Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Matemática Lúdica na Educação de Jovens e Adultos do Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal

Lourival Carlos Cunha Junior

Catalão

2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	*Lourival Carlos Cunha Junior*
E-mail:	*lourivalcarlos@hotmail.com*
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	*Professor da Secretaria de Educação do DF*
Agência de fomento:	*Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* — Sigla: *CAPES*
País: *Brasil*	UF: DF — CNPJ: *00889834/0001-08*
Título:	*Matemática Lúdica na Educação de Jovens e Adultos do Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal*
Palavras-chave:	*Truques matemáticos, Algoritmos alternativos; Jogos pedagógicos; Operações entre números inteiros.*
Título em outra língua:	*Recreational mathematics in education of youth and adults from Central Penitentiary Progression of Distrito Federal*
Palavras-chave em outra língua:	*Mathematical tricks; Alternative algorithms; Educational games; Operations between integers.*
Área de concentração:	*Matemática do Ensino Básico*
Data defesa: *(25/05/2015)*	
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Orientador (a):	*Prof. Dr. Igor dos Santos Lima*
E-mail:	*igor.matematico@gmail.com*
Co-orientador(a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 29 / 05 / 2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Lourival Carlos Cunha Junior

Matemática Lúdica na Educação de Jovens e Adultos do Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Igor dos Santos Lima

Catalão

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Cunha Junior, Lourival Carlos
Matemática Lúdica na Educação de Jovens e Adultos do Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal [manuscrito] / Lourival Carlos Cunha Junior. - 2015.
124 f.

Orientador: Prof. Dr. Igor dos Santos Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Truques matemáticos. 2. Algoritmos alternativos. 3. Jogos pedagógicos. 4. Operações entre números inteiros. I. Lima, Igor dos Santos, orient. II. Título.

Lourival Carlos Cunha Junior

Matemática Lúdica na Educação de Jovens e Adultos do Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 25 de Maio de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Igor dos Santos Lima

Prof. Dr. Igor dos Santos Lima
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Vagner R. de Bessa

Prof. Dr. Vagner Rodrigues de Bessa
ICET/UFV/Câmpus Rio Paranaíba/MG

Prof. Dr. Veríssimo Pereira Gomes Neto
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Lourival Carlos Cunha Junior é licenciado em Física pela Universidade Federal de Goiás, professor da Secretaria de Educação do Distrito Federal desde fevereiro de 2000, atua como professor no Sistema Penitenciário do Distrito Federal desde fevereiro de 2003, ministrando aulas de Física e Matemática. Também é licenciado em Matemática pela Faculdade Juscelino Kubitschek, especialista em Educação Especial no Sistema Prissonal e Docência do Ensino Superior. Foi bolsista da Capes no curso de mestrado PROFMAT.

Dedico este trabalho às minhas filhas Ariadna e Annelise

Agradecimentos

Agradeço a minha esposa e companheira, Taísa, pelo encorajamento e motivação nos momentos mais difíceis.

Os mais sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Igor Lima, pela boa vontade, paciência, dedicação, entusiasmo e pelo grande profissionalismo, com o qual sempre procurou me motivar.

A todos os Colegas da turma pelo espírito de disciplina, respeito, amizade e união que é uma característica peculiar deste grupo. Gostaria de agradecer em especial ao Elismar e Helder pelo grande companheirismo.

A todos os professores do PROFMAT-Catalão, sem os quais não seria possível a realização deste trabalho.

Aos amigos Claudner, Clayton, Charles, Jeferson, Lino e Peterson, pela colaboração e amizade.

Aos Funcionários da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia - Catalão pela colaboração e amizade.

A minha querida família, em especial a minha mãe Alda e meus irmãos, por torcerem e acreditarem em mim.

A CAPES pelo tão necessário e indispensável apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo analisar como o uso de truques matemáticos, jogos pedagógicos e algoritmos alternativos para a multiplicação e divisão de números inteiros contribuem para o aprendizado das operações multiplicação e divisão entre números inteiros positivos. Os participantes da pesquisa foram alunos de uma turma de Educação de Jovens e Adultos do 2^o Segmento do Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal (CPP-DF). A análise dos resultados foi feita a partir de questionários respondidos pelos alunos e observações realizadas pelo professor durante as aulas. A introdução das operações matemáticas ocorreu inicialmente por truques matemáticos, em seguida foram apresentadas formas alternativas de realizá-las, posteriormente a manipulação dos novos algoritmos, desvendando os truques e finalmente sistematizando com jogos matemáticos. Os participantes demonstraram empenho, dedicação e interesse em relação aos truques, jogos e aos algoritmos alternativos. O objetivo do trabalho foi alcançado. Percebemos que houve de fato uma melhoria na aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave

Truques matemáticos; Algoritmos alternativos; Jogos pedagógicos; Operações entre números inteiros.

Abstract

This dissertation aims to analyze how the use of mathematical tricks, educational games and alternative algorithms for multiplication and Division of integers contribute to learning of multiplication and Division operations between positive integers. Research participants were students of a class of adult and youth education of the 2^o segment of the Central Penitentiary Progression of Distrito Federal (CPP-DF). The analysis of the results was made from questionnaires answered by the students and observations by the teacher during class. The introduction of mathematical operations took place initially by mathematical tricks, then were presented alternative ways to perform them later manipulation of new algorithms, unraveling the tricks and finally organizing with mathematical games. The participants demonstrated commitment, dedication and interest in the tricks, games and alternative algorithms. The objective of this work was achieved. We realized that there was in fact an improvement in pupils ' learning.

Keywords

Mathematical tricks; Alternative algorithms; Educational games; Operations between integers.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Observamos e ouvimos de grande parte de nossos alunos do ensino fundamental a dificuldade em aprender os conceitos básicos de Matemática. Entre eles se destacam a multiplicação e divisão entre números inteiros. Percebemos que o maior problema não é identificar qual operação matemática a ser utilizada, mas sim conseguir realizar o algoritmo de forma correta, principalmente o algoritmo da divisão.

O autor deste trabalha há 12 anos dentro do sistema prisional do Distrito Federal com educação de jovens e adultos, ministrando as disciplinas de Física e Matemática, e percebeu grandes dificuldades dos alunos com as disciplinas de Exatas, principalmente em relação às operações básicas da Matemática. São alunos que tiveram que interromper os estudos por algum motivo. Por exemplo, o envolvimento com drogas e crimes, desestruturação familiar, não conciliação de trabalho e estudos, entre outros. Muitos deles estão há mais de 15 anos fora de uma sala de aula.

Percebemos que se utilizarmos o método tradicional de ensino de Matemática, apenas utilizando aulas expositivas, livros didáticos, apostilas, exercícios propostos, quadro branco, entre outros recursos tradicionais, nosso objetivo pedagógico de aprendizado não é alcançado. Pensando nesta situação resolvemos elaborar este trabalho a fim de abordar em sala de aula uma forma diferente, divertida e mais simples das operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números inteiros, desenvolvidas especialmente para este público.

Despertar interesse em aprender em nossos alunos é um dos grandes desafios do trabalho docente. Nosso trabalho tem com objetivo principal mostrar que podemos utilizar estratégias diferentes das tradicionais, utilizadas na maioria das escolas brasileiras, para ministrar aulas de Matemática cativantes, mas ao mesmo tempo eficientes em relação ao conteúdo proposto. Este trabalho está dividido em 7 Capítulos da seguinte forma:

No Capítulo 1, que é este, faremos uma pequena introdução do trabalho.

No Capítulo 2, mostraremos algoritmos alternativos para realizar multiplicação de números inteiros que serão de grande utilidade para serem utilizadas em sala de aula, sendo uma alternativa agradável para fugir dos algoritmos tradicionais, a fim de melhorar o aprendizado de alunos que tenham dificuldade ou mesmo como motivação e curiosidade para as aulas de Matemática.

Alguns desses algoritmos de multiplicação entre números inteiros positivos foram utilizados ao longo da história. Como a multiplicação egípcia, a multiplicação Indiana e método de barras Napier descritos por Eves (2011)[2], o método chinês descrito por Fernandes (2013)[4] e o método dos camponeses russos descrito por Roloff (2013)[3]. Por último mostraremos um método construído pelo autor deste trabalho, chamado de método de multiplicação quinária. Este método foi baseado nos métodos egípcio e russo, onde a base utilizada é a base binária. O método quinário utiliza a base cinco.

No Capítulo 3, mostraremos algoritmos alternativos para realizar divisões entre números inteiros com intuito de deixar esta operação mais agradável e desmistificar a operação de divisão como sendo uma das mais difíceis.

Também, alguns desses algoritmos de divisão entre números inteiros positivos foram utilizados ao longo da história, como a divisão egípcia descrita por Eves (2011)[2], método de Galeão descrito por Boyer (1974)[1], método de subtrações sucessivas descrito por Paz (2013)[7] e o método de Fibonacci descrito por Eves (2011)[2]. Também mostraremos um método construído pelo autor deste trabalho, chamado de método de divisão quinária.

Se chegarmos a uma sala de aula e perguntarmos aos alunos qual a maior dificuldade em Matemática, com certeza a maioria deles responderá que é a operação de divisão. A divisão de números inteiros é uma das maiores dificuldades que encontramos nos nossos alunos nas séries iniciais do Fundamental II. Logo temos que criar estratégias que favoreçam a superação destas dificuldades, já que o domínio e aplicação dos conceitos fundamentais são essenciais para que o aluno possa prosseguir na construção dos conhecimentos matemáticos. Portanto, temos que procurar alternativas pedagógicas a fim de melhorar o aprendizado nesta área.

No Capítulo 4, apresentaremos jogos e truques matemáticos com aplicação em soma, subtração, potenciação e radiciação de números inteiros que podem ser utilizados como ferramenta pedagógica para o ensino de Matemática, a fim de despertar interesse em nossos alunos e tornar as aulas de Matemática mais interessantes e prazerosas. De acordo com Grando (p. 38, 2000)[11], é necessário que a escola esteja atenta à importância do processo imaginativo na constituição do pensamento abstrato, ou seja, é importante notar que a ação regida por regras, jogo, é determinada pelas ideias do indivíduo e não pelos objetos. Por isso sua capacidade de elaborar estratégias, previsões, exceções e análise de possibilidades acerca da situação de jogo, perfaz um caminho que leva à abstração.

Segundo Ramalho (p. 2, 2006)[10], a aprendizagem significativas de ideias e técnicas matemáticas, usando jogos matemáticos, contribuem para o desenvolvimento, a observação e o raciocínio lógico, contribuindo para a aquisição de uma linguagem matemática, enfatizando o processo de construção dos conceitos, que se dão como consequência da exposição e discussão de ideias, organizando conhecimentos e desenvolvendo habilidades.

Na parte de jogos encontram-se os seguintes jogos: jogo de Nim descrito por Hefez (2013)[6]; jogo do resto descrito por Zeni (2007)[14]; hex multiplicativo retirado do portal Dia a Dia Educação [21]; o bingo da decomposição de números primos e sabe ou não sabe das potências e radiciações. Dentre estes jogos, os dois últimos foram criados pelo autor deste trabalho.

Segundo Grando (p. 202, 2000)[11], o jogo demonstra, quando explorado pelo professor com o cuidado de desencadear o raciocínio e passar do fazer ao compreender, pode ser um recurso eficiente nas aulas de Matemática.

Na parte de truques matemáticos encontram-se os seguintes truques: adivinhar o país, o animal e a cor que a pessoa está pensando; nove misterioso descrito por Hefez (2013)[6]; descobrir a peça de dominó adaptado de Torres (2013)[15]; raiz cúbica instantânea; raiz quadrada instantânea; adivinhando a soma de 10 números descritos por Sampaio (2006)[16]; cartelas binárias; adivinhação do dia da semana em que a pessoa nasceu adaptado de Sá (2010)[19]; raiz primitiva e adivinhação quinária. Dentre estes truques, os dois últimos foram criados pelo autor deste trabalho e o antepenúltimo é uma adaptação utilizando o inverso multiplicativo de 4 módulo 7.

Segundo Nogueira (p. 43, 2014)[20], os truques criam um clima de diversão e entretenimento em sala de aula. Despertam a atenção e a vontade de descobrir a lógica que está por trás de cada truque.

No Capítulo 5, apresentaremos três planos de aula, elaborados pelo autor deste trabalho, para fortalecer os conceitos básicos de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números inteiros positivos. Estes planos de aula utilizaram os algoritmos de multiplicação e divisão entre números inteiros descrito nos Capítulos 2 e 3, e alguns jogos e truques matemáticos descritos no Capítulo 4. Desses três planos de aula, aplicaremos os dois primeiros, abordando a multiplicação e divisão entre números inteiros, com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) do Sistema Penitenciário do Distrito Federal da unidade do Centro de Progressão Penitenciária (CPP).

Nos planos de aulas, aplicados aos alunos, utilizamos os algoritmos de multiplicação chinesa e egípcia, e divisão egípcia e quinária. Os jogos utilizados foram o Hex multiplicativo e o jogo de Nim segunda versão. As mágicas utilizadas foram adivinhar o país, o animal e a cor que a pessoa está pensando, descobrir a peça de dominó, adivinhando a soma de 10 números e adivinhação do dia da semana em que a pessoa nasceu.

Para que os alunos possam manipular os algoritmos alternativos utilizados nos planos de aulas, para realizar a multiplicação e divisão de números inteiros, basta que eles tenham como pré-requisitos a soma, subtração e a multiplicação por 2. Desta forma temos condições de ensinar as operações de multiplicação e divisão para alunos que têm dificuldades em decorar a tabuada, que é o caso de grande parte do público alvo.

No Capítulo 6, faremos coleta, análise e discussão dos resultados obtidos durante a investigação em sala de aula. Este Capítulo está dividido em três partes: na primeira parte mostraremos o perfil dos alunos que foi realizado este trabalho; na segunda e terceira partes, respectivamente, mostraremos como foram realizados os planos de aulas sobre multiplicação e divisão entre números inteiros, analisando os resultados obtidos.

No Capítulo 7, faremos as nossas considerações finais.

2 Formas alternativas para realizar multiplicações de números inteiros

Neste Capítulo, mostraremos algumas técnicas curiosas para a multiplicação de dois números inteiros. Essas técnicas serão de grande utilidade para serem utilizadas em sala de aula, sendo uma alternativa agradável para fugir dos algoritmos tradicionais, melhorando o aprendizado de alunos que tenham dificuldade ou mesmo como motivação e curiosidade para as aulas de Matemática. Às vezes nos deparamos em sala de aula, principalmente no EJA (Educação de Jovens e Adultos), com alunos que apresentam métodos alternativos para realizar contas básicas da Matemática, que aprenderam em alguma época de sua vida. Aqui mostraremos alguns métodos utilizados ao longo da história, como a multiplicação egípcia, a multiplicação indiana e o método de barras Napier descritos por Eves (2011)[2]; o método chinês descrito por Fernandes (2013)[4]; o método dos camponeses russos descrito por Roloff (2013)[3]; e por último mostraremos um método construído pelo autor deste trabalho, chamado de método quinário. Este método foi baseado nos métodos egípcios e russos, onde a base utilizada é a base binária. O método quinário utiliza a base cinco.

2.1 Multiplicações no Egito

O papiro de Rhind é uma das fontes mais antigas da Matemática, também conhecido como Papiro Ahmes. Ele é o mais extenso papiro de natureza Matemática. Segundo Boyer (p. 9, 1974)[1], ele tem cerca de 0,30 metros de altura e 5 metros de comprimento, pertence ao Britsh Museum (Museu Britânico), exceto por alguns de seus fragmentos que estão no Museu do Brooklin em Nova York. O documento foi adquirido em 1858, em uma cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês chamado Henry Rhind, por isso o papiro leva seu nome. Também é conhecido como Papiro de Ahmes, por ser esse o nome do escriba que o copiou de um trabalho mais antigo em 1650 a.C. O escriba conta que o material provem de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 a 1800 a.C. Veja o papiro retirado de Eves(p. 74, 2011)[2], na próxima figura.

Figura 1: Papiro de Rhind, retirado de Eves (p. 74, 2011)[2].

Segundo Eves (p. 72, 2011)[2], todos os 110 problemas incluídos nos papiros Moscou e Rhind são numéricos, e boa parte deles são muito simples. Embora a maioria tenha origem prática, há alguns de natureza teórica. Uma das consequências do sistema de numeração egípcio é o caráter aditivo da aritmética dependente. Assim, a multiplicação e a divisão eram em geral efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2. Vamos utilizar um exemplo de multiplicação retirado do livro de Eves (p. 72, 2011)[2], do produto de 26 por 33. Como $26 = 16 + 8 + 2$, basta somarmos os múltiplos correspondentes de 33. O trabalho pode ser disposto como se segue:

1	33
*2	66
4	132
*8	264
*16	528

Figura 2: Multiplicação egípcia - 26 por 33.

Somando-se os múltiplos adequados de 33, isto é, aqueles indicados com asteriscos, chega-se a resposta 858.

O método acima pode ser descrito da seguinte forma:

1- Escrevemos duas colunas de números, sendo que a primeira começa por 1 e a outra por um dos fatores da multiplicação.

2- Agora duplicamos os números dessas duas colunas, até que o último número da primeira coluna dê um resultado menor ou igual ao outro fator.

3- Escolhemos, na primeira coluna, os valores que somados deem resultado igual ao outro fator.

4- Somamos os números da segunda coluna, correspondentes aos valores que foram escolhidos na etapa anterior.

Vejamos mais um exemplo do produto de 31 por 53, seguindo estas instruções:

Construiremos as duas colunas. A primeira com o número 1 e a segunda com um dos fatores. Vamos escolher o fator menor (31) para colocar na segunda coluna. Vamos dobrar os valores das duas colunas, até que o último número da primeira coluna seja inferior ou igual a 53.

1	31
2	62
4	124
8	248
16	496
32	992

Figura 3: Multiplicação egípcia - 31 por 53.

Em seguida, iremos escolher na primeira coluna, os valores que somados dão exatamente 53, que é o outro fator dessa multiplicação. Neste caso

$$1 + 4 + 16 + 32 = 53.$$

Basta agora achar seus respectivos correspondentes na segunda coluna e somá-los, ou seja, correspondente do 1 é o 31, do 4 é 124, do 16 é 496 e do 32 é o 992, logo:

$$31 + 124 + 496 + 992 = 1643.$$

O método pode ser mais trabalhoso que o tradicional, mas é bem mais fácil, pois basta saber dobrar e somar números inteiros. Além de ser muito interessante e despertar a curiosidade dos alunos, ele é muito rico, desenvolvendo habilidades de lógica e melhorando o raciocínio. Por exemplo, questionando-os como encontrar os números cuja soma é 53, se o número 1 tem que estar presente, o número 32 tem que estar presente ou se número 16 tem que estar presente.

Outra coisa que podemos observar é que para os antigos egípcios realizarem qualquer multiplicação, bastavam saber somar e multiplicar por dois. Este método também pode ser utilizado para trabalhar com potência. Como podemos observar a primeira coluna é uma potência de dois e a segunda também o é, multiplicada por uma constante. Outra abordagem, que podemos fomentar, é a linguagem utilizada pela computação, abordando o sistema binário de dados.

Podemos provar este método utilizando duas propriedades: A primeira é escrever um dos números naturais como soma de potências de dois, em vez de base decimal, e a segunda é utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

No exemplo, o que fizemos foi descobrir quais as potências de 2 que somadas geravam o número 53, ou seja, o número 53 na base dois é escrito da forma 11101, pois

$$53 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

No caso, obtivemos os números 32, 16, 4 e 1. Depois o que fizemos foi substituir o número 53 por essa soma de potências de 2, ou seja, a multiplicação foi transformada em:

$$31 \cdot 53 = 31 \cdot (32 + 16 + 4 + 1).$$

Agora aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtemos:

$$31 \cdot 51 = 31 \cdot 32 + 31 \cdot 16 + 31 \cdot 4 + 31 \cdot 1 = 992 + 496 + 124 + 31 = 1643,$$

que é o resultado procurado.

Este método também era utilizado para a divisão entre dois números inteiros, de que falaremos no próximo Capítulo.

Utilizaremos este método na elaboração do plano de aula relacionado a multiplicação entre números inteiros positivos, que será visto no Capítulo 5, para ser aplicado em uma turma de 2^o semestre do 2^o segmento do EJA.

2.2 Multiplicações na Índia

Uma outra técnica interessante de multiplicação de números inteiros é conhecido como Método Gelosia, muito difundido entre os árabes, mas que tem, provavelmente, origem na Matemática dos hindus. Segundo Eves (p. 247, 2011)[2], pouco se sabe sobre o desenvolvimento da Matemática hindu antiga, em virtude da falta de registros históricos autênticos. A fonte histórica preservada mais antiga são as ruínas de uma cidade de 5000 anos, encontradas em Mohenjo Daro, um sítio localizado a nordeste da cidade de Karachi no Paquistão.

Acredita-se que os matemáticos hindus desenvolveram um método de multiplicação através de tábuas quadriculadas. Mais tarde os árabes o levaram para a Europa e ficou conhecido como Método da Gelosia. Segundo Eves [2], trata-se de um diagrama em rede em que as adições se efetuam diagonalmente. Como podemos notar na figura seguinte, o fato de cada cela estar dividida em dois triângulos por uma diagonal faz com que não seja necessário nenhum transporte na multiplicação.

Vamos utilizar o método retirado de Eves (p. 254, 2011)[2], para efetuar o produto de 135 por 12. Depois resolveremos outro exemplo utilizando o método descrito.

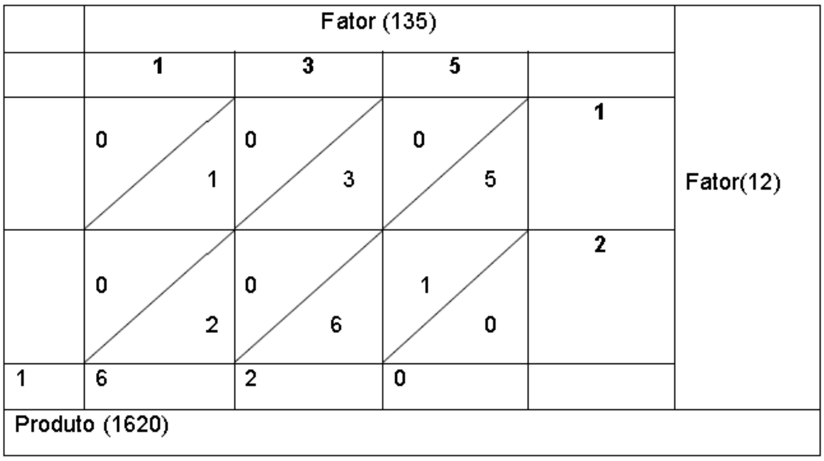


Figura 4: Método da Gelosia, multiplicação de 135 por 12.

Vejamos outro exemplo de multiplicação de $4128 \cdot 243$ por este método com mais detalhes.

1- Vamos construir uma tabela com 4 colunas e 3 linhas, dividindo cada quadradinho com uma diagonal e formando dois triângulos. A quantidade de colunas e linhas estão relacionandos com o número de algarismos dos fatores envolvidos na multiplicação.

2- Dentro de cada quadradinho colocamos os resultados das multiplicações dos algarismos correspondentes da coluna e da linha. Se o resultado for de apenas um dígito deve ser escrito precedido de zero

3- Em seguida somamos os algarismos que estão nas mesmas diagonais, se passar de 9, a cada 10 é transformado em 1 para ser acrescentada na diagonal seguinte.

Vejamos a tabela abaixo:

	Fator (4128)					
	4	1	2	8		Fator (243)
1	0+1 / 8	0+1 / 2	0+1 / 4	1 +2 / 6+1	2	
0	1 / 6	0 / 4	0 / 8	3 / 2	4	
0	1 / 2	0 / 3	0 / 6	2 / 4	3	
	3	1	0	4		
Produto (1003104)						

Figura 5: Método da Gelosia, multiplicação de 4128 por 243.

Portanto,

$$4128 \cdot 243 = 1003104.$$

Este método é bem parecido com o método tradicional. Uma das diferenças é que ele é mais demorado, pois temos de construir uma tabela sempre que queremos realizar uma multiplicação. A vantagem é que preserva a organização. Assim as possibilidades de erros diminuem. Este método pode ser utilizado por professores em seus planos de aula para facilitar o entendimento dos alunos que tenham dificuldades no algoritmo tradicional.

2.3 Barras de Napier

John Napier nasceu em 1550, e morreu em de abril de 1617. Era matemático escocês. Ele é conhecido como o inventor do logaritmo. Foi ele quem criou o dispositivo que obteve grande destaque em meio à área dos instrumentos aritméticos, chamado de Barras de Napier ou ossos de Napier, que hoje podemos utilizar como ferramenta didática.

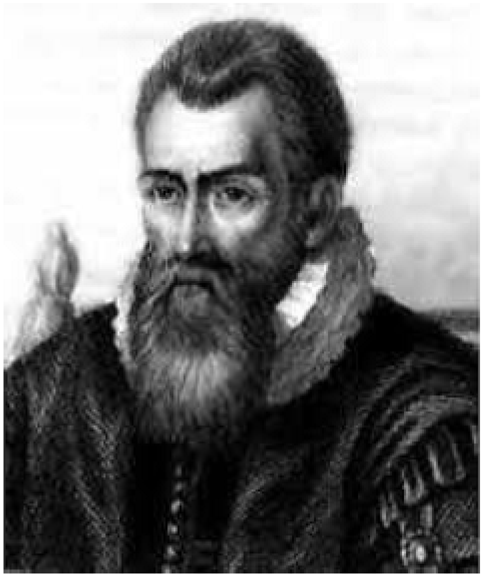


Figura 6: Jonh Napier, retirada de Eves (p. 341, 2011)[2].

Segundo Eves (p. 369, 2011)[2], eram tão amplas as dificuldades experimentadas na multiplicação de números grandes que se buscaram métodos mecânicos para levar a cabo o processo. Nesse sentido a invenção de Napier, descrita em seu trabalho, *Rabdologiae*, publicado em 1617, conseguiu alcançar muita fama.

As Barras de Napier são construídas por colunas, orientadas pelos números de 0 a 9. A partir daí preenche-se cada coluna com seus respectivos múltiplos desses números. Vamos dar um exemplo utilizando este método, retirado do livro de Eves (p. 370, 2011)[2]. Segundo Eves [2], o exemplo está no livro *Rabdologiae*, escrito por Napier, da multiplicação de 1615 por 365. Ponha as barrar encabeçadas por 1, 6, 1, 5 lado a lado, como mostra a Figura 7. Os resultados da multiplicação de 1615 pelo 5, pelo 6 e pelo 3 de 365, a saber 8075, 9690 e 4845 podem então ser lidos facilmente, sendo necessário no máximo efetuar algumas adições simples de 2 dígitos na diagonal. Obtêm-se o produto final por meio de uma adição, como mostra a figura.

	1	6	1	5	
1	0 / 1	0 / 6	0 / 1	0 / 5	
2	0 / 2	1 / 2	0 / 2	1 / 0	
3	0 / 3	1 / 8	0 / 3	1 / 5	
4	0 / 4	2 / 4	0 / 4	2 / 0	
5	0 / 5	3 / 0	0 / 5	2 / 5	
6	0 / 6	3 / 6	0 / 6	3 / 0	
7	0 / 7	4 / 2	0 / 7	3 / 5	
8	0 / 8	4 / 8	0 / 8	4 / 0	
9	0 / 9	5 / 4	0 / 9	4 / 5	

Figura 7: Barras de Napier, multiplicação de 1615 por 365.

Da linha 3, somando os dois dígitos da diagonal, temos o resultado da multiplicação 3 por 1615, 4845. Da linha 6, somando os dois dígitos da diagonal, temos o resultado da multiplicação de 6 por 1615, 9690. Da linha 5, somando os dois dígitos da diagonal, o resultado da multiplicação de 5 por 1615, 8075. Colocando estes resultados conforme a disposição abaixo e somando-os, chegamos ao resultado final da multiplicação.

$$\begin{array}{r} 4845 \\ +\ 9690 \\ 8075 \\ \hline 589475 \end{array}$$

Logo $1615 \cdot 365 = 589475$.

Observamos que o método permite multiplicar de forma automática, basta que uma pessoa saiba somar números inteiros.

