a distância entre o rastilho e os trastes, nada mais é do que uma Progressão Geométrica (sobre Progressões Geométricas, veja a proposta de atividade 7.3 na página 70) decrescente com razão $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 0,9438743$, onde o primeiro termo é o comprimento da corda determinado pela pestana e o rastilho.

Deste modo, ao considerar como unidade o comprimento da corda determinado pela pestana e o rastilho, basta multiplicarmos sucessivas vezes esta unidade pela razão $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 0,9438743$ que encontramos as referidas distâncias. Para ilustrar veja a Fig. 30, onde $t_0 = 1$ representa o comprimento inicial da corda, t_n representa o comprimento da corda determinado pelo rastilho e o traste n (foi utilizado a razão igual a 0,9438743 para facilitar os cálculos visto que $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$ é um número irracional e o mesmo não facilitaria os cálculos).

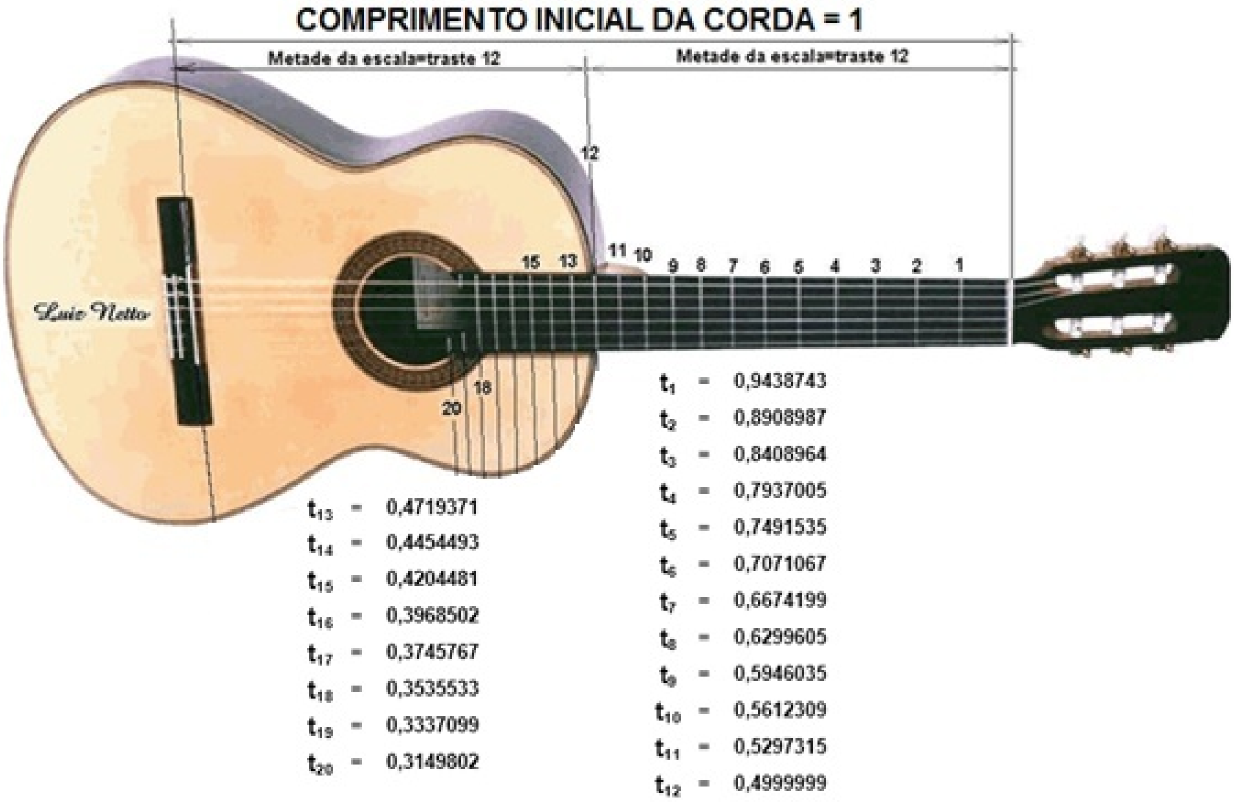


Figura 30: Distanciamento dos trastes em um violão

Fonte: Adaptada de http://musicaeadoracao.com.br

Por outro lado, é possível determinar não só a distância de um traste até o rastilho mas também a distância entre quaisquer dois trastes. Para tal, basta entender que sendo C o comprimento inicial da corda, então $C.t_n$ é a distância entre o rastilho e o traste n (observe que para $n = 0$ temos o comprimento inicial da corda), basta determinar:

$$\Delta C = C.t_n - C.t_{n+k}$$

$$\Rightarrow \Delta C = C.(t_n - t_{n+k}),$$

$$\text{com } 0 < n + k \leq 21,\ n \text{ e } k \text{ números naturais.}$$

Então, para um violão com comprimento de corda inicial de 65,5 cm, a distância entre as trastes 5 e 6, teremos:

$$\Delta C = C.(t_n - t_{n+k})$$

$$\Rightarrow \Delta C = 65,5.(t_5 - t_6)$$

$$\Rightarrow \Delta C \approx 65,5.(0,7491534 - 0,7071057)$$

$$\Rightarrow \Delta C \approx 65,5.(0,0420477)$$

$$\Rightarrow \Delta C \approx 2,75412435 \text{ cm}$$

4.3 Música e o Triângulo Retângulo

Uma das descobertas Matemáticas é o Teorema de Pitágoras, que estabelece relação entre os lados de um triângulo retângulo. O teorema afirma que: "Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos". De forma similar o teorema também pode ser descrito como: "Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos".

Relembremos que:

i) triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto ou seja um ângulo de 90°;

ii) o lado oposto ao ângulo reto chama-se **hipotenusa**;

iii) os lados que formam o ângulo reto chamam-se **catetos**.

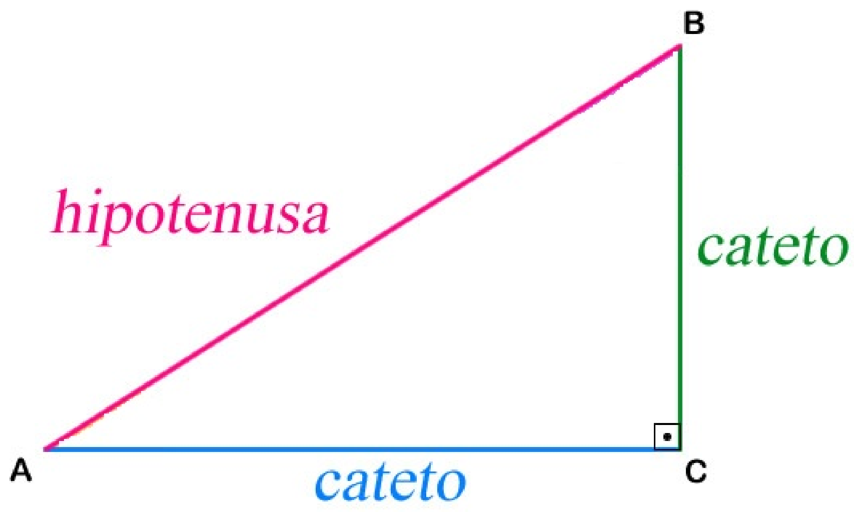


Figura 31: Triângulo retângulo

Fonte: `http://brainly.com.br/tarefa/677086|`

Deste modo, com ambas as afirmações temos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

onde **c**, **a** e **b** são, respectivamente, a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

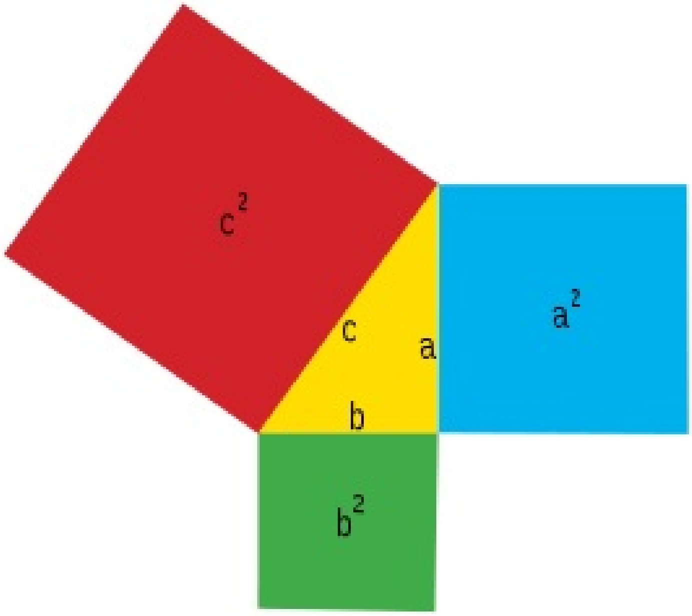


Figura 32: Ilustração do Teorema de Pitágoras

Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras`

Tradicionalmente o Teorema de Pitágoras é creditado ao matemático grego Pitágoras (570 a.C. - 495 a.C.) pela sua descoberta e demonstração, mas segundo Bogomolny (1995), afirma-se que o conhecimento do teorema seja anterior a ele (há muitas evidências de que matemáticos babilônicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos, mas não se sabe se conheciam um algoritmo tão geral quanto o Teorema de Pitágoras). Por outro lado, vale ressaltar que o Teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos, do matemático persa Ghiyath Al-Kashi (1380 - 1429).