2.4 Multiplicações na China

De acordo com Eves (p. 241, 2011)[2], pouco material de natureza primária oriundo da china antiga chegou até nós. Isso em virtude de os povos da época fazerem muitos de seus registros em bambu, material perecível. E, para agravar, o imperador Shi Huang-ti ordenou em 213 a.C. uma lamentável queima de livros. Muito de nosso conhecimento sobre a Matemática chinesa primitiva baseia-se em informações orais e interpretações posteriores de textos originais. Acredita-se que este método descrito a seguir teve origem na China, de acordo com Fernandes (p. 4, 2013)[4], até hoje este método é utilizado em escolas no Japão.

Segundo Casanova (p. 12, 2011)[5]. Os chineses usavam varetas de bambu para multiplicar números inteiros. Colocando varetas paralelas e outras perpendiculares, que serviam para representar os fatores. Os pontos de interseção das varetas são contados na diagonal, começando pela direita. Se o resultado da soma for maior que nove, some o valor da dezena na próxima diagonal.

Por exemplo; multiplicar $23 \cdot 25$ era feito da seguinte forma: em relação ao fator 23 colocam-se 5 varetas paralelas e oblíquas, sendo duas varetas próximas, deixava-se um espaço maior e colocam-se mais três varetas próximas. Em relação ao fator 25, colocam-se sete varetas perpendiculares as cinco anteriormente, sendo duas próximas, deixa-se um espaço maior e colocam-se mais cinco varetas próximas, conforme a figura seguinte.

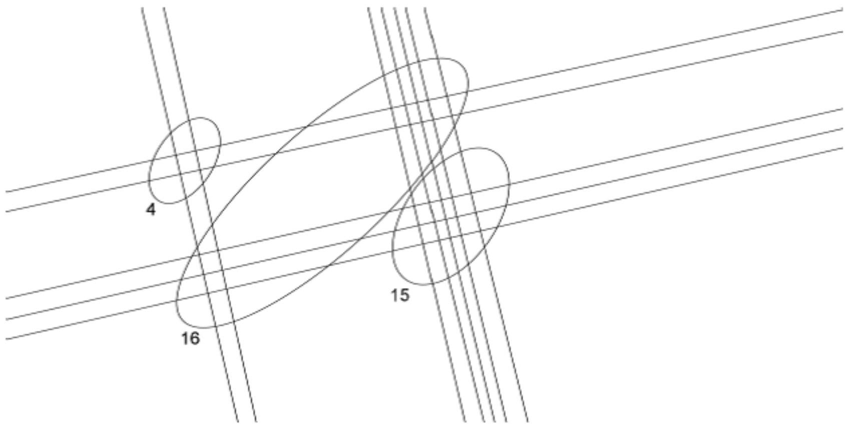


Figura 8: Multiplicação chinesa, 23 por 25.

Basta agora contar os pontos de interseção. Conforme a figura acima, os da direita representam as unidades, logo como são quinze, equivalem a uma dezena e cinco unidades, os do meio representam as dezenas, como são dezesseis, logo são uma centena e seis dezenas, os da esquerda representam as centenas, portanto, o resultado da multiplicação é 575. Quando na multiplicação aparece um algarismo zero, sabemos que o produto de um número por zero é zero, então iremos representar este algarismo por um traço mais forte e não contaremos seus pontos de interseção. Vamos exemplificar na multiplicação de 203 por 22. Veja a próxima figura:

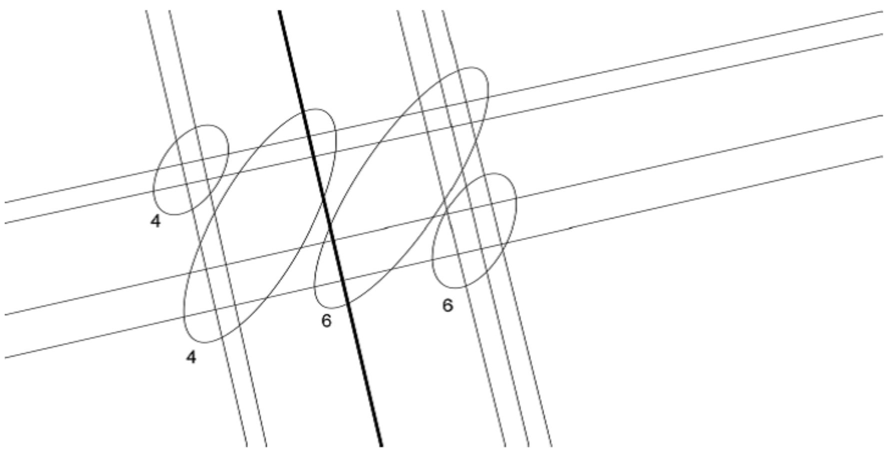


Figura 9: Multiplicação chinesa, 203 por 22.

Logo o resultado da multiplicação é 4466.

O método chinês tem uma grande vantagem em relação aos demais, pois basta que a pessoa saiba contar, mas para multiplicar algarismos maiores, como 9 por 9, ele deve construir 9 retas paralelas e 9 retas concorrentes e depois contar os pontos de interseção delas, isso leva um certo tempo. Para as práticas na escola pode-se recorrer ao uso de varetas do jogo "pega vareta", trazido pelos próprios alunos. Pode-se perceber que este método é muito rico, em informações e conceitos matemáticos relacionados à geometria, como retas paralelas, concorrentes, oblíquas e perpendiculares, interseções entre retas, ângulos, etc.

Utilizaremos este método nos planos de aula com alunos que tenham dificuldades em decorar a tabuada.

2.5 Multiplicações na Rússia

Os camponeses russos utilizavam um método interessante para obter o produto de dois números inteiros. Segundo Roloff (p. 3, 2013)[3], o método russo trata-se de uma variação do método egípcio. Neste caso, basta dobrar sucessivamente um dos números e dividir sucessivamente o outro número, desprezando a parte fracionária. Na coluna das metades, desprezamos os números pares, e somam-se os valores correspondentes aos números ímpares.

Os camponeses usavam um algoritmo com apenas multiplicações e divisões por 2. Esse método tem uma grande vantagem, pois basta ter conhecimento da tabuada de multiplicação e divisão do número 2. Vejamos um exemplo, o produto de 534 por 37.

Escreva duas colunas de números, iniciando a da esquerda por 37 e a da direita por 534. Agora, divida por 2 os números da coluna da esquerda, sucessivamente, abandonado a parte decimal sempre que aparecer, terminando a tabela assim que chegar no 1. Na coluna da direita, dobram-se os valores sucessivamente até completá-la, conforme a figura seguinte:

37	534	+
18	1068	
9	2136	+
4	4272	
2	8544	
1	17088	+

Figura 10: Método dos camponeses Russos, multiplicação de 37 por 534.

Some os elementos da coluna da direita que correspondem a elementos da coluna da esquerda que são ímpares, obtemos assim a multiplicação de 37 por 534.

Portanto, $37 \cdot 534 = 534 + 2136 + 17088 = 19758$.

A explicação para este algoritmo, segundo Hefez (2013, p. 73)[6], é que todo número natural escreve-se de modo único como soma de potências distintas de 2. Logo para efetuar a multiplicação de 37 por 534, escrevemos 37 em base dois:

$$37 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

logo,

$$37 \cdot 534 = (1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 534 = (1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0) \cdot 534$$

$$= (32 + 4 + 1) \cdot 534 = 17088 + 2136 + 534 = 19758.$$

Vamos resolver o mesmo exemplo feito com a multiplicação egípcia e comparar os dois métodos, a multiplicação de 31 por 53. Fazendo o mesmo procedimento descrito anteriormente, temos:

31	53	+
15	106	+
7	212	+
3	424	+
1	848	+

Figura 11: Método dos camponeses Russos, multiplicação de 31 por 53.

Portanto, $31 \cdot 53 = 53 + 106 + 212 + 424 + 848 = 1643$.

Podemos perceber que o método russo é mais mecânico que o egípcio, logo exige menos raciocínio do aluno. Mas no método egípcio precisávamos de apenas, como pré-requisitos, soma e a multiplicação por 2, enquanto no russo, além da soma e multiplicação por 2, precisamos da divisão por 2.

2.6 Método quinário

Em observação aos métodos mostrados anteriormente para a multiplicação de números inteiros, percebi que poderia criar um método utilizando a base 5, que vou chamar de método de multiplicação quinária. Ele foi baseado nos métodos russo e egípcio. Aqui utilizaremos apenas multiplicações e divisões até o algarismo cinco para realizar qualquer multiplicação de números inteiros positivos, ou seja, para realizar este método, basta que o aluno saiba multiplicar e dividir até 5. Ele é uma alternativa para fugirmos do nosso algoritmo tradicional e mostrar que existem outras possibilidades para realizar multiplicações.

Primeiramente, apresentaremos algumas técnicas para facilitar estes cálculos. Para multiplicar um número por 5, basta multiplicar ele por 10 e posteriormente obter a metade, pois $5 = 10/2$. Multiplicar por 10 é fácil, basta acrescentar um zero à direita do número. Posteriormente para chegar ao resultado basta obter a metade, ou seja, dividir por 2. Por exemplo, $325 \cdot 5$ é $3250 \div 2 = 1625$. Para dividir um número por 5 basta agora fazer o contrário, ou seja multiplicar por 2 e dividir por 10. Por exemplo, $678 \div 5$, já sabemos que o resto é 3, pois o número mais próximo de 678, que é divisível por 5, por falta é 675. Portanto, dividindo 675 por 5 basta dobrar 675, que é 1350, e retirar o 0 à direita, ou seja, $1350 \div 10 = 135$, portanto, a divisão de 678 por 5 tem como quociente 135 e resto 3.

O algoritmo consiste em construir uma tabela com quatro colunas colocando um dos fatores na primeira coluna e o outro na segunda, na terceira os restos, e na quarta a multiplicação do resto pelo número que está à sua esquerda, que aqui chamaremos de B, como na seguir. Vamos exemplificar os passos a serem tomados, utilizando a multiplicação de 326 por 924.

1- Escrevemos 326 na primeira linha da primeira coluna e o 924 na primeira coluna da segunda linha.

2- Dividimos 326 por 5, logo temos como quociente 65 e resto 1, colocamos 65 abaixo do 326 e o 1 na coluna do resto. Dividimos 65 por 5, encontramos quociente 13 e resto 0, colocamos 13 abaixo do 65 e o 0 na coluna dos restos. Dividimos 13 por 5 encontramos quociente 2 e resto 3, colocamos 2 abaixo do 13 e o 3 na coluna dos restos. Dividimos 2 por 5, encontramos quociente 0 e resto 2, colocamos o quociente 0 abaixo do 3 e o resto 2 na coluna dos restos. Como chegamos ao quociente 0 encerramos este procedimento.

Enquanto os números da primeira coluna são divididos por 5, os números da segunda coluna serão multiplicados por 5, até que seja preenchida a tabela, ou seja, a terceira coluna seja preenchida até emparelhar com o último resto.

3- Multiplicamos 954 por 5 e colocamos o resultado (4620) abaixo do 924. Multiplicamos 4620 por 5 e colocamos o resultado (23100) abaixo do 4620. Multiplicamos 23100 por 5 e colocamos o resultado (115500) abaixo do 23100.

4- Multiplicamos o resto por B, ou seja, multiplicamos o elemento da segunda coluna com seu respectivo resto, que está na terceira coluna e colocamos o resultado na quarta coluna.

5- Agora somamos todos os elementos da quarta coluna e chegamos ao resultado da multiplicação de 326 por 924.

A	B	*Resto da divisão de A por 5*	$B \cdot R$
326	924	1	924
65	4620	0	0
13	23100	3	69300
2	115500	2	231000
0		*Produto*	301224

Figura 12: Método quinário, multiplicação de 326 por 924.

A explicação para este algoritmo é que todo número natural escreve-se de modo único como soma de potências distintas de 5. Logo para efetuar a multiplicação de 326 por 924, escrevemos 326 em base cinco:

$$326 = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0,$$

logo,

$$326 \cdot 924 = (2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0) \cdot 924$$

$$= (2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^0) \cdot 924$$

$$= (250 + 75 + 1) \cdot 924 = 231000 + 69300 + 924 = 301224.$$

Vamos resolver alguns exemplos utilizando este método e depois fazer uma comparação com os métodos anteriores.

Exemplo 2: multiplicação de 31 por 53.

A	B	*Resto da divisão de A por* 5	$B \cdot R$
31	53	1	53
6	265	1	265
1	1325	1	1325
0		*Produto*	1643

Figura 13: Método quinário, multiplicação de 31 por 53.

Exemplo 3: multiplicação 548 por 283.

A	B	*Resto da divisão de A por* 5	$B \cdot R$
283	548	3	1644
56	2740	1	2740
11	13700	1	13700
2	68500	2	137000
0		*Produto*	155084

Figura 14: Método quinário, multiplicação de 548 por 283.

Exemplo 4: multiplicação 26 por 36.

A	B	*Resto da divisão de A por* 5	$B \cdot R$
26	36	1	36
5	180	0	0
1	900	1	900
0		*Produto*	936

Figura 15: Método quinário, multiplicação de 26 por 36.

Exemplo 5: multiplicação 135 por 12.

A	B	$Resto\ da\ divisão\ de\ A\ por\ 5$	$B \cdot R$
12	135	2	270
2	675	2	1350
0		*Produto*	1620

Figura 16: Método quinário, multiplicação de 135 por 12.

Exemplo 6: multiplicação 4128 por 243.

A	B	$Resto\ da\ divisão\ de\ A\ por\ 5$	$B \cdot R$
243	4128	3	12384
48	20640	3	61920
9	103200	4	412800
1	516000	1	516000
0		*Produto*	1003104

Figura 17: Método quinário, multiplicação de 4128 por 243.

Exemplo 7: 1615 por 365.

A	B	$Resto\ da\ divisão\ de\ A\ por\ 5$	$B \cdot R$
365	1615	0	0
73	8075	3	24225
14	40375	4	161500
2	201875	2	403750
0		*Produto*	589475

Figura 18: Método quinário, multiplicação de 1615 por 365.

Exemplo 8: 625 por 3680.

A	B	$Resto\ da\ divisão\ de\ A\ por\ 5$	$B \cdot R$
625	3680	0	0
125	18400	0	0
25	92000	0	0
5	460000	0	0
1	2300000	1	2300000
0		$Produto$	2300000

Figura 19: Método quinário, multiplicação de 625 por 3680.

Analisando os procedimentos utilizados, podemos verificar as vantagens e as desvantagens desse método em relação aos demais. Uma das vantagens e que ele é bem mais compacto, ou seja, o algoritmo tem menos etapas, já que a divisão e multiplicação é realizada por 5, chega ao quociente zero com mais rapidez. Já nos modelos russo e egípcio, a base utilizada é 2, portanto o algoritmo mais extenso. A desvantagem é que o aluno precisa ter como pré-requisito a multiplicação dos algarismos 1 ao 5. Já para o russo e egípcio, que utilizam a base binária, basta que o aluno saiba multiplicar e dividir por 2.

3 Formas alternativas para realizar divisões de números inteiros

A divisão é considerada uma das quatros operações fundamentais da Aritmética. Ela é também conhecida como partição. Se chegarmos a uma sala de aula e perguntarmos aos alunos qual a maior dificuldade em Matemática, com certeza, a maioria deles responderá que é a operação de divisão. A divisão de números inteiros é uma das maiores dificuldades que encontramos nos nossos alunos nas séries iniciais do Fundamental II, logo temos que criar estratégias que favoreçam a superação destas dificuldades, sempre lembrando que para aprender divisão, os alunos precisam ter como pré-requisitos a soma, subtração e a multiplicação. Aqui mostraremos algumas formas alternativas para realizar divisão de dois números inteiros. Posteriormente utilizaremos alguns destes métodos em nossos planos de aula, com intuito de deixar esta operação mais agradável e conquistar nossos alunos para Matemática.

3.1 Divisões no Egito

Como comentamos anteriormente, o papiro de Rind é uma das fontes mais ricas sobre a Matemática egípcia. Ele contém 85 problemas práticos daquela época e descreve métodos para multiplicação, divisão e operação com frações. De acordo com Eves (p. 72, 2011)[2], a multiplicação e a divisão eram em geral efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2. Esse método requer habilidade do aluno em soma, subtração e multiplicar por 2.

A divisão era feita usando o mesmo processo da multiplicação, mas em sentido inverso. Utilizaremos um exemplo retirado de Eves (p. 72, 2011)[2], para dividir 753 por 26. Dobramos sucessivamente o divisor 26 até o ponto em que o próximo dobro exceda o dividendo 753. O procedimento está exposto na próxima figura.

1	26
2	52
4 *	104
8 *	208
16 *	416

Figura 20: Divisão egípcia, 753 por 26.

Como

$$753 = 416 + 337$$

$$753 = 416 + 208 + 129$$

$$753 = 416 + 208 + 104 + 25.$$

Portanto, observando as linhas com asteriscos na coluna acima, logo o quociente da divisão é $16 + 8 + 4 = 28$ e que o resto é 25.

Faremos outro exemplo, quando a divisão é exata. Divisão de 152 por 8.

O escriba dispunha os cálculos, como no caso de uma multiplicação. Iremos construir uma tabela com duas colunas. A primeira com o número 1 e a segunda com o divisor 8. Em seguida, dobrar os valores das duas colunas, até o ponto em que na segunda coluna, o próximo dobro não exceda o dividendo 152.

1*	8
2*	16
4	32
8	64
16*	128

Figura 21: Divisão egípcia, 152 por 8.

Iremos escolher na segunda coluna, (e não na primeira, como fizemos na multiplicação), os valores que somados dão exatamente 152, que é o dividendo dessa divisão. Neste caso, temos:

$$152 = 128 + 24$$

$$152 = 128 + 16 + 8.$$

Basta agora achar seus respectivos correspondentes na primeira coluna e somá-los, ou seja, como o correspondente do 8 é o 1, do 16 é o 2 e do 128 é o 16, logo o quociente é $1 + 2 + 16 = 19$.

A explicação para este método é fácil, na realidade encontramos a decomposição de 152 em números da forma

$$8 \cdot 2^k, k \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$152 = 8 + 16 + 128 = 8 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 16 = 8 \cdot (1 + 2 + 16),$$

como $152 = 8 \cdot (1 + 2 + 16)$ se, e somente se, 152/8=(1+2+16)=19, portanto, o divisão de 152 por 8 é 19.

Esse método é um dos mais simples que percebi sobre divisões de números inteiros, além de o seu algoritmo ser bem fácil de operar, bastando que seu operador saiba somar, subtrair e dobrar números inteiros. Estaremos utilizando-o em nossos planos de aulas.

3.2 Método Galeão

Este método é conhecido como o "método de riscar" ou "método do galeão", por sua semelhança com um navio. De acordo Boyer (p. 158, 1974)[1], os árabes e através deles, os europeus mais tarde, parecem ter adotado a maior parte de seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão, também venha da Índia. Mostraremos como o algoritmo do método Galeão é realizado, mas não iremos utilizá-lo em nossos planos de aula, por ser um algoritmo bastante trabalhoso.

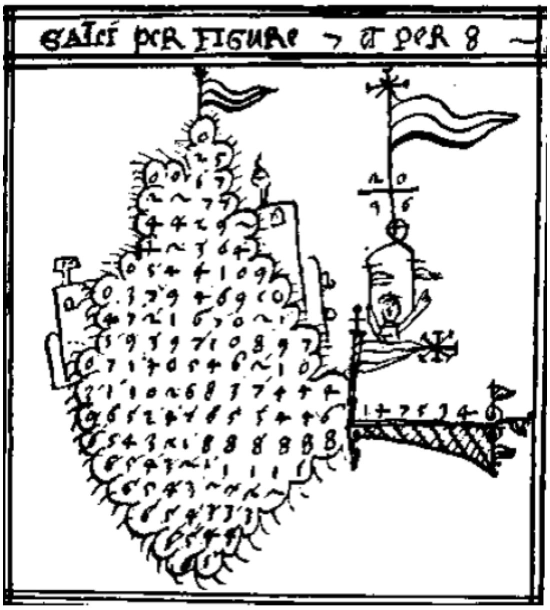


Figura 22: Divisão em Galeão, século XVI, retirada de Boyer (p. 159, 1974)[1].

Exemplificaremos o método do galeão com um exemplo: dividiremos 1320 por 49. Escreveremos o divisor à esquerda do dividendo, conforme a próxima figura. Obteremos o primeiro algarismo do quociente dividindo 132 por 49. A resposta é 2. Logo escreva à direita do dividendo:

$$\mathbf{49|1320|2.}$$

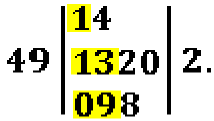
Escreveremos o produto de $2 \cdot 49 = 98$, abaixo do 132.

$$\mathbf{49\left|\begin{array}{l}1320\\098\end{array}\right|2.}$$

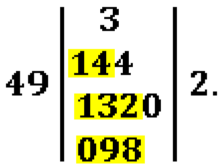
Fazemos $1 - 0$ e colocamos 1 acima do primeiro 1 do 132 e riscamos o 1 e o 0.

$$\mathbf{49\left|\begin{array}{l}1\\1320\\098\end{array}\right|2.}$$

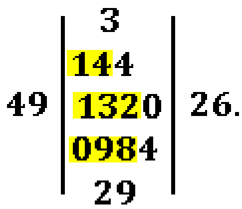
Como não podemos subtrair 3 de 9, agrupamos o 1 que está acima do 1 riscado como o 3, formando 13, e realizamos a subtração de $13 - 9 = 4$. Colocamos o 4 acima do 3, riscando o 1, 3 e 9.



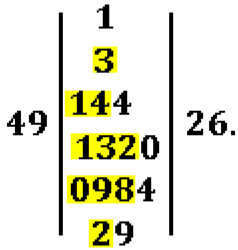
Como não é possível subtrair 8 de 2, retiramos 1 do 4 (riscando o 4, colocando 3 acima dele), e agrupamos com o 2. Realizamos a subtração $12 - 8 = 4$ e colocamos 4 abaixo do 2, riscando o 8 e 2, veja como fica.



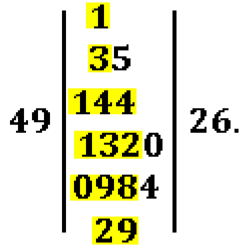
Logo, o dividendo restante do próximo é 340, que são os algarismos que não foram riscados. Dividimos novamente 340 por 49. A resposta é 6, logo coloca-se o 6 no local dos divisores à direita do 2, fazemos $6 \cdot 49 = 294$, colocando 29 abaixo do 98 e 4 abaixo do 0, da seguinte forma:



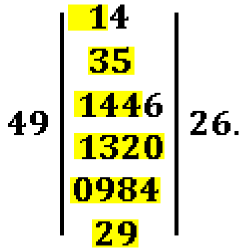
Fazemos $3 - 2 = 1$, colocando 1 acima do 3, riscando 3 e 2.



Como 9 não subtrai de 4, agrupamos 1 com 4, formando 14, e realizamos $14 - 9 = 5$. Coloca-se 5 acima do 4 e riscamos 1, 4 e 9.



Como 4 não subtrai de 0, retiramos 1 do 5 (riscando o 5 e colocando 4 acima do 5) e agrupamos com o 0, formando 10, e fazemos 10-4=6, logo colocamos 6 acima do 0, riscando 0 e 4. Desta forma:



Como todos os algarismos de 1320 foram riscados, a conta se encerra, com quociente 26 e resto 46.

Este método, parecido com o método tradicional que utilizamos hoje em dia, a primeira vista não é o mais fácil para realizar divisões de números inteiros. Ele pode ser apresentado com objetivo de mostrar como foi feita a construção dos conhecimentos da Matemática no decorrer da história, uma forma criativa de realizar divisões, mostrando que existem vários caminhos de ações para alcançar o mesmo resultado.

3.3 Método de subtrações sucessivas

Este método é um dos mais simples para calcular divisão de dois números inteiros e também o mais intuitivo. Ele consiste em diminuir o valor do dividendo pelo valor do divisor e ir contando quantas vezes é feita a subtração. Quando o resultado da subtração for menor que o numerador, esse é o resto da divisão. O método é simples e mais demorado se o resultado da divisão (quociente) for um número grande, pois temos que fazer muitas subtrações. Mas podemos adaptá-lo para encurtar o procedimento.

Segundo Paz (p. 117, 2013)[7], O algoritmo das subtrações sucessivas se caracteriza pelo cálculo de quocientes parciais, por meio de subtrações sucessivas, que posteriormente são adicionados para obter o quociente final. É interessante ressaltar que neste algoritmo o trabalho de cálculo se desenvolve tanto com o dividendo quanto com o divisor globalmente, pois são subtraídos do dividendo múltiplos do divisor até se obter um resto inferior ao divisor.

Vejamos um exemplo desse método.

Exemplo: Queremos dividir 237 por 35 e se realizarmos subtrações sucessivas, iremos fazer da seguinte forma:

$$237 - 35 = 202.$$

Como 202 é maior que 35, podemos subtrair 35 de 202, logo

$$202 - 35 = 167.$$

Portanto, já temos dois 35 em 237 e podemos retirar mais um 35, e assim por diante, logo

$$167 - 35 = 132$$

$$132 - 35 = 97$$

$$97 - 35 = 62$$

$$62 - 35 = 27.$$

Como 27 é menor que 35, encontrando 6 como quociente e 27 como resto. Para encurtar, podemos perceber e também convencer o aluno que 5 vezes 35 é menor que 250, observando que 35 é menor que 50 e que 200 dividido por 50 é 4.

Multiplicamos $35 \cdot 5 = 175$ e subtraímos de 237, logo

$$237 - 175 = 62.$$

Retirando novamente 35 de 62 temos:

$$62 - 35 = 27.$$

Utilizando está estratégia, encontramos o resultado de forma mais rápida.

Este método é uma sugestão para ser trabalhado nos conceitos iniciais da divisão. Começando com este método e depois apresentando o algoritmo tradicional, a fim de que o aluno faça construção dos conhecimentos matemáticos por etapas: do mais fácil, mas trabalhoso, para o mais rápido, mas exigindo mais de suas habilidades desenvolvidas anteriormente.

Percebemos que dos três métodos de divisões apresentados até agora, o mais simples é este, seguido do egípcio e posteriormente o do galeão, sendo o do galeão inviável para trabalhar em séries iniciais, por ter um algoritmo não trivial. Iremos elaborar os nossos planos de aula utilizando o método egípcio comparando-o com método tradicional.

3.4 Método de Fibonacci

De acordo com Eves (p. 292, 2011)[2], no limiar do século XIII despontou a figura de Leonardo Fibonacci. Sua matemática foi baseada na Aritmética e Álgebra que Fibonacci aprendeu durante as suas viagens pelo Mediterrâneo. Em 1228 o livro "Liber Abaci" foi novamente publicado após uma revisão, publicado inicialmente em 1202. De acordo com Hefez (p. 41, 2013)[6], essa obra foi responsável pela introdução na Europa do sistema indo-arábico e pelo posterior desenvolvimento da Álgebra e da Aritmética no Ocidente.

Figura 23: Leonardo Fibonacci - retirada de Eves (p. 293, 2011)[2].

Vamos utilizar o exemplo da divisão de 471 por 27 para mostrar o método de Fibonacci. Primeiramente devemos construir uma tabela conforme a próxima figura. Colocando a sequência de Fibonacci em uma das colunas, e na outra coluna uma outra sequência de Fibonacci começando com 27. Temos que construir esta sequência até o último elemento, seja este maior ou igual a 471. Agora pegamos o penúltimo número, se o último for maior, ou pegamos o último, se for igual. Junto com este número, procuramos os elementos dessa coluna cuja soma seja 471 ou mais próximo, por falta, de 471, e achamos seu correspondente com os números da sequência original de Fibonacci. Somando-os encontramos o quociente da divisão, se a soma foi a mais próxima. Logo a divisão não é exata, e para encontrar o resto basta subtrair este número de 471, veja a próxima figura, ilustrando tal fato.

Sequência de Fibonacci original	Sequência de Fibonacci começando por 27
1	27
1	27
2	54
3	81
5	135
8	216
13	351
21	612

Figura 24: Divisão de Fibonacci, 471 por 27.