De acordo com Netto [199−?], o matemático Bernardus Vallumbrosius, ao contemplar os valores constituintes da escala cromática, notou alguns valores que lhe pareceram familiares, tais como, $1,4142 \approx \sqrt{2}$ e $0,7071 \approx \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, e imaginou possíveis relações num triângulo retângulo isósceles, de modo que a hipotenusa e os catetos congruentes tivessem tamanhos semelhantes a estes valores.

Intrigado com essa possibilidade, Vallumbrosius resolveu construir triângulos retângulos isósceles, cujas hipotenusas tivessem uma sequência constituída pelos valores que representassem os sucessivos intervalos musicais e, descobriu que os catetos poderiam ser representados por potências com base 2 e expoentes múltiplos de $\frac{1}{12}$. De fato, tomando a hipotenusa como $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n$ e utilizando o Teorema de Pitágoras, onde **C** é o valor dos catetos congruentes, temos:

$$\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n\right]^2 = C^2 + C^2$$

$$\Rightarrow \left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n\right]^2 = 2C^2$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n\right]^2}{2} = C^2$$

$$\Rightarrow C^2 = \frac{\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n\right]^2}{2}$$

$$\Rightarrow C^2 = \frac{\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{2n}}{2}$$

$$\Rightarrow C^2 = \frac{2^{\frac{2n}{12}}}{2}$$

$$\Rightarrow C^2 = 2^{\frac{2n}{12}-1}$$

$$\Rightarrow C^2 = 2^{\frac{2n-12}{12}}$$

$$\Rightarrow C^2 = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{2n-12}$$

$$\Rightarrow C^2 = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{2(n-6)}$$

$$\Rightarrow C^2 = \left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{n-6}\right]^2$$

$$\Rightarrow C = \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{n-6}$$

Logo, a hipotenusa seria da forma $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n$ e os catetos congruentes $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{n-6}$.

Deste modo, ainda de acordo com Netto [199−?], foram construídos os triângulos retângulos isósceles, conforme a Fig. 33, como pode ser observado a seguir:

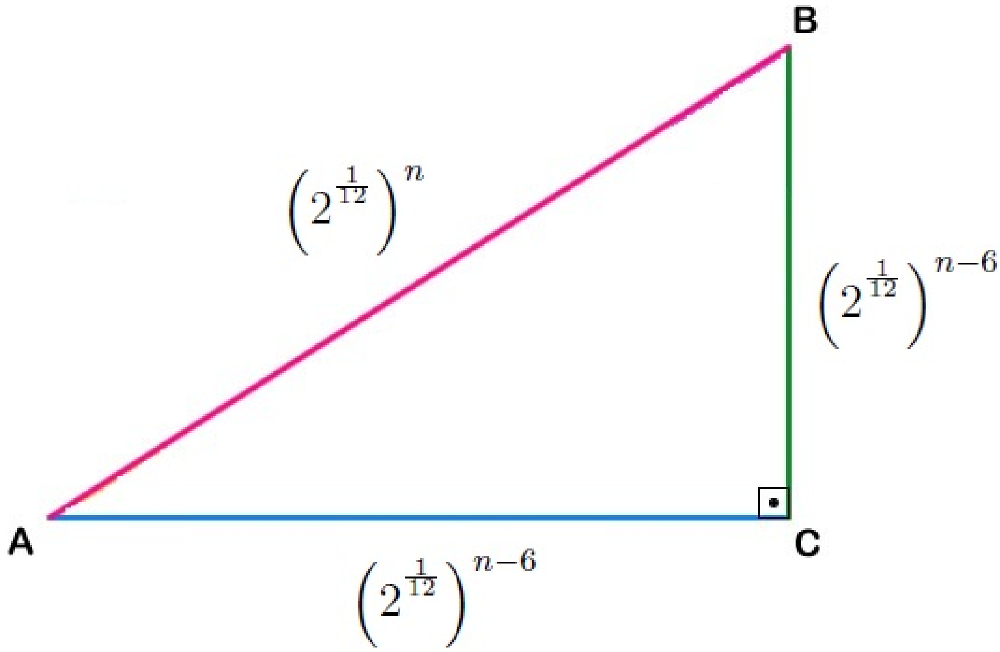


Figura 33: Triângulos Vallumbrosianos

Fonte: Própria

Observemos que para os catetos, se tomarmos $n = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{0-6}\\
&=\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-6}\\
&=\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-6}\\
&=2^{\frac{-6}{12}}\\
&=2^{-\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

E para os mesmos catetos se tomarmos $n = 12$, obtemos:

$$\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12-6}$$

$$= \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{6}$$

$$= 2^{\frac{6}{12}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}.$$

Que são exatamente os valores que Bernardus Vallumbrosius observou inicialmente ($\sqrt{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Como vimos anteriormente, os intervalos musicais da escala cromática podem ser representados em um triângulo retângulo isósceles.

Entretanto, no triângulo retângulo, também podem ser representadas as distâncias dos trastes nos instrumentos musicais com cordas, ou seja, o comprimento da corda que produzem uma certa frequência (som).

De fato, como vimos na seção 4.2.2, a distância dos trastes de um instrumento com cordas, é dado por $t_n = C_e . \left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-1}\right]^n$, assim, tomando a hipotenusa por $C_e . \left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)\right]^{-n}$ e utilizando o Teorema de Pitágoras, onde **C** são os catetos congruentes, temos:

$$\left[C_e . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-n}\right]^2 = C^2 + C^2$$

$$\Rightarrow \left[C_e . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-n}\right]^2 = 2C^2$$

$$\Rightarrow \frac{\left[C_e . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-n}\right]^2}{2} = C^2$$

$$\Rightarrow C^2 = \frac{\left[C_e . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-n}\right]^2}{2}$$

$$\Rightarrow C^2 = \frac{(C_e)^2 . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-2n}}{2}$$

$$\Rightarrow C^2 = \frac{(C_e)^2 . 2^{\frac{-2n}{12}}}{2}$$

$$\Rightarrow C^2 = (C_e)^2 . 2^{\frac{-2n}{12} - 1}$$

$$\Rightarrow C^2 = (C_e)^2 . 2^{\frac{-2n-12}{12}}$$

$$\Rightarrow C^2 = (C_e)^2 . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-2n-12}$$

$$\Rightarrow C^2 = (C_e)^2 . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{2(-n-6)}$$

$$\Rightarrow C^2 = (C_e)^2 . \left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-n-6}\right]^2$$

$$\Rightarrow C = C_e . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-n-6}.$$

Logo, a hipotenusa seria da forma $C_e . \left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)\right]^{-n}$ e os catetos congruentes seriam $C_e . \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-n-6}$.

A Figura 34 a seguir, ilustra como seriam os triângulos retângulos isósceles que representam através das hipotenusas, as distâncias dos trastes.