Ou seja, como 612 é maior que 471, paramos. Pegamos 351, que é o penúltimo número. Agora, observamos de baixo para cima, que 351 + 216 é maior que 471, logo descartamos 216. Como $351 + 81 = 432$ não ultrapassa 351, pegamos 81. A seguir verificamos que $351+81+54$ passa de 471, logo descartamos 54, como $351+81+27 = 459$ e não passa de 471, logo o resto da divisão é $471 - 459 = 12$. Agora, olhamos os correspondentes dos números 351, 81 e 27, na coluna do lado, somando-os, chegamos ao resultado do quociente, que é $13 + 3 + 1 = 17$. Portanto, a divisão de 471 por 27 dá 17 e sobra resto 12.

Podemos perceber que este método é bem parecido com o método egípcio, sendo que o de Fibonacci necessita um pouco mais de habilidade para desenvolver. Neste método, também podemos observar que basta o aluno saber somar e subtrair dois números inteiros. Este método é muito interessante e também é uma oportunidade para falar sobre a sequência que Fibonacci descreveu, no ano de 1202, sobre o crescimento de uma população de coelhos.

A sequência de Fibonacci tem grandes aplicações, como em análise de mercados financeiros. Segundo Belmont (p. 4, 2010)[8], Elliott desenvolveu uma teoria com base na denominada Sequência de Fibonacci para explicar o processo de decisão dos investidores, que acontece em situações de incerteza. Ela também aparece em configurações biológicas. De acordo com Ribeiro (p. 4, 2013)[9], A sequência de Fibonacci tem aplicações na ciência da computação e na teoria dos jogos. Também aparece em configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores, no arranjo do cone da alcachofra, do abacaxi, ou no desenrolar da samambaia.

Por exemplo, para encontrarmos quantos quilômetros 8 milhas correspondem, basta pegar o sucessor de 8 na sequência de Fibonacci, que é 13, ou seja, 8 milhas são aproximadamente 13 quilômetros. Esse método funciona porque para converter milhas para quilômetros basta multiplicar por 1,609 e a razão entre dois números consecutivos de Fibonacci, a partir do 4º termo, se aproxima de 1,618... que támbem é chamada de razão áurea.

3.5 Método quinário

Quando falamos sobre as formas alternativas de multiplicação, criamos um método alternativo para realizar multiplicações de números inteiros. Da mesma forma, mostraremos um algoritmo alternativo para realizar divisões de números inteiros, utilizando novamente a base 5, aqui basta que o aluno saiba somar, subtrair e multiplicar por 5.

Utilizaremos vários exemplos para mostrar esta técnica, vamos começar com a divisão de 225 por 8.

Escrevemos a primeira com o número 1 e a segunda com o divisor. Em seguida, multiplicaremos por 5 os valores das duas colunas, e paramos antes que o último valor da segunda coluna seja superior a 225, conforme tabela abaixo:

1	8
5	40
25	200

Figura 25: Divisão quinária, 225 por 8.

Como o resultado da próxima multiplicação por 5 é 1000, $200 \cdot 5$, e é maior que 225, paramos. Segue

$$225 = 200 + 25$$

$$225 = 200 + 8 + 17$$

$$225 = 200 + 8 + 8 + 9$$

$$225 = 200 + 8 + 8 + 8 + 1.$$

Como 200 corresponde ao 25 na primeira coluna e 8 corresponde ao 1, logo, o quociente da divisão é $25 + 1 + 1 + 1 = 28$ e o resto é 1.

Exemplo 2: Divisão de 527 por 19.

1	19
5	95
25	475

Figura 26: Divisão quinária, 527 por 19.

Como o resultado da próxima multiplicação por 5 é 2375 e é maior que 527, paramos. Segue:

$$527 = 475 + 52$$

$$527 = 475 + 19 + 33$$

$$527 = 475 + 19 + 19 + 14.$$

Como 475 corresponde ao 25 na primeira coluna e 19 corresponde ao 1, logo, o quociente da divisão é $25 + 1 + 1 = 27$ e o resto é 14.

Exemplo 3: Divisão de 1124 por 36.

1	36
5	180
25	900

Figura 27: Divisão quinária, 1124 por 36

Como o resultado da próxima multiplicação por 5 é 4500 e é maior que 1124, paramos. Segue:

$$1124 = 900 + 224$$

$$1124 = 900 + 180 + 44$$

$$1124 = 900 + 180 + 36 + 8.$$

Como 900 corresponde ao 25 na primeira coluna, 180 corresponde ao 5 e 19 corresponde ao 1, logo, o quociente da divisão é $25 + 5 + 1 = 31$ e o resto é 8.

Exemplo 4: Divisão de 625 por 25.

1	25
5	125
25	625

Figura 28: Divisão quinária, 625 por 25.

Como 625 é igual ao dividendo, paramos. Como 625 corresponde ao 25 na primeira coluna, logo, o quociente da divisão é 25 e o resto é 0.

A explicação para este método é fácil, vamos pegar o primeiro exemplo, divisão de 225 por 8, para ilustrar. Na realidade encontramos a decomposição de 225 em números da forma $8 \cdot 5^k + r, k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r \leq 7$, ou seja, $225 = 200 + 8 + 8 + 8 + 1 = 8 \cdot 25 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 1 = 8 \cdot (25 + 1 + 1 + 1) + 1 = 8 \cdot (28) + 1$, portanto, o divisão de 225 por 8 tem como quociente 28 e resto 1.

Podemos perceber que este método é fácil de ser manipulado, sendo até mais fácil do que o método da multiplicação quinária, proposto anteriormente. A única coisa que precisamos ter como pré-requisito do aluno é que ele saiba operar com soma e subtração de números inteiros e multiplicação por 5. Relembrando que para multiplicar um número por 5 basta acrescentar um zero a direita e encontrar a metade. A escolha da base 5 em vez da base 2, para realizar tanto a multiplicação e a divisão de números inteiros foi por perceber que utilizando a base 5, o algoritmo se reduz, pois o seu crescimento é bem superior a base 2. Utilizaremos esta técnica com nossos alunos nos planos de aulas descritos no Capítulo 5.

4 Jogos e truques matemáticos

Neste Capítulo iremos mostrar alguns truques e jogos matemáticos com aplicação em soma, subtração, potenciação e radiciação de números inteiros, que serão inseridos em nossos planos de aulas, a fim de despertar interesse em nossos alunos e tornar as aulas de Matemática mais prazerosas e ao mesmo tempo eficientes. Alguns desses jogos e truques foram idealizados pelo autor deste trabalho.

4.1 Jogo de Nim

O Jogo de Nim é um jogo com vários palitos separados em três grupos, seu nome vem do alemão nimm, que significa ter. O jogo é realizando com dois jogadores. Cada jogador, na sua vez, deve retirar qualquer número de palitos de um dos grupos. Alternando as jogadas, o jogador que retira o último palito, ganha o jogo. Segundo Hefez (p. 77, 2013)[6], trata-se de um jogo, supostamente chinês. Este jogo foi objeto, em 1901, de um artigo científico na revista Annals of Mathematics, de autoria de C. L. Bouton, que o batizou de Nim, mostrando que há uma estratégia que, se adotada por um dos jogadores, fará com que ele saia vencedor.

Segundo Grando (p. 187, 2000)[11], a grande popularidade atual do jogo do Nim, deve-se ao fato de que sua estratégia máxima é de fácil programação computacional. Portanto, com o advento dos computadores, programar o Nim passou a ser uma brincadeira interessante. Este jogo também é bastante utilizado em testes para seleção de pessoal para trabalhar em empresas, pois envolve o raciocínio lógico-dedutivo na sua formulação.

Para melhor entender o jogo, vamos utilizar um exemplo de uma partida de Hefez (p. 77, 2013)[6], com algumas adaptações. O jogo será realizado entre duas pessoas, que vamos chamar de Ariadna e Annelise.

Escolhemos 15 palitos para o jogo, eles são distribuídos em três grupos, conforme figura abaixo:

$$III \quad IIIII \quad IIIIIII.$$

Ariadna começa o jogo e retira um palito do primeiro monte, deixando a configuração do jogo dessa forma:

$$II \quad IIIII \quad IIIIIII.$$

Annelise joga retirando sete palitos do terceiro monte, deixando-o assim:

$$II \quad IIIII.$$

Ariadna joga retirando três palitos do segundo monte, deixando-o assim:

$$II \quad II.$$

Com a configuração neste estágio podemos perceber que Annelise não tem mais chance, pois se ela retirar dois palitos de um dos grupos, Ariadna tirará os dois que sobra no outro e ganhará o jogo. Se Annelise tirar um palito de um dos grupos, Ariadna tirará um palito do outro grupo e assim não tem mais saída para Annelise, logo, Ariadna ganhará o jogo.

No Jogo de Nim, quem começa o jogo e conhece uma estratégia, que iremos explicar no parágrafo seguinte, sempre vence. Mesmo não começando o jogo, existe ainda uma grande possiblidade de o jogador que conhece a estratégia, ganhar, desde que o outro jogador não conheça a estratégia.

Vamos mostrar uma estratégia, segundo Hefez (p. 77, 2013)[6], utilizando o exemplo citado acima para vencer no jogo.

Utilizaremos a notação $[n]_{10}$ para dizer que o número n está na base 10 e $[m]_2$ para dizer que o número m está na base 2. Exemplo: $[9]_{10}$ corresponde a 9 na base 10 e $[101]_2$ corresponde a 101 na base 2 (a representação binária foi abordada no Capítulo 1).

O jogo se inicia com o 1º grupo com 3 palitos, o 2º grupo com 5 palitos e o 3º grupo com 7 palitos. Convertendo os palitos de cada grupo para representação binária, temos:

$$1^o grupo : [3]_{10} = [11]_2$$

$$1^o grupo : [5]_{10} = [101]_2$$

$$2^o grupo : [7]_{10} = [111]_2.$$

Somando os três números, $011 + 101 + 111$, como se fossem na base 10 temos:

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\,101 \\ 111 \\ \hline 223. \end{array}$$

A estratégia para ganhar o jogo é retirar a quantidade de palitos adequada a fim de deixar todos os algarismos da soma par. Há várias possibilidades para isso, uma delas utilizada pela Ariadna na primeira jogada, retirando 1 palito do primeiro grupo deixando todos os algarismos da soma par, pois $[2]_{10} = [10]_2$, logo

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\,101 \\ 111 \\ \hline 222. \end{array}$$

Agora, qualquer jogada do próximo jogador deixa algum algarismo desta soma ímpar, isto pode ser verificado analisando todas as possibilidades.

Annelise retira 7 palitos do terceiro grupo, logo

$$+\begin{array}{r} 10 \\ 101 \\ \hline 111 \end{array},$$

deixando a soma ímpar. Ariadna joga retirando 3 palitos do terceiro grupo, logo

$$+\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ \hline 20 \end{array},$$

deixando a soma par. Há dois palitos em cada grupo e é a vez da Annelise jogar. Qualquer jogada feita por Annelise, levará à derrota.

O Jogo de Nim pode auxiliar nossos alunos no desenvolvimento de diversas habilidades necessárias ao aprendizado em Matemática, como criatividade, raciocínio lógico, melhorar a concentração e atenção, entre outras.

Existem várias versões do jogo do Nim. Vamos mostrar uma versão do jogo adaptado de Grando (p. 188, 2000)[11], que será mais fácil de explicar a estratégia de vencer aos alunos, pois esta estratégia é baseada em restos de divisão entre dois números inteiros.

Esta versão é parecida com a anterior, mas em vez de distribuir os palitos em vários grupos, temos apenas um grupo de palitos. Em cada jogada, podemos retirar quantidades de palitos variando de 1 a 4, alternando as jogadas, perde quem retirar o último palito. Vamos utilizar dois jogadores fictícios para exemplificar o jogo, Annelise e Ariadna.

O jogo se inicia com 18 palitos. Annelise começa o jogo retirando 2 palitos, deixando 16 no monte. Ariadna joga e retira 3 palitos, deixando 13 no monte. Annelise joga e retira 2 palitos deixando 11 no monte. Ariadna joga e retira 4 palitos deixando 7 no monte. Annelise joga e retira 1 palito, deixando 6 no monte. Neste ponto, podemos perceber que a Ariadna não tem mais chance, pois qualquer quantidade que ela tirar, de 1 até 4, Annelise jogará, deixando apenas um palito no monte para ser retirado por Ariadna, portanto, Annelise vencerá o jogo.

A estratégia de vencer o jogo está baseada na divisão euclidiana de números inteiros. Vamos enunciar o Teorema da divisão euclidiana retirado de Hefez (p. 53, 2013)[6].

Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que $a = bq + r$,com $0 \leq r \leq |b - 1|$.

Para deixar o enunciado mais claro, vamos aplicá-lo ao jogo. Como a regra do jogo é retirar palitos de 1 até 4, realizaremos a divisão euclidiana por 5, ou seja, dividindo 18 por 5, temos quociente 3 e resto 3, já que $18 = 3 \cdot 5 + 3$. Annelise pode pensar somente no resto da divisão, que é 3, como se fosse sua última jogada, retirando 2 e deixando 1 para Ariadna retirar, ou seja $16 = 3 \cdot 5 + 1$. Em qualquer jogada de Ariadna, a quantidade de palitos deixados no monte, quando divididos por 5, não deixa resto 1, pois só pode retirar de 1 até 4 palitos. Dessa forma, se Annelise seguir a estratégia, ganhará o jogo. E foi isso que ela fez. Como Ariadna retirou 3 palitos, deixando 13 e $13 = 2 \cdot 5 + 3$, na jogada seguinte Annelise retirou 2, para deixar 11 que é da forma $11 = 2 \cdot 5 + 1$, e assim sucessivamente caminhando para vitória.

Este jogo, com certeza despertará muito interesse nos alunos, principalmente quando eles conhecerem as estratégias, e os vencedores serão os que conseguirão encontrar o resto da divisão por 5 com mais facilidade. Podemos utilizá-lo como motivador nas aulas de divisão e de critérios de divisibilidade.

Percebemos que podemos adotar outras regras com o mesmo jogo. Como por exemplo: o jogador pode tirar quantidades de palitos de 1 até 6 palitos em cada jogada, logo a divisão euclidiana será por 7, ou seja, temos que analisar o resto da divisão por

7.

Podemos utilizar o Jogo de Nim para abordamos diversos conteúdo da Matemática. Como sistema de numeração, múltiplos, divisores, divisão entre números inteiros, critérios de divisibilidade, base binária e outros. E também é uma boa oportunidade de falarmos sobre uma área da Matemática que é muito interessante e divertida, mais é esquecida pelo currículo do ensino fundamental e médio, que é aritmética dos restos da divisão, cujo objeto de estudo é o resto da divisão entre dois números inteiros. Segundo Moreira (2010)[12], o conceito de inteiro é um dos mais antigos e fundamentais da ciência em geral, tendo acompanhado o homem desde os primórdios de sua história.

Este jogo será utilizado em nosso plano de aula relacionado à divisão de números inteiros.

4.2 Jogo do resto

Para dar continuidade a aritmética dos restos, vamos mostrar um jogo no qual o objetivo é encontrar o resto da divisão de dois números inteiros. O jogo pode ser jogado por diversos jogadores, mas para ficar um jogo agradável com tempo de espera curto entre as jogadas de um jogador, aconselhamos de 2 até 4 jogadores ou jogar em duplas. Faremos uma adaptação do jogo, retirado de Zeni (2007)[14].

Para realizar o jogo precisaremos de um tabuleiro, conforme a figura abaixo, um dado e algumas peças para marcar a posição do jogador, por exemplo: tampinhas de garrafa pet.

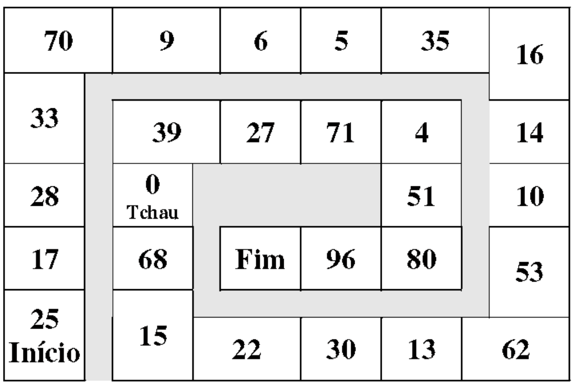


Figura 29: Tabuleiro do jogo do resto, retirada de Zeni (2007)[14].

Sorteia-se a ordem dos participantes para início do jogo. Todos os jogadores deverão iniciar na casa que corresponde ao número 25. Em cada rodada, na sua vez, um jogador lança o dado. O número de casas que o jogador deve avançar é igual ao resto da divisão do número da casa pelo número que saiu no dado. Ganha o jogo quem atingir primeiro a casa "Fim". Quem atingir a casa "Tchau" está fora do jogo.

Este jogo serve para reforçar os conceitos da divisão, critérios de divisibilidade e múltiplos de números inteiros. Se for realizado em duplas, teremos um trabalho em equipe, preparando para trabalhos em grupos futuros. Segundo Zeni (2007)[14], durante o desenrolar do jogo, foi observado que os alunos se tornaram críticos, alertas e confiantes, expressando o que pensam, elaborando perguntas e tirando conclusões sem necessidade de interferência.

4.3 Bingo da decomposição em primos

Sabemos que todo número inteiro maior que 1 pode ser escrito de forma única como produto de potências de números primos, isto é o que diz o Teorema Fundamental da Aritmética. Segundo Hefez (p. 142, 2013)[6], este resultado, porém, não explicitamente enunciado em sua totalidade, está essencialmente contido nos Elementos (tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C.), pois ele é consequência quase imediata de proposições que lá se encontram. Baseado nesta afirmação demonstrada por Euclides, vamos apresentar um jogo que criamos e chamaremos de bingo da decomposição em primos. Ele consiste em um jogo de bingo normal, a única diferença é que os números nas cartelas estão na forma fatorada.

Para exemplificar o jogo utilizaremos pedras numeradas de 2 até 30. Retiramos o número 1 de forma proposital, a fim de mostrar que o 1 é um número que tem uma característica que o separa dos outros números naturais, ou seja, o número 1 não é primo e nem composto. Utilizaremos cartelas com dez números em sua forma fatorada, conforme próxima figura.

2	7	$2 \cdot 5$	13	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$2 \cdot 3$	$3 \cdot 3$	$2 \cdot 2 \cdot 3$	$2 \cdot 7$	$3 \cdot 7$

Figura 30: Exemplo de cartela para bingo da decomposição em primos.

Distribuiremos uma cartela para cada aluno ou dupla, ou grupos, da maneira que o professor achar melhor, juntamente com feijões ou milhos para que os alunos possam marcar os números sorteados que constam em suas cartelas. Confeccionaremos uma cartela especial com os números de 2 até 30 para o professor controlar as pedras que forem sorteadas.

Os números de 2 a 30 serão escritos em um papel, dobrados e colocados em um saco. O professor inicia o jogo retirando um número de cada vez e lendo-o para os alunos. Os alunos devem realizar a fatoração do número sorteado e caso a fatoração se encontra em sua cartela, marcá-la. Exemplo: o professor retira o número 14 e lê para os alunos, logo os alunos que tiverem $2 \cdot 7$ em sua cartela, deve marcá-lo. Ganha aquele que preencher toda cartela primeiro. Caso alguém anuncie que ganhou, o professor deve verificar se todos os números que foram sorteados constam na cartela do suposto ganhador.

Este jogo tem como objetivo mostrar o teorema fundamental da aritmética, aplicando na construção no conjunto dos números inteiros utilizando a operação de multiplicação. Reforçando o conceito de números primos e compostos, mostrando que todos os números inteiros podem ser construídos a partir de números bases, que chamamos de primos.

4.4 Hex multiplicativo

Este jogo tem como objetivo abortar o conceito da multiplicação de números inteiros, fazer estimativas, previsões e trabalhar o desenvolvimento de cálculo mental. Ele é jogando em duas duplas, com um tabuleiro conforme a imagem abaixo. A dupla escolhe *dois números que constam no topo da ficha, encontrando o seu produto e marcando-o no tabuleiro. Ganha a partida a dupla que ligar os seus dois lados.*

Vamos exemplificar o jogo fazendo uma adaptação do jogo retirado do portal Dia a Dia Educação. Veja na próxima figura o tabuleiro do jogo.

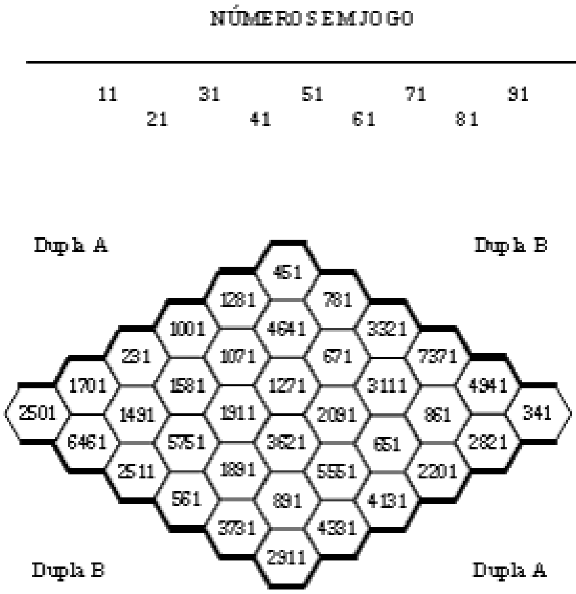


Figura 31: Tabuleiro do jogo Hex multiplicativo, retirado do portal Dia a Dia Educação.

Os jogadores decidem no par ou ímpar quem irá começar o jogo. Jogando alternadamente, em cada rodada, a dupla escolhe dois números do topo do tabuleiro e encontram seu produto. Por exemplo: escolhendo 31 e 11, cujo produto é 341. Se 341 estiver em uma casa do tabuleiro que não esteja já marcada, coloca um de seus marcadores (milho ou feijão por exemplo, lembrando que os adversários tem que ter marcadores diferentes para não confundirem as marcações) nessa casa . Se a casa já estiver marcada, a dupla perde a vez de jogar. Em cada casa pode-se colocar apenas um marcador. Ganha a dupla que primeiro conseguir ligar suas duas bordas do tabuleiro com seus marcadores, sem que haja nenhuma marca do adversário no caminho.

Podemos perceber que este jogo trabalha a operação da multiplicação, exigindo concentração e boas estratégias das duplas na escolha dos dois números para encontrar seu produto, a fim que consiga chegar ao outro lado com a menor quantidade de jogadas.

Utilizaremos este jogo em nosso plano de aula sobre multiplicação entre números inteiros.

4.5 Sabe ou não sabe das potências e radiciações

Este jogo foi criado pelo autor deste trabalho a fim de reforçar os conceitos da potenciação e da radiciação de números inteiros. Ele foi baseado em programas apresentado pela televisão que utiliza disputa entre duas equipes. No jogo, serão utilizadas perguntas relacionadas às potências e raízes quadradas exatas de números inteiros, Ganha a equipe que conseguir mais pontos no jogo, seguindo as regras que serão descritas seguir.

O jogo consiste em distribuir os alunos da sala de aula em duas equipes por sorteio, a fim de evitar que uma equipe fique desproporcional à outra em relação ao conhecimento. O professor dispõe de quatro grupos de cartas: o primeiro grupo contendo somente a palavra potenciação ou radiciação, estas cartas servirão para indicar em qual área será a pergunta; o segundo e terceiro grupos estão relacionado às potências, contento 11 cartas no segundo e em cada uma delas, números de 0 até 10, no terceiro grupo, 5 cartas e em cada uma delas, números de 0 até 4; o quarto grupo é destinado a radiciação, é composto de 15 cartas distribuindo nelas os 15 primeiros quadrados perfeitos, cada uma contendo um quadrado perfeito.

Embaralhando as cartas dos quatros grupos e sorteado qual será equipe que irá começa o jogo no par ou impar. Decidido à equipe que começa, ela retira uma carta do primeiro grupo, que pode ser potenciação ou radiciação. Se for Radiciação, ela retira outra carta do quarto grupo. Se for potenciação ela retira uma carta do segundo grupo, que representará a base da potência, e uma do terceiro, que representará o expoente da potência.

A equipe terá 30 segundos para responder o resultado da radiciação ou da potenciação. Se responder corretamente, ganha 3 pontos, se responder errado perde 3 pontos. Se não responder, passa para a segunda equipe, que terá 20 segundos para responder. Se responder ganha 2 pontos, se responder errado perde 2 pontos. Se não responder volta para a primeira equipe que terá 10 segundos para responder, se responder ganha 1 ponto, se responder errado perde 1 ponto, se não responder a jogada se encerra. Alternado as equipes em relação à ordem de quem responde primeiro, depois de 10 rodadas de perguntas, ganha a equipe que tiver mais pontos.

Podemos utilizar este jogo com outras regras, como por exemplo, apenas um jogador de cada equipe se enfrentando e fazendo intercalação entre eles.

Este jogo tem como objetivo principal reforçar os conceitos de potenciação e radiciação, mas, além disso, tornar as aulas mais divertidas e interessantes. Mostrar a importância do trabalho em equipe, ou seja, a capacidade de trabalhar em equipe necessita de seus componentes a aceitação de criticas, preparando nossos alunos para elas, fazendo as intervenções sobre seus pensamentos críticos e ajudar na comunicação entre eles. Este jogo será utilizado em nosso plano de aula para finalizarmos o conteúdo sobre potenciação e radiciação.

4.6 Truques matemáticos

Aqui falaremos de alguns truques matemáticos, que abordaremos no início de nossas aulas, a fim de despertar o interesse dos alunos para o conteúdo que ira ser ministrado na aula do dia. Vários destes truques são encontrados na internet e são de origem desconhecida, mas mostraremos sua prova através dos conhecimentos matemáticos. Se conhecermos a fonte, ela será citada. Alguns desses truques foram desenvolvidos por mim baseados nos conteúdo das disciplinas de Aritmética e Teoria de Números que tivemos no curso PROFMAT. Segundo Sampaio (2006)[16], arte de adivinhar ou prever números e cálculos aritméticos faz parte de nossa cultura matemática desde a primeira infância.

4.6.1 Adivinhar o país, o animal e a cor que a pessoa está pensando

Este truque é baseado principalmente no critério de divisibilidade de um número por 9, mas também aborda as 4 operações fundamentais da aritmética. Abordá-lo-emos no início da aula sobre divisão de números inteiros, a fim de despertar o interesse do aluno para conteúdo que será ministrado no dia. Ele será desvendado pelo professor na parte final do plano aula.

Este truque foi retirado da internet, com adaptações, sendo sua origem desconhecida. Seu procedimento é o seguinte:

1- Escolha um aluno e peça que ela pense em um número de 1 até 10.

2- Multiplique o número escolhido por 9.

3- Se o número obtido tiver 2 algarismos, some os seus dois algarismos. Se não o conserve.

4- Some 11 ao resultado obtido.

5- Divida por 5 o resultado obtido.

6- Agora você ira relacionar o número obtido, com as letras do alfabeto da seguinte forma: se for 1 é a letra A; se for 2 é a letra B; se for 3 é a letra C; e assim por diante.

7- Pense em um país que comece com esta letra.

8- Com a quinta letra da escrita do nome desse país, pense em um animal e uma cor que comece ela.

Depois da realização destes procedimentos, o professor fala para o aluno que ele pensou na Dinamarca, no macaco e na cor marrom.

O segredo que está por traz desta mágica é que todo número cuja soma dos algarismos é divisível por 9, logo ele também será. Vamos demonstrar esta afirmação utilizando o seguinte lema: seja n um número natural, logo $10^n - 1$ é múltiplo de 9, ou seja, $10^n - 1$ dividido por 9 é uma divisão exata. Vamos provar o lema por indução.

Para $n = 1$, temos $10^1 - 1 = 9$, que é múltiplo de 9, logo o resultado e verdadeiro.

Suponhamos, agora, que o resultado seja verdadeiro para certo n natural, ou seja, $10^n - 1 = 9k$, com k natural. Temos que

$$10^{(n+1)} - 1 = 10^n \cdot 10 - 1 = 10^n \cdot (9+1) - 1 = 9 \cdot 10^n + 10^n - 1,$$

como $9 \cdot 10^n$ é múltiplo de 9 e por hipótese de Indução $10^n - 1$ é múltiplo de 9, provamos que o resultado vale para $n+1$, portanto, vale para todo n natural.