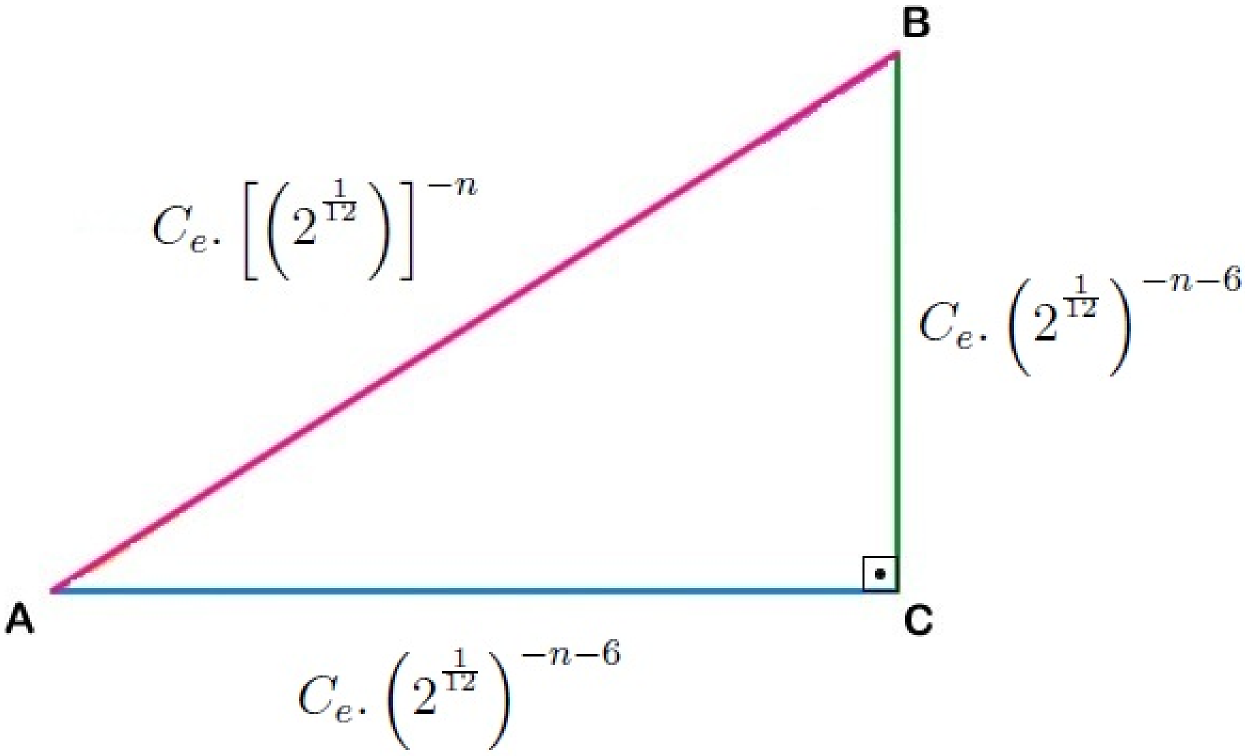


Figura 34: Triângulos Vallumbrosianos para os trastes

Fonte: Própria

Logo, de acordo com Netto [199−?], as distâncias dos trastes de um instrumento com cordas a partir do rastilho, são dadas por estas hipotenusas, $C_e.\left[\left(2^{\frac{1}{12}}\right)\right]^{-n}$ $(n = 0, 1, 2, ..., 20)$, onde n e C_e indicam, respectivamente, a ordem do traste a partir da pestana e o comprimento inicial da corda.

A Figura 35 a seguir, exemplifica o que foi mencionado acima, onde t1,...,t20, denotam os valores aproximados para a hipotenusa, com n respectivamente igual a 1, 2, ..., 20, sendo $C_e = 1$, tomando-se por base a distribuição dos trastes no braço de um violão.

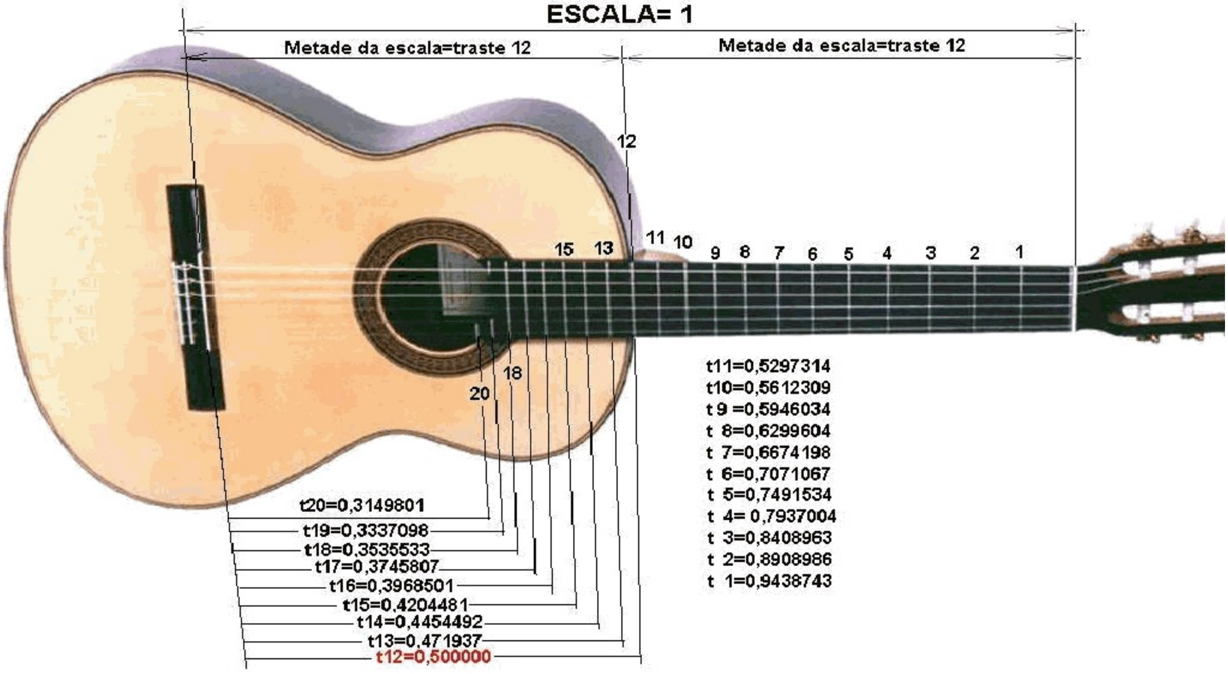


Figura 35: Distribuição dos trastes em um violão

Fonte: `http://musicaeadoracao.com.br/recursos/imagens/tecnicos/matematica/luiz_neto/perc-escala01.gif`

5 A Matemática da Música nas Cores

5.1 Música e as Cores

A Matemática é uma ferramenta tão poderosa que, a mesma estabelece uma relação entre as cores e as notas musicais.

Vale ressaltar que, este trabalho não tem a intenção de mostrar a dedução do método e das fórmulas que são utilizadas para relacionar sons e luz.

Segundo Netto [199−?], "quando estudamos a física do som, verificamos como os sons são percebidos pelos nossos ouvidos, com relação as suas **frequências**, suas intensidades e os timbres". Por outro lado, sabemos que as cores também podem ser relacionadas com frequências, assim como as notas musicais. Então poderíamos relacionar as cores com os sons? A resposta é sim, e veremos como a seguir.

Em relação a audição, o ser humano consegue ouvir uma faixa que vai de 20Hz a 20000 Hz e, o espectro de luz visível vai de $3,93.10^{14}$Hz (vermelho) a $7,86.10^{14}$ Hz (violeta), que segundo Netto [199−?], corresponde a faixa de sons que vai de 357,4Hz a 714,8 Hz.

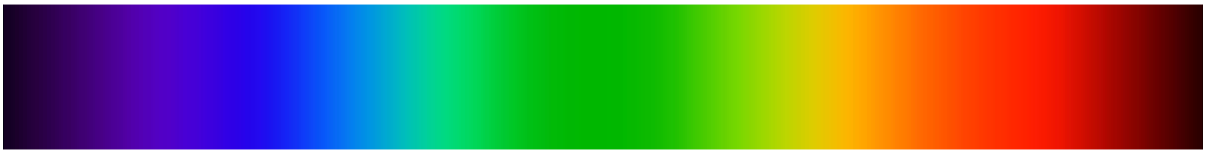


Figura 36: Espectro de luz visível

Fonte: http://pt.wikipedia.org

Deste modo, segundo Netto [199−?], para relacionarmos sons e luz, considera-se que as frequências inicial e final do espectro de luz visível, são a mais baixa, que é a do vermelho, e a mais alta, que é a do violeta, respectivamente:

$$\text{vermelho} = 3,93.10^{14}\text{Hz}$$
$$\text{violeta} = 7,86.10^{14}\text{Hz}$$

A ideia de relacionar luz e notas, parte do princípio de que a cada oitava as frequências das notas dobram, e deste modo, dada a frequência de uma nota qualquer, se formos dobrando a frequência da mesma, em algum momento a frequência pertencerá ao intervalo das frequências do espectro de luz visível.