Agora estamos prontos para provarmos a afirmação acima. Seja $a = a_n \cdots a_1 a_0$ um número natural na base 10, onde $a_j, 0 \leq j \leq n$, seja seus algarismos. Logo podemos escrever a da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a &= a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \\ &= a_n \cdot 10^n - a_n + \cdots + a_1 \cdot 10^1 - a_1 + a_0 \cdot 10^0 - a_0 + a_n + \cdots + a_1 + a_0 \\ &= a_n(10^n - 1) + \cdots + a_1(10^1 - 1) + a_0(10^0 - 1) + a_n + \cdots + a_1 + a_0. \end{aligned}$$

Com todos os termos $10^j - 1$ são múltiplos de 9, logo

$$a = 9k + a_n + \cdots + a_1 + a_0.$$

Portanto, um número inteiro é divisível por 9 se, e somente se, a soma seus algarismos for.

Voltando a mágica. O mágico pediu para multiplicar o número pensado por nove e somar seus dois algarismos. Sabemos que a soma de todos os números de dois algarismos múltiplos de nove é 9, portanto, daí em diante o resultado é previsível. Ao somar 11 ao resultado e dividir por 5 terá como resultado final 4. Portanto, qualquer número que a pessoa pense o resultado final vai ser 4. Relacionando o número com a letra, temos que 4 corresponde a letra D. O país mais conhecido que começa com a letra D é a Dinamarca, existe dois outros, mas com certeza a pessoa não irá lembrar deles: Djibouti, na África, e Dominica, na América Central. Olhando para quinta letra do país, que será a previsível letra M, o mágico diz para pessoa pensar em um animal e uma cor. Porém o animal mais fácil de lembrar com a letra m é o macaco e a cor é a marrom.

Esta mágica pode ser estendida, pedindo o que a pessoa pense em qualquer número e multiplique por 9, e some seus algarismos, se a soma for maior que 10 some novamente, e assim por diante até que a soma seja menor que 10. Exemplo, penso no número 32, multiplicando por 9, dá 288. Como 288 é maior que 10, some seus algarismos, o resultado é 18. Como 18 é maior que 10, some novamente, cujo resultado é o 9, que é o esperado.

Este truque é muito interessante, quem vê ele pela primeira vez e não conhece a estratégia, fica bastante encabulado. Acho que é uma estratégia interessante para começarmos a falar sobre critérios de divisibilidades, com intuito de prender a atenção dos alunos para as aulas de Matemática.

A demonstração do critério de divisibilidade acima é destinada ao professor. Para o aluno do ensino fundamental basta a informação sobre o critério de divisibilidade.

Utilizaremos esta mágica no plano de aula sobre divisão de números inteiros.

4.6.2 Nove misterioso

Este truque também está baseado no critério de divisibilidade por 9, foi retirado de Hefez (p. 72, 2013)[6], com alguma adaptações. Ele pode ser utilizado nas aulas de Matemática, pois seus comandos são simples de serem executados, mas sua demonstração não seria conveniente para os alunos do ensino fundamental.

Os comandos deste truque são os seguintes:

1- Peça ao aluno que escolha um número com mais de três algarismos.

2- Faça qualquer permutação dos seus algarismos, obtendo outro número.

3- Compare o número pensado com o permutado, subtraindo o menor do maior.

4- Com o resultado da subtração, peça a pessoa para reter um dos algarismos diferente de zero e divulgar os restantes.

Com estes procedimentos o mágico divulga o algarismo retido.

O Mágico encontrará o algarismo retido da seguinte forma: somará os algarismos do número divulgado e verificar quanto falta a ser somado neste número para que o resultado seja múltiplo de 9.

Vamos ver um exemplo deste truque. A pessoa pensa 2356 permuta alguns algarismos (quantos ela quiser), encontra 3526, que é o algarismo permutado. Comparando os dois números, temos que 3526 é maior que 2356. Portanto, subtraímos 2356 de 3526, temos como resultado 1170. A pessoa retém o número 7 e divulga 110. Como $1 + 1 + 0 = 2$, logo falta 7 para que o resultado seja múltiplo de 9.

O segredo desta mágica também é baseado no critério de divisibilidade por 9. Sabemos que todo número natural pode ser escrito como $a = 9k + a_n + \cdots + a_1 + a_0$, ou seja, um múltiplo de nove mais a soma dos seus algarismos, como foi demonstrado anteriormente.

Seja $a = 9k + a_n + \cdots + a_1 + a_0$ o número que a pessoa escolheu, logo permutando os algarismos teremos $a^{`} = 9k^{`} + a_n + \cdots + a_1 + a_0$, pois os algarismos serão os mesmos. Logo a diferença do maior e o menor será múltiplo de 9, pois $a_n \cdots a_1 a_0$ se cancelam, ou seja, a diferença que ele tem em segredo é múltiplo de nove, portanto, basta descobrir o algarismo que está faltando para que a soma seja múltiplo de 9.

4.6.3 Descobrir a peça de dominó

Este truque consiste em descobrir a peça de dominó que a pessoa está pensando. Este jogo estimula o calculo mental das 4 operações fundamentais da Matemática, pois a pessoa que escolhe a peça tem que realiza-las de forma correta estas operações para que o mágico não erre a peça escolhida. Esta mágica pode ser realizada com ou sem o dominó. A pessoa pode retira uma peça de dominó ou apenas pensar em uma peça.

Vamos exemplificar esta mágica baseando em Torres (p. 113, 2013)[15].

1- O mágico pede a uma pessoa que pense ou retire uma peça de dominó, sem revelá-la.

2- Em seguida a pessoa deve realizar os seguintes cálculos com os números da peça sem fazer nenhum comentário sobre os resultados: escolher um dos números presentes na peça, qualquer um, e multiplicar por 2; ao resultado somar 4; multiplicar por 5 o número obtido; finalmente adicionar o valor obtido com o outro número da peça.

3- A pessoa revela o resultado das operações ao mágico e o ele descobre a peça pensada pela pessoa.

O mágico apenas subtraiu 20 do número revelado pela pessoa, este número tem 2 algarismos, que representa a peça escolhida. Vamos Exemplificar como tivéssemos realizando a mágica. Imagine que a pessoa escolheu um peça que contém os números

3 e 4, e escolha o 3 para realizar as operações. Temos que 3 vezes 2 é 6, 6 mais 4 é 10, 10 vezes 5 é 50, 50 mais 4 é 54, que é o número revelado pela pessoa. Basta que retire 20 de 54, que é 34, logo a peça pensada pela pessoa é 3 é 4.

Vamos dar uma explicação para esta mágica apenas utilizando raciocínio lógico. Seja X e Y os números que representam a peça escolhida, logo a expressão matemática que representa as operações é a seguinte:

$$(2 \cdot X + 4) \cdot 5 + Y = 10 \cdot X + 20 + Y = XY + 20.$$

Olhando para equação desta forma, basta retirarmos 20 do resultado que temos a peça escolhida pela pessoa, onde um dos lados da pedra é o algarismo da unidade e o outro é o algarismo das dezenas.

Além de podermos trabalhar o calculo mental, é uma oportunidade de abordarmos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma e subtração, e também discutir o sistema decimal posicional, que utilizamos hoje em dia. Esta mágica estará em nosso plano de aula sobre multiplicação de números inteiros.

4.6.4 Raiz cúbica instantânea

Este truque consiste em extrair raízes cúbicas exatas de números naturais rapidamente, é uma forma de despertar interesse dos alunos pelas potências e radiciações. Percebemos em sala de aula que quando falamos sobre estes assuntos, há uma fisionomia ruim dos alunos. Este truque é uma forma agradável de começarmos o trabalho sobre estes conteúdos.

Vamos mostrar o truque retirado de Sampaio (2006)[16], com adaptações. Ele consiste em pedir a uma pessoa que pense em um número de 1 até 100 e encontre sua potência de expoente 3. Informando o resultado ao mágico, que revela o número escolhido pela pessoa. Por exemplo, a pessoa pensa no número 73 e com auxílio de uma calculadora faz $73 \cdot 73 \cdot 73$, encontra 389017. Informando o resulta ao mágico, rapidamente o mágico anuncia o número escolhido, 73.

O segredo desta mágica está baseado em que todas as potências cúbicas de 1 até 9 têm algarismos das unidades diferentes, veja a próxima figura:

n	n^3	n	n^3
1	1	6	216
2	8	7	343
3	27	8	512
4	64	9	729
5	125	10	1000

Figura 32: Cubos dos números de 1 até 10.

Esta mágica requer do mágico o conhecimento das potências cubicas de 1 até 10, ou pode utilizar essa tabela acima. Mas para deixar a plateia mais impressionada é bom que ele à decore. No exemplo acima, o número é desvendado da seguinte forma: quando a pessoa informa 389017, o mágico sabe que o algarismo da unidade, que é o 7, veio do cubo 3, conforme a tabela acima. Em seguida, para descobrir o algarismo da dezena, descarta-se os três algarismos da esquerda de 389017, encontrando 389. Como este número está entre 343 e 512, logo ele sabe que o algarismo da dezena do número procurado é 7, basta verificar a tabela acima.

Este truque é muito interessante e impressionante, quem não conhece sua estratégia pensa que o mágico é um gênio da Matemática, ele permite ao mágico que encontre todas as raízes cúbicas exatas de 1 até 1000000. Logo será de grande interesse por parte dos alunos em querer desvenda-lo. Portanto, ele é uma ótima estratégia de apresentarmos tanto a potência como a radiciação. Utilizaremos em nosso plano de aula sobre potenciação e radiciação de números inteiros.

4.6.5 Raiz quadrada instantânea

Este truque é parecido com o anterior, no anterior o mágico encontrava a raiz cúbica exata, neste o mágico vai encontrar raízes quadradas exatas de números inteiros. A raiz quadrada é a operação de radiciação mais utilizada na Matemática e esse truque facilita a retirada da raiz quadrada exata de 1 até 10000. Ele é ótima ferramenta para trabalharmos com números que são quadrados perfeitos.

Sampaio (2006)[16], apresenta o truque da seguinte forma: o mágico pede a uma pessoa que pense em um número de 1 a 99, mantenha-o em segredo, e calcule seu quadrado. Uma calculadora pode ser usada. A pessoa diz o resultado e imediatamente o mágico revela o número pensado.

Por exemplo: uma pessoa pensa nos 57 e eleva ao quadrado, ou seja, $57 \cdot 57$, cujo resultado é 3249. Revela este número ao mágico, que responde o número pensado, 57.

O segredo dessa mágica é parecido com o anterior, mais incrível que pareça é mais difícil para o mágico. Na extração de raízes cúbicas tínhamos que os algarismos das unidades de um cubo de 1 até 10, eram todos diferentes, já quando elevamos ao quadrado os números de 1 até 10, temos duas possibilidades para o número que gerou este algarismo, com exceção dos números 5 e 10, veja a figura abaixo:

n	n^2	n	n^2
1	1	6	36
2	4	7	49
3	9	8	64
4	16	9	81
5	25	10	100

Figura 33: Quadrados dos números de 1 até 10.

Neste truque, necessita que o mágico saiba de cor os quadrados dos números de 1 até 10, ou seja, decorado a tabela acima, e saiba todos os quadrado das potência dos números de dois algarismos que termina em 5, ou seja, $15^2 = 225$; $25^2 = 625$; $35^2 = 1225$; $45^2 = 2025$; $55^2 = 3025$; $65^2 = 4225$; $75^2 = 5625$; $85^2 = 7225$; $95^2 = 9025$. Estas potências são fáceis de calcular, por exemplo, para calcular 85^2, basta encontrar o consecutivo de 8, que é 9, e multiplicar por 8, acrescentando 25 à direita do resultado, ou seja, $8 \cdot 9 = 72$, logo $85^2 = 7225$. Vamos utilizar o exemplo acima para desvendar o segredo.

Quando foi revelado o número 3249 ao mágico, ele sabia que descartando o 49 do número e olhando apenas para 32, o algarismo da dezena seria o 5, pois $5^2 = 25$ e $6^2 = 36$, ou seja $25 < 32 < 36$. Basta agora encontra o algarismo da unidade. Como termina em 9, temos duas possibilidades pode ser 3 ou 7, pois $3^2 = 9$ e $7^2 = 49$. Para decidir basta fazer $55^2 = 3025$, como $3025 < 3249$, logo o algarismo da unidade é o 7, caso contrário seria o 3. Portanto, raiz quadrada de 3249 é 57.

Esta mágica vai ser de grande valia para trabalharmos tanto na potenciação e também na radiciação. Será um desafio para nossos alunos decorar as potências de 2 dos números de 1 até 10, e quando conseguirem, estarão ganhando de presente todos as raízes quadradas exatas de de 1 até 10000. A utilização deste truque em nossas aulas de radiciação é uma forma de desmitificar que a radiciação é uma operação complicada da Matemática.

4.6.6 Adivinhando a soma de 10 números

No Capítulo anterior falamos um pouco sobre a sequência de Fibonacci e utilizamo-la para realizar divisões entre números inteiros, aqui vamos mostrar um truque cujo seu segredo está em uma propriedade desta sequência. Este truque consiste em adivinhar a soma de dez números.

Este truque foi baseado de Sampaio (2006)[16], com algumas adaptações. Ele consiste em pedir uma pessoa que pense em dois números, de 1 até 10, para serem os dois primeiros número de uma sequência de Fibonacci, e escreva mais 8 números desta sequência (lembrando que o próximo número de uma sequência Fibonacci e gerado pela soma dos dois números anteriores). Por exemplo, a pessoa pensa e escreve 2 e 7, logo o terceiro é $2 + 7 = 9$, o quarto é $7 + 9 = 16$, o quinto é $9 + 16 = 25$, e assim por diante, conforme a figura abaixo:

1º	2
2º	7
3º	9
4º	16
5º	25
6º	41
7º	66
8º	107
9º	173
10º	280

Figura 34: 10 primeiros números de uma sequência de Fibonacci, começando com 2 e 7.

Agora a pessoa mostra apenas 7^o número ao mágico, que instantaneamente diz o resultado da soma dos 10 números gerados por esta sequência, 726.

O segredo desta mágica é simples, basta pegar o 7^o número da sequência é multiplicar por 11, assim, nós encontramos o resultado da soma dos 10 primeiros números desta sequência. Multiplicar por 11 é fácil, se o número tem dois algarismos, basta somar seus dois dígitos e colocar entre os dois algarismos originais, fazendo a mudança de valor posicional se necessário. Vamos utilizar a mágica para melhor explicar. Multiplicar o 7^o termo por 11, que neste caso é 66, basta somar $6 + 6 = 12$, como $12 > 9$, retira 10 de 12 e passa 1 para casa seguinte somando com o seis do lado esquerdo, dessa forma:

$$66 \cdot 11 = \text{“6126”} = 726.$$

Vamos demostrar que a soma dos 10 primeiros números de uma sequência de Fibonacci é 11 vezes o 7^o termos.

Seja $a_j, 1 \leq j \leq 10$, os 10 primeiros termos dessa sequência, como ela é gerada pela soma dos dois termos anteriores, temos:

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} \\ = & (a_1) + (a_2) + (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) + (3a_1 + 5a_2) \\ & +(5a_1 + 8a_2) + (8a_1 + 13a_2) + (13a_1 + 21a_2) + (21a_1 + 34a_2) \\ = & (55a_1 + 88a_2) = 11(5a_1 + 8a_2) = 11 \cdot a_7, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Ao Pedirmos para a pessoa escolher dois números de 1 até 9 foi apenas para facilitar o soma que seria feita por ela. Esta mágica pode ser feita com as escolhas de quaisquer dois números, inclusive estes número podem ser iguais. Percebemos que neste truque está presente tanto à soma é multiplicação de números inteiro. Na Matemática tem muitos macetes que devem ser abordados, como por exemplo, a multiplicação de um número inteiro por 11, potências de expoente 2 com o algarismo da unidade igual 5, multiplicar um número por cinco, entre outros. Estes macetes deixam o aluno mais “inteligente” e melhora sua alto estima. Este truque será utilizado em nosso plano de aula sobre multiplicação entre números inteiros.

4.6.7 Cartelas binárias

Este truque é baseado na afirmação de que todo número natural escreve-se de forma única como soma de potências distintas de 2. Segundo Hefez (p. 68, 2013)[6], dados *os números inteiros a e b,com* $a > 0$ *e* $b > 1$*. Existe números inteiros* $n \geq 0$ *e* $0 \leq r_0, r_1, \cdots, r_n < b$*,com* $r_n \neq 0$*, univocamente determinados, tais que* $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_n b^n$*, logo a afirmação acima é uma consequência imediata deste teorema fazendo* $b = 2$*. Neste truque o mágico pede para uma pessoa pensar em um número natural de 1 até* $2^n - 1$*, com n natural. A seguir é apresentado à pessoa, n cartelas com* $2^{(n-1)}$ *números em cada uma delas, uma por uma, com números variados de 1 até* $2^n - 1$*, perguntando-a em qual delas o número pensado se encontra. Após o procedimento, o mágico diz o número pensado pela pessoa.*

Vamos construir o truque com $n = 6$, ou seja, teremos que confeccionar 6 cartelas contento 32 números em cada uma delas, conforme figura abaixo. Mais adiante mostraremos como será feito à construção das cartelas.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	28	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63
4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Figura 35: Cartelas Binárias.

Estas cartelas serão utilizadas para jogo. Vejamos um exemplo do truque: a pessoa pensa no número 23 e não revela ao mágico. O mágico mostra a primeira cartela e pergunta se o número que ela pensou está presente nela, logo a pessoa responde que sim. O mágico mostra a segunda cartela e faz novamente a pergunta, a pessoa diz que sim, e assim sucessivamente até a sexta cartela. Após esses procedimentos o mágico revela o número pensado pela pessoa, 23.

O segredo desta mágica está na afirmação feita anteriormente, "todo número natural escreve-se de forma única como soma de potências distintas de 2". Por exemplo:

$$[23]_{10} = [16 + 4 + 2 + 1]_{10} = [1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0]_{10} = [10111]_2.$$

Iremos construir as carlelas baseando em Menezes [17]. As cartelas foram confeccionadas da seguinte forma: a primeira cartela constam todos os números de 1 até 63, quando escritos como soma de potências de base dois, tem presente $1 \cdot 2^0 = 1$, ou seja todos os ímpares; a segunda cartela constam todos os números de 1 até 63, quando escritos como soma de potências de base dois, tem $1 \cdot 2^1 = 2$; a terceira cartela constam todos os números de 1 até 63, quando escritos como soma de potências de base dois, tem $1 \cdot 2^2 = 4$; a quarta cartela constam todos os números de 1 até 63, quando escritos como soma de potências de base dois, tem $1 \cdot 2^3 = 8$; a quinta cartela constam todos os números de 1 até 63, quando escritos como soma de potências de base dois, tem $1 \cdot 2^4 = 16$ e a sexta cartela constam todos os números de 1 até 63, quando escritos como soma de potências de base dois, tem $1 \cdot 2^5 = 2$.

Quando a pessoa informou ao mágico que o número estava presente na primeira, na segunda, na terceira e na quinta cartela. O mágico simplesmente somou o menor elemento de cada cartela onde o número pensado pela pessoa estava presente, ou seja, $1 + 2 + 4 + 16 = 23$.

Esta mágica pode ser estendida para qualquer valor de n. Por exemplo: para $n = 5$, teremos 5 cartelas contendo em cada uma dela 16 números, de 1 até 31; para $n = 7$, teremos 7 cartelas contendo em cada uma delas 64 números, de 1 até 127.

Para realização do Truque basta que o mágico saiba somar números naturais mentalmente, logo à execução dessa mágica estimula o cálculo mental. Segundo Luna (p. 109, 2013)[18] a confecção de um conjunto de cartões pelo aluno pode se constituir numa atividade de assimilação de conteúdo muito enriquecedora. De fato, uma vez tendo aprendido a escrever na forma binária um inteiro dado no sistema decimal, a construção de um baralho de seis cartas exigirá do aluno que este converta corretamente os números inteiros no intervalo de 1 a 63.

Acho que a sistema binário deveria ser abordado no ensino fundamental para que o aluno possa começar a familiarizar com outas bases na construção dos números inteiros, não somete a base decimal, a fim motivar a construção de um pensamento mais abstrato. Utilizaremos esta mágica em nosso plano de aula sobre potenciação e radiciação.

4.6.8 Raiz primitiva

Este truque foi construído por nós, com intuito de estimular o cálculo mental das operações da Matemática, e também aprender a manipular a calculadora. Ele consiste em pedir a uma pessoa, com auxilio de uma calculadora, que encontre qualquer potência de dois que desejar, ou seja, com auxilio da calculadora multiplique quantos 2 quiser, $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$. *Informando o resto da divisão do número obtido por 5 e quantidade de algarismos que ele possuí ao mágico. Com estas informações o mágico revela o número desconhecido. O segredo desta mágica é que 2 é raiz primitiva módulo 5, que conceituaremos mais tarde.*

Vamos exemplificar este truque. Imaginamos que a pessoa multiplique 15 fatores de 2, ou seja, $2^{15} = 32768$, e informe ao mágico, dizendo que o resto da divisão por 5 é 3 e tem 5 algarismos. Com estas informações o mágico revela o número 32768.

O mágico descobriu o número fazendo as seguintes operações: Como o resto da divisão por 5 é 3 e a menor potência de 2 que deixa resto 3 quando dividido por 5 é o número 8, logo ele fez $8 \cdot 16 = 128$, que é a segunda potência de 2 que deixa resto 3 quando dividido por 5, mas esta só tem três algarismos. Ele multiplica novamente o resultado por 16, $8 \cdot 16 \cdot 16 = 2048$, este número é a terceira potência de 2 que deixa resto 3 quando dividido por 5, mas ela só tem 4 algarismos. Ele multiplica novamente por 16, $8 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 = 32768$. Como 32768 tem 5 algarismos e é uma potência de 2, logo é o número procurado.

Para realizar este truque, o mágico pode utilizar uma calculadora ou pode encontrar o produto utilizando o algoritmo da multiplicação, mas para deixar a plateia mais impressionada, é bom que ele decore as primeiras potências de base 16, ou seja, $16^1 = 16$; $16^2 = 256$; $16^3 = 4096$ e $16^4 = 65536$, pois podemos perceber, utilizando o exemplo acima, se ele soubesse o resultado de 16^3, basta agora multiplicar por 8, que encontrará o resultado.

Vamos mostrar agora porque a mágica funciona. Iniciaremos a explicação de que vem a ser uma raiz primitiva módulo de um número primo, sem muito formalismo, utilizando alguns exemplos.

Temos que $2^1 = 2$ e 2 dividido por 5 deixa resto 2; $2^2 = 4$ e 4 dividido por 5 deixa resto 4; $2^3 = 8$ e 8 dividido por 5 deixa resto 3; $2^4 = 16$ e 16 dividido por 5 deixa resto 1. Podemos observar que somente 2^4 deixou resto 1, quando dividido por 5. Quando isso acontece somente no expoente $p-1$, com p primo e o expoente i, com $1 \leq i \leq p-1$, dizemos que a base da potência é raiz primitiva módulo número primo, ou seja, neste caso 2 é raiz primitiva módulo 5. Observe que 3 também é raiz primitiva módulo 5, pois $3^1 = 3$ e 3 dividido por 5 deixa resto 3; $3^2 = 9$ e 9 dividido por 5 deixa resto 4; $3^3 = 27$ e 27 dividido por 5 deixa resto 2; $3^4 = 81$ e 81 dividido por 5 deixa resto 1. Já o número 4 não é raiz primitiva módulo 5, pois $4^2 = 16$ e 16 dividido por 5 deixa resto 1, deixando resto 1 antes do expoente $p - 1$, que neste caso é 5-1=4.

Os restos das divisões das potências das raízes primitivas por p geram conjuntos cíclicos, com $p-1$ elementos, ou seja, o conjunto dos restos da divisão da potência pelo primo, veja a figura abaixo.

n	**Resto de** $n \div 5$		n	**Resto de** $n \div 5$
$2^1 = 2$	2		$2^5 = 32$	2
$2^2 = 4$	4		$2^6 = 64$	4
$2^3 = 8$	3		$2^7 = 128$	3
$2^4 = 16$	1		$2^8 = 256$	1
			$\vdots$	$\vdots$

Figura 36: Restos das divisões das potências de base 2 por 5.

Seja G um conjunto é g uma raiz primitiva de p. Segundo Moreira (p. 102, 2012)[13], Um grupo G é chamado de cíclico se existe um g tal que $G = g^n, n \in Z$.

A partir dessas informações, observamos que existe uma relação biunívoca das potências de base 2, com a mesma quantidade de algarismos, com o resto da divisão por 5, ou seja, quando o pessoa informa o resto da divisão para o mágico e a qualidade de algarismos, logo só existe uma potência que está associado a ele. Podemos garantir esta afirmação observando a tabela acima, por exemplo: 2^1 deixa resto 2, a próxima potência que deixa resto 2 é 2^5, que é 16 vezes maior que 2^1. Para garantirmos o aumento de 1 algarismo em um número, temos que multiplica-lo no mínimo por 10. Com $16 > 10$, logo garantimos.

Podemos realizar várias variações desse truque. Por exemplo, em vez de utilizarmos base 2 podemos utilizar base 3, já que 3 também é raiz primitiva módulo 5. Podemos mudar o número primo, por exemplo, em vez de usar o 5, usar 7 como módulo e usarmos 3 como base, já que 3 é raiz primitiva módulo 7, verifique!

Podemos perceber que este truque pode despertar interesse dos alunos pelas potências e também favorece ao aprendizado das multiplicações e divisões. É uma mágica para estimular e aperfeiçoar o cálculo mental. Sugerimos seu trabalho na finalização do conteúdo de potência, pois ela necessita de um bom raciocino para desvendá-la. Se o professor for utilizar esta mágica em seu plano de aula, aconselhamos mostrar apenas o segredo para desvendá-la, sem entrar em detalhes de sua demonstração.

4.6.9 Adivinhação quinária

Este truque foi desenvolvido por nós, com proposito de estimular a divisão e multiplicação de números inteiros de 1 até 5, sendo que por 5 aparece na maioria das vezes. Pode ser realizado com outras variações, como uma adivinhação binária, onde irá aparecer multiplicações e divisões por 2, a fim de estimular outras divisões e multiplicações com outros algarismos. Ele é baseado no sistema de base quinária que já abordamos nos Capítulos anteriores.

Peça a pessoa que pense em um número de 10 até 1000, e realize varias divisões sucessivas por 5, informando o resto das divisões e o ultimo quociente encontrado, quando não conseguir mais dividir por 5, ao mágico. O mágico de posse dos restos e do último resultado divulga o número pensado pela pessoa. Vamos utilizar um exemplo para mostrar o truque.

Imaginamos que a pessoa pense em 352, informa o resto 2 ao mágico e divide 350 por 5, encontrando 70. Segue, informando o resto 0 ao mágico e divide 70 por 5, encontrando 14. Informa o resto 4 e o último quociente 2, ao mágico, já que não consegue dividir 2 por 5. De posse das informações o mágico divulga o resultado.

Para desvendar o número, o mágico escreve o número desconhecido em base 5, utilizando os restos e o último resultado informados, ou seja, os algarismos que ele tem em posse é exatamente o número escrito em base cinco: $[2402]_5 = [352]_{10}$, logo basta que ele faça a transformação inversa, da base cinco para a base 10, desta forma:

$$[2402]_5 = [2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0]_{10} = 352.$$

Vejamos mais um exemplo: A pessoa pensa em 468, informa o resto 3 ao mágico e divide 465 por 5, encontrando 93. Segue, informando o resto 3 ao mágico e divide 90 por 5, encontrando 18. Informa o resto 3 e o último quociente 3 ao mágico, já que não consegue dividir 3 por 5. De posse das informações o mágico divulga o resultado. O mágico escreve o número desconhecido na base 5.

$$[3333]_5 = [3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0]_{10} = 468.$$

Este truque pode ser estendido para outras bases, como binária e terciária, a fim de trabalhar o calculo mental das operações básicas da Matemática. Achamos que os currículos de Matemática do ensino fundamental deveriam abordar e estimular atividades com outros sistemas de numeração, com bases diferentes da base decimal.

4.6.10 Adivinhação do dia da semana em que a pessoa nasceu

Este truque é muito interessante, pois parece ser impossível uma pessoa decorar todos os calendários de mais de 100 anos atrás. É impossível, mas se utilizarmos os cálculos matemáticos não precisará decora-los, e mais, com ele teremos em posse um calendário de 200 anos. O truque consiste em perguntar a uma pessoa em que dia, mês e ano que nasceu. Com essas informações o mágico revela o dia da semana em que a pessoa nasceu.

Vamos inicialmente falar um pouco da matemática que está por traz dos cálculos que serão utilizados para desvendar a mágica. A parte da Matemática que estamos falando é chamada Teoria de Números, que achamos que deveria ter um espaço nos currículos de Matemática, como foi abordada nos jogos e truques apresentados anteriormente.

Uma parte da Teoria de Números, se dedica ao estudo dos restos da divisão entre dois números inteiros, para desvendar essa mágica é fundamental utilizá-la.

Vamos definir uma notação que iremos utilizar para desvendar esta mágica, que é a noção de congruência de números inteiro.

Seja dois números inteiros a e b, dizemos que c é o resto da divisão de b por a, logo escrevemos assim:

$$b \equiv c(mod\ a).$$

Por exemplo:

$$18 \equiv 4(mod\ 7).$$

ou seja, 18 dividido por 7 deixa resto 4. Podemos dizer também de forma análoga, que 18 e 4 deixam o mesmo resto quando dividido por 7.

Esta notação funciona como uma igualdade, vamos retirar uma de suas propriedades, para explicar o segredo da mágica, de Hefez (p. 194, 2013)[6], que diz:

Sejam a, b, c, m números inteiros com $m > 1$. Tem-se que:

$a \equiv b(mod\ m)$ e $c \equiv d(mod\ m) \Longrightarrow a + c \equiv b + d(mod\ m)$.

Exemplificando com números temos:

$17 \equiv 8(mod\ 9)$ e $13 \equiv 4(mod\ 9) \Longrightarrow 17 + 13 \equiv 8 + 4(mod\ 9) \equiv 3(mod\ 9)$.

Retornando à mágica, vamos realizar uma situação hipotética de apresentação. A pessoa diz ao mágico que nasceu em 29 de abril de 1978, logo o mágico diz que ela nasceu em um sábado.

Vamos utilizar o procedimento descrito por Sá (2010)[19], depois utilizaremos o método da congruência para fazermos o cálculo mentalmente sem precisar realizar uma série de contas. Este método funciona para datas entre 1900 e 2099, devido à particularidade dos anos 1900 e 2100 que não são bissextos, pois são múltiplos de 4, mas são seculares e não são múltiplos de 400.

1. Calcule quantos anos se passaram desde 1900 até o ano em que você nasceu. Por exemplo, como a pessoa nasceu em 1978, irá anotar 78. Vamos chamar esse valor de A.

2. Calcule quantos 29 de fevereiro existiram depois de 1900 e antes da data considerada. Para isso devemos dividir por 4 o valor A, sem considerar o resto da divisão. Vamos chamar essa quantidade de F. Dividindo encontramos $F = [\frac{78}{4}] = 19$. (Esta $[n]$ representa a parte inteira de um número real n). Se o ano em que a pessoa nasceu não for bissexto, faça $B = F$. Caso o ano em que a pessoa nasceu seja bissexto, devemos considerar dois casos:

2.1 se a data for até 29 de fevereiro, consideramos o valor $B = F - 1$ (pois o 29 de fevereiro ainda não passou).

2.2 se a data for após 29 de fevereiro, consideramos $B = F$. (no intervalo considerado para verificar se um ano é bissexto, basta verificar se o número formado pela dezena e unidade do ano é múltiplo de 4. Por exemplo, 2008 é bissexto, pois 08 é múltiplo de 4). Como o ano 1978 não é bissexto, logo $B = 19$.

3. Observando o mês do nascimento, obtenha o número associado a ele através da tabela da próxima figura.

Janeiro	0	Julho	6
Fevereiro	3	Agosto	2
Março	3	Setembro	5
Abril	6	Outubro	0
Maio	1	Novembro	3
Junho	4	Dezembro	5

Figura 37: Relaciona o mês com um número para realizar adivinhação do dia da semana.

Vamos chamar esse número de C, neste caso $C = 6$.

4. Chamando o dia do nascimento de x, calculamos $x - 1$, que chamaremos de D, logo $D = 29 - 1 = 28$.

5. Somaremos os quatro números que obtivemos nos procedimentos anteriores e dividimos esta soma por 7, observando o resto desta divisão, ou seja, $\frac{(A+B+C+D)}{7} = \frac{(78+19+6+28)}{7} = \frac{131}{7} = 18 + \frac{5}{7}$. Logo o resto da divisão é 5

6. Finalmente, procuramos esse resto na tabela abaixo, associando com o dia na semana.

Segunda	0
Terça	1
Quarta	2
Quinta	3
Sexta	4
Sábado	5
Domingo	6

Figura 38: Relaciona o número com o dia da semana para realizar adivinhação do dia da semana.

Como 5 está relacionado com o sábado, logo a pessoa nasceu no sábado.

Podemos perceber que esta mágica, utilizando os procedimentos acima, não será fácil de realizada pela maioria das pessoas, pois envolve várias operações com diversos números.

Vamos utilizar congruência entre números inteiros para facilitar as operações, e assim podendo ser realizada por cálculo mental. Utilizaremos a mesma informação descrita acima para refazer à mágica. A pessoa informa ao mágico que nasceu em 29 de abril de 1978.

Como ela nasceu no dia 29, segue que $29 - 1 = 28$ e

$$28 \equiv 0(mod\, 7);$$

como abril corresponde ao número 6 e

$$6 \equiv 6(mod\, 7);$$

de 1900 a 1978 se passarão 78 anos, e

$$78 \equiv 1(mod\, 7);$$

teve $[\frac{78}{4}] = 19$ anos bissextos, e

$$19 \equiv 5(mod\, 7).$$

Pela propriedade da congruência descrita acima podemos somar as congruências, logo

$$28 + 6 + 78 + 19 \equiv 0 + 6 + 1 + 5 \equiv 5(mod\, 7).$$

Portanto, o número procurado é o 5, que corresponde a sábado.

Podemos perceber que estes cálculos não serão tão difíceis como os anteriores, logo podem ser realizados mentalmente. Vamos descrever outro exemplo, fazendo o mesmo procedimento anterior, para determinar em que dia da semana foi lançada a bomba atômica na capital da província de Hiroshima, no Japão.

Em 6 de agosto de 1945, foi a primeira cidade do mundo arrasada pela bomba atômica de fissão denominada Little Boy, lançada pelo governo dos Estados Unidos, resultando em 250 000 mortos e feridos. Vamos determinar em que dia da semana isto aconteceu.

Como foi no dia 6, segue que $6 - 1 = 5$ e

$$5 \equiv 5(mod\, 7);$$

como foi em agosto e este mês corresponde ao número 2 da tabela e

$$2 \equiv 2(mod\, 7);$$

de 1900 a 1945 se passarão 45 anos e

$$45 \equiv 3(mod\, 7);$$

teve $[\frac{45}{4}] = 11$ anos bissextos e a data do evento não foi em um ano bissexto, temos

$$11 \equiv 4(mod\, 7).$$

Pela propriedade da congruência descrita acima podemos somar as congruências, logo

$$5 + 2 + 45 + 11 \equiv 5 + 2 + 3 + 4 \equiv 0(mod\, 7).$$

Portanto, o número procurado é o 0, que corresponde à segunda feira.

Vamos explicar porque a mágica funciona para datas de 1 de janeiro de 1900 a 31 de dezembro de 2099.

Sabemos que o ano bissexto são aquele que tem 366 dias, um dia a mais do que os outros anos de 365 dias, ocorrendo a cada quatro anos (exceto anos múltiplos de 100 que não são múltiplos de 400). 1900 foi o último ano que passou, que é multiplo de 4, mas não é bissexto, e o próximo séra em 2100. Quando formos analizar não presizamos considerar esta particularidade, pois o intervalo analizado não ocorrera esta exeção.

Como $365 \equiv 1(mod\ 7)$, isto significa se hoje é 14 de outubro de 2014 e segunda feira, como 2015 não é bissesto, logo 14 de outubro de 2015 será uma terça. Quando fazemos $365 \equiv 1(mod\, 7)$, a informação é a seguinte: em 365 dias tem 52 semanas e 1 dia, logo passarao 52 semanas mais 1 dia.

Se tivesemos todos os anos não bisssesto, a cada ano que se passava avansava-se um dia na semana em relação a uma mesma data do ano anterior, logo se passasse A anos avançaria A dias em relaçao aos dias da semana (neste caso A está representando os números de anos que se passaram de 1900 até o ano do evento). Como os dias na semana se alternam em 7 dias, portanto, podemos representar isto da seguinte forma: $A \equiv r_1(mod\, 7)$, onde r_1 é o resto da divisão de A por 7.

Do Jeito que fizemos estamos considerando todos os anos não bissextos, logo temos que acrescentá-los. Quando tiramos a parte inteira de $\frac{A}{4}$, estamos encontrando quantos anos bissextos existe no intervalo considerado. Se o ano da data do evento for bissexto e o evento for antes 29 de fevereiro, temos que fazer $[\frac{A}{4}] - 1$, pois o 29 de fevereiro ainda não passou, caso contrario considerar $\frac{A}{4}$. Logo temos a segunda congruência: $[\frac{A}{4}] \equiv r_1(mod\, 7)$ ou $[\frac{A}{4}] - 1 \equiv r_1(mod\, 7)$.

Com estas duas congruências conseguimos chegar em 1 de janeiro do ano do evento, agora temos que analisar mês a mês. Se a data tiver no mês de janeiro, esta análise é desnecessária, logo o número que relaciona o mês de janeiro é o 0. Como janeiro tem 31 dias é $31 \equiv 3(mod\, 7)$, logo um dia que cai numa segunda feira em janeiro, cai numa quinta feira em fevereiro, portanto, o número que relaciona o mês de fevereiro é 3. Como fevereiro, não bissexto, tem 28 dias e $28 + 3 \equiv 3(mod\ 7)$, logo o número que relaciona março é 3. Como março tem 31 dias e $31+3 \equiv 6(mod\ 7)$, logo o número que relaciona abril é 6. Como abril tem 30 dias e $30 + 6 \equiv 1(mod\ 7)$, logo o número que relaciona maio é 1. E assim sucessivamente montamos a tabela acima que relaciona um número com o mês do evento.

Agora basta analisarmos o dia. Temos que o primeiro dia do mês está relacionado com a congruência 0 módulo 7, logo o segundo dia é 1 modulo 7, consequentemente, um dia qualquer n é $n - 1 \equiv r_3(mod\ 7)$.

Organizando as quatro congruências possíveis, tememos duas fórmulas para realizar a mágica:

Ano que a data do evento não é bissexto ou se for não é antes de 29 de fevereiro	*Ano que a data do evento é bissextos e a data é antes de 29 de fevereiro*
$A + \left[\frac{A}{4}\right] + N + X - 1 \equiv R\ (mod\ 7)$	$A + \left[\frac{A}{4}\right] - 1 + N + X - 1 \equiv R\ (mod\ 7)$

Figura 39: Fórmulas para descobrir em que dia da semana a pessoa nasceu.

Onde A é a diferença do ano do evento e 1900; N é o numero do mês que encontramos na tabela 8; X é o dia do evento e R é o valor procurado para relacionar com o dia da semana na tabela 9. Lembrando que para facilitar o cálculo mental, desmembre as congruências acima em quatro parcelas, A, $[\frac{A}{4}]$, N, e $D-1$, encontre o resto da divisão de cada uma por 7, some novamente os restos encontrados e encontre o resto da soma dos restos por 7.

Vamos mostrar como encontrar mentalmente o dia da semana com outro exemplo. Uma pessoa nasceu em 13 de abril de 1942, logo $5 + 6 + 0 + 3 \equiv 0(mod\ 7)$, portanto, nasceu na segunda. O mágico fez $13 - 1 = 12$ e $12 \equiv 5(mod\ 7)$, abril é o número 6, $42 \equiv 0(mod\ 7)$, $[\frac{42}{4}] = 10 \equiv 3(mod\ 7)$, logo $5 + 6 + 0 + 3 \equiv 0(mod\ 7)$.

A parte mais trabalhosa é a divisão por 4, utilizar a parte inteira dessa divisão para verificar o resto da divisão por 7. Principalmente quando diferença do ano do evento e 1900 é maior que 50 anos. Vamos apenas comentar, não darei explicações fundamentadas sobre os fatos, para não atrapalhar o objetivo do nosso trabalho, tendo que entrar em mais detalhes e deixando-o muito teórico. Mas, essa parte pode ser substituída por: encontramos o múltiplo de 4 mais próximo, por falta, da diferença do ano do evento e 1900. Em seguida, a partir resultado encontrado, achamos o resto da divisão por 7 e multiplicamos por dois.

Vamos utilizar um novo exemplo para mostra esta facilidade. Consideramos uma data de 16 de março de 2009, logo fazemos $16 - 1 = 15$ e $15 \equiv 1(mod\ 7)$, março é o número 3, $109 \equiv 4(mod\ 7)$, como 108 é o múltiplo de 4 mais próximo de 109 por falta, segue que $108 \equiv 3(mod\ 7)$ e $2 \cdot 3 = 6$, logo $1 + 3 + 4 + 6 \equiv 0(mod\ 7)$. Portanto, é uma segunda feira. Só por curiosidade ou para quem tiver interesse sobre o assunto, isto é explicado porque o número 2 é inverso multiplicativo de 4 módulo 7.

Podemos também substituir a operação $16 - 1 = 15$ por 16 e alterar a tabela da figura 45. Trocando segunda por 1, terça por 2, quarta por 3, quinta por 4, sexta por 5, sábado por 6 e domingo por 0.

Este truque é um dos mais espetaculares que apresentamos aqui, praticando-o algumas vezes o mágico conseguirá impressionar qualquer plateia. Segundo Sá (p. 135, 2010)[19], em 22 de julho de 2006, ele assistia ao programa Caldeirão do Huck, da Rede Globo de televisão quando, numa certa parte do programa, apareceu um rapaz de São Paulo que foi apresentado como o brasileiro possuidor da melhor memória. Ele representaria o Brasil num campeonato mundial de memorização. Esse rapaz, além da proeza de uma memória bem treinada, mostrou um truque que surpreendeu a todos: ele era capaz de descobrir o dia da semana correspondente a uma data qualquer que as pessoas escolhessem. O programa, muito bem produzido, colocou no telão um software que, após a pessoa ter escolhido uma data qualquer, mostrava o calendário do mês e do ano escolhidos, destacando o dia mencionado pela pessoa. O rapaz, com uma venda colocada nos olhos, acertou todos.

Percebemos que este truque desenvolve várias habilidades necessárias para o aprendizado da Matemática básica e também chama atenção especial para parte da Matemática que envolve seus segredos. Quem sabe futuramente podemos fazer uma revisão nos currículos de Matemática, a fim de introduzir uma iniciação a Teoria de Números tanto no ensino fundamental e médio. Utilizaremos esta mágica em nosso plano de aula sobre divisão entre números inteiros.

5 Planos de aulas

Neste Capítulo apresentaremos 3 planos de aulas, os dois primeiros serão utilizados na aplicação deste trabalho. Serão planos de aula direcionados a multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números inteiros. Utilizaremos formas alternativas de abordagem desses conteúdos, a fim de melhorar o aprendizado nestas áreas. Estes planos de aulas serão destinados a alunos do 2º semestre do 2º segmento da modalidade EJA (Educação de Jovens e adultos), do Centro de Progressão Penitenciaria do Distrito Federal (CPP).

Todos aos planos de aula seguirão o roteiro.

1- Aplicaremos um questionário ao aluno no início de cada aula, a fim de verificar o seu conhecimento sobre o conteúdo referente ao plano de aula, a ser resolvido utilizando os métodos conhecido por eles.

2- Apresentaremos duas mágicas relacionadas ao assunto a ser ministrado no dia, que será revelada na última aula. A utilização destas mágicas em nossos planos de aula tem como objetivo despertar o interesse pelo assunto a ser ministrado, estimular e melhorar o cálculo mental das operações de soma, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números inteiros positivos.

3- Apresentaremos e resolveremos vários exemplos sobre os novos métodos de operações, comparando-os com o método tradicional.

4- Os alunos resolverão exercícios utilizando os novos métodos de operação.

5- Desvendaremos as mágicas utilizando as operações básicas da Matemática.

6- Realizaremos um jogo relacionado ao conteúdo. Estes jogos estão presentes em nossos planos de aula com intuito de abortar os conceitos da multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números inteiros de forma divertida e prazerosa, fazer estimativas, previsões e trabalhar o desenvolvimento de cálculo mental.

7- Finalmente aplicaremos um novo questionário, com os mesmos cálculos numéricos, mas com roteiros diferentes, para analisarmos a evolução de cada aluno.

5.1 Plano de aula sobre multiplicação de números Inteiros: Conhecer e utilizar os métodos de multiplicações chinesa e egípcia

Objetivo:

Construir e reforçar o significado da multiplicação de números inteiros propondo dois algoritmos diferentes do tradicional utilizados hoje em dia na maioria das escolas brasileiras.

Público Alvo:

Alunos do 2^o semestre do 2^o segmento da EJA do CPP-DF (Centro de Progressão Penitenciária do Distrito Federal).

Metodologia:

Aplicar o questionário 1.1, que se encontra em anexo no final desde plano de aula, ao aluno com enunciados de problemas cujas respostas são obtidas através da utilização da multiplicação de números inteiros, solicitado que resolvam os problemas com a estratégia que cada um conheça, a fim de verificar o seu conhecimento básico sobre o conteúdo. Duração: 30 minutos.

Realizar as seguintes mágicas: Descobrir a peça de dominó que a pessoa está pensando, e adivinhando a soma de 10 números, as quais estão descritas no Capítulo 4. A utilização destas duas mágicas em nosso plano de aula tem como objetivo despertar o interesse pela multiplicação, estimular e melhorar o cálculo mental das operações de soma e multiplicação de números inteiros positivos. Duração: 30 minutos.

Apresentar e resolver os exemplos 1, que se encontra em anexo no final desde plano de aula, de multiplicações de números inteiros utilizando as técnicas tradicional, chinesa e egípcia. Duração: 1 hora e 30 minutos.

Aplicar atividade 1, que se encontra em anexo no final desde plano de aula, para ser feita pelo aluno, utilizando o métodos de multiplicações chinesas e egípcio, com intervenção do professor posteriormente a tentativa do aluno. Duração: 1 hora.

Desvendar as mágicas utilizando as operações de soma, subtração e multiplicação de números inteiros. Duração: 30 minutos.

Realizar o jogo do Hex multiplicativo, descrito no Capítulo 4. Este jogo está presente em nosso plano de aula com intuito de abortar o conceito da multiplicação de números inteiros, fazer estimativas, previsões e trabalhar o desenvolvimento de cálculo mental. Duração: 1 hora.

Aplicar o questionário 1.2, que se encontra no final deste plano de aula. Este questionário tem os mesmos cálculos do questionário 1.1, mas com histórias diferentes, para que o aluno não perceba que as contas que serão realizadas são as mesmas utilizadas para resolver o questionário 1.1. Desta forma, teremos como investigar e analisar a evolução dos alunos. Duração: 30 minutos.

Duração total prevista: 5 horas 30 minutos.

Material Utilizado:
Questionário 1.1.
Questionário 1.2.
Atividade 1.
Jogo Hex multiplicativo.
Quadro branco.
Pincel para quadro branco.

Pré-requisitos:

Soma e subtração de números naturais.

Anexos:

Questionário 1.1

1- Clayton fez uma plantação de tomates no seu quintal. Ele plantou 6 fileiras de pés de tomates com 8 pés em cada fileira. Quantos pés de tomates ele plantou no seu quintal?

2- Um ônibus, de uma empresa da cidade de Brasília, lotado, transporta 43 passageiros. Quantos passageiros transportarão em 6 viagens, sabendo que em cada viagem levava a mesma quantidade de passageiros e sempre andava lotado?

3- Um carro faz uma viagem entre Brasília e São Paulo, percorrendo 12 quilômetros com 1 litro de gasolina. Quantos quilômetros percorrerá com 42 litros de gasolina?

4- Um funcionário da empresa dos Correios, entrega por dia 1260 cartas. Este mês ele trabalhou 23 dias. Quantas cartas ele entregou neste mês?

5- Em um programa de governo são necessários 3574 tijolos para construir uma casa. Quantos tijolos serão necessários para construir 230 casas?

Questionário 1.2

1- Claudner tem em sua biblioteca uma estante com 6 prateleira, contento em cada prateleira 8 livros. Quantos livros há nessa estante?

2- Em cada sala de aula de uma escola de Brasília tem 43 alunos. Quantos alunos terão em 6 salas de aula completamente cheia?

3- Uma atleta percorre 12 quilômetros em cada dia de treino. Quantos quilômetros o atleta percorrerá em 42 dias de treino?

4- Um funcionário de um cartório autentica 1260 documentos em cada dia de serviço. Este mês ele trabalhou 23 dias. Quantos documentos ele autenticou neste mês?

5- Em uma empresa multinacional, cada funcionário recebe em média 3574 reais por mês. Qual o gasto desta empresa com seus 230 funcionários?

Exemplos 1

As seguintes multiplicações serão resolvidas, pelo professor, no quadro branco, utilizando os métodos tradicional, chinês e egípcio, respectivamente.

Exemplo 1: $3 \cdot 5 =$

Exemplo 2: $7 \cdot 8 =$

Exemplo 3: $8 \cdot 13 =$

Exemplo 4: $28 \cdot 43 =$

Exemplo 5: $43 \cdot 63 =$

Exemplo 6: $25 \cdot 143 =$

Exemplo 7: $129 \cdot 152 =$

Exemplo 8: $272 \cdot 3510 =$

Atividade 1

As seguintes multiplicações serão resolvidas pelo aluno em seu caderno, utilizando os métodos de multiplicações chinesa e egípcia. Podendo fazer a opção pelo método que desejarem.

Exercício 1: $6 \cdot 7 =$

Exercício 2: $12 \cdot 8 =$

Exercício 3: $32 \cdot 65 =$

Exercício 4: $68 \cdot 214 =$

Exercício 5: $388 \cdot 528 =$

Exercício 8: $129 \cdot 2351 =$

5.2 Plano de aula sobre divisão de números inteiros: Conhecer e utilizar os métodos de divisão egípcia e quinária

Objetivo:

Construir e reforçar o significado da divisão de números inteiros propondo dois algoritmos diferentes do tradicional, utilizados hoje em dia na maioria das escolas brasileiras.

Público Alvo:

Alunos do 2^o semestre do 2^o segmento da EJA do CPP-DF.

Metodologia:

Aplicar o questionário 2.1, que se encontra em anexo no final desde plano de aula, ao aluno com enunciados de problemas cujas respostas são obtidas através da utilização da divisão de números inteiros, solicitado que resolvam os problemas com a estratégia que cada um conheça, a fim de verificar o seu conhecimento básico sobre o assunto. Duração: 35 minutos.

Realizar as seguintes mágicas: Adivinhar o país, o animal e a cor que a pessoa está pensando e adivinhar o dia da semana em que a pessoa nasceu, as quais estão descritas no Capítulo 4. A utilização destas duas mágicas em nosso plano de aula tem como objetivo despertar o interesse pela divisão, estimular e melhorar o cálculo mental das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros positivos. Duração: 40 minutos.

Apresentar e resolver exemplos 2, que se encontra em anexo no final desde plano de aula, de divisão de números inteiros, utilizando os métodos tradicionais, egípcio e quinário. Como no método quinário o aluno tem que realizar muitas multiplicações por 5, o professor apresentará uma técnica para realizá-la de forma rápida, apresentada na divisão quinária, que se encontra no Capítulo 3. Duração: 1 hora e 30 minutos.

Aplicar atividade 2, que se encontra em anexo no final desde plano de aula, para ser feita pelo aluno, utilizando o métodos de divisões egípcias e quinária, com intervenção do professor sempre que necessário. Duração: 1 hora.

Desvendar as mágicas utilizando as operações de soma, subtração e multiplicação e divisão de números inteiros. Duração: 40 minutos.

Realizar o jogo do Nim, segunda versão, descrito no Capítulo 4. Este jogo está em nosso plano de aula a fim de proporcionar o desenvolvimento da criatividade, raciocínio lógico, melhorar a concentração e atenção, auxiliar o desenvolvimento do pensamento, que é de grande importância para o aprendizado das operações básica da Matemática, como multiplicação e divisões de números inteiros. Duração: 1 hora.

Aplicar o questionário 2.2, que se encontra em anexo no final desde plano de aula. Este questionário tem os mesmos cálculos do questionário 2.1, mas com histórias diferentes, para que o aluno não perceba que as contas que serão realizadas são as mesmas utilizadas para resolver o questionário 2.1. Desta forma, teremos como investigar e analisar a evolução do aluno. Duração: 35 minutos.

Duração total prevista: 6 horas.

Material Utilizado:

Questionário 2.1.

Questionário 2.2.

Atividade 2.

Palitos para realizar o jogo de Nim.

Quadro branco.

Pincel para quadro branco.

Pré-requisitos:

Soma, subtração e multiplicação de números naturais.

Anexos:

Questionário 2.1

1- Quantas garrafas de 3 litros cada serão necessários para engarrafar 198 litros de leite?

2- Um professor em uma escola particular ganha R$ 32,00 por hora de trabalho. Quanto tempo deverá trabalhar para receber R$ 1536,00?

3- Um livro sobre história da Matemática tem 391 páginas. Desejo terminar a leitura desse livro em 23 dias, lendo o mesmo número de páginas todos os dias. Quantas páginas serão necessárias que eu leia por dia?

4- Um elevador suporta carregar 26 pessoas por viagem, sabendo que ele terá que levar 1279 pessoas. Quantas viagens, no mínimo, serão necessárias para transportar as pessoas?

5- Um feirante tem um total de 960 laranjas. Ele só pode formar sacos com 150 laranjas. Quantos sacos com 150 laranjas ele pode formar? E quantas sobrarão fora dos sacos?

Questionário 2.2

1- Uma pessoa percorre 3 km por dia, Quantos dias serão necessário para que possa percorrer 198 km?

2- Um pedreiro cobra R$ 32,00 para assentar um metro quadrado de cerâmica. Quantos metros quadrados de cerâmica ele deverá assentar para receber R$ 1536,00?

3- Um andarilho deseja percorrer 391 km entre duas cidades. Sabendo que ele quer cumprir esta trajetória em 23 dias, andando a mesma quantidade de Km por dia. Quantos km ele deverá percorrer por dia?

4- Uma pessoa coloca 26 pacotes de bolacha em cada caixa, sabendo que ela deverá empacotar 1279 pacotes. Quantas caixas, no mínimo, serão necessárias para colocar as bolachas?

5- Um comerciante tem um total de 960 batatas. Ele só pode montar pacotes com 150 batatas. Quantos pacotes com 150 tomates ele pode montar? E quantos sobrarão fora dos pacotes?

Exemplos 2

As seguintes divisões serão resolvidas no quadro branco, pelo professor, utilizando os métodos tradicional, egípcios e quinário, respectivamente.

Exemplo 1: $85 \div 5 =$

Exemplo 2: $144 \div 8 =$

Exemplo 3: $525 \div 21 =$

Exemplo 4: $96 \div 12 =$

Exemplo 5: $874 \div 145 =$

Exemplo 6: $3353 \div 25 =$

Exemplo 7: $4123 \div 156 =$

Exemplo 8: $2823 \div 5 =$

Atividade 2

As seguintes divisões serão resolvidas pelo aluno em seu caderno, utilizando os métodos de divisão egípcia e quinária. Podendo fazer a opção pelo método que desejarem.

Exercícios 1: $65 \div 5 =$

Exercícios 2: $133 \div 7 =$

Exercícios 3: $875 \div 25 =$

Exercícios 4: $1010 \div 112 =$

Exercícios 5: $51815 \div 1521 =$

5.3 Plano de aula sobre conceitos básicos de potenciação, raízes quadrada e cúbica exata de números naturais

Objetivo:

Construir e reforçar o significado da potenciação, raiz quadrada e raiz cúbica de números naturais, utilizando truques e jogos matemáticos.

Público Alvo:

Alunos do 2^o semestre do 2^o segmento da EJA do CPP-DF.

Metodologia:

Aplicar o questionário 3, que se encontra em anexo no final desde plano de aula, ao aluno com enunciados de problemas cujas respostas são obtidas através da utilizações de potências, raiz quadrada exata e raiz cúbica exata de números naturais, solicitado que resolvam os problemas com a estratégia que cada um conheça, a fim de verificar o seu conhecimento básico sobre o assunto. Duração: 30 minutos.