Utilizamos a escala cromática para fazer a comparação entre sons e luz, então a base escolhida para as potências será $2^{\frac{1}{12}}$. A ideia inicial, é pegar esse valor mínimo de intervalo e, multiplicá-lo por ele mesmo sucessivas vezes, até que cheguemos a maior frequência do espectro de luz. Assim, é necessário encontrarmos um valor x, que seja o expoente de $2^{\frac{1}{12}}$, para chegarmos ao valor da frequência do vermelho, ou seja:

$$\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^x = 7,86.10^{14} \Rightarrow$$

$$2^{\frac{x}{12}} = 7,86.10^{14} \Rightarrow$$

$$log(2^{\frac{x}{12}}) = log(7,86.10^{14}) \Rightarrow$$

$$\frac{x}{12}.log(2) = log(7,86.10^{14}) \Rightarrow$$

$$x.log(2) = 12.log(7,86.10^{14}) \Rightarrow$$

$$x = \frac{12.log(7,86.10^{14})}{log(2)} \Rightarrow$$

$$x \approx \frac{12.14,895423}{0,30103} \Rightarrow$$

$$x \approx 593,77907.$$

Como cada oitava contém 12 intervalos, ao dividirmos 593,77907 por 12, obtemos 49,481589, que é o número de oitavas correspondentes à luz vermelha escolhida.

No entanto, vemos que a relação entre o espectro de luz visível e as notas musicais, é somente em uma oitava, onde as frequências variam de 357,4 Hz a 714,8 Hz (lembrando que em uma oitava a frequência dobra).

Os intervalos de frequências de algumas oitavas, a partir de 1 HZ, podem ser observados na Fig. 37.

Oitava	Variação de frequência (Hz)
1	1 a 2
2	2 a 4
3	4 a 8
4	8 a 16
5	16 a 32
6	32 a 64
7	64 a 128
8	128 a 256
9	256 a 512
10	512 a 1024

Figura 37: Variação das frequências nas oitavas

Fonte: Própria

Ao analisarmos a tabela da Fig. 37, observamos que a variação que foi citada anteriormente (357,4 Hz a 714,8 Hz), está na 9ª e 10ª oitava.

Assim, é possível construir a correspondência entre sons e luz. Para isso é necessário tomar a frequência de uma nota pertencente ao intervalo de 357,4 Hz a 714,8 Hz e encontrar na tabela da Fig. 37, a que oitava a frequência da nota pertence.

Depois de encontrada a oitava da nota, subtrai-se o número da oitava pelo total de oitavas que foi encontrado anteriormente (49,481589) e posteriormente encontra-se o valor da frequência da luz visível correspondente a nota escolhida. Para tal, primeiramente devemos determinar a parte inteira do valor de y na equação abaixo, já que queremos a oitava em que a luz está.

$$49,481589 - x = y$$

onde x é o número da oitava onde se encontra a nota escolhida.

Posteriormente, utiliza-se a equação a seguir para relacionar a frequência de uma nota com a frequência de uma luz visível:

$$f_n.\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12.y} = f_{lu}$$

onde, f_n e f_{lu} são, respectivamente a frequência da nota, a frequência da luz e, $y = 49,481589 - x$.

Para verificar a eficácia da fórmula, determinamos a frequência da luz correspondente a nota SOL$(G_3) \approx 391,995392$ Hz.

Primeiramente observando a tabela da Fig. 37, obtemos que a frequência da nota SOL$(G_3) \approx 391,995392$ Hz está na 9ª oitava, e assim determinamos o valor de y:

$$y \approx 49,481589 - x$$

$$\Rightarrow y \approx 49,481589 - 9$$

$$\Rightarrow y \approx 40,481589 \text{ (pegar somente a parte inteira)}$$

Então, substituindo $y = 40$ e $f_n \approx 391,995392$ Hz em $f_n.\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12.y} = f_{lu}$ temos,

$$\Rightarrow 391,995392.\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{12.40} \approx f_{lu}$$

$$\Rightarrow f_{lu} \approx 391,995392.\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{480}$$

$$\Rightarrow f_{lu} \approx 391,995392.(1,0594631)^{480}$$

$$\Rightarrow f_{lu} \approx 391,995392.1,099514438.10^{12}$$

$$\Rightarrow f_{lu} \approx 431,0045931.10^{12}$$

$$\Rightarrow f_{lu} \approx 4,310045931.10^{14}\text{Hz.}$$

E deste modo, encontramos a frequência no espectro de luz visível, correspondente a nota SOL (G_3).

Assim, se utizarmos o método anterior para as frequências das luzes vermelho $= 3,93.10^{14}$Hz e violeta $= 7,86.10^{14}$Hz, encontramos, respectivamente as frequências das notas 357,4 Hz e 714,8 Hz em valores aproximados.

Ressaltamos que não há nada de novo no que fizemos, a intenção deste trabalho é apenas demonstrar como as relações matemáticas são utlizadas no processo de relacionar luz e sons.

Segue abaixo uma figura para ilustrar, de acordo com Netto [199−?], "a correspondência entre as notas musicais dentro de apenas uma oitava que encontra seu correspondente dentro do espectro visível de luz, no mundo das cores".

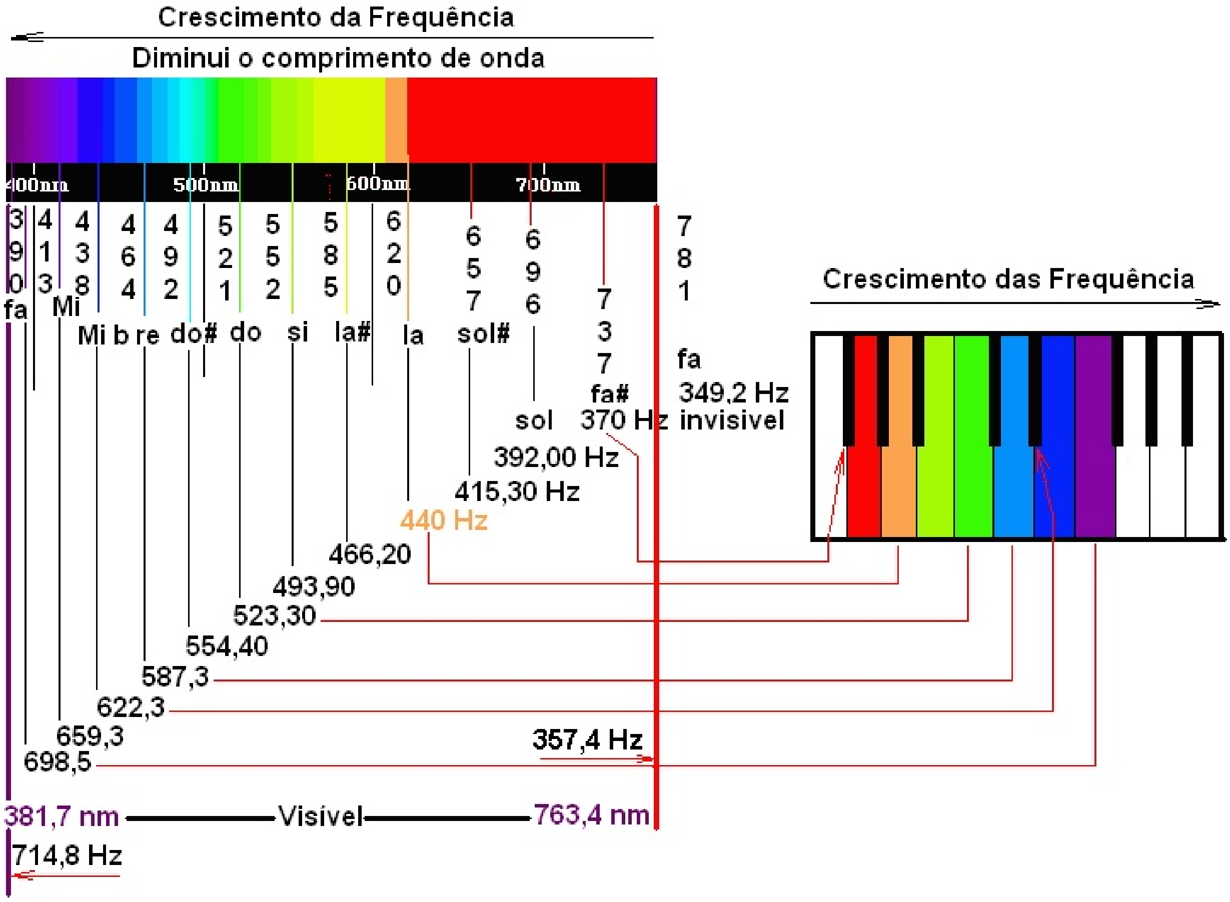


Figura 38: Relação entre sons e luz

Fonte: http://musicaeadoracao.com.br

6 Proporção Áurea na Construção de Instrumentos Musicais

Neste capítulo mostramos mais uma vez, como a Matemática é uma importante ferramenta utilizada na Música.