Realizar as seguintes mágicas: Raiz Cúbica Instantânea e Cartelas Binárias, as quais estão descritas no Capítulo 4. O truque da raiz cúbica instantânea consiste em extrair raízes cúbicas exatas de números naturais rapidamente, é uma forma de despertar interesse dos alunos pelas potências e radiciações. A mágica das cartelas binárias está presente em nosso plano de aula para que o aluno possa começar a familiarizar com outas bases na construção dos números inteiros, não somente a base decimal, a fim motivar a construção de um pensamento mais abstrato. Duração: 30 minutos.

Apresentar e resolver exemplos 3, que se encontra em anexo no final desde plano de aula, de potências, raiz quadrada exata e raiz cúbica exata de números naturais. Duração: 1 hora.

Aplicar atividade 3 para ser feita pelo aluno, com intervenção do professor sempre que necessário. Duração: 1 hora.

Realizar o jogo sabe ou não sabe das potências e radiciações, descrito no Capítulo 4. Este jogo foi criado por nós e está em nosso plano de aula a fim de reforçar os conceitos da potenciação e da radiciação de números inteiros. Duração: 1 hora.

Desvendar as mágicas utilizando as potenciação e radiciação de números naturais. Duração: 30 minutos.

Aplicar novamente o questionário 3, que foi aplicado no início da aula para analisar a evolução do aluno. Duração: 30 minutos.

Duração total prevista:

5 horas.

Material Utilizado:

Questionário 3.

Atividade 3.

Cartelas do jogo sabe ou não sabe das potências e radiciações.

Cronômetro.

Quadro Branco.

Pincel para quadro branco.

Pré-requisitos:

Soma, subtração, multiplicação e divisão de números Naturais.

Anexos:

Questionário 3

1- Em uma lanchonete existe 5 expositores com 5 bandejas cada um. Cada bandeja tem 5 pratos, cada um com 5 salgados. Quantos salgados estão expostos nesta lanchonete?

2- Na cidade de Brasília existe 7 políticos corruptos, cada corrupto tem 7 assessores, cada assessor ganha 7 mil por mês. Qual é o gasto somente com os assessores destes políticos?

3- Sabendo que em um terreno quadrado, se temos a sua área e desejarmos encontrar o comprimento do seu lado, basta retirarmos a raiz quadrada, portanto, qual é o lado de um terreno sabendo que ele tem $144m^2$?

4- Sabendo que em uma caixa de água cúbica, se temos o seu volume em litros e desejarmos encontrar o comprimento de sua aresta (lado) em metros, basta encontrarmos a raiz cúbica de seu volume, portanto, qual é o comprimento de uma aresta de uma caixa de água cúbica, sabendo que sua capacidade é de 729 litros?

5- Qual é a raiz quadrada de 225 e a raiz cúbica de 512?

Exemplos 3

As seguintes potências, raízes quadradas e raízes cúbicas serão resolvidas no quadro branco pelo professor.

Exemplo 1: $2^3 =$

Exemplo 2: $3^4 =$

Exemplo 3: $5^6 =$

Exemplo 4: $14^2 =$

Exemplo 5: $10^4 =$

Exemplo 6: $10^6 =$

Exemplo 7: $2^1 =$

Exemplo 8: $1^7 =$

Exemplo 9: $1^{10} =$

Exemplo 10: $0^4 =$

Exemplo 11: $0^9 =$

Exemplo 12: $2^0 =$

Exemplo 13: $7^0 =$

Exemplo 14: $1240^0 =$

Exemplo 15: $7^1 =$

Exemplo 16: $15^1 =$

Exemplo 17: $\sqrt{1} =$

Exemplo 18: $\sqrt{9} =$

Exemplo 19: $\sqrt{49} =$

Exemplo 20: $\sqrt{81} =$

Exemplo 21: $\sqrt{121} =$

Exemplo 22: $\sqrt{246} =$

Exemplo 23: $\sqrt[3]{27} =$

Exemplo 24: $\sqrt[3]{125} =$

Exemplo 25: $\sqrt[3]{1} =$

Exemplo 26: $\sqrt[3]{0} =$

Exemplo 27: $\sqrt[3]{216} =$

Atividade 3

As seguintes potências, raízes quadradas e raízes cúbicas serão resolvidas pelos alunos em seu caderno.

Exemplo 1: $2^5 =$

Exemplo 2: $3^3 =$

Exemplo 3: $5^4 =$

Exemplo 4: $10^5 =$

Exemplo 5: $0^4 =$

Exemplo 6: $8^3 =$

Exemplo 7: $1^{15} =$

Exemplo 8: $1^{13} =$

Exemplo 9: $\sqrt{16} =$

Exemplo 10: $\sqrt{64} =$

Exemplo 11: $\sqrt{196} =$

Exemplo 12: $\sqrt[3]{64} =$

Exemplo 13: $\sqrt[3]{343} =$

6 Coleta, análise e discussão dos resultados durante a investigação em sala de aula

Este Capítulo está dividido em três partes. Na primeira parte iremos mostrar o perfil dos alunos que foi realizado este trabalho, são alunos do Centro de Progressão Penitenciaria do Distrito Federal (CPP), da modalidade EJA (Educação de Jovens e adultos). O CPP é um presídio semiaberto, onde a maioria dos alunos trabalham fora durante o dia e voltam à noite para dormir no presídio. A escola funciona na parte superior de dois blocos dentro do presídio. Na segunda e terceira partes, respectivamente, iremos mostrar como foram realizados os planos de aulas sobre multiplicação e divisão entre números inteiros, analisando os resultados obtidos.

6.1 Perfil dos alunos do 2^o semestre do 2^o segmento do CPP - 2^o semestre de 2014

Foi aplicado um questionário social para os alunos com 13 questões, com o intuito de conhecer o público que realizaremos este trabalho. 14 alunos preencheram o questionário, com idades mínima de 20 anos e máxima de 56 anos, com média de 35,8 anos e desvio padrão de 11,7 anos. Vejamos a figura abaixo mostrando a faixa etária dos alunos.

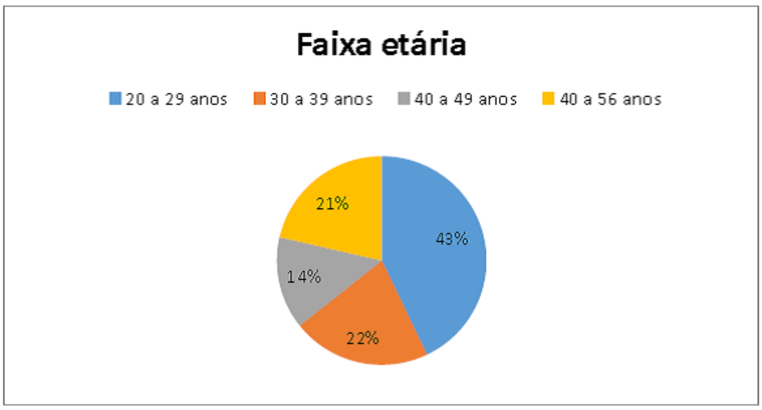


Figura 40: Faixa etária dos alunos.

Em relação ao estado civil, a maioria tem uma união estável, conforme a figura abaixo.

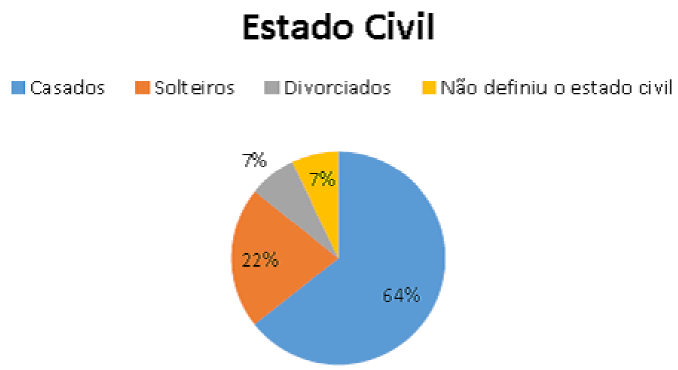


Figura 41: Estado civil dos alunos.

A maioria tem um ou dois filhos. Em média 2,1 filhos por aluno com desvio padrão de 1,7 filhos.

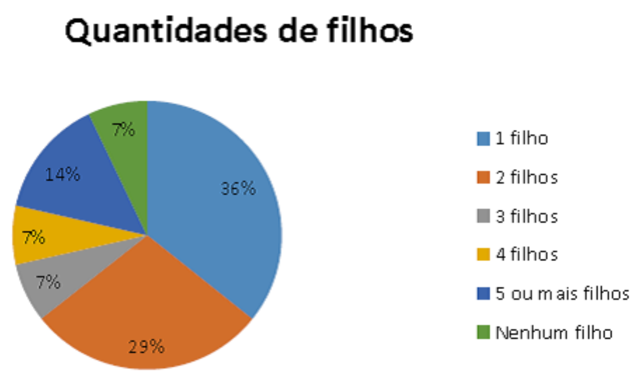


Figura 42: Quantidade de filhos dos alunos.

A respeito da interrupção dos estudos antes de entrarem no presídio, $92,9\%$ afirmam que em uma fase de sua vida tiveram que interromper seus estudos por algum motivo, apenas $7,1\%$ alegam que não tiveram que interromper seus estudos. $64,3\%$ dos entrevistados concluíram até 5^a série antes de entrar no presídio, reiniciando seus estudos neste semestre, ou seja, só conseguiram estudar depois que tiveram progressão para regime semiaberto; $14,3\%$ concluíram a 3^a série fora do presídio, iniciando seus estudos na 4^a série dentro do presídio; $14,3\%$ concluíram a 4^a série fora do presídio, iniciando seus estudos na 5^a série dentro do presídio e $7,1\%$ concluíram a 1^a série fora do presídio, iniciando seus estudos na 2^a série dentro do presídio.

A maioria dos alunos tiveram que interromper seus estudos na faixa de 15 e 17 anos, como podemos ver na figura abaixo.

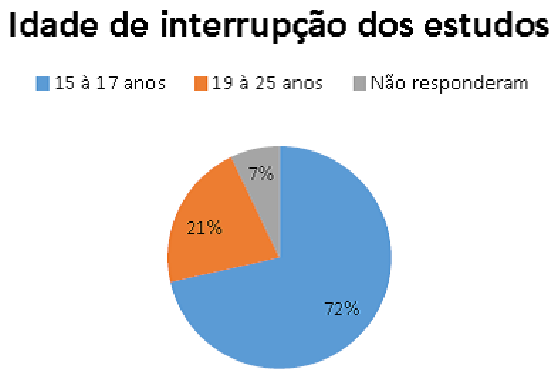


Figura 43: Idade em que os alunos interromperam seus estudos.

Todos os alunos afirmaram que gostam de estudar e $64,3\%$ trabalham durante o dia. $64,3\%$ desejam estudar até formar em um curso superior; $21,4\%$ desejam estudar até o ensino médio; $7,1\%$ querem fazer apenas o ensino fundamental e apenas $7,1\%$ querem fazer uma pós-graduação.

Dentre os principais estímulos para os internos estarem estudando no presídio, em primeiro lugar é para arranjar um emprego melhor e melhorar sua vida. Em segundo lugar é pela a remição pelo estudo. Em terceiro lugar é para aprender coisas novas, e em quarto lugar é para não ficar junto, neste período, com outros presos.

Analisando os alunos que estão estudando pela primeira vez dentro do presídio, existem alunos que estão fora de uma sala de aula há 39 anos. A média do tempo que estão fora da sala de aula é 15,7 anos com desvio padrão de 12,6 anos.

Foi perguntada aos alunos, em uma pergunta discursiva, a causa da interrupção dos seus estudos, 11 alunos responderam. Destes que responderam, vejamos na próxima figura os principais motivos para interrupção de seus estudos.

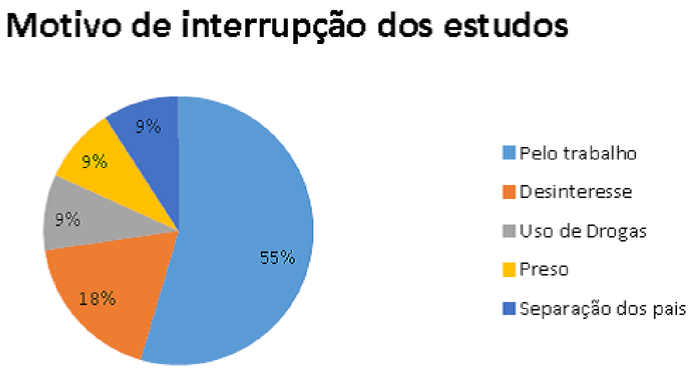


Figura 44: Motivo dos alunos pela interrupção dos estudos.

Percebemos que estes dois últimos motivos estão relacionados com o crime, ou seja, apenas $18,2\%$ alegam ter parado de estudar pelo envolvimento com o crime.

Foi deixado um espaço no questionário para que eles pudessem dizer algo sobre a escola dentro do presídio. 12 alunos escreveram neste espaço. Destes que responderam, $41,7\%$ disseram que a escola tem que melhorar, apontando onde está a principal causa, que é a falta de professores. Vejamos o que diz dois destes alunos.

Aluno 1: "Eu gostaria que tivesse mais professores, assim eu aproveitaria mais o tempo e aprenderia mais. Pois eu tenho 37 anos e gostaria de correr atrás do tempo perdido, pelo menos tentar".

Aluno 2: "Gostaria que tivesse todas as matérias, pois terminaria mais rápido e concluía o ensino fundamental. Que todos os dias tivessem aulas seria muito bom para os internos".

$58,3\%$ do alunos fizeram elogios à escola, veja o que disseram alguns alunos:

Aluno 3: "Acho um bom projeto ter uma escola no presídio, porque muitas pessoas que deixaram de estudar voltaram a ir para a escola, e muitas pessoas através dos estudos acabam saindo do crime e voltando à sociedade. Estudar é fundamental na vida das pessoas".

Aluno 4: "Foi uma boa ideia voltar à escola de novo. Gosto muito de estudar, minha família ficou muito feliz também, obrigado por tudo".

Aluno 5: "A escola no presídio é fundamental para abrir a mente do preso e também para a gente aprender coisas novas. Em minha opinião o tempo passa mais rápido".

Aluno 6: "É algo muito importante, pois nos ajuda a ter de volta a nossa autoestima e dignidade para enfrentar o preconceito de uma parcela da sociedade".

Percebemos pelo questionário social que a maioria desses alunos teve algum tipo de motivo especial para abandonarem a escola, principalmente tendo que optarem pelo trabalho à escola. São pessoas que ficaram muito tempo sem estudar, em média 15,7 anos. Devido a esse grande tempo fora de uma sala de aula, o retorno não é fácil, ou seja, temos que elaborar estratégias diferentes dos métodos tradicionais, pois estes não foram eficientes para eles em sua correta idade escolar, a fim de despertar o interesse do aluno pela escola e pela disciplina de Matemática, mostrando que a escola é lugar agradável. São alunos que tem em média 35,8 anos de idade, a maioria desses alunos trabalham durante o dia em serviços braçais devido ao seu nível escolaridade, chegando exalto em sala de aula, alguns costumam dormir durante as aulas. Eles não reservam nenhum tempo adicional para o estudo fora da sala de aula. A maioria deles são casados, com filhos e têm saída para ver a família de 15 em 15 dias, e dizem que quando vão em casa nem lembra que existem escola e presídio. Querem aproveitar todo o tempo com a família, logo temos que trabalhar todo o conteúdo em sala de aula, não aplicando nada para fazer fora da escola.

Percebemos também que poucos têm oportunidade de estudar dentro do sistema penitenciário, ou seja, em relação a esta turma, apenas $35,7\%$ tiveram contado com a escola antes desse semestre, e a maioria que teve contato anteriormente, foi recentemente.

Temos alguns pontos a favor da escola, todos os alunos afirmaram que gostam de estudar. A maioria quer estudar até fazer faculdade e aprender coisas novas. Portanto, o professor tem a possibilidade de conduzir seu trabalho sem reclamações dos alunos e permitir a maior participação deles nas aulas. Eles acreditam que através do estudo podem arranjar um emprego melhor e melhorar sua vida, mostrando que eles sabem que a atividade de estudar é muito importante para adquirirem um espaço no mercado de trabalho. Além de trabalharmos nossos conteúdos de forma atrativa, devemos também estimular nossos alunos nas suas perspectivas de vida, sempre apoiando, dando incentivos e mostrando que são capazes de alcançar seus objetivos positivos.

6.2 Aplicação e análise do plano de aula sobre multiplicação de números inteiros

No dia 10 de novembro de 2014, o professor chegou a sala de aula às 19 h 30 min, devido ao atraso de alguns alunos a aula se iniciou às 19 h 45 min, com 12 alunos, chegando 2 posteriormente. Devido ao final de semana, já que alguns alunos têm "saidão" (passar o final de semana com a família), a quantidade de alunos nos dias de segundas costuma ser menor do que nas quartas-feiras, alegando estar cansados do final semana.

A aula começou com o professor explicando aos alunos que no decorrer de três semanas, eles teriam aulas diferenciadas de Matemática das tradicionais que tiveram no decorrer de sua vida escolar, sobre conteúdos que eles já estudaram anteriormente, com o intuito de resgatar alguns conceitos básicos e habilidades que não foram bem solidificados, relacionados à multiplicação e divisão de números inteiros. Foi informado como seria a estratégia, de acordo com o primeiro plano de aula, descrito no Capítulo 5.

Por ser o primeiro encontro, foi aplicado o questionário social aos alunos para futura análise dos resultados. Posteriormente foi aplicado o questionário 1.1, descrito no Capítulo 5, onde seus problemas eram resolvidos aplicando conhecimento de multiplicação de números inteiros, informando-os que era um questionário de diagnóstico, que não iria valer nenhum ponto para a nota final e que eram para resolver utilizando qualquer estratégia que ele conhecesse, que não poderia consultar o colega, ou seja, era individual. Alguns tentaram se comunicar, com a intervenção do professor, cessaram a comunicação.

Após a aplicação do questionário 1.1, o professor explicou a mágica da pedra de dominó, que se encontra no Capítulo 4 adaptada de Torres (p. 113, 2013)[15], e realizou-a com um aluno, posteriormente fez com toda a turma, ou seja, pediu que cada um pensasse em uma pedra e efetuassem os comandos da mágica com os números da pedra. Em seguida perguntava, um por um, o resultado obtido e revelava a pedra pensada por ele. Os alunos ficaram impressionados com a mágica querendo que o professor revelasse-a neste momento, mas o professor explicou que só iria revela-la ao final do primeiro plano de aula. Pequena parte da sala teve um pouco de dificuldade de realizar os comandos da mágica, mas com a intervenção do professor, resolveu esta dificuldade. Alguns tentaram desvendar a mágica, mas sem sucesso.

O professor explicou os comandos da mágica da soma de 10 números, que se encontra no Capítulo 4 baseado de Sampaio (2006)[16], mostrando como seria construído a sequência destes números no quadro. Para deixarem os alunos bem a vontade na construção da sequência, o professor se ausentou da sala pedindo que os alunos da turma entrassem em consenso e escolhessem dois números de 1 até 9 e construíssem a sequência em conjunto. Após 4 minutos o professor retorna para sala de aula, olha para os números e adivinha a soma de todos os números da sequência. A fim de deixar os alunos mais impressionados e provar que a soma estava correta, o professor utiliza uma calculadora, mostrando que o mágico é um "gênio" da Matemática. Eles escolheram os números 9 e 8, nesta ordem, para iniciarem a sequência, com a intenção de dificultar a mágica para o professor.

Os alunos acharam que esta mágica foi mais impressionante do que a primeira e mais fácil à compreensão do comando. Alguns fizeram sequências diferentes em seus cadernos e mostraram os números ao professor que imediatamente dava o resultado da soma dos 10 números, que era verificado seu valor correto na calculadora. Todos construíram a sequência correta, logo o professor acertou todos os resultados. O professor falou um pouco sobre o segredo da mágica, que está relacionado com a sequência de Fibonacci, contando a história dos coelhos de Fibonacci e falando sobre sua presença na natureza, descrito por Ribeiro (p. 4, 2013)[9].

Em seguida o professor apresentou a multiplicação chinesa e egípcia fazendo comparação com o algoritmo tradicional. Foram realizados os quatro primeiros exemplos do plano de aula, fazendo as devidas considerações. Dizendo ao aluno que a chinesa é mais trabalhosa, mas é eficiente para uma pessoa que só sabe contar, pois ela conseguirá realizar multiplicações entre números inteiros. Na multiplicação egípcia basta que o aluno saiba dobrar um número inteiro. Já no algoritmo tradicional ele tem que saber a tabuada de cor. Sempre chamando sua atenção que o mais viável é o tradicional, pois seu algoritmo e menos extenso e mais ágil, mas se uma pessoa tem dificuldade em decorar uma tabuada, ela tem ferramentas para realizar multiplicação de números inteiros. A aula se encerrou às 21 h 50 min.

No dia 12 de novembro de 2014, foi realizado o segundo encontro. A aula começou às 20 h, devido ao atraso de alguns alunos. Esteve presente 13 alunos, sendo que 2 não participaram do primeiro encontro, logo faltaram 3 que vieram no primeiro encontro e não vieram no segundo. O professor resolveu novamente o exemplo 4 da aula anterior, utilizando a multiplicação chinesa e egípcia, a pedido dos alunos. Em seguida, o professor resolveu o exemplo 5 utilizando as duas formas de multiplicação.

Do exemplo 6 ao 10, do plano de aula, foram resolvidos utilizando somente o algoritmo da multiplicação egípcia, pois os exemplos tinham fatores de 3 ou mais algarismos, e quando isto acontece a multiplicação chinesa não é muito viável, pois apresenta muitas retas intersectando-se.

Como, para realizar a multiplicação egípcia, tinhamos que dobrar sucessivas vezes, eu mostrei diversas formas de dobrar um número: dobrando algarismo por algarismo; dobrando, de uma só vez, dois algarismos e dobrando todo número de uma vez só, sempre observando a maneira mais conveniente. Foram realizados mais quatros exemplos que não estavam no plano de aula, utilizando a multiplicação egípcia, a pedido dos alunos.

Terminado os exemplos, eu distribuí os exercícios, que constam no plano de aula, para serem feitos pelos alunos individualmente, deixei-os resolvendo no primeiro momento sem intervenção do professor. Para a surpresa do professor, 7 destes alunos resolveram os 6 exercícios em menos de vinte minutos, sendo que 3 alunos acertaram todos os 6 exercícios e 4 alunos acertaram 5 exercícios. Estes 7 alunos não precisaram da intervenção do professor. Dos 6 restantes que precisaram da intervenção, 1 acertou todas, 2 acertaram 4 e 3 acertaram 3. Dois alunos que tiveram a intervenção do professor alegaram estar muito cansados pelo dia exaustivo de trabalho que tiveram e por isso não conseguiam pensar e resolver corretamente os exercícios. Vejamos dois exemplos de exercícios resolvidos por dois alunos, nas próximas figuras. O primeiro acertou 6 e o segundo acertou 5 exercícios:

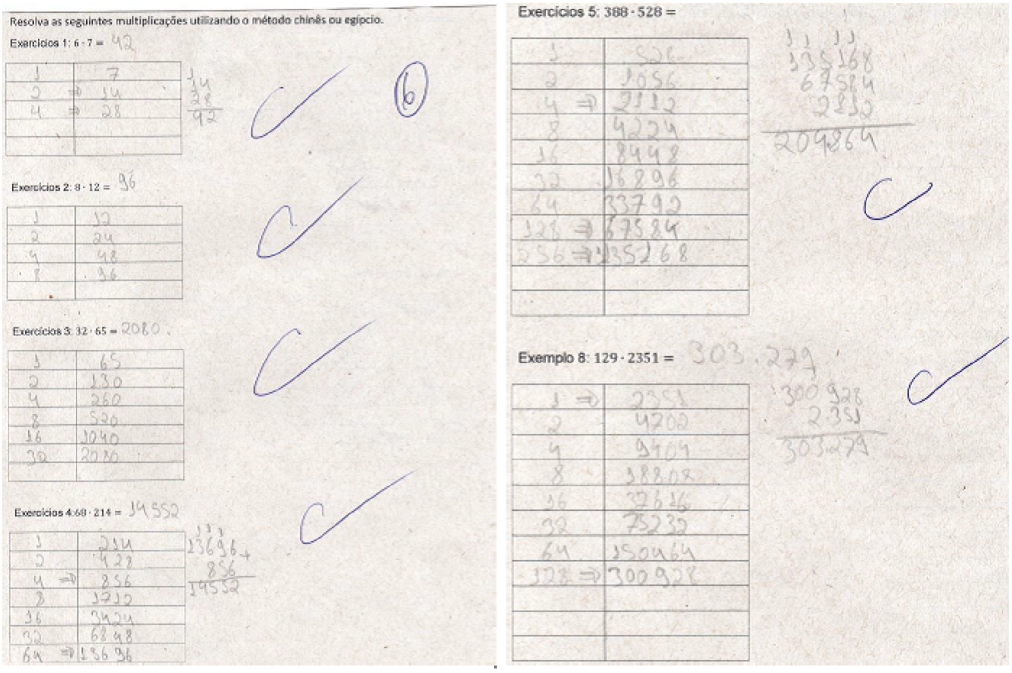


Figura 45: Exercícios resolvidos utilizando multiplicação egípcia, acertou 6.

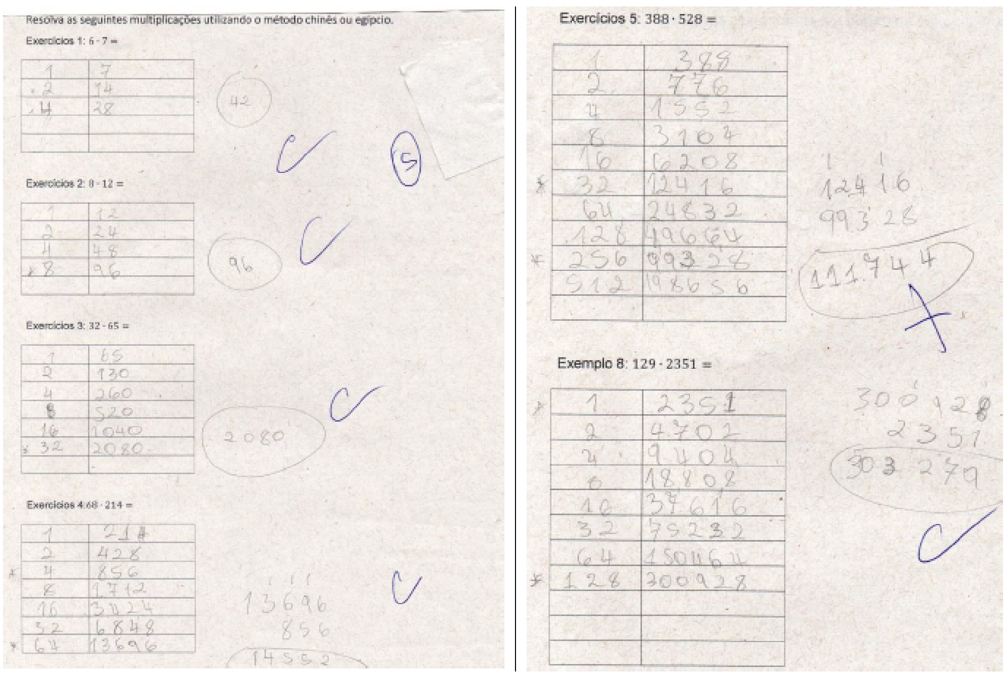


Figura 46: Exercícios resolvidos utilizando multiplicação egípcia, acertou 5.

Após todos os alunos entregarem os exercícios, a aula se encerrou às 21 h 55 min.

Acho que neste primeiro momento o resultado foi muito bom, pois foi a primeira vez que estes alunos tiveram contato com outros algoritmos para realizar multiplicações de números inteiros positivos. Grande parte da turma conseguiu resolver os 6 exercícios sem muita dificuldade. Os que erraram 1 exercícios, pode-se perceber que foi por falta de atenção. As dificuldades ocorreram por falta de pré-requisitos em relação a soma e multiplicação por 2 de números inteiros.

No dia 17 de novembro de 2014 foi realizado o terceiro e último encontro sobre multiplicação de números inteiros positivos. A aula teve início às 19 h 45 min, com 9 alunos, posteriormente mais 6, totalizando 15 alunos.

O professor inicia a aula desvendando as duas mágicas realizadas no primeiro encontro, mostrando os cálculos matemáticos que estão relacionados com elas. Vários alunos ficaram bastante entusiasmados, dizendo que iriam realizá-las com parentes e amigos. Na mágica da soma de 10 números de uma sequência, como a operação para desvendá-la era multiplicar o sétimo termo da sequência por 11, o professor ensinou um macete para fazê-la de forma instantânea, por exemplo: multiplicar $11 \cdot 63 = 693$, basta somar os dois algarismos e colocar o resultado entre eles, se a soma passar de 10, retira-se 10 e acrescenta 1 no algarismo da esquerda. Outro exemplo, $11 \cdot 85 =$"8 13 5", como 13 é maior que 10 retira-se 10 de 13, que é 3 e soma 1 ao 8, ou seja, $11 \cdot 85 =$ "8 13 5" $= 935$. As duas mágicas foram realizadas mais vezes a pedido dos alunos.

Posteriormente foi realizado o jogo Hex multiplicativo, que se encontra no Capítulo 4, retirado do portal Dia a Dia Educação [21]. Dividiu-se os alunos em quatro grupos, sendo 3 grupos de 4 e 1 grupo de 3 alunos, neste último grupo o jogo foi realizado com dois alunos "contra" um, e nos grupos de 4 alunos, foi dois "contra" dois. O professou explicou a regra aos alunos é o jogo começou. Alguns alunos tentaram realizar as multiplicações antes das jogadas, para facilitar posteriormente a escolha dos números. Como não tinha dito que isso não poderia, deixei que continuassem, mas mesmo assim não fizeram uma boa estratégia de jogo. Observamos que a melhor forma de jogar não é dupla contra dupla, mas um "contra" um, para não terem tempo de realizarem as multiplicações anteriormente, mas o jogo seguiu dentro da normalidade. Após 30 minutos apareceu um primeiro ganhador de um dos grupos, posteriormente saiu um segundo ganhador de outro grupo. O último ganhador surgiu apenas 1 hora e 5 minutos depois. Veja um exemplo do jogo, realizado pelos alunos, na próxima figura.

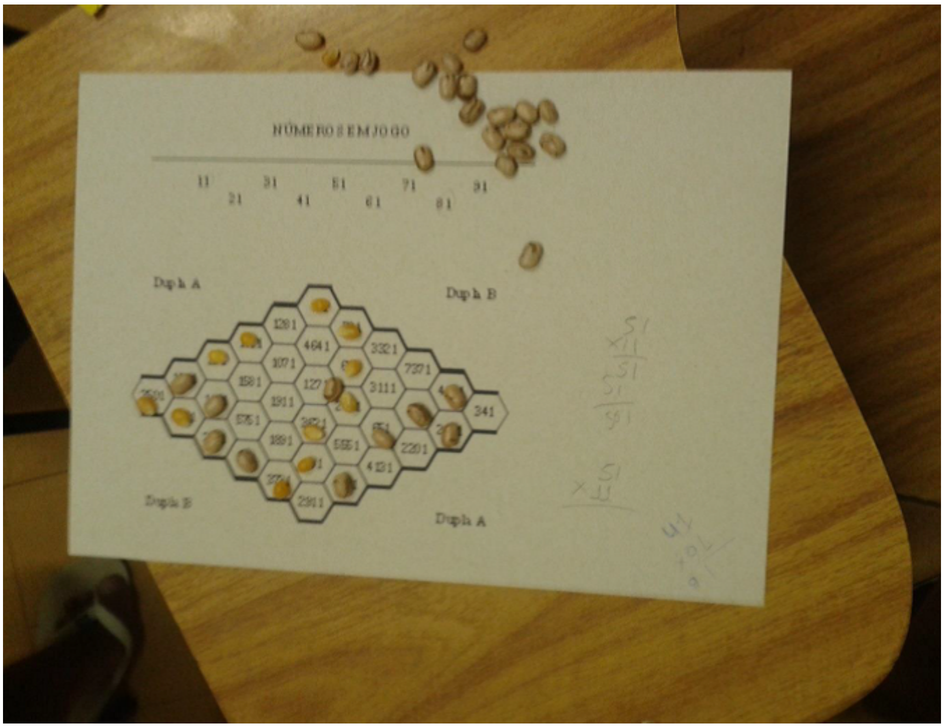


Figura 47: Jogo Hex multiplicativo, jogado pela turma, vencendo a dupla B.

Depois que encerrou o jogo, o professor explicou uma estratégia que eles poderiam ter usado para ganhar de forma rápida. No jogo Hex multiplicativo, os números que aparecem para serem escolhidos, pelos jogadores, tem dois algarismos, sendo o das unidades igual a 1 e os algarismos das dezenas de 1 até 9. Portanto, por exemplo, se precisamos descobrir quais são os dois números que multiplicados, desses presentes no jogo, que o resultado seja 5551, basta olhar para os algarismos da centena e da milhar, ou seja, olhar para o 55, e analisar quais os dois números distintos de um algarismo que multiplicamos resulta em 55 ou $55 - 1 = 54$. Logo observamos que só podem ser o 6 e 9, pois $6 \cdot 9 = 54$. Não temos outros dois números, de um algarismo cada um, cuja multiplicação seja 55 ou 54. Portanto, concluímos que $5551 = 61 \cdot 91$. Eles gostaram da estratégia e queriam jogar novamente, mas expliquei que não tínhamos mais tempo e deixei o tabuleiro com eles para que pudessem jogar em outro local.

Percebemos que ao utilizarmos este jogo em sala de aula, os alunos tiveram que realizarem várias multiplicações. Eles realizaram as operações de forma divertida e descontraída, não observamos desinteresse, por parte dos alunos, em realizá-las, ou seja, fizeram de uma forma prazerosa e sem imposição. Logo, devemos reservar um espaço em nossas aulas de Matemáticas para atividades lúdicas, fugindo algumas vezes das aulas tradicionais, pois também podemos aprendendo de forma divertida.

Foi aplicado o questionário 1.2, descrito no Capítulo 5, às 21 h 30 min, deixando os alunos insatisfeitos, pois a aula termina às 22 h sem tempo adicional, por determinação da direção do presídio. Foi explicado a eles que o questionário era individual e que poderiam utilizar qualquer estratégia vista em sala de aula. Veja dois questionários respondidos pelos alunos nas duas próximas figuras, o primeiro utilizando a multiplicação egípcia, descrita no Capítulo 2, e o segundo o método tradicional.

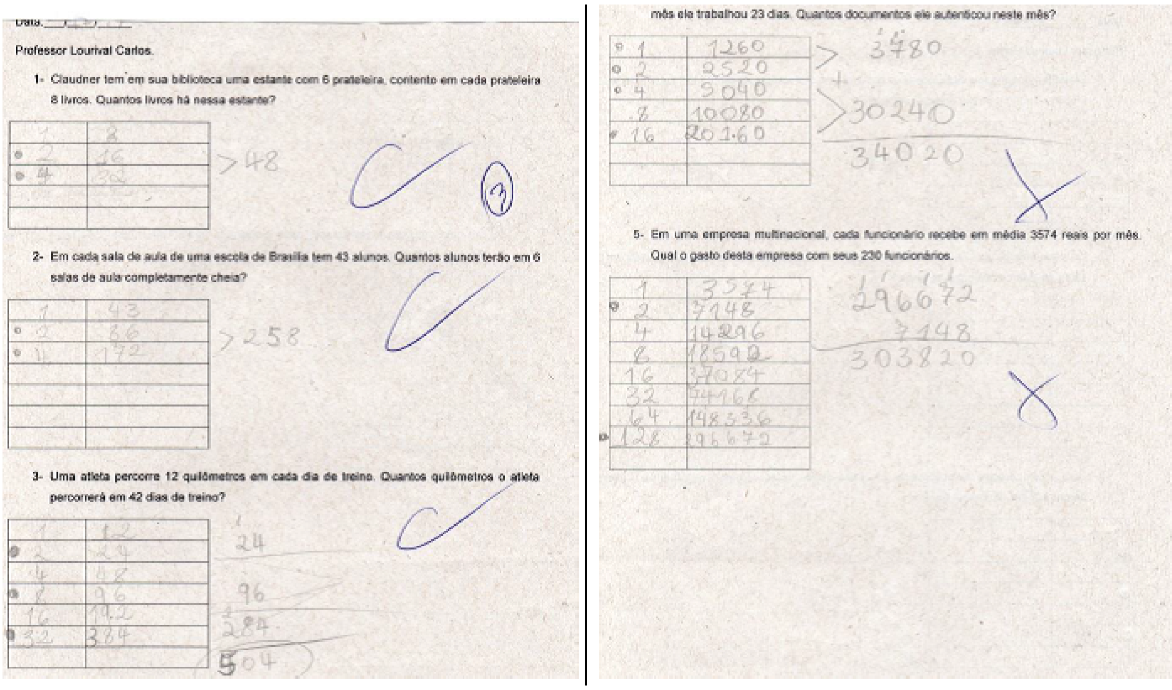
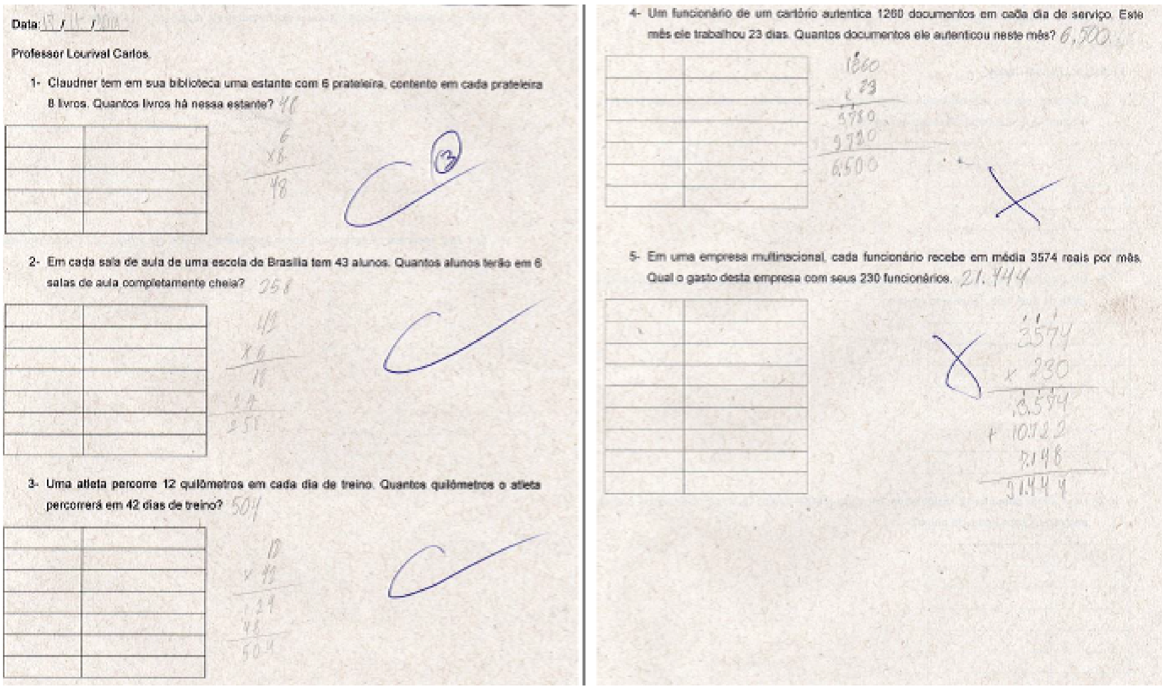


Figura 48: Questionário 1.2 resolvido pelo aluno utilizando multiplicação egípcia, acertou 3 exercícios.



Data:

Professor Lourival Carlos.

1- Claudner tem em sua biblioteca uma estante com 6 prateleira, contento em cada prateleira 8 livros. Quantos livros há nessa estante?

2- Em cada sala de aula de uma escola de Brasília tem 43 alunos. Quantos alunos terão em 6 salas de aula completamente cheia?

3- Uma atleta percorre 12 quilômetros em cada dia de treino. Quantos quilômetros o atleta percorrerá em 42 dias de treino?

4- Um funcionário de um cartório autentica 1260 documentos em cada dia de serviço. Este mês ele trabalhou 23 dias. Quantos documentos ele autenticou neste mês?

5- Em uma empresa multinacional, cada funcionário recebe em média 3574 reais por mês. Qual o gasto desta empresa com seus 230 funcionários.

Figura 49: Questionário 1.2 resolvido pelo aluno utilizando multiplicação tradicional, acertou 3 exercícios.

Dos 15 que responderam, 8 utilizaram o método tradicional e 7 utilizaram a multiplicação egípcia, lembrando que nem todos participaram dos 3 encontros. Embora o tempo não tenha sido suficiente para alguns responderem todos os exercícios, encerramos no horário previsto.

Analisando os dados obtidos no questionário 1.1, descrito no Capítulo 5, de acordo a próxima figura, a média do número de acertos foi de 2,4 questões por aluno; com desvio padrão de 0,7; valor mínimo de acertos 1 e máximo de 4.

Na próxima figura iremos colocar apenas as iniciais do nome do aluno, para evitar sua identificação e não comprometê-los, pois são alunos de um presídio.

	Aluno	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	Total
1^0	E. O. S.	1	1				2
2^0	R. M. G.	1					1
3^0	M. A. B.	1	1				2
4^0	G. P. S.	1	1	1			3
5^0	A. A. O.	1			1		2
6^0	R. V. N.	1	1	1	1		4
7^0	J. O. A. S. J.	1	1	1			3
8^0	L. F. N. L.	1		1		1	3
9^0	L. A. M.	1	1				2
10^0	E. J. S. R.	1	1				2
11^0	L. S. N.	1	1				2
12^0	J. C. A.		1	1			2
13^0	F. J. S.	1	1		1		3

Figura 50: Quantidades de questões corretas, de cada aluno, do questionário 1.1.

Analisando os dados do Questionário 1.2, conforme a próxima figura, a média do número de acertos foi de 3,0 questões por aluno; com desvio padrão de 1,2; valor mínimo de acertos 0 e máximo de 5.

	Aluno	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	Total
1^0	E. O. S	1	1				2
2^0	R. M. G	1	1	1	1		4
3^0	M. A. B	1	1		1		3
4^0	G. P. S.	1	1	1			3
5^0	A. A. O.	1	1	1		1	4
6^0	J. O. A. S. J	1					1
7^0	L. F. N. L.						0
8^0	E. J. S. R	1	1	1			3
9^0	J. C. A.	1	1	1	1		4
10^0	F. J. S.	1	1	1	1		4
11^0	A. A. S	1	1		1		3
12^0	L. L. A.	1	1	1			3
13^0	G. C. R.	1	1	1			3
14^0	D. N. S.	1		1	1		3
15^0	R. M. R.	1	1	1	1	1	5

Figura 51: Quantidades de questões corretas, de cada aluno, do questionário 1.2.

Observamos que a turma teve uma evolução do primeiro para o segundo questionário, no primeiro questionário teve uma média de questões certas de 2,4, enquanto no segundo foi de 3,0. Lembrando que nem todos os alunos participaram dos três encontros, como podemos observar a lista de presença do primeiro plano de aula na próxima figura.

	Aluno	1º	2º	3º	Quantidade de Presenças
1º	A. A. S.			x	1
2º	A. A. O.	x	x	x	3
3º	A. L. F.		x		1
4º	D. N. S.			x	1
5º	E. J. S. R.	x		x	2
6º	E. O. S.	x	x	x	3
7º	F. J. S.	x	x	x	3
8º	G. P. S.	x	x	x	3
9º	G. C. R.			x	1
10º	J. C. A.	x	x	x	3
11º	J. O. A. S. J.	x		x	2
12º	L. L. A.	x	x	x	3
13º	L. F. N. L.	x	x	x	3
14º	L. S. N.	x	x		2
15º	L. A. M.	x	x		2
16º	M. A. B.	x	x	x	3
17º	R. M. R.		x	x	2
18º	R. M. G.	x	x	x	3
19º	R. V. N.	x			1

Figura 52: Frequências dos alunos do primeiro plano de aula.

Tivemos 9 alunos que participaram dos três encontros, 5 que participaram de 2 encontros e 5 que participaram apenas de um encontro.

Consideramos o segundo encontro como um dos mais importantes, pois nele foi abortados exemplos de multiplicação tradicional, egípcia, e chinesa, descritas no Capítulo 2, pelo professor e posteriormente exercícios realizados pelos alunos. Analisando somente os alunos que participaram de pelo menos dois encontros e que participaram do segundo encontro, tem-se uma média de questões certas de 3,2, ou seja, melhorando a média anterior, que era de 3,0.

Observamos que um aluno da turma participou dos três encontros, utilizou a multiplicação egípcia para resolve os exercícios propostos e não acertou nenhuma questão do questionário 1.2, conforme a próxima figura.

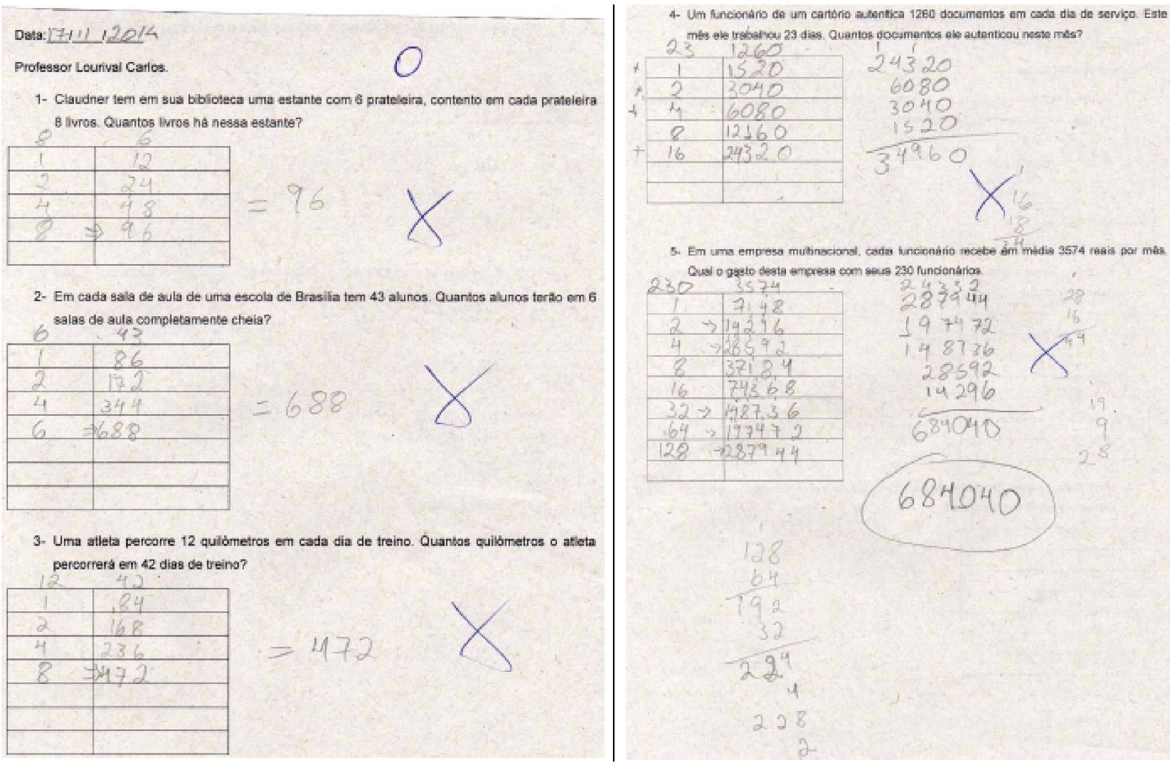


Figura 53: Questionário resolvido pelo aluno utilizando multiplicação egípcia, errou as 5 questões.

Percebemos que ele começou o algoritmo da multiplicação egípcia de forma equivocada, preenchendo a tabela com o valor do fator duplicado já na primeira casa, em vez de colocar somente na segunda, consequentemente errou todas as questões. Observamos que ele soube trabalhar com o dobro na maioria das questões, encontrou corretamente os números que deveriam ser somados nas questões 1, 4 e 5, somou corretamente na questão 4, mas por falta de atenção não teve sucesso. Temos convicção que com uma simples intervenção do professor, ele resolveria a maior parte das questões. Se desconsiderá-lo fora da análise, a média das questões certas dos alunos que participaram de pelo menos dois encontros e que participaram do segundo encontro sobe para 3,6.

Foi observado que o método multiplicação chinesa, descrita no Capítulo 2, é o mais fácil de realizar multiplicação de números inteiros com no máximo 2 algarismos, mas fica um pouco inviável e trabalhosa para números com muitos algarismos. O método egípcio foi bem aceito pelos alunos, sendo o mais agradável de ser trabalhado. Depois de certo tempo trabalhando com o método egípcio, o aluno desenvolve habilidade de duplicar números inteiros utilizando diversas estratégias, diminuindo o erro nas multiplicações.

Percebemos que o método egípcio tem que ser apresentando com um tempo maior, para sua melhor fixação. Observamos também, que quando o aluno sabe a tabuada da multiplicação, o mais viável e mais ágil continua sendo o algoritmo tradicional.

Os alunos gostaram das duas novas formas de multiplicar, em especial a multiplicação egípcia. Alguns alunos disseram que daqui para frente só iriam resolver multiplicações utilizando o método egípcio, devido à dificuldade em decorar a tabuada.

Percebemos que ao utilizarmos estes procedimentos adotados no plano de aula: mágicas, novos algoritmos para multiplicação de números inteiros e jogos, os alunos foram muito participativos, deixando de ficar dispersos, melhorando sua concentração, fazendo críticas e dizendo que realmente pensam, ou seja, a aula ficou bem diversificada, dinâmica e atrativa, mas ao mesmo tempo não se perdeu o foco do conhecimento e da aprendizagem. Acho que devemos sempre que possível em nossas aulas de Matemática sair do tradicional e mostrar coisas novas, divertidas e interessantes que envolva a Matemática para que o aluno desperte interesse por ela.

6.3 Aplicação e análise do plano de aula sobre divisão de números inteiros

No dia 24 de novembro de 2014, a aula se iniciou às 19 h 45 min, com 10 alunos, chegando 2 alunos posteriormente. Sabendo que os alunos atrasam e os dois primeiros procedimentos da plano de aula são independentes, foi invertida a ordem deles. Começamos com as mágicas e posteriormente a aplicação do questionário 2.1, descrito no Capítulo 5.

A aula começou com o professor realizando a mágica de Adivinhar o país, o animal e a cor que a pessoa está pensando, que se encontra no Capítulo 4. A mágica foi realizada com toda a turma em conjunto. Primeiramente o professor distribuiu o mapa do continente europeu constando os nomes dos países, para que os alunos recordem nomes de alguns países, facilitando a realização da mágica. Foi explicado com detalhes como eles deveriam proceder ao algoritmo dito pelo professor, já que a mágica seria realizada com todos e não poderia ter interrupções, ou seja, cada um pensava em um número de 2 até 9 e realizavam o procedimento dito pelo professor. Da turma de 10 alunos somente 1 não conseguiu acompanhar os cálculos matemáticos. O restante turma, pensou em Dinamarca, macaco e marrom, claro que com o auxílio do mapa distribuído pelo professor. Um dos alunos até brincou dizendo que não tinha pensado no macaco, mas sim na macaca.

Eles acharam a mágica muito interessante e queriam repeti-la, mas o professor não poderia dar mais detalhes e nem realizá-la novamente, pois então perderia toda graça. Só brinquei com eles dizendo que todos tinham um pensamento em sintonia e partimos para próxima mágica.

Foi realizada a mágica da adivinhação do dia da semana em que a pessoa nasceu. O professor distribuiu alguns calendários aos alunos dos anos de 2010 até 2015, a fim de mostrar que ele estava correto em acertar o dia da semana de um determinado evento. O professor pedia aos alunos para escolherem um dia de um determinado ano e dizerem ao professor, que pensava aproximadamente 10 segundos e dizia para a turma o dia da semana do evento. O professor acertou todos os dias da semana escolhidos pelos alunos. Eles ficaram bastante impressionados com esta mágica. O professor disse a eles que não era mágica, mas sim Matemática, e que a Matemática que estava por traz dessa mágica está relacionada com o resto da divisão entre números inteiros, e ela seria revelada no nosso último encontro.

A pessoa que consegue realizar este truque tem um calendário até o ano de 2099. Por experiência, vejo que a maioria dos alunos do sistema prisional não tem acesso a calendários, com o conhecimento deste truque, o calendário seria dispensável.

Terminado com as mágicas, foi aplicado o questionário 2.1, descrito no Capítulo 5, a fim de comparar a evolução do aluno após a realização do plano de aula. Foi determinado um tempo de 35 minutos para realização do mesmo, e deveria ser realizado individualmente sem consulta. Também foi dito a eles que não estava valendo nota, era um questionário de diagnóstico e poderiam utilizar qualquer estratégia de divisão entre números inteiros.

Depois que os alunos terminaram o questionário, foi dito a eles que iríamos mostrar duas novas formas de realizar divisão entre dois números inteiros positivos, além da forma tradicional que eles já trabalharam na escola. Sempre os alertando que o algoritmo menor e mais viável para quem tem o domínio da tabuada é o tradicional.

Foram realizado os 3 primeiros exemplos do plano de aula, descrito no capitulo 5, utilizando as formas de divisões tradicional, egípcia e quinária, descritas no Capítulo 3.

Percebi que os alunos já tinham certa habilidade na multiplicação egípcia, que favorecia a realização da divisão egípcia, e trabalhando com 3 processos simultâneos de divisão não seria muito viável. Portanto, paramos de realizar os exemplos utilizando o método quinário. Do exemplo 4 ao 8 foi realizado somente a divisão egípcia e tradicional.

Os dois alunos que chegaram atrasados pediram ao professor que realizasse as mágicas novamente. Os demais alunos foram dispensados e o professor realizou as mágicas somente com os dois alunos que chegaram atrasados. A aula terminou às 22 h.

Considero que, apesar de ser um tempo curto de mostrarmos novos algoritmos das operações básicas da Matemática, os alunos participam mais das aulas por serem formas interessantes e curiosas de abordar o assunto. Alguns alunos, apesar de estarem trabalhando com o algoritmo de divisão egípcia pela primeira vez, já disseram que ele é bem mais fácil que o tradicional.

No dia 26 de novembro ocorreu o segundo encontro, a aula se iniciou às 7 h 45 min com 9 alunos, chegando mais 1 posteriormente. Sabendo que ocorrem atrasos de alunos, foi invertida a ordem dos dois primeiros procedimentos do dia. Começamos com os jogos e depois os alunos iriam trabalhar com os exercícios.

Para dar início ao jogo do Nim segunda versão, descrito no Capítulo 4, o professor distribuiu pequenos palitos de madeira aos alunos e explicou a regra do jogo. O jogo será realizado um "contra" um, e cada jogador em sua vez, pode retirar de 1 até 5 palitos, quem retirar o último palito perderá o jogo.

Para exemplificar e mostrar aos alunos que existia uma estratégia matemática utilizando a operação de divisão entre números inteiros, o professor jogou com 4 alunos e ganhou todas as partidas. Posteriormente pediu a eles que formassem duplas e jogassem entre eles. Eles jogaram aleatoriamente sem descobrir a estratégia, ou seja, ganhava quem tinha mais sorte. Após algumas partidas, o professor revelou o segredo para sempre ganhar o jogo, dizendo o seguinte: Se a regra do jogo é que podemos retirar de 1 até 5 palitos, então, temos que olhar para os múltiplos de $5 + 1 = 6$, e sempre deixar para a vez do adversário jogar os múltiplos de 6 mais 1, ou seja, devemos retirar uma quantidade de palitos conveniente para deixar o jogo com, por exemplo: 31, 25, 19, 13, 7 palitos, para a jogada do adversário, ou seja, múltiplos de 6 mais 1. Dessa forma, quem usar utilizar os restos da divisão entre números inteiros de forma correta, ganhará o jogo.

Aproveitando o momento, o professor abordou a relação do resto da divisão de um número por 7 aplicado em nosso calendário, citando exemplos de várias situações. Por exemplo: se hoje é 26 de novembro, quarta feira, em que dia da semana será 26 de dezembro? Mostrando para eles, que para obter a resposta desta pergunta, como o mês de novembro é de 30 dias, basta olhar para o resto da divisão de 30 por 7, que é 2, logo 26 de dezembro será em uma sexta feira, pois 2 dias depois de quarta é sexta.