Para tal, mostramos como a Matemática é utilizada, através da Proporção Áurea, na construção de alguns instrumentos com corda, como os violinos e os violoncelos.

6.1 Proporção Áurea

O Número de Ouro, que é obtido através da Proporção Áurea, é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega ϕ (PHI), em homenagem ao escultor Phideas (Fídias), e seu valor arredondado com três casas decimais é 1,618.

De acordo com Netto [199−?], "quando uma linha segmento é dividida em duas partes de tal modo que a razão entre o segmento inteiro e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a parte menor, essa relação é chamada relação áurea, ou o número obtido é o número de ouro."

Figura 39: Segmento

Fonte: `http://musicaeadoracao.com.br/25388/segmento-aureo-aplicado-a-construcao-de-violoncelos-violinos/`

Deste modo, no segmento AB da Fig. 39, de acordo com a afirmação de Netto [199−?], temos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}.$$

Sendo $\frac{a}{b} = x$, então

$$1 + \frac{1}{x} = x \text{ (multiplicando por x)}$$

$$\Rightarrow x + 1 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034 \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0,$$

onde $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$ é a solução desejada, pois o comprimento dos segmentos são positivos e deste modo a razão entre eles também. Deste modo, temos

$$\frac{a}{b} \approx 1,618034$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} \approx \frac{1}{1,618034}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} \approx 0,618034$$

Vale ressaltar que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$ é chamado também de Número de Ouro.

A Proporção Áurea é presente na natureza, no corpo humano, em algumas flores e plantas e, como o ser humano é muito sagaz, há Proporção Áurea até mesmo em algumas construções civis. Vejamos nas figuras seguintes, exemplos de utilização da Proporção Áurea.

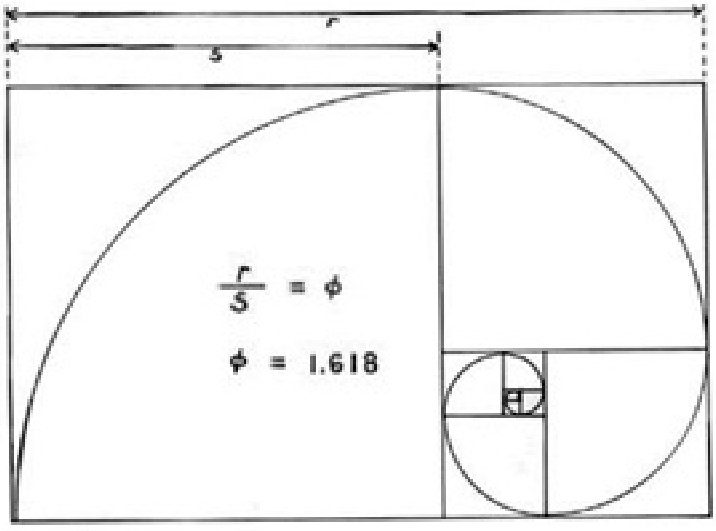


Figura 40: Retângulos de Ouro

Fonte:

`http://josiasviskoo.com.br/proporcao-aurea-e-o-retangulo-de-ouro/`

Figura 41: Proporção Áurea em uma concha

Fonte: `http://pt.slideshare.net/brunaofox/`

`razo-de-ouro-ou-nmero-de-ouro-presentation`

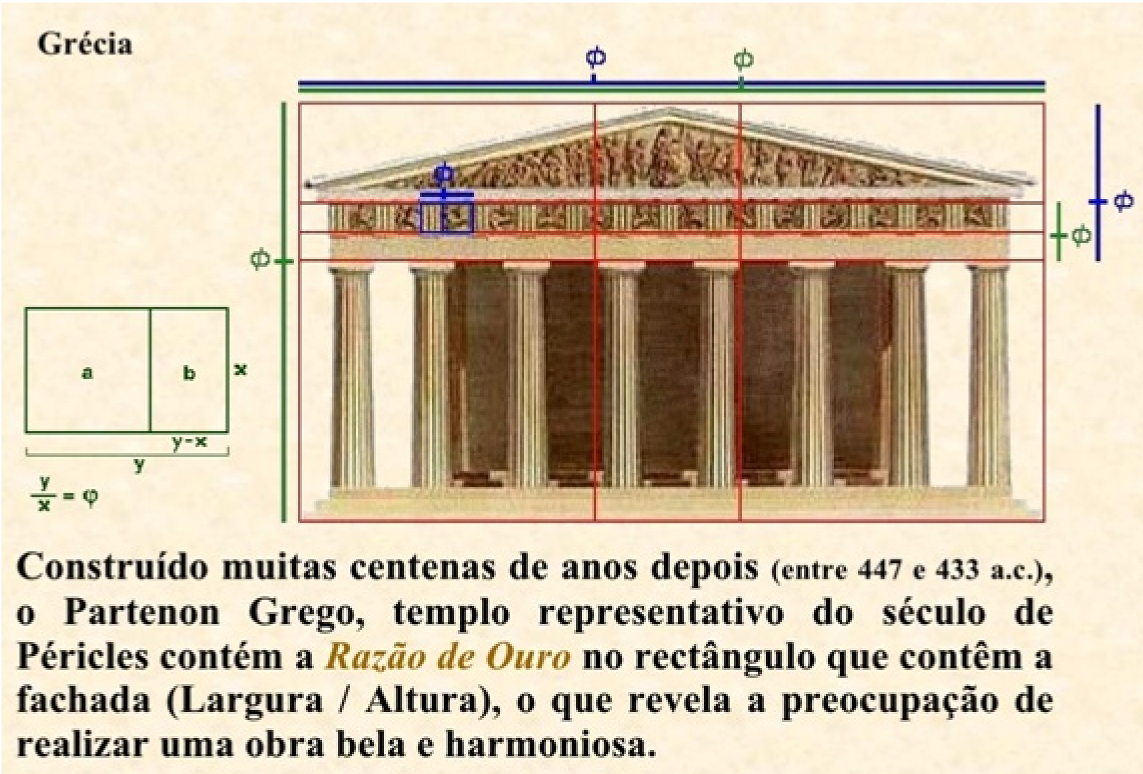


Figura 42: Proporção Áurea em construções

Fonte: `http://pt.slideshare.net/fragoso7/o-numero-de-ouro`

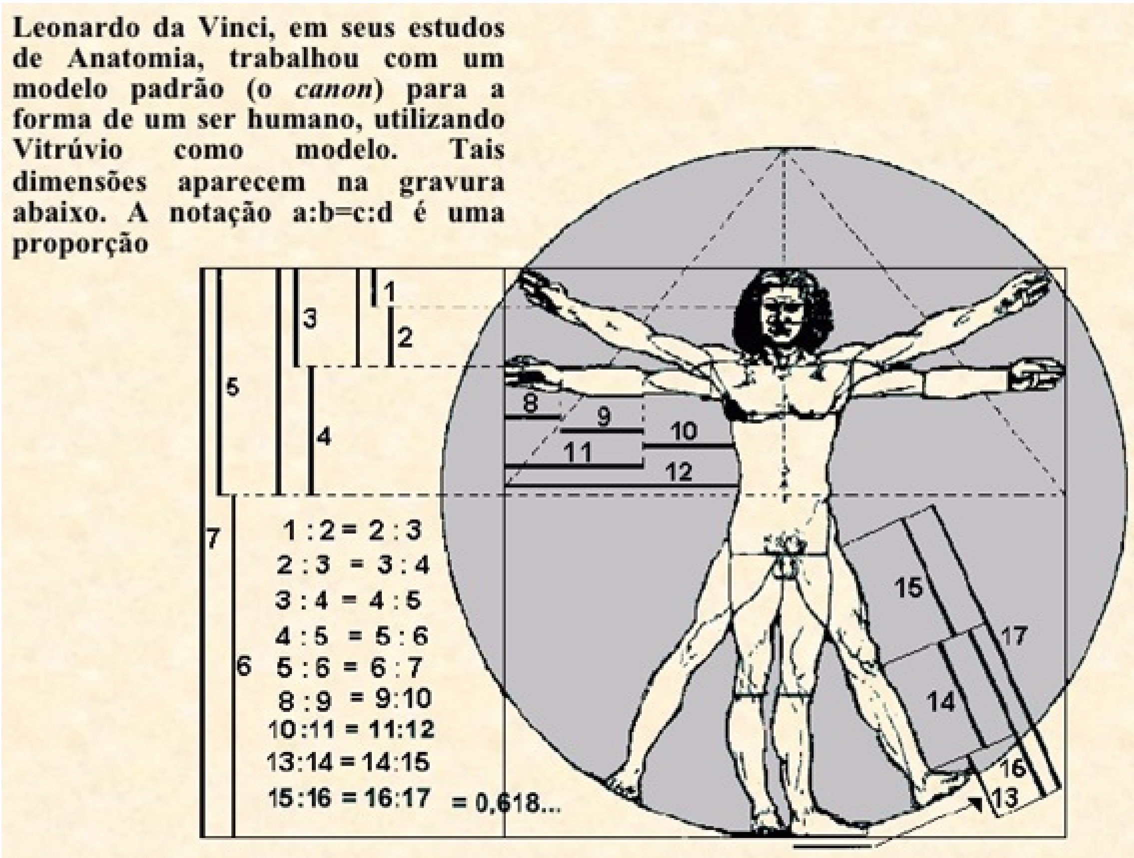


Figura 43: Proporção Áurea no corpo humano

Fonte: http://pt.slideshare.net/fragoso7/o-numero-de-ouro

6.2 Violinos, Violoncelos e a Proporção Áurea

Um dos instrumentos mais belos, tanto na estética como na emissão de som, com certeza é o violino.

A construção do violino, tanto na estética quanto nas proporções, é um fato intrigante para todos, mas um fato que talvez muitos não saibam, é que, de acordo com Netto [199−?], alguns violinos foram construídos a partir da Proporção Áurea e, de acordo com Fernandes (2010), até "mesmo Stradivarius utilizava o Número de Ouro na construção dos seus famosos violinos"(vale ressaltar que Stradivarius são os violinos mais valiosos do mundo, e que os mesmos foram construídos pela família Stradivari durante os séculos XVII e XVIII). Veja na Fig. 44 a Proporção Áurea em um violino.

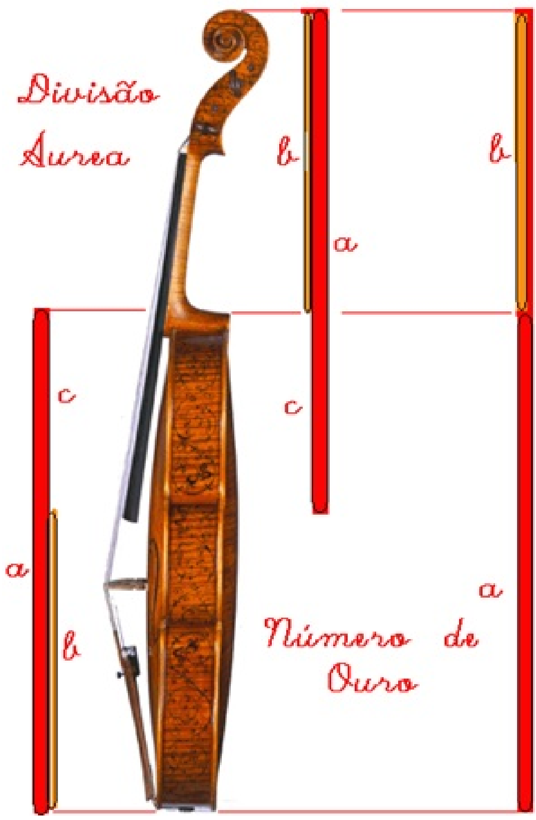


Figura 44: Proporção Áurea em um violino

Fonte: `http://musicaeadoracao.com.br/25388/segmento-aureo-aplicado-a-construcao-de-violoncelos-violinos/`

Do mesmo modo, alguns violoncelos também foram construídos por meio da Proporção Áurea, conforme podemos ver na Fig. 45 abaixo.

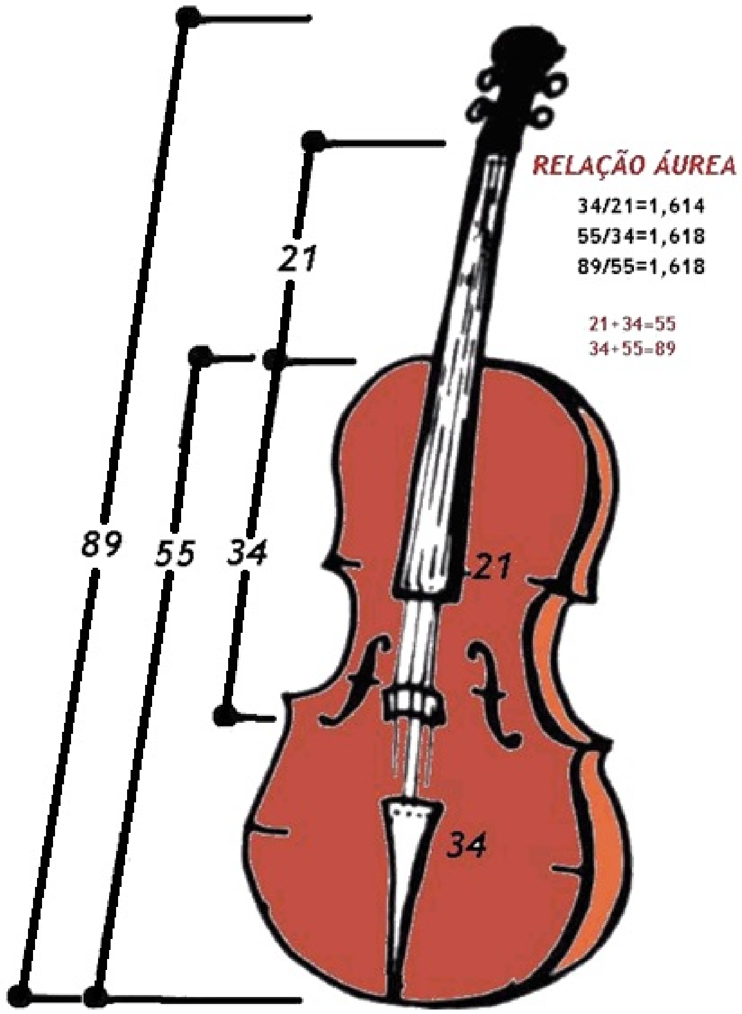


Figura 45: Proporção Áurea em um violoncelo

Fonte: `http://musicaeadoracao.com.br/25388/segmento-aureo-aplicado-a-construcao-de-violoncelos-violinos/`

7 Proposta de Atividade

Neste capítulo, apresentamos uma proposta de atividade, envolvendo Matemática e Música, onde o público alvo principal são os alunos do Ensino Médio.

Tal atividade, tem como objetivo diversificar de forma atrativa as aulas de Matemática, haja visto que, em geral, os alunos do Ensino Médio sempre questionam ao seu professor e até a eles próprios: Onde uso tal conteúdo em minha vida?

Como a Matemática muitas vezes é vista como algo difícil e até mesmo não atraente para os referidos alunos, a proposta da atividade tem como ferramenta auxiliar a música, que está sempre presente na vida dos discentes do Ensino Médio, vista pela maioria como agradável.

Para que a proposta de atividade fique mais clara, a mesma é apresentada em quatro aulas.

7.1 Aula 01 (Conhecendo o Violão)

Apresentar, inicialmente aos discentes um breve texto (abaixo) ressaltando as partes de um violão e posteriormente apresentá-lo para os mesmos de forma que cada discente possa conhecer um violão com as "suas próprias mãos".

Não se sabe ao certo quando o violão foi criado. Segundo alguns historiadores o violão teria sido originado a partir da "Cítara Romana", e expandiu-se juntamente com o domínio do Império Romano.