O professor pediu a eles que jogassem novamente, mas agora mudando a regra do jogo, podendo retirar de 1 até 3 palitos, ou seja, deveriam estar atentos aos múltiplos de 4 mais 1. Eles jogaram algumas partidas, bem descontraídos e risonhos. Alguns me chamaram para a revanche deixando os palitos preparados para ganhar do professor. O primeiro que jogou comigo, iniciou a partida com 17 palitos sobre a mesa e pediu que eu começasse o jogo, como ele utilizou a estratégia correta, ganhou do professor. O segundo também ganhou, montou o jogo com 21 palitos e pediu para que eu começasse o jogo, como ele também utilizou a estratégia correta, também me venceu. Veja na figura abaixo o jogo do Nim, jogado pelos alunos.

Figura 54: Exemplo do jogo de Nim, jogado por dois alunos da turma.

Eles acharam o jogo muito interessante e se divertiram bastante. O bom é que estão aprendendo divertindo, muitos deles não sabiam nem o que eram múltiplos de um número inteiro e que resto de divisão servia para alguma coisa. Podemos perceber que com a utilização desse jogo em nosso plano de aula foi de grande valia, pois, deixa nossas aulas mais descontraídas, divertidas e introduzem ou reforçam conceitos de múltiplos, restos e quocientes da divisão de números inteiros.

Encerrando o jogo o professor fez uma rápida revisão de operações de divisão utilizando o método egípcio e distribuiu os exercícios, que constam no plano de aula, para serem feitos pelos alunos individualmente, e deixou-os resolvendo no primeiro momento sem intervenção do professor. Desta vez quase não teve intervenções pelo professor, os alunos levaram cerca de 30 minutos para resolver os cinco exercícios e a aula se encerrou às 21 h 45 min.

Analisando os exercícios aplicados com 5 questões com uma nota máxima 5. Temos 4,2 de média de acertos com o desvio padrão de 0,6, com nota mínima de 3,5 e máxima 5. Podemos observar que eles já dominam melhor o algoritmo egípcio, pois já tinha trabalhado com ele na multiplicação. Nas questões que erraram, percebemos que é por falta de atenção. Veja na figura abaixo exercícios realizados por dois alunos.

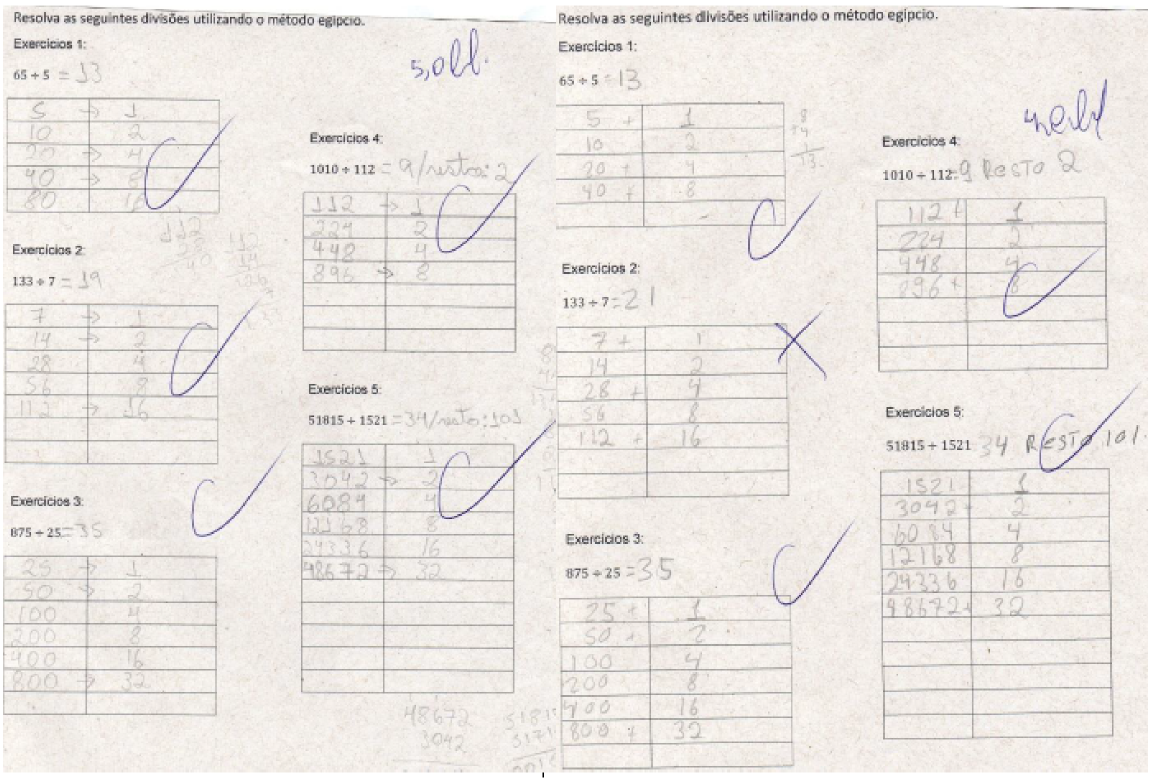


Figura 55: Exercício resolvido pelos alunos utilizando divisão egípcia, o primeiro acertou 5 e o segundo 4 exercícios.

No dia 03 de dezembro de 2014 tivemos o terceiro e último encontro sobre divisões de números inteiros. A aula se iniciou às 20h com 12 alunos, chegando 2 alunos posteriormente.

O professor começou desvendando a mágica de adivinhar o país, o animal e a cor em que a pessoa está pensando, mostrando que todos os múltiplos de 9 que possuem dois algarismos, a soma de seus algarismos sempre dá o resultado 9 e que o resultado 4 no final das operações era previsível, portanto, o professor já sabia qual país, animal e cor que a pessoa iria pensar. Fizemos a mágica mais algumas vezes para confirmar o fato. Aproveitamos a situação para revisar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 5 e 9.

Eles acharam o algoritmo da mágica fácil de manipular, pois as operações envolvidas são simples, logo irão conseguir realizá-las com outras pessoas, exercitando cálculos básicos da Matemática.

Em seguida foi desvendada a mágica de adivinhar o dia da semana de um determinado evento. Para melhor compreensão, o professor levou um exemplo em uma folha mostrando todos os detalhes dos cálculos que seriam necessários para realizar a mágica. Comecei explicando a notação de congruência entre números inteiros, pois considero sua assimilação fácil. Mostrei que $16 \equiv 2(mod\ 7)$ significa que 16 deixa resto 2 quando dividido por 7. Fizemos alguns exemplos de congruência módulo 7, já que ela seria necessária para realização da mágica.

O exemplo apresentado pelo professor para realização da mágica foi 16 de março de 2009. Ele foi realizado da seguinte forma: observe que 16 dividido por 7 deixa resto 2. Guarde o 2; março corresponde ao número 3, pela tabela distribuída pelo professor. Guarde o 3; de 1900 até 2009 passaram-se 109 anos e 109 dividido por 7 deixa resto 4. Guarde o 4; o múltiplo de 4 mais próximo, por falta de 109, é o 108, e 108 dividido por 7 deixa resto 3 e 3 vezes 2 é 6, guarde o 6. Agora basta somar os números guardados, $2 + 3 + 4 + 6 = 15$ e verificar o resto da divisão por 7, que é 1, portanto, o evento foi em uma segunda feira, conforme a tabela da seguinte figura.

Segunda	1
Terça	2
Quarta	3
Quinta	4
Sexta	5
Sábado	6
Domingo	0

Figura 56: Dias da semana para realizar a mágica de adivinhar o dia da semana de um evento.

No primeiro momento eles acharam a mágica muito complicada. O professou explicou a eles que ela não era "trivial" e precisaria de um pouco de prática para realizá-la. Eles ficaram interessados sobre o porquê que consideramos somente 109, porquê 3 corresponde ao mês de março. Expliquei todos os números presentes na mágica com todos os detalhes. Dizendo a eles, que para construir esta estratégia, partimos do ano de 1900, onde 1 de janeiro foi uma segunda feira e que a semana tem 7 dias, e por este motivo estávamos utilizando apenas o resto da divisão por 7. Ou seja, se hoje é 3 de dezembro, quarta feira, daqui a 31 dias vai ser sábado, pois quando dividimos 31 por 7, deixa resto 3, ou seja, basta contar 3 dias depois de quarta, em relação aos dias da semana, que será sábado. Explicando também que a tabela dos meses foi construída desta forma. A pedido dos alunos, construímos a tabela dos meses em conjunto.

Para deixar à mágica menos trabalhosa a fim de que a maioria dos alunos pudesse conseguir realizá-la, construímos com eles os números relacionados aos anos de 2013, 2014 e 2015. Vamos utilizar como exemplo o ano de 2013.

De 1900 até 2013 se passaram 113 anos e quando 113 é dividido por 7 deixa resto 1. Sempre mostrando que é fácil verificar estes restos, pois $70 + 35 = 105$ e como 70 é múltiplo de 7 e 35 também o é, logo 105 também é múltiplo de 7, consequentemente 112 também o é, pois $105 + 7 = 112$. Portanto, 113 deixa resto 1 quando dividido por 7.

O múltiplo de 4 mais próximo de 113 é 112, encontrando o resto da divisão de 112 por 7 e multiplicando por 2 encontramos 0. Logo o número que está relacionado ao ano de 2013 é $1 + 0 = 1$, consequentemente ao ano 2014 é o número 2 e ao ano de 2015 é 3. Tendo estes números relacionados à estes anos, a mágica fica fácil de ser realizada.

Realizamos a mágica com o dia de hoje, ou seja, 3 de dezembro de 2014. 3 deixa resto 3 quando dividido por 7; o número relacionado a dezembro é 5 e 2014 está relacionado ao número 2. Temos que $3+5+2=10$ e 10 deixa resto 3 quando dividido por 7, portanto, hoje é quarta feira conforme a tabela dos dias da semana na figura anterior.

Realizamos o procedimento para descobrir em que dia da semana será 7 de setembro de 2015, a fim de verificar se é um feriado conveniente no próximo ano, e constatamos que será numa segunda feira já que $7+5+3=15$ deixa resto 1 quando dividido por 7.

Os alunos gostaram muito dessa mágica e foram muitos participativos. Acho que ela é uma forma interessante e divertida para trabalharmos divisões entre números inteiros observando seus restos, também a fim de conceituar e fortalecer a definição de múltiplos e divisores de números inteiros.

Fizemos uma breve revisão de divisão entre números inteiros utilizando a divisão egípcia, resolvendo dois exemplos e posteriormente foi aplicado o questionário 2.2, descrito no Capítulo 5, aos alunos de forma individual, sem consulta ou intervenção do professor, cujos dados serão analisados posteriormente. A aula se encerrou às 21 h 45 min.

Percebemos uma evolução particular de três alunos, que tinham grandes dificuldades com cálculos básicos da Matemática. Tem um que diz que nunca tinha conseguido realizar operação de divisão e hoje consegue fazê-la utilizando o método egípcio. Outro diz que daqui pra frente só vai fazer através do método egípcio. Sempre alerto aos alunos que o egípcio é método adicional para quem tem dificuldade com a tabuada, e peço que busquem também a prática com o algoritmo tradicional. Também percebemos evolução em outro aluno: ele tinha dificuldades até para duplicar um número e hoje ele apresenta os exercícios de forma correta.

Construimos uma tabela com os resultados obtidos pelo questionário 2.1, descrito no Capítulo 5, veja a próxima figura. Como as questões 4 e 5 têm restos em suas divisões, consideramos 0,5 pontos para quem acertar resultado parcial e 1,0 ponto para o resultado total.

	Aluno	1º	2º	3º	4º	5º	Total
1º	A. A. O	1	0	0	0	0	1
2º	A. L. F.	1	0	1	0,5	0,5	3
3º	D. N. S.	0	0	0	0	0	0
4º	F. J. S.	0	1	0	0,5	0,5	2
5º	G. P. S.	1	0	0	0	0	1
6º	G. C. R.	1	0	1	0	1	3
7º	J. C. A.	1	0	1	0	1	3
8º	J. O. A. S. J.	1	1	1	0	0	3
9º	L. F. N. L.	0	0	0	0	1	1
10º	M. A. B.	1	0	0	1	0	2
11º	R. M. R.	1	1	1	1	1	5
12º	R. M. G.	1	0	1	0	0	2

Figura 57: Quantidades de questões corretas, de cada aluno, do questionário 2.1.

Analisando os dados da tabela acima, temos média de acertos de 2,2 com desvio padrão de 1,3, com nota mínima 0 pontos e máxima de 5 pontos. Podemos observar que a média de acertos está abaixo de 50% do total de pontos, ou seja, o algoritmo tradicional de divisão entre números inteiros é considerada muito mais difícil do que o da multiplicação, também podemos observar que 50% alunos acertaram no máximo 2 questões.

Em relação ao questionário 2.2, descrito no Capítulo 5, onde praticamente todos os alunos utilizaram o algoritmo da divisão egípcia para resolver as questões, apenas um utilizou o tradicional para resolver apenas 1 questão. Veja as questões resolvidas por dois alunos nas figuras seguintes.

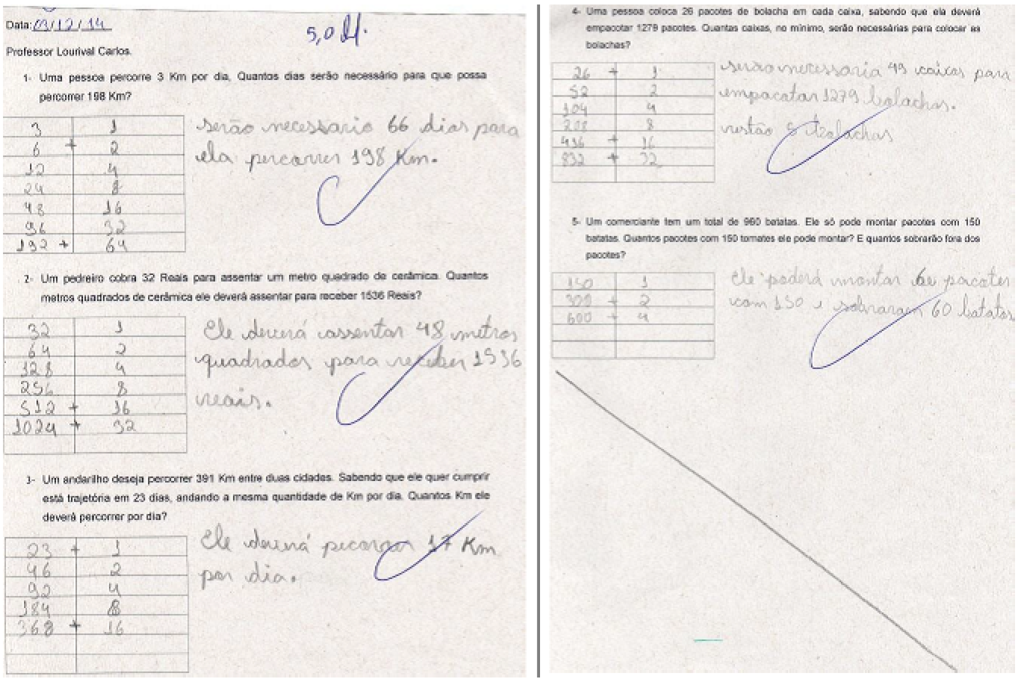


Figura 58: Questionário 2.2 resolvido utilizando divisão egípcia, acertou 5 exercícios.

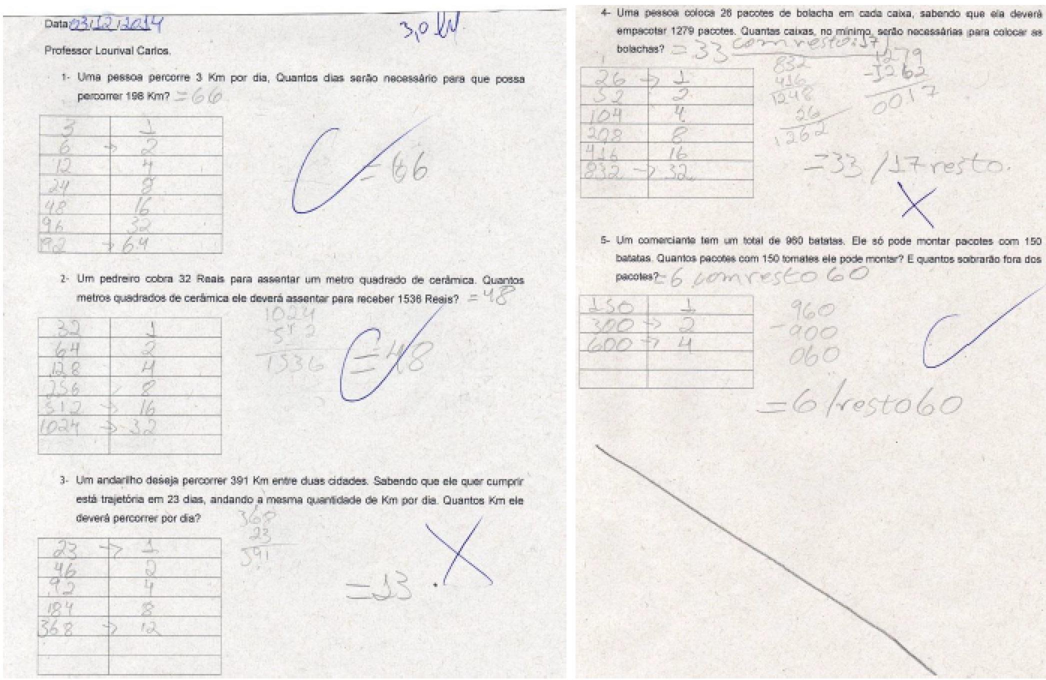


Figura 59: Questionário 2.2 resolvido utilizando divisão egípcia, acertou 3 exercícios.

A tabela abaixo mostra o resultado da aplicação do questionário 2.2, descrito no Capítulo 5. Lembrando que este questionário contém as mesmas operações utilizadas no questionário 2.1, mas em contextos diferentes, para analisarmos a evolução dos alunos utilizando o algoritmo de divisão egípcio. Um dos objetivos deste questionário é analisar se o algoritmo está sendo realizado de forma correta.

	Aluno	1º	2º	3º	4º	5º	Total
1º	A. A. O.	1	0	1	1	1	4
2º	A. L. F.	1	1	1	1	1	5
3º	E. O. S.	1	0	1	0	0	2
4º	F. J. S.	1	1	1	1	1	5
5º	G. P. S.	1	0	0	1	1	3
6º	G. C. R.	1	1	1	1	1	5
7º	J. C. A.	1	1	0	0	1	3
8º	J. O. A. S. J.	1	1	0	0	1	3
9º	L. F. N. L.	1	1	0	0	1	3
10º	L. S. N.	1	1	1	0	0	3
11º	M. A. B.	1	1	1	0	1	4
12º	R. M. R.	1	1	1	1	1	5
13º	R. M. G.	0	0	0	0	0	0

Figura 60: Quantidades de questões corretas, de cada aluno, do questionário 2.2.

Observando os dados do questionário 2.2, descrito no Capítulo 5, encontramos média de acertos de 3,46 com desvio padrão de 1,39, com nota mínima 0 pontos e máxima de 5 pontos.

Comparando os dois questionários, podemos observar que a nota média dos alunos passou de 2,17 para 3,46. Obtivemos um aumento 59% de acertos utilizando o algoritmo egípcio.

Se analisarmos somente os 9 alunos que participaram dos três encontros, conforme a próxima figura, a média de questões certas sobe para 4,11 com desvio padrão de 0,87, nota mínima de 3 e máxima de 5. Acredito que esta melhora é devido à familiaridade com o algoritmo egípcio, pois já tínhamos trabalhado com ele na multiplicação de números inteiros, mostrando que ele é de fácil manipulação e assimilação. Ele deveria ser utilizado em séries iniciais do ensino fundamental, principalmente em turmas da

EJA, como uma forma alternativa de divisão entre números inteiros positivos, pois encontramos muitos alunos em nossas salas de aula que têm muita dificuldade com a tabuada e com algoritmo tradicional de divisão.

	Aluno	1º	2º	3º	Presença
1º	A. A. O.	x	x	x	3
2º	A. L. F.	x	x	x	3
3º	D. N. S.	x			1
4º	E. O. S.			x	1
5º	F. J. S.	x	x	x	3
6º	G. P. S.	x		x	2
7º	G. C. R.	x	x	x	3
8º	J. C. A.	x	x	x	3
9º	J. O. A. S. J.	x	x	x	3
10º	L. F. N. L.	x	x	x	3
11º	L. S. N.			x	1
12º	M. A. B.	x	x	x	3
13º	R. M. R.	x	x	x	3
14º	R. V.		x		1
15º	R. M. G.	x		x	2

Figura 61: Frequências dos alunos do segundo plano de aula.

7 Considerações finais

Com esse trabalho, constatamos que ao utilizarmos, em nossas aulas de Matemática, atividades diversificas e interessantes, como formas alternativas para realizar multiplicações e divisões entre números inteiros, truques matemáticos e jogos pedagógicos, contribuímos com o processo de ensino e aprendizagem das operações de multiplicação e divisão de números inteiros positivos.

Os truques matemáticos, abordados no início de cada aula, serviram de forma eficiente para despertar o interesse dos alunos para o conteúdo que foi ministrado na aula. A partir dessa abordagem, percebemos que eles ficaram mais atentos e motivados a aprender.

As novas técnicas de multiplicações e divisões, que foram utilizadas nos planos de aulas, foram alternativas agradáveis para fugir dos algoritmos tradicionais, melhorando o aprendizado de muitos alunos que tinham dificuldade com estes algoritmos. Os que não tinham dificuldades aceitaram os novos algoritmos de forma curiosa e prazerosa, achando-os mais fáceis de manipular do que o método tradicional.

Os jogos pedagógicos, realizados ao final de cada aula, foram uma maneira eficiente de sistematização, importantes para o amadurecimento dos conceitos trabalhados anteriormente, pois a interação, motivação e o desafio contido no ato de jogar, levaram os alunos a trabalhar com as operações de multiplicações e divisões de números inteiros positivos de forma agradável, realizando-as fora do contexto de uma aula tradicional. Acreditamos que o ato de jogar pode ser um grande aliado para o processo de ensino e aprendizagem. Percebemos que estes alunos necessitam de movimentação e interação para motivar sua permanência na escola e na sala de aula.

Os planos de aula foram muito eficientes para o público alvo. Como as aulas são longas, cerca de 2 horas e 30 minutos de duração, quando realizadas pelo método tradicional, torna-as monótonas e desmotivadoras, não sendo eficientes, uma vez que deixa o público-alvo cansativo, desmotivado e sem interesse. Os planos de aula deste trabalho foram eficientes, pois mostramos que as aulas tornaram-se mais motivadoras e interessantes, deixando os alunos sempre atentos durante todo período.

Não percebemos pontos negativos relevantes em relação aos planos de aulas, mas poderíamos ter destinado um tempo maior para a manipulação dos novos algoritmos de multiplicação e divisão entre números inteiros, para que eles sejam bem solidificados. Apesar da aula ter ficado bem diversificada e dinâmica, tínhamos que agilizar as atividades para cumprir com o tempo previsto. Deixamos, portanto, a sugestão de aumento de tempo em cada atividade.

Observamos que as notas do questionário 2.2, onde trabalhamos a divisão egípcia, foi maior que no questionário 1.2, que trabalhamos com a multiplicação egípcia. Acreditamos que seja porque eles já tinham alguma familiaridade com o algoritmo da multiplicação egípcia, trabalhado anteriormente em sala de aula.

Com a aplicação de questionários antes e depois de cada plano de aula, verificamos uma evolução significativa em relação ao aprendizado dos alunos, principalmente nas operações de divisões entre números inteiros.

A taxa de evasão escolar de internos do regime semiaberto é grande. Os internos mudam do regime fechado para o semiaberto e matriculam na escola, mas depois de alguns dias, quando começam a trabalhar, alegam cansaço e abandonam a escola. Observamos que utilizando estas estratégias diminuiu consideravelmente a taxa de evasão escolar e melhorou a frequências dos alunos desta turma. Podemos observar pela figura 68 que tinha 15 alunos matriculados neste período, quando foi realizado o plano de aula sobre divisão entre números inteiros, e uma média 12 alunos por aulas. Comparando com outra turma de segundo segmento, que no mesmo período tinha 14 alunos matriculados, mas somente 6 eram frequentes.

Mostramos através desse trabalho que se abordarmos a Matemática utilizando uma diversidade de ferramentas pedagógicas divertidas, de forma apropriada e relacionada com o conteúdo ministrado, podemos deixar as aulas de Matemáticas eficientes e ao mesmo tempo agradáveis.

Este trabalho pode servir como subsídios para docentes da disciplina de Matemática, principalmente da educação de jovens e adultos, tenha oportunidade de repensar sua prática na sala de aula, elaborando planos de aulas mais eficientes, mas ao mesmo tempo agradáveis.

Os truques e jogos pedagógicos não irão substituir os métodos de ensino tradicionais, porém serão uma alternativa para reforçar os conceitos matemáticos ensinados ou até mesmo introduzir um conceito a ser ministrado.

Construímos algoritmos para realizar multiplicação e divisão entre números inteiros, descritos nos Capítulos 2 e 3, respectivamente, jogos e truques, descrito no Capítulo 4, mas não conseguimos introduzi-los nos planos de aulas que aplicamos. Eles estão no trabalho para consulta de profissionais da educação que desejam utilizá-los em seus planos de aulas, a fim de deixar suas aulas de Matemática agradáveis, divertidas e participativas.

Temos convicção que este trabalho pode ser consultado e utilizado por outros professores na elaboração de seus planos de aulas, com intuito de deixar suas aulas de Matemáticas mais interessantes, despertando interesse e a criatividades dos alunos.

Referências

[1] BOYER, C. B., *História da Matemática*, Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974.

[2] EVES, H., *Introdução à História da Matemática*, Tradução de Higyno H. Domingues, Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[3] ROLOFF, M. C. S. Et al, *Diferentes Povos e Suas Técnicas de Multiplicar*, XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013.

[4] FERNANDES, J. V. L., *Educação Matemática no Japão*, XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013.

[5] CASANOVA, L. A., *Cartilha de Atividades para Professores que Trabalham com a Educação de Jovens e Adultos*, 2011.

[6] HEFEZ, A., *Aritmética*, Coleção PROFMAT. SBM, 2013.

[7] PAZ, P., *Concepções de Professores e o Livro Didático: O Ensino de Divisão nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental*, 2013.

[8] BELMONT , D. F. S., *Teoria das Ondas de Elliott: Uma Aplicação ao Mercado de Ações da BM & FBOVESPA*, 2010.

[9] RIBEIRO, N. C., *Fundamentos da Matemática*, Universidade Estadual de Campinas, 2013.

[10] RAMALHO, T. S., *O Jogo das Cartelas Mágicas*, Projeto Teia do Saber - Programa de Formação Continuada de Professores, 2006.

[11] GRANDO, R. C., *O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula*, 2000.

[12] MOREIRA, C. G. Et al, *Teoria dos Números: Um Passeio com Primos e Outros Números Familiares Pelo Mundo Inteiro*, [S.l.]: IMPA, 2010. 450 pp. vol. 1.

[13] MOREIRA, C. G. Et al, *Tópicos de Teoria dos Números*, Coleção PROFMAT. SBM, 2012.

[14] ZENI, J. R. R., *Três Jogos para o Ensino e Aprendizagem de Números e Operações no Ensino Fundamental*, Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista, 2007.

[15] TORRES, J. D. S., *Jogos de Matemática e de Raciocínio Lógico*, Editora Vozes, 2013.

[16] SAMPAIO, J. C. Et al, *Jogos de Matemática e de Raciocínio Lógico*, III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[17] MENEZES, S. V., *Matemágica Binária*, Disponível em <http://colegiosantamarcelina.com.br/Theorema/binaria.pdf>. Acessado em 13 de outubro de 2014.

[18] LUNA, J. E. L., *O Algoritmo do Par Binário*, PROFMAT, UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS, 2013.

[19] SÁ, I. P., *A Magia da Matemática*, Editora Ciência Moderna, 2010.

[20] NOGUEIRA, J. P., *Explorando a Curiosidade e a Criatividade Como Motivadores do Interesse em Matemática*, PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, 2014.

[21] Jogo Hex Multiplicativo, *Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=57> Acessado em 07/10/2014.*