Figura 46: Estátua de Apolo com uma cítara

Fonte:`https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%BAsica_da_Gr%C3%A9cia_Antiga`

Por outro lado, arqueólogos encontraram esculturas de figuras seminuas tocando **instrumentos musicais**, semelhantes ao **violão** atual (1900-1800 a.C) na antiga Babilônia.

O violão atual é composto por várias partes e algumas merecem destaque para que um principiante possa compreender melhor tal instrumento.

Veja a figura abaixo:

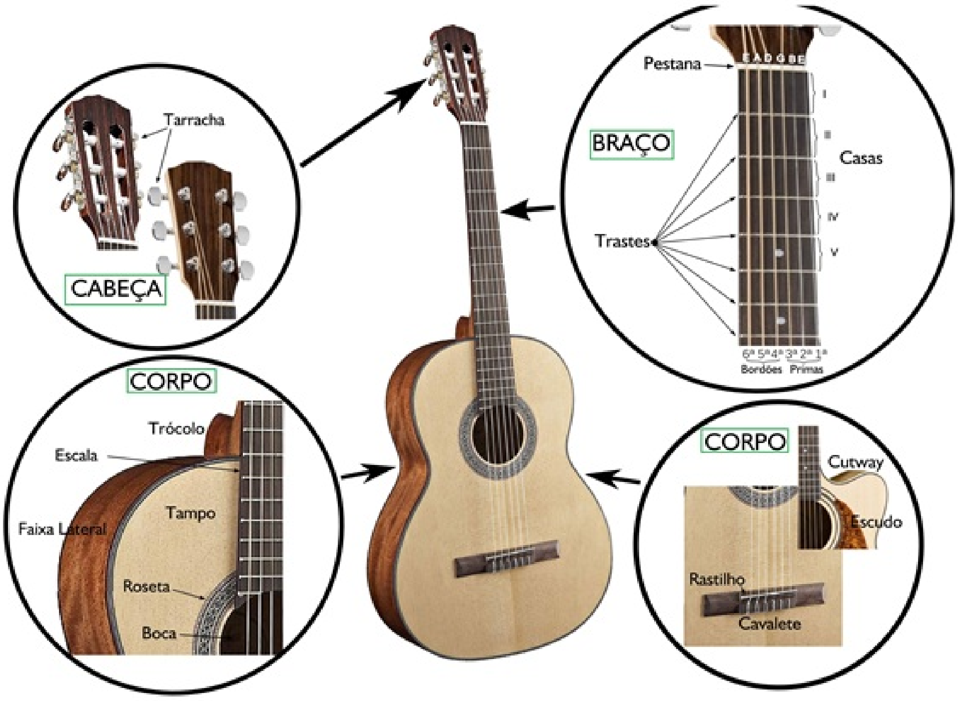


Figura 47: Partes de um violão em detalhes

Fonte: `http://blog.cancaonova.com/musicadedeus/anatomia-do-violao/`

Vale ressaltar que as cordas de um violão possuem espessuras diferentes e deste modo produzem notas diferentes. Geralmente, o violão é afinado de forma que contando as cordas de cima para baixo, ou se preferir da mais fina para a mais grossa, tenha a seguinte sequência: mi, SI, SOL, RÉ, LÁ, MI. Observe que temos duas notas mi, no entanto, as mesmas possuem alturas diferentes, sendo uma mais aguda do que a outra, e para simplificar denotamos como **MI** a grave e **mi** a aguda.

Figura 48: Notas das cordas soltas de um violão

Fonte: http://www.comoaprender.com.br/como-aprender-a-afinar-violao/

Alguns anos atrás, afinar um violão de maneira satisfatório era tarefa difícil, para os leigos. Mas com o avanço da tecnologia, e o surgimento de diapasões eletrônicos, que podem até mesmo ser "baixado"em celulares, tal tarefa tornou-se mais simples, até mesmo para leigos no assunto. Deste modo recomenda-se para os iniciantes que quando forem comprar seu violão, optem por aqueles que já possuem afinadores embutidos no próprio violão.

Figura 49: Diapasão ou afinador eletrônico

Fonte: http://todaoferta.uol.com.br

Atividade 01

Com auxilio, do professor, os alunos poderão "conhecer"o violão com as suas próprias mãos, para tal recomenda-se que o discente possa "tocar"o violão. Posteriormente, o aluno com o auxílio do professor e de um diapasão eletrônico, de preferência embutido no próprio violão, afinará o violão, que previamente esteja desafinado. Note que para o desenvolvimento da atividade, um violão não é suficiente, e deste modo o professor deve analisar a melhor opção para conseguir mais exemplares para tal atividade.

7.2 Aula 02 (Relação entre Matemática e Música)

Apresentar aos docentes o texto abaixo, e posteriormente aplicar os problemas:

Não se sabe ao certo sobre a origem da Música, mas sabe-se que desde os homens das cavernas a mesma esteve presente, em forma de gemidos e através de sons de percussão, que eram obtido com o "bater"das mãos nos corpos ou em objetos.

Do mesmo modo, não se tem certeza de quando o homem começou a relacionar a Matemática e a Música, mas pelo menos em registros, tal relação teria sido observada pelo Matemático e Filósofo grego Pitágoras no século VI a.C.

Pitágoras fez observações em um monocórdio, instrumento semelhante a um violão com apenas uma corda, e fez correspondências com frações aos sons emitidos com a vibração da corda. Observou que, alguns comprimentos de cordas produziam sons que eram agradáveis. Pitágoras estabeleceu as Consonâncias Perfeitas, ou seja, oitava, quinta e quarta, que são notas produzidas pelas frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ do comprimento da corda "solta".

Com o passar do tempo surgiram outras frações que produziram sons que também são agradáveis, surgindo a necessidade de se dar nomes a estes sons que seriam notas musicais. As notas musicais, depois de um processo de nomeação, atualmente tem-se nomes de **DÓ, RÉ, MI, FÁ SOL, LÁ e SI** tendo também uma correspondências com letras conforme a Fig. 50 a seguir.

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI
C	D	E	F	G	A	B

Figura 50: Correspondências entre as notas e letras

Fonte: Própria

Problema 01

Com o auxílio de uma fita métrica ou uma trena, meça o comprimento da corda de um violão, de modo que a medida seja feita da pestana até o rastilho. Calcule o comprimento da corda que produz a oitava, a quarta e a quinta de cada uma das seis cordas do violão. Descubra, utilizando um afinador, quais são as notas produzidas pelos respectivos comprimentos. Anote os resultados na tabela abaixo:

	Corda	E(MI)	A	D	G	B	E(mi)
Comprimento (cm)	Oitava						
	Quarta						
	Quinta						
Notas	Oitava						
	Quarta						
	Quinta						

Figura 51: Tabela 01

Fonte: Própria

7.3 Aula 03 (Rever os principais conceitos e definições de Progressão Geométrica)

O objetivo desta aula é rever os principais conceitos de uma Progressão Geométrica, com o auxílio do texto abaixo:

De acordo com Biachini e Paccola (2004), podemos definir Progressão Geométrica (P.G.), como uma sequência a_n, com n natural, cuja razão entre dois termos consecutivos é constante, e essa constante é chamada de razão (q) da **progressão geométrica**, ou seja:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma P.G. se, e somente se, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, onde q é constante.

Uma P.G pode ser classificada em:

i) **crescente**: quando cada termo é maior que o anterior, onde temos dois casos a considerar:

1º caso: $a_0 > 0$ e $q > 1$. Exemplo: $(1, 4, 16, 64, ...)$

2º caso: $a_0 < 0$ e $0 < q < 1$. Exemplo: $(-27, -9, -3, -1, ...)$

ii) **decrescente**: quando cada termo é menor que o anterior, onde temos dois casos a considerar:

1º caso: $a_0 > 0$ e $0 < q < 1$. Exemplo: $(64, 16, 4, 1, ...)$

2º caso: $a_0 < 0$ e $q > 1$. Exemplo: $(-1, -3, -9, -27, -81, ...)$

iii) **constante**: quando todos os termos são iguais, isto é, quando $q = 1$.
Exemplo: $(3, 3, 3, 3, 3, ...)$

iv) **Oscilante**: quando dois termos consecutivos têm sinais opostos, isto é, quando $q < 0$.
Exemplo: $(12, -6, 3, -\frac{3}{2}, ...)$

Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Em uma P.G. de razão q, podemos definir o termo geral a_n por meio de uma fórmula, dada por

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

onde: a_n é o termo geral, a_1 é o primeiro termo, n é a posição do termo e q é a razão da P.G.

Atividade 01

Para combater certa enfermidade, Emanuel Carlos está realizando um tratamento no qual deve ingerir doses diárias de certo medicamento durante cinco dias. Veja na figura abaixo, a quantidade de medicamento que Emanuel Carlos ingeriu em cada dia. Verifique se as doses diárias ingeridas por Emanuel Carlos formam um Progressão Geométrica, conforme os dias vão se passando.

Dia	Medicamento (mL)
01	16
02	32
03	64
04	128
05	256

Figura 52: Doses diárias de certo medicamento

Fonte: Própria

Atividade 02

Determine o 1^o termo de uma PG cuja razão é -2 e seu 11^o termo é 256.

7.4 Aula 04 (Progressão Geométrica nos Trastes de um Violão)

Para esta atividade o aluno necessita de materias básicos para anotações e um instrumento de medida milimetrado, de preferência uma trena métrica de 2 metros.

Figura 53: Trena métrica

Fonte: http://www.lojadomecanico.com.br

O professor deve pedir aos alunos que meçam as distâncias de 20 trastes até o rastilho do violão, de forma que a ordem do traste seja conforme figura abaixo:

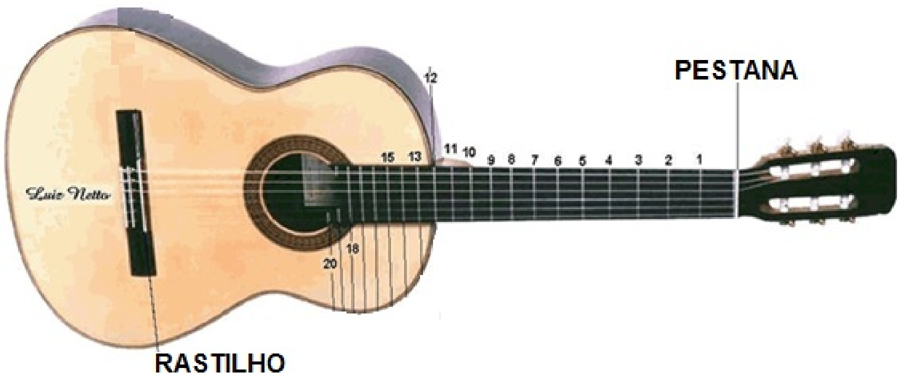


Figura 54: Ordem dos trastes

Fonte: `http://musicaeadoracao.com.br/25362/`

`os-triangulos-vallumbrosianos-e-o-dimensionamento-das-cordas-nos-instrumentos-mu`

Em seguida os alunos devem anotar os resultados obtidos em uma tabela similar a da figura abaixo:

Ordem do traste (t_n)	Medida obtida em mm
t_1	
t_2	
t_3	
t_4	
t_5	
t_6	
t_7	
t_8	
t_9	
t_{10}	
t_{11}	
t_{12}	
t_{13}	
t_{14}	
t_{15}	
t_{16}	
t_{17}	
t_{18}	
t_{19}	
t_{20}	

Figura 55: Tabela para anotações 01

Fonte: Própria

Após as anotações, o professor pede aos alunos que verifiquem se as medidas obtidas formam uma P.G., determinando aproximadamente, a razão da mesma. Lembre-se que para verificar se é uma P.G., estamos considerando os termos da mesma na ordem dos trastes e para encontrar a razão basta verificar se $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ com $n \in \mathbb{N}$ é constante. Para facilitar utilize a tabela da figura a seguir:

Ordem do traste (t_n)	Medida obtida em mm	$\frac{t_{n+1}}{t_n}$
t_1		
t_2		
t_3		
t_4		
t_5		
t_6		
t_7		
t_8		
t_9		
t_{10}		
t_{11}		
t_{12}		
t_{13}		
t_{14}		
t_{15}		
t_{16}		
t_{17}		
t_{18}		
t_{19}		
t_{20}		

Figura 56: Tabela para anotações 02

Fonte: Própria

Os alunos devem perceber que as distâncias formam uma P.G. com razão de 0,94 aproximadamente, já que as medições possuem uma margem de erro que deve ser considerada.

A atividade pode ser ampliada, pedindo-se aos alunos que determinem o termo geral desta P.G. e a soma dos 20 termos da referida P.G.

8 Considerações Finais

Este trabalho foi importante no requisito de aplicação da Matemática na Música. Por certo, o objetivo de demonstrar como a Matemática faz parte do que gostamos no nosso dia a dia, teve êxito neste trabalho.

A Matemática é um instrumento utilizado em várias áreas, a qual a mesma foi aplicada neste trabalho, na música.

Como pôde ser visto neste trabalho, existem relações entre a Matemática e a Música, donde existem relatos desta eminente relação desde a era de Pitágoras, e as quais se relacionam até nos dias de hoje na música computacional.

Muitos consideram que a Matemática, é somente utilizada para elaborar cálculos, não sabendo que ela teve e tem uma grande importância na construção de outras áreas, tais como a Música. É certo que, pôde ser visto neste trabalho que a Matemática tem uma grande influência na elaboração da Música e que ambas andam juntas para sua projeção.

Acreditamos que que este trabalho pode ser uma ferramenta auxiliadora para aqueles que procuram associar matemática no seu cotidiano.

9 Referências Bibliográficas

Referências

[1] ABDOUNUR, O.J., *Matemática e Música: O pensamento anlógico na construção de significados*, 4.ed. São Paulo: Escrituras, 2006.

[2] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H., *Matemática*, São Paulo: Moderna, 2004.

[3] BOGOMOLNY, A., *Pythagorean Theorem, proof number 10.* Disponível em: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras. Acesso em 19/03/2015.

[4] BONA, P., *Método Musical*, São Paulo: Igal, 1998.

[5] BORDINI, R.M., *Breve Histórico da Notação Musical.* Disponível em: http://musica.ufma.br/bordini/not-mus/not-mus.htm (tradução do livro: Read, Gardner. Music Notation: a manual of modern practice. 2a. ed. New York: Taplinger Publishing Company, 1979. /Copyright 1969 by Crescendo Books). Acesso em 15/11/2014.

[6] FERNANDES, D., *Série de Fibonacci e o Número de Ouro.* Disponível em: http://pt.slideshare.net. Acesso em 31/03/2015.

[7] IAZZETA, F., *Tabela de Frequências, Períodos e Comprimentos de Onda.* Disponível em: http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/introducao/tabela1.html. Acesso em 28/03/2015.

[8] LACERDA, O., *Compêndio de Teoria Elementar da Música*, 15.ed. São Paulo: Ricordi Brasileira, 1966.

[9] NETTO, L.S., *A Música e os Logaritmos.* Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 01/03/2015.

[10] NETTO, L.S., *Correspondência entre Sons e Luz.* Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 10/03/2015.

[11] NETTO, L.S., *Curva de Distribuição das Oitavas ao Longo da Faixa de Áudio - Escala Temperada.* Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 26/12/2014.

[12] NETTO, L.S., *Dimensionamento das Distancias entre os Trastes nos Instrumentos Musicais de Cordas*. Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 22/01/2015.

[13] NETTO, L.S., *Escala Musical Temperada - Frequências das Notas Musicais*. Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 06/02/2015.

[14] NETTO, L.S., *Os Triângulos Vallumbrosianos e o Dimensionamento das Cordas nos Instrumentos Musicais*. Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 26/02/2015.

[15] NETTO, L.S., *Ouvindo as Cores Visualizando os Sons*. Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 10/03/2015.

[16] NETTO, L.S., *Segmento Áureo Aplicado à Construção de Violoncelos e Violinos*. Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 11/03/2015.

[17] NETTO, L.S., *Tem Música No Triângulo de Pitágoras*. Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 28/02/2015.

[18] NETTO, L.S., *Uma Progressão Geométrica Muito Especial*. Disponível em: http://musicaeadoracao.com.br. Acesso em 22/12/2014.

[19] ORTOLON, E.T., *História da Música Ocidental*, set. de 2011. Disponível em: http://www.movimento.com/?s=historia+da+musica. Acesso em: 10 dez. 2014

[20] SOARES, L.C., *Pitágoras e a Música*. Disponível em: http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Lucas-Soares/Home.html. Acesso em 30/01/2015.

[21] STOPPA, M.H.; TEIXEIRA, A.C.S., *Transformada de Fourier Aplicada à Análise Espectral de Notas e Acordes Musicais*, Revista Matemática e Atualidade, UFG, vol. 01(2004), pp. 01.